

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Legionellabacterie in warmwaterleidingen

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute for Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

STEFANIE MICHELLE VONK

Delft, Nederland
Maart 2014

Copyright ©2014 door Stefanie Michelle Vonk. Alle rechten
voorbehouden.

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

”Legionellabacterie in warmwaterleidingen”

STEFANIE MICHELLE VONK 4085299

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Prof.dr.ir. C. Vuik

Overige commissieleden

Dr. J.L.A. Dubbeldam

Dr.ir. F.J. Vermolen

Dr.ir. M. Keijzer

Samenvatting

In dit verslag is er gekeken naar de legionellabacterie en de ontwikkeling hiervan in een warmwaterleiding. Allereerst is het model opgesteld voor de temperatuur van het water in de leiding. Vervolgens is de ontwikkeling van de legionellabacterie gemodelleerd, met twee verschillende modellen: het standaard model en het begrensde model. Het watermodel en legionella-model worden gekoppeld. Zoals verwacht is de maximale concentratie bij het begrensde model een stuk lager, dan bij het standaard model. Dit is een realistischer model, omdat de populatie bacteriën niet onbegrensd kan groeien, maar voldoende voedingsstoffen nodig heeft. Om de realiteit zo dicht mogelijk te kunnen benaderen is er als laatste een diffusie-term aan het model toegevoegd. Door deze term wordt de maximale concentratie lager, omdat de bacterie zich meer zal verspreiden en dus niet een maximale concentratie op één plek zal bereiken. Wanneer wordt gekeken naar de totale concentratie in de leiding is het verschil tussen het model met en het model zonder de diffusie-term een stuk kleiner. Dit is te verklaren: de populatie bacteriën zal niet veel harder groeien, maar zich juist meer verspreiden over de leiding. Er is dus een concreet en duidelijk model ontwikkeld, wat voldoet aan de verwachtingen van de groei en verspreiding van de legionellabacterie. Om het verslag te concluderen is als laatste gekeken naar hoe de legionellabacterie zich ontwikkelt in een geïsoleerde en in een niet-geïsoleerde leiding, om een advies te kunnen uitbrengen betreft het wel of niet isoleren van de leiding.

Abstract

During the summer season, in hotels a lot of showers are used after months of no usage. When showers are not used, the water in the pipes stays still hot and the legionella pneumonia bacteria can grow. When the showers are used, the water evaporates and the bacteria disappear in the air, until someone breaths in these bacteria and gets sick. These bacteria are commonly known as the legionella bacteria. During this research, a model is developed to show and study the growth of the population of these bacteria. This model is then used to link it to a temperature model of the water in the pipes. The combined model that concluded this research, is a complete model of the temperature of the water in the pipes and the growth of the legionella bacteria in these pipes. As last topic the effect of isolation of the pipes on the growth of the population of the bacteria is studied. In the future, one can use this model to see the effects of different external factors, and minimize the growth of the bacteria.

Voorwoord

Dit document is het verslag van het bacheloreindproject. Dit bacheloreindproject vormt een onderdeel van de bacheloropleiding Technische Wiskunde aan de TU Delft.

In de afgelopen maanden is er hard gewerkt om het project, begeleid door Prof.dr.ir. C. Vuik, tot een compact, compleet en leesbaar verslag te maken. Hierbij is gebruik gemaakt van de aangeleverde informatie en enkele bronnen, zoals vermeld in het verslag zelf en in de bijlage. Ik dank mijn begeleider, meneer Vuik, voor het aanleveren van deze informatie en het begeleiden tijdens mijn hele project.

Ik wens u veel leesplezier en hoop dat dit verslag een stap in de goede richting is om het legionella probleem aan te kunnen pakken!

Stefanie Vonk,
Delft
16 februari 2014

Inhoudsopgave

Samenvatting	iii
Abstract	v
Voorwoord	vii
Lijst van tabellen	xi
Lijst van figuren	xiii
Lijst van symbolen	xv
1 Inleiding	1
2 Analyse van het probleem	3
2.1 Warmtetransport	3
2.2 Leiding	4
2.3 Temperatuur van de omgeving	5
3 Warmteoverdracht	7
4 Warmtestromen	9
5 Watertapleiding	11
5.1 Warmtebalans	11
5.1.1 Niet-geïsoleerde watertapleiding	11
5.1.2 Geïsoleerde watertapleiding	13
5.2 Numerieke oplossing	14
5.2.1 Niet-geïsoleerde watertapleiding	14
5.2.2 Geïsoleerde watertapleiding	17
6 Legionellabacterie	19
6.1 Standaard groeimodel	20
6.2 Groeimodel met begrenzing	21
7 Gekoppelde systeem	23
7.1 Standaard groeimodel	23
7.2 Groeimodel met begrenzing	26
7.3 Groeimodel met diffusie	29
7.3.1 Standaard groeimodel met diffusie	29
7.3.2 Begrensd groeimodel met diffusie	31

8 Conclusies	33
8.1 Wel of niet isoleren?	34
9 Aanbevelingen	37
A Symbolen- en waardenlijst	39
A.1 Geïntroduceerde symbolen	39
A.2 Waardenlijst	39
B Analytische oplossingsmethode	41
C Matlab programma's	43
C.1 Niet-geïsoleerde watertapleiding	43
C.2 Geïsoleerde watertapleiding	45
C.3 Standaard groeimodel	48
C.4 Begrensd groeimodel	48
C.5 Gekoppeld systeem met standaard groeimodel	50
C.6 Gekoppeld systeem met begrensd groeimodel	51
C.7 Gekoppelde systeem met diffusie en standaard groeimodel .	53
C.8 Gekoppelde systeem met diffusie en begrensd groeimodel . .	54
Bibliografie	57

Lijst van tabellen

7.1	De factoren van $k(T)$ voor de verschillende temperaturen .	23
7.2	De factoren van k_i voor de verschillende temperaturen . . .	29
8.1	De maximale concentratie na 1 en na 24 uur voor verschillende modellen	33
8.2	De maximale concentratie bij verschillende eindtijden	33
8.3	De verschillen tussen de begrensde modellen met of zonder diffusie	34
8.4	De maximale concentratie in kve/l na 1 en na 24 uur voor een geïsoleerde en niet-geïsoleerde leiding	35
8.5	De maximale concentratie bij verschillende eindtijden voor een niet-geïsoleerde leiding	36

Lijst van figuren

2.1	Warmwaterleiding	3
2.2	x-as	4
2.3	Leiding	5
3.1	Warmteoverdracht	7
3.2	Warmteoverdracht zonder isolatie	7
3.3	Oppervlakten en stralen van de leiding	8
5.1	Warmteoverdracht zonder isolatie	11
5.2	Temperatuurverloop van een niet geïsoleerde waterleiding .	15
5.3	De analytische en numerieke weergave van het temperatuurverloop van een niet geïsoleerde waterleiding	16
5.4	Temperatuurverloop van een geïsoleerde waterleiding	18
6.1	Standaard groeimodel van de legionellabacterie	20
6.2	Begrensde groeimodel van de legionellabacterie	21
7.1	Weergave van de verspreiding van de legionellabacterie in de leiding	24
7.2	Gekoppelde standaard groeimodel van de legionellabacterie	24
7.3	Gekoppelde begrensd groeimodel van de legionellabacterie .	26
7.4	Begrensd en standaard groeimodel van de legionellabacterie	27
7.5	Gekoppelde standaard en begrensde model van de legionellabacterie	28
7.6	(Standaard model) Concentratie van de legionellabacterie met diffusie	30
7.7	(Begrensd model) Concentratie van de legionellabacterie met diffusie	32
8.1	Geïsoleerde en niet-geïsoleerde waterleiding	34
8.2	Concentratie van de legionellabacterie	35

Lijst van symbolen

<i>Symbol</i>	<i>Betekenis</i>	<i>Eenheid</i>
T_b	Begintemperatuur	$^{\circ}C$
T_w	Temperatuur van het water	$^{\circ}C$
T_p	Temperatuur van de pijp (leidingwand)	$^{\circ}C$
T_i	Temperatuur van de isolatielaag	$^{\circ}C$
T_o	Temperatuur van de omgeving	$^{\circ}C$
T_g	Temperatuur in de geiser	$^{\circ}C$
r_{in}	Straal van de waterstroom	m
r_{uit}	Straal van de waterstroom plus de leiding	m
r_{iso}	Straal van de waterstroom, de leiding plus de isolatielaag	m
q_i	Warmtestroom i	<i>Joule</i>
k_p	Geleidingscoëfficiënt van de pijp	W/mK
k_w	Geleidingscoëfficiënt van water	W/mK
k_i	Geleidingscoëfficiënt van de isolate	W/mK
$u_{p \rightarrow o}$	Warmteoverdrachtcoëfficiënt van de pijp naar de omgeving	W/mK
$u_{w \rightarrow p}$	Warmteoverdrachtscoëfficiënt van het water naar de pijp	W/mK
$u_{p \rightarrow i}$	Warmteoverdrachtcoëfficiënt van de pijp naar de isolatielaag	W/mK
$u_{i \rightarrow o}$	Warmteoverdrachtcoëfficiënt van de isolatielaag naar de omgeving	W/mK
k	Bacterieconstante afhankelijk van de verdubbelingstijd	$1/s$
$c_0(x)$	Beginverdeling van de concentratie legionellabacteriën	kve/l
b	Daadkracht van de legionellabacterie	kve/l
$\mathbb{D}$	Diffusiecoëfficiënt	m^2/s

1. Inleiding

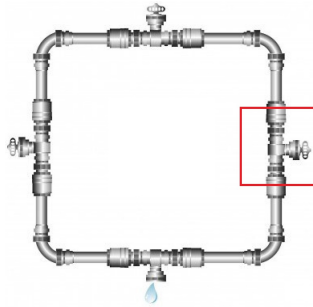
De besmetting van waterleidingen met legionella is een steeds groter wordend probleem. In Juli 2013 kwam het volgende nieuwsbericht naar buiten: *“Europa telt zeker 753 hotels, campings en appartementen die tussen 1990 en 2011 kampten met periodieke, soms jaarlijkse besmettingen met legionella, een bacterie die de dodelijke veteranenziekte kan veroorzaken.”* [1].

Vaak wordt gezegd dat het doorspoelen van de leidingen gedurende een paar minuten de legionellabacteriën zou kunnen verwijderen uit de leidingen. Om dit te kunnen onderzoeken, zal er eerst een model moeten worden opgesteld om de groei en verspreiding van de legionellabacterie te kunnen beschouwen. De centrale opdracht is om de legionellabacterie goed te modelleren en te koppelen aan de warmwaterleidingen.

Tijdens een eerder bachelorproject is het model voor een warmwaterleiding al voor een deel opgesteld [4]. De genoemde warmwaterleiding bestaat uit twee onderdelen: een circulatieleiding en een aftappunt. De legionella zal zich vooral vormen in het stuk leiding rond het aftappunt, omdat het water op dat stuk stil staat, wanneer de kraan gesloten is. De focus zal dan ook op de leiding rond het aftappunt liggen. Om de modellen te kunnen maken zullen er allereerst een aantal aannames en berekeningen moeten worden gedaan. De aannames die worden gemaakt en de analyse van het probleem zijn te vinden in hoofdstuk 2. In hoofdstukken 3 en 4 is er een korte uitleg over de warmteoverdracht en warmtestromen in het algemeen, om vervolgens het numerieke model op te stellen voor een warmwaterleiding in hoofdstuk 5. In hoofdstuk 6 zal er een numeriek model worden opgesteld voor de ontwikkeling van de legionellabacterie. En in hoofdstuk 7 zullen deze twee modellen worden gecombineerd tot een algemeen model voor legionellabacteriën in een warmwaterleiding. In de conclusie zal ten slotte het effect van isoleren worden bekeken op de groei van de legionellabacterie.

2. Analyse van het probleem

Het systeem waarvoor we ons model willen maken is als volgt opgebouwd: we hebben een warmwaterleiding met op verschillende punten aftappunten, zoals aangegeven in figuur 2.1. In dit verslag wordt gekeken naar de aftappunten en de ontwikkeling van de legionellabacterie hierin.



Figuur 2.1: De warmwaterleiding met verschillende aftappunten

Bij het opmaken van het model wordt er gebruik gemaakt van wiskundige modellen. Hierbij worden de hierna genoemde aannames gedaan, om de modellen te vereenvoudigen en berekeningen met de modellen mogelijk te maken.

2.1 Warmtetransport

In het algemeen geldt dat warmtetransport op verschillende manieren mogelijk is: door warmteconvectie, warmtestraling en warmteconductie. In het model wordt aangenomen dat de warmtestraling verwaarloosbaar klein is, ten opzichte van warmteconductie en warmteconvectie.

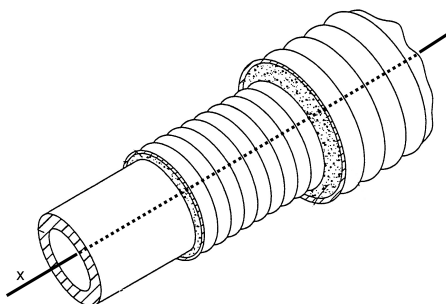
Daarnaast geldt dat wanneer het watertappunt gesloten is, we te maken hebben met stilstaand water. Waar we warmteconvectie in de stroomrichting hebben als het water stroomt, hebben we warmteconductie als het water stil staat. Ook hebben we warmteconductie langs de leidingwand en de isolatielaag, en warmteoverdracht aan de wand in de dwarsrichting. De berekening van deze verschillende warmtestromen is te vinden in hoofdstukken 3 en 4.

Er wordt aangenomen dat het water al enige tijd stilstaat, waardoor de temperatuur niet meer verandert als functie van de tijd en we dus te maken hebben met een *stationair* probleem.

2.2 Leiding

Naast de aannames over de warmtestromen, zijn er ook aannames gedaan over de leidingen zelf. Zo veronderstellen we dat de watertap- en circulatieleidingen van koper zijn. Daarnaast geldt dat de leidingwand en het isolatiemateriaal eromheen cirkelvormige dwarsdoorsneden hebben.

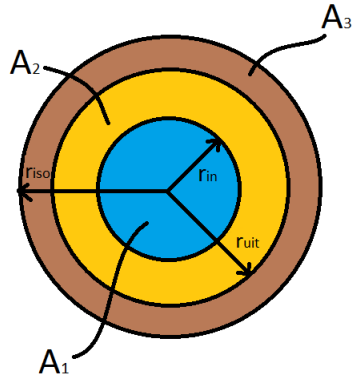
We nemen de x -as door het midden van de dwarsdoorsnede van de leiding met de oorsprong daar waar de warmtapwaterleiding verbonden is met de circulatieleiding. In figuur 2.2 is te zien hoe de x -as gekozen wordt. De temperatuur van het water in een bepaald punt hangt af van x , de straal r tot de x -as en de tijd t .



Figuur 2.2: De plaatsing van de x -as van de leiding

Uit het onderzoek van [4] blijken dat een aantal dingen kunnen worden aangenomen: in de circulatieleiding en dus ook in het aftappunt hebben we een turbulente stroming hebben. Hierdoor kunnen we aannemen dat de temperatuur van het water T_w onafhankelijk is van de afstand r_{in} tot de x -as. De straal r_{in} zal dan ook niet verder worden beschouwd in de modellen.

Als we de leidingwand en de isolatielaag bekijken, kunnen we hetzelfde aannemen. Immers geldt dat de leidingwand en de isolatielaag geen grote dikte hebben. Dit zorgt ervoor dat we te maken hebben met een *één dimensionaal* probleem. De temperatuur T_w is dus onafhankelijk van de straal r .



Figuur 2.3: Een doorsnede van een leiding, waarin de stralen zijn aangegeven

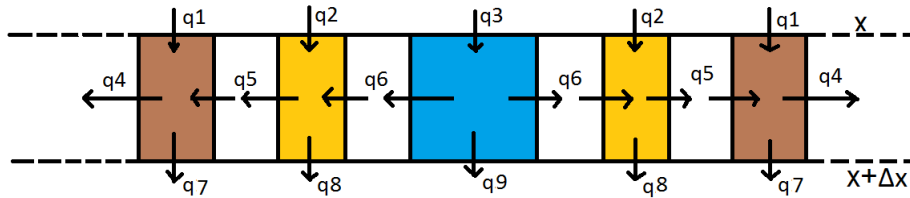
2.3 Temperatuur van de omgeving

Als laatste aanname wordt gedaan, dat de temperatuur van de omgeving T_o overall constant is. Er geldt dus dat op $x = 0$, $x = L$ en alle tussengelegen punten de temperatuur van de omgeving gelijk is.

Kort samengevat hebben we dus te maken met een *één dimensionaal* en *stationair* probleem, waarbij er enkel warmteoverdracht plaats vindt door middel van warmteconductie.

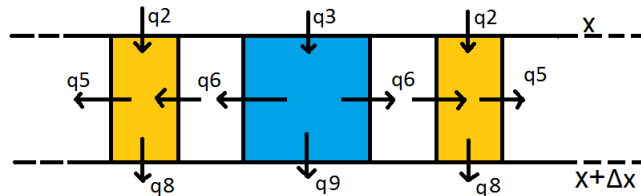
3. Warmteoverdracht

De totale warmteoverdracht in een stuk leiding, tussen x en $x + \Delta x$, waarbij Δx een zeer kleine waarde is, is gegeven in figuur 3.1. Hierbij gaat het om een warmwaterleiding met isolatie, waarbij de termen q_1, q_2, q_3, q_7, q_8 en q_9 de warmtestromen als gevolg van warmteconductie zijn en q_4, q_5 en q_6 als gevolg van warmteoverdracht door de verschillende lagen. De waterlaag, leidingwand en isolatielaag zijn respectievelijk te herkennen aan de blauw, koperen en bruine kleur.



Figuur 3.1: Warmteoverdracht in een geïsoleerde leiding van lengte Δx

In het geval van een niet-geïsoleerde leiding hebben we geen warmteoverdracht in de isolatie en tussen de leiding en de isolatie, zoals te zien in de onderstaande figuur.



Figuur 3.2: Warmteoverdracht in een niet-geïsoleerde leiding van lengte Δx

De warmteoverdracht, zoals gegeven in figuur 3.1, vindt plaats door verschillende oppervlakten, welke zijn gegeven in figuur 3.3a. Deze oppervlakten kunnen worden berekend met de stralen, zoals aangegeven in figuur 3.3b. Met behulp van onderstaande oppervlakten kunnen vervolgens de warmtestromen worden berekend.

$$A_1 = \pi r_{in}^2 \quad (3.1)$$

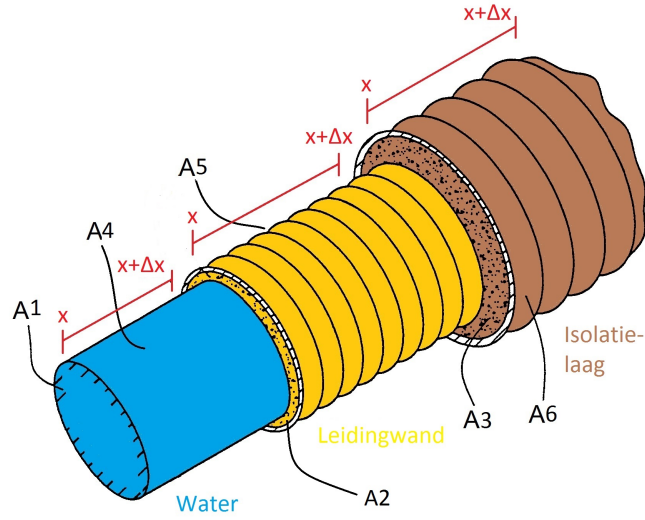
$$A_2 = \pi(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \quad (3.2)$$

$$A_3 = \pi(r_{iso}^2 - r_{uit}^2) \quad (3.3)$$

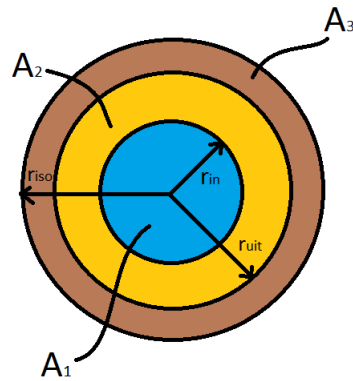
$$A_4 = 2\pi r_{in} \Delta x \quad (3.4)$$

$$A_5 = 2\pi r_{uit} \Delta x \quad (3.5)$$

$$A_6 = 2\pi r_{iso} \Delta x \quad (3.6)$$



(a) Oppervlakten



(b) Stralen

Figuur 3.3: Oppervlakte-aanduidingen en doorsnede van een geïsoleerde leiding

4. Warmtestromen

De warmteconductie- en warmteconvectie worden met behulp van natuurkundige wetten berekend. Volgens de wet van Fourier [5] geldt voor de warmtegeleidingsstroom, langs de leidingwand en de isolatielaag, per tijdseenheid:

$$q = -kA \frac{dT}{dx}, \quad (4.1)$$

waarbij k een geleidingscoëfficiënt is, i.e. een materiaalconstante die aangeeft hoe goed het materiaal warmte geleidt.

Voor de convectieve warmtestromen per tijdseenheid wordt de algemene formule gebruikt:

$$q = C\dot{m}T, \quad (4.2)$$

waarbij C de soortelijke warmte is, i.e. de hoeveelheid warmte die nodig is om een kilogram van een stof een graad Celsius ($^{\circ}C$) of een Kelvin (K) in temperatuur te verhogen.

Voor de warmteoverdracht door de verschillende lagen wordt de afkoelingswet van Newton gebruikt:

$$q = uA\Delta T, \quad (4.3)$$

waarbij u de warmteoverdrachtscoëfficiënt is, een materiaalconstante die aangeeft hoe goed het materiaal warmte geleidt. Meer gedetailleerde informatie over de genoemde coëfficiënten is te vinden in het eerder genoemde bachelorproject [4].

Nu de verschillende warmtestromen kunnen worden berekend, kan de warmtebalans voor een stukje leiding van lengte Δx worden opgesteld. Dit gebeurt met behulp van formules (4.1), (4.2) en (4.3) én figuren 3.1, 3.2 en 3.3.

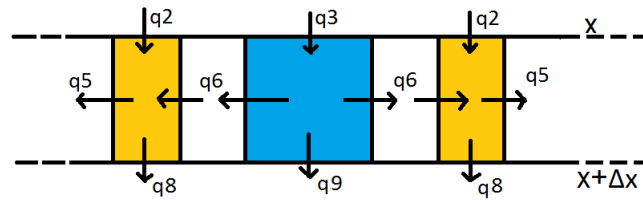
5. Watertapleiding

Er wordt gekeken naar de situatie zoals die eerder in hoofdstuk 2 is beschreven: de warmteoverdracht in de leiding vindt enkel plaats door middel van warmteconductie, in plaats van warmteoverdracht door middel van warmteconvectie bij stromend water. Er wordt aangenomen dat het water al enige tijd stilstaat, waardoor de temperatuur niet meer verandert als functie van de tijd en we dus te maken hebben met een stationair probleem. Daarnaast geldt dat de temperatuur T van het water onafhankelijk is van de radiale afstand tot de x -as, waardoor we te maken hebben met een één dimensionaal probleem. Hiervoor geldt dat de temperatuur in alle delen alleen afhangt van de positie x .

5.1 Warmtebalans

5.1.1 Niet-geïsoleerde watertapleiding

Voor een stationair probleem geldt het principe: de hoeveelheid warmte die een laag instroomt is gelijk aan de hoeveelheid warmte die een laag uitstroomt. Daarnaast blijft de temperatuur constant in de tijd. Uit onderstaande figuur, volgen nu de vergelijkingen voor de leidingwand en voor het water.



Figuur 5.1: Warmteoverdracht in een niet-geïsoleerde leiding van lengte Δx

$$q_2 + q_6 = q_5 + q_8 \quad (5.1)$$

$$q_3 = q_6 + q_9 \quad (5.2)$$

We berekenen q_2 , q_3 , q_8 en q_9 met formule (4.1), en q_5 en q_6 met formule (4.3) en passen vervolgens een 1^e orde Taylorontwikkeling toe.

Er geldt:

$$q_2 = -k_p A_2 \frac{dT_p}{dx}; \quad (5.3)$$

$$q_5 = u_{p \rightarrow o} A_5 (T_p - T_o); \quad (5.4)$$

$$q_6 = u_{w \rightarrow p} A_4 (T_w - T_p); \quad (5.5)$$

$$q_8 = -k_p A_2 \left. \frac{dT_p}{dx} \right|_{x+\Delta x}; \quad (5.6)$$

$$\approx -k_p A_2 \left(\left. \frac{dT_p}{dx} \right|_x + \left. \frac{d^2 T_p}{dx^2} \right|_x \Delta x \right); \quad (5.7)$$

$$q_3 = -k_w A_1 \frac{dT_w}{dx}; \quad (5.8)$$

$$q_9 = -k_w A_1 \left. \frac{dT_w}{dx} \right|_{x+\Delta x} \quad (5.9)$$

$$\approx -k_w A_1 \left(\left. \frac{dT_w}{dx} \right|_x + \left. \frac{d^2 T_w}{dx^2} \right|_x \Delta x \right), \quad (5.10)$$

waarbij $T_p(x)$ de temperatuur is in de leidingwand, en $T_w(x)$ de watertemperatuur is.

Vervolgens substitueren we resultaten (5.3) tot en met (5.7) in vergelijking (5.1). Na het vereenvoudigen van de verkregen vergelijkingen, krijgen we de volgende tweede orde differentiaalvergelijking voor de temperatuur in de leidingwand:

$$k_p (r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_p}{dx^2} = 2u_{p \rightarrow o} r_{uit} (T_p - T_o) - 2u_{w \rightarrow p} \cdot r_{in} (T_w - T_p) \quad (5.11)$$

Merk op dat de π is weggedeeld uit de vergelijking, omdat die in alle termen voorkomt.

Voor de temperatuur in het water geldt na vereenvoudiging de volgende tweede orde differentiaalvergelijking:

$$-k_w r_{in} \frac{d^2 T_w}{dx^2} + 2u_{w \rightarrow p} (T_w - T_p) = 0 \quad (5.12)$$

Dit geeft ons het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} k_p (r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_p}{dx^2} &= 2u_{p \rightarrow o} \cdot r_{uit} (T_p - T_o) - 2u_{w \rightarrow p} \cdot r_{in} (T_w - T_p) \\ -k_w \cdot r_{in} \frac{d^2 T_w}{dx^2} &+ 2u_{w \rightarrow p} (T_w - T_p) = 0 \end{aligned}$$

Om dit stelsel te kunnen oplossen, zijn er vier randvoorwaarden nodig. Hiervoor wordt aangenomen dat de leiding op $x = L$ blootstaat aan de lucht. De temperatuur op deze plaats is dus gelijk aan de temperatuur van de omgeving T_o . Voor de temperatuur aan het begin van de leiding T_b gaan we ervan uit dat deze gelijk is aan de temperatuur in de geiser T_g . De temperaturen aan het begin ($x = 0$) en aan het eind van de leiding ($x = L$), zijn gekozen:

$$T_w|_{x=0} = T_b = 65 \text{ en } T_p|_{x=0} = T_b = 65, \quad (5.13)$$

$$T_w|_{x=L} = T_o = 20 \text{ en } T_p|_{x=L} = T_o = 20, \quad (5.14)$$

5.1.2 Geïsoleerde watertapleiding

Opnieuw beschouwen we een stuk leiding van lengte Δx zoals te zien in figuur 3.1. De warmtebalansen, behorend bij deze situatie zijn (5.1),(5.2) en:

$$q_1 + q_5 = q_4 + q_7 \quad (5.15)$$

De warmtebalans voor de watertemperatuur is gelijk aan de warmtebalans in het niet geïsoleerde geval en vergelijking (5.12) geldt dus opnieuw. Voor de warmtebalans in de leidingwand en in de isolatielaag gelden andere differentiaalvergelijkingen. Voor de leidingwand geldt nu, via vergelijking (5.15) en analoog aan vergelijking (5.11):

$$k_p(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_p}{dx^2} = 2u_{p \rightarrow i} \cdot r_{uit}(T_p - T_i) - 2u_{w \rightarrow p} \cdot r_{in}(T_w - T_p), \quad (5.16)$$

waarbij $T_i(x)$ de temperatuur in de isolatielaag weergeeft.

Voor de isolatielaag kan de differentiaalvergelijking worden opgesteld door vergelijkingen (4.1) en (4.3) in te vullen in vergelijking (5.15):

$$k_i(r_{iso}^2 - r_{uit}^2) \frac{d^2 T_i}{dx^2} = 2u_{i \rightarrow o} \cdot r_{uit}(T_i - T_o) - 2u_{p \rightarrow i} \cdot r_{uit}(T_p - T_i) \quad (5.17)$$

We hebben nu een stelsel van drie 2^e orde differentiaalvergelijkingen, respectievelijk voor het water, voor de leidingwand en voor de isolatielaag, waar zes randvoorwaarden voor nodig zijn:

$$\begin{aligned} -k_w \cdot r_{in} \frac{d^2 T_w}{dx^2} + 2u_{w \rightarrow p}(T_w - T_p) &= 0 \\ k_p(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_p}{dx^2} &= 2u_{p \rightarrow i} \cdot r_{uit}(T_p - T_i) - 2u_{w \rightarrow p} \cdot r_{in}(T_w - T_p) \\ k_i(r_{iso}^2 - r_{uit}^2) \frac{d^2 T_i}{dx^2} &= 2u_{i \rightarrow o} \cdot r_{iso}(T_i - T_o) - 2u_{p \rightarrow i} \cdot r_{uit}(T_p - T_i) \end{aligned}$$

Er wordt aangenomen dat de temperatuur van het water, de leidingwand en de isolatielaag aan het begin ($x = 0$) en aan het eind van de leiding ($x = L$) als volgt worden gekozen:

$$T_w|_{x=0} = T_b = 65, T_p|_{x=0} = T_b = 65, T_i|_{x=0} = T_b = 65, \quad (5.18)$$

$$T_w|_{x=L} = T_o = 20, T_p|_{x=L} = T_o = 20, T_i|_{x=L} = T_o = 20, \quad (5.19)$$

Opnieuw geldt dat de begintemperatuur T_b gelijk is gekozen aan de temperatuur in de geiser T_g .

5.2 Numerieke oplossing

5.2.1 Niet-geïsoleerde watertapleiding

Het probleem, zoals beschreven op pagina 12 kan analytisch worden opgelost, zoals beschreven in appendix B. Deze analytische oplossing kunnen we gebruiken om ons numerieke model te verifiëren, om zo te kunnen verantwoorden dat ook het model voor de geïsoleerde leiding nauwkeurig genoeg is.

Voor de numerieke oplossing van ons probleem, moeten we de onderstaande vergelijkingen discretiseren:

$$\begin{aligned} k_p(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_p}{dx^2} &= 2u_{p \rightarrow o} \cdot r_{uit}(T_p - T_o) - 2u_{w \rightarrow p} \cdot r_{in}(T_w - T_p) \\ -k_w \cdot r_{in} \frac{d^2 T_w}{dx^2} &+ 2u_{w \rightarrow p}(T_w - T_p) = 0 \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn makkelijk te vereenvoudigen tot onderstaande vergelijkingen. Voor de betekenis van de nieuwe symbolen zie de symbolenlijst (Appendix A.1).

$$a \frac{d^2 T_p}{dx^2} - b \cdot T_p + c(T_w - T_p) = -b \cdot T_o \quad (5.20)$$

$$-m \frac{d^2 T_w}{dx^2} + n(T_w - T_p) = 0 \quad (5.21)$$

De vergelijkingen worden gediscretiseerd, waarbij de tweede afgeleide wordt benaderd met behulp van centrale differentiatie. Voor de centrale discretisatie wordt het interval $[0, L]$ opgedeeld in N deelintervallen van lengte Δx , waarbij N afhankelijk is van de keuze voor Δx . De waarde van Δx mag vrij gekozen worden, in ons geval kiezen we $\Delta x = 0,002$. Na centrale discretisatie worden de volgende vergelijkingen verkregen:

$$a \left(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2} \right) - (b + c)u_j + c \cdot v_j = -b \cdot T_o \quad (5.22)$$

$$-m \left(\frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{\Delta x^2} \right) + n(v_j - u_j) = 0; \quad (5.23)$$

hierbij zijn respectievelijk u_j en v_j de numerieke benaderingen voor de temperatuur in de pijp en de temperatuur in het water op $x = j\Delta x$ met $j = 0, \dots, N$.

Deze vergelijkingen gelden in het binnengebied van het interval, maar op de rand geldt dat sommige waarden bekend zijn, voor $j = 1$:

$$a \left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{\Delta x^2} \right) - (b + c)u_1 + c \cdot v_1 = -b \cdot T_o \quad (5.24)$$

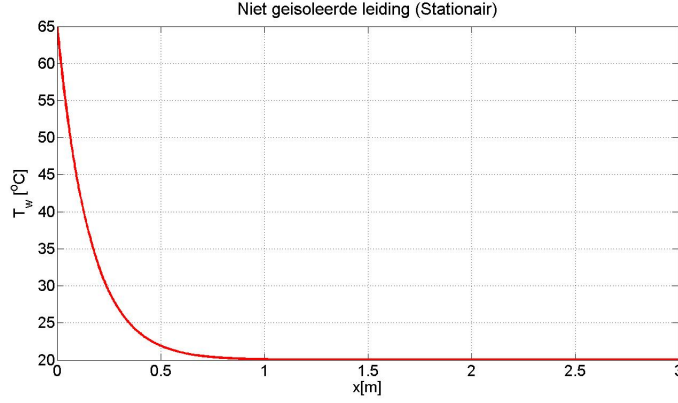
$$-m \left(\frac{v_0 - 2v_1 + v_2}{\Delta x^2} \right) + n(v_1 - u_1) = 0; \quad (5.25)$$

Hierbij zijn u_0 en v_0 bekend, want de eerder gegeven randvoorwaarden (5.13) en (5.14), kunnen makkelijk worden omgezet tot randvoorwaarden voor het gediscretiseerde probleem:

$$\begin{aligned} \text{op } x = 0 : u_0 &= v_0 = T_b \\ \text{op } x = L : u_N &= v_N = T_o \end{aligned}$$

Er kan nu een matrix-vector notatie $\mathbf{A}\mathbf{w}=\mathbf{b}$ worden gebruikt om het probleem met randvoorwaarden te noteren. Dit kan worden opgelost met MATLAB. Het MATLAB programma voor de niet-geïsoleerde watertapleiding is te vinden in Appendix C.1.

Figuur 5.2 geeft het verloop weer van de temperatuur in de waterleiding.



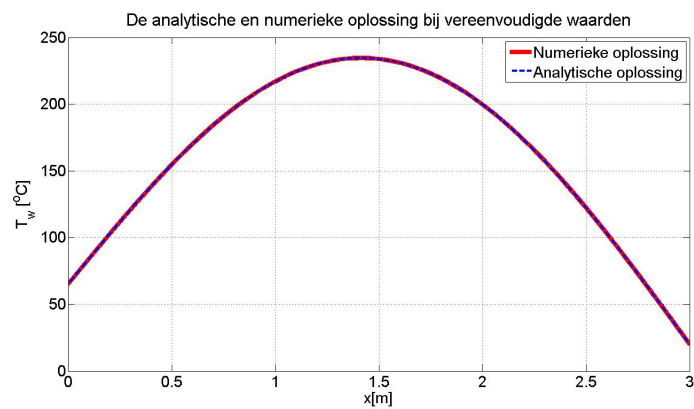
Figuur 5.2: Het verloop van de temperatuur bij een niet geïsoleerde waterleiding

Zoals te zien in figuur 5.2, is de temperatuur op $x = 0$ gelijk aan de temperatuur in de circulatieleiding, maar daalt de temperatuur al snel door warmteverlies.

Om het numerieke model te verifiëren, vergelijken we het met de analytische oplossing. Wanneer deze overeen komen, kunnen we het numerieke model uitbreiden met een isolatielaag. Om dit te kunnen vergelijken nemen we voor a, b, c, d, m, n, T_o en L vereenvoudigde waarden:

$$\begin{aligned} a &= 1 & b &= 1 & c &= 2 \\ m &= -1 & n &= 2 \\ T_o &= 20 & T_b &= 65 & L &= 3 \end{aligned}$$

In figuur 5.3 is te zien, dat de analytische en de numerieke oplossing dicht bij elkaar liggen en dat ons numerieke model correct is. Het numerieke model voor de waterleiding kan nu probleemloos worden uitgebreid met een isolatielaag.



Figuur 5.3: De analytische en numerieke oplossing van de differentiaalvergelijkingen met eenvoudige constanten bij een niet geïsoleerde waterleiding

5.2.2 Geïsoleerde watertapleiding

Voor de numerieke oplossing van ons probleem, moet het stelsel verkregen in hoofdstuk 5.1.2 worden gediscrètiseerd.

$$\begin{aligned} -k_w \cdot r_{in} \frac{d^2 T_w}{dx^2} + 2u_{w \rightarrow p}(T_w - T_p) &= 0 \\ k_p(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_p}{dx^2} &= 2u_{p \rightarrow i} \cdot r_{uit}(T_p - T_i) - 2u_{w \rightarrow p} \cdot r_{in}(T_w - T_p) \\ k_i(r_{iso}^2 - r_{uit}^2) \frac{d^2 T_i}{dx^2} &= 2u_{i \rightarrow o} \cdot r_{iso}(T_i - T_o) - 2u_{p \rightarrow i} \cdot r_{uit}(T_p - T_i) \end{aligned}$$

Na vereenvoudiging, worden de volgende vergelijkingen verkregen:

$$-m \frac{d^2 T_w}{dx^2} + n(T_w - T_p) = 0 \quad (5.26)$$

$$a \frac{d^2 T_p}{dx^2} = l(T_p - T_i) - c(T_w - T_p) \quad (5.27)$$

$$q \frac{d^2 T_i}{dx^2} = s(T_i - T_o) - l(T_p - T_i) \quad (5.28)$$

De nieuw geïntroduceerde symbolen zijn terug te vinden in de symbolenlijst in Appendix A.1.

In [4] is onderzoek gedaan naar verschillende soorten isolatielagen. Hieruit is gebleken dat voor vele isolatiesoorten de warmtegeleidingscoëfficiënt, k_i , erg klein is, waardoor de term $q = k_i(r_{iso}^2 - r_{uit}^2)$ verwaarloosbaar klein is en dus op 0 kan worden gesteld. Dat betekent dat (5.28) van een differentiaalvergelijking overgaat in een relatie:

$$s(T_i - T_o) = l(T_p - T_i) \quad (5.29)$$

Door relatie (5.29) in te vullen in vergelijking (5.27), verkrijgen we de volgende vergelijkingen:

$$a \frac{d^2 T_p}{dx^2} - (l - \frac{l^2}{l+s})T_p + c(T_w - T_p) = -\frac{ls}{l+s}T_o \quad (5.30)$$

$$-m \frac{d^2 T_w}{dx^2} + n(T_w - T_p) = 0 \quad (5.31)$$

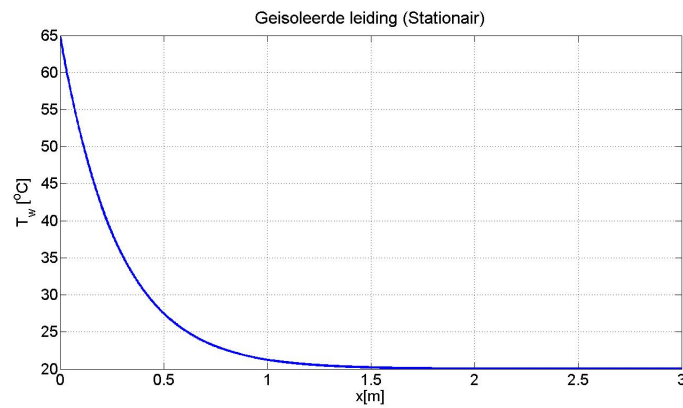
De discretisatie van deze vergelijkingen gaat analoog aan de discretisatie beschreven in paragraaf 5.2.1. Vergelijkingen (5.30) en (5.31) worden na discretisatie:

$$a(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2}) - (l - \frac{l^2}{l+s})u_j + c(v_j - u_j) = -\frac{ls}{l+s}T_o \quad (5.32)$$

$$-m(\frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{\Delta x^2}) + n(v_j - u_j) = 0, \quad (5.33)$$

waarbij u_j en v_j de numerieke benaderingen voor respectievelijk T_p en T_w op $x = j\Delta x$ met $j = 0, \dots, N$ zijn. Ook hier geldt dat de vergelijkingen alleen gelden op het binnengebied. Opnieuw wordt het probleem opgelost met MATLAB. Het MATLAB programma voor de geïsoleerde watertapleiding is te vinden in Appendix C.2.

Figuur 5.4 geeft het verloop weer van de temperatuur in de waterleiding:



Figuur 5.4: Het verloop van de temperatuur bij een geïsoleerde waterleiding

Als men de geïsoleerde waterleiding vergelijkt met de niet-geïsoleerde waterleiding, zie je bijna geen kwalitatief verschil. Wel is goed te zien, dat de temperatuur in de niet-geïsoleerde waterleiding sneller daalt dan de temperatuur in de geïsoleerde waterleiding. Het zal voor de energiebesparing effectief zijn om te isoleren. In de rest van de modellen maken we dan ook gebruik van geïsoleerde waterleidingen. Of het voor de ontwikkeling van de legionellabacterie ook effectief is om te isoleren zal later in dit verslag bekeken worden.

6. Legionellabacterie

“De legionellabacterie veroorzaakt de veteranenziekte. De symptomen kunnen variëren van een flinke verkoudheid tot griep met longontsteking en hoge koorts. Slechts onder bepaalde omstandigheden kunnen legionellabacteriën gevaar opleveren. Zo vinden deze bacteriën water met een temperatuur tussen de 25 en 50 graden Celsius erg prettig. Vanaf 20 graden Celsius gaan zij groeien en vermenigvuldigen. Hiervoor hebben de bacteriën slijmlaagjes aan de binnenkant van leidingen nodig. Dit ontstaat in langdurig stilstaand water. Besmetting is alleen mogelijk als hele kleine besmette waterdruppeltjes (aerosolen) vrijkomen en worden ingeademd. Dit is bijvoorbeeld het geval bij het douchen, in whirlpools, zwembaden, airconditioning en koeltorens. Deze installaties moeten dus altijd goed gecontroleerd worden. Je kunt niet besmet raken door het drinken van besmet water of via iemand anders.”[6]

De legionellabacterie kan zich op verschillende manier verspreiden in de warmwaterleiding. Allereerst door groei, oftewel verdubbeling, van de bacterie zelf, daarnaast door diffusie en wanneer het water stroomt door stroming. In de modellen wordt er vanuit gegaan dat het water in de leiding stil staat, zodat enkel de groei en de diffusie van de bacterie beschouwd hoeven te worden.



6.1 Standaard groeimodel

Allereerst wordt een standaard groeimodel bekeken met exponentiele groei. Dit model voldoet aan de volgende vergelijking:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = k \cdot c(x, t) \quad (6.1)$$

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad (6.2)$$

waarbij $c(x, t)$ de concentratie van de legionellabacterie in het water is in kve/l (kolonievormende eenheden per liter), k een constante afhankelijk van de verdubbelingstijd van de bacterie en $c_0(x)$ een beginverdeling van de concentratie op tijdstip $t = 0$. Voor de beginverdeling wordt $c(x, 0) = c_0(x) = 1$ gekozen. Er geldt dus dat we starten met 1 kve/l op elke positie in de leiding. De verdubbelingstijd van een legionellabacterie is rond de 2 tot 8 uur [2], afhankelijk van de temperatuur van het water waarin de bacterie zich ontwikkelt.

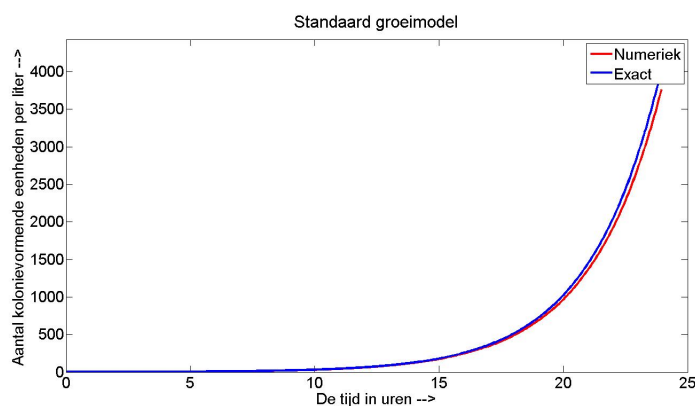
De waarde van k wordt als volgt berekend:

$$\frac{dc}{dt} = k \cdot c(t), c(0) = 1 \Rightarrow c(t) = e^{kt}$$

We gebruiken als verdubbelingstijd 2 uur dus moet gelden:

$$e^{2k} = 2 \Rightarrow 2k = \log(2) \Rightarrow k = \frac{\log(2)}{2} \approx 0,35$$

Het programma MATLAB wordt gebruikt om de concentratie exact en numeriek te berekenen op elk tijdstip t . In figuur 6.1 is te zien, dat de grafieken dicht bij elkaar in de buurt liggen en het numerieke model dus correct is en gebruikt kan worden voor de volgende modellen, die we niet meer analytisch kunnen oplossen.



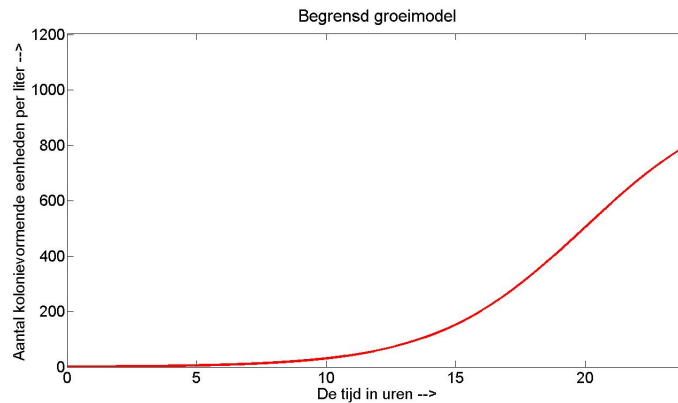
Figuur 6.1: Het standaard groeimodel van de legionellabacterie

6.2 Groeimodel met begrenzing

Bij het standaard model word er vanuit gegaan dat er geen grens zit aan de groei van de legionellabacterie. Word dit echter wel aangenomen, dan kunnen we het volgende model opstellen:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = k \cdot \left(1 - \frac{c(x, t)}{b}\right) \cdot c(x, t), \quad (6.3)$$

waarbij b een constante is gelijk aan de draagkracht voor de bacterie, afhankelijk van de toegelaten hoeveelheid kve/l legionella in water. Deze maximale toegelaten hoeveelheid is in de wet vastgesteld op 100 kve/l [7]. De waarde van b wordt gekozen op 10 maal de toegelaten concentratie. Dit is een keuze die we maken, maar zal in werkelijkheid afhangen van de voldoende aanwezigheid van voedingsstoffen. De waarde van k is gekozen zoals in paragraaf 6.1 is gedefinieerd. Dit model legt een grens aan de groei van de bacterie, om te voorkomen dat de groei van de concentratie explodeert. Opnieuw wordt MATLAB gebruikt om de groei van de bacterie numeriek te bepalen. Dit model is niet lineair en is dus niet eenvoudig analytisch op te lossen. In figuur 6.2 is te zien hoe de bacterie zich ontwikkelt in de tijd. Het MATLAB programma voor het begrensde groeimodel van de legionellabacterie is te vinden in Appendix C.4.



Figuur 6.2: Het begrensde groeimodel van de legionellabacterie

7. Gekoppelde systeem

Nu de ontwikkeling van de legionellabacterie is gemodelleerd, kan de koppeling tussen het model voor de temperatuur van het water in de waterleiding en het model voor de legionellabacterie worden gemaakt. Er wordt hierbij gebruik gemaakt van beide legionella modellen: het standaard groeimodel en het groeimodel met begrenzing. Daarnaast wordt er gebruik gemaakt van het temperatuursmodel waarbij de waterleiding geïsoleerd is. Vervolgens zal het model nog verder worden uitgebreid door er een diffusie-term aan toe te voegen. De verwachting is dat hierdoor de bacterie zich verspreid over de gehele leiding.

7.1 Standaard groeimodel

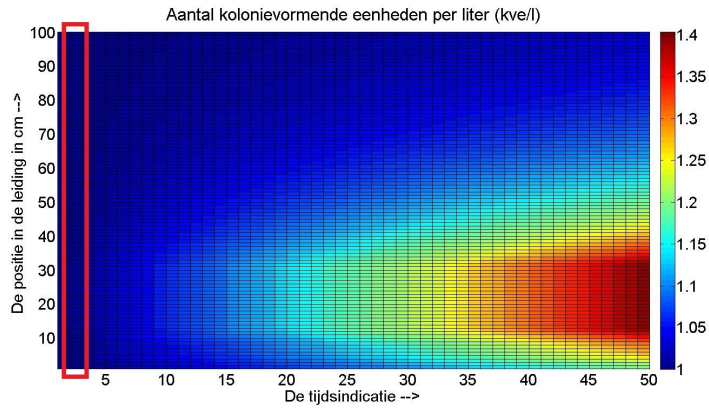
Bij het modelleren van het standaard groeimodel van legionella, waarbij de temperatuur per tijdstip en locatie varieert, wordt er gebruik gemaakt van het oorspronkelijke groeimodel, zoals gedefinieerd in paragraaf 6.1. Dit model wordt uitgebreid door de temperatuur op de verschillende posities en tijdstippen toe te voegen aan het model, waardoor ook daar rekening mee kan worden gehouden bij het berekenen van de concentratie. Deze temperatuur heeft invloed op de verdubbelingstijd van de bacterie via de waarde van k , die hierdoor verandert in $k(T)$. Deze functie is als volgt gedefinieerd:

Tabel 7.1: De factoren van $k(T)$ voor de verschillende temperaturen

$$k(T) = \frac{\log(2)}{2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{T} = & 0 & 20 & 35 & 50 & 55 & 60 & 66 & 70 & 80 \\ \hline \text{factor} = & 10^{-2} & 10^{-2} & 1 & 1 & 0,8 & 0,7 & 0,5 & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

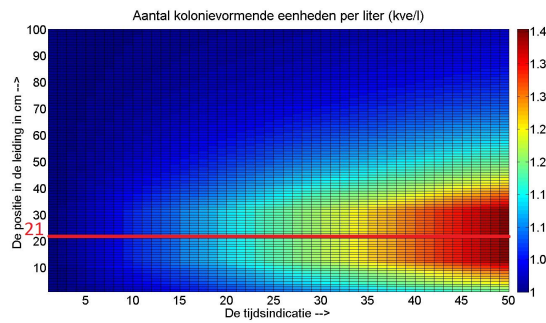
hierbij geldt dat de factoren voor de tussenliggende temperaturen lineair worden geïnterpoleerd tussen de richtpunten.

Figuur 7.1 geeft de leiding op verschillende tijdstipmomenten aan. Zo is bijvoorbeeld het omcirkelde gedeelte de leiding op tijdstip $t = 2$ (waarbij t van 1 tot 50 loopt).

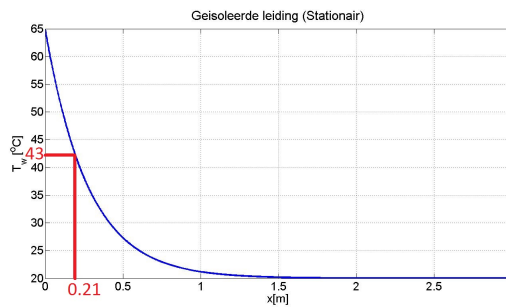


Figuur 7.1: Weergave van de verspreiding van de legionellabacterie in de leiding

Zoals in figuren 7.2a en 7.2b (na 1 uur) te zien is verspreid de bacterie zich vooral op de plekken waar de temperatuur rond de 43 graden celsius is. Dit komt overeen met onze verwachting dat de bacterie zich het beste rond die temperatuur kan ontwikkelen.



(a) gekoppeld systeem met standaard model



(b) geïsoleerde waterleiding

Figuur 7.2: Het standaard groeimodel van de legionellabacterie, waarbij de temperatuur plaatsafhankelijk is, na 1 uur

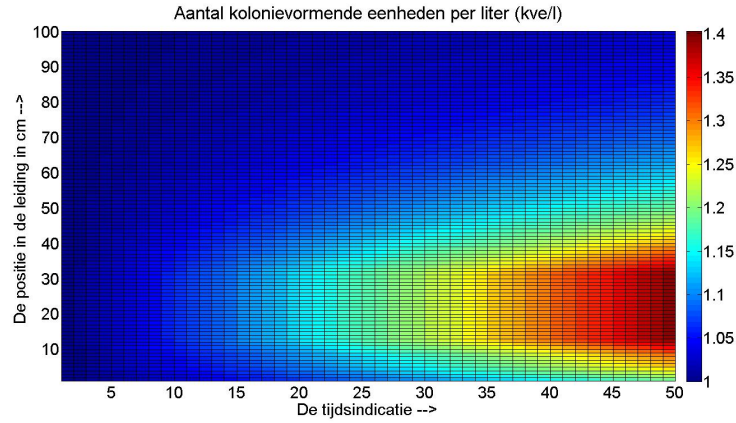
Merk hierbij op dat de figuur de concentratie laat zien na 1 uur. De tijdas is dus slechts ter illustratie en geeft dus niet de exacte tijdstappen weer. Het MATLAB programma voor het gekoppelde standaard groeimodel is te vinden in Appendix C.5.

Wanneer het niveau van de legionellabacterie wordt berekend na 24 uur, zien we dat de concentratie een maximum bereikt van 1882,4 *kve/l*, wat ruim boven de toegestane waarde van 100 *kve/l* ligt. Dit gebeurt pas aan het einde van de leiding. Als we de gemiddelde concentratie over de leiding in de tijd bekijken, zien is te dat de concentratie pas vanaf tijdstap $t = 39$ (waarbij t van 1 tot 50 loopt) boven de toegelaten waarde komt.

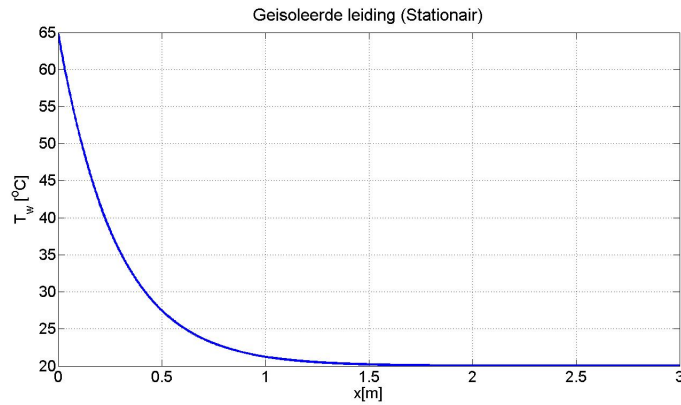
Echter is er in dit model gebruik gemaakt van een standaard groeimodel, waarbij de groei niet begrensd is. In de realiteit is dit natuurlijk dit het geval, omdat de omstandigheden invloed hebben op de groei van de bacterie.

7.2 Groeimodel met begrenzing

Op gelijke manier als bij het standaard model, word ook het begrensde model uitgebreid met een koppeling met de temperatuur. Zoals te zien in figuur 7.3a is ook in dit model de bacterie gecentreerd rond de ideale temperatuur. Het bijbehorende MATLAB programma is te vinden in Appendix C.6.



(a) gekoppelde systeem met begrens model



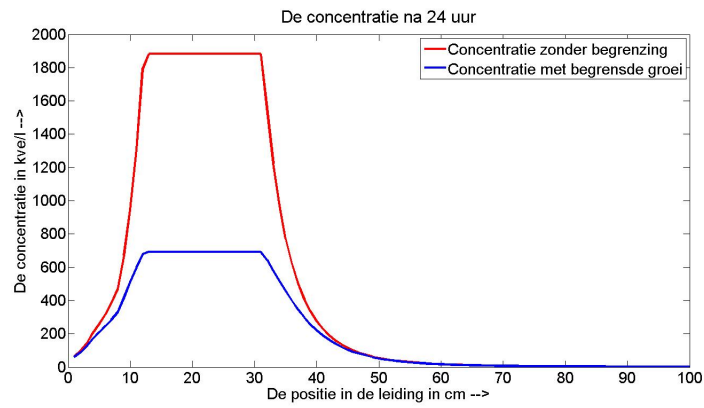
(b) geïsoleerde waterleiding

Figuur 7.3: Het begrensde groeimodel van de legionellabacterie, waarbij de temperatuur plaatsafhankelijk is, na 1 uur

Wanneer bij het gekoppelde begrensde model word gekeken naar het verloop van de concentratie in de tijd¹, merken we op dat er na 24 uur een maximum wordt bereikt van 691,27 *kve/l*. Bij het begrensde model geldt dat de toegestane concentratie ook ruim wordt overschreden. Wanneer wordt gekeken naar het moment van overschrijden, is te zien dat dit bij het begrensde model is bij $t = 41$ (waarbij t van 1 tot 50 loopt). Dit is later dan bij het standaard model, waar dit bij $t = 39$ al gebeurde.

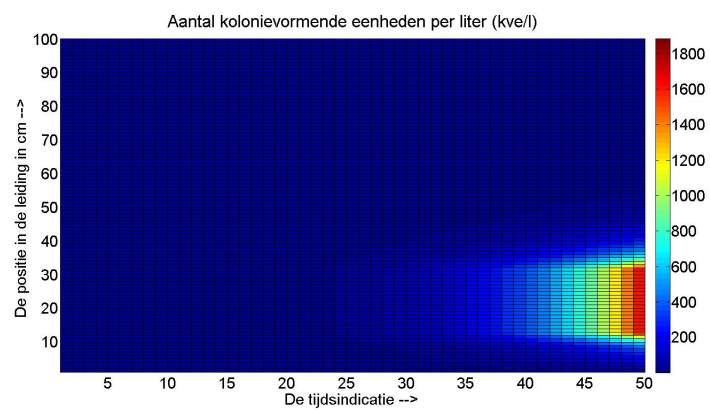
Wanneer men de verschillende modellen vergelijkt aan de hand van de figuren, is te zien dat er bijna geen verschil te zien is op de korte termijn. Bekijkt men de figuren na 24 uur, is dit verschil duidelijker.

¹Opnieuw moet worden opgemerkt dat de tijdas puur ter illustratie dient.

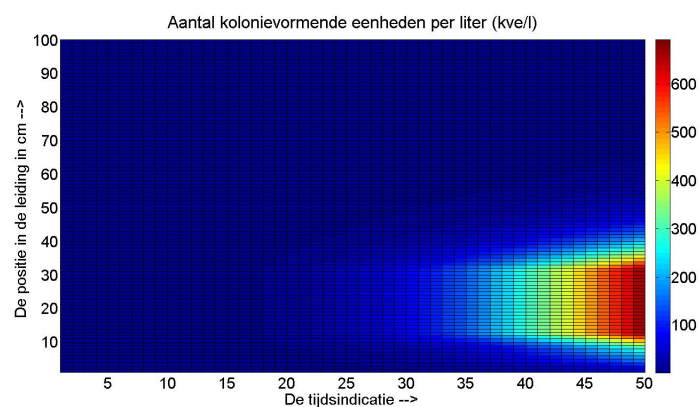


Figuur 7.4: De concentratie van beide modellen na 24 uur

Als men de grafieken apart bekijkt, zoals in figuren 7.5a en 7.5b, moet vooral gelet worden op de *concentratie*-schaal, daaraan kun je namelijk zien dat er bij het begrensde model veel minder kolonievormende eenheden per liter zijn.



(a) Standaard



(b) Begrensd

Figuur 7.5: De concentratie van de legionellabacterie, waarbij de temperatuur plaatsafhankelijk is, na 24 uur

7.3 Groeimodel met diffusie

Als laatste bekijken we het groeimodel met diffusie. Hierbij wordt het groeimodel met tijdsafhankelijke verdubbelingstijd uitgebreid met een diffusie-term $\mathbb{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, waarbij $\mathbb{D}$ een constante is, afhankelijk van de soort bacterie die wordt beschouwd. In ons geval is dit de legionellabacterie, zoals beschreven in hoofdstuk 6. Bij zo'n soort bacterie hoort een diffusiecoëfficiënt van $2,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ [3].

7.3.1 Standaard groeimodel met diffusie

Wanneer we bij het diffusie model gebruik maken van het standaard legionella model, zonder begrenzing krijgen we de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \mathbb{D} \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} + k(T) \cdot c(x, t) \quad (7.1)$$

Met begin- en randvoorwaarden:

$$c(x, 0) = c_0(x) \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial c}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (7.3)$$

Gebruikmakend van een eindige differentiemethode krijgen we het volgende stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = K \cdot \mathbf{u} + k_i \cdot \mathbf{u}, 0 < t \leq T \quad (7.4)$$

$$u(0) = c_0. \quad (7.5)$$

De matrix K wordt gegeven door

$$K = \frac{\mathbb{D}}{dt^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

en de diagonaalmatrix k_i is afhankelijk van de verdubbelingstijd van de bacterie op die positie. Deze verdubbelingstijd wordt bepaald door de temperatuur van het water op die positie.

De diagonaal van de matrix k_i wordt als volgt gekozen:

Tabel 7.2: De factoren van k_i voor de verschillende temperaturen

$$k_i = \frac{\log(2)}{2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{T} = & 0 & 20 & 35 & 50 & 55 & 60 & 66 & 70 & 80 \\ \hline \text{factor} = & 10^{-2} & 10^{-2} & 1 & 1 & 0,8 & 0,7 & 0,5 & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

waarbij de temperaturen tussen de richtpunten lineair geïnterpoleerd worden. Deze matrix geeft de factor van hoe snel de bacterie zich verdubbelt, afhankelijk van de temperatuur.

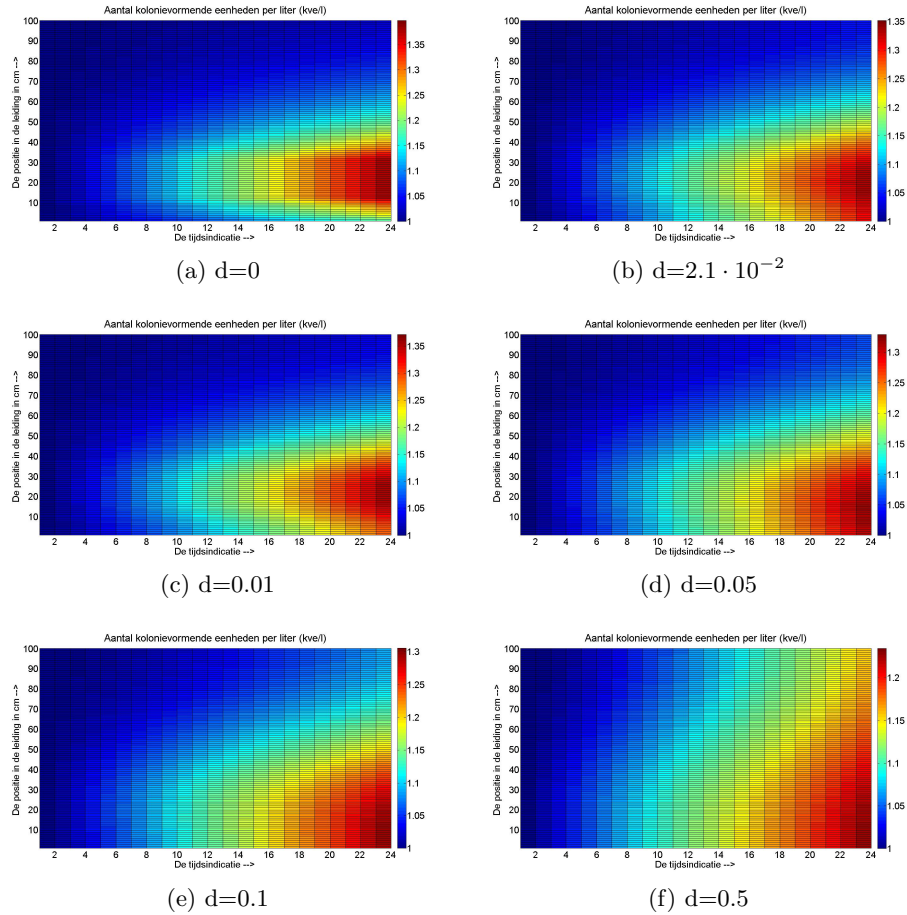
Het stelsel (7.4) wordt nu in de tijd geïntegreerd met behulp van een impliciete tijdsintegratie: Euler achterwaarts. Deze methode is onvoorwaardelijk stabiel en zal dus altijd een stabiele oplossing geven onafhankelijk van de tijdstap. Het volgende lineaire stelsel moet nu worden opgelost:

$$Ax = b, \quad (7.6)$$

$$\text{met } A = (I - dt \cdot (K + ki)) \quad (7.7)$$

$$\text{en } b = c(:, j) \quad (7.8)$$

Dit levert ons de volgende concentraties voor een aantal verschillende diffusiecoëfficiënten:



Figuur 7.6: De concentratie van de legionellabacterie met diffusie na 1 uur

De MATLAB code voor het bepalen van de concentratie in een groei-model met diffusie is te vinden in Appendix C.7.

Uit het MATLAB programma volgt dat de maximum concentratie die wordt bereikt na 1 uur, bij een diffusiecoëfficiënt van $2,1 \cdot 10^{-2}$, gelijk is aan $1,36 \text{ kve/l}$. Echter geldt dat bij het voorgaande MATLAB programma na 24 uur naar het maximum werd gekeken en dus dat het niet één op één te vergelijken is. De maximum concentratie na 24 uur zal berekend moeten worden.

De verwachting is dat dit lager is dan de maximale concentratie van een model zonder diffusie, omdat de bacterie zich meer verspreidt over de leiding. Dit is correct: de maximale concentratie na 24 uur bij een model met diffusie is 469,09 *kve/l*, tegenover het maximum van 1882,4 *kve/l* bij het standaard groeimodel zonder diffusie.

7.3.2 Begrensd groeimodel met diffusie

Wanneer wordt gekeken naar het begrensde groeimodel en hier de diffusie-term aan toegevoegd wordt, krijgen we de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \mathbb{D} \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} + k(T) \cdot \left(1 - \frac{c(x, t)}{b}\right) \cdot c(x, t) \quad (7.9)$$

Met begin- en randvoorwaarden:

$$c(x, 0) = c_o(x) \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial c}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (7.11)$$

Gebruikmakend van een eindige differentiemethode krijgen we het volgende stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = K \cdot \mathbf{u} + ki \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{u}}{b}\right) \cdot \mathbf{u}, 0 < t \leq T \quad (7.12)$$

$$u(0) = c_0. \quad (7.13)$$

De matrices K en ki worden gelijk gekozen als bij het standaard model.

Bij het standaard model met diffusie was er sprake van lineaire vergelijkingen. Nu hebben we te maken met niet-lineaire vergelijkingen en dus kunnen we niet eenvoudig volledige impliciete tijdsintegratie toepassen. Het deel dat wel lineair is zal impliciet worden geïntegreerd met behulp van een impliciete tijdsintegratie: Euler achterwaarts, en het deel dat niet-lineair is zal expliciet worden geïntegreerd met behulp van een expliciete tijdsintegratie: Euler voorwaarts. Deze methode is voorwaardelijk stabiel en zal dus niet altijd een stabiele oplossing geven. Echter door het impliciet integreren van het lineaire deel zal de voorwaarde op de tijdstap minder streng zijn, dan bij een volledig expliciete methode. Het volgende stelsel moet nu worden opgelost:

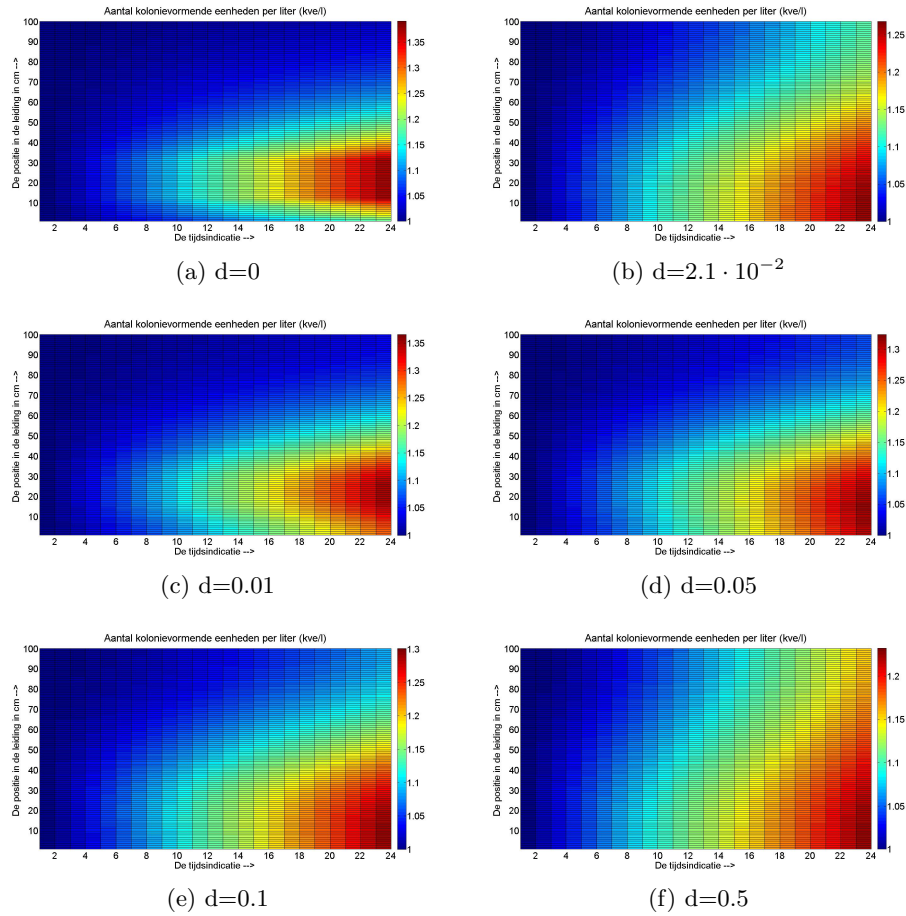
$$Ax = b, \quad (7.14)$$

$$\text{met } A = (I - dt \cdot K) \quad (7.15)$$

$$\text{en } b = c(:, j) + dt \cdot ki \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{u}}{b}\right) \cdot \mathbf{u} \quad (7.16)$$

Dit gebeurt met het MATLAB programma, zoals beschreven in Appendix C.8.

Dit levert ons de volgende concentraties voor een aantal verschillende diffusiecoëfficiënten:



Figuur 7.7: De concentratie van de legionellabacterie met diffusie na 1 uur

Opnieuw wordt gekeken naar de maximum concentratie die wordt bereikt na 1 uur bij een diffusiecoëfficiënt van $2.1 \cdot 10^{-2}$. Uit het MATLAB programma volgt dat deze waarde gelijk is aan $1,36 \text{ kve/l}$. Ook bij dit model wordt de maximale waarde berekend, om het te kunnen vergelijken met de eerdere modellen. Dit levert als nieuwe maximale waarde na 24 uur: $186,41 \text{ kve/l}$.

8. Conclusies

In dit bachelorproject is de ontwikkeling van de legionellabacterie gemodelleerd. Er zijn verschillende modellen bekeken en gemodelleerd. Deze verschillende modellen kunnen worden gebruikt om de ontwikkeling van de bacterie weer te geven en de invloed van verschillende factoren te kunnen bekijken. Wanneer er wordt gekeken naar de verschillende modellen en de maximale concentraties die hierbij zijn ontstaan, volgt de volgende tabel:

Tabel 8.1: De maximale concentratie na 1 en na 24 uur voor verschillende modellen

Model	Diffusiecoëfficiënt	Maximale concentratie na 1 uur in <i>kve/l</i>	Maximale concentratie na 24 uur in <i>kve/l</i>
Standaard model	-	1,40	1882,40
Begrensd model	-	1,40	691,27
Standaard model met diffusie	$2,1 \cdot 10^{-2}$	1,36	469,09
Begrensd model met diffusie	$2,1 \cdot 10^{-2}$	1,36	186,41

Het is duidelijk dat in elk model de maximale concentratie na 24 uur boven de toegelaten waarde komt. Het begrensde model met diffusie is qua model het meeste realistisch. Wanneer gekeken wordt naar het tijdstip waarbij de maximale concentratie de toegelaten waarde overstijgt, volgt de volgende tabel:

Tabel 8.2: De maximale concentratie bij verschillende eindtijden

Eindtijd(in uren)	20	21
Maximale concentratie in <i>kve/l</i>	92,16	110,80

Ergens tussen deze twee tijdstippen zal de concentratie dus hoger zijn dan de toegelaten waarde. Op dat moment zal de leiding dus ‘besmet’ zijn. Om de leiding dan weer schoon te kunnen krijgen, zal er overal in de leiding een temperatuur boven de 55°C moeten worden bereikt. Dit kan door bijvoorbeeld de leiding door te spoelen met heet genoeg water, zodat de temperatuur nergens onder de 55°C komt. Dit moet wel vaak genoeg ge-

beuren (dus binnen de 20 á 21 uur), want zodra het water in de leiding langer stil staat, zal de bacterie zich opnieuw ontwikkelen. Verder onderzoek zal nodig zijn, om een precieze uitspraak te kunnen doen over het effect van het doorspoelen, omdat er in dit onderzoek vanuit wordt gegaan dat het water stil staat.

Wanneer de totale concentraties in het begrensde model met en zonder diffusie worden vergeleken, is te zien dat de het verschil in totale concentratie kleiner is, dan het verschil in maximale concentratie zou doen vermoeden. Er geldt dus vooral dat de door de diffusieterm de bacteriën zich meer verspreiden over de leiding:

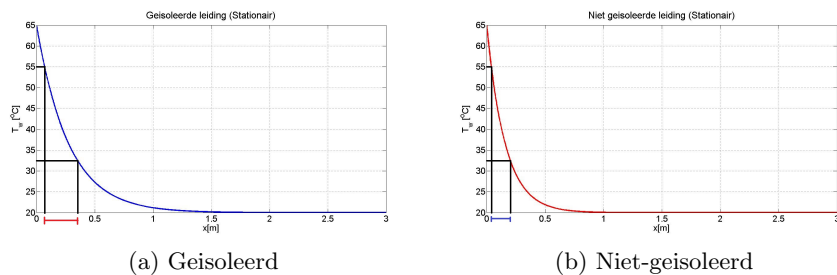
Tabel 8.3: De verschillen tussen de begrensde modellen met of zonder diffusie

Model	Zonder diffusie	Met diffusie	Verhouding
Maximale concentratie in <i>kve/l</i>	691,27	186,41	$\approx 3,71$
Totale concentratie in <i>kve/l</i>	24038	13272	$\approx 1,81$

Het model voldoet dus aan onze verwachtingen voor de groei en verspreiding van de legionellabacterie en kan worden gebruikt bij verder onderzoek. Het model kan echter nog verder worden uitgewerkt, zoals u kunt vinden in de aanbevelingen in hoofdstuk 9.

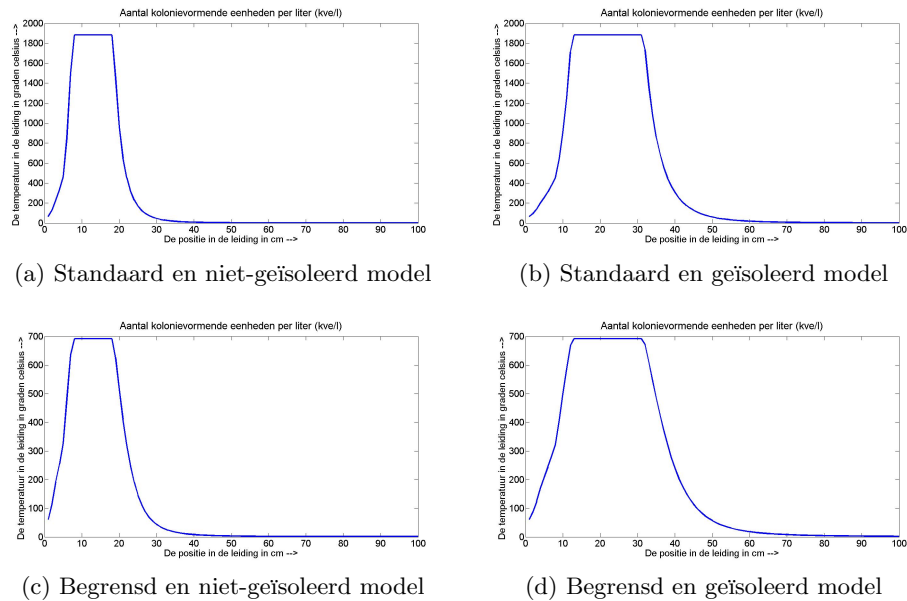
8.1 Wel of niet isoleren?

In hoofdstuk 5.2.1 kwam al de volgende vraag al naar voren: moeten leidingen wel of niet worden geïsoleerd? Er is toen voor gekozen om van een geïsoleerde watertapleiding gebruik te maken, in verband met de energiebesparing. Er geldt dat de temperatuur in de leiding voor een langere periode hoger blijft wanneer we isoleren. Echter wanneer we naar de kans op een legionellabesmetting kijken, zal gelden dat het slimmer is om niet te isoleren. In figuur 8.1 is te zien in welk gebied de legionellabacterie zich kan ontwikkelen, berekend vanuit de temperatuur waarin de bacterie zich goed kan ontwikkelen. Het is duidelijk dat in de geïsoleerde leiding dit gebied een stuk groter is.



Figuur 8.1: De geïsoleerde en niet-geïsoleerde waterleiding, waarbij wordt gekeken naar de temperatuur waarbij de legionellabacterie zich goed kan ontwikkelen

Als we de grafieken van de concentratie bacteriën bekijken in een geïsoleerde en in een niet-geïsoleerde leiding na 24 uur, is duidelijk het verschil te zien¹.



Figuur 8.2: De verschillen in concentratie tussen de wel- en niet-geïsoleerde leidingen

Het vermoeden ontstaat dat de geïsoleerde waterleiding een grotere concentratie legionellabacteriën zal krijgen binnen dezelfde tijd dan de niet-geïsoleerde leiding. Om dit vermoeden te kunnen kwantificeren, zullen alle modellen ook met de niet-geïsoleerde leiding worden doorgerekend. Dit levert voor het standaard model met diffusie en het begrensde model met diffusie de volgende resultaten:

Tabel 8.4: De maximale concentratie in kve/l na 1 en na 24 uur voor een geïsoleerde en niet-geïsoleerde leiding

	Standaard model met diffusie	Begrensd model met diffusie
Geïsoleerde leiding na 1 uur	1,40	1,40
Niet-geïsoleerde leiding na 1 uur	1,33	1,33
Geïsoleerde leiding na 24 uur	469,09	186,41
Niet-geïsoleerde leiding na 24 uur	100,51	60,09

Voor het begrensde model (met diffusie) met een niet-geïsoleerde leiding geldt dat de toegelaten concentratie wordt overschreden tussen de 27 en de 28 uur. Dit volgt uit tabel 8.5, waar te zien is dat na die eindtijd de maximale concentratie de limiet overschrijdt.

¹De MATLAB programma's behorende bij de niet-geïsoleerde leiding zijn gelijk aan die van de programma's bij de geïsoleerde leiding, behalve de temperatuursvector.

Tabel 8.5: De maximale concentratie bij verschillende eindtijden voor een niet-geïsoleerde leiding

Eindtijd(in uren)	27	28
Maximale concentratie in <i>kve/l</i>	90,24	102,83

Dit is een stuk later dan bij een geïsoleerde waterleiding. Dit betekent dat de leiding pas na 27 uur hoeft te worden doorgespoeld. Er kan worden geconcludeerd dat de leiding het beste niet geïsoleerd kan worden, wanneer men kijkt naar de kans op besmetting met de legionellabacterie.

9. Aanbevelingen

Er is een duidelijk model gemaakt voor de ontwikkeling van de legionellabacterie, wat gebruikt kan worden om de groei van de bacteriepopulatie weer te geven. Echter is er in dit model nog niet meegenomen dat het water stroomt, wanneer de kraan open gaat. Dit zal voor een volgend model kunnen worden toegevoegd. Dan kan er opnieuw gekeken worden naar hoe de bacterie zich verspreid door de leiding.

Daarnaast kunnen de modellen nog worden uitgebreid met verschillende andere invloeden, zoals de ontwikkeling van de voedingsstoffen die de bacterie nodig heeft om te groeien. In het huidige model wordt hier alleen rekening mee gehouden door middel van de draagkracht.

A. Symbolen- en waardenlijst

A.1 Geïntroduceerde symbolen

In onderstaande tabel zijn de geïntroduceerde symbolen te vinden. Deze symbolen zijn gekozen om de vergelijkingen in het verslag te vereenvoudigen. In de MATLAB programma's worden dezelfde symbolen gebruikt.

<i>Symbol</i>	<i>Betekenis</i>
a	$k_p(r_{uit}^2 - r_{in}^2)$
b	$2u_{u \rightarrow o} \cdot r_{uit}$
c	$2u_{w \rightarrow p} \cdot r_{in}$
m	$-k_w \cdot r_i n$
n	$2u_{w \rightarrow p}$
q	$k_i(r_{iso}^2 - r_{uit}^2)$
s	$2u_{i \rightarrow o} \cdot r_{iso}$
l	$2u_{p \rightarrow i} \cdot r_{uit}$

A.2 Waardenlijst

In onderstaande tabel zijn de gebruikte waarden te vinden. Mochten de waarden in een berekening afwijken van deze waarden, dan staat dit vermeld. De waarden zijn overgenomen uit het bachelorproject [4]. De daar genoemde waarden zijn gekregen van het bedrijf **Van Galen Klimaat-techniek** en het bedrijf **Armacell**.

<i>Symbol</i>	<i>Waarde</i>
L (watermodellen)	3 m
L (legionellamodellen)	1 m
h_l	15 W/(m ² K)
h_w	15000 W/(m ² K)
k_i	0,037 W/(mK)
k_p	401 W/(mK)
k_w	0,60 W/(mK)
r_{in}	$6,5 \cdot 10^{-3}$ m
r_{uit}	$7,5 \cdot 10^{-3}$ m
T_b	65 °C
T_o	20 °C
b	1000 kve/l
k	$\log(2)/2$ 1/s
D	$2,1 \cdot 10^{-2}$ m ² /s

B. Analytische oplossingsmethode

De verkregen differentiaalvergelijkingen uit paragraaf 5.1.1 worden analytisch opgelost. Met deze oplossing kan de numerieke oplossing worden gevalideerd. Het verkregen stelsel (zie pagina 11) wordt gegeven door:

$$a \frac{d^2 T_p}{dx^2} - b \cdot T_p + c(T_w - T_p) = -b \cdot T_o \quad (\text{B.1})$$

$$-m \frac{d^2 T_w}{dx^2} + n(T_w - T_p) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Er is nu een inhomogeen stelsel vergelijkingen ontstaan. De oplossing hiervan is een combinatie van de oplossing van het homogene stelsel en de particuliere oplossing van het inhomogene stelsel. Het is makkelijk in te zien dat een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel is:

$$\begin{pmatrix} T_p \\ T_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_o \\ T_o \end{pmatrix}$$

Nu zal er worden gezocht naar de oplossing van het homogene stelsel:

$$a \frac{d^2 T_p}{dx^2} - b \cdot T_p + c(T_w - T_p) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$-m \frac{d^2 T_w}{dx^2} + n(T_w - T_p) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Er wordt gezocht naar oplossingen van de vorm:

$$\begin{pmatrix} T_p \\ T_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} e^{\lambda x} \quad (\text{B.5})$$

Deze vergelijkingen worden ingevuld in het homogene stelsel (B.3) en (B.4). Dit geeft de volgende vergelijkingen voor λ :

$$a\epsilon_1 \lambda^2 e^{\lambda x} - b\epsilon_1 e^{\lambda x} + c(\epsilon_2 e^{\lambda x} - \epsilon_1 e^{\lambda x}) = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$-m\epsilon_2 \lambda^2 e^{\lambda x} + n(\epsilon_2 e^{\lambda x} - \epsilon_1 e^{\lambda x}) = 0 \quad (\text{B.7})$$

Door het wegdelen van $e^{\lambda x}$, kunnen de vergelijkingen als volgt worden genoteerd:

$$\begin{pmatrix} a\lambda^2 - b - c & c \\ -n & -m\lambda^2 + n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Er is nu een stelsel van de vorm $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ ontstaan. Hiermee kunnen de waarden voor λ worden bepaald. Dit doen we door de discriminant van A gelijk te stellen aan 0:

$$-a\lambda^4 m + a\lambda^2 n + bm\lambda^2 - bn + cm\lambda^2 = 0 \quad (\text{B.8})$$

Deze vergelijking is opgelost met behulp van het rekenprogramma Maple. Hierbij is gebruik gemaakt van de volgende waarden:

$$\begin{aligned} a &= 1 & b &= 1 & c &= 2 \\ m &= -1 & n &= 2 \\ T_o &= 20 & L &= 3 \end{aligned}$$

De bijbehorende eigenvectoren volgen uit de vergelijking:

$$-n\epsilon_1 + (-m\lambda^2 + n)\epsilon_2 = 0 \quad (\text{B.9})$$

Hieruit volgt dat de eigenvectoren dus van de vorm

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m\lambda^2 + n \\ n \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

zijn.

De homogene oplossing is dus nu als volgt te schrijven:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_p \\ T_w \end{pmatrix} &= f_1 \begin{pmatrix} -m\lambda_1^2 + n \\ n \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + f_2 \begin{pmatrix} -m\lambda_2^2 + n \\ n \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} \\ &+ f_3 \begin{pmatrix} -m\lambda_3^2 + n \\ n \end{pmatrix} e^{\lambda_3 x} + f_4 \begin{pmatrix} -m\lambda_4^2 + n \\ n \end{pmatrix} e^{\lambda_4 x} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

De algemene oplossing van het stelsel (B.1) en (B.2) is nu:

$$\begin{aligned} T_p &= f_1(-m\lambda_1^2 + n)e^{\lambda_1 x} + f_2(-m\lambda_2^2 + n)e^{\lambda_2 x} \\ &+ f_3(-m\lambda_3^2 + n)e^{\lambda_3 x} + f_4(-m\lambda_4^2 + n)e^{\lambda_4 x} + T_o \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$T_w = f_1 n e^{\lambda_1 x} + f_2 n e^{\lambda_2 x} + f_3 n e^{\lambda_3 x} + f_4 n e^{\lambda_4 x} + T_o \quad (\text{B.13})$$

Met behulp van Maple worden daarnaast ook de eigenwaarden van ons stelsel berekend:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{2} & \lambda_2 &= -\sqrt{2} \\ \lambda_3 &= i & \lambda_4 &= -i \end{aligned}$$

De algemene oplossing voor het inhomogene stelsel is nu gevonden. Door middel van de randvoorwaarden, kunnen we de constanten f_1, f_2, f_3 en f_4 bepalen en invullen in de functies (B.12) en (B.13), waarmee de volgende functievoorschriften voor T_p en T_w worden verkregen:

$$\begin{aligned} T_p &= 30.0061956 e^{\sqrt{2}x} + 30.0061956 e^{-\sqrt{2}x} \\ &+ (7.5 - 52.614394 i) e^{ix} + (7.5 + 52.614394 i) e^{-ix} + 20 \\ T_w &= -0.003097918 e^{\sqrt{2}x} + 15.0030978 e^{-\sqrt{2}x} + (15.0 - 105.228788 i) e^{ix} \\ &+ (15.0 + 105.228788 i) e^{-ix} + 20 \end{aligned}$$

voor $x \in [0, 3]$.

C. Matlab programma's

C.1 Niet-geïsoleerde watertapleiding

```
% MATLAB programma voor de niet-geïsoleerde warmwatertapleiding
% (Stationair)
% Naam: Stefanie Vonk
% Studienummer: 4085299
% Datum: 29-01-2014

%%
clc
clear all
close all

% Interval construeren
L = 3;
dx = 0.002;
N = L/dx;

% Vector x construeren, met x=0,...,L
for j = 0 : N
    x(j+1) = j * dx;
end

% Gegevens invoeren in MATLAB
k_p = 401;
r_in = 6.5*10^(-3);
r_uit = 7.5 *10^(-3);
a = k_p * (r_uit^2 - r_in^2)

h_l = 15;
u_po = 1/(((r_uit-r_in)/2)/k_p)+(1/h_l));
b = 2 * r_uit * u_po

h_w = 15000;
u_wp = 1/(((r_uit-r_in)/2)/k_p)+(1/h_w));
c = 2 * r_in * u_wp

k_w = 0.60;
m = k_w * r_in
n = 2 * u_wp

T_b = 65;
T_o = 20;

% Randvoorwaarden
u_0 = T_b;
u_N = T_o;
v_0 = T_b;
v_N = T_o;
```

```

% Construeren matrix A
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    onderdiag(i) = a/(dx^2);
end

hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    hoofddiag(i) = ((-2*a)/(dx^2))-(b+c);
end

bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    bovendiag(i) = a/(dx^2);
end
A_1 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
% De deelmatrix van A linksboven
A_1 = full(A_1);

A_2 = zeros(N-1,N-1); % De deelmatrix van A rechtsboven
for i = 1 : (N-1)
    A_2(i,i) = c;
end

A_3 = zeros(N-1,N-1); % De deelmatrix van A linksonder
for i = 1 : (N-1)
    A_3(i,i) = -n;
end

onderdiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    onderdiag1(i) = -m/(dx^2);
end

hoofddiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    hoofddiag1(i) = 2*m/(dx^2) + n;
end

bovendiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    bovendiag1(i) = -m/(dx^2);
end
A_4 = spdiags([onderdiag1 hoofddiag1 bovendiag1], -1:1,N-1,N-1);
% De deelmatrix van A rechtsonder
A_4 = full(A_4);

A = [A_1 A_2 ; A_3 A_4]; % De matrix A

% Construeren vector b
b_1 = zeros(N-1,1); % De deelvector van b boven
b_1(1) = -b * T_o - (a/(dx^2))*u_0;
for i = 2 : (N-2)
    b_1(i) = -b * T_o;
end
b_1(N-1) = -b * T_o - (a/(dx^2))*u_N;

b_2 = zeros(N-1,1); % De deelvector van b onder
b_2(1) = (m/dx^2)*v_0;
b_2(N-1) = (m/dx^2)*v_N;
b_vector = [b_1;b_2]; % De vector b

```

```

w = A\b_vector; % De vector w met u en v waarden

% Construeren vector v van de v-waarden op x_i
v = zeros(N+1,1);
v(1) = v_0;
for i = 2 : N
    v(i) = w((N-1)+i-1);
end
v(N+1) = v_N;

% Grafiek voor de temperatuur van het water plotten
plot_1 = plot(x,v,'r'); % Grafiek van T_w
set(plot_1,'LineWidth',2)
xlabel('x[m]', 'FontSize', 15);
ylabel('T_{w} [°C]', 'FontSize', 15);
grid;
set(gca,'FontSize',15);

```

C.2 Geïsoleerde watertapleiding

```

% MATLAB programma voor de geïsoleerde warmwatertapleiding (Stationair)
% Naam: Stefanie Vonk
% Studienummer: 4085299
% Datum: 29-01-2014

%%
clc
clear all
close all

% Interval construeren
L = 3;
dx = 0.002;
N = L/dx;

% Vector x construeren, met x=0,...,L
for j = 0 : N
    x(j+1) = j * dx;
end

% Gegevens invoeren in MATLAB
k_p = 401;
r_in = 6.5*10^(-3);
r_uit = 7.5 *10^(-3);
a = k_p * (r_uit^2 - r_in^2);
h_w = 5*3000;
u_wp = 1/(((r_uit-r_in)/2)/k_p)+(1/h_w));
c = 2 * r_in * u_wp;

k_w = 0.60;
m = k_w * r_in;
n = 2 * u_wp;
r_iso = r_uit + 9*10^(-3);
k_i = 0.037;
u_pi = 1/(((r_uit-r_in)/2)/k_p)+(((r_iso-r_uit)/2)/k_i));
l = 2 * r_uit * u_pi;

h_l = 15;
u_io = 1/(((r_iso-r_uit)/2)/k_i)+(1/h_l));
s = 2 * r_iso * u_io;

```

```

T_b = 65;
T_o = 20;

% Randvoorwaarden
u_0 = T_b;
u_N = T_o;
v_0 = T_b;
v_N = T_o;

% Construeren matrix A
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    onderdiag(i) = a/(dx^2);
end

hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    hoofddiag(i) = ((-2*a)/(dx^2))-1 + (l^2/(1+s)) - c;
end

bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    bovendiag(i) = a/(dx^2);
end
A_1 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
% De deelmatrix van A linksboven
A_1 = full(A_1);

A_2 = zeros(N-1,N-1); % De deelmatrix van A rechtsboven
for i = 1 : (N-1)
    A_2(i,i) = c;
end

A_3 = zeros(N-1,N-1); % De deelmatrix van A linksonder
for i = 1 : (N-1)
    A_3(i,i) = -n;
end

onderdiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    onderdiag1(i) = -m/(dx^2);
end

hoofddiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    hoofddiag1(i) = 2*m/(dx^2) + n;
end

bovendiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    bovendiag1(i) = -m/(dx^2);
end
A_4 = spdiags([onderdiag1 hoofddiag1 bovendiag1], -1:1,N-1,N-1);
% De deelmatrix van A rechtsonder
A_4 = full(A_4);

A = [A_1 A_2 ; A_3 A_4]; % De matrix A

% Construeren vector b
b_1 = zeros(N-1,1); % De deelvector van b boven
b_1(1) = -((l*s)/(1+s))*T_o - (a/(dx^2))*u_0;
for i = 2 : (N-2)

```

```

        b_1(i) = -((l*s)/(l+s)) * T_o;
    end
    b_1(N-1) = -((l*s)/(l+s))* T_o - (a/(dx^2))*u_N;

    b_2 = zeros(N-1,1); % De deelvector van b onder
    b_2(1) = (m/dx^2)*v_0;
    b_2(N-1) = (m/dx^2)*v_N;
    b_vector = [b_1;b_2]; % De vector b

    w = A\b_vector; % De vector w met u en v waarden

    % Construeren vector v van de v-waarden op x_i
    r = zeros(N+1,1);
    r(1) = v_0;
    for i = 2 : N
        r(i) = w((N-1)+i-1);
    end
    r(N+1) = v_N;
    Tw = r;

    % Grafiek voor de temperatuur van het water plotten
    plot_1 = plot(x,r,'b'); % Grafiek van T_w
    set(plot_1,'LineWidth',2)
    xlabel('x[m]', 'FontSize', 15);
    ylabel('T_{w} [^oC]', 'FontSize', 15);
    grid;
    set(gca, 'FontSize', 15);

```

C.3 Standaard groeimodel

```
% MATLAB programma voor standaard groeimodel van legionella (Stationair)
% Naam: Stefanie Vonk
% Studienummer: 4085299
% Datum: 29-01-2014

%%
clc; clear all; close all;

k = log(2)/2;
c0=1;
t_begin=0;
t_eind=24;
n_punten=500;
dt = (t_eind-t_begin)/(n_punten);

c = zeros(n_punten,1);
t = zeros(n_punten,1);

c(1)=c0;
t(1)=t_begin;

for i=1:n_punten-1
    c(i+1)=c(i)+dt*k*c(i);
    t(i+1)=t(i)+dt;
end

plot(t,c,'r');
title('Standaard groeimodel');
axis([0 25 0 max(max(c),max(c_exact_standdaard(t,c0,k)))*1.1]);
xlabel('De tijd in uren →');
ylabel('Aantal kolonievormende eenheden per liter →');
hold on;
plot(t,c_exact_standdaard(t,c0,k));
legend('Numeriek','Exact')
```

C.4 Begrensd groeimodel

```
% MATLAB programma voor het begrensde groeimodel van legionella
% (Stationair)
% Naam: Stefanie Vonk
% Studienummer: 4085299
% Datum: 29-01-2014

%%
clc; clear all; close all;

k = log(2)/2; %afhankelijk van de verdubbelingstijd
b = 1000; %aantal kolonievormende eenheden per liter * factor 10
c0=1;
t_begin=0;
t_eind=24;
n_punten=5000;
dt = (t_eind-t_begin)/(n_punten);

c = zeros(n_punten,1);
t = zeros(n_punten,1);
```

```

c(1)=c0;
t(1)=t_begin;

for i=1:n_punten-1
    c(i+1)=c(i)+dt*k*(1-c(i)/b)*c(i);
    t(i+1)=t(i)+dt;
end

plot(t,c,'r');
title('Begrensd groeimodel');
axis([0 24 0 max(c)*1.5]);
xlabel('De tijd in uren —>');
ylabel('Aantal kolonievormende eenheden per liter —>');

```

C.5 Gekoppeld systeem met standaard groeimodel

```
% MATLAB programma voor standaard groeimodel van legionella gekoppeld aan
% temperatuur (Stationair)
% Naam: Stefanie Vonk
% Studienummer: 4085299
% Datum: 29-01-2014

%%
clc; clear all; close all;

k = log(2)/2;
c0=1;
c_toeg = 100;
t_begin=0;
t_eind=24;
n_punten=50;
dt = (t_eind-t_begin)/(n_punten);

L = 1;
dx = .01;
xvector = 0:dx:L;

c = zeros(length(xvector)-1,n_punten);
t = zeros(n_punten,1);

c(:,1)=c0;
t(1)=t_begin;

%%Temp varieert met afstand gegevens inladen
load x.mat
load Tw.mat

%%De verdubbelingstijdmatrix construeren
ki = zeros(length(xvector)-1, n_punten);
for i = 1:length(xvector)-1
    ki(i,i) = k*kmetT(interp1(x,Tw,xvector(i)));
end

%%De concentratie berekenen
for j=1:n_punten-1,
    c(:,j+1)=c(:,j)+dt*(ki*c(:,j));
    t(j+1)=t(j)+dt;
end

pcolor(c)
colorbar
title('Aantal kolonievormende eenheden per liter (kve/l)');
xlabel('De tijdsindicatie —>');
ylabel('De positie in de leiding in cm —>');

plot(c(:,n_punten))
title('Aantal kolonievormende eenheden per liter (kve/l)');
xlabel('De positie in de leiding in cm —>');
ylabel('De temperatuur in de leiding in graden celsius —>');

% Analyse
% maximale concentratie in de tijd en de plaats
c_max=max(max(c))
% overschrijden we de toegelaten concentratie?
```

```

Besmetting = (c_max > c_toeg)
% gemiddelde concentratie in de tijd
c_gemiddelde = sum(c)/(length(xvector))
% overschrijden we de toegelaten concentratie?
Besmetting_Gemiddeld = (c_gemiddelde > c_toeg)

```

C.6 Gekoppeld systeem met begrensd groeimodel

```

% MATLAB programma voor het begrensde groeimodel van legionella gekoppeld
% aan de temperatuur (Stationair)
% Naam: Stefanie Vonk
% Studienummer: 4085299
% Datum: 29-01-2014

%%
clc; clear all; close all;

b = 1000; % aantal toegelaten kve/l * factor 10
k = log(2)/2; % afhankelijk van de verdubbelingstijd
c0=1;
c_toeg = 100; % toegelaten concentratie
t_begin=0;
t_eind=24;
n_punten=50;
dt =(t_eind-t_begin)/(n_punten);

L = 1;
dx = .01;
xvector = 0:dx:L;

cb = zeros(length(xvector)-1,n_punten);
t = zeros(n_punten,1);

cb(:,1)=c0;
t(1)=t_begin;

%Temp varieert met afstand gegevens inladen
load x.mat; load Tw.mat;

% De verdubbelingstijdmatrix construeren
ki = zeros(length(xvector)-1, n_punten);
for i = 1:length(xvector)-1
    ki(i,i) = k*kmetT(interp1(x,Tw,xvector(i)));
end

% De verdubbelingstijdmatrix construeren
for i = 1:length(xvector)-1,
    for j=1:n_punten-1
        cb(:,j+1)=cb(:,j)+dt*ki*(cb(:,j).*(1-(1/b)*cb(:,j)));
        t(j+1)=t(j)+dt;
    end
end

% pcolor(cb)
% colorbar
% title('Aantal kolonievormende eenheden per liter (kve/l)');
% xlabel('De tijdsindicatie -->');
% ylabel('De positie in de leiding in cm -->');

plot(cb(:,n_punten))
title('Aantal kolonievormende eenheden per liter (kve/l)');

```

```

xlabel('De positie in de leiding in cm —>');
ylabel('De temperatuur in de leiding in graden celsius —>');

% Analyse
% maximale concentratie in de tijd en de plaats
c_max=max(max(cb))
% overschrijden we de toegelaten concentratie?
Besmetting = (c_max > c_toeg)
% gemiddelde concentratie in de tijd
c_gemiddelde = sum(cb)/(length(xvector))
% overschrijden we de toegelaten concentratie?
Besmetting_Gemiddeld = (c_gemiddelde > c_toeg); c_sum = sum(sum(cb))

```

C.7 Gekoppelde systeem met diffusie en standaard groeimodel

```
% Impliciet MATLAB programma voor het standaard groeimodel van
% legionella met diffusie (impliciet)
% Naam: Stefanie Vonk
% Studienummer: 4085299
% Datum: 29-01-2014

%%
clc; clear all; close all;

% Gegevens invoeren in MATLAB
k = log(2)/2;
c_toeg = 100;
c0=1;
t_begin=0;
t_eind=24;
n_punten=50;
dt =(t_eind-t_begin)/(n_punten);
D =2.1*10^(-2); %diffussie coefficient

% Construeren vector x
L = 1;
dx = .01;
xvector = 0:dx:L;
N =length(xvector);

c = zeros(length(xvector)-1,n_punten);
t = zeros(n_punten,1);

c(:,1)=c0;
t(1)=t_begin;

% Construeren matrix K
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-2)
    onderdiag(i) = 1;
end
onderdiag(N-2)= -2;

hoofddiag = zeros(N-1,1);
hoofddiag(N-1)=2;
for i = 1 : (N-2)
    hoofddiag(i) = -2;
end

bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 2 : (N-1)
    bovendiag(i) = 1;
end
bovendiag(2) = 2;

K = (D/(dx^2))*spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
K = full(K);

% Temp varieert met afstand gegevens inladen
load x.mat; load Tw.mat;

% De verdubbelingstijdmatrix construeren
ki = zeros(length(xvector)-1, n_punten);
```

```

for i = 1:length(xvector)-1
    ki(i,i) = k*kmetT(interp1(x,Tw,xvector(i)));
end

IA = eye(size(K));
A = (IA - dt*(K+ki));

for j=1:n.punten-1,
    c(:,j+1)=A\c(:,j);
    t(j+1)=t(j)+dt;
end

% pcolor(c)
% colorbar
% title('Aantal kolonievormende eenheden per liter (kve/l)');
% xlabel('De tijdsindicatie -->');
% ylabel('De positie in de leiding in cm -->');

%Analyse
% maximale concentratie in de tijd en de plaats
c_max=max(max(c))
% overschrijden we de toegelaten concentratie?
Besmetting = (c_max > c_toeg)
% gemiddelde concentratie in de tijd
c_gemiddelde = sum(c)/(length(xvector))
% overschrijden we de toegelaten concentratie?
Besmetting.Gemiddeld = (c_gemiddelde > c_toeg);

```

C.8 Gekoppelde systeem met diffusie en begrensd groeimodel

```

% Expliciet MATLAB programma voor het groeimodel van legionella met
% diffusie (begrensd en imex)
% Naam: Stefanie Vonk
% Studienummer: 4085299
% Datum: 29-01-2014

%%
clc; clear all; close all;

% Gegevens invoeren in MATLAB
k = log(2)/2;
b = 1000;
c_toeg = 100;
c0=1;
t_begin=0;
t_eind=27;
n_punten=50;
dt = (t_eind-t_begin)/(n_punten);
D = 2.1*10^(-2); %diffussie coefficient

% Construeren vector x
L = 1;
dx = .01;
xvector = 0:dx:L;
N =length(xvector);

c = zeros(length(xvector)-1,n_punten);
t = zeros(n_punten,1);

```

```

c(:,1)=c0;
t(1)=t_begin;

% Construeren matrix K
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-2)
    onderdiag(i) = 1;
end
onderdiag(N-2) = -2;

hoofddiag = zeros(N-1,1);
hoofddiag(N-1)=2;
for i = 1 : (N-2)
    hoofddiag(i) = -2;
end

bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 2 : (N-1)
    bovendiag(i) = 1;
end
bovendiag(2) = 2;

K = (D/(dx^2))*spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
K = full(K);

% Temp varieert met afstand gegevens inladen
load x.mat; load Tw.mat;

% De verdubbelingstijdmatrix construeren
ki = zeros(length(xvector)-1, n_punten);
for i = 1:length(xvector)-1
    ki(i,i) = k*kmetT(interpl(x,Tw,xvector(i)));
end

IA = eye(size(K));
A = (IA - dt*K);

for j=1:n_punten-1,
    c(:,j+1)=A\((c(:,j)+dt*ki*(c(:,j).*(1-(1/b)*c(:,j)))));
    t(j+1)=t(j)+dt;
end

% pcolor(c)
% colorbar
% title('Aantal kolonievormende eenheden per liter (kve/l)');
% xlabel('De tijdsindicatie -->');
% ylabel('De positie in de leiding in cm -->');

% Analyse
% maximale concentratie in de tijd en de plaats
c_max=max(max(c))
% overschrijden we de toegelaten concentratie?
Besmetting = (c_max > c_toeg)
% gemiddelde concentratie in de tijd
c_gemiddelde = sum(c)/(length(xvector))
% overschrijden we de toegelaten concentratie?
Besmetting_Gemiddeld = (c_gemiddelde > c_toeg); c_sum = sum(sum(c))

```


Bibliografie

- [1] Joep Dohmen en Arlen Poort. Legionella bij honderden hotels en campings. NRC, 6 Juli 2013.
- [2] ing. E van Olffen. Legionella is te voorkomen. *NVVK*, 1999.
- [3] Yeong-Chul Kim. Diffusivity of bacteria. *Korean Journal of Chemical Engineering*, volume 13, pages 282-287, 1996.
- [4] Menel Rahrah. Energieverlies bij warmwaterleidingen, Juni 2010.
- [5] M. Thirumaleshwar. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Pearson, Jefferson City, 2006.
- [6] Legionella onder de loep. www.gezondheidsnet.nl/medisch/artikelen/585/legionella-onder-de-loep, december 2007.
- [7] Ot08 actie(s) bij overschrijding legionella-norm. AquaServa, V1-2012. Werkinstructie.