

laboratorium voor grondmechanica

delft

uit: S.71.057 (2)



stieltjesweg 2  
postbus 69  
telefoon: (015)-56 92 23\*  
telex: solab nl 33326  
postgiro: 234342  
bank: mees en hope nv delft

ARCHIEFEXEMPLAAR

EVALUATIE VAN EEN AANTAL  
GLIJVLAKBEREKENINGSMETHODEN

Rapport SE-690099

januari 1977

# Rapport SE-690099 (LGM)

## "Evaluatie van een aantal glijvlakberelieningsmethoden"

### Inhoudsopgave

blz:

0.	Inleiding (methoden, berelieningsdelen, Coulomb, veiligheidsfactor)	1
0.1.	Gebbruikelijke opzet van een glijvlakbereliening (evenwicht-uitwendig-perlamel, bovenbelasting, Flyhand- of computerbereliening)	6
1.	Methode Hoozenboom	13
	gecorrigeerde Hoozenboom	15
2.	Uitgebreide methode Bishop	16
3.	Vereenvoudigde methode Bishop	17
4.	U.S. Bureau of Reclamation (Daehn en Hilf)	19
5.	Methode Spencer I	21
6.	Methode Spencer II	23
7.	Methode Morgenstern en Price	25
8.	Jambu Methode	26
9.	Methode Fellenius	27
10.	"Stability Charts"	28
11.	Afweging van verschillende rekenmethoden (voorkeur voor Spencer II als computerprogramma)	29



## 0. Inleiding

In het navolgende zal een aantal van de meer bekende, en gebruikte glijvlakberekeningsmethoden worden beschreven en vergeleken. Deze methoden zijn die van:

Fellenius  
Bureau of Reclamation  
Bishop (vereenvoudigde methode)  
Spencer  
Morgenstern & Price  
Janbu  
Hoogenboom

Opgemerkt wordt dat deze rekenmethoden gebaseerd zijn op een z.g. kinematisch bezwijkmechanisme waarvan bekend is dat een oplossing wordt gevonden die hoger ligt dan de echte bezwijkbelasting, dus aan de onveilige kant.

Daar de echte bezwijkbelasting niet kan worden berekend zou men beter een bezwijkmechanisme kunnen gebruiken dat een lagere waarde oplevert dan de echte bezwijkbelasting, dus aan de veilige kant. Een dergelijke methode is bijvoorbeeld die der eindige elementen. Hoewel deze methode al veel wordt gebruikt is zij bij de huidige stand totaal ongeschikt voor routineberekeningen om hoofdzakelijk drie redenen:

1. er wordt geen getal voor de veiligheid als uitkomst gevonden.
2. de in te voeren grondparameters zijn erg lastig met behulp van laboratoriumonderzoek te bepalen, waarbij ook de nauwkeurigheid te wensen overlaat.
3. kostbaar, zowel op zichzelf als door de duurdere monsterbeproeving.

Er wordt daarom hier verder niet op dergelijke methoden ingegaan.



Er kan direct een scheiding worden gemaakt in twee groepen:

Groep 1: omvat de meestal oudere methoden die beperkt zijn in hun mogelijkheden; b.v. alleen geschikt voor homogene grond, of hoogstens 2 verschillende grondsoorten, geen mogelijkheid voor een scheiding in droge en natte grond, geen hellende freatische lijn enz.

Groep 2: omvat de meestal meer recente methoden die geschikt zijn voor een onbeperkt aantal grondlagen, en willekeurige waterspanningsverdelingen.

De in de aanvang genoemde methoden vallen alle onder groep 2; groep 1 is voor dit overzicht van geen belang en zal dan ook niet beschreven worden.

Elke glijvlakberekening valt uiteen in verschillende delen:

1. invoering van de lagenverdeling met volumieke massa's van de lagen, zodat in elk willekeurig punt de verticale grondspanning kan worden berekend.
2. invoering van de waterspanningen, zodat nu de verticale korrelspanningen overal bekend zijn.
3. het berekenen van de aandrijvende krachten.
4. het berekenen van de tegenwerkende krachten.
5. het bepalen van de evenwichtsfactor ("veiligheid").

De punten 1 en 2 vormen een deel dat voor alle methoden gelijk is. Het is als het ware een vraagstuk apart (zeker wat punt 2 betreft!) dat onafhankelijk is van de verder te gebruiken glijvlakmethode. Over dit deel zal dan ook verder niet worden gesproken.



Punt 3 is in principe voor alle methoden gelijk, doch meestal zo verweven daarmee, dat het automatisch ter sprake komt.

Punt 4 geeft aanleiding tot verschil van mening. Hoe dit komt zal later worden behandeld; de mogelijkheid tot meningsverschil leidt tot de verschillende in de literatuur behandelde glijvlakmethoden; hierover zal hoofdzakelijk het hiernavolgende handelen.

Punt 5 vereist enige toelichting. Er zal namelijk afgesproken moeten worden waarin de "veiligheid" van een talud uitgedrukt zal worden. Ook hierover bestaan verschillen van inzicht.

Er is één methode die de veiligheid uitdrukt in een extra kracht boven aan het talud waarvan de grootte per m' in lengterichting zo wordt bepaald dat het talud juist nog in evenwicht is. Dit kan b.v. nuttig zijn voor taluds van bouwputten.

In het algemeen is men het er over eens dat de veiligheid het beste kan worden uitgedrukt als de verhouding tussen de beschikbare schuifweerstand van de grond en de schuifspanning die nodig is om juist evenwicht te maken. Een getal groter dan één wijst dan op een overmaat aan stabiliteit, en een getal kleiner dan één op een tekort. Welk getal men zal eisen in een bepaald geval is een vraagstuk apart waarover hier verder niet zal worden gesproken. Bij de glijvlakberekeningen gaan alle onderzoekers uit van het theorema van Coulomb, dat de schuifweerstand weergeeft als:

$$\tau_s = c + \sigma_s \operatorname{tg} \phi$$

waarin  $\tau_s$  = schuifweerstand in het schuifvlak

$\sigma_s$  = korrelspanning loodrecht op het schuifvlak

$\phi$  = hoek van inwendige wrijving

c = ware cohesie of nul-wrijving

Dan is de veiligheid F:

$$F = \frac{(c + \sigma \operatorname{tg} \phi) \text{ beschikbaar}}{(c + \sigma \operatorname{tg} \phi) \text{ benodigd voor evenwicht}} = \frac{\text{schuifweerstand}}{\text{schuifspanning}}$$



Er worden nu algemeen twee aannamen gedaan:

1. de waarde voor  $F$  is in alle punten van het glijvlak gelijk. Dit dus onafhankelijk van de plaats van het punt (in het actieve of het passieve gedeelte) en van de soort grond waarin het punt zich bevindt.
2. de waarde van  $F$  werkt in gelijke mate op  $c$  en op  $tg \phi$ .

ad. 1. dit is geen erg reële aanname, en zeker geen noodzakelijke, doch wel een gemakkelijke. In feite betekent het dat wanneer een talud door de één of andere oorzaak steeds dichterbij het moment van afschuiven wordt gebracht, in alle punten langs het potentiële glijvlak de optredende schuifspanning in dezelfde verhouding de beschikbare schuifweerstand benadert, totdat op het zelfde moment in alle punten die verhouding = 1 is geworden.

Dit kan niet juist zijn indien men bedenkt dat voor elke grondsoort geldt dat voor het bereiken van de maximale schuifweerstand een zekere vervorming nodig is. Dit volgt b.v. direct uit de triaxiaalproef. Uit deze zelfde proef volgt echter ook dat de mate van die vervorming lang niet dezelfde is voor alle grondsoorten.

In een afschuifvlak treedt echter in alle punten dezelfde vervorming op, zodat de verhouding  $F$  afhankelijk zal zijn van de grondsoort.

Anderzijds zullen ook de spanningsverhoudingen in de omgeving van het glijvlak zodanig zijn dat ook in het geval van een homogeen massief niet in alle punten dezelfde verhouding  $F$  optreedt: uit behandelingen van taluds met de eindige elementen methode bijvoorbeeld volgt duidelijk dat in sommige delen van het schuifvlak de "breukspanning" veel eerder wordt bereikt dan in andere delen.

Met geen van beide overwegingen wordt derhalve bij de orthodoxe glijvlakberekeningen rekening gehouden. Vooral ten aanzien van het eerstgenoemde punt zou overwogen kunnen worden naar een betere aanname te zoeken.



ad. 2. De beschikbare  $c$  en  $\text{tg } \phi$  (= schuifweerstand) wordt internationaal aangeduid met  $c'$  en  $\text{tg } \phi'$  (z.g. 'geconsolideerde waarden').

$$\text{Dan is } F = \frac{(c' + \sigma \text{tg } \phi')}{(c + \sigma \text{tg } \phi)}$$

Onder aanname van punt 2 kan dit ook geschreven worden als:

$$\frac{c'}{F} + \sigma \frac{\text{tg } \phi'}{F} = c + \sigma \text{tg } \phi$$

In het bekende  $\tau$ - $\sigma$  diagram (zie figuur 1) wordt dit aangegeven door de lijn I.

Bij het benaderen van  $\tau_{\text{max}}$  (lijn II) draait dus lijn I om het punt A ( $\sigma = -c' \text{ctg } \phi'$ ).

Het is echter lang niet zeker dat op deze wijze in de grond de  $\tau_{\text{max}}$  wordt bereikt. Waarom zou b.v. niet eerst  $c'$  geheel gemobiliseerd worden, en daarna pas  $\sigma \text{tg } \phi$  aangroeien?

Brinch Hansen neemt aan dat de  $F$  voor  $c'$  inderdaad verschilt van die voor  $\sigma \text{tg } \phi'$ , zij het op grond van andere overwegingen.

Bij de bepaling van de  $c'$ - en  $\phi'$ -waarden uit proeven blijkt steeds dat de spreiding in de  $c'$ -waarden groter is dan die in de  $\phi'$ -waarden. Blijkbaar kan de  $\phi'$  met een grotere nauwkeurigheid worden bepaald dan de  $c'$ . Om deze reden voert Brinch Hansen voor de  $c'$  een extra "onzekerheidsfactor" in waardoor de  $F$  voor de  $c'$  groter is dan die voor de  $\sigma \text{tg } \phi'$ .

Nog enkele algemene opmerkingen:

1. Alle glijvlakberekeningen zijn tweedimensionaal opgezet. Een enkele methode (b.v. Janbu) kan ook axiaal-symmetrisch worden toegepast, doch willekeurig driedimensionale gevallen kunnen hier niet worden berekend.



Heeft men toch behoefte aan een dergelijke behandeling, dan zijn in de literatuur wel enkele beschouwingen te vinden, zoals b.v. voor kegelvormige taluds [12].

2. De verschillen in uitkomst van de hier te behandelen berekeningsmethoden zijn betrekkelijk gering; onderlinge afwijkingen van meer dan 10% zijn uitzonderingen. Daartegenover komen bij de diverse methoden om de  $c'$ - en de  $\phi'$ -waarden van de grond vast te stellen veel grotere verschillen voor; afwijkingen van 50% en meer worden geregeld geconstateerd. Daarnaast zal men bij de vaststelling van laagverdelingen, volumieke massa's, en de waterspanningen moeilijk een grotere nauwkeurigheid dan ca 10% kunnen bereiken. De representativiteit van een bepaald profiel voor een bepaalde strekking van een dijk of een talud is daarbij nog een vraagstuk apart.

In dit licht lijkt het voor het afwegen van de verschillende rekenmethoden eerder nuttig te letten op praktische en universele toepasbaarheid dan op nauwkeurigheid in de uitkomst.

#### 0.1. Gebruikelijke opzet van een glijvlakberekening

Alle meer recente glijvlakberekeningen verdelen het gebied binnen het gekozen afschuifvlak in verticale lamellen. Hierdoor wordt het schuifvlak in een aantal delen verdeeld, waarbij zo nodig per deel met andere wrijvingsgrootheden kan worden gerekend (zie figuur 2a). Op deze wijze kan men eenvoudig met een verdeling in lagen met verschillende grondeigenschappen rekening houden. Door bovendien ook de krachten die op de lamelscheidingen werken in de berekening te betrekken kan naast het uitwendig evenwicht van de afschuivende massa, ook het inwendige evenwicht daarvan worden gecontroleerd (zie figuur 2b).





Dit brengt ons op de ervaring die vele onderzoekers melden omtrent de invloed die verschillende berekeningsonderdelen hebben op de nauwkeurigheid van de uitkomst. Waaruit deze berekeningsonderdelen bestaan moge uit het volgende blijken:

De glijvlakberekening is in beginsel een evenwichtsvraagstuk: men onderzoekt een omgrensde grondmassa die in grensevenwicht verkeert. Die grondmassa ondervindt uitwendige krachten die juist met elkaar in evenwicht verkeren; voor deze krachten moet derhalve een gesloten krachtenveelhoek kunnen worden geconstrueerd. Het is echter niet mogelijk hiervoor een éénduidige oplossing te vinden; er zijn ten minste oneindig vele oplossingen die voldoen, met elk een eigen getal voor de "veiligheid". Hoewel in het algemeen deze veiligheidsfactoren onderling niet zo erg veel in grootte verschillen zal men toch willen nagaan welke oplossing de meest juiste is.

Daartoe wordt als regel op één of andere wijze ook het inwendig evenwicht van de afschuivende massa in de berekening betrokken. Nu de grondmassa al in verticale lamellen verdeeld was gedacht ligt het voor de hand als tweede stap voor de oplossing van het vraagstuk van dit inwendige evenwicht het evenwicht van elke lamel afzonderlijk te kiezen. Voor de krachten die uitwendig op elke lamel afzonderlijk werken moet weer een gesloten krachtenveelhoek kunnen worden geconstrueerd. Ook hier echter zijn vele oplossingen per lamel mogelijk waaruit een keuze moet worden gedaan.

Vele methoden stoppen hier, in die zin, dat uit die vele mogelijke oplossingen er één gekozen wordt door betrekkelijk willekeurige extra voorwaarden op te leggen aan twee of meer van de krachten. Het hangt nu af van de "slimheid" waarmee deze voorwaarden zijn opgesteld of een min of meer bevredigende oplossing wordt gevonden.

Andere onderzoekers doen hier nog een derde stap door ook de krachten die op de lamelscheidingen werken aan een onderzoek te onderwerpen. Deze krachten moeten weer per lamelscheiding evenwicht maken, en daarnaast, afhankelijk van de methode, gesommeerd vaak ook nog evenwicht maken met bepaalde uitwendige krachten.



Als vierde stap kunnen nog aan de lamelscheidingskrachten afzonderlijk bepaalde voorwaarden worden gesteld. Dit volgt uit de overweging dat de verticale lamelscheidingen geen toegevoegde schuifvlakken zijn. Dit betekent dat de in die vlakken berekende schuifspanningen relatief verder verwijderd moeten zijn van de beschikbare schuifweerstand, dan in het eigenlijke schuifvlak. Met andere woorden de evenwichtsfactor  $F_2$  ("veiligheid") die uit de berekening van de schuifspanning in de lamelscheidingen volgt moet groter zijn dan de  $F$  van het glijvlak zelf.

Al naar gelang de analyse verder wordt verfijnd zal een steeds betere waarde voor de evenwichtsfactor  $F$  worden bepaald. Hierbij blijkt de eerste stap verreweg de belangrijkste te zijn; de tweede al veel minder, de derde weer minder enz.

De eerste stap betrof het uitwendig evenwicht. De aandrijvende krachten (eigengewicht afschuivende moot, eventuele uitwendige belastingen op het talud, aardbevingskrachten, waterdrukken) moeten evenwicht maken met de weerstandbiedende krachten (gesommeerde normaal- en schuifspanningen langs het glijvlak). Hoewel in principe het opzetten van een krachtenveelhoek niet onmogelijk is, is deze grafische methode veel omslachtiger dan een analytische behandeling. Deze analytische behandeling wordt als regel uitgevoerd in de vorm van drie evenwichtsvergelijkingen: momentevenwicht, vertikaal evenwicht, horizontaal evenwicht.

Het blijkt nu dat alleen al met het voldoen aan het momentenevenwicht het vraagstuk voor ca 90% is opgelost. De volgende belangrijke voorwaarde is het verticale evenwicht; het horizontale evenwicht is van veel kleinere importantie. Pas daarna blijken de volgende hiervoor behandelde stappen 2, 3 en 4 nog tot verdere verfijning en nauwkeurigheid bij te dragen, ongeveer in de vermelde volgorde.



Uit de ervaring dat in de allereerste plaats aan het uitwendig momentenevenwicht moet worden voldaan kan direct worden afgeleid, dat een berekeningswijze, die de veiligheid uitdrukt in de verhouding van weerstandbiedend moment gedeeld door aandrijvend moment, in elk geval tot een zeer onnauwkeurig antwoord moet leiden. Er wordt dan immers niet aan de belangrijkste voorwaarde voldaan.

In figuur 2a was een afschuivende moot getekend met een aangenomen schuifvlak van willekeurige vorm, en in figuur 2b is één der lamellen er uitgelicht met daarbij aangegeven de krachten die op die lamel werken.

Het gewicht  $G$ , de eventuele krachten  $Q_H$  en  $Q_V$  (b.v. aardbevingskrachten of funderingskrachten) de normaalkracht  $N$  op het stukje schuifvlak  $AB$  en de schuifkracht  $W$  op dit zelfde vlakje zijn uitwendige krachten. De krachten  $E_1$ ,  $T_1$ ,  $E_2$  en  $T_2$  op de lamelscheidingsvlakken zijn inwendige krachten.

De lamel heeft een breedte  $\Delta x$ , en het schuifvlak  $AB$  maakt een helling  $\alpha$  met de horizontaal. Aangenomen wordt verder dat de breedte  $\Delta x$  zo gering is ten opzichte van de hoogte van de lamel dat aangenomen mag worden dat het aangrijpingspunt van de normaalkracht  $N$  in het midden van  $AB$  ligt.

Bekend in grootte en richting zijn alleen de krachten  $G$ ,  $Q_H$  en  $Q_V$ . Onbekend in grootte zijn alle andere krachten, en onbekend zijn bovendien de aangrijpingspunten van de krachten  $E_1$  en  $E_2$ .

De krachten  $N$  en  $W$  zijn daarentegen gekoppeld door het theorema van Coulomb.

$$\text{Immers } N = \sigma \times \overline{AB} = \sigma \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$W = (c' + \sigma \operatorname{tg} \phi') \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$



De kracht  $W$  kan in  $N$  worden uitgedrukt. Echter, dit geldt alleen indien de  $c + \sigma \operatorname{tg} \phi$  die nodig is voor juist evenwicht gelijk is aan de beschikbare schuifweerstand  $c' + \sigma \operatorname{tg} \phi'$ . Is er een overmaat aan weerstand dan wordt volgens afspraak  $W$  uitgedrukt als:

$$W = \left( \frac{c'}{F} + \sigma \frac{\operatorname{tg} \phi'}{F} \right) \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

Eenzijds kan één der krachten  $N$  of  $W$  worden geëlimineerd, anderzijds moet een onbekende factor  $F$  worden ingevoerd, die dan wel (ook weer volgens afspraak) voor alle lamellen dezelfde waarde heeft.

Wanneer de afschuivende moot in  $n$  lamellen is verdeeld is per lamel  $N$  onbekend; dus  $n$  onbekenden.

Er zijn  $n-1$  lamelscheidingen; per lamelscheiding zijn onbekend  $T$ ,  $E$  en het aangrijpingspunt van  $E$ :  $3(n-1)$  onbekenden. Verder is er nog 1 onbekende  $F$ . Totaal  $4n-2$  onbekenden.

Per lamel zijn er drie evenwichtsvergelijkingen; (bij sommige methoden gebruikt men alleen één uitwendige momentvergelijking).

Uitwendig vertikaal en horizontaal evenwicht zijn automatisch in orde bij een goede methode indien dit per lamel in orde is. Totaal  $3n$  vergelijkingen. Er zijn dus  $(4n-2) - (3n) = n-2$  vergelijkingen tekort, of onbekenden te veel.

Wil men het vraagstuk kunnen oplossen, dan moeten er nog  $n-2$  betrekkingen tussen onbekenden worden opgelegd, veronderstellingen voor onbekenden worden gedaan, onbekenden worden verwaarloosd, of combinaties hiervan worden vastgesteld. De vele mogelijkheden die hiervoor bestaan geven aanleiding tot de vele glijvlakmethoden die in de literatuur te vinden zijn.

De berekening gaat uiteraard uit van de bekende krachten  $G$  en eventueel  $Q$ . Laat men  $Q$  even buiten beschouwing dan krijgt iedere lamel zijn eigen gewicht mee. Stelt men de krachten  $E$  en  $T$  gelijk nul dan staan de lamellen wrijvingsloos los naast elkaar.



Zijn de krachten E en  $T \neq 0$  dan vindt een zekere herverdeling plaats van de krachten G binnen de afschuivende moot. In alle gevallen blijken de verticale drukken op het glijvlak aan de passieve (lage) kant toe te nemen, en aan de actieve (hoge) kant af te nemen.

Dit is op zichzelf juist daar in ieder talud dit effect van nature optreedt. Het is echter niet zeker of deze herverdeling overeenkomt met de werkelijkheid, waarbij al wel kan worden aangetekend dat die herverdeling verschillend zal zijn bij de verschillende glijvlakmethoden, die immers verschillende waarden voor de krachten E en T opleveren.

Ten einde enig inzicht te verkrijgen in het effect van de herverdeling op de berekende veiligheid is op het LGM eerst een aantal taluds berekend met de vereenvoudigde methode Bishop. Daarna is met behulp van een elastische berekening met de eindige elementenmethode eerst voor die taluds een herverdeling voor de krachten G berekend, waarna met die nieuwe G-verdeling opnieuw glijvlakberekeningen zijn uitgevoerd. Uiteraard is er daarbij voor gezorgd dat van de afschuivende moot het totale gewicht gelijk bleef.

De bij de herverdeling berekende waarden voor F bleken alle lager te liggen dan die van het eerste geval, waarbij afwijkingen voorkomen van enkele procenten tot meer dan 10%. Hoewel hier, strikt genomen, op ontoelaatbare wijze twee rekenmethoden worden gecombineerd, n.l. een elastische berekening op een grondmassa die in grensevenwicht verkeert, zou dit een aanwijzing kunnen zijn dat methoden die een grotere herverdeling bewerkstelligen dan Bishop de voorkeur zouden verdienen.

Wanneer op of in het talud puntlasten voorkomen dan zullen deze zonder verdere maatregelen elk op één bepaalde lamel aangrijpen. Gezien het voorgaande is het wel duidelijk dat in de glijvlakberekening een veel geringere spreiding van de puntlast wordt bewerkstelligd dan in werkelijkheid zal optreden.



Het is dan beter een dergelijke puntlast eerst zelf te spreiden over een aantal lamellen, voordat de glijvlakberekening wordt toegepast. Een bevredigende oplossing hiervoor is echter nog niet gevonden.

Ten slotte moet nog een opmerking worden gemaakt omtrent het woord "veiligheid". In de kringen van ontwerpers en beheerders van dijken wordt onder veiligheid een veel bredere scala van factoren samengevat: de kans op overstroming van de kruin, het bestand zijn van het voortalud tegen golfaanval, het bestand zijn van het achtertalud tegen overstroming, het gevaar van onderloopsheid, en daarnaast ook nog de stabiliteit van de taluds. Om verwarring te voorkomen spreekt men daarom over  $F$  als de "evenwichtsfactor" en niet als de veiligheid.

Alvorens over te gaan tot de bespreking van een aantal glijvlakmethoden moet worden opgemerkt dat wanneer formules worden vermeld, deze niet altijd overeenkomen met die welke door de betrokken auteurs in hun geschriften worden gegeven. Dit is vaak het gevolg van het streven van de auteur om de coëfficiënt  $F$  expliciet uit te drukken in de gegevens. Daar dit meestal niet zonder meer mogelijk is wanneer een niet-hydrostatische waterdrukverdeling ingevoerd moet kunnen worden, moet een kunstgreep worden toegepast. In bijna alle literatuur wordt dit gedaan door de waterspanningen door het gehele te onderzoeken massief uit te drukken in een vast percentage van de plaatselijke verticale grondspanning.

Dit nu is een weinig reële veronderstelling; daar de waterspanningen blijkens ervaring grote invloed hebben op de waarde van  $F$  wordt op het LGM deze wijze van invoering van de waterspanningen niet gebruikt. Nu was de wens om  $F$  expliciet uit te drukken ingegeven door het feit dat die rekenmethoden ontwikkeld zijn in een tijd dat nog niet of nauwelijks van computers gebruik werd gemaakt.



Voor een handberekening is een dergelijke oplossing voor  $F$  uiteraard handzaam.

Bij gebruik van een computer is een iteratieproces geen probleem. Bij de programma's die op het LGM zijn ontwikkeld worden daarom aanvankelijk de schuifweerstandsgrootheden  $c'$  en  $\phi'$  voor de volle waarde ingevoerd. De daarmee berekende waarde voor  $F_1$  is dan niet juist daar immers geen volledig evenwicht gemaakt kan worden. Dan worden de  $c'$ - en  $\phi'$ -waarden door  $F_1$  gedeeld waarmee een nieuwe  $F_2$  wordt berekend. Dit iteratieproces wordt herhaald tot een vooraf vastgestelde waarde voor het verschil tussen  $F_{n-1}$  en  $F_n$  wordt bereikt van bijvoorbeeld minder dan 0,001. De werkelijke waarde voor  $F$  is dan  $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ .

Het aantal iteratiestappen blijkt in het algemeen gering te zijn, in de buurt van 3. Dit betekent dat ook voor handberekeningen deze rekenwijze nog toepasbaar is.

De bespreking van de verschillende rekenmethoden kan het best worden begonnen met die van Hoogenboom, niet alleen omdat deze geheel afwijkend is in opzet van alle andere doch ook omdat deze methode een beter inzicht geeft in de spanningsverdeling in de omgeving van het schuifvlak. De verschillende methoden staan hier dus niet in chronologische volgorde.

#### 1. Methode Hoogenboom

Deze methode, die door Ir. Hoogenboom tijdens zijn werkzaamheid bij het LGM werd ontwikkeld in 1954-55, gaat uit van de spanningsleer. Overwegende dat het schuifvlak bij grensevenwicht een vlak is met maximale verhouding  $\tau/\sigma$ , welk vlak hoeken maakt van  $45^\circ - \frac{\phi}{2}$  en  $45^\circ + \frac{\phi}{2}$  met de richtingen van de hoofdspanningen ter plaatse, kunnen via het diagram van Mohr de spanningen in ieder willekeurig vlak worden vastgesteld, daar de richtingen van de hoofdspanningen nu bekend zijn.



Bij de vlakspanningstoestand (de derde hoofdspanning blijft immers bij de glijvlakberekeningen buiten beschouwing) kunnen de spanningsverhoudingen in een punt worden voorgesteld door één cirkel van Mohr (figuur 3b). Voor dit punt wordt gekozen het midden van de onderzijde van de lamel.

Op een elementair rechthoekig driehoekje met het schuine vlak evenwijdig met de onderzijde van de lamel werken normaal- en schuifspanningen zoals in figuur 3c. Door middel van de constructie van Mohr kunnen de grootteverhoudingen worden vastgesteld. Wanneer één der spanningen ook in grootte bekend is, kan van alle andere spanningen eveneens de grootte worden berekend.

Door Hoogenboom is als bekende spanning gekozen  $\sigma_v$ , en wel gelijk aan het natte gewicht van de lamel gedeeld door de breedte  $\Delta x$ , minus de waterdruk in dat punt van het glijvlak. Dan is de gevraagde  $\tau_s$  eenvoudig in  $\sigma_v$  uit te drukken als:

$$\tau_s = \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - \sin \phi \sin (\phi + 2\alpha)} (\sigma_v + c_2 \operatorname{ctg} \phi)$$

Door deze berekening toe te passen op cirkelvormige glijvlakken kan het tegenwerkend moment worden berekend als  $R \cdot \Sigma \tau_s \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$  waarin  $R$  is de straal van de glijcirkel.

Het aandrijvende moment is gelijk aan de som van nat gewicht lamel maal horizontale hefboomsarm t.o.v. middelpunt cirkel, plus een eventueel moment door vrij water.

Door eerst voor elke lamel de plaatselijke  $c'$  en  $\phi'$  in te vullen wordt  $F_1$  berekend als tegenwerkend moment/aandrijvend moment. Dan worden  $c'$  en  $\operatorname{tg} \phi'$  gedeeld door  $F_1$ , en daarmee een  $F_2$  berekend, enz zoals hiervoor is aangegeven.

Er werd al snel ervaren dat deze methode geen betrouwbare uitkomsten oplevert. Hoewel de constructie geheel juist is voor het elementaire driehoekje is het niet juist dit toe te passen voor de gehele lamel. Stilzwijgend wordt namelijk verondersteld dat de spanningen  $\tau_h$ ,  $\tau_v$  en  $\sigma_h$  in een bepaalde verhouding overeenkomen met de krachten  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $T_1$  en  $T_2$  op de grotere schaal van de lamel, en dit is eenvoudig niet waar.





Het gevolg is dat noch per lamel, nog uitwendig over de gehele afschuivende moot het horizontaal- en vertikaal evenwicht gewaarborgd is. Fouten tot ca 10% in de waarde van  $F$  worden aldus geïntroduceerd, waarmee deze methode voor nauwkeuriger berekeningen verworpen moest worden.

Er is getracht, uitgaande van de Hoogenboombehandeling, wel aan vertikaal- en horizontaal evenwicht te voldoen door de invoering van twee correctiekrommen. De uitkomsten zijn zeer betrouwbaar gebleken, nu aan de drie belangrijkste evenwichtsvoorwaarden werd voldaan. Deze methode is op het LGM vele jaren gebruikt onder de naam Gecorrigeerde Hoogenboom.

Toch bleek op den duur dat onder bepaalde omstandigheden de correcties gingen overheersen over de eigenlijke Hoogenboombehandeling zodat erg onwaarschijnlijke spanningsverdelingen langs het schuifvlak worden berekend. Hoofdzakelijk om deze reden wordt ook de Gecorrigeerde Hoogenboommethode sinds kort niet meer gebruikt.

Tegelijkertijd is op andere wijze getracht althans het vertikaal evenwicht per lamel in orde te maken. Deze rekenwijze bleek achteraf overeen te komen met die van Bishop, en zal onder die naam besproken worden.

Door Ir. Koppejan van het LGM werd destijds opgemerkt, dat wanneer in de spanningscirkel van figuur 3b de twee spanningen  $\tau_v$  en  $\sigma_h$  worden samengesteld tot de spanning  $P$ , dat dan de richting van  $P$  een aanwijzing geeft voor de richtingen van de lamelscheidingskrachten  $P_1$  en  $P_2$ . Laat men in de spanningscirkel  $\alpha$  verlopen van  $-90^\circ$  over  $0$  naar  $+90$  dan kan de bijbehorende richting van  $P$  worden berekend. Wordt deze helling van  $P$  vastgelegd aan de aangrijpingspunten van deze krachten in de lamelscheidingen dan verkrijgt men de zogenaamde druklijn door de afschuivende moot (Engels: thrustline) zie figuur 4.

Deze aanwijzing is nuttig in verband met enige andere rekenmethoden.



De hiervoor vermelde formule van Hoogenboom kan geschreven worden als  $\tau_s = A (\sigma_v + \sigma_v \operatorname{ctg} \phi)$  waarin

$$A = \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - \sin \phi \sin (\phi + 2 \alpha)}$$

De waarde van A, die de betrekking weergeeft tussen de gevraagde schuifweerstand langs het glijvlak, en de gegevens c en  $\phi$ , en  $\sigma_v$  kan als functie van  $\alpha$  in grafiek worden gebracht voor een bepaalde waarde van  $\phi$ . Voor  $\phi = 30^\circ$  is dit weergegeven in figuur 5 als kromme A, die een regelmatig vloeiend verloop blijkt te hebben. Er kan van worden uitgegaan dat deze kromme gemiddeld iets te laag ligt.

De kromme c behoort bij een formule die door Ir. Koppejan is opgesteld waarbij krachten  $P_1$  en  $P_2$  werden ingevoerd die afgeleid waren uit de figuur 3b. Door de veel hogere ligging boven kromme A werd vermoed dat deze methode te hoge waarden voor F zou opleveren. Mede om deze reden is deze berekeningswijze niet verder ontwikkeld.

Samenvattend kan van de methode Hoogenboom worden gezegd:

1. Alleen geschikt voor cirkelvormige glijvlakken.
2. Maakt uitsluitend uitwendig momentenevenwicht.
3. Geeft te lage evenwichtsfactoren.

## 2. Uitgebreide methode Bishop

In zijn eerste publicatie [1] heeft Bishop bij een indeling van de afschuivende moot in verticale lamellen alle krachten aangegeven die op een lamel werken. Zoals ook in onze inleiding is aangegeven merkt hij op dat het een veelvoudig statisch onbepaald probleem is, dat alleen of proberenderwijs kan worden opgelost of door bepaalde vereenvoudigingen aan te nemen. Hij geeft dan aan langs welke weg men het probleem proberenderwijs kan aanpakken voor een cirkelvormig glijvlak. Voor routinetoepassingen is dit echter een ondoenlijke zaak.



Bovendien is door Janbu een betere oplossing uitgewerkt, ook voor niet cirkelvormige glijvlakken.

In zijn artikel [2] geeft hij aan hoe door een bepaalde veronderstelling te doen wel een directe oplossing kan worden bereikt.

Deze methode staat bekend onder de naam:

### 3. Vereenvoudigde methode Bishop ("Simplified method")

In figuur 6 is nogmaals een lamel getekend met de krachten die daarop werken. Bishop doet nu twee veronderstellingen:

- 1e. op de lamel werken alleen de aangegeven krachten. Wordt nu het momentenevenwicht bepaald om het punt M, dan gaat, omdat de krachten  $G$ ,  $N_s$  en  $W_s$  door M gaan, ook de resultante van de twee krachten  $P_1$  en  $P_2$  door het punt M.
- 2e. omtrent deze resultante van  $P_1$  en  $P_2$  wordt verondersteld dat deze horizontaal werkt. Let wel: de krachten P zelf behoeven dus niet horizontaal te zijn.

Door nu het vertikaal evenwicht van de krachten op de lamel te bepalen kan  $W_s$  eenvoudig in  $G$  worden uitgedrukt. Dit resulteert in de formule:

$$\tau_s = \frac{\sin \phi \cos \alpha}{\cos (\phi + \alpha)} (C + C_p \operatorname{ctg} \phi)$$

Door de zo gevonden  $\tau_s$  te vermenigvuldigen met de lengte van het stukje glijvlak ( $\overline{AB}$ ) van die lamel, al deze krachten over alle lamellen te sommeren, en de som te vermenigvuldigen met de straal van de glijcirkel wordt het tegenwerkend moment gevonden. Vult men eerst de volledige  $c'$  en  $\phi'$ -waarden in, en deelt men het zo gevonden tegenwerkende moment door het aandrijvende moment dan wordt een eerste waarde  $F_1$  voor de evenwichtsfactor gevonden. Dan worden de  $c'$ - en  $\phi'$ -waarden gedeeld door  $F_1$ , waarna een  $F_2$  wordt berekend, enz. Deze iteratie is dus gelijk aan die bij de methode Hoogenboom.



Ook hier bestaat er een eenvoudige betrekking tussen de gevraagde  $\tau_s$  en de gegevens  $c$ ,  $\phi$  en  $\sigma_v$ .

$$\tau_s = B (c + \sigma_v \operatorname{tg} \phi) \quad B = \frac{\sin \phi \cos \alpha}{\cos (\phi + \alpha)}$$

Dit verhoudingsgetal B kan eveneens als een kromme worden getekend als functie van  $\alpha$  voor een bepaalde waarde van  $\phi$ . Voor  $\phi = 30^\circ$  is dit ingetekend in figuur 5. Men ziet dat de lijn B voor een groot deel min of meer samenvalt met de lijn A van Hoogenboom; vooral de twee waarden van  $\alpha$  waarbij  $\phi + 2\alpha = 90^\circ$  en  $\phi + 2\alpha = -90^\circ$  zijn van belang. Op deze twee punten heeft het glijvlak namelijk een richting gelijk aan de passieve hoek, respectievelijk de actieve hoek.

Buiten deze twee waarden gaat de grafiek van Bishop sterk afwijken: voor steilere intreehoeken dan de actieve hoek gaat de waarde voor B (dus ook die voor  $\tau_s$ ) naar nul. Erger is de afwijking aan de passieve kant voorbij de passieve hoek. Daar gaat de waarde voor B naar oneindig, en dus ook die voor  $\tau_s$ . Bij zeer steil uittredende cirkels kan zelfs plaatselijk een negatieve waarde voor  $\tau_s$  worden gevonden. Voor dergelijke cirkels worden met deze methode dan ook zowel absurd hoge waarden voor F gevonden, als negatieve waarden.

Nu zijn dergelijke cirkels als regel van weinig belang omdat zij niet meer in het gebied van de cirkels met minimum waarden voor F liggen. Wel wordt hierdoor soms het bepalen van de minimum cirkel uit een doorgerekend stramien bemoeilijkt. Daarom is in het computerprogramma van het LGM een correctie aangebracht:

Wanneer een lamel wordt berekend waarvan de hoek  $\alpha$  groter is dan  $45 - \frac{\phi}{2}$ , wordt  $\alpha$  gefixeerd op deze waarde. In de lijn B in figuur 5 betekent dit een afsnuiting voorgesteld door lijn  $B^1$ .

Die lijn  $B^1$  is welbewust daar gekozen om twee redenen:

- 1e. wordt vanaf het passieve punt een schuifweerstand berekend alsof het schuifvlak eindigt in een passieve wig, hetgeen geen onredelijke veronderstelling is.



2e. wordt een waarde berekend die gelijk is aan de topwaarde van Hoogenboom. Daar Hoogenboom gebaseerd is op de spanningsleer wordt op het LGM veel waarde gehecht aan de ligging van de Hoogenboomkromme als vergelijking met andere methoden.

Resumerend kan van de vereenvoudigde methode Bishop worden gezegd:

1. Alleen geschikt voor cirkelvormige glijvlakken.
2. Maakt alleen uitwendig momentevenwicht, uitwendig vertikaal evenwicht, lamel vertikaal evenwicht.
3. Berekent geen horizontaal evenwicht, noch uitwendig, noch per lamel. Bij narekenen blijkt dit dan ook niet in orde te zijn.
4. Doet een onjuiste, doch niet erg belangrijke veronderstelling omtrent de lamelscheidingskrachten.
5. Kan in bepaalde omstandigheden ernstig ontsporen, hetgeen echter door een eenvoudige correctie kan worden voorkomen.
6. Is strikt opgenomen niet correct voor horizontale externe krachten op of in het talud.
7. Geeft iets te lage waarde voor de evenwichtsfactor.

Een oudere methode die op deze plaats kan worden vermeld is die van:

#### 4. U.S. Bureau of Reclamation

Feitelijk is dit een methode die gepubliceerd is door Daehn en Hilf [4] en die lange tijd als standaardberekening werd gebruikt voor de beoordeling van stuwdamontwerpen in de V.S. Bishop geeft in [1] eveneens een uitleg van deze methode.

De berekening loopt aanvankelijk ongeveer gelijk met die van de vereenvoudigde Bishop, zie figuur 6. Door nu het evenwicht van alle krachten op een lamel te bezien langs de straal van de glijcirkel, dus loodrecht op het schuifvlak, kan de kracht  $N_s$  uitgedrukt worden in alle andere krachten, waarbij dan de moeilijke kracht  $W_s$ , waarin de onbekende  $F$  immers voorkomt, wordt uitgeschakeld.



Deze uitdrukking voor N wordt nu gesubstitueerd in de uitwendige momentenvergelijking waardoor een expliciete uitdrukking voor F wordt gevonden. Dit laatste was namelijk de bedoeling van deze methode, waardoor op snelle wijze een betrekkelijk groot aantal cirkels kan worden doorgerekend ten einde het meest kritieke schuifvlak op te sporen.

Een moeilijkheid is nog dat in deze uitdrukking voor F de nog onbekende krachten T en E voorkomen. Overwogen wordt dan dat, wanneer er geen uitwendige krachten op of in het talud werken, de som van alle krachten  $(E_2 - E_1)$  en de som van  $(T_2 - T_1)$  beide = 0 zijn. In de momentenvergelijking komen deze krachten voor als een term:

$$\Sigma \text{tg } \phi' \{ (T_2 - T_1) \cos \alpha - (E_2 - E_1) \sin \alpha \}$$

Deze term is alleen = 0 indien  $\phi'$  en  $\alpha$  voor alle lamellen gelijk is, dus voor een recht glijvlak en homogene grond.

Wordt nu toch deze term = 0 gesteld, hetgeen derhalve een vereenvoudiging is, dan wordt een inderdaad eenvoudige vorm voor F gevonden.

In de praktijk blijkt deze methode waarden voor F op te leveren die aan de lage kant liggen.

Wanneer, evenals bij de bespreking van Hoogenboom en van Bishop, een betrekking wordt opgesteld tussen  $\tau_s$  en  $\sigma_v$  dan luidt deze hier

$$\tau_s = \sigma_v \cos^2 \alpha \text{tg } \phi . + c.$$

Strikt genomen is dit niet geheel juist, daar hierbij nog een extra vereenvoudiging is aangebracht, doch de bedoeling is na te gaan hoe deze kromme ligt t.o.v. van die van Hoogenboom en Bishop. Op figuur 5 is deze betrekking voor  $\phi = 30^\circ$  weergegeven als kromme D. Deze ligt inderdaad gemiddeld lager dan de andere, zodat de ervaring dat deze methode speciaal voor diepe glijvlakken, waarin het deel van de kromme tussen  $\alpha = 0$  en  $\alpha = -60^\circ$  belangrijk is, lage evenwichtsfactoren oplevert, begrijpelijk is.



Resumerend kan worden gesteld:

1. Alleen geschikt voor cirkelvormige glijvlakken.
2. Alleen geldig voor rechte glijvlakken en homogene grond.
3. Maakt alleen uitwendig momentevenwicht.
4. Maakt een nogal ingrijpende veronderstelling omtrent de lamelscheidingskrachten .
5. Is strikt genomen niet correct bij uitwendige krachten in of op het talud.
6. Geeft veel te lage F-waarden.

#### 5. Methode Spencer I

De aanname van Bishop dat de resultante van de lamelscheidingskrachten per lamel horizontaal ligt, is in het algemeen zeker niet juist. Daarom heeft Spencer verondersteld dat de resultante wel een bepaalde helling heeft, die dan uit de evenwichtsvoorwaarden moet volgen. In zijn eerst gepubliceerde methode neemt hij aan dat die helling voor alle lamelscheidingskrachten constant is [14]. Hiermede hebben ook de resultanten van die krachten in alle lamellen dezelfde constante helling.

De gedachtengang van deze methode is aanvankelijk gelijk aan die van Bishop. Ook hier wordt uit toepassing van de momentenvergelijking per lamel afgeleid dat de resultante van de twee lamelscheidingskrachten  $P_1$  en  $P_2$  door het midden van de onderkant van de lamel loopt; nu alleen niet meer horizontaal doch onder een hoek  $\theta$  met de horizontaal, welke hoek voor alle lamellen gelijk is, zie figuur 7.

Bij het opstellen van de momentenvergelijking per lamel wordt ook hier verondersteld dat er geen horizontale krachten  $Q_h$  op de lamel werken. Is dat wel het geval dan gaat de resultante  $P$  van  $P_1$  en  $P_2$  niet meer door het midden van de lamelonderkant.

Door nu per lamel twee evenwichtsvergelijkingen op te stellen evenwijdig met de basis van de lamel, en loodrecht daarop, kan de kracht  $P$  worden uitgedrukt in de andere krachten, in  $F$ , en de hoek  $\theta$



Daar de krachten  $P$  inwendige krachten zijn geldt:

$$\Sigma (P \cos \theta) = 0$$

$$\Sigma (P \sin \theta) = 0$$

Bovendien moet, daar in geval van evenwicht, alle uitwendige krachten een moment = 0 hebben t.o.v. het middelpunt van de cirkel, dit ook het geval zijn voor de inwendige krachten  $P$ . Bij een cirkelvormig glijvlak geldt dan:

$$\Sigma P \cos (\alpha - \theta) = 0.$$

Er moeten nu drie vergelijkingen in  $P$  worden opgelost, waaruit  $F$  en  $\theta$  volgen. Dit is nog een algemeen geval voor een eigen  $\theta$  voor elke lamel.

De zaak kan nu sterk vereenvoudigd worden door  $\theta$  constant te houden voor alle lamellen. De eerste twee vergelijkingen worden dan aan elkaar gelijk, overgaand in  $\Sigma P = 0$ .

Stelt men  $\theta = 0$  dan gaan deze vergelijkingen over in die van de vereenvoudigde methode Bishop. Deze is derhalve een bijzonder geval van de methode Spencer.

Spencer lost de twee vergelijkingen op door een aantal berekeningen te maken voor waarden van  $\theta$  van nul tot  $30^\circ$  of zonedig hoger.

De waarden voor  $F$  die uit de eerste vergelijking volgen noemt hij  $F_f$ , en die welke uit de tweede volgen  $F_m$ . Door beide  $F$ 's in grafiek te brengen als functie van  $\theta$ , zal het snijpunt de  $F$  aangeven die aan alle voorwaarden voldoet.

Het blijkt dat de waarde van  $F_m$  niet sterk varieert met  $\theta$ ; met andere woorden de oplossing van Bishop ligt dicht bij die van Spencer. Wel vindt Spencer als regel een iets hogere waarde voor  $F$ , in de orde van 1 tot 3%.

Verder blijkt  $\theta$  in het algemeen iets geringer te zijn dan de helling van het talud.





In dit geval is het niet mogelijk een betrekking op te stellen tussen  $\sigma_v$  en  $\tau_s$  in de zin van figuur 5.

In enige volgende publicaties [15], [16] laat Spencer zien dat zijn methode zeer plausibele liggingen geeft voor de druklijn; in sommige gevallen leidt de ligging daarvan tot een trekscheur aan de bovenzijde van het talud tot een bepaalde diepte, die goed overeenkomt met andere oplossingen, zoals de eindige elementenmethode, en met de praktijk. Hij toont bovendien aan dat de aanwezigheid van zo'n trekscheur de stabiliteit nauwelijks beïnvloedt.

Voortbouwende op de drie eerstgenoemde vergelijkingen in dit overzicht, waarbij nog iedere lamel zijn eigen  $\theta$  meekreeg, heeft Spencer later [16] een tweede methode ontwikkeld met meer vrijheid voor de grootte van  $\theta$ .

#### 6. Methode Spencer II

Bij deze oplossing wordt niet  $\theta$  constant verondersteld, doch variabel volgens de vorm

$$\text{tg } \theta = k \cdot \text{tg } \delta$$

waarin nu  $\theta$  de hellingshoek van de lamelscheidingskrachten is. Voor iedere lamelscheiding kan men nu naar believen een bepaalde waarde voor  $k$  invoeren. Voor  $k = 1$  gaat deze methode over in Spencer I.

De waarde  $\text{tg } \delta$  is gelijk voor alle lamellen.

De oplossing gaat nu als volgt:

1. Men kiest voor elke lamelscheiding een waarde voor  $k$ .
2. Voor een reeks waarden voor  $\delta$ , en daaruit voor  $\text{tg } \theta = k \cdot \text{tg } \delta$  wordt met de eerste twee vergelijkingen van Spencer I een serie waarden voor  $F_f$  berekend (zie blz. 22).
3. Voor dezelfde reeks waarden van  $\text{tg } \theta$  wordt met de derde vergelijking van Spencer I een serie waarden  $F_m$  gevonden.
4.  $F_f$  en  $F_m$  worden weer uitgezet als functie van  $\delta$ ; het snijpunt bepaalt de gevraagde  $F$ .



Spencer geeft aan dat deze methode nogal bewerkelijk is en eigenlijk alleen zin heeft als de oplossing die men vindt voor  $k = 1$  (= Spencer I) een druklijn oplevert die geen bevredigende vorm heeft. Hij staat derhalve een volledige analyse van het totale krachtenspel voor.

Hij geeft echter als aanbeveling, volgens zijn ervaring:

Neem  $k = 1$ , behalve voor het bovineind, waar de helling minder genomen moet worden ( $k < 1$ ). Dit komt niet onaardig overeen met de gedachtengang van figuur 4.

Gezien het feit dat zowel Bishop als Spencer als testcases veel met ondiepe cirkels werken die aan de passieve kant erg vlak blijven, komt het linker eind van de grafieken van figuur 4 niet in het spel. Wij zouden er bij diepere cirkels dus nog aan kunnen toevoegen dat ook aan het lage einde  $k < 1$  moet worden genomen.

Door een iets andere opstelling van de uitwendige momentenvergelijking is deze methode ook geschikt voor niet-cirkelvormige glijvlakken.

Samenvattend kan worden gesteld van Spencer II:

1. Geschikt voor willekeurige glijvlakvormen.
2. voldoet aan alle zes evenwichtsvergelijkingen, dus zowel uitwendig als inwendig.
3. De druklijn kan willekeurig worden aangenomen in zijn gedaante.
4. Geeft een volledig overzicht van alle inwendige en uitwendige krachten.
5. Is strikt genomen niet opgezet voor gevallen met horizontale uitwendige krachten op of in het talud, doch kan wel worden aangepast.

Methode Spencer II is voor cirkelvormige glijvlakken op het LGM als een computerprogramma aanwezig.



### 7. Methode Morgenstern en Price

Deze oplossing die iets ouder is dan die van Spencer II lijkt daar veel op [13]. Het is typisch de oplossing van wiskundigen. Hun behandeling van de materie is dan ook bevrijdend streng. Een uitzondering hierop, die eigenlijk onbegrijpelijk is, is weer dat de waterspanning als functie van de grondspanning wordt opgenomen. Dit is echter eenvoudig te corrigeren.

De twee significante verschillen met Spencer II zijn:

- 1e. er kunnen uitwendige krachten op of in het talud worden aangebracht.
- 2e. voor de helling van de resultante van de lamelscheidingskrachten wordt in plaats van  $\text{tg } \theta = k \text{ tg } \delta$  een functie voor  $k$  gebruikt:

$$\text{tg } \theta = f(x) \text{ tg } \delta$$

$\text{tg } \delta$  is weer constant voor alle lamellen.

In plaats van een willekeurig aan te nemen  $k$  voor elke lamelscheiding moet  $f(x)$  worden opgegeven als een functie van de plaats van de lamel. Dit laatste zou voor een computerprogramma in te bouwen zijn als een aantal standaardkrommen, waarbij figuur 4 als richtlijn zou kunnen dienen.

De gevonden veiligheidsfactor bij deze methode (dus  $f(x) \neq 1$  en  $\text{tg } \delta \neq 0$ ) liggen enkele procenten hoger dan bij Bishop. Dit volgt althans uit enkele door de auteurs doorgerekende gevallen. Volgens hen zou echter Spencer I ( $f(x) = 1$ ) lager liggen dan Bishop, hetgeen in tegenspraak is met de ervaringen van Spencer zelf.

Samenvattend kan van deze methode worden gezegd:

1. Geschikt voor willekeurige vormen van het glijvlak.
2. Uitwendige krachten op of in het talud mogen voorkomen.
3. Maakt volledig evenwicht
4. De druklijn moet als  $f(x)$  worden ingevoerd in zijn gedaante.
5. Geeft volledig overzicht van alle uit- en inwendige krachten.



Door de auteurs is in [13] ook nog een vergelijking gemaakt tussen cirkelvormige en niet cirkelvormige glijvlakken in een homogeen geval. Zoals vele andere onderzoekers ook al hebben ervaren zijn de verschillen in  $F$  niet groter dan enkele procenten. Zij bevelen dan ook aan in gevallen die niet duidelijk aanleiding geven tot een afwijkende vorm van het glijvlak, uit te gaan van cirkels.

#### 8. Janbu

Deze auteur is tot zijn methode, die ouder is dan die van Spencer en van Morgenstern en Price, gekomen door de noodzaak veront-  
rustende "landslides" in Zweden na te rekenen [7]. In [8] geeft hij een volledig overzicht van de mogelijkheden van zijn methode, waar-  
uit blijkt dat die min of meer universeel toepasbaar is, zoals voor de berekening van het draagvermogen van de grond onder funda-  
menten, en de berekening van gronddrukken op keermuren, damwanden enz.

De methode lijkt weer veel op de voorgaande. Janbu neemt de druk-  
lijn aan voor iedere lamel in plaats en richting. Dan stelt hij een volledig stel evenwichtsvergelijkingen op die volgens een serie iteraties opgelost moeten worden. Hij geeft aan langs welke weg dit het beste kan worden gedaan, en geeft voor handberekeningen een bundel grafieken voor een bepaald onderdeel.

Het is derhalve de meest algemene methode, en de meest bewerkelijke. Hij heeft zelf een computerprogramma voor de oplossing samenge-  
steld. Dit programma, dat ook op het LGM aanwezig is, vraagt echter een uitgebreide invoer. Alle lamellen moeten individueel worden opgegeven met de plaats en richting van de krachten  $P_1$  of  $P_2$ . Verder moet het gewicht van elke lamel opgegeven worden, dus eerst zelf uitgerekend worden.

Janbu geeft de waarschuwing dat bij toepassing van veel lamellen het kan voorkomen dat sommige iteraties niet convergeren, zodat geen oplossing wordt gevonden.



Hij vindt echter dat het aantal lamellen zonder bezwaar klein mag zijn. Dit is in tegenspraak met de ervaringen op het LGM waaruit volgt dat 15 een minimum is en 25 à 30 een optimum.

Samenvattend:

1. Geschikt voor alle vormen van glijvlakken.
2. Maakt volledig evenwicht.
3. Geschikt voor uitwendige krachten op en in het talud.
4. Geeft volledig overzicht van alle krachten.
5. Druklijn moet worden opgegeven per lamel.
6. Zou alleen geschikt zijn voor weinig lamellen.
7. Zeer bewerkelijk: grote serie iteraties.

Een extra controle op de juistheid van de berekening geeft Janbu nog aan, overwegende dat nu voor alle lamellen dezelfde  $F$  is aangenomen, de  $F_1$  die gevonden wordt voor de lamelscheidingskrachten groter moet zijn dan  $F$ , daar immers die lamelscheidingen geen toegevoegde glijvlakken zijn.

Deze controle kan echter ook bij Spencer en bij Morgenstern en Price worden toegepast.

Volgens ervaring van Morgenstern en Price kan de methode Janbu soms te hoge waarden voor  $F$  opleveren [13].

## 9. Fellenius

Van Fellenius zijn in de literatuur hoofdzakelijk twee methoden bekend. Zij zijn al oud. In [5] geeft hij beide aan.

De eerste is een analytische die veel lijkt op andere uit die tijd. Hij gaat uit van een cirkelvormig glijvlak en homogene grond, of hoogstens twee verschillende lagen, b.v. een ophoging op een ondergrond van ander materiaal. Hij berekent dan welke gemiddelde schuifspanning langs het glijvlak nodig is om momentenevenwicht te maken.



Deze gemiddelde schuifspanning moet dan worden vergeleken met de schuifweerstand die in werkelijkheid aanwezig is.

Deze methode is sterk verouderd. In [6] is een iets verbeterde te vinden van Josselin de Jong.

Bij de tweede methode deelt hij de afschuivende moot in verticale lamellen in (voor zover wij kunnen nagaan is Fellenius de eerste die dit heeft voorgesteld). Hij geeft dan aan welke krachten op in de lamellen kunnen werken en gaat vervolgens grafisch een oplossing zoeken. Alle krachten moeten immers per lamel, en in hun totaal een gesloten krachtenveelhoek vormen. Daar  $F$  als  $\frac{\text{schuifweerstand}}{\text{schuifspanning}}$  nog onbekend is, is dit vrijwel een ondoenlijke zaak, en totaal ongeschikt voor een computerprogramma.

Een extra moeilijkheid is nog dat de  $F_1$  in de lamelscheidingen groter gehouden moet worden dan de  $F$  voor het glijvlak.

Dan ligt het echter voor de hand de lamelscheiding niet vertikaal te nemen doch volgens de toegevoegde glijvlakken; dan is  $F_1 = F$ . Een voorbeeld hiervan is te vinden in [10].

#### 10. "Stability Charts"

In de literatuur vindt men een aantal artikelen waarin verschillende methoden zijn toegepast op "standaardgevallen". De uitkomsten hiervan zijn samengevat in grafieken (Stability Charts). Zie b.v. [3], [17]. Met behulp van deze grafieken kan snel een indruk worden verkregen van de evenwichtsfactor voor een bepaald geval. Ook de ligging van de gevaarlijkste glijcirkel wordt aangegeven. Daar dergelijke grafieken alleen kunnen worden opgesteld voor sterk vereenvoudigde gevallen blijkt in de praktijk dat men er niet zo erg veel aan heeft.

Andere artikelen behandelen de opzet van een computerprogramma [9], [11] die dan wel geheel toegespitst is op een bepaalde rekenmethode.



### 11. Afweging van de verschillende rekenmethoden

Een aantal van de behandelde methoden kan men zonder meer laten vallen. Deze zijn: Hoogenboom (althans in zijn huidige vorm), U.S. Bureau of Reclamation (Deahn en Hilf), Fellenius.

Blijven over: Bishop vereenvoudigde methode

Spencer I

Spencer II

Morgenstern en Price

Janbu

Bishop is erg eenvoudig en rekt snel. Is echter alleen geschikt voor cirkelvormige glijvlakken.

Spencer I is niet veel ingewikkelder dan Bishop en volgens zijn eigen zeggen voor het merendeel der routinegevallen voldoende nauwkeurig.

Spencer II zou men moeten gebruiken in speciale gevallen wanneer de uitkomst van Spencer I niet bevredigt.

Daar Bishop en Spencer I bijzondere gevallen zijn van Spencer II, zou een programma gebaseerd op Spencer II alle drie methoden omvatten.

Spencer II is naar onze smaak ongeveer gelijkwaardig aan Morgenstern en Price, hoewel de laatste universeler is. Daardoor ook bewerklijker; vermoedelijk zal M + P meer rekentijd vergen dan Spencer II. Ook is de invoer lastiger door de gedwongen opgave van de druklijnkromme, tenzij die als een aantal standaardkrommen in het programma is opgenomen.

Anderzijds kunnen hierbij ook standaardkrommen worden opgenomen waardoor een gelijkwaardige behandeling ontstaat met Spencer I en Bishop. Wel zal dan de rekentijd langer zijn dan bij het programma voor Spencer I of Bishop zelf.



Janbu is even universeel als Morgenstern en Price, doch heeft vermoedelijk nog meer rekentijd nodig. Bovendien geeft Janbu zelf de waarschuwing dat bij veel lamellen sommige iteraties kunnen divergeren. Naar ons oordeel is echter een klein aantal lamellen ontoelaatbaar.

Samenvattend zouden wij willen concluderen dat Spencer II ongeveer gelijkwaardig is aan Morgenstern en Price voor een universeel programma, waarin dan de Bishop- en Spencer I behandeling mede zijn opgenomen (zie hierboven, 3 alinea's terug).

Gezien het feit dat Spencer II minder rekentijd vergt dan Morgenstern en Price, zouden wij Spencer II willen aanbevelen.

Daarnaast zouden wij Janbu willen gebruiken voor zeer bijzondere gevallen. Daarbij zou dan gebruik kunnen worden gemaakt van het door Janbu zelf opgestelde programma, ondanks de lastige en tijdrovende invoer.

Delft, 13 januari 1977

F.J. van Duren.





Literatuurlijst

1. Bishop, A.W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes.  
Eur. Congress of the Int. Soc Soil Mech. and Found. Eng. Stockholm 1954.
2. Bishop A.W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes.  
Géotechnique V no. 1 (1955).
3. Bishop, A.W. Morgenstern, N.R. Stability coefficients for earth slopes.  
Géotechnique X no. 4 (1960).
4. Daehn, W.W. Hilf, J.W. Implications of Pore Pressure in Design and Construction of Rolled Earth Dams.  
Trans. 4th Congr. Large Dams 1:259.
5. Fellenius, W. Erdstatische Berechnungen.  
Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1927  
3e druk 1947.
6. Huizinga, T.K. Grondmechanica blz. 141-144.  
NV Wed Ahrend en Zoon, Amsterdam  
2e druk 1948.
7. Janbu, N. Application of composite slip surface for stability analysis.  
Eur. Conf. on Stab. Earth Slopes, Stockholm 1954.
8. Janbu, N. Earth pressure and bearing capacity calculations by generalized procedure of slices.  
Proc. 4th Int. Conf. SMFE, London 1957.



9. Janbu, N. Slope stability computations.  
Geoteknikk NTH Trondheim 1968.
10. Keveling Buisman, A.S. Grondmechanica blz. 275.  
Waltman Delft 1944.
11. Little, A.L.  
Price, V.E. The use of an electronic computer  
for stability analysis.  
Géotechnique VIII no. 3 (1958).
12. Metz, H.E. Kegelvormige taluðs.  
Polyt. Tijdschr. - b.30 nr. 14 (1975).
13. Morgenstern, N.R.  
Price, V.E. The analysis of the stability of  
general slip surfaces.  
Géotechnique XV no. 1 (1965).
14. Spencer, E A method of analysis of the stability  
of embankments assuming parallel inter-  
slice forces.  
Géotechnique XVIII no. 1 (1967).
15. Spencer, E Effect of tension on stability of  
embankments.  
Journal Soil Mech. Found. Eng. Am.  
Soc. Civ. Eng. 6127 (1968).
16. Spencer, E. Thrustline criterion in embankment sta-  
bility analysis.  
Géotechnique XXIII no. 1 (1973)
17. Spencer, E. Stability of earth embankments  
Civil Engineering and Public Works  
Review Aug. 1968.

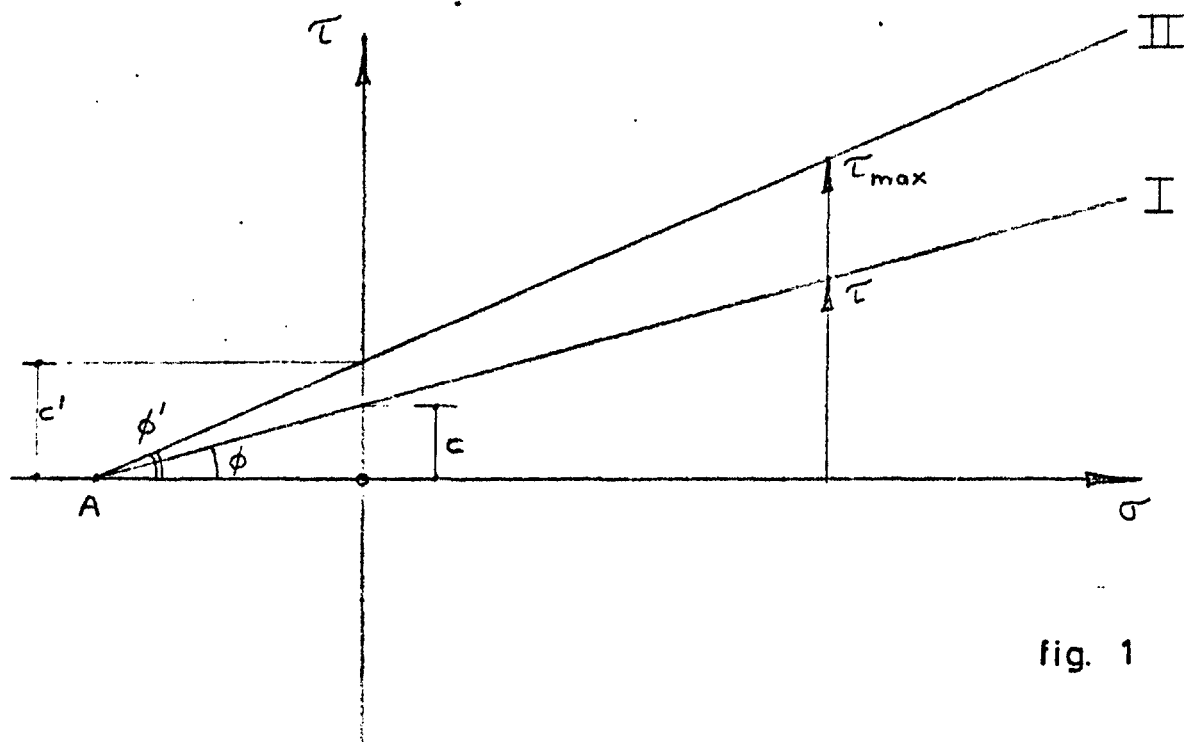


fig. 1



**laboratorium voor grondmechanica delft**

telefoon: (015) - 56 92 23

telex: 33326 solab nl

d.d.

get.

Evaluatie glijvlakberekeningen.

SE - 690099

gec.

BIJL.

form.

A<sub>4</sub>

fig. 2a

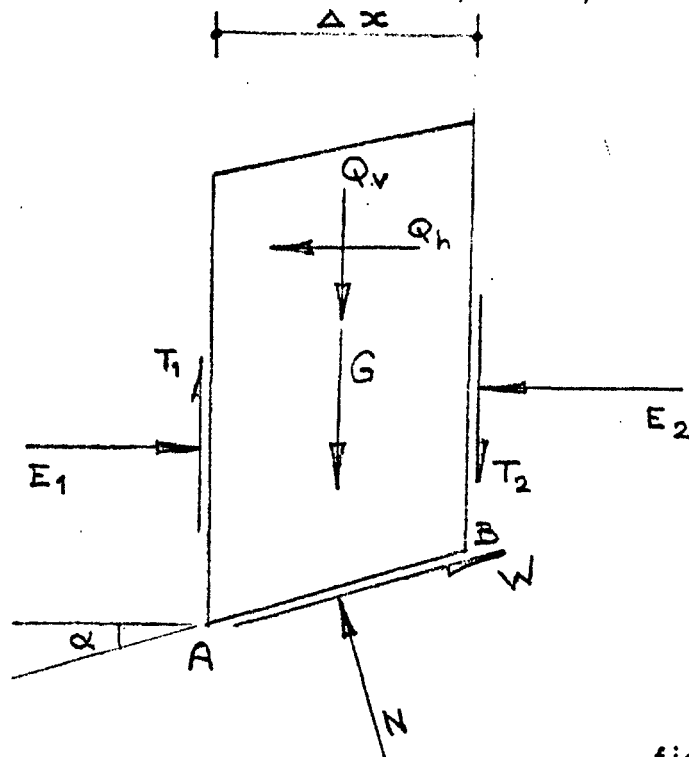
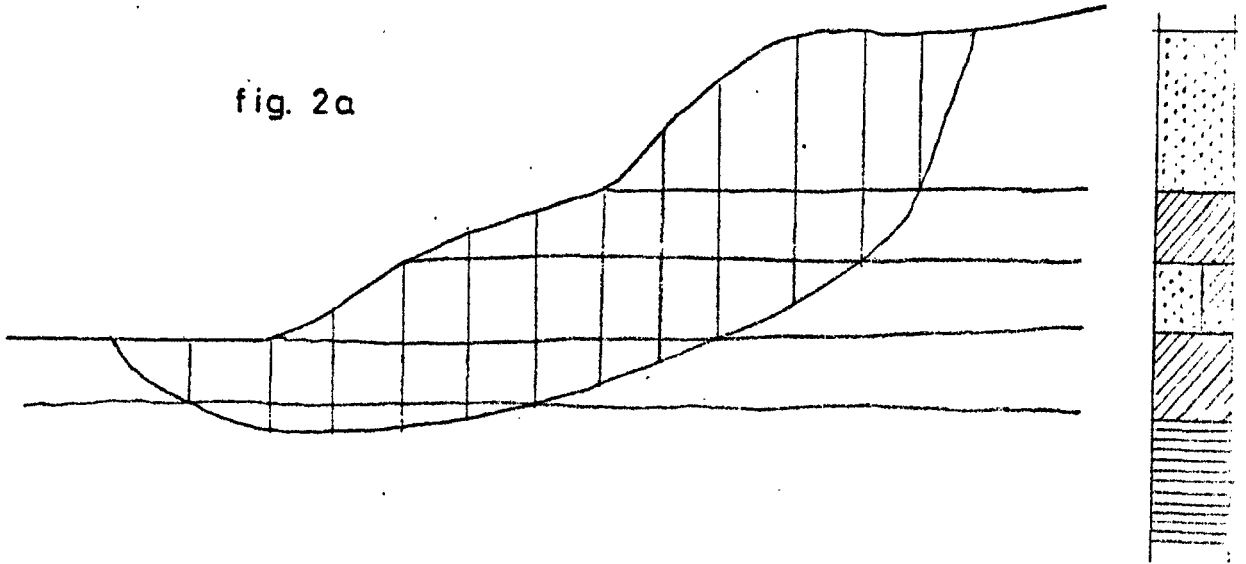


fig. 2b



**laboratorium voor grondmechanica delft**

telefoon: (015) - 56 52 23

teleex: 33326 solab nl

d.d.

get.

Evaluatie glijvlakberekeningen.

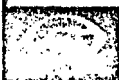
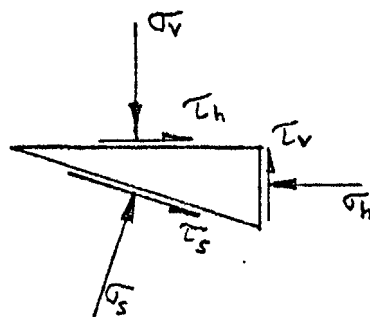
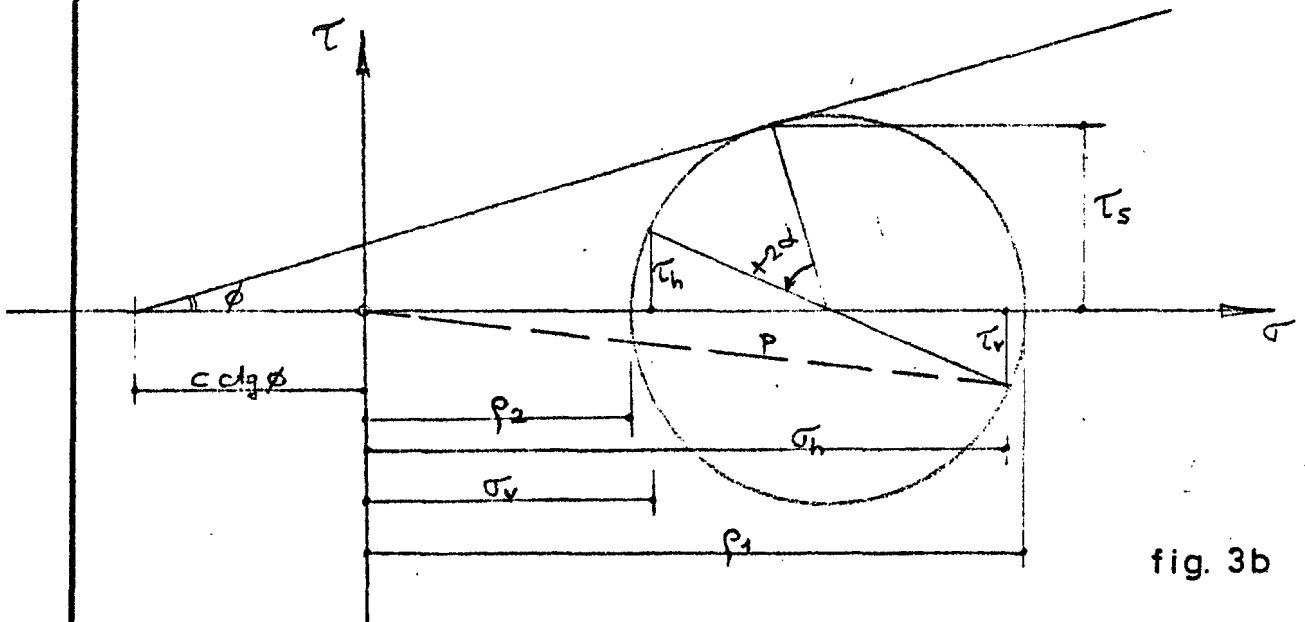
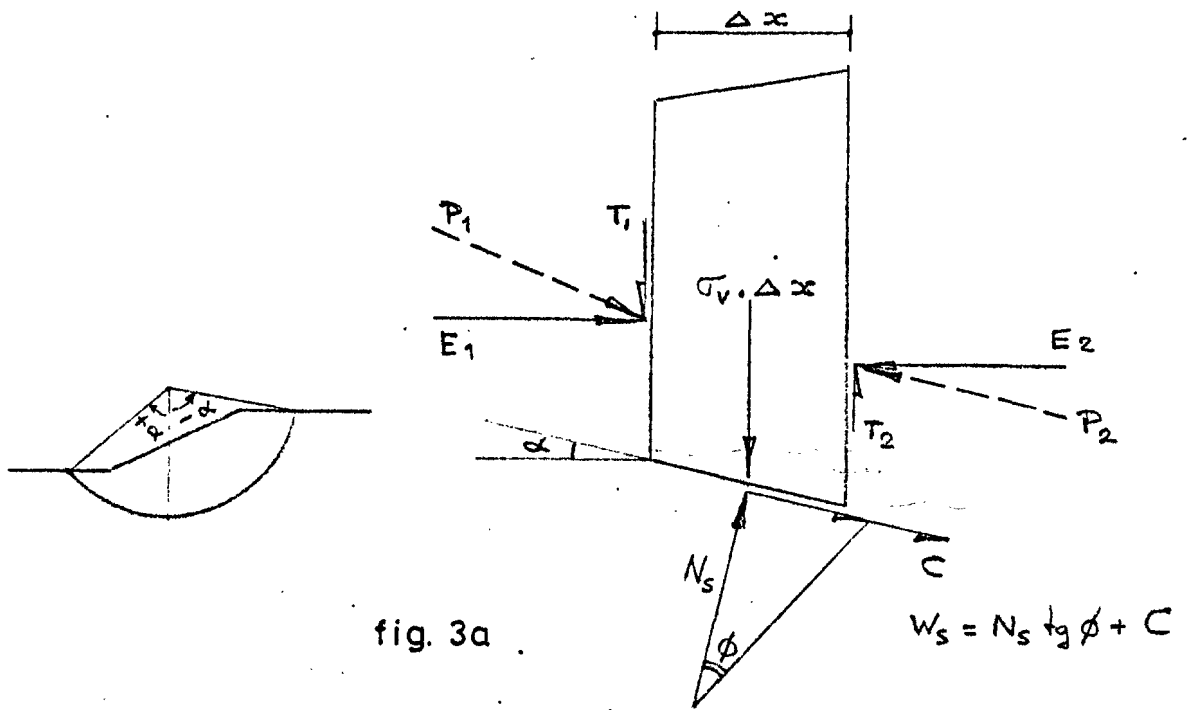
SE-690099

gec.

BIJL.

form

A4



**laboratorium voor grondmechanica delft**

telefoon: (015) - 56 92 23

telefax: 33326 solab nl

d.d.

get.

Evaluatie glijvlakberekeningen.

SE - 690099

gec.

BIJL.

form.

A4

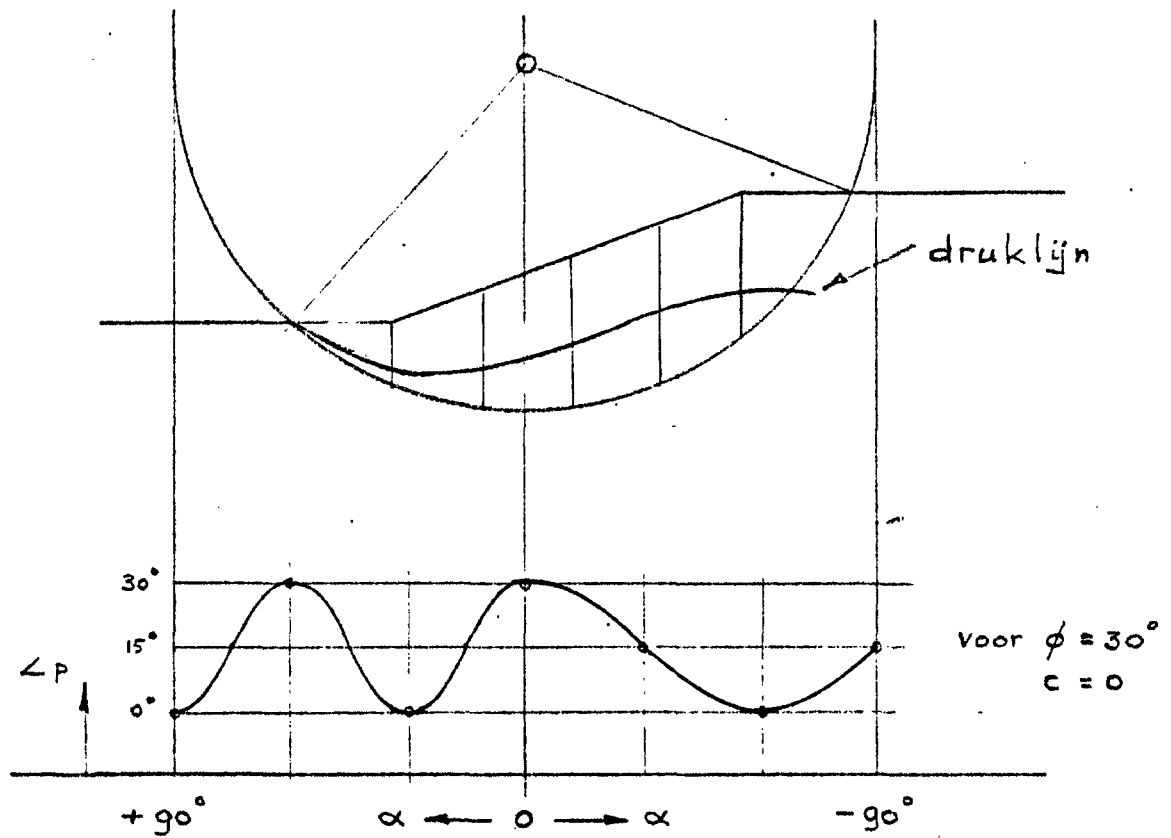


fig.4

$$\begin{array}{ll} \angle p = 0 & \text{voor } \alpha = 45^\circ - \phi/2 \\ 0 & \alpha = -45^\circ - \phi/2 \\ \phi & \alpha = 0^\circ \\ \phi & \alpha = 90^\circ - \phi \end{array}$$

Is er wel een ware cohesie  $c'$  aanwezig dan wordt plaatselijk de helling van P groter dan  $\phi$ .



**laboratorium voor grondmechanica delft**

telefoon: (015) - 56 92 23

telex: 33326 solab nl

d.d.

get.

Evaluatie glijvlakberekeningen.

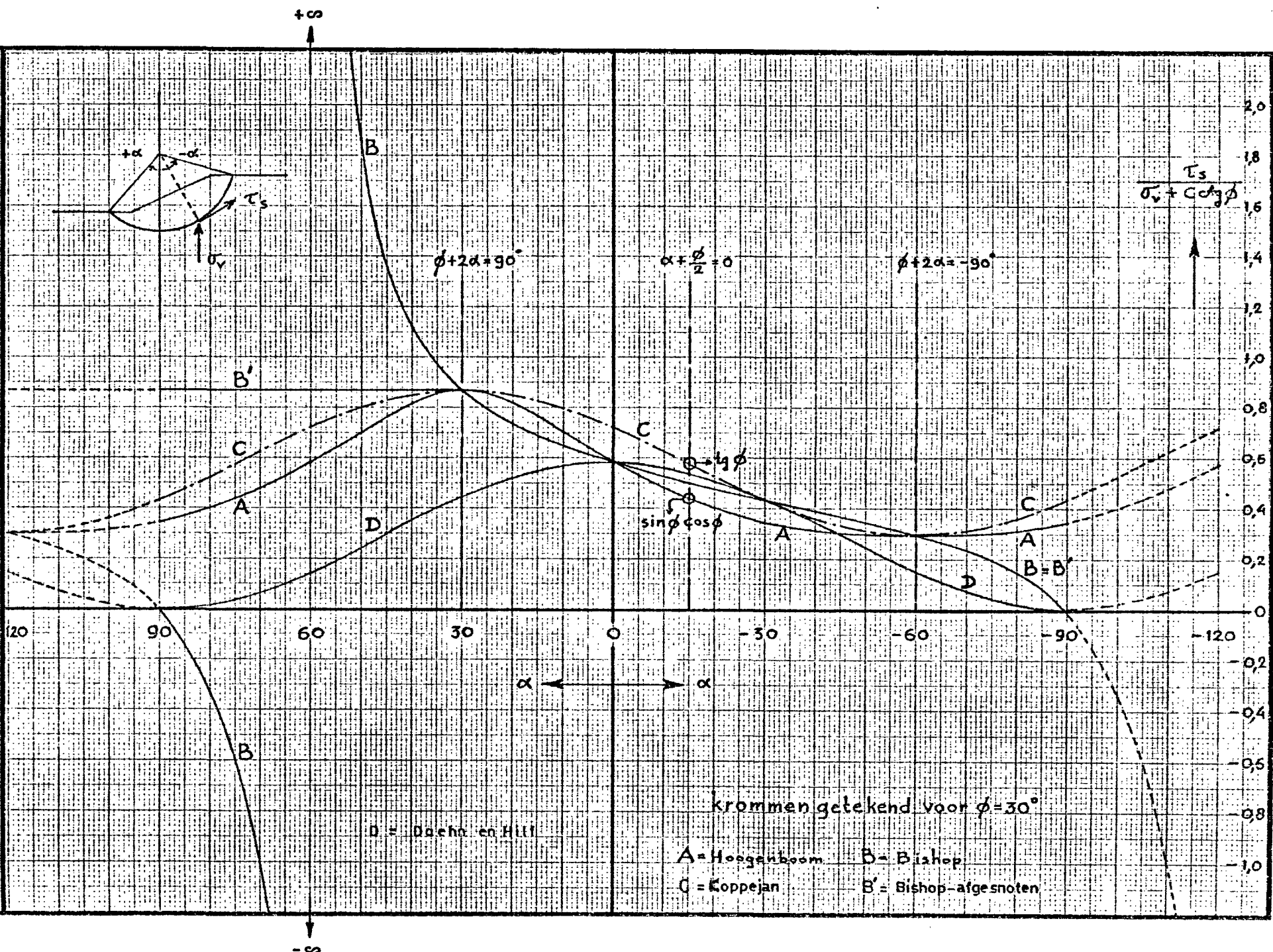
SE - 690099

gec.

BIJL.

form

A<sub>4</sub>



LABORATORIUM VOOR GRONDMECHANICA TE DELFT

Evaluatie glijvlak berekeningen.

HL.78F-I

A<sub>1</sub>

fig 5

BILAGE

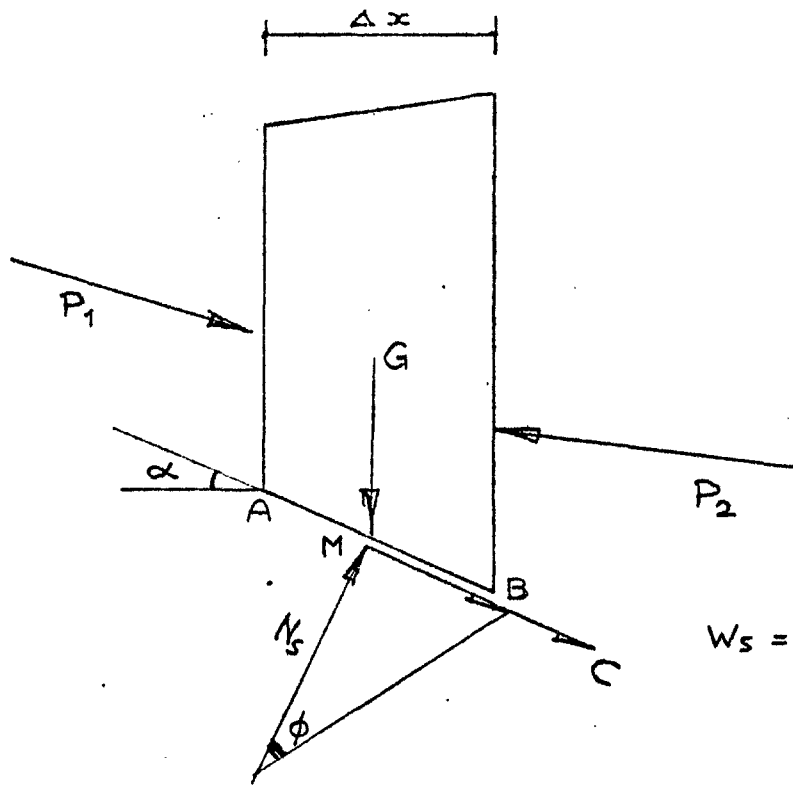


fig. 6

$$W_s = N_s \operatorname{tg} \phi + C$$

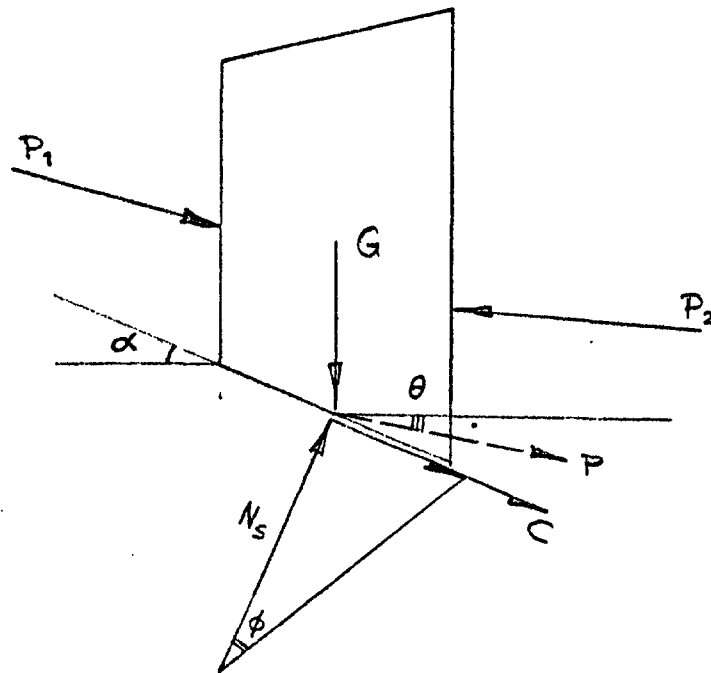


fig. 7



**laboratorium voor grondmechanica delft**

telefoon: (015) - 56 92 23

telex: 33326 solab nl

d.d.

get.

Evaluatie glijvlakberekeningen.

SE-690099

pec.

BIJL.

form.

A4