

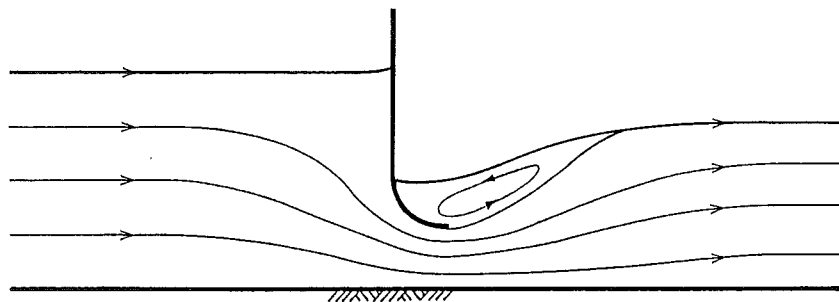
b70

# Vloeistofmechanica b70

## Collegehandleiding

Januari 1989

J.A. Battjes



TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT  
Faculteit der Civiele Techniek  
Vakgroep Waterbouwkunde

(496)

Collegehandleiding b70

VLOEISTOFMECHANICA

prof. dr. ir. J.A. Battjes

b70	Uitgave januari 1990			203010					
-----	-------------------------	--	--	--------	--	--	--	--	--

1.	INLEIDING	1
2.	VLOEISTOFEIGENSCHAPPEN	5
2.1	Continuümmodel	5
2.2	Massadichtheid	6
2.3	Constitutieve vergelijkingen	6
1.	Spanningen	6
2.	Samendrukbaarheid	7
3.	Vloeibaarheid	10
2.4	Grensvlakspanning	15
2.5	Gelijkvormigheid en dimensie-analyse	17
3.	KINEMATICA	21
3.1	Snelheidsveld	21
3.2	Variaties in ruimte en tijd	25
3.3	Versnelling van een deeltje	30
3.4	Volumestroom en meevoering	33
4.	BALANSVERGELIJKINGEN	39
5.	MASSABALANS EN VOLUMEBALANS	43
5.1	Onsamendrukbaarheid	43
5.2	Volumebalans voor een stroombuis	43
5.3	Volumebalans voor niet-stationaire stroom in open waterloop	45
6.	IMPULSBALANS VOOR EEN DEELTJE	49
6.1	Impulsvoorraad	49
6.2	Impulsoverdracht	49
6.3	Impulsbalans voor een deeltje	53
6.4	Piëzometrisch niveau	54
6.5	Vergelijking van Euler in natuurlijk assenstelsel	56
1.	Vergelijking langs de binormaal	57
2.	Vergelijking langs de normaal	57
3.	Vergelijking langs de stroomlijn (Bernoulli)	61

6.6	Toepassingen	63
1.	Stuwpunt en stuwdruk	63
2.	Opening	65
6.7	Stromingen met uniforme energie	66
6.8	Gelijkvormigheid	69
7.	ENERGIEBALANS VOOR EEN STROOMBUIS	73
7.1	Energie-overdracht	73
7.2	Energie-overdracht en energiehoogte	74
7.3	Energiebalans	77
7.4	Toepassingen	78
1.	Vernauwing	79
2.	Venturimeter	80
3.	Hevel	81
4.	Pomp of turbine	82
5.	Overlaat	83
6.	Schuif	86
8.	IMPULSBALANS VOOR EEN STROOMBUIS	89
8.1	Impulsvoorraad	89
8.2	Impulsoverdracht	89
8.3	Impulsbalans voor willekeurig gebied	90
8.4	Impulsoverdracht door een dwarsdoorgang	91
8.5	Impulsbalans voor een stroombuis	94
8.6	Toepassingen op stromen met een vrij oppervlak	95
1.	Straal tegen schoep	95
2.	Straal tegen vlakke wand	97
3.	Stroom over overlaat	99
8.7	Toepassingen op stromen in gesloten leidingen	102
1.	Vernauwing	102
2.	Abrupte verwijding	104
3.	Lokale vernauwing	109
4.	Compressiegolf	112
9.	STROMING IN OPEN WATERLOPEN	115
9.1	Inleiding	115
9.2	Impulsoverdracht	116
9.3	Energie-overdracht en energiehoogte	118

9.4	Kritische stroming	120
9.5	Toepassingen	120
1.	Stroming onder schuif	121
2.	Stationaire watersprong	124
3.	Lopende watersprong	128
4.	Overlaten	130
10.	STROMING ROND EEN STAR LICHAAM	137
10.1	Inleiding	137
10.2	Ideale-vloeistof benadering	138
10.3	Invloed viscositeit	140
10.4	Sterk-viskeuze stroming ( $Re \ll 1$ )	142
10.5	Zwak-viskeuze stroming ( $Re \gg 1$ )	144
10.6	Sleepkracht	152
10.7	Valsnelheid	156
11.	WEERSTAND IN PIJPLEIDINGEN	159
11.1	Inleiding	159
11.2	Vertragingsverliezen	161
11.3	Weerstand in eenparige stroom	167
11.3.1	Ontwikkeling tot eenparige stroom	167
11.3.2	Parameters	167
11.3.3	Evenwichtsvoorwaarden	170
11.3.4	Laminaire stroom	173
11.3.5	Turbulente stroom	176
11.4	Leidingstelsels	189
Appendix:	Berekening van gemiddelde snelheid en coëfficiënten $\alpha$ en $\beta$ uit logaritmisch snelheidsprofiel	190
12.	EENPARIGE STROOM IN OPEN WATERLOPEN	195
12.1	Inleiding	195
12.2	Twee-dimensionale stroming met vrij oppervlak	196
12.3	Stroming in leiding met willekeurig dwarsprofiel	199
12.4	Empirische weerstandsformules	202
12.5	Slotopmerkingen	207
Literatuur		209

## 1. INLEIDING

Mechanica is de leer van de beweging en vervorming van materie onder invloed van uitwendige krachten. Een belangrijk onderscheid is daarbij te maken tussen vaste stoffen enerzijds (Engels: "solids") en vloeistoffen ("liquids") en gassen ("gases") anderzijds (in het Engels gezamenlijk aangeduid als "fluids", d.w.z. stoffen die kunnen vloeien, of stromen). Dit onderscheid is hierin gelegen dat een schuifspanning in vaste stoffen aanleiding geeft tot een eindige vervorming, en in vloeistoffen en gassen tot een voortgaande vervorming, zij het met een eindige snelheid. Dit is in feite de definitie van beide categorieën voorzover het hun mechanisch gedrag betreft.

Stromingen van vloeistoffen en gassen zijn vaak instabiel; de beweging krijgt daarbij veelal een chaotisch fluctuerend, wervelend karakter (turbulentie). Voor de bepaling van de (gemiddelde) eigenschappen van turbulente bewegingen moet een zwaar beroep op het experiment worden gedaan (veel meer dan nodig is voor de bepaling van de vervorming van constructies). Gelijkvormigheidsbeschouwingen spelen daarbij een belangrijke rol. Een en ander resulteert veelal in wiskundige modellen van semi-theoretische aard, aangevuld met empirische informatie over de stroming.

De beweging van vloeistoffen en die van gassen kunnen voor een belangrijk deel op dezelfde manier worden behandeld. De leer van die bewegingen heet "stromingsleer" (Engels: "Fluid Mechanics"). Een principieel verschil tussen beide media, gezien uit het oogpunt van de stromingsleer, is dat alleen bij vloeistoffen sprake kan zijn van een vrij oppervlak. Een meer gradueel verschil is dat gassen meer compressibel zijn dan vloeistoffen.

In de civiele techniek komen zowel problemen voor van stroming van gassen (vooral lucht) als van vloeistoffen (vooral water). Luchtbewegingen zijn bijvoorbeeld van belang in verband met windbelasting op constructies, windhinder in de bebouwde omgeving, en klimaatregeling in gebouwen. De compressibiliteit van de lucht is niet van betekenis in deze problemen omdat de hierin voorkomende snelheden en drukvariaties daarvoor niet groot genoeg zijn.

Het merendeel van de civiel-technische stromingsproblemen heeft met waterbeweging te maken, deels in gesloten systemen (pijpleidingen), maar overwegend met een vrij oppervlak (waterbewegingen in kanalen, rivieren, estuaria en zeeën en door/over/rondom diverse daarin voorkomende constructies); daarnaast zijn problemen van grondwaterstroming van belang.

Het vak b70 geeft een inleiding in de stromingsleer, gericht op civiel-technische problemen. De stof heeft daarom primair betrekking op vloeistofstromingen; dit komt ook in de naam van het vak tot uiting. Desalniettemin zijn de resultaten voor een deel wel van toepassing op bewegingen van gassen, zij het in de benadering van onsamendrukbaarheid. In het vervolg zal echter korthedshalve niet steeds van "vloeistoffen en gassen" worden gesproken maar van "vloeistoffen".

Vereiste voorkennis voor b70 is vooral Analyse B (a1), Analyse/Diff. vgl. (a6) en Algemene Mechanica I (b7). Uit de analyse zijn in het bijzonder de partiële afgeleide en de vectorrekening van belang; uit de algemene mechanica zijn dat de onderwerpen kinematica van kromlijnige bewegingen, impuls en het behoud daarvan, kracht, arbeid en energie.

Het onderwijs in het vak b70 kent de volgende componenten en hulpmiddelen:

<u>component:</u>	<u>plaats:</u>	<u>hulpmiddel:</u>
mondeline kennisoverdracht	colleges	handleiding
behandeling van vraagstukken	colleges	vraagstuk- kenbundel
demonstraties	colleges	demonstratie- apparatuur
practicum	laboratorium	stroomgoten

Alle onderwijscomponenten betreffen hetzelfde onderwerp maar benaderen het vanuit verschillende invalshoeken en met verschillende accenten.

De kennisoverdracht in de colleges is gericht op hoofdlijnen van de theorie en op het ontwikkelen van fysisch inzicht. Volledigheid in (mathematische) formuleringen staat daarbij niet voorop; daarvoor is de handleiding een meer geschikt hulpmiddel.

De behandeling van vraagstukken gebeurt geïntegreerd in de colleges om de theorie direct tot toepassing te brengen; dit bevordert de motivatie evenals het inzicht in de theorie en in de toepassingsmogelijkheden daarvan.

Als ondersteuning bij de mondelinge kennisoverdracht worden in de colleges regelmatig demonstraties gegeven van diverse typen stroming, gebruikmakend van in de collegezaal aanwezige faciliteiten. In veel gevallen gaat het zowel om een kwalitatieve indruk als om een kwantitatieve uitwerking op grond van de ter plekke gemeten grootheden.

Tenslotte is er een practicum dat door elke student moet worden voltooid. Hier gaat het er om dat de student zelf diverse stromingen waarneemt, daaraan metingen verricht, en de uitkomsten vergelijkt met theoretische betrekkingen. Dit verlaagt de drempel die bestaat voor het hanteren van de theorie in concrete situaties, en geeft enig inzicht in de voorspellende waarde en de beperkingen van de theorie.

Voor de student is het van belang volledig profijt te trekken van bovengenoemde mogelijkheden door die in hun samenhang te zien en door aan elk daarvan actief deel te nemen. Dit verhoogt het rendement van de zelfstandig uit te voeren studie waar het uiteindelijk om gaat.

Als hulpmiddel bij de studie en voor aanvullende oefeningen in toepassingen is een bundel beschikbaar met studievragen en vraagstukken voorzien van uitwerkingen of antwoorden.

Er zijn veel boeken beschikbaar die een inleiding geven in de vloeistofmechanica. Enkele daarvan worden genoemd in een overzicht opgenomen aan het einde van deze handleiding.





## 2. VLOEISTOFEIGENSCHAPPEN

### 2.1 Continuümmodel

Theoretische modellen kunnen niet betrekking hebben op de totale complexiteit van de werkelijkheid, maar slechts op enkele aspecten daarvan die voor een bepaalde vraagstelling van belang worden geacht. Bovendien worden die aspecten in een min of meer benaderende, geïdealiseerde vorm weergegeven.

Mechanische eigenschappen van de materie worden bepaald door de moleculaire massa's en hun onderlinge posities, bewegingen en wisselwerkingen. De afmetingen van technische systemen zijn veelal echter veel groter dan de moleculaire lengteschaal. Voor de mechanica van zulke systemen kunnen we daarom afzien van de moleculaire microstructuur, en op macroniveau doen alsof de materie continu verdeeld is in de fysische ruimte. Wij spreken dan van een continuümmodel van de materie.

Een eigenschap die lokaal aan het continuüm wordt toegekend (bijv. massadichtheid) is in feite het resultaat van de bijdragen (bijv. massa's) van de moleculen in een klein gebiedje. Enerzijds moet zo'n gebiedje groot genoeg zijn om zo veel moleculen te bevatten dat de som van hun bijdragen statistisch stabiel is; anderzijds klein genoeg ten opzichte van de afmetingen van de beschouwde systemen om te kunnen spreken van de eigenschappen in een punt. (Het feit dat dit mogelijk is vormt de basis van de continuüm-benadering.) Die eigenschappen kunnen dus worden behandeld als functies van de continue fysische ruimte. Zulke functies heten velden. Voorbeelden daarvan zijn het veld van de temperatuur, de massadichtheid en het drukveld (z.g. scalarvelden) en het snelheidsveld (een vectorveld).

De ruimtelijke variatie van een veldgrootte in de kleine omgeving van een punt wordt wiskundig beschreven met de partiële afgeleiden naar de verschillende coördinaten; dit leidt tot het begrip gradiënt (zie college a<sup>1</sup>, Analyse). Daarnaast kan er nog variatie in de tijd zijn, waarvoor de partiële afgeleide naar de tijd een maat is. Wij komen in het volgende hoofdstuk hierop terug. Eerst worden enkele mechanische eigenschappen van vloeistoffen behandeld.

## 2.2 Massadichtheid

De massa per eenheid van volume heet de (volumieke) massadichtheid, algemeen weergegeven door het symbool  $\rho$ . De dimensie van  $\rho$  volgt direct uit de definitie:  $[\rho] = ML^{-3}$ ; de SI-eenheid ervan is  $1 \text{ kg/m}^3$ .

De massadichtheid van zuiver water en andere vloeistoffen zonder toevoegingen is slechts afhankelijk van de heersende temperatuur en druk. Voor de variatie met de temperatuur wordt verwezen naar handboeken zoals Hütte (1955). Daarop wordt hier niet ingegaan. De variatie van de massadichtheid met de druk komt in par. 2.3-1 aan de orde.

In de civiel-technische praktijk hebben we niet met zuiver water te maken, maar altijd met oplossingen. Globale waarden van de dichtheid van zoet respectievelijk zout water zijn  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  respectievelijk  $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$ .

Tenslotte vermelden we nog dat de dichtheid van lucht bij een temperatuur van  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  en een druk van  $10^5 \text{ Pa}$  (ca. 1 atmosfeer) ca.  $1,2 \text{ kg/m}^3$  bedraagt (zie Hütte, 1955, voor meer gegevens).

## 2.3 Constitutieve vergelijkingen

Elke stof heeft een specifiek verband tussen de spanningen in de stof enerzijds (bijvoorbeeld als gevolg van uitwendige krachten) en de daarmee samenhangende veranderingen van volume en vorm anderzijds. Dit verband wordt in geïdealiseerde vorm weergegeven door zogenaamde constitutieve vergelijkingen. Een bekend voorbeeld daarvan zijn de vergelijkingen, genoemd naar Hooke, die het mechanisch gedrag beschrijven van vaste stoffen in de idealisering van elasticiteit, isotropie en lineariteit (zie college b11, Toegepaste Mechanica).

### 1. Spanningen

De spanningstoestand in een punt van de materie wordt beschreven met een zogenaamde spanningstensor. De negen componenten hiervan ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel  $Oxyz$  zijn te schrijven als  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ , enz. (zie b11). Hierin stellen de drie componenten  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$

en  $\sigma_{zz}$  de normaalspanningen voor, en de overige zes de schuifspanningen, die paarsgewijs aan elkaar gelijk zijn ( $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ , enz.).

Wanneer in een punt alle schuifspanningen gelijk zijn aan nul, ongeacht de oriëntatie van de beschouwde vlakjes, dan hebben alle normaalspanningen in dat punt dezelfde waarde:  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ . Men spreekt dan van een isotrope spanningstoestand. In stilstaande vloeistoffen kan geen schuifspanning heersen en is de spanning dus altijd isotroop (wet van Pascal).

In bewegende vloeistoffen en in vaste stoffen zijn de schuifspanningen in het algemeen niet nul, en is de spanning niet isotroop. We kunnen dan dus niet spreken van "de" normaalspanning in een punt. Men kan echter bewijzen dat het gemiddelde van de normaalspanningen in drie onderling loodrechte vlakjes (notatie:  $\sigma_o = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ ) een waarde heeft die onafhankelijk is van de oriëntatie van die vlakjes. Men noemt dit gemiddelde het isotrope deel van de spanning. De afwijkingen van de werkelijke spanningen ten opzichte van het isotrope deel heten deviatorspanningen (zie b11). De schuifspanningen behoren in hun totaliteit tot de deviatorspanningen.

Bij de gebruikelijke tekenafspraken komt een positieve waarde van een normaalspanning overeen met een trekspanning. In gassen respectievelijk vloeistoffen komt trek echter niet respectievelijk vrijwel niet voor. Voor deze stoffen voert men daarom het begrip druk in, gedefinieerd als het isotrope deel van de drukspanningen:  $p = -\sigma_o = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ .

Variaties in het isotrope deel van de spanning (trek en/of druk) veroorzaken volumeveranderingen, en de deviatorspanningen veroorzaken vormveranderingen. In de volgende twee paragrafen wordt op de constitutieve vergelijkingen voor deze twee aspecten afzonderlijk ingegaan.

## 2. Samendrukbaarheid

Bij verhoging van de druk worden gassen en – in veel mindere mate – ook vloeistoffen ("liquids") gecomprimeerd, of samengedrukt. In eerste benadering kan dit als een zuiver elastisch proces worden benaderd. Dit houdt in dat het proces omkeerbaar is: de arbeid die wordt verricht in

het comprimeren wordt als (elastische) inwendige energie opgeslagen, die bij herstel van de oorspronkelijke druk het volume weer tot zijn oorspronkelijke waarde doet toenemen.

Het verband tussen volume (V) en druk (p) voor gassen en vloeistoffen wordt in de benadering van elasticiteit uitgedrukt in termen van de z.g. compressiemodulus K volgens

$$\frac{dV}{dp} = - \frac{V}{K} \quad (2.1)$$

Gebruik makend van het behoud van massa ( $\rho V = \text{constant}$ ) kan dit worden herleid tot

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{K} \quad (2.2)$$

Blijkbaar heeft K dezelfde dimensie als een spanning; de SI-eenheid ervan is de Pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ).

De waarde van K neemt in principe toe met toenemende druk. In een groot bereik van de druk is K voor water (zonder gasbellen!) echter als een constante te beschouwen, met een waarde van ca.  $2,2 \times 10^9 \text{ Pa}$ .

Voor gassen is de variatie van K met de druk niet verwaarloosbaar. Voor isothermische compressie geldt immers  $pV = \text{constant}$ , wat inhoudt dat  $K = p$ . Voor adiabatische compressie (waarbij geen warmte-uitwisseling met de omgeving plaatsvindt) geldt  $pV/T = \text{constant}$ , wat kan worden herleid tot  $pV^{k_0} = \text{constant}$  ofwel  $p/\rho^{k_0} = \text{constant}$ , waarbij  $k_0$  voor elk gas een constante is (voor lucht is  $k_0 \approx 1,40$ ). Voor adiabatische compressie geldt dus  $K = k_0 p$ .

Dankzij het elastische karakter van de samendrukbaarheid kunnen drukdrukgolven zich voortplanten in een samendrukbaar medium. Men kan aantonen (zie hoofdstuk 8) dat voor de voortplantingssnelheid daarvan, de z.g. geluidssnelheid (c), geldt:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (2.3)$$

Gebruik makend van (2.2) kan dit worden herleid tot

$$c^2 = \frac{K}{\rho} \quad (2.4)$$

Substitutie van bovengenoemde getalswaarden levert voor zuiver water respectievelijk lucht bij een druk van  $10^5$  Pa (ca. 1 atmosfeer) de waarden  $c \approx 1480$  m/s respectievelijk  $c \approx 340$  m/s.

Stel nu dat in een gebied van een stationaire stroming van een vloeistof of gas de stroomsnelheid in de ruimte varieert tussen de waarden nul en  $u$ . Zoals we nog zullen zien zal de druk in dat gebied dan variëren met een waarde ( $\Delta p$ ) die ongeveer gelijk is aan  $\frac{1}{2}\rho u^2$ . Iets globaler uitgedrukt geldt dat  $\Delta p$  van de grootte-orde  $\rho u^2$  is (notatie:  $\Delta p \sim O(\rho u^2)$ ). De hiermee overeenkomende variatie van de massadichtheid ( $\Delta \rho$ ) is volgens (2.3) van de orde  $\rho u^2/c^2$ .

De verhouding van stroomsnelheid ( $u$ ) tot geluidssnelheid ( $c$ ) heet het kental van Mach:  $Ma = u/c$ . De relatieve dichtheidsvariatie ( $\Delta \rho/\rho$ ) is dus van de grootte-orde  $u^2/c^2$  ofwel  $Ma^2$  (notatie:  $\Delta \rho/\rho \sim u^2/c^2$  respectievelijk  $\Delta \rho/\rho \sim Ma^2$ ).

Stromingen waarvoor  $Ma < 1$  respectievelijk  $Ma > 1$  heten **subsoon** respectievelijk **supersoan**. Als  $Ma \ll 1$  geldt destemeeer  $Ma^2 \ll 1$ , en zijn de relatieve dichtheidsverschillen verwaarloosbaar. In civiel-technische toepassingen is deze benadering vrijwel altijd geoorloofd. Nemen we voor de snelheid 1,5 m/s voor stromend water, en 35 m/s voor de wind (in geval van een orkaan), dan zijn de bijbehorende waarden van het getal van Mach ca.  $10^{-3}$ , respectievelijk  $10^{-1}$ , overeenkomend met  $\Delta \rho/\rho$  in de orde van  $10^{-6}$  respectievelijk  $10^{-2}$ . Het water respectievelijk de lucht zijn dan als **onsamendrukbaar** te benaderen. Merk op dat deze idealisering een oneindig grote waarde van  $K$  inhoudt, en dus ook van  $c$ . Een storing ergens aangebracht is volgens deze benadering instantaan in het hele gebied merkbaar.

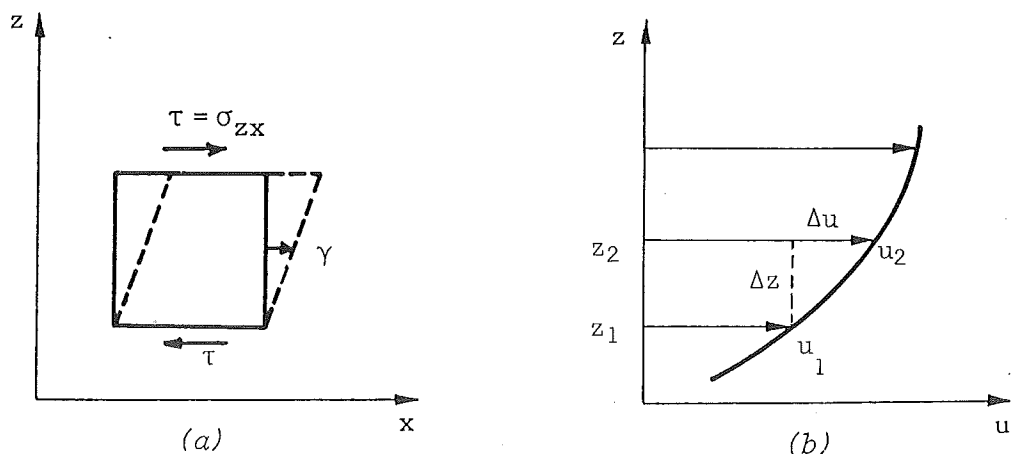
Dimensieloze kentallen zoals dat van Mach spelen een belangrijke rol in de stromingsleer. Het belang van diverse fysische grootheden in een stromingsprobleem is namelijk niet gelegen in de grootte ervan als zodanig (bijvoorbeeld de waarde van de stroomsnelheid  $u$ ), maar in de verhouding daarvan tot een andere voor het probleem relevante parameter (zoals de geluidssnelheid) of combinatie van parameters (zoals  $(K/\rho)^{\frac{1}{2}}$ )

van dezelfde dimensie. Dit leidt per probleem-schematisatie tot een of meer kentallen. Die zijn per definitie dimensieloos. Hun waarde is dus onafhankelijk van het gebruikte eenhedenstelsel. Twee stromingen waarvoor alle overeenkomstige relevante kentallen dezelfde waarde hebben (bijvoorbeeld in beide dezelfde waarde van het getal van Mach) zijn gelijkvormig, niet alleen in meetkundige zin maar ook in dynamische zin. Hierop berust het gebruik van schaalmodellen (zie par. 2.5).

### 3. Vloeibaarheid

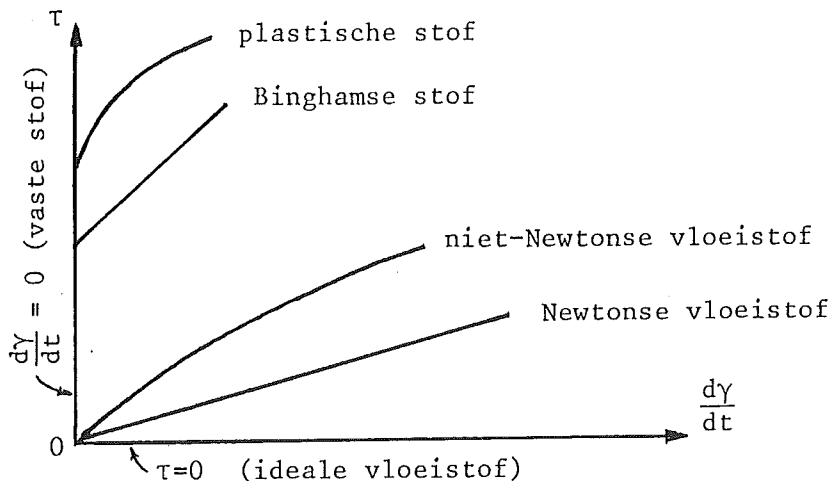
In vaste stoffen veroorzaakt een schuifspanning (hier kortheidshalve aangeduid met  $\tau$ ) een eindige vervorming. Als maat daarvoor nemen we de verandering ( $\gamma$ ) van de hoek tussen twee vlakken die in onbelaste toestand haaks op elkaar staan, in het vlak van de afschuiving respectievelijk haaks daarop (Fig. 2.1a). In de lineaire benadering (wet van Hooke) zijn  $\tau$  en  $\gamma$  recht evenredig aan elkaar; de evenredigheidsfactor heet glijdingsmodulus ( $G$ ). In zo'n vaste stof geldt dus  $\tau = G\gamma$ .

Vloeistoffen en gassen daarentegen worden gekenmerkt door het feit dat een schuifspanning veroorzaakt dat de stof gaat vloeien, d.w.z. dat er zich een voortgaande vervorming voordoet, met een eindige vervormings-snelheid ( $d\gamma/dt$ ).



Figuur 2.1

Het verschillend gedrag van vaste stoffen enerzijds en vloeistoffen of gassen anderzijds, onder invloed van een schuifspanning, is geïllustreerd in Fig. 2.2.



Figuur 2.2

Voor een vaste stof geldt  $dy/dt = 0$  ongeacht de waarde van  $\tau$ , mits deze kleiner is dan een zekere kritieke waarde waarbij vloeit gaat optreden (plastisch gedrag). Wanneer  $\tau$  in het plastisch gebied lineair varieert met  $dy/dt$  spreken we van een Binghamse stof.

Voor vloeistoffen en gassen geldt (per definitie) dat  $dy/dt = 0$  alléén als  $\tau = 0$ . In een stilstaande vloeistof of gas heersen dus geen schuifspanningen, en is de spanningstoestand isotroop (wet van Pascal). Een schuifspanning heeft in een vloeistof of gas een voortgaande vervorming tot gevolg ( $dy/dt \neq 0$  zodra  $\tau \neq 0$ ). Wanneer  $\tau$  daarbij recht evenredig is met  $dy/dt$  spreken we van een Newtonse vloeistof. Dit is (o.a.) voor water een realistisch model. De evenredigheidsfactor tussen schuifspanning en vervormingssnelheid heet (coëfficiënt van) **dynamische viscositeit** ( $\eta$ ):

$$\tau = \eta \frac{dy}{dt} \quad (2.4)$$

Uit (2.4) volgt dat voor de dimensie van  $\eta$  geldt  $[\eta] = ML^{-1} T^{-1}$ . De SI-eenheid van  $\eta$  is  $1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Pa.s}$ .

In sommige stromingsproblemen heeft de viscositeit slechts een zeer geringe invloed. Wanneer, in een mathematisch model van zulke stromingen, de viscositeit bij benadering gelijk aan nul wordt gesteld,



geldt (in dat model)  $\tau = 0$  ongeacht de waarde van  $d\gamma/dt$ . We spreken dan van (het model van) een niet-viskeuze of ideale vloeistof c.q. gas.

Het is gebruikelijk de schuifspanning in stromende vloeistoffen of gassen uit te drukken in gradiënten van de stroomsnelheid. Beschouw daartoe een vlakke parallelstroming, waarin de  $(x, y, z)$ -componenten van de snelheid de waarden  $(u, 0, 0)$  hebben, en waarin  $u$  slechts met  $z$  varieert. De stroomsnelheid in twee dicht bij elkaar gelegen vlakken  $z = z_1$  respectievelijk  $z = z_2 = z_1 + \Delta z$  is  $u_1$  respectievelijk  $u_2 = u_1 + \Delta u$  (zie Fig. 2.1b). Het verschil in verplaatsing van de vloeistof in beide lagen in een tijd  $\Delta t$  is  $\Delta s = (u_2 - u_1)\Delta t = \Delta u \Delta t$ ; dit geeft een verdraaiing van de aanvankelijke normaal over een hoek  $\Delta\gamma = \Delta s/\Delta z$  ofwel  $\Delta\gamma = \Delta u \Delta t/\Delta z$ , overeenkomend met een hoeksnelheid  $\Delta\gamma/\Delta t = \Delta u/\Delta z$ . In de limiet  $\Delta t \rightarrow 0$  en  $\Delta z \rightarrow 0$  is  $d\gamma/dt$  gelijk aan de snelheids-gradiënt  $du/dz$  (de z.g. "schering", in het Engels "rate of shear"). Voor de schuifspanning geldt dan

$$\sigma_{xz} = \tau = \eta \frac{du}{dz} \quad (2.5)$$

Bovenstaande formulering (2.5) brengt mathematisch het fysische karakter van de viscositeit tot uitdrukking. Viscositeit is namelijk het resultaat van moleculaire diffusie van impuls: door verschillen in stroomsnelheid tussen naburige vloeistoflagen wordt tussen die lagen tangentiële impuls uitgewisseld. De snelst stromende laag staat impuls af aan de langzamer stromende laag, waardoor snelheidsverschillen worden vereffend. Vergelijking (2.5) houdt in dat de gemiddelde overdracht van tangentiële impuls per eenheid van oppervlakte en tijd, die we schuifspanning noemen, evenredig is met de snelheidsgradiënt (zoals het warmtetransport door geleiding evenredig is met de gradiënt van temperatuur). De coëfficiënt van viscositeit heeft dus de betekenis van een diffusie-coëfficiënt voor impuls.

Voor de invloed van de viscositeit op de resulterende snelheid (= impuls per massa-eenheid) is niet zozeer de uitwisseling van impuls zelf van belang ( $\tau$ ) als wel de uitwisseling van impuls per massa-eenheid ( $\tau/\rho$ ). Daarom wordt meestal niet gewerkt met de coëfficiënt van dynamische viscositeit maar met die van de zogenaamde kinematische viscositeit, gedefinieerd als

$$\nu = \eta/\rho \quad (2.6)$$

Voor de dimensie van  $\nu$  geldt  $[\nu] = [\eta]/[\rho] = L^2 T^{-1}$ . De SI-eenheid ervan is  $1 \text{ m}^2/\text{s}$ .

De waarden van  $\eta$  en  $\nu$  verschillen sterk tussen verschillende stoffen, en variëren nogal met de temperatuur. Enkele waarden voor lucht en water zijn gegeven in bijgaande tabel.

Temperatuur	-20 °C	0 °C	10 °C	20 °C	
Water	$\eta/(10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})$		1,80	1,33	1,00
	$\nu/(10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})$		1,80	1,33	1,00
Lucht	$\eta/(10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s})$	16,2	17,2	17,2	18,1
	$\nu/(10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})$	11,6	13,3	14,2	15,1

Zoals al is opgemerkt aan het einde van par. 2.3.2 is het belang van diverse grootheden voor een stromingsprobleem niet gelegen in de waarden ervan als zodanig, maar in (dimensieloze) verhoudingsgetallen, de z.g. kentallen (zoals dat van Mach voor de compressibiliteit). We zullen dit uitwerken met betrekking tot de viscositeit. We gaan daarbij eenvoudigheidshalve uit van de stroming rondom een voorwerp, dat met een constante snelheid beweegt in een naar alle richtingen oneindig uitgestrekte vloeistof in rust (afgezien van de verstoring aangebracht door het bewegende voorwerp). We gaan er van uit dat het stroombeeld geheel is bepaald door de volgende grootheden:

- massadichtheid ( $\rho$ ) en dynamische viscositeit ( $\eta$ ) van de vloeistof (die als onsamendrukbaar wordt geïdealiseerd).
- snelheid ( $U$ ), afmeting ( $l$ ), vorm en oriëntatie van het voorwerp.

Uit de dimensies van de grootheden  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $U$  en  $l$  is af te leiden dat die vier grootheden tot slechts één onafhankelijk, dimensieloos verhoudingsgetal zijn te groeperen, het z.g. kental van Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{\rho U \ell}{\eta} \quad (2.7)$$

In termen van de kinematische viscositeit ( $\nu = \eta/\rho$ ) wordt dit

$$\text{Re} = \frac{U \ell}{\nu} \quad (2.8)$$

De vorm van het stroombeeld rondom het voorwerp wordt voor gegeven vorm en oriëntatie van het voorwerp dus bepaald door de waarde van  $\text{Re}$ , ongeacht de waarden van  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $U$  en  $\ell$  afzonderlijk. Een voorbeeld van de variatie van een stroombeeld met  $\text{Re}$  is gegeven in Fig. 10.3 voor het geval van een cirkelcylinder (de getalswaarden van  $\text{Re}$  in deze figuur gelden voor  $\ell = D$ , de diameter van de cylinder).

Is  $\text{Re}$  zeer klein t.o.v. één ( $\text{Re} \ll 1$ ) (zoals in Fig. 10.3a) dan is de viscositeit relatief van grote invloed. We kunnen daarbij denken aan de langzame stroming van een stroperige vloeistof rond een klein voorwerp, maar de essentie van het kental van Reynolds is juist dat "langzaam", "stroperig" en "klein" relatieve begrippen zijn, die respectievelijk inhouden:  $U \ll \nu/\ell$ ,  $\nu \gg U \ell$  en  $\ell \ll \nu/U$ , allen samengevat in de voorwaarde  $\text{Re} \ll 1$ . Voor  $\text{Re} \gg 1$  geldt natuurlijk het tegendeel.

Osborne Reynolds (1883) was de eerste die wees op de betekenis van de naar hem genoemde dimensieloze parameter. Hij deed dat in de context van de stroming door een cirkelvormige buis. Zo'n stroming kan op twee verschillende manieren verlopen: ordelijk, gelaagd (z.g. laminaire stroming) of chaotisch, wervelend (z.g. turbulente stroming). Reynolds constateerde dat het vóórkomen van het ene dan wel het andere type bepaald wordt door de waarde van  $UD/\nu$ , waarin  $U$  de over het dwarsprofiel gemiddelde stroomsnelheid is en  $D$  de inwendige diameter van de buis. Voor  $\text{Re} = UD/\nu < \text{ca. } 2300$  is de stroming laminair; voor grotere waarden van  $\text{Re}$  wordt de stroming turbulent; een precieze waarde is niet aan te geven omdat de omslag van laminair naar turbulent een instabiliteitsverschijnsel is, en daarom erg gevoelig voor kleine, niet meetbare invloeden.

Voor stromingen met een vrij oppervlak en met een breedte die veel groter is dan de diepte is een getal van Reynolds te definiëren door

voor " $\ell$ " de diepte ( $d$ ) te nemen. Zulke stromingen zijn laminair als  $Re = Ud/\nu$  kleiner is dan ca. 500.

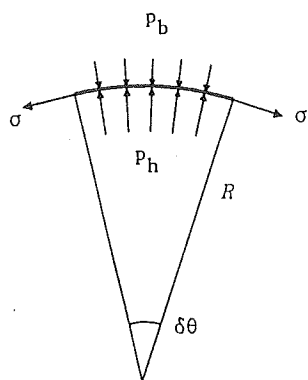
Door enkele realistische waarden te kiezen voor  $U$  en  $D$  of  $d$  is te zien dat voor de stroming van water in gesloten of open leidingen het kental van Reynolds al gauw de waarde  $10^4$  of zelfs  $10^6$  heeft, overeenkomend met turbulente stromen. Stroming van water of olie door een pakket van fijn zand is daarentegen laminair.

#### 2.4 Grensvlakspanning

Aan weerszijden van een grensvlak tussen twee verschillende vloeistoffen, of tussen een vloeistof en een gas, heersen verschillende moleculaire attractiekrachten. Het effect hiervan uit zich op continuüm-niveau als een trekspanning in het grensvlak, de z.g. grensvlakspanning ( $\sigma$ ), met de dimensie van een kracht per lengte-eenheid. Een alternatieve formulering is dat het grensvlak een potentiële energie heeft waarvan de waarde per eenheid van oppervlakte gelijk is aan  $\sigma$ . Het grensvlak zal daardoor een minimale oppervlakte aannemen (bijv. een bolvorm in geval van een druppel, in afwezigheid van uitwendige krachten). Om het uit zo'n configuratie te brengen moet arbeid worden verricht. De werking van de grensvlakspanning is analoog aan die van een gespannen vlies.

In het grensvlak tussen zuiver water en lucht, bij  $20^\circ\text{C}$ , is  $\sigma \approx 0,073$  N/m, ofwel  $\sigma \approx 0,073$  J/m<sup>2</sup>. De feitelijke waarde is erg gevoelig voor de aanwezigheid van andere stoffen, zoals een film van vuil op het water, of zeep in het water.

Waar het grensvlak gekromd is veroorzaakt de grensvlakspanning een grotere druk aan de holle zijde ( $p_h$ ) dan aan de bolle ( $p_b$ ).



Beschouw een infinitesimaal elementje van zo'n grensvlak, dat slechts in één richting gekromd is, met kromtestraal  $R$  en boog-lengte  $R\delta\theta$  (zie schets). De grensvlakspanning aan beide randen heeft een naar het kromtemiddelpunt gerichte resultante die per eenheid van breedte gelijk is aan  $\sigma\delta\theta$ . Evenwicht vereist dan dat  $(p_h - p_b) R\delta\theta = \sigma\delta\theta$  ofwel

$$p_h - p_b = \frac{\sigma}{R} \quad (2.9)$$

Bij kromming in twee richtingen, met hoofdkromtestralen  $R_1$  en  $R_2$ , geldt

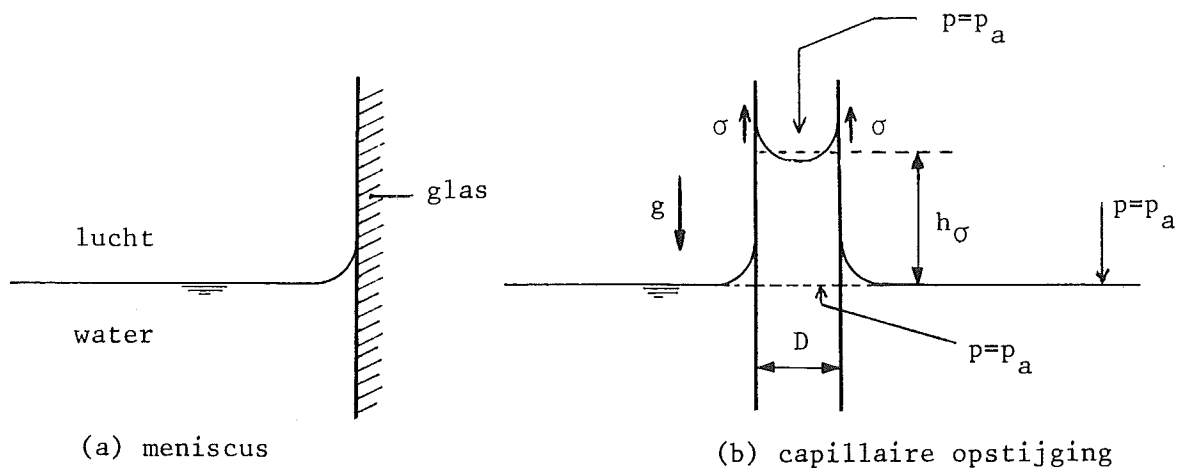
$$p_h - p_b = \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \sigma \quad (2.10)$$

Het relatieve belang van de grensvlakspanning  $\sigma$  voor een stroming met kenmerkende snelheid  $U$  en kenmerkende grootte van de kromtestraal van het grensvlak gelijk aan  $\ell$  is bepaald door het kental van Weber:

$$We = \frac{\rho U^2 \ell}{\sigma} \quad (2.11)$$

Voor het grensvlak water-lucht geldt  $\sigma/\rho = 7,3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}^2$ , zodat de grensvlakspanning alleen van belang kan zijn bij zeer kleinschalige en langzame bewegingen ( $U^2 \ell = 7,3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}^2$  als  $We = 1$ ). Rimpels aan het wateroppervlak met een golflengte van enkele millimeters of minder zijn daarvan een voorbeeld.

Bij de doorsnijding van een vloeistof-oppervlak door een wand van vaste stof treedt adhesie op, d.w.z. onderlinge aantrekking tussen vloeistof en vaste stof. Daardoor wordt het grensvlak in de omgeving van de aanraking gekromd en ontstaat de z.g. meniscus (Fig. 2.3a). Voor het contact tussen water, lucht en glas is de meniscus hol naar de zijde van de lucht, en (voor zuiver water) rakend aan het glas. Hierdoor wordt water in een open, nauw buisje (een z.g. capillair) gezogen (Fig. 2.3b).



Figuur 2.3

De capillaire stijghoogte  $h_\sigma$  kan in geval van evenwicht met het gewicht van het opgezogen water worden berekend uit

$$(\pi D)\sigma = \left(\frac{1}{4}\pi D^2 h_\sigma\right)\rho g$$

zodat

$$h_\sigma = 4 \frac{\sigma}{\rho g D}$$

Deze capillaire stijghoogte  $h_\sigma$  is dus omgekeerd evenredig met de diameter. (Voor water-lucht-glas en  $D = 1 \text{ mm}$  is  $h_\sigma \approx 3 \text{ cm}$ .) Ook hieruit volgt dat de grensvlakspanning alleen bij kleinschalige verschijnselen van belang is.

## 2.5 Gelijkvormigheid en dimensie-analyse

In het voorgaande zijn enkele (dimensieloze) kentallen geïntroduceerd waarvan de waarde een maat is voor het relatieve belang van een bepaalde vloeistofeigenschap (bv. Mach voor samendrukbaarheid). Een bekend kental dat niet aan een vloeistofeigenschap is verbonden is het kental van Froude,  $Fr = U/\sqrt{g\ell}$ , dat een maat is voor de relatieve invloed van de zwaartekracht in een stroming met kenmerkende snelheid  $U$  en kenmerkende lengte  $\ell$  (bv. van een varende schip - de situatie waarvoor Froude (1810-1879) de gelijkvormigheid onderzocht i.v.m. schaalproeven voor de bepaling van de weerstand van schepen). Bij vloeistofstromen

met een vrij oppervlak speelt dit kental meestal een belangrijke rol. Weer een andere groep van dimensieloze parameters wordt gevormd uit verhoudingen van lengten (bv. die van diepte tot breedte van een kanaal, of die van breedte tot kromtestraal van een rivierbocht), van tijden, van stroomsnelheden, enz.

Twee verschillende stromingen (verschillende vloeistoffen, verschillende absolute afmetingen) zijn alleen dan gelijkvormig aan elkaar (geometrisch, kinematisch en dynamisch) wanneer elke relevante dimensieloze parameter dezelfde waarde heeft in beide stromingen.

Om vast te stellen welke dimensieloze parameters een rol spelen in een gegeven probleem wordt eerst op grond van de beschikbare vóórkennis een opsomming gemaakt van de belangrijk geachte onafhankelijke variabelen waaruit vervolgens dimensieloze parameters worden geformeerd.

We lichten dit toe aan de hand van het voorbeeld van een gegeven stroming door een leiding, waarbij het gaat om de wandweerstand als afhankelijke grootte. In concreto gaan we uit van een ruwe leiding met rechtehoekige dwarsdoorsnede. We veronderstellen dat daarvoor de gemiddelde wandschuifspanning  $\tau$  (gemiddeld over het hele wandoppervlak) slechts van de volgende onafhankelijke grootheden afhangt:

- inwendige breedte ( $b$ ) en hoogte ( $h$ ) van het dwarsprofiel;
- afmeting wandruwheid ( $k$ );
- massadichtheid ( $\rho$ ) en viscositeit ( $\eta$ ) van de vloeistof;
- de over het dwarsprofiel gemiddelde stroomsnelheid ( $U$ ).

Symbolisch weergegeven:

$$\tau = f_1(b, h, k, \rho, \eta, U) \quad (2.12)$$

We gaan na wat de dimensies van deze grootheden zijn, uitgedrukt in de basisdimensies  $M$ ,  $L$  en  $T$  voor massa, lengte en tijd:

$$[\tau] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[b] = [h] = [k] = L$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$[U] = LT^{-1}$$

Omdat er hier drie basisdimensies zijn kiezen we drie onafhankelijken, zodanig dat de basisdimensies daarin in verschillende verhoudingen vóórkomen, bv.  $h$ ,  $U$  en  $\rho$ . De overigen gaan we dimensieloos maken in termen van deze drie gekozen grootheden. Dat kan langs een formele weg maar ook meer direct via inspectie of stap voor stap. De dimensie van de schuifspanning  $\tau$  bv. bevat  $M$  in de eerste macht. Van de drie gekozen variabelen ( $h$ ,  $U$ ,  $\rho$ ) bevat alleen  $\rho$  de dimensie  $M$ , en wel in de eerste macht. We zullen  $\tau$  dus moeten delen door  $\rho$ . De verhouding  $\tau/\rho$  heeft de dimensie  $(ML^{-1}T^{-2})/ML^{-3} = L^2T^{-2}$ ; dit is juist de dimensie van  $U^2$  zodat  $\tau/\rho U^2$  de gezochte dimensieloze grootheid is voor  $\tau$ . Zo voortgaand gaat (2.12) over in de volgende dimensieloze vorm:

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = f_2\left(\frac{b}{h}, \frac{k}{h}, \frac{\eta}{\rho U h}\right) \quad (2.13)$$

Het linkerlid hierin noemen we de weerstandsfactor  $\lambda$  (zodat  $\tau = \lambda \rho U^2$ ). Deze factor is in het gegeven geval dus uitsluitend afhankelijk van de vorm van het dwarsprofiel ( $b/h$ ), de relatieve ruwheid ( $k/h$ ) en een kental van Reynolds ( $Re_h = \rho U h / \eta$ ). (Het feit dat in feite de reciproke van  $Re_h$  in 2.13 staat doet niets af aan deze uitspraak.) Er geldt dus

$$\lambda = f_3\left(\frac{b}{h}, \frac{k}{h}, Re_h\right) \quad (2.14)$$

De keuze van de drie grootheden  $h$ ,  $\rho$  en  $U$  om daarin alle andere uit te drukken had iets willekeurig. We hadden bv.  $b$  kunnen kiezen in plaats van  $h$ . In dat geval zou het volgende verband zijn ontstaan i.p.v. (2.14):

$$\lambda = f_4\left(\frac{h}{b}, \frac{k}{b}, Re_b\right) \quad (2.15)$$

Dit verschilt uiterlijk van (2.14) maar is in wezen daaraan gelijkwaardig omdat de grootheden van (2.15) zijn uit te drukken in die van (2.14); immers,

$$\frac{h}{b} = \left(\frac{b}{h}\right)^{-1}; \quad \frac{k}{b} = \frac{k}{h} \left(\frac{b}{h}\right)^{-1}; \quad Re_b = Re_h \left(\frac{b}{h}\right)^{-1}$$

Zolang we alle onafhankelijke grootheden in rekening brengen zijn dit soort omrekeningen mogelijk en doet het er in wezen niet toe welke



variabelen we kiezen om de anderen daarin uit te drukken. Dit verandert zodra we benaderingen gaan invoeren. Als bijvoorbeeld het rechtehoekig profiel heel breed is ( $b/h \rightarrow \infty$  of  $h/b \rightarrow 0$ ) zal de feitelijke breedte vrijwel geen invloed hebben op  $\lambda$ . In (2.14) gaan we dan de invloed van  $b/h$  verwaarlozen:

$$\lambda \rightarrow f_5\left(\frac{k}{h}, Re_h\right) \quad \text{als} \quad \frac{b}{h} \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

Het zou echter onjuist zijn om in (2.15) de invloed te verwaarlozen van alle termen die  $b$  bevatten (dat zouden alle termen in het rechterlid zijn).

Een buis met cirkelvormig dwarsprofiel heeft geen variabele vormfactor; daarvoor geldt i.p.v. (2.14):

$$\lambda = f_5\left(\frac{k}{D}, Re_D\right) \quad (2.17)$$

Hierin is  $D$  de inwendige diameter, en is  $Re_D = \rho UD/\eta = UD/\nu$ . Voor een gladde buis ( $k/D \rightarrow 0$ ) resteert slechts het kental van Reynolds als onafhankelijke variabele (zie par. 2.3.3).

Waarden van  $\lambda$  voor buisleidingen zijn deels theoretisch, deels empirisch bepaald als functie van  $k/D$  en  $Re_D$ . In hoofdstuk 11 gaan we daarop in. Het weerstandsprobleem was hier slechts als voorbeeld gebruikt voor het werken met dimensiebeschouwingen en het denken in termen van dimensieloze grootheden en gelijkvormigheid. Dit is in de vloeistofmechanica van groot belang; we zullen er regelmatig mee in aanraking komen.

### 3. KINEMATICA

#### 3.1 Snelheidsveld

In het continuümmodel van stromende materie is de stroomsnelheid ( $\vec{u}$ ) gedefinieerd als functie van continue ruimte en tijd. Deze snelheid is in ieder punt en op ieder tijdstip gelijk aan de snelheid (t.o.v. de gekozen referentie) van het massacentrum van de materie die zich op het beschouwde tijdstip bevindt in een zeer kleine omgeving van het beschouwde punt.

De verzameling vectoren  $\vec{u}$  op een willekeurig tijdstip in een gebied  $G$  heet het **snelheidsveld** in  $G$  op dat tijdstip.

Wanneer de snelheid in een zeker gebied niet varieert met de plaats heet het snelheidsveld in dat gebied **uniform** of **homogeen**.

Wanneer het snelheidsveld in een zeker tijdsinterval niet met de tijd varieert heet de stroming gedurende dat interval **stationair**; daarbij is de snelheid in elk vast punt dus constant in de tijd. Bij een stationair maar niet-uniform snelheidsveld zal een bewegend waterdeeltje echter in de loop van de tijd wel een variërende snelheid kunnen hebben; de versnelling van de deeltjes is dan niet gelijk aan nul. Hierop komen we terug in par. 3.3.

Een beweging waarin de versnellingen nul zijn noemen we **eenparig**. Een voorbeeld daarvan is de stationaire stroming door een prismatische leiding (bv. een pijpleiding met constante diameter). (De snelheid varieert daarbij wel met de afstand uit de wand, zodat dit snelheidsveld niet uniform is volgens bovenstaande definitie, maar voor een deeltje, dat evenwijdig met de wand beweegt, is de snelheid constant.)

#### Turbulente stroming

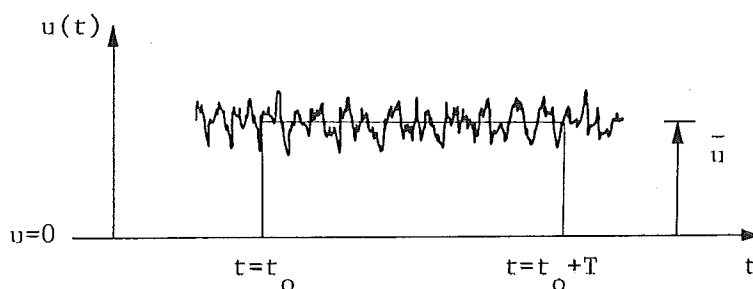
In het vorige hoofdstuk is al opgemerkt dat een stroming laminair of turbulent kan zijn, afhankelijk van de waarde van het kental van Reynolds (zie par. 2.3). Alleen een laminaire stroming kan in strikte zin uniform en stationair zijn. Bij een turbulente stroming treden per definitie onregelmatige fluctuaties op in de momentane snelheid.

Het optreden van turbulentie heeft een sterke vergroting tot gevolg van menging en van energieverlies (eigenlijk: onomkeerbare omzetting van macroscopische kinetische energie in microscopische kinetische energie, ofwel in warmte). Daardoor is het een zeer belangrijk verschijnsel.

In de beschrijving van turbulentie maken we onderscheid tussen een gemiddelde waarde van de snelheid en de fluctuaties rondom dat gemiddelde. De definitie van de over de tijd gemiddelde waarde van de snelheid ( $\bar{u}$ ) in een punt kan geschreven worden als

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} u(t) dt \quad (3.1)$$

Hierin is  $u(t)$  de momentane snelheid in een gekozen richting,  $t_0$  het aanvangstijdstip van de middeling, en  $T$  de duur ervan (Fig. 3.1).



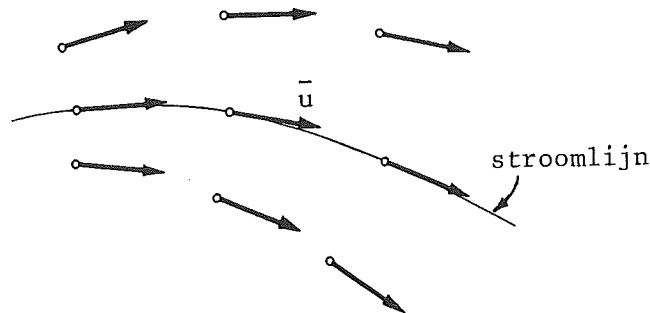
Figuur 3.1 Snelheid in turbulente stroom

De middelingsduur  $T$  moet zo groot gekozen worden dat het resultaat van de middeling statistisch stabiel is. Een duur van enkele minuten is daartoe voor stromingen in open en gesloten leidingen veelal voldoende. Merk op dat het resultaat ( $\bar{u}$ ) daarbij nog wel met  $t_0$  kan variëren, bijvoorbeeld als gevolg van het getij.

Voorlopig gaan we ons beperken tot het over de turbulentie gemiddelde snelheidsveld. De hierboven ingevoerde begrippen zoals uniformiteit en stationariteit zullen ook daarop betrekking hebben. We zullen zelfs zonder meer over "de snelheid" spreken, en de overstreping weglaten, ook al bedoelen we in feite deze gemiddelde snelheid.

### Stroomlijnen

Een belangrijk hulpmiddel in de beschrijving van een snelheidsveld is de stroomlijn, d.i. een zodanige lijn dat de stroomsnelheid in elk punt ervan raakt aan die lijn (Fig. 3.2).

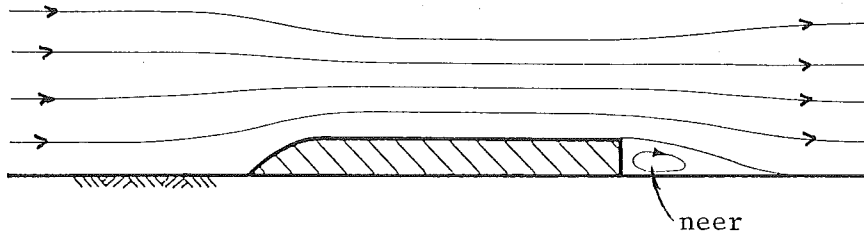


*Figuur 3.2 Stroomlijn*

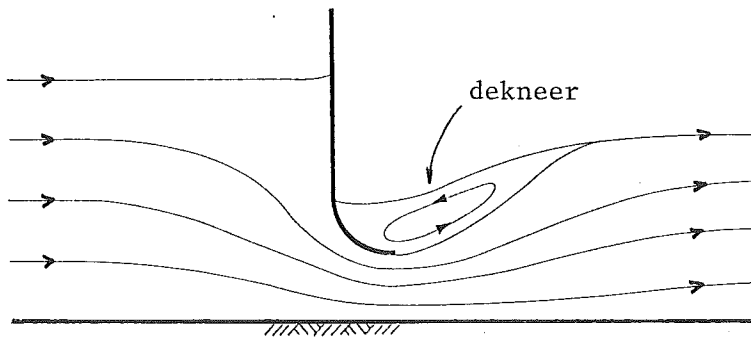
Een stroomlijn geeft dus een beeld van de richting van de stroomsnelheid (afgezien van het teken). Stroomlijnen zijn gedefinieerd op elk willekeurig tijdstip.

Een verzameling stroomlijnen geeft een goede indruk van de stroming in het betreffende gebied; het gebruik ervan is een onmisbaar hulpmiddel in de analyse van veel stromingsproblemen, in het bijzonder die van sterk niet-uniforme stromingen zoals die zich voordoen rondom constructies en bij abrupte veranderingen in het profiel van een leiding. Figuur 3.3 geeft daarvan enkele voorbeelden. Eén daarvan is afkomstig van Leonardo da Vinci (1452-1519), die veel stroombeelden heeft geobserveerd en getekend.

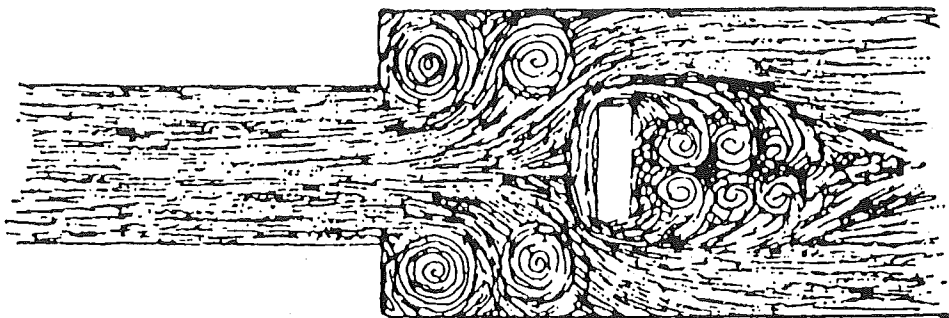
Bij stationaire stromen liggen de buitenste stroomlijnen in principe in de grensvlakken (bodem, zijwand, oppervlak enz.). Bij abrupte veranderingen in het profiel kan de hoofdstroom echter van een vaste wand loslaten (Fig. 3.3). Dit gaat gepaard met wervelingen en energieverliezen. De voorspelling van de eigenschappen van de stroming in zulke situaties is een moeilijk probleem. Voor een belangrijk deel moet hier empirisch te werk worden gegaan. In vervolghoofdstukken komen we hier op terug.



(a) stroming over overlaat



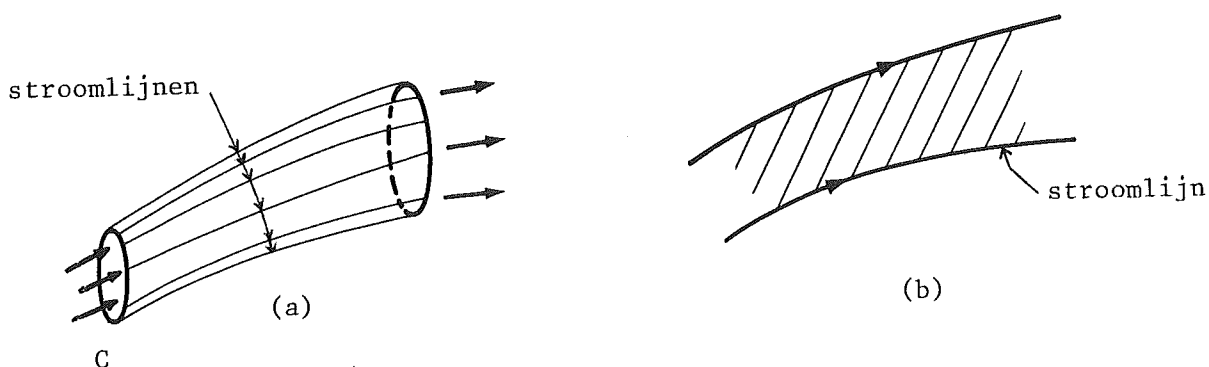
(b) stroming onder schuif



(c) stroming in verwijding met obstakel, getekend door Leonardo da Vinci (ontleend aan Rouse en Ince, 1963)

*Figuur 3.3 Drie stroombeelden met stroomlijnen*

De stroomlijnen die gaan door alle punten van een gesloten kromme (C) vormen tezamen een buisvormig oppervlak dat een z.g. **stroombuis** insluit (Fig. 3.4a). (Hierbij is stilzwijgend aangenomen dat de kromme niet geheel in het vlak van de stroming ligt.)



Figuur 3.4 *Stroombuis (a) en stroomstrook(b)*

Per definitie vindt er geen stroming plaats door de zijdelingse, buisvormige begrenzing van de stroombuis, ongeacht of deze begrenzing slechts een denkbeeldig vlak is, midden in de stromende materie, of dat deze bestaat uit een fysisch grensvlak zoals bodem, wand of oppervlak.

In sommige situaties vindt de stroming plaats in onderling evenwijdige platte vlakken, althans bij benadering. Een voorbeeld hiervan is de stroming haaks over een prismatische drempel op een horizontale bodem. In zulke gevallen van een z.g. twee-dimensionale stroming werken we niet met een stroombuis maar met een **stroomstrook**, d.i. een deel van een vlak waarin de stroming plaatsvindt dat zijdelings begrensd wordt door twee stroomlijnen (Fig. 3.4b).

Stroomlijnen geven een beeld van de richtingen van het momentane snelmomentane snelheidsveld. Zij moeten niet worden verward met de banen die waterdeeltjes in de loop van de tijd afleggen. Alleen wanneer de stroming stationair is valt de baan van een deeltje samen met een stroomlijn. (Hierbij zien wij af van turbulentie.)

### 3.2 Variaties in ruimte en tijd

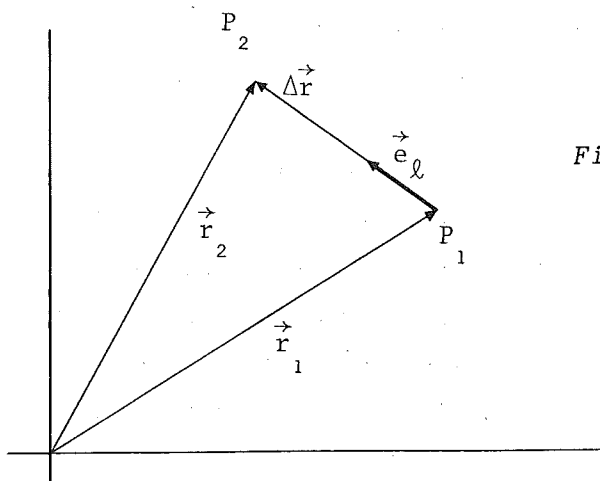
In deze paragraaf gaan we achtereenvolgens in op veranderingen in de ruimte, in de tijd en in de combinatie daarvan zoals ervaren door een

bewegende waarnemer. We beginnen met het veld van een willekeurige scalaire grootheid (bijvoorbeeld massadichtheid, druk, temperatuur). In de volgende paragraaf (3.3) volgt het meer gecompliceerde geval van het vectoriële snelheidsveld. Dat leidt tot uitdrukkingen voor de versneling van een deeltje van de stromende materie.

### Variaties in de ruimte

Voor de beschrijving van de ruimtelijke variatie van een veld speelt het begrip gradiënt een belangrijke rol.

Laat in een gebied  $G$  met plaatsvector  $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$  een scalair veld  $f(\vec{r})$  ofwel  $f(x,y,z)$  zijn gedefinieerd. Om de variatie van  $f$  in de omgeving van een willekeurig punt  $P_1$  te berekenen bekijken we behalve dit punt een naburig punt  $P_2$  (Fig. 3.5) dat op een afstand  $\Delta\ell$  van  $P_1$  is gelegen, in een willekeurige richting  $\vec{e}_\ell$  vanuit  $P_1$  (zodat  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r} = \Delta\ell\vec{e}_\ell$ ).



Figuur 3.5

De afstand ( $\Delta\ell$ ) tussen  $P_2$  en  $P_1$  is infinitesimaal. Voor het (infinitesimaal veronderstelde) verschil in de twee waarden van de veldgrootheid  $f$ , gedefinieerd als

$$\Delta f = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

geldt dan

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

Het rechterlid hiervan is het inwendig product van de vector  $\Delta\vec{r} = \Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z$  en een tweede vector, de z.g. gradiënt van  $f$ , gedefinieerd als

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

zodat

$$\Delta f \approx \Delta\vec{r} \cdot \text{grad } f \quad (3.2)$$

Het is gebruikelijk de gradiënt-vector te schrijven in termen van de z.g. nabla-operator  $\nabla$ , die gedefinieerd is als

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.3)$$

Dan geldt (per definitie)

$$\nabla f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Hiermee kan (3.2) worden geschreven als

$$\Delta f \approx \nabla f \cdot \Delta\vec{r} \quad (3.4)$$

Met  $\Delta\vec{r} = (\Delta\ell)\vec{e}_\ell$  gaat dit over in

$$\frac{\Delta f}{\Delta\ell} \approx \nabla f \cdot \vec{e}_\ell$$

en in de limiet voor  $\Delta\ell \rightarrow 0$  in

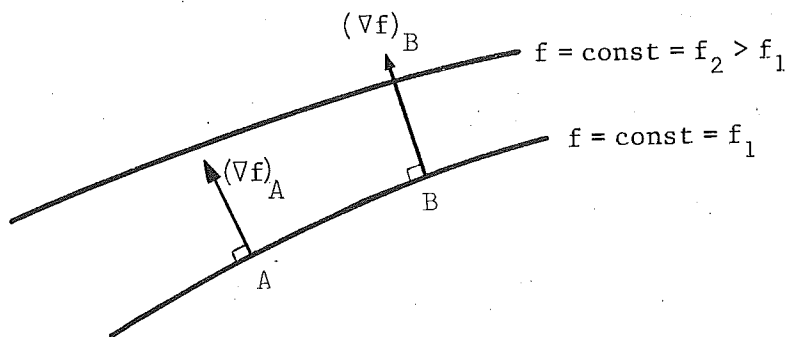
$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \nabla f \cdot \vec{e}_\ell \quad (3.5)$$

Het rechterlid hiervan is de waarde van de component van  $\nabla f$  in de richting  $\vec{e}_\ell$ . Uit (3.5) volgt dus dat de toeneming van  $f$  per eenheid van lengte ( $\partial f / \partial \ell$ ) in een willekeurige richting ( $\vec{e}_\ell$ ) gelijk is aan de waarde van de component van de gradiënt van  $f$  in die richting. (Dit volgt ook onmiddellijk uit de definitie van grad  $f$ .)



Ten tweede volgt uit (3.5) dat de toeneming van  $f$  per eenheid van lengte het sterkst is (bij gegeven  $\nabla f$ ) wanneer  $\vec{e}_\ell$  de richting van  $\nabla f$  heeft. De gradiënt-vector wijst dus in de richting van de sterkste toeneming van de betreffende functie. Dit kan ook als volgt worden ingezien.

In het gebied waarin  $f(\vec{r})$  is gedefinieerd bestaan vlakken waarin  $f$  constant is. De componenten van de gradiënt van  $f$  in zo'n vlak hebben dus de waarde nul. Hieruit volgt dat de gradiënt van  $f$  haaks staat op de vlakken van constante  $f$ , en dus de richting heeft van de sterkste verandering van  $f$ . In twee dimensies geldt evenzo dat de gradiënt van



Figuur 3.6

$f$  haaks staat op lijnen waarlangs  $f$  constant is (zoals "de" helling van een terrein wordt bepaald in de richting haaks op de hoogtelijnen, of zoals de gradiënt van de luchtdruk op een bepaald niveau, bv. zee-niveau, haaks staat op de isobaren) (Fig. 3.6).

#### Variatie in de tijd

Wanneer het veld van  $f$  tijdsafhankelijk is ( $f = f(\vec{r}, t)$ ) blijft het voorgaande van kracht, onder de voorwaarde dat we het veld steeds op één tijdstip bekijken. Dit ligt trouwens al besloten in de betekenis van de partiële afgeleiden. De notatie  $\partial f / \partial x$  bv. houdt immers in dat slechts  $x$  wordt gevarieerd en dat daarbij alle overige onafhankelijke variabelen, waaronder de tijd, constant worden gehouden.

Bij een tijdsafhankelijk veld kan er sprake zijn van variatie in de tijd in elk vast punt van de ruimte ( $\vec{r} = \text{constant}$ ), weergegeven door de partiële afgeleide van  $f$  naar de tijd:  $\partial f / \partial t$ . Deze grootte heet de lokale afgeleide van  $f$  naar  $t$ .

Totale afgeleide

Stel nu dat een waarnemer zich met een snelheid  $\vec{W} = \vec{W}(\vec{r}, t)$  door het gebied beweegt waarin het veld  $f(\vec{r}, t)$  is gedefinieerd, en op elk tijdstip de lokale waarde van  $f$  waarneemt. In een tijd  $\Delta t$  verplaatst de waarnemer zich over een interval  $\Delta \vec{r} = \vec{W} \Delta t$ . Ook al zou het veld stationair zijn ( $\partial f / \partial t = 0$ ), dan zou als gevolg van de verplaatsing in het niet-uniforme veld toch een verandering van  $f$  worden waargenomen, en wel  $\Delta f_{\vec{r}} \approx \Delta \vec{r} \cdot \nabla f = (\vec{W} \cdot \nabla f) \Delta t$ . Als gevolg van de instationariteit is er echter in elk vast punt ook een verandering van  $f$  gedurende het tijdsinterval  $\Delta t$ , en wel  $\Delta f_t \approx (\partial f / \partial t) \Delta t$ . De totale waargenomen verandering is gegeven door de som van deze twee bijdragen:

$$\Delta f \approx \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{W} \cdot \nabla f \right) \Delta t$$

De verhouding  $\Delta f / \Delta t$  gaat in de limiet  $\Delta t \rightarrow 0$  over in de z.g. totale afgeleide:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{W} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + w_x \frac{\partial f}{\partial x} + w_y \frac{\partial f}{\partial y} + w_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.6)$$

Materiële afgeleide

Een bijzonder geval van (3.6) dat van groot belang is voor stromingen stromingen is de verandering van een veldgrootte ( $f$ ) ondergaan door een deeltje van de stromende materie. Daarvoor geldt  $\vec{W} = \vec{u}$ , de stroomsnelheid. De totale afgeleide noemen we in dat geval de meebewegende afgeleide, en ook wel de materiële afgeleide, omdat de "waarnemer" in dit geval met de materie mee beweegt. Vanwege de bijzondere betekenis krijgt de operator voor deze afgeleide een apart symbool,  $D/Dt$ :

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f} \quad (3.7)$$

Deze meebewegende afgeleide bestaat uit de som van de lokale afgeleide,  $\partial f / \partial t$ , en de z.g. convectieve afgeleide,  $\vec{u} \cdot \nabla f$ . Laatstgenoemde kan worden uitgeschreven in de componenten van  $\vec{u}$  en  $\nabla f$  ten opzichte van het Oxyz-stelsel volgens

$$\vec{u} \cdot \nabla f = u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

De convectieve afgeleide van  $f$  hangt samen met een verandering van  $f$  langs de stroomlijn, omdat die de richting van  $\vec{u}$  heeft. Om dit uit te drukken voeren we langs de stroomlijn een lengte-coördinaat  $s$  in die toeneemt in de richting van  $\vec{u}$ . Schrijven we verder  $\vec{u} = u \vec{e}_s$  dan geldt, met gebruikmaking van (3.5):

$$\vec{u} \cdot \nabla f = u \vec{e}_s \cdot \nabla f = u \frac{\partial f}{\partial s}$$

De meebewegende of materiële afgeleide kan hiermee worden geschreven als

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial s}} \quad (3.8)$$

Dit kunnen we zien als de totale afgeleide naar de tijd van  $f(s, t)$ , gedefinieerd op de stroomlijn en in de tijd, waarbij voor een materie-deeltje geldt  $s = s(t)$  en  $ds/dt = u$ :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial s}$$

### 3.3 Versnelling van een deeltje

De versnelling ( $\vec{a}$ ) van een deeltje van de stromende materie is de meebewegende afgeleide van de snelheid van dat deeltje:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (3.9)$$

ofwel

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (3.10)$$

Deze bestaat uit de lokale versnelling  $\partial \vec{u} / \partial t$  en de convectieve versnelling  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ .

De x-component van de versnelling heeft de waarde

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (3.11x)$$

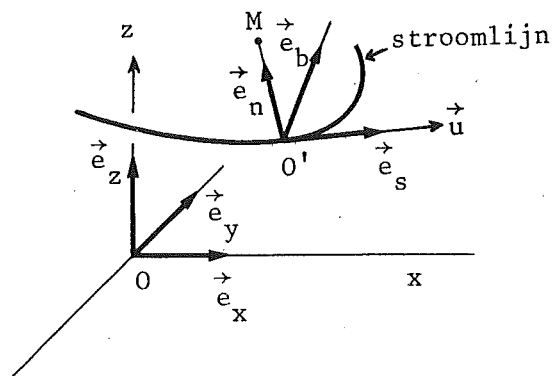
Voor de y- en z-componenten gelden soortgelijke uitdrukkingen.

Het hierboven gebruikte Oxyz-assenstelsel heeft een willekeurige oriëntatie. Het heeft voordelen de versnelling in componenten te ontbinden ten opzichte van het z.g. **natuurlijk assenstelsel** ( $O'snb$ ), dat georiënteerd is ten opzichte van de stroomlijn op een zeker tijdstip in een infinitesimale omgeving van het beschouwde punt  $O'$  (Fig. 3.7). Voor de definitie van dit stelsel gebruiken we de volgende basisvectoren:

- $\vec{e}_s$ , in de richting van de snelheid  $\vec{u}$  in  $O'$ , en dus rakend aan de stroomlijn.
- $\vec{e}_n$ , gericht van  $O'$  naar het kromtemiddelpunt  $M$  van de stroomlijn in  $O'$ ;  $\vec{e}_n$  heet de (hoofd)normaal.
- $\vec{e}_b = \vec{e}_s \times \vec{e}_n$ ; deze staat dus haaks op  $\vec{e}_s$  en  $\vec{e}_n$ ;  $\vec{e}_b$  heet de binormaal.

Het natuurlijk assenstelsel in  $O'$  is gericht langs deze vectoren, met coördinaten ( $s, n, b$ ).

In een infinitesimale omgeving van  $O'$  ligt de gekromde stroomlijn in een plat vlak, het z.g. osculatievlak. Dit is dus het vlak opgespannen door  $\vec{e}_s$  en  $\vec{e}_n$ ; de binormaal  $\vec{e}_b$  staat haaks op dit vlak.



Figuur 3.7 Stroomlijn met natuurlijk assenstelsel

We splitsen de snelheid in  $O'$  nu naar grootte en richting volgens  $\vec{u} = u \vec{e}_s$ . Voor de versnelling geldt dan

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{Du}{Dt} \vec{e}_s + u \frac{D\vec{e}_s}{Dt}$$

De bijdrage  $(Du/Dt)\vec{e}_s$  is de invloed van de verandering van de grootte van de snelheid. Hij is gericht langs  $\vec{e}_s$ , dus langs de stroomlijn in  $O'$ . De waarde ervan is

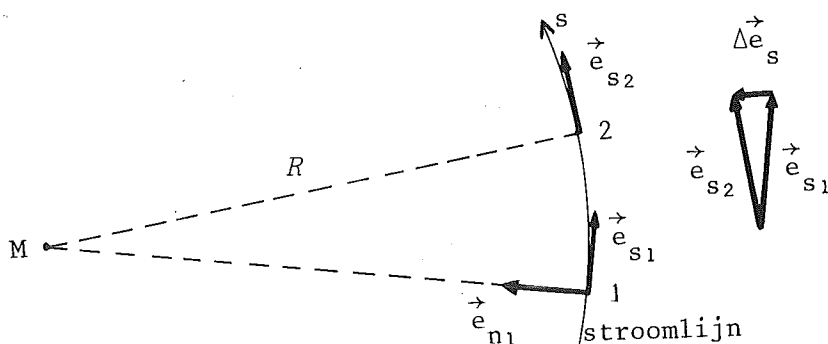
$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2}u^2 \right)$$

De bijdrage  $u \frac{D\vec{e}_s}{Dt}$  is de invloed van de verandering van de richting van de snelheid. Deze bijdrage staat dus haaks op de stroomlijn in  $O'$ , d.w.z. hij ligt in het  $O'nb$ -vlak. Hij is te schrijven als

$$u \frac{D\vec{e}_s}{Dt} = u \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t} + u^2 \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s}$$

De bijdrage  $u \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t}$  is de invloed van de (lokale) veranderingen van de richting van het snelheidsveld in het vaste punt  $O'$ . Deze kan zowel een component in de  $n$ -richting als in de  $b$ -richting hebben. De waarde van deze componenten zullen we korthedshalve weergeven met  $\partial u_n/\partial t$  respectievelijk  $\partial u_b/\partial t$ . (Dit moet dan zo worden opgevat dat in  $O'$  weliswaar geldt  $u_n = 0$  en  $u_b = 0$  op het beschouwde tijdstip, maar in de loop van de tijd kan de snelheid  $\vec{u}$  in  $O'$  wel een component krijgen in de oorspronkelijke richtingen  $\vec{e}_n$  en  $\vec{e}_b$ .)

De bijdrage  $u^2 \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s}$  tenslotte bevat de factor  $\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s}$ , voorstellende de richtingsverandering van de stroomlijn per eenheid van booglengte, ofwel de kromming van de stroomlijn. De richting van  $\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s}$  is die van  $\vec{e}_n$  (zie b7); de waarde ervan schrijven we als  $R^{-1}$ , waarin  $R$  de kromtestraal is van de stroomlijn in  $O'$ , zodat  $\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = \vec{e}_n/R$  (Fig. 3.8). De bijdrage  $u^2 \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s}$  is dan te schrijven als  $(u^2/R)\vec{e}_n$ ; hij stelt de centripetale versnelling voor.



Figuur 3.8

Resumerend vinden we de volgende waarden van de versnellingscomponenten ten opzichte van het natuurlijke assenstelsel:

$$a_s = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (\frac{1}{2}u^2) \quad (3.12s)$$

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + u \frac{\partial u_n}{\partial s} = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} \quad (3.12n)$$

$$a_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} \quad (3.12b)$$

De termen  $\partial(\frac{1}{2}u^2)/\partial s$  en  $u^2/R$  komen overeen met de baanversnelling en de centripetale versnelling van een deeltje dat beweegt langs een kromlijnige, stationaire baan in een inertiaalstelsel, zoals behandeld in de mechanica van een puntmassa (b7). De daaraan toegevoegde lokale versnellingen ( $\partial u/\partial t$  enz.) zijn in deze analogie op te vatten als versnellingen van die baan zelf (vergelijk met de versnelling van een wagentje dat langs een achtbaan rijdt tijdens een aardbeving).

Bovenstaande resultaten voor de versnelling zullen in hoofdstuk 6 worden gebruikt in een analyse van de dynamica van een deeltje. We gaan eerst verder met andere aspecten van de kinematica.

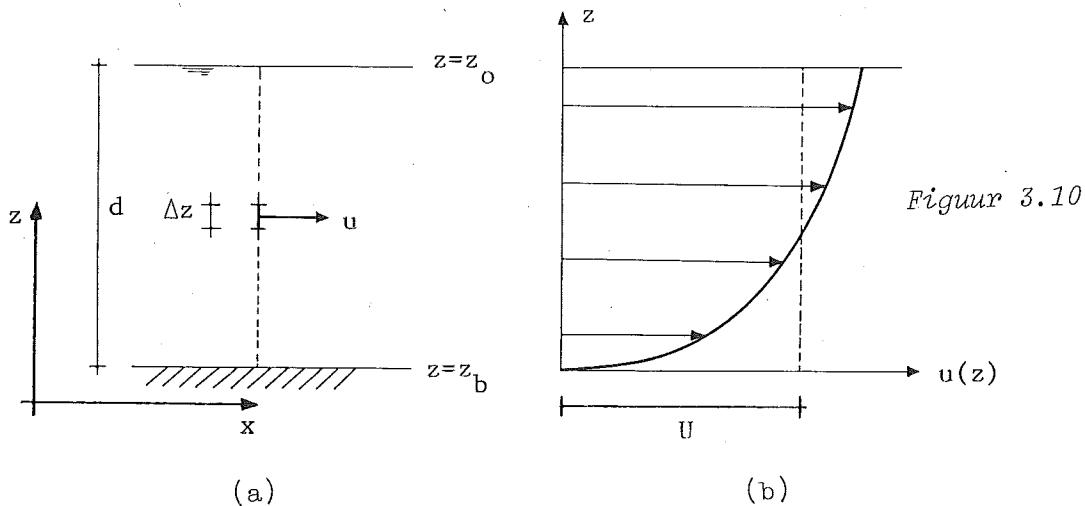
### 3.4 Volumestroom en meevoering

In het voorgaande werd een deeltje gevolgd en werd het daaraan verbonden begrip meebewegende afgeleide geïntroduceerd. Dit is een beschrijving volgens Lagrange.

In stromingsproblemen richt de aandacht zich vaak niet zo zeer op de baan van een deeltje, maar op een bepaald deel van de ruimte (bijvoorbeeld rondom een brugpijler in een rivier) welk deel in de loop van de tijd door steeds andere deeltjes wordt doorstroomd. Het is dan geschikt een vast deel van de ruimte te definiëren, een z.g. **balansgebied**, en te bepalen in hoeverre de daarin aanwezige massa, impuls, energie enz. variëren in de tijd. Dit is een beschrijving volgens Euler. De overdracht van massa, impuls, energie enz. door de begrenzingen van het balansgebied heen speelt daarin een belangrijke rol. Voor een deel vinden deze overdrachten plaats in de vorm van meevoering of **advectie** met de stromende materie. Voor de behandeling daarvan beginnen we met de volumestroom.

$$U = \frac{\int u \, dz}{\int dz} = \frac{q}{d} \quad (3.18)$$

N.B. We gebruiken hiervoor hetzelfde symbool als in (3.16). Per geval is uit het verband op te maken welke gemiddelde snelheid bedoeld wordt.



Meevoering

Voor de bepaling van de stromen van massa, energie enz. keren we nu terug naar de stroming beschouwd in Fig. 3.9. Het volume van de materie die in een tijd  $\Delta t$  door het vlakje met oppervlak  $\Delta A$  stroomt is  $\Delta V = u_N \Delta t \Delta A$ . De massa ervan is  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho u_N \Delta t \Delta A$ . De massa die per tijds-eenheid een doorgang passeert noemen we de massastroom. Voor het infinitesimale vlakje heeft deze dus de waarde

$$\rho u_N \Delta A = \rho \Delta Q$$

en voor de hele doorgang  $D$  :

$$\iint \rho u_N \, dA$$

Wanneer  $\rho$  uniform is reduceert deze uitdrukking voor de massastroom tot

$$\rho \iint u_N \, dA = \rho Q$$

De SI-eenheid hiervan is  $1 \text{ kg/s} (= 1 (\text{kg/m}^3)(\text{m}^3/\text{s}).)$

Op analoge wijze kunnen we de stroom definiëren van andere meegevoerde grootheden met een (volumieke) dichtheid. Als voorbeeld noemen we de kinetische energie. De waarde daarvan voor de massa  $\Delta m = \rho \Delta V$  met

snellheid  $u$  is  $\frac{1}{2}(\Delta m)u^2 = \frac{1}{2}\rho u^2 \Delta V$ . (N.B.:  $u^2 = |\vec{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ .) De kinetische energie per eenheid van volume, ofwel de (volumieke) dichtheid van de kinetische energie, is dus gelijk aan  $\frac{1}{2}\rho u^2$ . De stroom van kinetische energie door het infinitesimale vlakje is dan

$$(\frac{1}{2}\rho u^2)u_N \Delta A = \frac{1}{2}\rho u^2 \Delta Q$$

en door de gehele doorgang

$$\iint (\frac{1}{2}\rho u^2)u_N dA$$

De SI-eenheid hiervan is  $1 \text{ (J/m}^3\text{)(m}^3\text{/s)} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$ .

Algemener gesteld geldt dat de stroom door een doorgang (meevoering per tijdseenheid) van een grootte  $X$ , waarvan de volumieke dichtheid  $\rho_X$  is, gegeven is door

$$\iint \rho_X u_N dA$$

De dimensie hiervan is  $[X]/T$ .

Bovenstaande resultaten zullen op een aantal plaatsen in volgende hoofdstukken worden toegepast.





#### 4. BALANSVERGELIJKINGEN

De berekening van diverse mechanische eigenschappen van een stroming gedurende een zekere tijd in een zeker gebied gaat uit van

- begin- en randvoorwaarden
- balansen voor massa, impuls en energie
- constitutieve vergelijkingen

In dit hoofdstuk worden enkele algemene opmerkingen gemaakt over de balansvergelijkingen die in dergelijke berekeningen voorkomen.

Specifieke toepassingen komen in vervolghoofdstukken aan de orde.

Een balans van een grootheid (bv. energie) beschrijft de verandering van de hoeveelheid daarvan in een (eventueel variërend) gebied  $G$  gedurende een zeker tijdsinterval, in relatie tot processen van overdracht van de beschouwde grootheid door de begrenzingen van  $G$ , en tot processen van productie (of afbraak) in  $G$ .

##### Tijdsinterval

Het tijdsinterval waarvoor een balans wordt opgesteld kan in principe willekeurig zijn; meestal worden bijdragen per eenheid van tijd gebruikt (balans opstellen voor tijdsinterval met infinitesimale duur  $\Delta t$ , delen door  $\Delta t$ , limiet bepalen voor  $\Delta t \rightarrow 0$ ).

##### Balansgebied

Het balansgebied kan in principe ook willekeurig worden gekozen, eventueel variërend in de tijd, maar de kenmerken van een gegeven probleem zullen in de praktijk de keuze grotendeels bepalen. Twee voor de hand liggende mogelijkheden zijn al genoemd in hoofdstuk 3:

- (a) Een variërend balansgebied dat steeds dezelfde materie bevat; met andere woorden, in de tijd volgen we een "brok" materie. Er vindt in dit geval per definitie geen massatransport plaats door de begrenzing van het gebied, en dus geen meevoering van wat dan ook. We spreken hierbij van een beschrijving volgens Lagrange.
- (b) Een ruimtelijk vast balansgebied; er vindt in dit geval massa-transport plaats door de begrenzingen van het gebied, evenals meevoering van impuls, van energie, enz. We spreken in dit geval van een beschrijving volgens Euler.

Een Lagrange-benadering is in principe vooral geschikt voor (instationaire) stromen met bewegende grensvlakken (bv. golven aan het oppervlak); grensvlakken bestaan immers steeds uit dezelfde deeltjes. Een Euler-benadering daarentegen is meer geëigend voor (stationaire) problemen van stromen door leidingen of voor stromingen door, over of rondom een constructie (bv. door een sluis, over een stuw, rondom een brugpijler). In zulke gevallen is sprake van stationaire grensvlakken met een gegeven geometrie, een situatie die zich bij uitstek leent voor een Eulerse beschrijving.

Balansgebieden kunnen naar grootte worden onderscheiden in twee typen: gebieden met infinitesimaal kleine afmetingen, en gebieden met eindige afmetingen.

Balansvergelijkingen voor infinitesimale gebieden leiden tot differentiaalvergelijkingen voor de veldgrootheden in een willekeurig punt. Zij zijn nodig voor een bestudering van de lokale details van een stroming (bv. de lokale druk op de buiswand in een bochtstuk).

Balansvergelijkingen voor een gebied van eindige afmetingen, bv. een deel van een leiding tussen twee dwarsdoorsneden, leiden tot betrekkingen tussen geïntegreerde grootheden. Zij zijn geschikt voor het verkrijgen van resultaten voor het beschouwde (leiding)gedeelte in zijn totaliteit (bv. de kracht die de stroming in een buis uitoefent op een bochtstuk).

### Bijdragen aan de balans

In de balans van een grootheid X (bv. energie) spelen in het algemeen de volgende begrippen een rol:

- De hoeveelheid van de beschouwde grootheid X in het balansgebied G (de z.g. voorraad).
- De netto overdracht van X naar G door de grenzen van G heen.
- De interne productie (of afbraak) van X die plaatsvindt in G.

De balans voor de beschouwde grootheid in het gebied G drukt uit dat

$$\text{toeneming voorraad in } G = \text{overdracht naar } G + \text{productie in } G \quad (4.1)$$

(I)

(II)

(III)

Alle bijdragen hierin zijn netto waarden (bv. netto overdracht naar  $G =$  overdracht naar binnen minus overdracht naar buiten) in hetzelfde tijdsinterval.

In het algemeen kunnen verschillende fysische processen aan de overdracht van een grootheid bijdragen, evenals aan de productie. Energie bv. kan worden overgedragen door meevoering (behalve in een Lagrange-beschrijving) en door wisselwerkingen van de materie in het balansgebied met die er buiten. In de desbetreffende hoofdstukken komen wij hierop terug.

Een grootheid waarvoor de productie of afbraak (III) altijd gelijk is aan nul (bv. massa) noemen we een behouden grootheid. De balansvergelijking daarvoor reduceert tot een behoudsvergelijking:

$$\begin{array}{ll} \text{toeneming voorraad in } G = \text{overdracht naar } G & (4.2) \\ \text{(I)} & \text{(II)} \end{array}$$

We beperken ons nu tot een stationaire stroming en tot een ruimtelijk vast balansgebied. Dan is (I) gelijk aan nul. Wanneer we bovendien met een behouden grootheid te doen hebben dan is ook (III) gelijk aan nul, en reduceert de balansvergelijking van de algemene gedaante (4.1) tot

$$\begin{array}{ll} \text{overdracht naar } G = 0 & (4.3) \\ \text{(II)} & \end{array}$$

Merk op dat dit niet inhoudt dat er geen overdracht plaatsvindt door elk deelvlakje; het betekent dat de netto overdracht naar binnen door het gehele begrenzende oppervlak van het gebied  $G$  gelijk is aan nul (evenveel ingaand als uitgaand).

Bovenstaande algemene begrippen omtrent balansvergelijkingen komen in de volgende hoofdstukken bij diverse toepassingen aan de orde. Dan zullen zij per geval een concrete invulling krijgen.



## 5. MASSABALANS EN VOLUMEBALANS

### 5.1 Onsamendrukbaarheid

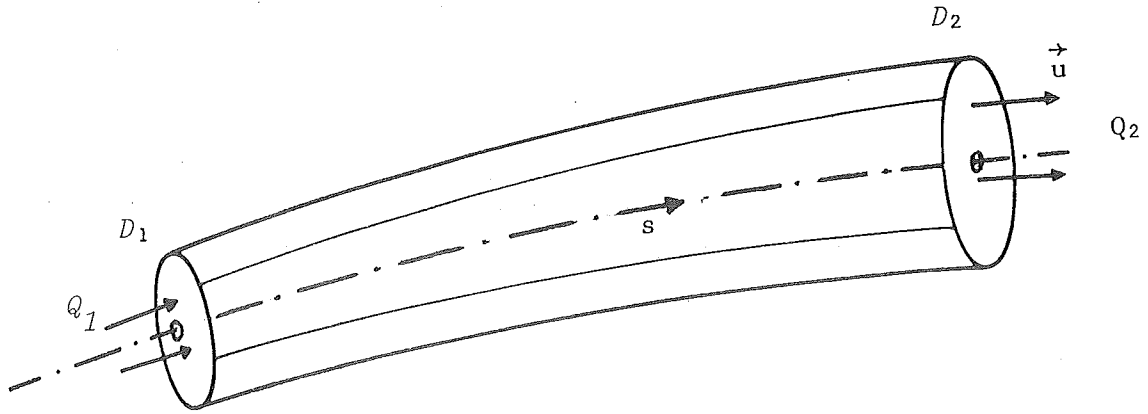
Massa is een behouden grootheid, waarvoor dus een behoudsvergelijking geldt. Voorzover de stromende materie als onsamendrukbaar mag worden benaderd ( $K \rightarrow \infty$ ) kunnen we eveneens spreken van behoud van volume (zie vgl. 2.1). In de meeste civiel-technische stromingsproblemen is dit een goede benadering (zie par. 2.3.2), zeker waar het vloeistofstromen met een vrij oppervlak betreft. We zullen ons daarom hier meteen beperken tot een onsamendrukbaar medium, en daarvoor vergelijkingen opstellen voor het behoud van volume. Zulke vergelijkingen worden vaak continuïteitsvergelijkingen genoemd.

Opgemerkt wordt dat het behoud van volume fysisch niet een fundamenteel karakter heeft zoals het behoud van massa of impuls. Het is een benadering die slechts geldt onder verwaarlozing van samendrukbaarheid.

Vergelijkingen voor het behoud van volume van de stromende materie in een ruimtelijk vast balansgebied zijn in het algemeen van de gedaante (4.2). De toeneming van het volume in een zeker balansgebied (met een variërende waterspiegel) wordt **berging** genoemd. Wanneer deze gelijk is aan nul is de gedaante (4.3) van toepassing. Dit doet zich voor bij stationaire stromen, en ook bij instationaire stromen mits het balansgebied ten alle tijde geheel gevuld is met stromende materie, bv. in gesloten leidingen. De precieze vorm hangt af van de beschouwde situatie. Enkele gevallen worden hierna behandeld.

### 5.2 Volumebalans voor een stroombuis

Als eerste voorbeeld nemen we een stationaire stroming, en als balansgebied  $G$  een ruimtelijk vast deel van een stroombuis tussen twee doorgangen  $D_1$  en  $D_2$  (Fig. 5.1). De doorgangen staan niet noodzakelijkerwijs dwars op de stroomrichting.



Figuur 5.1

Stel dat de volumestroom of het debiet  $Q_1$  door  $D_1$  ingaand is (naar G toe), en de stroom  $Q_2$  door  $D_2$  uitgaand. Omdat er geen stroom plaatsvindt door de zijdelingse begrenzing van een stroombuis is de totale volumestroom naar G toe gelijk aan  $Q_1 - Q_2$ . Volgens (4.3) moet deze gelijk zijn aan nul:

$$Q_1 - Q_2 = 0$$

Omdat dit geldt voor willekeurige doorgangen kunnen we schrijven

$Q$  is constant langs de stroombuis

ofwel

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (5.1)$$

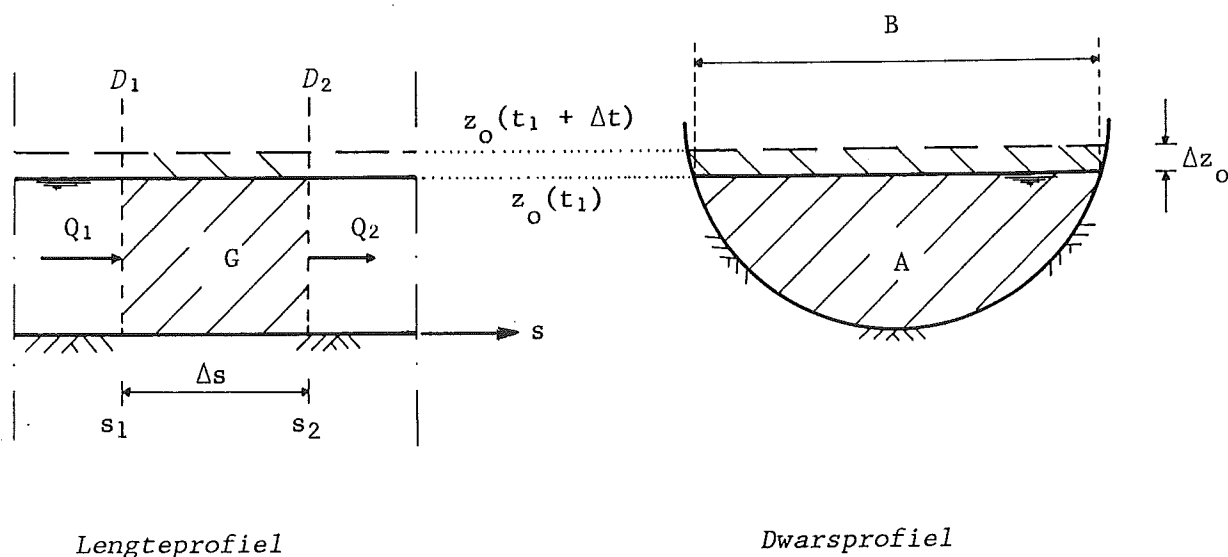
waarin  $s$  een lengte-coördinaat is langs de as van de stroombuis.

Hieruit kunnen we via  $U = Q/A$  bij gegeven  $Q$  de gemiddelde snelheid  $U$  berekenen in elke doorsnede waar  $A$  bekend is. We zien dat convergentie van de stroomlijnen in de stroomrichting een versnelling van de vloeistofdeeltjes inhoudt in de stroomrichting (vergroting van de stroomsnelheid).

Als tweede geval bekijken we een stroming door een geheel gevulde, starre leiding. Ook wanneer deze stroming instationair is, waarbij  $U = U(s, t)$  en  $Q = Q(s, t)$ , varieert het volume van de stromende materie in de leiding tussen twee doorgangen niet in de tijd. In dit geval geldt ondanks de instationariteit dus toch (4.3) (nog steeds onder de veronderstelling van onsamendrukbaarheid), en daarmee ook (5.1).

### 5.3 Volumebalans voor niet-stationaire stroom in open waterloop

We behandelen tenslotte de volumebalans voor een niet-stationaire stroming door een open waterloop, bv. een geul in een getijdengebied. Voor de geometrie en de betekenis van symbolen wordt verwezen naar Fig. 5.2.



Figuur 5.2

Elke dwarsdoorsnede  $D$  ( $s = \text{constant}$ ) van de geul heeft op elk tijdstip ( $t = \text{constant}$ ) een doorstroomd oppervlak ( $A$ ), een debiet ( $Q$ ) en een niveau ( $z_0$ ) van de waterspiegel (horizontaal verondersteld in dwarsrichting). Deze variëren met  $s$  en  $t$ . Voor het bepalen van een verband tussen deze variaties stellen we een volumebalans op voor een gebied  $G$  van de geul tussen twee dwarsdoorsneden  $s = s_1$  en  $s = s_2 = s_1 + \Delta s$ , waarbij  $\Delta s$  infinitesimaal is (Fig. 5.2).



Het volume van het water in G is gelijk aan  $A \Delta s$ . Het kan variëren als gevolg van het stijgen of dalen van de waterspiegel. De toeneming ervan per eenheid van tijd (de berging) is daarom te schrijven als

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Delta s = B \frac{\partial z_o}{\partial t} \Delta s$$

De factor B hierin is de momentane breedte van de waterspiegel (Fig. 5.2).

De netto volumestroom naar G toe is gelijk aan  $Q_1 - Q_2$ , waarin  $Q_1 = Q(s_1, t)$  en idem voor  $Q_2$ .

Gelijkstelling van deze twee (conform de behoudsvergelijking 4.2) geeft

$$B \frac{\partial z_o}{\partial t} \Delta s = Q_1 - Q_2$$

Na deling door  $\Delta s$  gaat dit in de limiet voor  $\Delta s \rightarrow 0$  over in

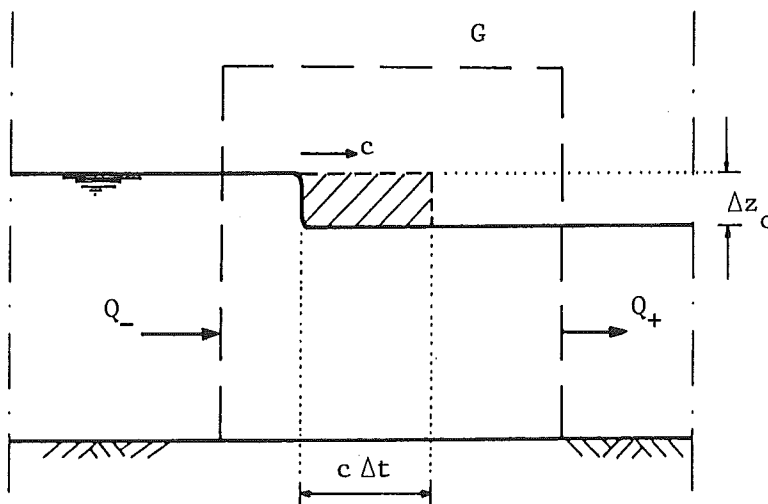
$$\boxed{B \frac{\partial z_o}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0} \quad (5.2)$$

Dit is de standaardvorm van de continuïteitsvergelijking voor een open waterloop. Deze reduceert tot (5.1) wanneer de stroming stationair is.

Wanneer de waterloop een constante en relatief grote breedte heeft kan de stroming in sommige gevallen als twee-dimensionaal worden beschouwd. We kunnen dan een volumebalans opstellen voor een eenheid van breedte. Deze balans is uit (5.2) te verkrijgen door substitutie van  $Q = Bq$ , waarin  $q = Ud$  het debiet is per eenheid van breedte (vgl. 3.17). Daarmee reduceert (5.2) tot

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (5.3)$$

In sommige situaties is sprake van een abrupte verandering van de stroming. Denk bv. aan de plotselinge toevoer van een debiet  $\Delta Q$  aan een kanaal als gevolg van de bediening van eenemaal, een stuw of een sluis. De toevoeging  $\Delta Q$  heeft een verhoging  $\Delta z_0$  van de waterspiegel tot gevolg die als een golf (een z.g. translatiegolf) het kanaalpand inloopt met een zekere voortplantingssnelheid, zeg  $c$ . Vanwege het abrupte karakter van de veranderingen worden zulke golven als sprongen of discontinuïteiten behandeld. Ter plaatse van de discontinuïteiten gelden (5.2) en (5.3) niet, en moeten zij worden vervangen door een andere betrekking. Daartoe stellen we een volumebalans op voor een ruimtelijk vast gebied  $G$  dat gedurende het beschouwde tijdsinterval de sprong bevat (Fig. 5.3):



Figuur 5.3

De berging in  $G$  gedurende een tijdje  $\Delta t$  is  $B(c\Delta t)\Delta z_0$ , ofwel  $B c \Delta z_0$  per eenheid van tijd. Hierin is  $B$  de lokale breedte van de waterspiegel. De netto volumestroom naar  $G$  is  $\Delta Q$  (zie Fig. 5.3). De volumebalans voor het gebied  $G$  geeft dan

$$\boxed{B \ c \ \Delta z_o = \Delta Q} \quad (5.4)$$

Wanneer de stroming als twee-dimensionaal kan worden beschouwd geldt

$$\boxed{c \ \Delta z_o = \Delta q} \quad (5.5)$$

Met vergelijking (5.4) dan wel (5.5) is een verband gelegd tussen  $\Delta z_o$  en het toegevoegde debiet ( $\Delta Q$  dan wel  $\Delta q$ ), dat echter nog wel  $c$  als een onbekende bevat. De impulsbalans, toegepast op hetzelfde gebied  $G$ , kan de ontbrekende vergelijking leveren (zie hoofdstuk 9). In het volgende hoofdstuk (6) gaan we echter eerst de impulsbalans behandelen voor een infinitesimaal klein deeltje in een willekeurig stroomveld.

## 6. IMPULSBALANS VOOR EEN DEELTJE

In dit hoofdstuk behandelen we de impulsbalans voor een deeltje (Lagrange beschrijving). Anders gezegd: we passen de tweede wet van Newton toe op een (infinitesimale) massa in de vorm kracht = massa  $\times$  versnelling.

### 6.1 Impulsvoorraad

We beschouwen een infinitesimaal vloeistofpakketje dat we in zijn beweging zullen volgen. Het volume ervan is  $\Delta V$ , de massa is  $\Delta m = \rho \Delta V$ , en de impuls is  $\Delta \vec{I} = (\Delta m) \vec{u} = (\rho \vec{u}) \Delta V$ . (Merk op dat  $\rho \vec{u}$  de volumieke impulsdichtheid is.)

De massa van het beschouwde vloeistofpakketje varieert niet in de tijd, zodat de verandering van de impuls per eenheid van tijd gegeven is door

$$\frac{D}{Dt} (\Delta \vec{I}) = \frac{D}{Dt} (\Delta m \vec{u}) = \Delta m \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \Delta V \quad (6.1)$$

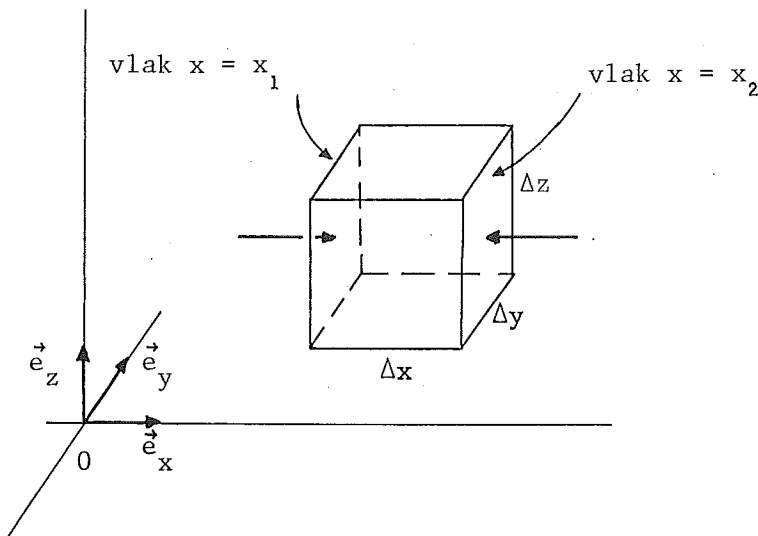
### 6.2 Impulsoverdracht

Omdat we het vloeistofpakketje volgen kan er slechts impuls aan worden overgedragen via wisselwerkingen met de overige materie. De uit deze wisselwerkingen resulterende overdracht per tijdseenheid van impuls naar het beschouwde pakketje duiden we aan met  $\vec{F}_{ww}$ . Anders gezegd:  $\vec{F}_{ww}$  is de uitwendige kracht die op de betreffende massa wordt uitgeoefend.

We onderscheiden hier moleculaire wisselwerkingen en zwaartewisselwerkingen. De eerstgenoemden zijn slechts over zeer kleine afstanden werkzaam; hun bijdrage aan de overdracht van impuls naar het beschouwde vloeistofpakketje is op continuüm-niveau te modelleren als een spanning in het begrenzend oppervlak. Het zwaarteveld van de aarde (en van de hemellichamen) daarentegen strekt zich uit over afstanden die groot zijn vergeleken met de afmetingen van technische en geofysische stromingen, en de bijdrage ervan aan de impulsoverdracht is gelijkmatig over de gehele vloeistofmassa verdeeld.

Drukkracht

In de uitwerking van het bovenstaande m.b.t. de spanningen brengen we voorlopig slechts de druk in rekening, en gaan we de schuifspanningen verwaarlozen. (De toelaatbaarheid van deze ideale-vloeistof benadering komt later ter sprake.) We bepalen de resulterende drukkraft  $\vec{F}_p$  op het beschouwde vloeistofpakketje op een moment waarop dit de vorm heeft van een rechthoekig parallelepipedum, met ribben ter lengte  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  en  $\Delta z$  evenwijdig aan de assen van een rechthoekig inertiaalstelsel  $Oxyz$  (Fig. 6.1).



Figuur 6.1

Op het zijvlak  $x = x_1$  werkt een drukkraft  $p_1 \Delta y \Delta z \vec{e}_x$ , waarin  $p_1$  de gemiddelde druk is in dat zijvlak. Evenzo werkt op het zijvlak  $x = x_2$  een drukkraft  $-p_2 \Delta y \Delta z \vec{e}_x$ . De resultante van beide is

$$\vec{F}_{p_x} = (p_1 - p_2) \Delta y \Delta z \vec{e}_x$$

Voor kleine  $\Delta x$  kan dit worden benaderd als

$$\vec{F}_{p_x} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z \vec{e}_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x\right) \Delta V$$

We zien dat  $\vec{F}_{p_x}$  evenredig is met de x-component van de gradiënt van  $p$ . Omdat voor de y- en z-component van  $\vec{F}_p$  overeenkomstige uitdrukkingen gelden kunnen we voor de resultante schrijven

$$\vec{F}_p = - (\text{grad } p) \Delta V = (-\nabla p) \Delta V$$

Hiermee is het volgende belangrijke resultaat verkregen: de drukkracht per eenheid van volume is gelijk aan het tegengestelde van de drukgradiënt.

#### Zwaartekracht

De zwaartekracht per eenheid van massa schrijven we als  $\vec{g}$ . De waarde daarvan zullen we als een constante beschouwen ( $g \approx 9,8 \text{ N/kg}$ ). Wanneer we de z-as vertikaal kiezen, positief omhoog, geldt  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ .

De zwaartekracht op de beschouwde massa is

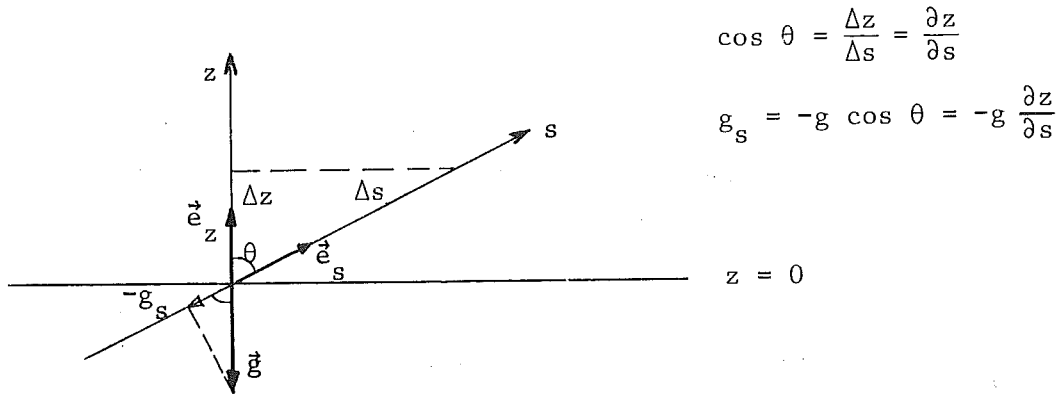
$$\vec{F}_g = (\Delta m) \vec{g} = -(\Delta m) g \vec{e}_z$$

Hiermee komt overeen een potentiële (zwaarte-)energie (zie b7) met de waarde  $(\Delta m) gz = (\rho gz) \Delta V$ , waarin z de hoogte is van het massacentrum van het pakketje boven het horizontale vergelijkingsvlak  $z = 0$ . De grootheid  $\rho gz$  is dus de volumieke dichtheid van potentiële zwaarte-energie.

De potentiële zwaarte-energie per eenheid van massa noemen we de zwaarte-potentiaal  $\Omega$ . Met bovengenoemde keuze van het assenstelsel ( $\vec{e}_z$  vertikaal omhoog) geldt  $\Omega = gz$ . Het lokale zwaarteveld is van deze potentiaal af te leiden volgens

$$\vec{g} = -\text{grad } \Omega = -\text{grad}(gz) = -\nabla(gz) \quad (6.2)$$

Hebben we bv. de waarde nodig van de component van  $\vec{g}$  in de stroomrichting ( $\vec{e}_s$ ) dan schrijven we die volgens (6.2) als  $g_s = -\partial(gz)/\partial s$ . Een andere schrijfwijze zou zijn  $g_s = -g \cos \theta$  als  $\theta$  de hoek is die de stroomrichting ( $\vec{e}_s$ ) maakt met de vertikaal ( $\vec{e}_z$ ). De gelijkheid in waarde van beide uitdrukkingen is geïllustreerd in figuur 6.2.



$$\cos \theta = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$g_s = -g \cos \theta = -g \frac{\partial z}{\partial s}$$

$z = 0$

Figuur 6.2

Met gebruik van (6.2) is  $\vec{F}_g$  te schrijven als

$$\vec{F}_g = -(\Delta m) \nabla(gz) = -(\rho \Delta V) \nabla(gz)$$

Wanneer  $\rho$  uniform is ( $\nabla \rho = 0$ ) kan dit worden geschreven als

$$\vec{F}_g = -\nabla(\rho gz) \Delta V$$

Dankzij de invoering van de zwaarte-potentiaal is deze vergelijking van dezelfde gedaante als die voor de drukkracht, nl. in gradiënt-vorm. Dit vergemakkelijkt de analyse.

#### Totale impulsoverdracht

De totale impulsoverdracht per eenheid van tijd naar het beschouwde vloeistofpakketje als gevolg van wisselwerkingen, ofwel de uitwendige kracht erop uitgeoefend, is de som van  $\vec{F}_p$  en  $\vec{F}_g$ :

$$\vec{F}_{ww} = \vec{F}_p + \vec{F}_g = -\nabla(p + \rho gz) \Delta V \quad (6.3)$$

De aandrijvende kracht voor de stroming van een ideale vloeistof wordt blijkbaar geleverd door de gradiënt van de som  $(p + \rho gz)$ . Deze som is dus op te vatten als een krachtpotentiaal voor de gecombineerde werking van druk en zwaarte (conservatieve krachten). Omdat slechts de gradiënt van deze potentiaal fysisch betekenis heeft, kunnen we naar willekeur een constante aan de potentiaal toevoegen. Dit komt ook hierin tot uiting dat we de referentieniveaus voor  $z$  en  $p$  willekeurig kunnen

kiezen. Gemakshalve zullen we de atmosferische druk als referentie nemen voor de drukken in de vloeistof. De waarde van  $p$  zal dan niet de absolute druk voorstellen maar de (over)druk ten opzichte van de atmosferische druk. In de formulering is dit eenvoudig weer te geven door  $p_{\text{atm}} = 0$  te stellen.

### 6.3 Impulsbalans voor een deeltje

Volgens de tweede wet van Newton geldt

$$\frac{D}{Dt} (\Delta \vec{I}) = \vec{F}_{\text{ww}} \quad (6.4)$$

Substitutie hierin van (6.1) en (6.3) levert

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla(p + \rho g z) \quad (6.5)$$

Deze z.g. vergelijking van Euler (1750) is de basisvergelijking voor de dynamica van (een deeltje van) een ideale vloeistof in het zwaarteveld.

In het geval van evenwicht zijn de versnellingen overal gelijk aan nul. In deze statische toestand spreken we van een hydrostatische drukverdeling; de daarbij horende druk ( $p_s$ ) voldoet aan

$$\nabla(p_s + \rho g z) = 0 \quad (6.6)$$

Dit houdt in dat de druk niet varieert in elk horizontaal vlak in de vloeistof, en dat de druk vertikaal naar beneden toeneemt in dezelfde mate als het gewicht van de vloeistofkolom boven het beschouwde punt (zie b7). Voor een behandeling van vraagstukken uit de hydrostatica verwijzen we naar de vraagstukkenbundel.

Wanneer we in elk punt de druk schrijven als de som van een hydrostatisch deel ( $p_s$ ) en een dynamisch deel ( $p_d$ ), zodat  $p = p_s + p_d$ , dan reduceert de vergelijking van Euler (6.5) tot



$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p_d \quad (6.7)$$

Dit brengt expliciet tot uitdrukking dat  $\nabla p$  en  $\vec{g}$  zelf niet bepalend zijn voor de dynamica van de stroming, maar slechts de ruimtelijke afwijkingen van de som  $(p + \rho g z)$  ten opzichte van de constante waarde daarvan bij de hydrostatische drukverdeling.

#### 6.4 Piëzometrisch niveau

Bij stromen van vloeistoffen (niet die van gassen) hangt de aandrijvende kracht vaak samen met een verschil in niveau van vrije oppervlakken (een z.g. verval). In zulke gevallen is een meetkundige voorstelling gebruikelijk. Daartoe wordt (6.5) gedeeld door  $\rho g$  (waarbij we tevens gebruik maken van de al genoemde benadering dat  $\rho$  en  $g$  constant zijn):

$$\frac{1}{g} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (6.8)$$

De term  $z$  hierin heet de **plaatshoogte** (boven het vlak  $z = 0$ ), en de term  $p/\rho g$  heet de **drukhoogte**; deze stelt de hoogte voor over welke de plaatselijke druk  $p$  de vloeistof zou kunnen doen stijgen boven het beschouwde punt, tegen de werking van de zwaarte in. Het niveau dat daarbij bereikt zou worden heet het **piëzometrisch niveau** voor dat punt; de hoogte daarvan boven het vergelijkingsvlak  $z = 0$  geven we weer met een apart symbool ( $h$ ):

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad (6.9)$$

Hiermee kan de vergelijking van Euler (6.8) worden geschreven als

$$\boxed{\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla h} \quad (6.10)$$

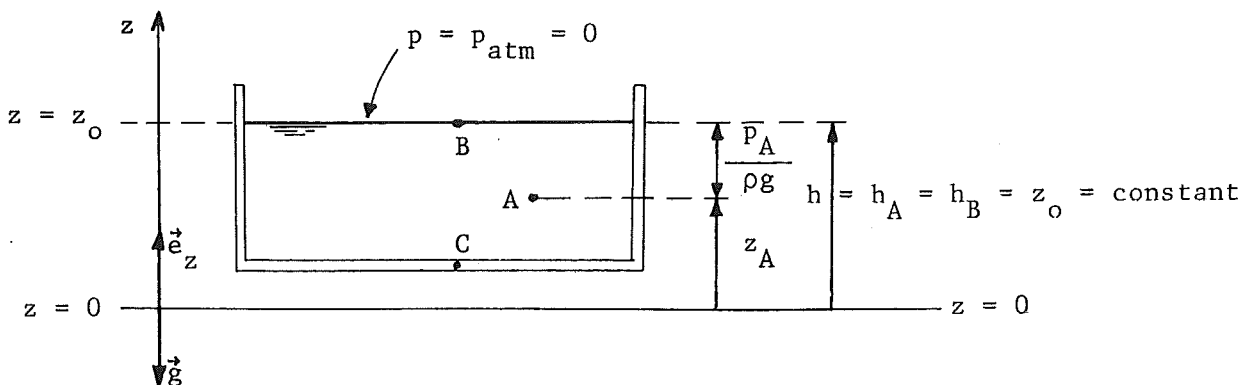
Het piëzometrisch niveau is van groot belang omdat de gradiënt ervan de drijvende kracht levert voor de stroming, en dus bepalend is voor de versnellingen in een ideale vloeistof. [Merk op dat  $\nabla h = \nabla(z + p/\rho g) = \nabla(p_d/\rho g)$ .]

Om de betekenis en het gebruik van het piëzometrisch niveau toe te lichten bekijken we eerst een situatie van evenwicht, waarvoor de versnellingen nul zijn. In dat geval geldt  $\nabla h = 0$ : alle punten in een vloeistof in evenwicht hebben hetzelfde piëzometrisch niveau. Dit komt overeen met de hydrostatische drukverdeling.

We passen het voorgaande toe op een vloeistof in evenwicht, met een vrij oppervlak, waar  $z = z_o$  en  $p = p_{atm} = 0$ . Nemen we een willekeurig punt A in de vloeistof, en een ander punt B ergens aan het vrije oppervlak (Fig. 6.3), dan geldt

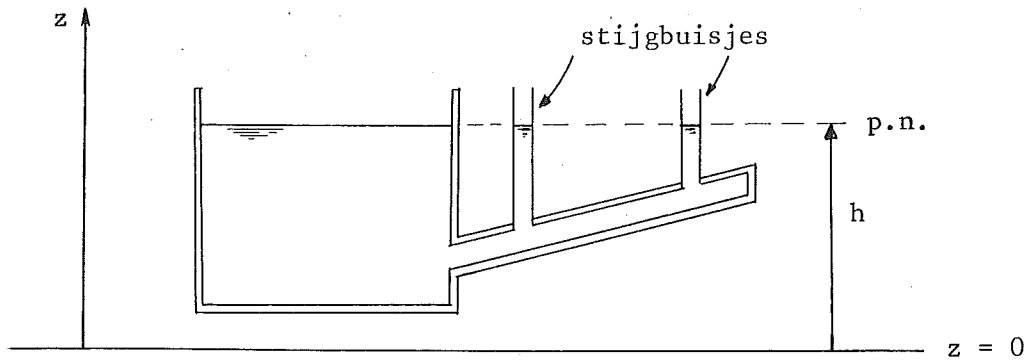
$$h_A = h_B \quad \text{of} \quad z_A + \frac{p_A}{\rho g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} = z_o = \text{constant}$$

In de evenwichtssituatie ligt het vrije oppervlak dus horizontaal (omdat  $p_B = p_{atm} = \text{constant}$ ) en valt het piëzometrisch niveau van alle punten in de vloeistof daarmee samen.



Figuur 6.3

Wanneer de vloeistof geen vrij oppervlak heeft, maar geheel is ingesloten door vaste wanden (bv. van een buis), is het piëzometrisch niveau (in de figuren aan te duiden als p.n.) zichtbaar te maken door middel van open stijgbuisjes (Fig. 6.4). De vloeistof zal daarin opstijgen tot aan het piëzometrisch niveau ter plaatse. In geval van evenwicht stijgt de vloeistof in alle buisjes tot hetzelfde niveau.



Figuur 6.4

Stel nu dat bij punt C in de bodem van het reservoir van figuur 6.3 of 6.4 een klep ineens wordt geopend, waardoor de vloeistof vrij kan gaan uitstromen in de atmosfeer. De druk ter plaatse wordt daardoor plotse-ling verlaagd tot  $p = p_{\text{atm}} = 0$ . De drukverlaging plant zich als een expansiegolf voort door de vloeistof in het reservoir. Vanwege de grote snelheid van zulke golven ( $c = (K/\rho)^{1/2} \approx 1480 \text{ m/s}$ ), en de beperkte afme-tingen van het vloeistofdomein, zullen we doen alsof de storing instan-taan in de hele vloeistof merkbaar is. (In feite ligt dit al besloten in de idealisering van onsamendrukbaarheid.)

Door het openen van de klep wordt het piëzometrisch niveau bij C ver-laagd tot  $h_C = z_C$ . Het komt dus lager te liggen dan in de overige punten in het reservoir. Van een gemeenschappelijk piëzometrisch niveau voor alle punten in de vloeistof is dan geen sprake meer. Als gevolg van de gradiënten ervan wordt de vloeistof versneld. Om meer inzicht hierin te krijgen gaan we de componenten in de vergelijking van Euler bekijken t.o.v. het natuurlijk assenstelsel.

#### 6.5 Vergelijking van Euler in natuurlijk assenstelsel

Van de vergelijking van Euler nemen we achtereenvolgens de componenten in de richting van de stroomlijn ( $\vec{e}_s$ ), de normaal ( $\vec{e}_n$ ) en de binormaal ( $\vec{e}_b$ ). Voor de componenten van de versnelling  $D\vec{u}/Dt$  substitueren we (3.12). Doen we dit voor de vergelijking van Euler in termen van de dynamische druk (6.7) dan ontstaat

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right) = - \frac{\partial p_d}{\partial s} \quad (6.11s)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} \right) = - \frac{\partial p_d}{\partial n} \quad (6.11n)$$

$$\rho \frac{\partial u_b}{\partial t} = - \frac{\partial p_d}{\partial b} \quad (6.11b)$$

In termen van het piëzometrisch niveau (6.10) is het resultaat

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} \quad (6.12s)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n} \quad (6.12n)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b} \quad (6.12b)$$

We gaan in de volgende paragrafen de betekenis hiervan na, in het bijzonder voor het geval van stationaire stromingen.

#### 1. Vergelijking langs de binormaal

In een stationaire stroming is  $\partial u_b / \partial t = 0$  en reduceert de vergelijking van Euler langs de binormaal (6.12b) tot

$$\frac{\partial h}{\partial b} = 0 \quad (6.13)$$

Het piëzometrisch niveau varieert dan dus niet in de richting haaks op het vlak waarin de gekromde stroomlijn ligt (het osculatievlak). Nemen we als voorbeeld een stroming in een rivierbocht, en nemen we als benadering aan dat deze stroming horizontaal is, dan is de binormaal vertikaal, en hebben alle punten in een vertikaal hetzelfde piëzometrisch niveau, dat in de lokale waterspiegel ligt. De drukverdeling in elke vertikaal is dan dus hydrostatisch.

#### 2. Vergelijking langs de normaal

Voor een stationaire stroming reduceert de vergelijking van Euler langs de normaal (6.12n) tot

$$\frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n} \quad (6.14)$$

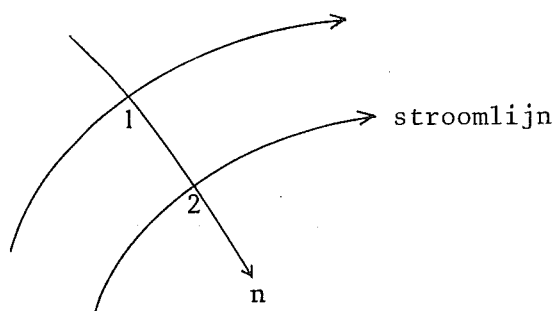
Voor de component van de versnelling naar het kromtemiddelpunt van de stroomlijn toe ( $u^2 \vec{e}_n/R$ ) is een kracht nodig in die richting, overeenkomend met een verlaging van het piëzometrisch niveau in die richting volgens

$$\frac{\partial h}{\partial n} = - \frac{u^2}{gR} \quad (6.15)$$

Het verschil tussen de waarden van  $h$  in twee punten langs de normaal (Fig. 6.5) is hieruit te berekenen volgens

$$\Delta h = h_2 - h_1 = - \int_{n_1}^{n_2} \frac{u^2}{gR} \, dn \quad (6.16)$$

Hierin kunnen zowel  $u$  als  $R$  met  $n$  variëren.



Figuur 6.5

Daar waar de stroomlijn recht is ( $R \rightarrow \infty$ ) geldt  $\partial h/\partial n = 0$ . We zullen van deze eigenschap veel gebruik maken, vooral voor de stroming in een doorsnede waarin alle stroomlijnen recht zijn. Daarvoor geldt: in een dwarsdoorsnede waar de stroomlijnen recht zijn is het piëzometrisch niveau constant (mits  $\partial u_n/\partial t = 0$  en  $\partial u_b/\partial t = 0$ ).

#### Voorbeeld 1 - Rivierbocht

Voor het al genoemde voorbeeld van de horizontale stroming in een rivierbocht volgde uit de vergelijking langs de binormaal dat het piëzometrisch niveau voor alle punten van een vertikaal in de lokale waterspiegel ligt. Uit de vergelijking langs de normaal (6.15 of 6.16) zien we nu dat dit niveau aan de holle zijde van de stroming lager ligt dan aan de bolle zijde. Het niveauverschil in een bocht in een 200 m brede

rivier waarvoor  $u \approx 1$  m/s en  $R \approx 500$  m (globale waarden) is volgens (6.16) ca. 4 cm.

#### Voorbeeld 2 - Stuw

Als tweede voorbeeld nemen we de stationaire twee-dimensionale stroming over een brede stuw (Fig. 6.6a). Om inzicht te krijgen in de stroming zijn enkele stroomlijnen getekend, en ook enkele doorgangen dwars daarop (I t/m III). Omdat de stroming stationair is en twee-dimensionaal, is de afvoer per eenheid van breedte constant:

$$q_I = q_{II} = q_{III}$$

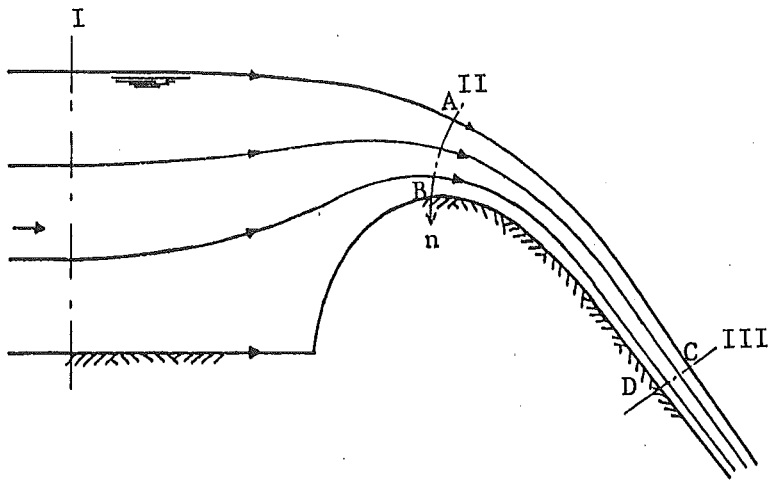
Convergentie van de stroomlijnen houdt dus een vergroting van de stroomsnelheid in.

We passen de vergelijking langs de normaal toe in de doorgangen I, II en III.

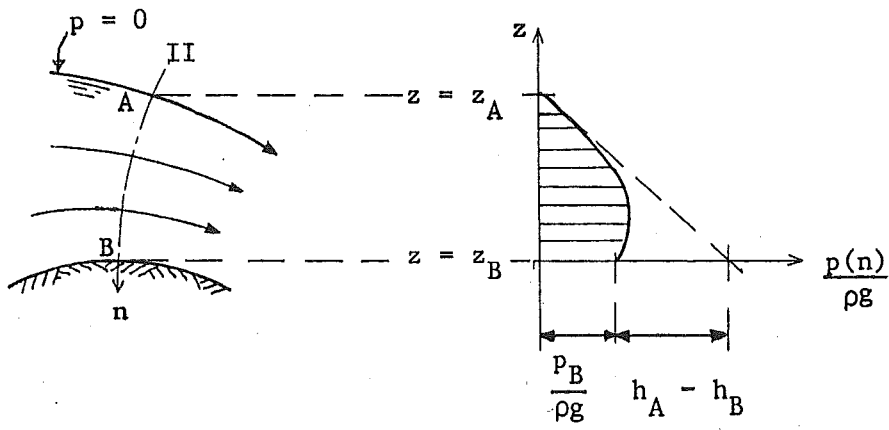
De stroomsnelheden in het diepe reservoir zijn onbetekenend, en de stroomlijnen zijn er slechts zwak gekromd, zodat het piëzometrisch er langs een normaal (I) nauwelijks zal variëren. Dit geldt voor alle doorsneden op voldoende grote afstand bovenstrooms van de stuw, op een afstand van tenminste enkele keren de diepte boven de kruin.

In de omgeving van de kruin van de stuw zijn de snelheden aanzienlijk, en zijn de stroomlijnen sterk gekromd (in het geschetste voorbeeld is  $R$  van dezelfde grootte-orde als de plaatselijke diepte). Het piëzometrisch niveau zal daardoor langs een normaal (II) aanzienlijk afnemen in de richting van de kruin ( $h_B < h_A$ ). De druk in punt B zal daarom significant lager zijn dan de hydrostatische waarde (zie getekend drukverloop in Fig. 6.6b), en kan bij voldoende grote snelheden en/of kromming zelfs negatief worden.

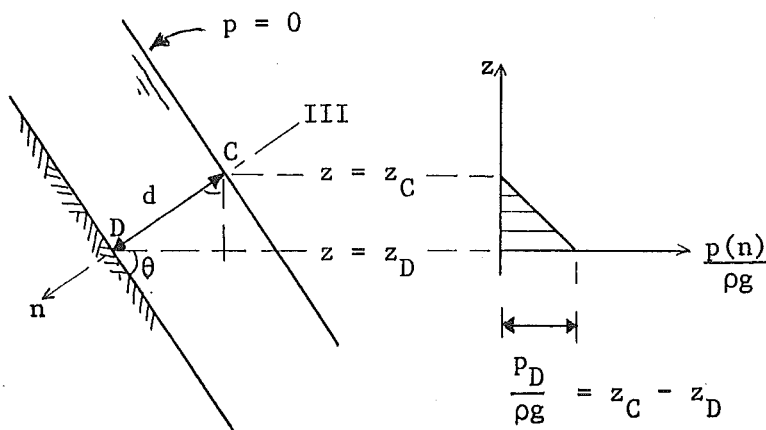
In doorsnede III tenslotte zijn de snelheden weliswaar groot, maar zijn de stroomlijnen vrijwel recht ( $R \gg d$ ) waardoor het piëzometrisch niveau langs de normaal toch niet noemenswaard varieert. We kunnen dan stellen  $h_D = h_C$ , wat samen met  $p_C = 0$  inhoudt dat  $p_D = \rho g(z_C - z_D)$  (Fig. 6.6c). De druk op de stuwwand is dan uit te drukken in de



(a)



(b)



(c)

Figuur 6.6

plaatselijke laagdikte  $d$  (gemeten haaks op de wand) via  $p_D = \rho g d \cos \theta$ , waarin  $\theta$  de hoek is die de wand en de stroomlijnen maken met het horizontale vlak.

### 3. Vergelijking langs de stroomlijn (Bernoulli)

Van de vergelijkingen van Euler in het natuurlijk assenstelsel bekijken we als laatste de vergelijking langs een stroomlijn voor een stationaire stroom. Uitgaand van de formulering in termen van de dynamische druk (6.11s) is het resultaat

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} = - \frac{\partial p_D}{\partial s}$$

Dit houdt in

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}(p_D + \frac{1}{2}\rho u^2) = 0} \quad (6.17a)$$

ofwel

$$p_D + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constant langs een stroomlijn} \quad (6.17b)$$

Dit is (één gedaante van) de vergelijking van Bernoulli (1738).

Merk op dat de vergelijking van Bernoulli is ontstaan door de krachten op een deeltje en de bijbehorende impulsveranderingen te integreren in de richting van de verplaatsing, waardoor in feite een energievergelijking ontstaat. Deze drukt de gelijkheid uit van de arbeid geleverd door de uitwendige krachten enerzijds en de toeneming van de kinetische energie anderzijds. [Als  $\vec{F} = m \vec{D}\vec{u}/Dt$  en  $\Delta\vec{s} = \vec{u} \Delta t$  geldt voor de geleverde arbeid  $\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = m \vec{u} \cdot \Delta\vec{u} = \Delta(\frac{1}{2}m u^2)$ .]

In termen van het piëzometrisch niveau (6.12s) kan de vergelijking van Bernoulli worden geschreven in de gedaante



$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s} \left( h + \frac{u^2}{2g} \right) = 0} \quad (6.18a)$$

ofwel

$$h + \frac{u^2}{2g} = \text{constant langs een stroomlijn} \quad (6.18b)$$

De grootheid  $u^2/2g$  hierin is de kinetische energie ( $\frac{1}{2}\rho u^2\Delta V$ ) per eenheid van gewicht ( $\rho g\Delta V$ ). Deze heeft de dimensie van een lengte, en heet **snelheidshoogte**. Door voor een gegeven punt deze hoogte toe te voegen aan het lokale piëzometrisch niveau ontstaat een nieuw niveau, het z.g. **energieniveau** behorend bij dat punt (in de figuren aan te duiden met e.n.). De hoogte hiervan boven het vergelijkingsvlak  $z = 0$  heet de **energiehoogte (H)**:

$$H = h + \frac{u^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \quad (6.19)$$

Deze is dus de som van plaatshoogte, drukhoogte en snelheidshoogte. De vergelijking van Bernoulli is hiermee te schrijven in de vorm

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial s} = 0} \quad (6.20a)$$

ofwel

$$H = \text{constant langs een stroomlijn} \quad (6.20b)$$

of ook

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{constant langs een stroomlijn} \quad (6.20c)$$

Het is van belang op te merken dat de vergelijkingen van Euler zijn afgeleid voor een ideale vloeistof in een conservatief krachtveld. In werkelijkheid zal er wrijving kunnen optreden. Die zal tegen de stroom in zijn gericht, en daardoor niet van invloed zijn op de geldigheid van de vergelijkingen van Euler langs de binormaal en langs de normaal, maar juist wel op die langs de stroomlijn, d.i. op de vergelijking van Bernoulli; daarin manifesteert wrijvingsinvloed zich als een energieverlies. Bij de toepassing van deze vergelijking moeten we van geval

tot geval dus goed nagaan of deze energieverliezen inderdaad verwaarloosbaar zijn. Wanneer dit niet het geval is moeten we die invloed apart in rekening brengen. Dit blijkt vooral nodig te zijn bij de volgende twee situaties:

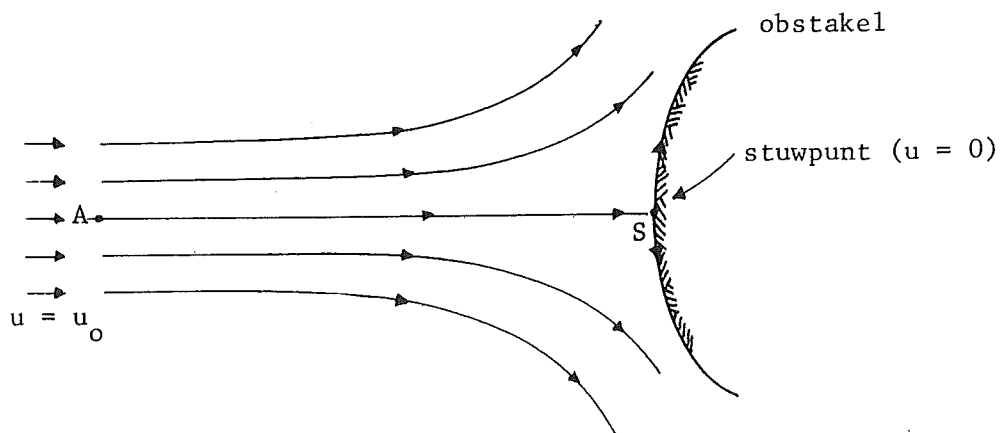
- (a) abrupte verwijding van een begremsd stroomprofiel, waarbij de stroming sterk wordt vertraagd (zie Fig. 3.3c) en turbulentie wordt opgewekt, lokaal aanleiding gevend tot een z.g. vertragingverlies;
- (b) stroming over grote afstand langs een vaste wand, waarbij de invloed van wandweerstand zich cumulatief kan doen gelden, resulterend in wrijvingsverlies.

In volgende hoofdstukken komen we op deze problemen terug. Is daarentegen sprake van een versnelling over een kort traject, dan blijken de verliezen verwaarloosbaar, en kunnen we de vergelijking van Bernoulli goed toepassen. Voor de rest van dit hoofdstuk gaan we daarvan uit.

## 6.6 Toepassingen

### (1) Stuwpunt en stuwdruk

Als eerste toepassing bekijken we de stroming tegen een obstakel (Fig. 6.7). Aan de bovenstroomse zijde daarvan bevindt zich één stroomlijn die doorloopt tot aan het obstakel, en wel tot aan het z.g. stuwpunt (S in Fig. 6.7), waar de stroomlijn geknikt is ( $R = 0$ ). Anders gezegd: de kromming is daar oneindig groot. Omdat de normale versnelling ( $u^2/R$ ) eindig is, moet de snelheid in het stuwpunt de waarde nul hebben.



Figuur 6.7

We gaan de druk in het stuwpunt berekenen door toepassing van de vergelijking van Bernoulli op een stroomlijn van A naar S (Fig. 6.7). Deze toepassing is toelaatbaar, ondanks het feit dat het hier een vertraginggebied betreft, omdat er niet sprake is van een abrupte verwijding van een begrensd stroomprofiel en er geen loslating of (verhevigde) werveling optreedt.

Op grote afstand bovenstrooms van het obstakel is de snelheid constant in grootte ( $u_0$ ) en richting; de dynamische druk ( $p_d$ ) in dat gebied is dus constant (en kan gelijk aan nul worden gesteld). Toepassing van de vergelijking van Bernoulli (6.17) geeft

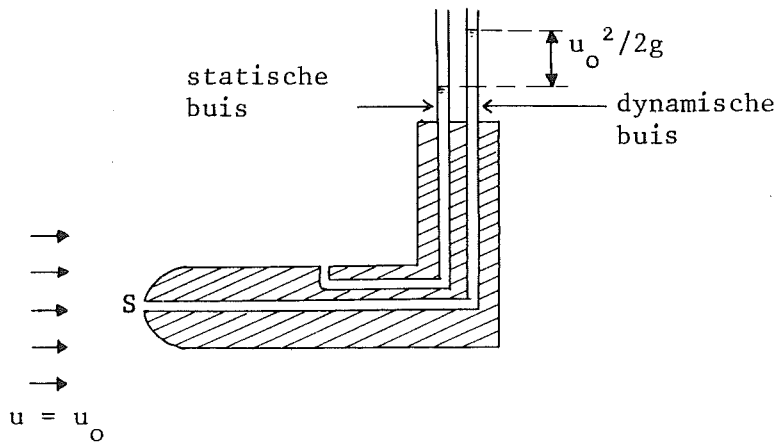
$$(p_d + \frac{1}{2}\rho u^2)_A = (p_d + \frac{1}{2}\rho u^2)_S$$

ofwel, met  $u_A = u_0$  en  $u_S = 0$ :

$$\boxed{p_{dS} - p_{dA} = \Delta p_{dS} = \frac{1}{2}\rho u_0^2} \quad (6.21)$$

Dit is de z.g. stuwdruk. Hiermee komt overeen een stijging van het piëzometrisch niveau met de waarde  $u_0^2/2g$ , zoals ook volgt uit (6.18).

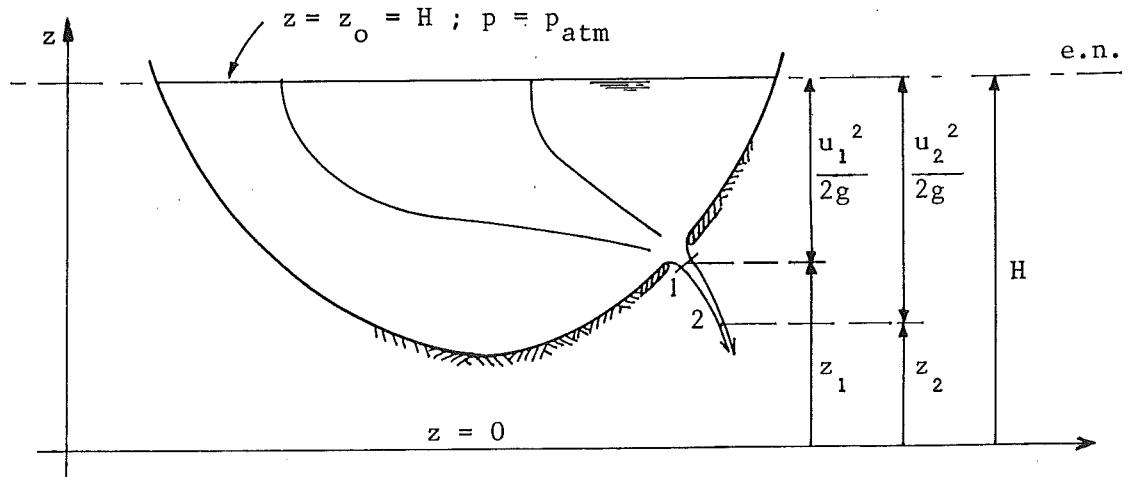
Een Pitotbuis (Fig. 6.8) is een combinatie van een z.g. dynamische buis, waarmee het energieniveau van de ongestoorde stroming wordt gemeten (via het piëzometrisch niveau in het stuwpunt) en een z.g. statische buis, waarmee het piëzometrisch niveau van de ongestoorde beweging wordt gemeten. Het verschil in stijghoogte in de twee peilbuisen is (theoretisch) gelijk aan de snelheidshoogte ( $u_0^2/2g$ ) van de ongestoorde beweging. Zodoende kan een Pitotbuis worden gebruikt als snelheidsmeter (voor niet al te lage snelheden, in verband met de nauwkeurigheid; voor  $u = 1$  m/s is  $u_0^2/2g = 0,05$  m; voor  $u_0 = 0,2$  m/s is  $u_0^2/2g = 0,002$  m).



Figuur 6.8 - Pitotbuis

(2) Opening

Als tweede voorbeeld nemen we de stroming uit een reservoir via een relatief kleine opening. In de omgeving van de opening zijn de stroomlijnen relatief sterk gekromd (Fig. 6.9), maar verder benedenstrooms (zeg vanaf doorsnede 1) is de kromtestraal zoveel groter dan de straaldikte dat ook in het inwendige van de straal de druk vrijwel gelijk is aan de atmosferische druk ( $p_1 \approx p_{atm}$ ).



Figuur 6.9

We passen nu de vergelijking van Bernoulli toe op een stroomlijn van een punt aan het vrije oppervlak in het reservoir, waar  $z = z_0$ ,  $p = p_{atm}$  en  $u = u_0$ , tot aan doorsnede 1:

$$H = z_0 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g}$$

We mogen  $u_0^2/2g$  verwaarlozen ten opzichte van  $u_1^2/2g$ , gezien het gegeven dat de opening relatief klein is; verder geldt  $p_1 \approx p_{atm}$  (zie boven). Dit resulteert in

$$u_1 = \sqrt{2g (z_0 - z_1)} = \sqrt{2g \Delta z_1} \quad (6.22)$$

Dit is de z.g. wet van Torricelli (1643); deze had experimenteel vastgesteld dat de uitstroomsnelheid in een opening evenredig is met de vierkantswortel uit het verval ( $\Delta z$ ).

Voorbij doorsnede 1 is elk waterdeeltje in vrije val en neemt de snelheid toe als  $\sqrt{2g (z_0 - z)}$  (zie punt 2 in Fig. 6.9).

### 6.7 Stromingen met uniforme energie

In het reservoir van het voorgaande voorbeeld heerst op relatief grote afstand van de opening vrijwel een situatie van rust en evenwicht.

Vanwege het evenwicht geldt daar  $h = h_{res} = \text{constant} = z_0$ , en vanwege de rust ( $u^2/2g = 0$ ) geldt  $H_{res} = h_{res}$ , zodat daar tevens geldt  $H_{res} = \text{constant} = z_0$ . In dat gebied is de energiehogte dus uniform ( $\nabla H_{res} = 0$ ). Omdat  $H$  constant is langs elke stroomlijn, ook waar de versnelingen aanzienlijk zijn (zolang Bernoulli opgaat), en alle stroomlijnen beginnen in het reservoir, is  $H$  uniform ( $\nabla H = 0$ ) in het hele stroomveld. Alle punten in zulke stromingen hebben dus een gemeenschappelijk energieniveau, grafisch weer te geven door één energielijn, liggend in het niveau van het wateroppervlak in het reservoir. Hier is dus sprake van een stroming met **uniforme energie**.

De snelheid in een stationaire stroom met uniforme energie is af te leiden van een z.g. snelheidspotentiala (op dezelfde manier zoals een conservatieve kracht is af te leiden van een krachtpotentiala).

Dergelijke stromen worden daarom ook **potentialaastromen** genoemd. Zij vormen een belangrijke categorie; in vervolgvakken komen zij uitvoerig aan de orde.

Uit de vergelijking langs de normaal weten we dat in een doorsnede met gekromde stroomlijnen het piëzometrisch niveau lager wordt in de richting naar het kromtemiddelpunt. Als  $H$  uniform is (niet alleen  $\partial H/\partial s = 0$  maar ook  $\partial H/\partial n = 0$ ) moet de snelheidshoogte toenemen in de richting van het kromtemiddelpunt, en wel even sterk als de hoogte van het piëzometrisch niveau afneemt; immers,  $H = h + u^2/2g$ . (N.B. Wandweerstand, hier buiten beschouwing gelaten, kan dit beeld nogal beïnvloeden.)

In een doorsnede met rechte stroomlijnen daarentegen varieert  $h$  niet, en (als  $H$  uniform is)  $u$  dus evenmin. Bij berekeningen van debieten wordt hiervan veel gebruik gemaakt. Als voorbeeld behandelen we de stroming uit een reservoir via een kleine opening (Fig. 6.9). In de opening zelf zijn de stroomlijnen significant gekromd, en kunnen we  $u$  dus niet constant veronderstellen. Bovendien varieert de richting van de snelheid aanzienlijk over de doorsnede van de opening. In doorsnede 1 daarentegen (Fig. 6.9), waar de kromming van de stroomlijnen te verwaarlozen is, is het piëzometrisch niveau vrijwel constant; vanwege de uniformiteit van de energiehoogte is  $u$  dus eveneens vrijwel constant (nl.  $u_1 = \sqrt{2g \Delta z_1}$ ), zodat het debiet gegeven is door  $Q = u_1 A_1$ , waarin  $A_1$  de oppervlakte is van de dwarsdoorsnede 1 van de straal.

Als gevolg van de radiale toestroming uit het reservoir naar de opening is  $A_1$  kleiner dan de oppervlakte ( $A$ ) van de opening zelf. Dit verschijnsel heet **contractie**; de verhouding  $A_1/A$  heet de **contractiecoëfficiënt** ( $\mu$ ). (De waarde van  $\mu$  voor een niet-afgeronde opening is ca. 0,6.) Voor het debiet kunnen we dus schrijven

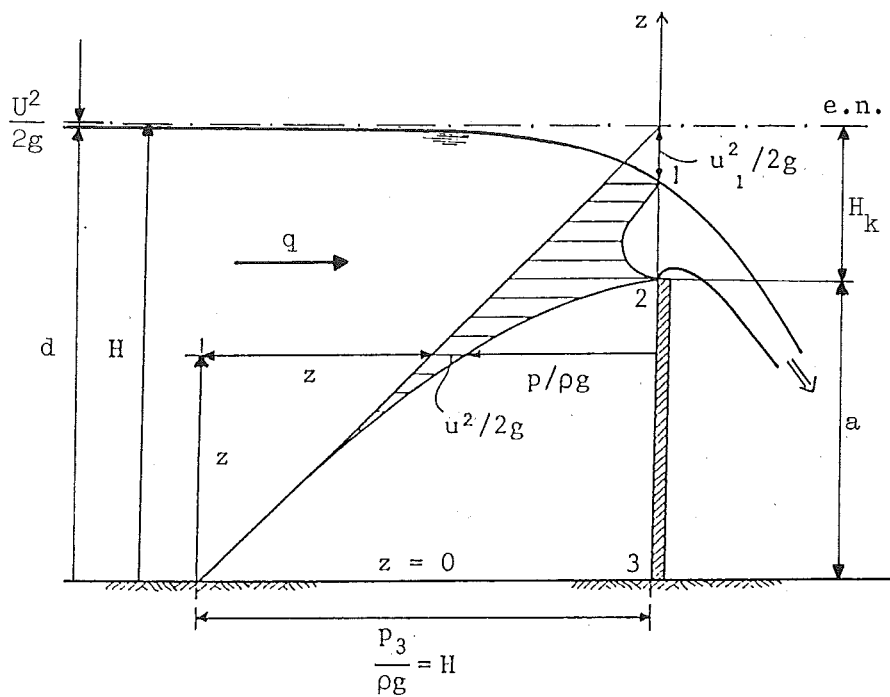
$$Q = \mu A \sqrt{2g \Delta z} \quad (6.23)$$

Hierin is  $\Delta z$  het verschil in piëzometrisch niveau in het reservoir en in de (kleine) opening, het z.g. **verval**.

Bovenstaand voorbeeld toont aan dat de vergelijking van Bernoulli kan leiden tot uitspraken over de totale stroom door een doorsnede, hoewel de vergelijking van Bernoulli zelf alleen betrekking heeft op indivi-

duele stroomlijnen. Dit is mogelijk dank zij de aanwezigheid van doorsneden met rechte stroomlijnen (waarin  $h$  niet varieert) en het gegeven dat de stroming begint met een uniforme energiehoogte.

Door gebruik te maken van de eigenschap van uniforme energiehoogte kan een goede analyse van een stroming worden gemaakt. Figuur 6.10 geeft daarvan een (kwalitatief) voorbeeld voor de stroming over een stuw met een scherpe kruin. De drukhoogte in een vertikaal vlak door de overstortende straal (doorgang 1-2) en langs de binnenkant van de stuw (stroomlijn 3-2) is horizontaal uitgezet, evenals de waarde  $(H-z)$ . Het verschil tussen beide waarden in een punt stelt de snelheidshoogte in dat punt voor (gearceerd). In de punten 1 en 2 is  $p = 0$ , en is de snelheidshoogte gelijk aan de plaatselijke waarde van  $H-z$ . Punt 3 daarentegen is een stuwpunt, waar  $u = 0$ , zodat daar de drukhoogte gelijk is aan  $H-z$  (ofwel gelijk aan  $H$ , als we  $z = 0$  kiezen in de bodem).



Figuur 6.10

## 6.8 Gelijkvormigheid

Naar aanleiding van het voorbeeld van figuur 6.10 gaan we in op enkele aspecten van gelijkvormigheid van stromingen. We maken daarbij gebruik van par. 2.5.

In figuur 6.10 zijn enkele kenmerkende grootheden aangegeven, nl.  $a$ ,  $q$ ,  $d$ ,  $U^2/2g$  en  $H$ . Hierin vervangen we bij voorkeur de energiehoogte boven de bodem ( $H$ ) door de energiehoogte boven de kruinen ( $H_k = H - a$ ), wat fysisch een meer zinvolle maat is. Slechts twee hiervan zijn onafhankelijke variabelen; de anderen volgen daaruit (bij gegeven  $g$ ). Wanneer bv. bij gegeven stuw-hoogte ( $a$ ) het waterpeil bovenstrooms constant wordt gehouden, dus ook de diepte  $d$ , dan stelt zich daarbij een bepaald stroombeeld in met bijbehorend debiet ( $q$ ) en bijbehorende waarden van  $U$ ,  $U^2/2g$  en  $H_k$ . Er geldt dan bv.

$$q = f_1(a, d, g)$$

Deze vier variabelen bevatten slechts twee basisdimensies (lengte en tijd) zodat er vier - twee = twee dimensieloze parameters uit zijn te formeren (zie par. 2.5), zoals in

$$\frac{q}{\sqrt{gd^3}} = f_2\left(\frac{a}{d}\right) \quad (6.24)$$

Evenzo geldt

$$\frac{U}{\sqrt{gd}} = f_3\left(\frac{a}{d}\right) \quad (6.25)$$

en

$$\frac{H_k}{d} = f_4\left(\frac{a}{d}\right) \quad (6.26)$$

In bovenstaande uitdrukkingen kunnen afhankelijke en onafhankelijke variabelen van rol verwisselen. Het kan bv. zijn dat  $H_k$  en  $a$  gegeven zijn, waaruit waarden volgen voor  $q$ ,  $d$  en  $U$ . In dat geval schrijven we in plaats van (6.24):



$$\frac{q}{\sqrt{gH_k^3}} = f_5\left(\frac{H_k}{a}\right) \quad (6.27)$$

Dit is de basisvorm van z.g. afvoerformules; in hoofdstuk 9 komen we daarop terug.

Stel nu dat de situatie getekend in figuur 6.10 een model weergeeft op kleine schaal van een groter prototype. Uitkomsten van metingen verricht in het model (bv. de vorm van de overstortende straal, het debiet, enz.) moeten vertaald worden naar het prototype. Dat kan alleen dan ondubbelzinnig gebeuren wanneer model en prototype gelijkvormig zijn aan elkaar.

Voor gelijkvormigheid tussen model en prototype moet elk van bovengenoemde dimensieloze verhoudingen dezelfde waarde hebben in het model als in het prototype. Dit geldt ook voor  $U/\sqrt{gd}$ , het kental van Froude voor het hier beschouwde probleem (zie par. 2.5):

$$\boxed{Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}}} \quad (6.28)$$

Het kental van Froude is zeer belangrijk voor alle stromingen waarin de zwaartekracht een rol speelt. Bij stromingen met een vrije oppervlak van variabel niveau is dit altijd het geval. De eis dat het kental van Froude dezelfde waarde moet hebben in model en prototype is dan ook meestal een voorwaarde bij de inrichting van modelproeven met vrijeoppervlaktestromen. Uit deze eis volgen z.g. schaalregels. Stel bv. dat alle afmetingen in het model een factor 100 kleiner zijn dan die in het prototype (lengteschaal 1:100), dan moet de snelheidsschaal 1:10 zijn (bij dezelfde  $g$  in model als in prototype). De tijdschaal is dan eveneens 1:10.

Het kental van Froude gedefinieerd in (6.28) hangt nauw samen met de verhouding van snelheidshoogte tot waterdiepte; immers,

$$\frac{U^2/2g}{d} = \frac{1}{2}Fr^2 \quad (6.29)$$

Hiermee hangt samen dat  $Fr^2$  gelijk is aan de verhouding van kinetische energie van de stroom tot de zwaarte-energie ervan ( $\frac{1}{2}\rho U^2 d$  respectievelijk  $\frac{1}{2}\rho g d^2$ , beide p.e.v. oppervlakte). Deze interpretaties onderstrepen nog eens het belang van het kental van Froude voor de dynamica van de stroming, en de noodzaak dat dit kental dezelfde waarde moet hebben in twee stromingen om dezen gelijkvormig te doen zijn.



## 7. ENERGIEBALANS VOOR EEN STROOMBUIS

In het voorgaande hoofdstuk is de vergelijking van Bernoulli afgeleid uit de vergelijking van Euler, dat wil zeggen uit de balans voor de impuls van een deeltje (de component daarvan langs een stroomlijn).

In dit hoofdstuk wordt een vergelijking afgeleid die verwant is aan die van Bernoulli, maar nu in de vorm van een integraal-formulering voor de stroming door een leiding (gesloten of open). Begonnen wordt met de totale energie-overdracht door een doorgang. Hiermee is een soort energie-hoogte te definiëren als eigenschap van de stroming in een gehele doorgang (dus niet in een punt, zoals in hoofdstuk 6). Vervolgens wordt een Eulerse energiebalans opgesteld voor een stroom-buis. In afwezigheid van energieverliezen leidt dit tot een soortgelijke vergelijking als die van Bernoulli. Eventuele energieverliezen (of toevoegingen, door een pomp) kunnen in principe eenvoudig in de formulering worden opgenomen.

### 7.1 Energie-overdracht

We gaan een uitdrukking afleiden voor de energie-overdracht per eenheid van tijd, ofwel het vermogen ( $P$ , van "power"), door een doorgang  $D$ . Deze overdracht vindt plaats op twee manieren, nl. via wisselwerkingen tussen de materie aan weerszijden van de doorgang, en via meevoering.

#### Wisselwerkingen

Evenals bij de berekening van de impuls-overdracht is gedaan in hoofdstuk 6 laten we ook hier schuifspanningen buiten beschouwing. De drukkracht op een infinitesimaal elementje van de doorgang, met oppervlakte  $\Delta A$ , en normaalvector  $\vec{e}_N$  (zie Fig. 3.9), is  $\Delta \vec{F}_p = p \vec{e}_N \Delta A$ . Het vermogen dat deze kracht levert is  $\Delta P_{ww} = \Delta \vec{F}_p \cdot \vec{u}$  ofwel

$$\Delta P_{ww} = p u_N \Delta A \tag{7.1}$$

#### Meevoering

We gaan de energie-overdracht door meevoering berekenen conform de algemene formulering voor meevoering die is gegeven in par. 3.4.

De volumestroom door het beschouwde vlakje is  $u_N \Delta A$ .

Per eenheid van volume is de zwaarte-energie gelijk aan  $\rho g z$  (zie par. 6.2), en de kinetische energie gelijk aan  $\frac{1}{2}\rho u^2$ . Samen is dit  $(\rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2)$ . De meevoering van potentiële en kinetische energie per eenheid van tijd door het beschouwde vlakje heen is dus

$$\Delta P_{mv} = (\rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2) u_N \Delta A \quad (7.2)$$

### Totaal

Sommatie van de bijdragen geleverd door de drukkracht en door meevoering geeft voor de totale energie-overdracht per eenheid van tijd door het beschouwde vlakje heen:

$$\Delta P = (p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2) u_N \Delta A$$

Voor de hele doorgang  $D$  is de overeenkomstige waarde

$$P = \iint (p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2) u_N dA \quad (7.3)$$

De dimensie hiervan is die van energie per tijd, ofwel die van een vermogen (SI-eenheid: 1 J/s ofwel 1 W).

Merk op dat deze energie-overdracht alleen kan plaatsvinden door een echte door-gang, dat wil zeggen een vlak waar de stroom door heen gaat ( $u_N \neq 0$ ). Er vindt volgens bovenstaande benadering geen energieoverdracht plaats door een vlak waarin de stroomlijnen liggen, zoals de zijdelingse begrenzing van een stroombuis, waar  $u_N = 0$ . (Schuifspanningen kunnen wel energie overdragen door zulke vlakken, maar die blijven voorlopig buiten beschouwing.)

## 7.2 Energie-overdracht en energiehogte

De uitdrukking tussen haken in (7.3) is te schrijven als  $\rho g H$ , waarin  $H$  de lokale (per punt gedefinieerde) energiehogte is. Daarmee is (7.3) te schrijven als

$$P = \iint \rho g H u_N dA \quad (7.4)$$

Wanneer de stroming een uniforme energiehogte heeft, zoals het geval is bij stroming vanuit rust onder invloed van conservatieve krachten (zie par. 6.7), dan gaat (7.4) over in

$$P = \rho g H \iint u_N dA$$

ofwel, gebruikmakend van (3.14), in

$$\boxed{P = \rho g Q H} \quad (7.5)$$

Hiermee is een belangrijke uitbreiding gegeven aan het begrip energiehogte: we kunnen die hoogte nu interpreteren als de verhouding van de p.e.v. tijd overgedragen energie (P) tot het gewicht van de p.e.v. tijd doorgestroomde materie ( $\rho g Q$ ).

Wanneer H niet uniform is in de beschouwde doorgang (bv. als gevolg van wandweerstand) kunnen we toch voor die doorgang, conform bovenstaande interpretatie van H, één energiehogte definiëren (hier weer te geven als  $\langle H \rangle$ ):

$$\langle H \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{\rho g Q} \quad (7.6)$$

De totale energie-overdracht is hiermee te schrijven als

$$P = \rho g Q \langle H \rangle \quad (7.7)$$

Opgemerkt wordt dat bovenstaande betrekkingen gelden voor een willekeurige doorgang. Zij zijn niet beperkt tot dwars-doorgangen of tot doorgangen waar de stroomlijnen recht zijn.

De verschillen in definitie van H en  $\langle H \rangle$  zijn belangrijk: H is gedefinieerd in elk punt, terwijl  $\langle H \rangle$  toegevoegd is aan een gehele doorgang. In feite is  $\langle H \rangle$  een over de doorgang gemiddelde waarde van H, gewogen met  $u_N$ . Dit blijkt uit substitutie van (7.4) en (3.14) in (7.6):

$$\langle H \rangle = \frac{\iint H u_N dA}{\iint u_N dA} \quad (7.8)$$

Vanzelfsprekend reduceert dit tot  $\langle H \rangle = H$  voor stromingen waarin  $H$  uniform is.

Voor een dwarsdoorgang (waar  $u_N = \pm u$ ) wordt (7.8)

$$\langle H \rangle = \frac{\iint H u dA}{\iint u dA}$$

We substitueren hierin  $H = h + u^2/2g$ . Wanneer de stroomlijnen in de dwarsdoorgang recht zijn is  $h$  constant in die doorgang, en reduceert de vergelijking tot

$$\langle H \rangle = h + \frac{1}{2g} \frac{\iint u^3 dA}{\iint u dA} \quad (7.9)$$

Per definitie van de over de doorgang gemiddelde stroomsnelheid  $U$  (zie vgl. 3.16) is de noemer in de laatste term gelijk aan  $UA$ . Wanneer echter de lokale snelheid  $u$  niet constant is in de doorgang (bijv. als gevolg van weerstand bovenstrooms) is de teller niet gelijk aan  $U^3A$ , maar groter. De verhouding ervan tot  $U^3A$  wordt met een apart symbool ( $\alpha$ ) aangeduid:

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\iint u^3 dA}{U^3A} = A^{-1} \iint (u/U)^3 dA \quad (7.10)$$

Hiermee is  $\langle H \rangle$  te schrijven als

$$\langle H \rangle = h + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (7.11)$$

Wanneer de stroming een uniforme energiehoogte heeft is  $u$  in (7.10) in elk punt gelijk aan  $U$ , en geldt  $\alpha = 1$ . Als gevolg van wandweerstand of door andere oorzaken is de lokale snelheid  $u$  in de meeste punten van een doorgang òf groter òf kleiner dan  $U$ , en geldt  $\alpha > 1$ .

In gevallen waarin de niet-uniforme snelheidsverdeling uitsluitend het gevolg is van wandweerstand in een turbulente stroom wijkt  $u$  in het

grootste deel van de doorgang relatief weinig van U af, en is  $\alpha$  slechts weinig groter dan één (zie bv. Tabel 11.2); in die gevallen wordt  $\alpha$  vaak eenvoudigheidshalve weggelaten (in feite gelijkgesteld aan één).

In een turbulente stroom is de bijna-uniforme snelheidsverdeling in dwarsprofielen het gevolg van de intensieve menging door de turbulentie. Deze heeft dus een in dwarsrichting bijna-uniforme energiehoogte tot gevolg. De verhoogde energieverliezen die ook gepaard gaan met de wervelende turbulente bewegingen veroorzaken daarentegen juist een sterkere afneming van H in de stroomrichting dan in een niet-turbulente, laminaire stroom. Hierop komen we in de hoofdstukken 10 en 11 terug.

### 7.3 Energiebalans

We stellen een balans op voor de stromingsenergie in een ruimtelijk vast deel G van een stroombuis tussen twee doorgangen  $D_1$  en  $D_2$  (zie Fig. 5.1). We beschouwen een stationaire situatie.

De energievoorraad in G varieert niet in de tijd wegens het stationaire karakter van de stroom.

Wanneer er geen toevoer of onttrekking is van energie van buitenaf (zoals in een pomp of turbine), en we de inwendige energieverliezen verwaarlozen (waarover later meer), dan geldt voor de energie een behoudswet in de eenvoudige gedaante (4.3), inhoudende dat de netto overdracht van energie naar G toe gelijk moet zijn aan nul. De energie-overdracht naar binnen door de bovenstroomse doorgang  $D_1$ , met de waarde  $P_1$ , moet dan gelijk zijn aan de overdracht naar buiten door de benedenstroomse doorgang  $D_2$ , met de waarde  $P_2$ . (Door de zijdelingse begrenzing vindt immers geen energie-overdracht plaats, omdat die in elk punt evenredig is aan  $u_N$ .) Door elke doorgang van de stroombuis wordt dus evenveel energie overgedragen. Dit houdt in dat

$$\frac{\partial P}{\partial s} = 0 \quad (7.12)$$

Hierin is s een lengte-coördinaat langs de as van de stroombuis.



Vanwege het behoud van volume, en het constant zijn van  $\rho g$ , geldt  $\partial(\rho g Q)/\partial s = 0$ . Samen met (7.12) geeft dit

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial s} = 0 \quad (7.13)$$

Hiermee is een vergelijking verkregen die nauw verwant is aan die van Bernoulli. De hier gebruikte formulering heeft de volgende voordelen ten opzichte van de oorspronkelijke:

- de formulering geldt voor een stroombuis met eindige dwarsdoorsnede, en is als zodanig meer geschikt voor toepassing op leidingen dan de vergelijking van Bernoulli, die betrekking heeft op een individuele stroomlijn.
- de formulering is in termen van energieoverdracht en kan daarom gebruikt worden in een energiebalans; eventuele toevoegingen (pomp), onttrekkingen (turbine) of inwendige verliezen (turbulentie, viscositeit) van energie kunnen zo in rekening worden gebracht, en worden vertaald in variaties van de energiehogte.

Tenslotte wordt opgemerkt dat (7.13) reduceert tot de vergelijking van Bernoulli in zijn oorspronkelijke vorm wanneer we als balansgebied een stroombuis nemen van infinitesimale dwarsafmetingen. In dat geval is  $u_N$  in (7.8) namelijk te beschouwen als een constante in elke infinitesimale doorgang, en geldt in die doorgangen  $\langle H \rangle = H$ .

#### 7.4 Toepassingen

In de hierna te geven toepassingen op gesloten en open leidingen zal de coëfficiënt  $\alpha$  gelijk aan één worden gesteld in elke doorsnede met rechte stroomlijnen. In zulke doorsneden geldt dan bij benadering

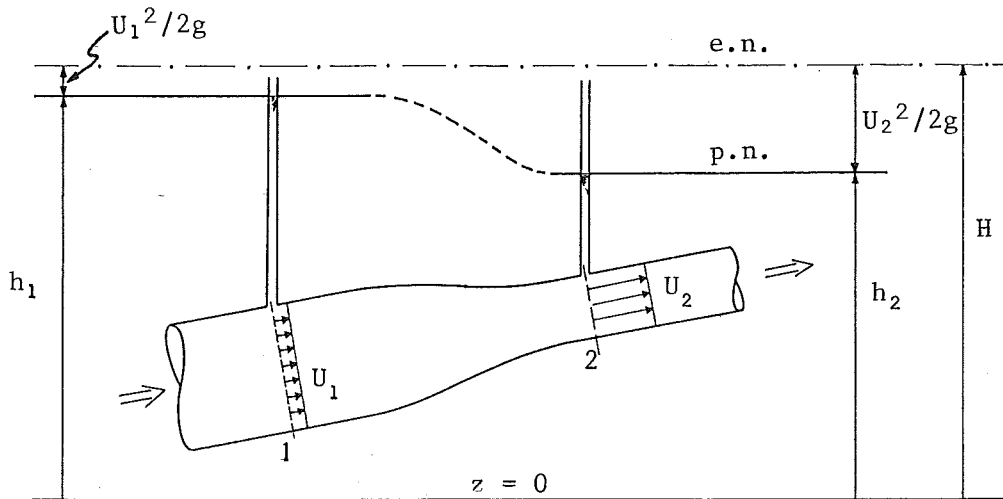
$$\langle H \rangle = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{1}{2g} \left( \frac{Q}{A} \right)^2 \quad (7.14)$$

Elke grootte hierin heeft slechts één waarde per doorsnede, hetzij per definitie ( $A$ ,  $Q$ ,  $U$ ,  $\langle H \rangle$ ), hetzij als gevolg van de beperking tot rechte stroomlijnen ( $h$ ).

De over een doorgang gemiddelde energiehogte  $\langle H \rangle$  wordt ter wille van een eenvoudige notatie in het vervolg met  $H$  aangeduid. In alle toepassingen in deze paragraaf wordt de stroming stationair verondersteld.

(1) Vernauwing

Als eerste toepassing behandelen we de stroom door een pijpleiding in de omgeving van een gestroomlijnde vernauwing als verbinding tussen twee buizen van constante maar verschillende diameter (Fig. 7.1).



Figuur 7.1 - Vernauwing

Voor de hele leiding geldt

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \quad (7.15)$$

Voor elk van de leidinggedeelten met constante diameter geldt bovendien  $\partial A / \partial s = 0$ , en vanwege (7.15) dan ook  $\partial U / \partial s = 0$  en  $\partial h / \partial s = 0$ . Elk van deze leidinggedeelten heeft dus een constant piëzometrisch niveau.

In de vernauwing, waar de snelheid groter wordt, neemt  $h$  af, maar op een verschillende manier voor verschillende stroomlijnen omdat deze daar gekromd zijn. Het verloop van  $h$  in de vernauwing is in de figuur slechts schetsmatig weergegeven (met een onderbroken lijn).

Gelijkstelling van  $Q$  respectievelijk  $H$  in de doorsneden 1 en 2, waar de stroomlijnen recht zijn, levert

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{ofwel} \quad U_1 A_1 = U_2 A_2$$

respectievelijk

$$H_1 = H_2 \quad \text{ofwel} \quad h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

zodat

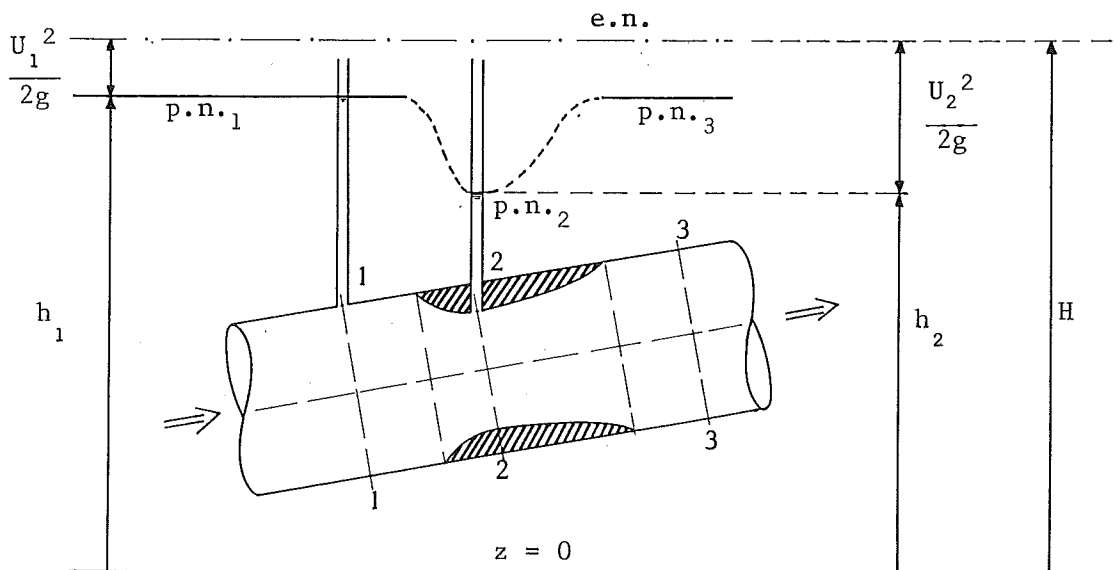
$$h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g} [A_2^{-2} - A_1^{-2}] \quad (7.16)$$

Bij bekende waarden van  $A_1$  en  $A_2$  en een gemeten waarde van het piëzometrisch niveauverschil ( $h_1 - h_2$ ) kan  $Q$  hieruit worden berekend.

Merk op dat de helling van de leiding in bovenstaande uitdrukkingen niet voorkomt. In een gesloten, gevulde leiding hebben variaties in piëzometrisch niveau (bij gegeven debiet) namelijk geen enkele relatie met de hoogteligging van de leiding in het zwaarteveld. Dit is bij een stroming met een vrij oppervlak totaal anders omdat daar het piëzometrisch niveau nauw verband houdt met het niveau van de waterspiegel (en daar in veel gevallen zelfs mee samenvalt).

(2) Venturimeter

In pijpleidingen kan voor het doel van debietmeting een gestroomlijnde lokale vernauwing zijn aangebracht, waarbij het verschil tussen de piëzometrische niveaus in een doorsnede vlak bovenstrooms van de meter en in de nauwste doorsnede (de keel) wordt gemeten (Fig. 7.2). Men noemt dit een Venturimeter.



Figuur 7.2 - Venturimeter

In de keel zijn de stroomlijnen enigszins gekromd waardoor  $h$  afneemt en  $u$  toeneemt van de as van de buis naar de wand. De invloed hiervan is te verdisconteren door een z.g. afvoercoëfficiënt ( $m$ ) op te nemen in de theoretische betrekking (7.16) voor  $Q$ , die zou gelden voor rechte stroomlijnen:

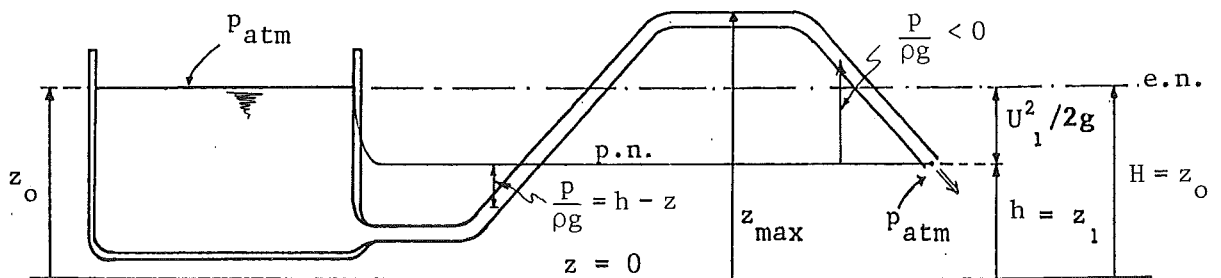
$$Q = m [2g (h_1 - h_2) / (A_2^{-2} - A_1^{-2})]^{1/2} \quad (7.17)$$

De waarde van de coëfficiënt  $m$  wordt normaliter empirisch bepaald.

De absolute druk in de keel van de Venturimeter moet groter blijven dan de dampdruk van de vloeistof om de vorming van dampbellen ("cavitatie") te voorkomen.

(3) Hevel

Een hevel is een gesloten leiding waardoorheen vloeistof kan stromen onder natuurlijk verval van een reservoir met een vrije vloeistofspiegel naar een gebied met een lager piëzometrisch niveau, waarbij de leiding plaatselijk boven het niveau van de hooggelegen vloeistofspiegel ligt. Daardoor is de druk in de leiding plaatselijk lager dan de atmosferische druk.



Figuur 7.3 - Hevel

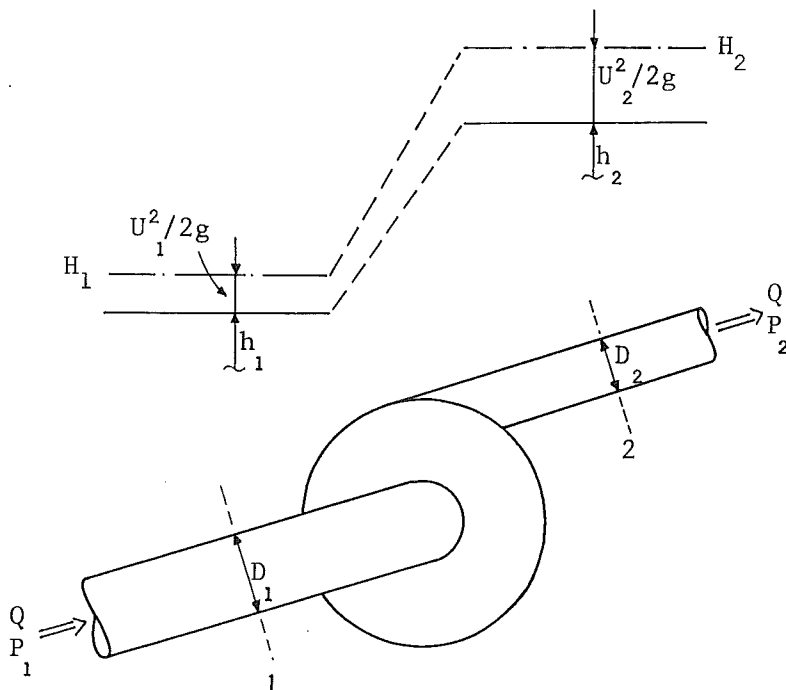
De in Fig. 7.3 getekende hevel bestaat uit een buis van constante diameter. Het piëzometrisch niveau in de hevel is daarom constant afgezien van lokale afwijkingen in de bochtstukken (en, zoals steeds in dit hoofdstuk, afgezien van weerstand). In het voorbeeld vindt aan het einde van de hevel vrije uitstroming plaats in de atmosfeer; het

piëzometrisch niveau in de hevel ligt daarom op de hoogte van (het midden van) de uitstroomopening ( $z_1$ ). De snelheid in de hevel is dan gelijk aan  $\sqrt{2g(z_0 - z_1)}$  (Torricelli). De drukhoogte  $p/\rho g = h - z$  is negatief (onderdruk t.o.v.  $p_{atm}$ ) in punten boven het piëzometrisch niveau. De minimumdruk treedt op boven in het hoogste deel van de hevel, waar  $z = z_{max}$ . De drukhoogte daar is negatief, en gelijk aan  $p_{min}/\rho g = h - z_{max}$ . Dit is t.o.v.  $p_{atm}$ . De absolute minimumdruk is gelijk aan  $p_{min} + p_{atm}$ ; deze moet groter zijn dan de dampdruk om vorming van dampbellen in de vloeistof (z.g. cavitatie) te voorkomen.

(4) Pomp of turbine

Een pomp in een gesloten leiding voegt een vermogen ( $P_{pomp}$ ) toe aan de stroming. Dat vermogen is te behandelen als een productieterm in een energiebalans (zie hoofdstuk 4). De energiebalans voor het leidinggedeelte tussen twee doorsneden 1 respectievelijk 2 vlak bovenstrooms respectievelijk benedenstrooms van de pomp (Fig. 7.4), waar het doorgevoerde vermogen  $P_1$  respectievelijk  $P_2$  is, luidt

$$P_1 + P_{pomp} = P_2 \quad (7.18)$$



Figuur 7.4 - Pomp

Omdat een pomp in een gesloten leiding geen massa toevoegt of onttrekt aan de stroming (zodat  $\rho Q = \text{constant}$ ) geeft de pomp een stijging van het energieniveau gelijk aan

$$H_2 - H_1 = \frac{P_{\text{pomp}}}{\rho g Q}$$

Hiermee kan eenvoudig de opvoerhoogte van de pomp worden berekend, ook als de diameters aan weerszijden van de pomp verschillen, zoals in Fig. 7.4.

N.B. In het bovenstaande stelt  $P_{\text{pomp}}$  het vermogen voor dat effectief aan de stroming wordt toegevoegd. Vanwege een pompefficiëntie kleiner dan 100% is een groter motorvermogen nodig.

In geval van onttrekking van vermogen aan de stroom door middel van een turbine kan de berekening vanzelfsprekend op overeenkomstige manier plaatsvinden als hierboven.

#### (5) Overlaat

Als vijfde toepassing behandelen we de twee-dimensionale stroming in een open leiding (kanaal of rivier) over een lokale verhoging, een z.g. overlaat (Fig. 7.5). De berekening hiervan verloopt in principe analoog aan die voor de stroming door een vernauwing in een gesloten leiding, maar de aanwezigheid van een vrije vloeistofspiegel geeft toch aanleiding tot enkele verschillen.

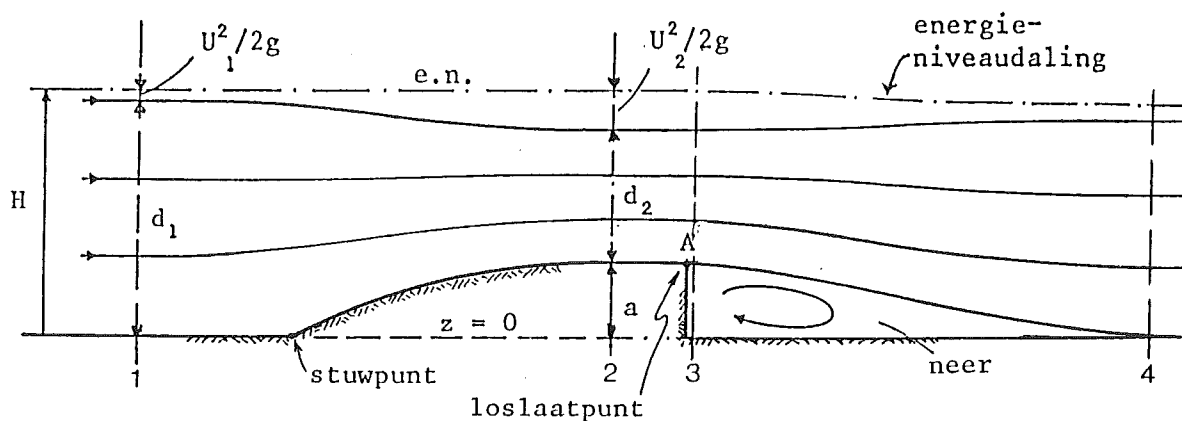
In een gevulde gesloten leiding ligt de geometrie van de doorstroomprofielen vast, en past het piëzometrisch niveau zich aan profielvariëaties aan via variëaties in de druk. Bij stromen met een vrije vloeistofspiegel daarentegen is de druk aan het oppervlak constant ( $p_{\text{atm}}$ ), en kan het piëzometrisch niveau zich slechts aanpassen aan profielvariëaties via verhogingen of verlagingen van de vloeistofspiegel. Deze hebben op hun beurt een bijkomende profielvariëatie tot gevolg.

Ten tweede zijn in een vloeistof met een vrij oppervlak z.g. zwaartekrachtsgolven mogelijk. Dit kan aanleiding geven tot complicaties, waarop wij hier overigens nog niet in zullen gaan.

De hierna te geven berekening van de stroom gaat uit van een z.g. lange overlaat, d.i. een overlaat met een vlakke kruin die zo lang is (in het vlak van de stroming) dat de stroomlijnen erboven als vrijwel recht kunnen worden beschouwd, en de druk dus als hydrostatisch is te benaderen.

Toepassing van de behoudswetten voor volume en energie op het versnellingsgebied tussen de doorsneden 1 en 2, waar de stroomlijnen recht zijn (Fig. 7.5), levert

$$q = U_1 d_1 = U_2 d_2$$



Figuur 7.5 - Lange overlaat

(wegens twee-dimensionale stroming) en

$$H = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

De hoogte van de piëzometrische niveaus moet vanzelfsprekend worden gemeten ten opzichte van een horizontaal vergelijkingsvlak. Leggen we dat in de kanaalbodem dan geldt

$$h_1 = d_1 \quad \text{en} \quad h_2 = a + d_2$$

waarin  $a$  de hoogte is van de overlaat boven de bodem (Fig. 7.5).

Bovenstaand stelsel bestaat uit zes vergelijkingen voor negen variabele grootheden ( $g$  wordt als een gegeven constante beschouwd). Wanneer drie daarvan bekend zijn (waaronder meestal de hoogte ( $a$ ) van de overlaat) zijn de overigen te berekenen, eventueel iteratief.

Merk op dat het piëzometrisch niveau in de doorsneden 1 en 2 weliswaar in de lokale waterspiegel ligt, maar dat de hoogte ervan boven het (horizontale!) vergelijkingsvlak in het algemeen niet gelijk is aan de plaatselijke diepte. Dit zou alleen kunnen wanneer de bodem overal even hoog ligt.

Ten tweede wordt erop gewezen dat bovenstaande vergelijking voor het behoud van volume ( $q = \text{constant}$ ) slechts geldt voor een twee-dimensionale stroom. Wanneer er bv. ook sprake is van een breedte-variëatie, van een waarde  $B_1$  tot een waarde  $B_2$ , geldt

$$Q = U_1 d_1 B_1 = U_2 d_2 B_2$$

De gegeven betrekkingen voor  $H$  en  $h$  blijven daarbij onverminderd van kracht.

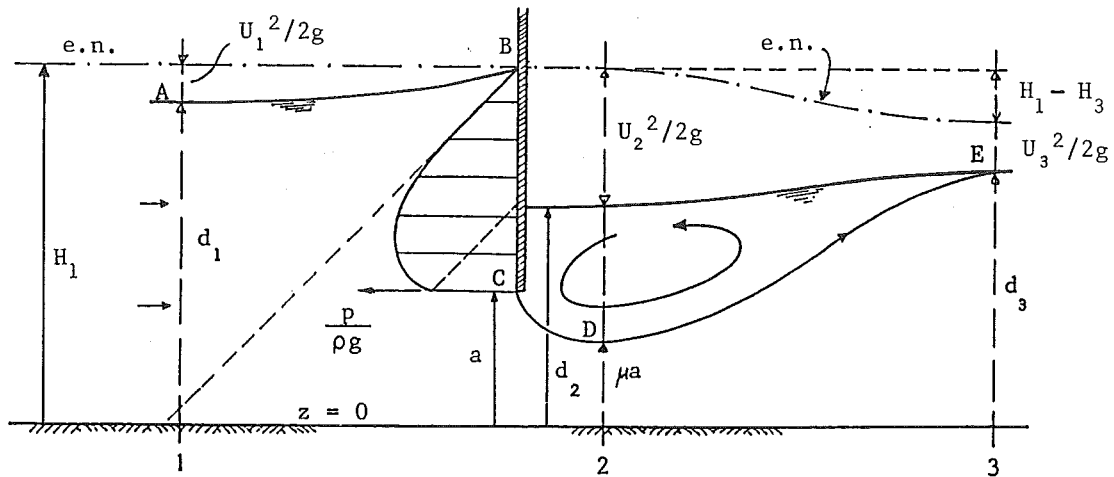
Wanneer de overlaat aan de benedenstroomse zijde abrupt eindigt laat de stroom daar los van de vaste begrenzing (punt A in Fig. 7.5). In het daarop aansluitende vertraginggebied vindt (verhevigde) vorming van turbulente wervels plaats. Bovendien ontstaat een zône buiten de hoofdstroom waar het water langzaam circuleert; men noemt dat een neer. Als gevolg van deze processen verliest de doorgaande stroom een deel van zijn energie, en daalt het energieniveau dienovereenkomstig (Fig. 7.5). We zullen hierop ingaan in hoofdstuk 8.

N.B. Zoals opgemerkt zijn er in dit geval drie variabelen onafhankelijk te kiezen en niet twee, zoals bij de stroming over de stuw in Fig. 6.10. De reden hiervan is dat in Fig. 6.10 sprake is van een vrije overstort waarbij er geen beïnvloeding is door de benedenstroomse condities. In Fig. 7.5 daarentegen wordt het stroombeeld behalve door  $d_1$  en  $a$  ook door  $d_4$  beïnvloed.



(6) Schuif

Als laatste toepassing van de energiebalans voor een leiding berekenen we het debiet door een opening onder een verticale schuif boven een horizontale bodem, bij gegeven waterdiepten aan weerszijden (Fig. 7.6). De stroming wordt twee-dimensionaal verondersteld.



Figuur 7.6 - Schuif

Ten gevolge van de neerwaartse stroming langs de schuif vindt voorbij het punt waar de stroom loslaat van de schuif (C) contractie plaats tot aan een punt (D) waar de stroomrichting weer horizontaal is. De gegeven waterstand onmiddellijk benedenstrooms van de schuif ligt hoger dan dit punt, waardoor voorbij punt D (doorsnede 2) de hoofdstroom vertraagt, en zich boven de stroomlijn CDE een z.g. dekneer vormt, waarin het water relatief langzaam en sterk wervelend rondgaand beweegt. Omdat deze bewegingen relatief langzaam zijn kunnen we voor het effect van de neer op de hoofdstroom doen alsof de drukverdeling in de neer hydrosta-tisch is. Volgens deze benadering ligt het piëzometrisch niveau van de punten van de stroomlijn CDE in de waterspiegel erboven.

De hoofdstroom versnelt tot aan de doorgang 2, waar de doorstroomoppervlakte minimaal is (de "vena contracta"). In het korte versnellings-gebied tussen de doorgangen 1 en 2 zijn de energieverliezen verwaar-loosbaar, en kunnen we H constant stellen. Met verwaarlozing van de invloed van de kromming van de stroomlijnen in de vena contracta resulteert dit in

$$H = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

Uit het behoud van volume volgt

$$q = U_1 d_1 = U_2 \mu a$$

Kiezen we  $z = 0$  in de (horizontale) bodem dan geldt bovendien

$$h_1 = d_1 \quad \text{en} \quad h_2 = d_2$$

(maar niet  $h_2 = \mu a$ !). Hiermee is een stelsel van zes vergelijkingen verkregen waaruit (bijv.) bij gegeven waarden van  $g$ ,  $a$ ,  $\mu$ ,  $d_1$  en  $d_2$  de zes grootheden  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $q$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  en  $H$  zijn te berekenen.

De drukhoogte aan de bovenstroomse zijde van de schuif is ter illustratie in Fig. 7.6 geschetst. Deze verloopt van de waarde  $p/\rho g = 0$  in B, het stuwpunt in de waterspiegel, waar  $z = H$ , tot aan de waarde  $p/\rho g = d_2 - a$  in punt C, waar  $z = a$ . Het is mogelijk deze drukverdeling te berekenen, maar dat vereist meer geavanceerde methoden dan hier zullen worden behandeld. De totale kracht die het water op de schuif uitoefent is veel eenvoudiger te berekenen, nl. door het opstellen van een impulsbalans voor het gebied tussen doorsneden 1 en 2. Uit de volumebalans en de impulsbalans voor het vertragingsgebied tussen doorsneden 2 en 3 is voorts de diepte in doorsnede 3 te berekenen. Is die eenmaal bekend dan is ook  $H_3$  te berekenen, en daarmee eveneens het energieverlies in het korte vertragingsgebied benedenstrooms van de schuif. Hoe dit kan gebeuren wordt in het volgende hoofdstuk behandeld.



## 8 IMPULSBALANS VOOR EEN STROOMBUIS

In dit hoofdstuk wordt de impulsbalans behandeld voor een ruimtelijk vast gebied van eindige afmetingen (in tegenstelling tot hoofdstuk 6, waarin het ging om de impulsbalans van een infinitesimaal waterdeeltje dat in zijn beweging werd gevolgd).

### 8.1 Impulsvoorraad

De impuls  $\Delta \vec{I}$  in een infinitesimaal gebiedje met volume  $\Delta V$  is  $\Delta \vec{I} = (\rho \vec{u}) \Delta V$ . Voor de totale impuls  $\vec{I}$  in het beschouwde balansgebied  $G$  geldt

$$\vec{I} = \iiint \rho \vec{u} \, dV \quad (8.1)$$

Voor berekening hiervan moeten de massadichtheid en snelheid in elk punt in  $G$  bekend zijn. Voor de impulsbalans van een stationaire stroom is een dergelijke berekening echter niet nodig omdat het in een balans niet gaat om de impuls zelf maar om de verandering daarvan in de tijd, welke voor een ruimtelijk vast gebied gelijk is aan nul als de stroming stationair is.

### 8.2 Impulsoverdracht

De overdracht van impuls per eenheid van tijd naar het gebied  $G$  bestaat uit een bijdrage  $\vec{F}_{ww}$  van wisselwerkingen (zwaarte en spanningen) en uit een bijdrage  $\vec{F}_{mv}$  van meevoering door de (ruimtelijk vaste) begrenzing van  $G$  heen. Bij de wisselwerkingen laten we voorlopig de schuifspanningen buiten beschouwing zodat  $\vec{F}_{ww} = \vec{F}_g + \vec{F}_p$ .

#### Zwaartekracht

De bijdrage van het zwaarteveld aan de impulsoverdracht p.e.v. tijd naar  $G$ , ofwel de zwaarte-kracht uitgeoefend op de materie in  $G$ , is

$$\vec{F}_g = \iiint \rho \vec{g} \, dV \quad (8.2)$$

#### Drukkracht

Voor de formulering van de drukkracht die de aangrenzende materie uitoefent op de materie in  $G$  voeren we in elk punt van de begrenzing

van G een naar binnen gerichte eenheids-normaalvector  $\vec{e}_N$  in. De drukkracht op de materie in G uitgeoefend in een infinitesimaal deel van de begrenzing, met oppervlakte  $\Delta A$ , is dan

$$\Delta \vec{F}_p = p \vec{e}_N \Delta A$$

De totale drukkracht op de materie in G is daarmee

$$\vec{F}_p = \iint p \vec{e}_N dA \quad (8.3)$$

De integratie hierin strekt zich uit over het gehele, gesloten oppervlak dat G begrenst.

### Meevoering

De naar binnen gerichte volumestroom door een infinitesimaal vlakje heen is  $u_N \Delta A$ . De impuls per eenheid van volume is  $\rho \vec{u}$ , zodat de impuls die per tijdseenheid naar G wordt meegevoerd door dit vlakje heen gelijk is aan  $\Delta \vec{F}_{mv} = (\rho \vec{u}) u_N \Delta A$  (zie ook par. 3.4). De totale impuls-overdracht per eenheid van tijd naar G, als gevolg van meevoering, is gegeven door

$$\vec{F}_{mv} = \iint (\rho \vec{u}) u_N dA \quad (8.4)$$

Ook hier strekt de integratie zich uit over het gehele gesloten oppervlak rondom G.

### 8.3 Impulsbalans voor willekeurig gebied

Omdat impuls behouden blijft luidt de impulsbalans voor het ruimtelijk vaste gebied G:

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \vec{F}_{ww} + \vec{F}_{mv} \quad (8.5)$$

(N.B.: Ga de verschillen na tussen deze impulsbalans en die in verg. 6.4.)

Voor een ideale vloeistof in het zwaarteveld gaat (8.5) over in

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_{mv} \quad (8.6)$$

We beperken ons in het vervolg tot stationaire stromen, waarvoor  $\partial \vec{I} / \partial t = 0$ . Dit vergemakkelijkt de analyse sterk omdat anders de snelheidsvariatie in het hele balansgebied bekend zou moeten zijn. Dit zou een detailberekening van de gehele stroming inhouden. Als  $\partial \vec{I} / \partial t = 0$  is dat niet nodig en kunnen desondanks uitspraken worden gedaan over integraal-eigenschappen van de stroming in een eindig gebied. Dit wordt verduidelijkt met de hierna te geven toepassingen.

Voor stationaire stromen reduceert (8.6) tot

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_{mv} = 0 \quad (8.7)$$

In geval van stilstand is  $\vec{F}_{mv} = 0$  en reduceert (8.7) verder tot

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{p_s} = 0 \quad (8.8)$$

De hiermee overeenkomende hydrostatische druk  $p_s$  voldoet ook aan (6.6) (dat is de infinitesimale versie van 8.8) en kan eenvoudig uit (8.8) of (6.6) worden bepaald zodra de druk in één punt in de vloeistof bekend is (bv.  $p = 0$  aan het vrije oppervlak, als dat aanwezig is).

#### 8.4 Impulsoverdracht door een dwarsdoorgang

Voor toepassingen op stromen in open of gesloten leidingen ligt het voor de hand het balansgebied  $G$  te laten samenvallen met een gedeelte van de leiding tussen dwarsdoorgangen (zie Fig. 5.1). Voor zulke gevallen is het nuttig om voor elke dwarsdoorgang de totale impuls-overdracht p.e.v. tijd ( $\vec{F}$ ) te bepalen, waaraan zowel de druk als de meevoering bijdragen (vergelijk met de overdracht van energie).

In een dwarsdoorgang geldt  $\vec{u} = u_N \vec{e}_N$ , waarbij  $u_N$  positief kan zijn (stroming naar binnen) of negatief (stroming naar buiten). De absolute grootte van  $u_N$  in een dwarsdoorgang is gelijk aan die van  $\vec{u}$  zelf:  $|u_N| = |\vec{u}| = u$ . Hiermee geldt

$$\Delta \vec{F}_{mv} = (\rho \vec{u}) u_N \Delta A = \rho u_N^2 \vec{e}_N \Delta A = \rho u^2 \vec{e}_N \Delta A.$$

ofwel

$$\vec{F}_{mv} = \iint \rho u^2 \vec{e}_N dA$$

We zien dat  $\Delta \vec{F}_{mv}$  in een dwarsdoorgang altijd de richting van  $\vec{e}_N$  heeft (naar binnen), ongeacht het teken van  $u_N$  (dus ongeacht of de snelheid naar binnen is gericht of naar buiten). De meevoering van impuls door een dwarsdoorgang heeft dus dezelfde werking als een drukwisselwerking.

In toepassingen kiezen we de dwarsdoorgangen bij voorkeur daar waar de stroomlijnen recht zijn (dynamische druk c.q. piëzometrisch niveau constant) en evenwijdig ( $\vec{e}_N = \text{constant}$ ). In dit geval kan de meevoering van impuls door een hele doorgang uitgedrukt worden in de over de doorgang gemiddelde snelheid ( $U$ ), analoog aan de meevoering van kinetische energie (zie h.7):

$$\iint \rho u^2 \vec{e}_N dA = \rho \vec{e}_N \iint u^2 dA = \beta \rho U^2 A \vec{e}_N \quad (8.9)$$

In wezen staat hier de definitie van de factor  $\beta$ , die is te schrijven als

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1} \iint (u/U)^2 dA \quad (8.10)$$

Deze snelheidsverdelingscoëfficiënt voor het impulstransport is analoog aan de factor  $\alpha$  die in h.7 is geïntroduceerd in verband met het transport van kinetische energie. Zoals gezegd in h.7 is de factor  $\alpha$  in veel gevallen weinig groter dan één. Dit geldt in nog sterkere mate voor  $\beta$ . (Bij benadering geldt  $\alpha-1 = 3(\beta-1)$ ; zie bv. Tabel 11.2) In veel gevallen zullen we  $\beta = 1$  stellen; de waarde van de meevoering van impuls p.e.v. tijd door een dwarsdoorgang wordt daarmee gesteld op  $\rho U^2 A$  ofwel op  $\rho QU$ .

De totale impulsoverdracht p.e.v. tijd door een dwarsdoorgang is

$$\boxed{\vec{F} = \iint (p + \rho u^2) \vec{e}_N dA} \quad (8.11)$$

De integratie hierin strekt zich uit over het doorstroomde oppervlak van een enkele doorgang. Ook in (8.11) zien we dat de meevoering van impuls door een dwarsdoorgang equivalent is aan een verhoging van de druk, ongeacht of de snelheid naar binnen of naar buiten is gericht.

Voor een dwarsdoorgang met evenwijdige stroomlijnen kunnen we (8.9) substitueren; de waarde van  $\vec{F}$  is dan gegeven door

$$F = \iint (p + \rho u^2) dA = \iint p dA + \beta \rho U^2 A \quad (8.12)$$

ofwel door

$$F = \iint p dA + \beta \rho Q U \quad (8.13)$$

In een horizontale stroming met een vrij oppervlak en diepte  $d$ , en een hydrostatische druk variërend van  $p = 0$  aan het oppervlak tot  $p = \rho g d$  aan de bodem, is de waarde van  $\vec{F}$  p.e.v. breedte:

$$F = \frac{1}{2} \rho g d^2 + \beta \rho U^2 d \quad (8.14)$$

ofwel

$$F = \frac{1}{2} \rho g d^2 + \beta \rho q U = \frac{1}{2} \rho g d^2 + \beta \rho q^2 / d \quad (8.15)$$

N.B. In deze stroming met een vrij oppervlak dragen meevoering en druk bij aan de impulsoverdracht in de verhouding (gemakshalve  $\beta = 1$  stellend)

$$\frac{\rho U^2 d}{\frac{1}{2} \rho g d^2} = 2 Fr^2$$

Hier zien we een andere betekenis van het kental van Froude dan in h. 6 was aangegeven.

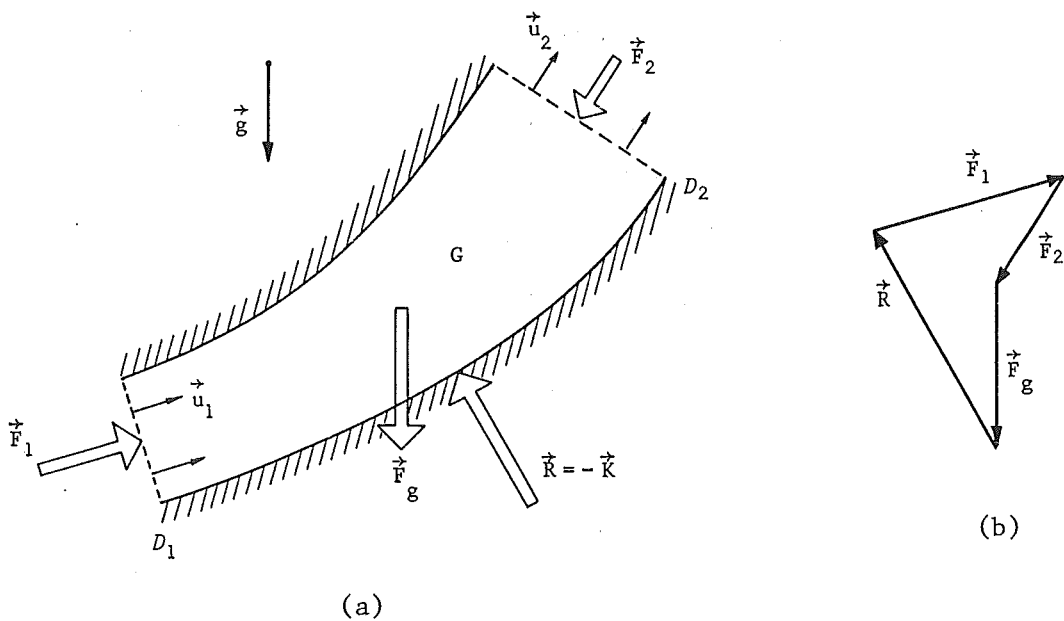


8.5 Impulsbalans voor een stroombuis

Met gebruikmaking van het voorgaande gaan we nu een impulsbalans opstellen voor een gedeelte  $G$  van een stroombuis tussen twee dwarsdoorgangen  $D_1$  en  $D_2$  (Fig. 8.1a).

De impulsoverdracht p.e.v. tijd naar  $G$  bestaat uit de bijdragen van

- zwaartekracht ( $\vec{F}_g$ );
- drukkracht en meevoering in doorgang 1 ( $\vec{F}_1$ ) en in doorgang 2 ( $\vec{F}_2$ );
- drukkracht in de zijdelingse begrenzing van  $G$  (bv. een buiswand), met resultante  $\vec{R}$ .



Figuur 8.1

In de stationaire toestand is  $\partial \vec{I} / \partial t = 0$  en is de netto overdracht van impuls naar  $G$  dus gelijk aan nul (8.7):

$$\vec{F}_g + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = 0 \quad (8.16)$$

(zie Fig. 8.1b). Voor de kracht  $\vec{K}$  die de vloeistof in  $G$  op de zijdelingse begrenzing (bv. een buiswand) uitoefent ( $\vec{K} = -\vec{R}$ ) geldt

$$\vec{K} = \vec{F}_g + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (8.17)$$

In de volgende twee paragrafen worden enkele toepassingen gegeven van het voorgaande. De toepassingen en de manier van behandeling ervan zijn zo gekozen dat zij niet alleen illustraties geven van de theorie maar ook aanvullingen daarop.

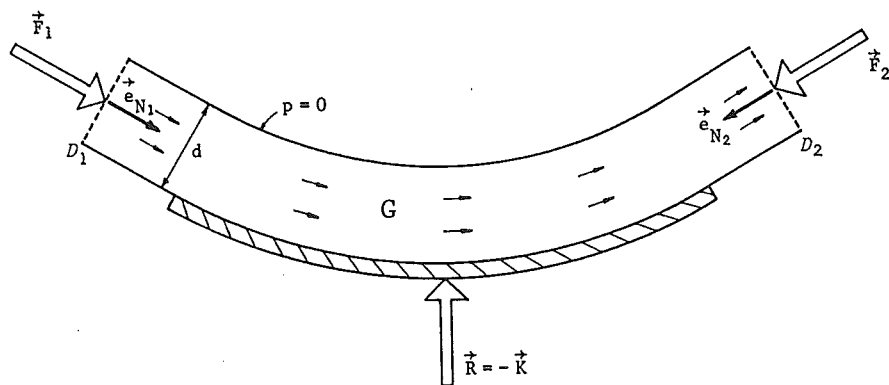
Het gaat in alle gevallen vooral om een correcte opstelling van de verschillende balansen, en niet om de daaraan volgende algebraïsche uitwerking (hoewel die volledigheidshalve en voor het gebruikresultaat wel wordt gegeven waar dat mogelijk is).

In de hier te geven toepassingen gaat het om snel veranderende stromen waarvoor de lokale wandwrijving mag worden verwaarloosd.

### 8.6 Toepassingen op stromen met een vrij oppervlak

#### (1) Straal tegen schoep

Een vrije vloeistofstraal met gegeven dikte  $d_1$  en snelheid  $U_1$  wordt door een stilstaande schoep van richting veranderd (Fig. 8.2). De beweging is twee-dimensionaal in het horizontale vlak. Gevraagd: de kracht  $\vec{K}$  door de straal op de schoep uitgeoefend p.e.v. breedte. (De toevoeging "p.e.v. breedte" wordt in het volgende niet steeds herhaald.)



Figuur 8.2

In de doorgangen 1 en 2 zijn de stroomlijnen recht, zodat  $h = \text{constant}$ , en horizontaal, zodat  $z = \text{constant}$ , zodat ook  $p = \text{constant} = p_{\text{atm}} = 0$ . Hieruit volgt  $\vec{F}_1 = \rho U_1^2 d_1 \vec{e}_{N_1}$ ; idem voor  $\vec{F}_2$ .

De kracht  $\vec{K}$  is te bepalen uit een impulsbalans voor het gebied G:

$$\vec{K} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

of

$$\vec{K} = \rho U_1^2 d_1 \vec{e}_{N_1} + \rho U_2^2 d_2 \vec{e}_{N_2}$$

Hierin komen naast de gegeven grootheden  $d_1$  en  $U_1$  ook de onbekenden  $d_2$  en  $U_2$  voor. Er zijn dus twee aanvullende vergelijkingen nodig. Die baseren we op het behoud van volume en het behoud van energie (daarin komt  $\vec{K}$  overigens niet voor want  $\vec{K}$  verricht geen arbeid in geval van een stilstaande, wrijvingsloze schoep).

Uit het behoud van energie (Bernoulli met  $p = 0$  en  $z = \text{constant}$ ) volgt  $U_1 = U_2 (= U)$ .

Uit het behoud van volume ( $q = \text{constant}$ ) volgt dan  $d_1 = d_2 (= d)$ .

Met bovenstaande resultaten voor snelheid en laagdikte wordt  $\vec{K}$ :

$$\vec{K} = \rho U^2 d (\vec{e}_{N_1} + \vec{e}_{N_2}) = \rho q U (\vec{e}_{N_1} + \vec{e}_{N_2})$$

N.B. In een vrije straal in het zwaarteveld kan de beweging eigenlijk niet geheel in het horizontale vlak liggen. Bij voldoende snelle veranderingen is de zwaarte-kracht echter te verwaarlozen. In grootte-orde is de waarde daarvan (p.e.v. breedte)  $\rho g R d \theta$ , als  $R$  de straal is van de schoep en  $\theta$  de ingesloten hoek. Dit is verwaarloosbaar indien

$$\rho g d R \theta \ll \rho U^2 d \theta$$

ofwel wanneer

$$\frac{U^2}{gR} \gg 1 \quad (8.18)$$

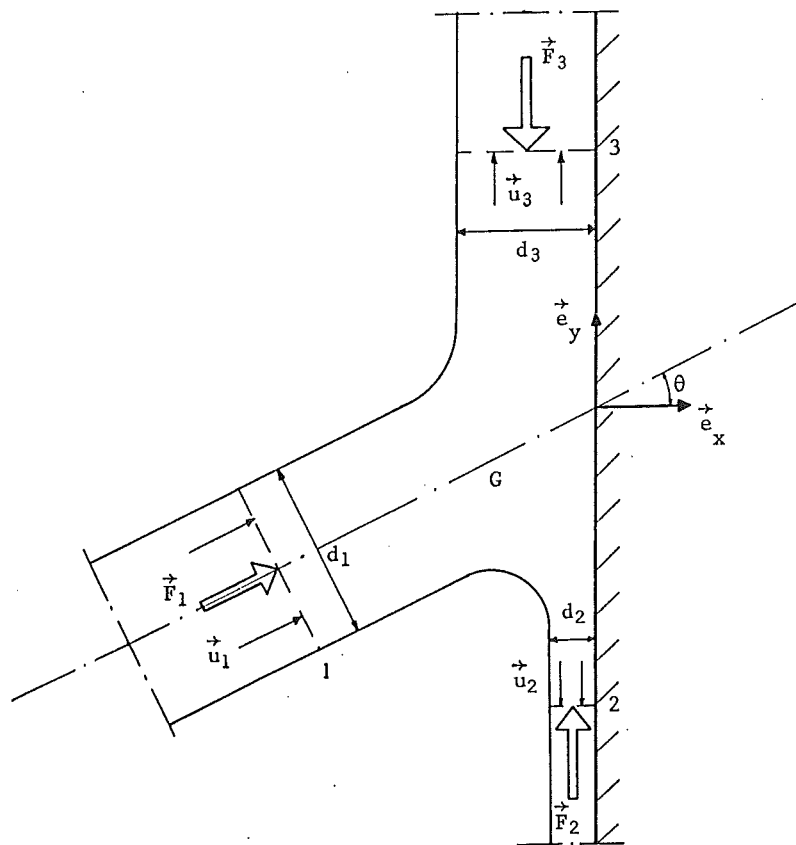
Het linkerlid is  $Fr^2$ , het kwadraat van het voor deze situatie relevante kental van Froude. Het stelt tevens de verhouding voor van de centripetale versnelling tot  $g$ ; daarmee is weer een andere betekenis toegekend aan het kental van Froude.

Wanneer  $Fr^2 \gg 1$  is de lokale invloed van de zwaarte te verwaarlozen en doet de oriëntatie van de stroming t.o.v. het zwaarteveld er niet meer toe.

(2) Straal tegen vlakke wand

Een vrije vloeistofstraal stroomt tegen een vlakke wand, onder een hoek  $\theta$  met de normaal (Fig. 8.3). De beweging is twee-dimensionaal in het horizontale vlak. Gevraagd: de kracht  $\vec{K}$  door de straal op de wand uitgeoefend (p.e.v. breedte), en de laagdikten  $d_2$  en  $d_3$ .

Evenals in het voorgaande voorbeeld is  $p = 0$  in de doorgangen met rechte stroomlijnen (hier 1, 2 en 3) zodat  $\vec{F}$  in die doorgangen slechts uit meevoering van impuls bestaat. Evenzo geldt hier  $U_1 = U_2 = U_3 (= U)$  wegens behoud van energie (Bernoulli met  $p = 0$  en  $z = \text{constant}$ ).



Figuur 8.3

Wegens behoud van volume geldt hier

$$q = U_1 d_1 = U_2 d_2 + U_3 d_3$$

zodat

$$d_1 = d_2 + d_3$$

De kracht  $\vec{K}$  volgt uit de impulsbalans

$$\vec{K} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Aan de component haaks op de wand (richting  $\vec{e}_x$ ) dragen  $\vec{F}_2$  en  $\vec{F}_3$  niet bij zodat

$$K_x = F_{1x} = \rho U_{1x} U_1 d_1 = \rho U_1^2 d_1 \cos\theta$$

(N.B.: niet  $\rho U_{1x}^2 d_1!$ ). Voor de component evenwijdig aan de wand (richting  $\vec{e}_y$ ) volgt uit de impulsbalans

$$K_y = \sum F_y = \rho U_1^2 d_1 \sin\theta + \rho U_2^2 d_2 - \rho U_3^2 d_3$$

Wegens verwaarlozing van de wandwrijving moet  $K_y = 0$  zijn. Dus geldt voor de totale kracht

$$\vec{K} = K_x \vec{e}_x = (\rho U_1^2 d_1 \cos\theta) \vec{e}_x$$

en voor de straaldikten

$$d_1 \sin\theta + d_2 - d_3 = 0$$

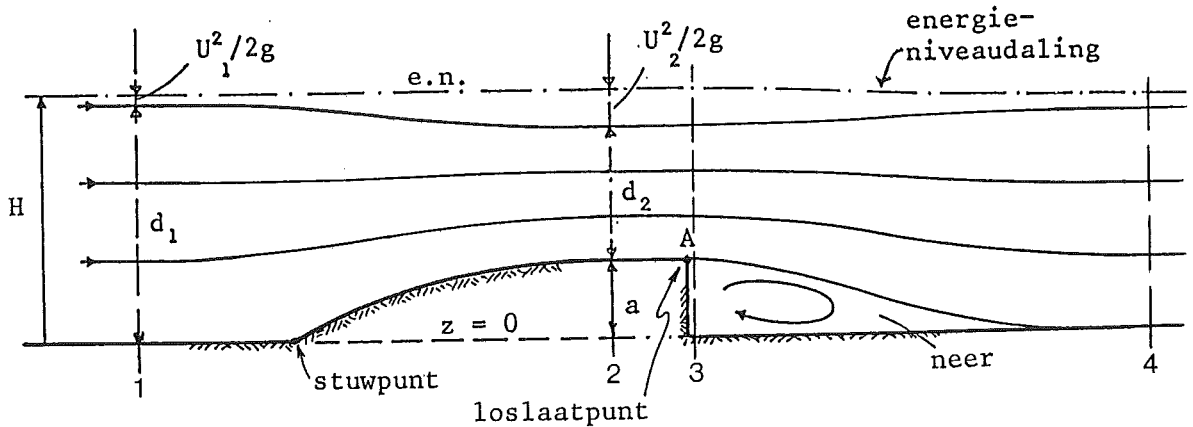
Samen met  $d_1 = d_2 + d_3$  volgt hieruit

$$d_2 = \frac{1}{2} d_1 (1 - \sin\theta)$$

$$d_3 = \frac{1}{2} d_1 (1 + \sin\theta)$$

(3) Stroom over overlaat

We bekijken opnieuw de stroming over een lange overlaat, zoals behandeld in voorbeeld 5 van par. 7.4. Voor de duidelijkheid wordt figuur 7.5 hier gereproduceerd.



Figuur 7.5

In par. 7.4 werden betrekkingen afgeleid tussen  $(d_1, U_1)$  enerzijds en  $(d_2, U_2)$  anderzijds (bij gegeven drempelhoogte  $a$ ). Die waren gebaseerd op het behoud van volume en van energie in het versnellingsgebied ( $G_{1-2}$ ). Door vervolgens de bekende waarden van diepte en snelheid in de doorgangen 1 en 2 te gebruiken in een impulsbalans voor hetzelfde gebied kan de horizontale kracht worden berekend die het water op de voorkant van de overlaat uitoefent ( $K_{1-2}$ ):

$$K_{1-2} = F_1 - F_2$$

ofwel

$$K_{1-2} = \left(\frac{1}{2}\rho g d_1^2 + \rho U_1^2 d_1\right) - \left(\frac{1}{2}\rho g d_2^2 + \rho U_2^2 d_2\right)$$

In het vertragsgebied  $G_{3-4}$  benedenstrooms van de overlaat treden z.g. vertragsenergieverliezen op; in dat gebied kunnen we daarom niet van behoud van energie uitgaan voor berekening van de benedenstroomse diepte en waterdiepte. In dit geval biedt de impulsbalans daarvoor een mogelijkheid. Dank zij de rechte stroomlijnen boven de

overlaat en de neer met lage snelheden er achter kunnen we namelijk de druk in de hele doorsnede 3 hydrostatisch veronderstellen, zodat we de drukkracht in die doorsnede kennen (inclusief de achterkant van de overlaat). De waarde daarvan is eenvoudig  $\frac{1}{2}\rho g(a + d_2)^2$ .

De meevoering van impuls door doorsnede 3 vindt slechts plaats in het gedeelte boven punt A, met de waarde  $\rho U_2^2 d_2$ . Daarmee wordt de impulsbalans voor gebied  $G_{3-4}$ :

$$\frac{1}{2}\rho g(a + d_2)^2 + \rho U_2^2 d_2 = \frac{1}{2}\rho g d_4^2 + \rho U_4^2 d_4$$

Uit het behoud van volume volgt

$$U_2 d_2 = U_4 d_4$$

Bij gegeven waarden van  $U_2$  en  $d_2$  (naast  $\rho$  en  $g$ ) zijn  $d_4$  en  $U_4$  uit deze twee vergelijkingen te berekenen.

Nu ook in doorsnede 4 de diepte en de stroomsnelheid bekend zijn en dus ook  $H_4$ , kunnen we door toepassing van de energiebalans het vermogen  $\Delta P_v$  berekenen dat in het vertragingengebied wordt gedissipeerd (d.w.z. verloren gaat voor de hoofdstroom):

$$\Delta P_v = P_3 - P_4$$

ofwel

$$\Delta P_v = \rho g q (H_3 - H_4)$$

waarbij

$$H_3 = H_2 = H_1$$

N.B. De totale horizontale kracht ( $K$ ) op de overlaat kan worden bepaald als de resultante van de inmiddels bekende krachten op de bovenstroomse respectievelijk de benedenstroomse zijde; vanzelfsprekend wordt hetzelfde resultaat verkregen door toepassing van de impulsbalans op het gebied  $G_{1-4}$ :

$$K = F_1 - F_4$$

Voor de energiedissipatie in het vertragingsgebied geldt evenzo

$$\Delta P_v = P_1 - P_4$$

Het energieverlies in het vertragingsgebied is een gevolg van een niet-volledige omzetting van kinetische energie in potentiële energie; een deel van de kinetische energie van de aankomende stroom wordt bij vertraging omgezet in energie van wervelende, turbulente fluctuaties en uiteindelijk in warmte (via de viscositeit). Deze omzetting is niet omkeerbaar en is daarom voor de mechanische energie van de doorgaande stroom een verliespost.

We zien in dit voorbeeld dat in een sterk vertragende stroom de wandwrijving weliswaar verwaarloosbaar kan zijn als bijdrage in de impulsbalans, maar dat er desondanks wel een significant (inwendig) energieverlies kan optreden, dat in de energiebalans in rekening moet worden gebracht. (Zie impulsbalans en energiebalans voor een stelsel van deeltjes met niet-conservatieve wisselwerkingen zoals behandeld in b7.)

Merk op dat voor beide balansgebieden behalve de volumebalans zowel de balans van impuls als die van energie wordt gebruikt.

In  $G_{1_2}$  zijn de drukken op de overlaat à priori niet bekend. De daaruit resulterende drukkracht verricht echter geen arbeid op de stroming ( $\vec{p}_N$  haaks op  $\vec{u}$ ); hij komt dus niet voor in de energiebalans, die we daarom eerst toepassen om - met behoud van energie - de grootheden in doorsnede 2 te berekenen uit de gegeven grootheden bovenstrooms. De daarna resterende onbekende kracht is vervolgens uit de impulsbalans voor  $G_{1_2}$  te bepalen.

In  $G_{3_4}$  is  $\Delta P_v$  à priori niet bekend, maar er is wel een goede benadering te geven voor de drukken tegen de overlaat. Ondanks het inwendige energieverlies blijft de impuls van de stroom in  $G_{3_4}$  behouden. Daaruit kunnen de grootheden benedenstrooms worden bepaald,



waarna de dan resterende onbekende  $\Delta P_v$  uit de energiebalans is te berekenen.

Het is belangrijk bovenomschreven systematiek goed te begrijpen, te kennen en te kunnen toepassen.

### 8.7 Toepassingen op stromen in gesloten leidingen

Bij stromingen in een gevulde, starre, gesloten leiding is het doorstroomprofiel onafhankelijk van de stroomsnelheid, en past de druk zich aan profielvariatiën aan (in tegenstelling tot stromen met een vrij oppervlak). Wanneer bovendien de vloeistof als niet samendrukbaar kan worden beschouwd is de waarde van de massa in de leiding niet afhankelijk van de stroomsnelheid. De zwaartekracht op deze massa, en het daarmee overeenkomende, hydrostatische deel van de druk, kunnen dus worden bepaald alsof de vloeistof in evenwicht is (hydrostatica-vraagstuk). In de aanpak van de dynamica van de stroming kunnen zij vervolgens gezamenlijk buiten beschouwing blijven (alsof  $g = 0$ ). In dat geval reduceert (8.7) tot

$$\vec{F}_{p_d} + \vec{F}_{mv} = 0 \quad (8.19)$$

Hierin stelt  $\vec{F}_{p_d}$  de bijdrage voor van het dynamische (stromingsafhankelijke) deel van de druk. In de volgende toepassingen wordt deze formulering steeds gebruikt. De dynamische druk zal korthedshalve echter met  $p$  worden weergegeven.

#### (1) Vernauwing

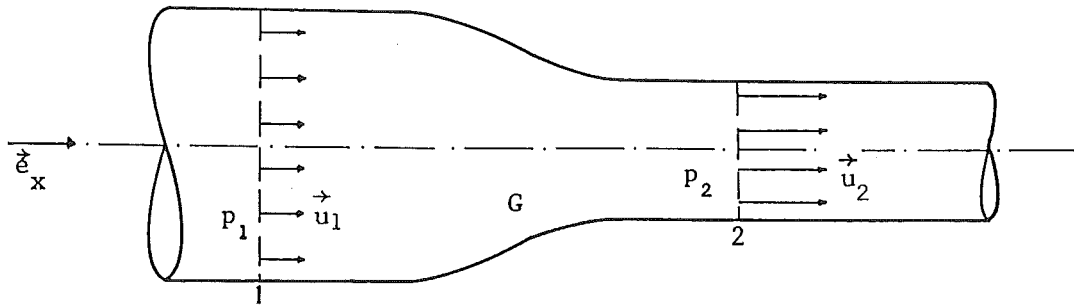
Een gestroomlijnd verloopstuk in een leiding verbindt twee buizen (Fig. 8.4) waarvan de dwarsprofielen een oppervlakte hebben van  $A_1$  respectievelijk  $A_2$  ( $A_1 > A_2$ ). De leiding is gevuld met vloeistof die stroomt in de richting van 1 naar 2. De druk bovenstrooms respectievelijk benedenstrooms van het verloopstuk is  $p_1$  respectievelijk  $p_2$ . Gevraagd: het debiet ( $Q$ ), en de kracht ( $\vec{K}$ ) die door de vloeistof op het verloopstuk wordt uitgeoefend.

Balansgebied: leidinggedeelte tussen dwarsdoorgangen 1 en 2.

Behoud van volume:

$$Q = U_1 A_1 = U_2 A_2$$

Behoud van energie (Bernoulli met  $p = p_d$ ):



Figuur 8.4

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

Hieruit volgt

$$Q^2 = 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho} \left[ A_2^{-2} - A_1^{-2} \right]^{-1}$$

Door bij gegeven waarden van  $\rho$ ,  $A_1$  en  $A_2$  het drukverschil te meten kan  $Q$  hieruit worden bepaald.

Behoud van impuls:

$$\vec{K} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$\vec{F}_1$  en  $\vec{F}_2$  zijn axiaal gericht en  $\vec{K}$  dus ook; de waarde ervan is

$$K = F_1 - F_2 = (p_1 + \rho U_1^2) A_1 - (p_2 + \rho U_2^2) A_2$$

Dit is te schrijven in termen van  $Q$  als

$$K = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \rho Q^2 (A_1^{-1} - A_2^{-1})$$

Eliminatie van  $Q$  geeft

$$K = (p_1 A_1 - p_2 A_2) \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

Wanneer we de stroomrichting omkeren is er sprake van een verwijding en dus ook van een vertraging. Wanneer we desondanks behoud van energie blijven veronderstellen (behoud van volume geldt so wie so) blijven bovenstaande vergelijkingen onveranderd, met dien verstande dat de tekens van  $U_1$  en  $U_2$  veranderen (niet dat van  $K$  omdat de snelheid daar kwadratisch in voorkomt - zie par. 8.4). In het algemeen treedt bij vertraging echter een niet verwaarloosbaar energieverlies op, waardoor bovenstaande formulering bij omkering van de stroomrichting zijn geldigheid verliest. Voor het geval van een abrupte verwijding is de waarde van het energieverlies te berekenen; dat gebeurt in het volgende voorbeeld.

## (2) Abrupte verwijding

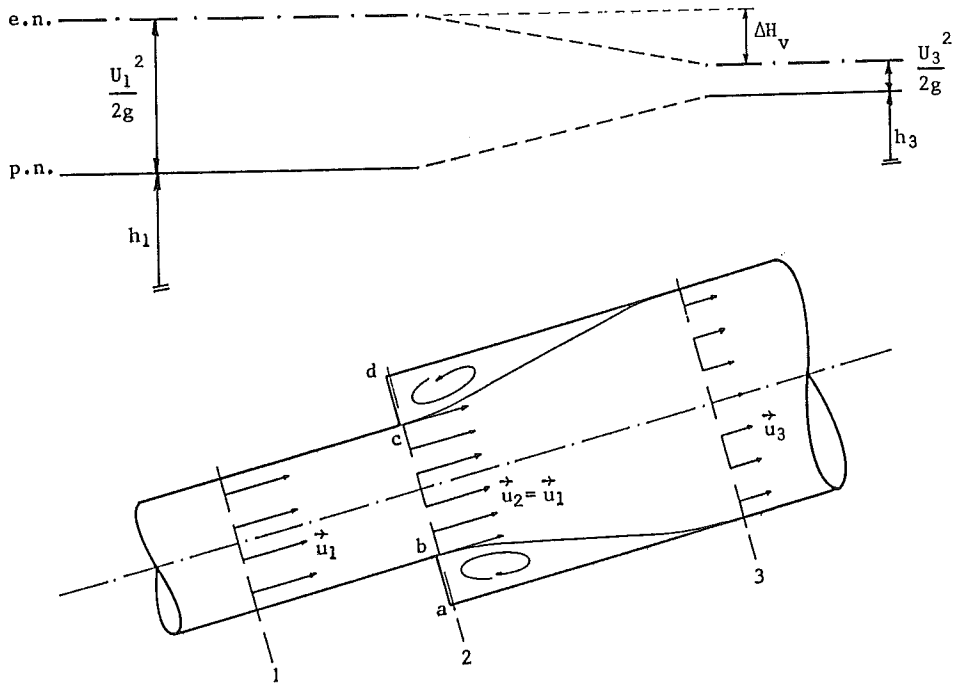
We behandelen nu het geval van een abrupte verwijding, waarbij twee buizen van verschillende diameter met een platte flens aan elkaar zijn verbonden (Fig. 8.5). De druk en de gemiddelde snelheid in de buis met de kleinste diameter zijn gegeven ( $p_1$  respectievelijk  $U_1$ ). De waarden daarvan benedenstrooms van de verwijding moeten worden berekend, evenals het energieverlies in het vertraginggebied.

Vanwege de abrupte verwijding laat de stroom los van de wand, en vormt zich een neer in de zône pal benedenstrooms van de flens (Fig. 8.5). De doorgaande stroom verwijdt geleidelijk tot het volle beschikbare profiel.

We onderscheiden drie dwarsdoorsneden 1, 2 en 3: bovenstrooms van de flens (1), pal benedenstrooms van de flens (2) en verder benedenstrooms, zodanig dat daar de stroom weer nagenoeg uniform is in het dwarsprofiel (3). We stellen balansen op voor het gebied  $G_{2-3}$ . Ter plaatse van de plotselinge verwijding passen we dezelfde benadering toe als benedenstrooms van de overlaat in par. 8.6.

In de doorsneden 1 en 3 is de stroomsnelheid min of meer uniform, maar in doorsnede 2 is dat slechts het geval voor de kern (bc). De snelheid en de druk in die kern hebben dezelfde waarde als in doorgang 1 ( $u_{bc} =$

$U_1$  en  $p_{bc} = p_1$ ). Wanneer we de (dynamische) druk tegen de flens (ab en cd) constant veronderstellen, gezien de relatief lage snelheden in de



Figuur 8.5

neer, geldt in de gehele doorsnede 2:  $p = \text{constant} = p_2 = p_1$ . De totale impulsoverdracht p.e.v. tijd in doorsnede 2 heeft dus de waarde

$$F_2 = \iint_{A_2} (p + \rho u^2) dA = p_2 A_2 + \rho U_1^2 A_1$$

Omdat  $p_2 = p_1$  en  $A_2 = A_3$  is dit te schrijven in termen van de gegeven grootheden als

$$F_2 = p_1 A_3 + \rho U_1^2 A_1$$

De impulsbalans voor het leidinggedeelte tussen de doorsneden 2 en 3 (met verwaarloosde wandwrijving) luidt  $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$  zodat

$$F_2 - F_3 = 0$$

ofwel

$$(p_1 A_3 + \rho U_1^2 A_1) - (p_3 A_3 + \rho U_3^2 A_3) = 0$$

Uit de volumebalans

$$Q = U_1 A_1 = U_3 A_3$$

is  $U_3$  bekend, waarna  $p_3$  uit bovenstaande impulsbalans is te berekenen. Voor de drukstijging in het vertragingsgebied volgt dan

$$p_3 - p_1 = \Delta p = \rho(U_1 U_3 - U_3^2) \quad (8.20)$$

Het energieverlies p.e.v. tijd (het gedissipeerd vermogen) in het vertragingsgebied volgt uit de energiebalans

$$P_1 - P_3 = \Delta P_v$$

zodat (zie (7.3))

$$\Delta P_v = [(p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2) - (p_3 + \frac{1}{2}\rho U_3^2)] Q$$

Substitutie hierin van (8.20) geeft

$$\boxed{\Delta P_v = \frac{1}{2}\rho(U_1 - U_3)^2 Q} \quad (8.21)$$

Als gevolg van het energieverlies is de stijging van de dynamische druk in het vertragingsgebied, gegeven door (8.20), kleiner dan die zou zijn volgens Bernoulli:

$$\Delta p_{\text{Bern}} = \frac{1}{2}\rho(U_1^2 - U_3^2) \quad (8.22)$$

Het tekort aan drukstijging is  $\Delta p_v = \Delta p_{\text{Bern}} - \Delta p$ . Substitutie van (8.20) en (8.22) geeft

$$\boxed{\Delta p_v = \frac{1}{2}\rho(U_1 - U_3)^2} \quad (8.23)$$

In termen hiervan is het energieverlies te schrijven als

$$\Delta P_v = (\Delta p_v) Q \quad (8.24)$$

Zoals gezegd is de zwaartekracht niet van belang voor de dynamica van de hier beschouwde stroming. In bovenstaande formulering is hij daarom weggelaten, en stelt  $p$  de dynamische druk voor. Wanneer we dit niet doen veranderen weliswaar de uitdrukkingen voor de druk  $p$  (de hydrostatische druk komt er bij) en die voor de energie-overdracht  $P$  (de meevoering van zwaarte-energie komt er bij), maar de uitdrukkingen voor de verliezen ( $\Delta p_v$  en  $\Delta P_v$ ) blijven onveranderd.

Ook al is de zwaartekracht niet van belang voor de dynamica van de ingesloten stroming, daarom kunnen we er nog wel gebruik van maken om de optredende variaties in energie-overdracht en dynamische druk uit te drukken in niveauverschillen (bv. voor een meting), nl. via het energieniveau ( $H = P/(\rho g Q)$ ) en het piëzometrisch niveau ( $h = p_d/\rho g$ ). Zodoende komt met (8.21) een daling van het energieniveau overeen gelijk aan

$$\Delta H_v = \frac{(U_1 - U_3)^2}{2g} \quad (8.25)$$

(Dit is de z.g. regel van Carnot.) Deze waarde is tevens gelijk aan het tekort ( $\Delta h_v$ ) van de stijging in piëzometrisch niveau, overeenkomend met (8.23). Het verloop van het energieniveau en van het piëzometrisch niveau is in Fig. 8.5 schetsmatig weergegeven.

Wanneer er sprake is van een abrupte en zeer sterke verwijding is  $A_3 \gg A_1$  en dus ook  $U_3 \ll U_1$ . Dan geldt bij benadering

$$\Delta p_v = \frac{1}{2} \rho U_1^2 \quad (8.26)$$

respectievelijk

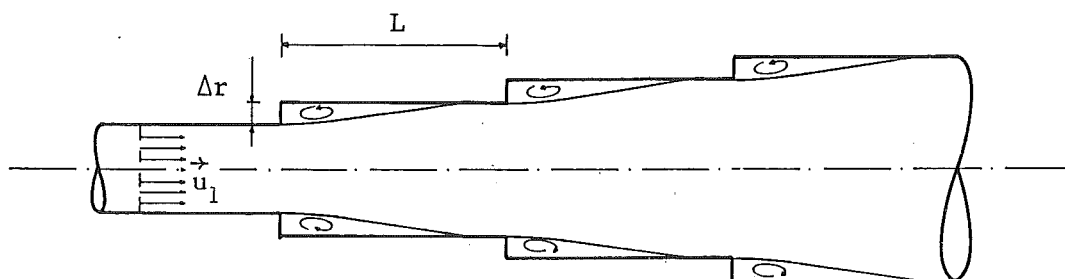
$$\Delta H_v = \frac{U_1^2}{2g} \quad (8.27)$$

In dit geval gaat vrijwel de gehele kinetische energie van de aankomende stroom verloren. Dit doet zich bv. voor bij uitstroming in een relatief groot reservoir. Het vertragsingsverlies dat daarbij optreedt heet het uittreeverlies.

In een geleidelijke verwijding (diffusor) is het totale verlies kleiner dan in een abrupte verwijding. Dit kan plausibel worden gemaakt met de regel van Carnot. We gaan daarbij eerst het geval bekijken van een abrupte maar relatief kleine verwijding, van  $A_1$  tot  $A_3 = A_1 (1 + \epsilon)$ , waarbij  $\epsilon \ll 1$ . Dan geldt bij benadering

$$(U_1 - U_3)^2 = U_1^2 \left[ 1 - \frac{A_1}{A_3} \right]^2 = U_1^2 \left[ \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \right]^2 \approx \epsilon^2 U_1^2$$

Stel nu dat enkele van zulke relatief kleine verwijdingen op elkaar volgen, zodanig dat een getrapt toenemend doorstroomprofiel ontstaat (Fig. 8.6). De totale relatieve profielvergroting is  $\Sigma\epsilon$ . Het totale verlies daarentegen neemt toe in evenredigheid met  $\Sigma\epsilon^2$ ; dit nadert tot nul als we het aantal trappen vergroten bij gelijkblijvende totale profielvergroting (gelijkblijvende waarde van  $\Sigma\epsilon$ ).



Figuur 8.6

Een getallenvoorbeeld: het verlies in een abrupte verwijding van  $A_1$  tot  $A_3 = 2A_1$  is  $\frac{1}{4}(U_1^2/2g)$ . Bij tussenvoeging van één trap, waarvoor  $A_2 = \frac{3}{2}A_1$ , is het totale verlies volgens de regel van Carnot te berekenen als

$$\frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} + \frac{(U_2 - U_3)^2}{2g} = \frac{U_1^2}{2g} \left[ \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{A_1}{A_3}\right)^2 \right]$$

De waarde hiervan is  $(5/36) (U_1^2/2g)$ , ofwel een factor 5/9 kleiner dan zonder tussen-trap.

In het bovenstaande is verondersteld dat per trap de regel van Carnot geldt. Daarvoor moet elke trap tenminste zo lang zijn dat de stroom weer vrijwel uniform over het volle beschikbare profiel is verdeeld (zoals geschetst in Fig. 8.6). De hiervoor benodigde traplengte (L) is ca. 8x de trap"hoogte" ( $\Delta r$ ). De verhouding van 1:8 is tevens (globaal) de maat voor de maximale hoek van divergentie ( $\theta$ ) van een continue, geleidelijke verwijding waarbij de stroomlijnen nog blijven aanliggen (hierin is  $\theta$  de hoek tussen de zijwand en de as van de leiding). Wanneer dit het geval is (zoals in een goede diffusor) blijft het verlies beperkt tot een kleine fractie van het Carnot-verlies.

### (3) Lokale vernauwing

In aansluiting op het voorgaande behandelen we nu de stroming door een lokale vernauwing in een overigens cilindervormige leiding. We vergelijken het energieverlies en de weerstand in twee gevallen, een z.g. Venturimeter (een vernauwing gevolgd door een diffusor, Fig. 8.7a) en een vernauwing van dezelfde vorm tot aan de keel, gevolgd door een abrupte verwijding (Fig. 8.7b). Beide typen vernauwing kunnen worden gebruikt voor debietmeting, gebaseerd op Bernoulli (tot aan de vena contracta).

We stellen balansen op van volume, energie en impuls voor de leiding-gedeelten tussen de doorsneden 1 en 3. Voor beide gevallen schrijven we deze balansen in de vorm

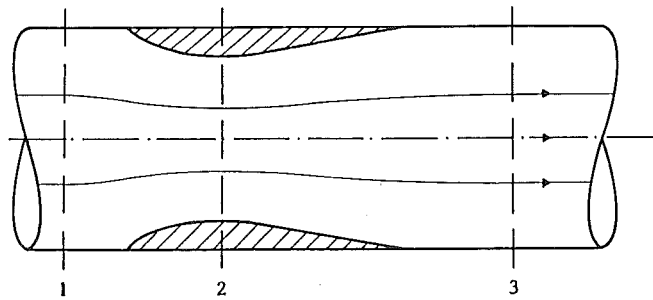
$$\begin{aligned} Q_1 - Q_3 &= 0 \\ P_1 - P_3 &= \Delta P_v \\ F_1 - F_3 &= K \end{aligned}$$

Hierin stelt K de grootte voor van de axiale kracht die de vloeistof op de wand uitoefent tussen de doorsneden 1 en 3 (dus zowel voorzijde als achterzijde van de plaatselijke vernauwing).

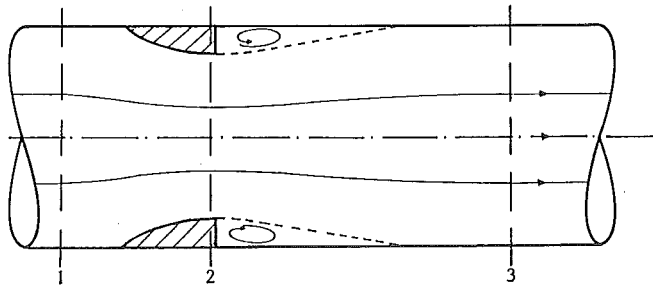
Omdat  $Q = \text{constant}$  en  $A_1 = A_3 (= A)$  geldt  $U_1 = U_3 (= U)$ .



Zoals bij de vorige toepassing al is gesteld is het energieverlies in geval van een gestroomlijnde verwijding (Venturi) slechts een kleine fractie van het verlies volgens Carnot, dat optreedt bij een abrupte verwijding. Om de essentiële verschillen tussen beide situaties tot uiting te laten komen gaan we het verlies in de Venturimeter zelfs geheel verwaarlozen ( $\Delta P_v = 0$ ). In dat geval geldt  $P_3 = P_1$ , en omdat  $U_3 = U_1$  geldt ook  $p_3 = p_1$ . Hieruit volgt  $F_3 = F_1$ , waarna het behoud van impuls resulteert in  $K = 0$ . De drukstijging in het vertraginggebied is in deze geïdealiseerde benadering voor de gestroomlijnde verwijding gelijk aan de drukdaling in het versnellingsgebied bovenstrooms van de vena contracta, waardoor de netto (axiale) kracht op de wand tussen 1 en 3 gelijk is aan nul.



Figuur 8.7a



Figuur 8.7b

In het geval van de abrupte verwijding kunnen we het energieverlies in het vertragingsgebied niet verwaarlozen, en is  $p_3 < p_1$ . Volgens Carnot geldt

$$p_3 = p_1 - \Delta p_v = p_1 - \frac{1}{2}\rho(U_2 - U_3)^2$$

Hierin is  $U_2$  de gemiddelde snelheid in de keel. Substitutie hiervan in de impulsbalans geeft

$$K = (\Delta p_v)A$$

In dit geval oefent de vloeistof dus wel een netto axiale kracht uit op het betreffende wandgedeelte, en wel een kracht in de richting van de stroming. We kunnen ook zeggen dat de vloeistofstroming een weerstand ondervindt met een grootte ( $W$ ) gelijk aan  $K$ :

$$\boxed{W = (\Delta p_v)A} \quad (8.28)$$

Merk op dat deze weerstand uitsluitend het gevolg is van een tekort aan druk, en niet van de lokale wandwrijving (a.g.v. schuifspanningen); die was immers verwaarloosd.

Voor het gedissipeerde vermogen geldt (8.24):

$$\Delta P_v = (\Delta p_v)Q = (\Delta p_v)UA$$

zodat

$$\boxed{\Delta P_v = WU} \quad (8.29)$$

We kunnen het voorgaande als volgt samenvatten:

- in een abrupt vertragende stroom treden energieverliezen op;
- daardoor stijgt de druk in het vertragingsgebied minder dan het geval zou zijn zonder energieverlies;
- dit tekort komt in de impulsbalans tot uiting als een lokale weerstand die de stroom ondervindt;

- het vermogen geleverd door de stroom om deze weerstand te overwinnen is gelijk aan het energieverlies p.e.v. tijd in de vertraging.

#### (4) Compressiegolf

In tegenstelling tot de vorige toepassingen behandelen we nu een geval van een niet-stationaire beweging van een samendrukbare vloeistof of gas. De beweging wordt geheel één-dimensionaal verondersteld; in de richtingen dwars op de bewegingsrichting kan het gebied van de beweging zich willekeurig ver uitstrekken; de formulering zal worden gegeven voor een cilindrische, starre leiding.

We gaan ervan uit dat een abrupte drukverhoging zich als een schokgolf in de leiding voortplant (met te berekenen snelheid  $c$ ), waarbij er sprake is van een ongestoord gebied waar  $u = u_0 = 0$ ,  $p = \text{constant} = p_0$  en  $\rho = \text{constant} = \rho_0$  (zie Fig. 8.8a). Achter het golffront stellen we  $p = \text{constant} = p_1$ ,  $\rho = \text{constant} = \rho_1$  en  $u = \text{constant} = u_1$ , waarbij  $p_1 - p_0 = \delta p$  en  $\rho_1 - \rho_0 = \delta \rho$ . We zien af van de details in het golffront, d.w.z. het overgangsgebied tussen beide gebieden van uniforme toestand.

We stellen voor het tijdsinterval van  $t = t_1$  tot  $t = t_2 = t_1 + \Delta t$  een massabalans en een impulsbalans op voor een ruimtelijk vast gebied  $G$  dat het front bevat (Fig. 8.8b). De beweging is niet stationair; de balansen drukken uit dat "toeneming voorraad" = "netto overdracht naar binnen".

Het front ondergaat een verplaatsing van  $s = s_{t_1}$  tot  $s = s_{t_2}$ , over een afstand  $\Delta s = c \Delta t$ . In het gebied tussen  $s_{t_1}$  en  $s_{t_2}$  (gearceerd in Fig. 8.8b) is de massadichtheid toegenomen van  $\rho_0$  tot  $\rho_1$ , en de impulsdichtheid van  $\rho_0 u_0$  tot  $\rho_1 u_1$ .

De massabalans (toeneming voorraad = netto instroom) luidt:

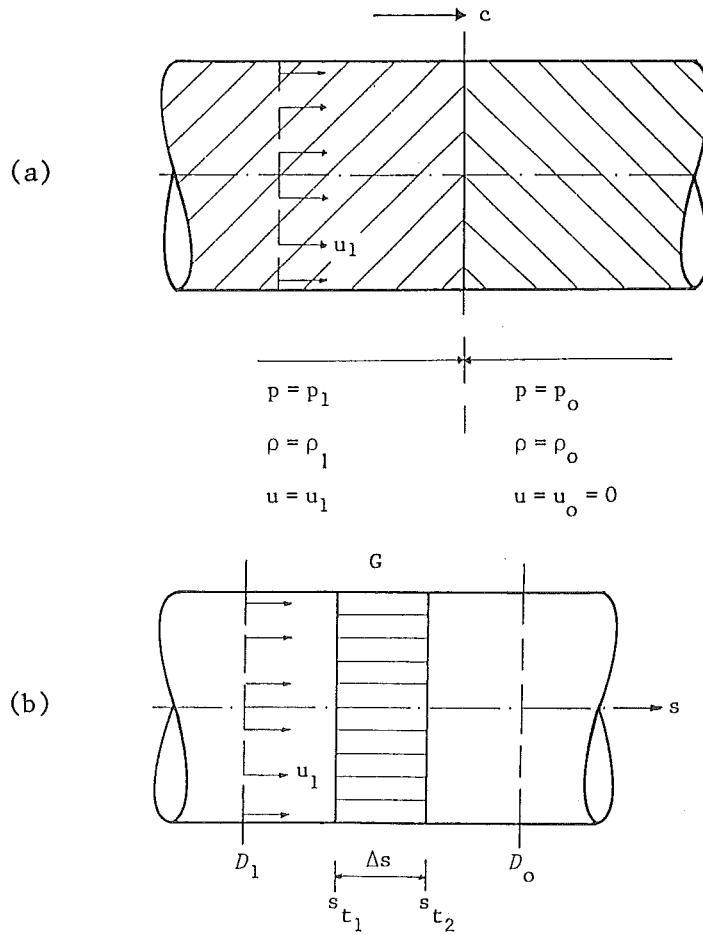
$$(\rho_1 - \rho_0) A \Delta s = (\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0) A \Delta t$$

ofwel, met  $\Delta s = c \Delta t$  en  $u_0 = 0$ :

$$(\delta \rho) c = \rho_1 u_1 \quad (8.30)$$

Evenzo geeft de impulsbalans:

$$(\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0) A \Delta s = [(p_1 + \rho_1 u_1^2) - (p_0 + \rho_0 u_0^2)] A \Delta t$$



Figuur 8.8

ofwel, met  $\Delta s = c \Delta t$  en  $u_0 = 0$ :

$$\rho_1 u_1 c = \delta p + \rho_1 u_1^2 \quad (8.31)$$

Eliminatie van  $\rho_1 u_1$  uit (8.30) en (8.31) geeft

$$c^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\delta p}{\delta \rho}$$

Voor een zwakke dichtheidsverandering ( $\delta \rho \ll \rho_0$ , dus  $\rho_1 / \rho_0 \approx 1$ ) is dit te benaderen als

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (8.32)$$

Dit is een zeer goede benadering voor vloeistoffen, omdat die slechts in geringe mate samendrukbaar zijn. Gebruikmakend van de definitie van de compressibiliteitsmodulus  $K$  (zie par. 2.3.2) wordt (8.32):

$$c^2 = \frac{K}{\rho} \quad (8.33)$$

Hiermee is de uitdrukking afgeleid van de geluidssnelheid, die in hoofdstuk 2 zonder bewijs al is genoemd.

N.B. Voor  $\delta p$  geldt volgens (8.31):

$$\delta p = \rho_1 u_1 c \left(1 - \frac{u_1}{c}\right)$$

In civiel-technische systemen van stroming door een leiding geldt altijd  $u \ll c$  (ofwel:  $Ma \ll 1$ , waarin  $Ma$  het kental van Mach is), en kan (8.31) worden benaderd als

$$\delta p = \rho_1 u_1 c \quad (8.34)$$

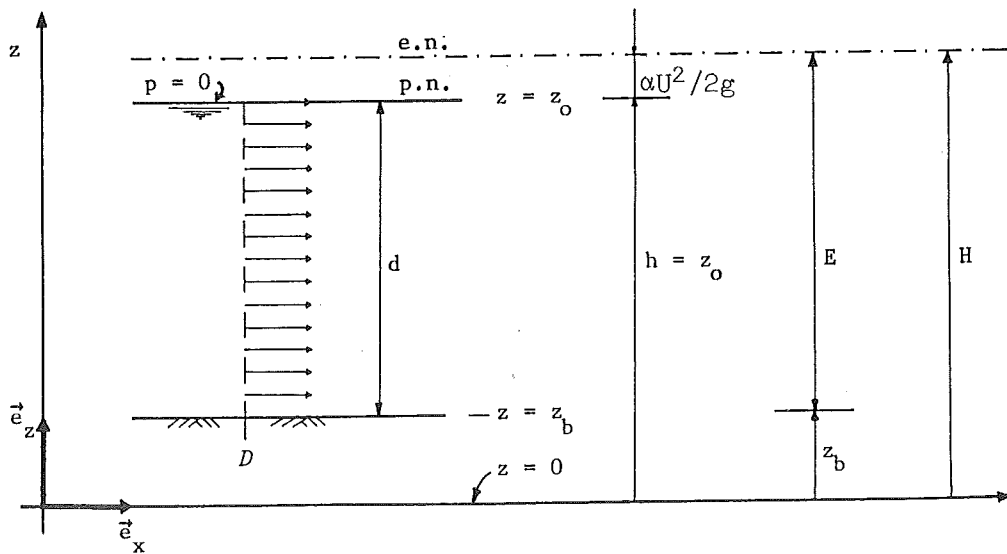
Dit is de z.g. formule van Joukowski. Hieruit is te zien dat de geringe samendrukbaarheid van vloeistoffen ( $K$  groot) via grote waarden van  $c$  (bijna 1500 m/s voor zuiver water) leidt tot relatief hoge drukvariaties wanneer de snelheid snel varieert ("waterslag"). Te snelle manipulatie van pompen en afsluiters in starre leidingen moet daarom worden voorkomen, om ongewenst grote drukvariaties te vermijden. (In pijpleidingen heeft de elasticiteit van de buiswand ook invloed en is  $c^2$  kleiner dan  $K/\rho$ ; de drukvariatie is dan dus kleiner dan in een starre leiding; zie het vervolgvak "Lange golven" (b73) voor een behandeling van deze materie.)

9. STROMING IN OPEN WATERLOPEN

9.1 Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken zijn diverse problemen behandeld van snel veranderende stromen; daarvoor kan wandwrijving worden verwaarloosd. Enkele van die problemen hadden betrekking op open waterlopen. Wij gaan in dit hoofdstuk uitvoeriger in op die categorie; daarbij komen aspecten aan de orde die specifiek samenhangen met een vrij oppervlak. De aanwezigheid daarvan is een complicerende factor doordat de positie ervan, en daarmee de grootte van het doorstroomoppervlak, à priori niet bekend is maar als deel van de oplossing moet worden bepaald.

We beperken ons voorlopig tot twee-dimensionale stromen en we beginnen met de overdracht in de stroomrichting van impuls en energie door een dwarsdoorgang  $D$  met (vrijwel) rechte, horizontale stroomlijnen (Fig. 9.1). De te gebruiken symbolen zijn in Fig. 9.1 aangegeven.



Figuur 9.1 Definitieschets

De hoogte van de bodem respectievelijk de waterspiegel boven het willekeurig gekozen vergelijkingsvlak  $z = 0$  is  $z_b$  respectievelijk  $z_0$ ; het verschil tussen beide is de diepte:  $d = z_0 - z_b$ . Wanneer de bodem in het beschouwde gebied horizontaal ligt is het mogelijk het vergelijkingsvlak daarmee te laten samenvallen.

Omdat we uitgaan van een doorgang met rechte stroomlijnen ligt het piëzometrisch niveau in alle punten van de beschouwde doorgang in de plaatselijke waterspiegel. Voor de hoogte ervan boven het vlak  $z = 0$  geldt

$$h = z_o = z_b + d$$

De volumestroom of het debiet per eenheid van (p.e.v.) breedte is

$$q = \int u \, dz = Ud$$

De integratie hierin strekt zich uit over de gehele diepte.

## 9.2 Impulsoverdracht

De impulsoverdracht p.e.v. tijd en p.e.v. breedte door de doorgang van Fig. 9.1 heeft de waarde (zie 8.14)

$$F = \frac{1}{2}\rho g d^2 + \beta \rho U^2 d \quad (9.1)$$

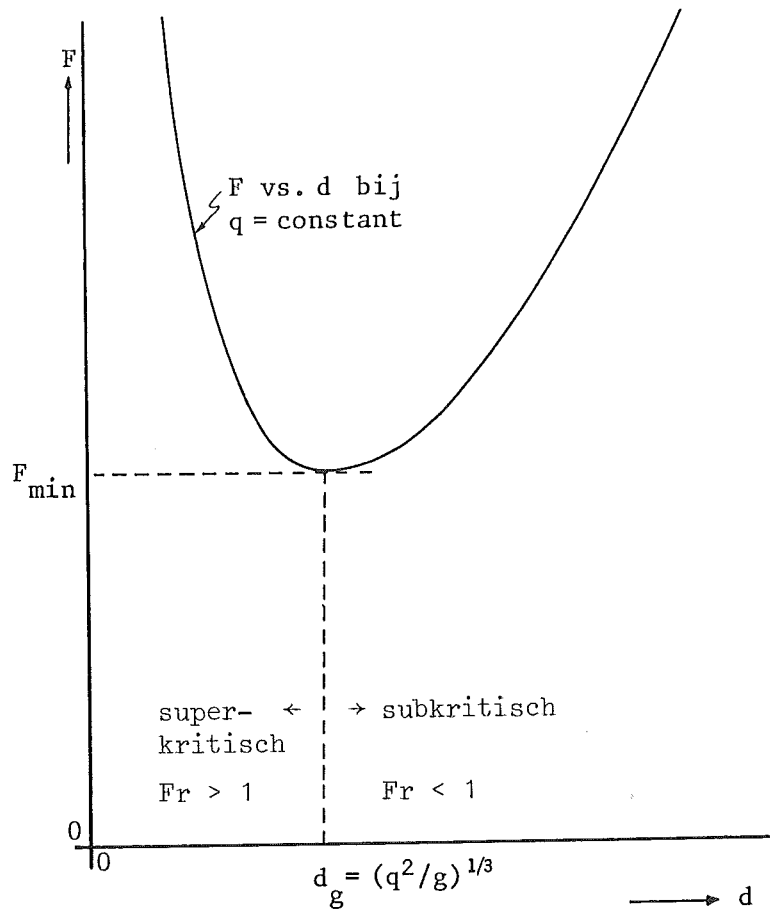
We gaan nu na hoe  $F$  met  $d$  varieert bij constante  $q$ . Uitgedrukt in  $q$ , en met de benadering  $\beta = 1$ , wordt (9.1):

$$F = \frac{1}{2}\rho g d^2 + \rho q^2/d \quad (9.2)$$

De variatie van  $F$  met  $d$  bij een constante  $q$  is getekend in Fig. 9.2. Deze kromme geldt voor één waarde van  $q$ . Voor verschillende waarden van  $q$  ontstaat een familie van onderling gelijkvormige krommen, elk voor een constante  $q$ .

We zien dat  $F$  bij constante  $q$  een minimum heeft voor een zekere waarde van  $d$ . Om de ligging daarvan te bepalen berekenen we de afgeleide van  $F$  naar  $d$  (bij constante  $q$ ):

$$\frac{dF}{dd} = \rho g d - \rho q^2/d^2 = \rho g d \left(1 - \frac{q^2}{gd^3}\right) \quad (9.3)$$



Figuur 9.2 Impulsoverdracht (F) versus diepte (d) bij constante afvoer (q)

Substitutie hierin van  $q = Ud$  en  $Fr = U/\sqrt{gd}$  geeft

$$\frac{dF}{dd} = \rho g d (1 - Fr^2)$$

Het minimum van F treedt dus op voor  $Fr = 1$ ; de bijbehorende diepte is  $d = (q^2/g)^{1/3}$ .

Bij gegeven waarden van debiet (q) en impulsoverdracht (F) is blijkbaar parallelle stroming mogelijk bij twee verschillende diepten (mits  $F > F_{min}$ ). Welk van beide typen zich voordoet wordt door de randvoorwaarden bepaald. We komen hierop terug in de toepassingen, na behandeling van de energie-overdracht.



### 9.3 Energie-overdracht en energiehoogte

De energie-overdracht p.e.v. tijd en p.e.v. breedte door de doorgang in Fig. 9.1 is te schrijven als (zie 7.7)

$$P = \rho g q H \quad (9.4)$$

Hierin is H de over de dwarsdoorgang gemiddelde energiehoogte (eigenlijk  $\langle H \rangle$ ). De waarde hiervan boven het vlak  $z = 0$  is gelijk aan

$$H = h + \alpha \frac{U^2}{2g} = z_b + d + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

De som van de laatste twee termen is de energiehoogte boven de bodem (Fig. 9.1). Deze krijgt een apart symbool (E):

$$E = d + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (9.5)$$

Hiermee geldt

$$H = z_b + E$$

We gaan nu na hoe de energie-overdracht (P) varieert met de diepte (d) bij constant debiet (q). Uit (9.4) volgt dat het daarvoor voldoende is na te gaan hoe de energiehoogte met d varieert. We doen dit in het bijzonder voor de energiehoogte boven de bodem (E). De vergelijking daarvoor (9.5) is in termen van q, en met de benadering  $\alpha = 1$ , te schrijven als

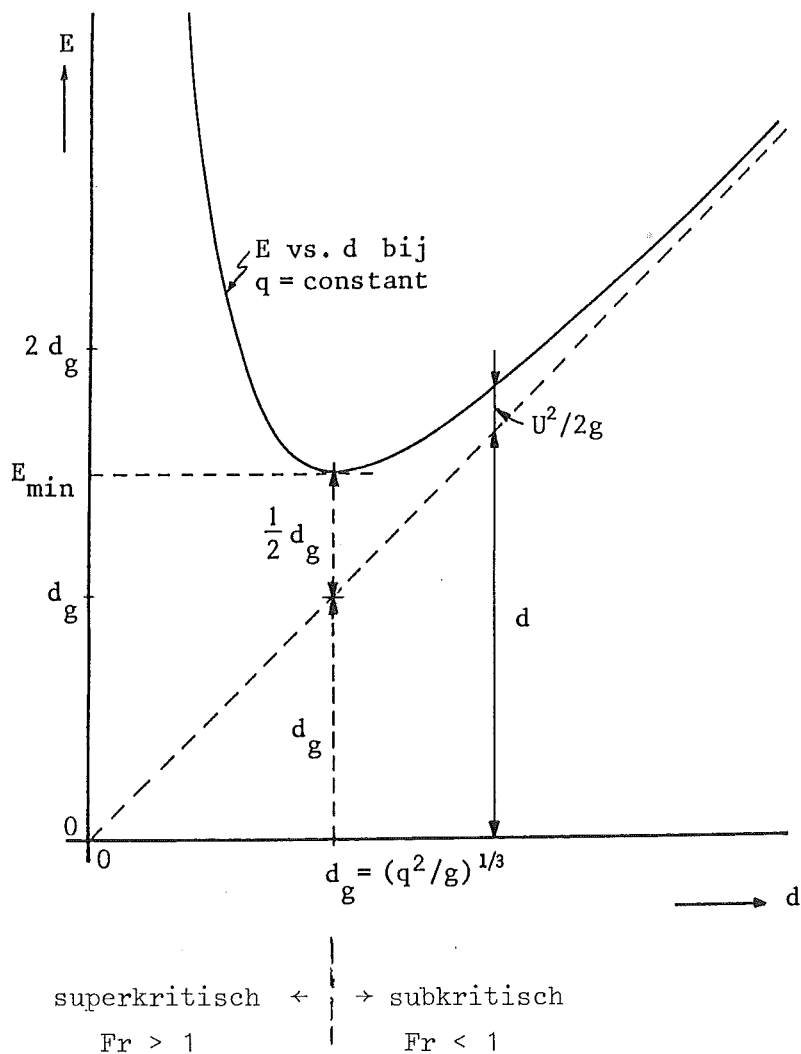
$$E = d + \frac{q^2}{2gd^2} \quad (9.6)$$

De variatie van E met d bij constante q is getekend in Fig. 9.3. Deze kromme geldt voor één waarde van q. Voor verschillende waarden van q ontstaat een familie van onderling gelijkvormige krommen, elk voor een constante q.

Evenals F heeft E (en dus ook H en P) een minimum bij een zekere diepte. De afgeleide van E naar d bij constante q is

$$\frac{dE}{dd} = 1 - \frac{q^2}{gd^3} = 1 - Fr^2 \quad (9.7)$$

Het minimum van E (en van H en van P) treedt dus op voor  $Fr = 1$ ; de bijbehorende diepte is  $(q^2/g)^{1/3}$ ; dit zijn dezelfde waarden als in het geval van de minimale impulsoverdracht.



Figuur 9.3 Energiehoogte (E) versus diepte (d) bij constante afvoer (q)

We zien dat bij gegeven debiet (q) en energie-overdracht (P) respectievelijk energiehoogte (H of E) parallelle stroming mogelijk is bij twee verschillende diepten, evenals in het geval van gegeven debiet en impulsoverdracht.

#### 9.4 Kritische stroming

In het bovenstaande is bewezen dat de impulsoverdracht en de energieoverdracht beide een minimum hebben voor  $Fr = 1$ . Wanneer dit zich voordoet spreken we van **kritische stroming**. De bijbehorende diepte heet de **kritische diepte** of de **grensdiepte** ( $d_g$ ):

$$d_g = (q^2/g)^{\frac{1}{3}} \quad (9.8)$$

Omdat  $Fr = 1$  bij kritische stroming geldt  $U_g = \sqrt{gd_g}$ . De snelheidshoogte is dan de helft van de diepte. (Dit volgt ook direct uit 6.28.) De bijbehorende (minimum)waarden van F respectievelijk E zijn

$$F_{\min} = \frac{3}{2}\rho g d_g^2 \quad (9.9)$$

en

$$E_{\min} = \frac{3}{2}d_g \quad (9.10)$$

Wanneer  $Fr < 1$  spreken we van **subkritische stroming**; daarbij is  $d > d_g$  en  $U^2/2g < \frac{1}{2}d$  (Fig. 9.3). Wanneer  $Fr > 1$  spreken we van **superkritische stroming** (of schietend water); daarbij is  $d < d_g$  en  $U^2/2g > \frac{1}{2}d$  (Fig. 9.3).

De stroming in natuurlijk waterlopen is meestal subkritisch, behalve in steile bergbeken en bij plaatselijke overstorten etc. In de Nederlandse rivieren bijv. zijn  $U = 1$  m/s en  $d = 5$  m representatieve waarden; daarbij is  $Fr \approx 0,14$ , dus ver onder de kritische waarde.

#### 9.5 Toepassingen

In de hierna te geven toepassingen wordt de stroom stationair en tweedimensionaal verondersteld, tenzij anders vermeld. Omdat in alle gevallen slechts een kort traject wordt behandeld waarin de stroming snel verandert is de wandwrijving (schuifspanning) verwaarloosbaar. Is de stroming daarbij versnellend dan zijn de energieverliezen, die ook in het inwendige kunnen optreden, over dat korte traject eveneens verwaarloosbaar; bij sterk vertragende stromen zal dat niet het geval zijn.

(1) Stroming onder schuif

Gegeven: debiet p.e.v. breedte ( $q$ ) en de hoogte van de opening onder de schuif ( $a$ ) (Fig. 9.4a). Aan benedenstroomse zijde is vrije afstroming mogelijk; voor de diepte  $d_2$  geldt  $d_2 = \mu a$  waarin  $\mu$  de contractiecoëfficiënt is die we op 0,65 stellen.

Gevraagd: de diepte bovenstrooms van de schuif ( $d_1$ ) en de waarde van de horizontale kracht p.e.v. breedte door het water op de schuif uitgeoefend ( $K$ ).

Balansgebied: tussen doorgangen 1 en 2 (Fig. 9.4a). Dit is een kort versnellingsgebied, dus energieverliezen zijn verwaarloosbaar.

Balansvergelijkingen:

$$q_1 - q_2 = 0 \quad (\text{volume})$$

$$P_1 - P_2 = 0 \quad (\text{energie})$$

$$F_1 - F_2 = K \quad (\text{impuls})$$

ofwel

$$U_1 d_1 = U_2 d_2 = q \quad (9.11a)$$

$$E_1 = d_1 + \frac{q^2}{2gd_1} = E_2 = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2} \quad (9.11b)$$

$$\frac{1}{2}\rho g d_1^2 + \rho q^2/d_1 - (\frac{1}{2}\rho g d_2^2 + \rho q^2/d_2) = K \quad (9.11c)$$

Dit zijn zes vergelijkingen in acht variabelen ( $\rho$  en  $g$  zijn gegeven constanten). Wanneer twee hiervan zijn gegeven (in dit voorbeeld waren dat  $q$  en  $d_2$ ) zijn de overige bepaald.

De oplossing kan in dit geval analytisch worden uitgewerkt. Uit (9.11b) volgt

$$\frac{d_1^2 d_2^2}{\frac{1}{2}(d_1 + d_2)} = \frac{q^2}{g} \quad (= d^3) \quad (9.12)$$

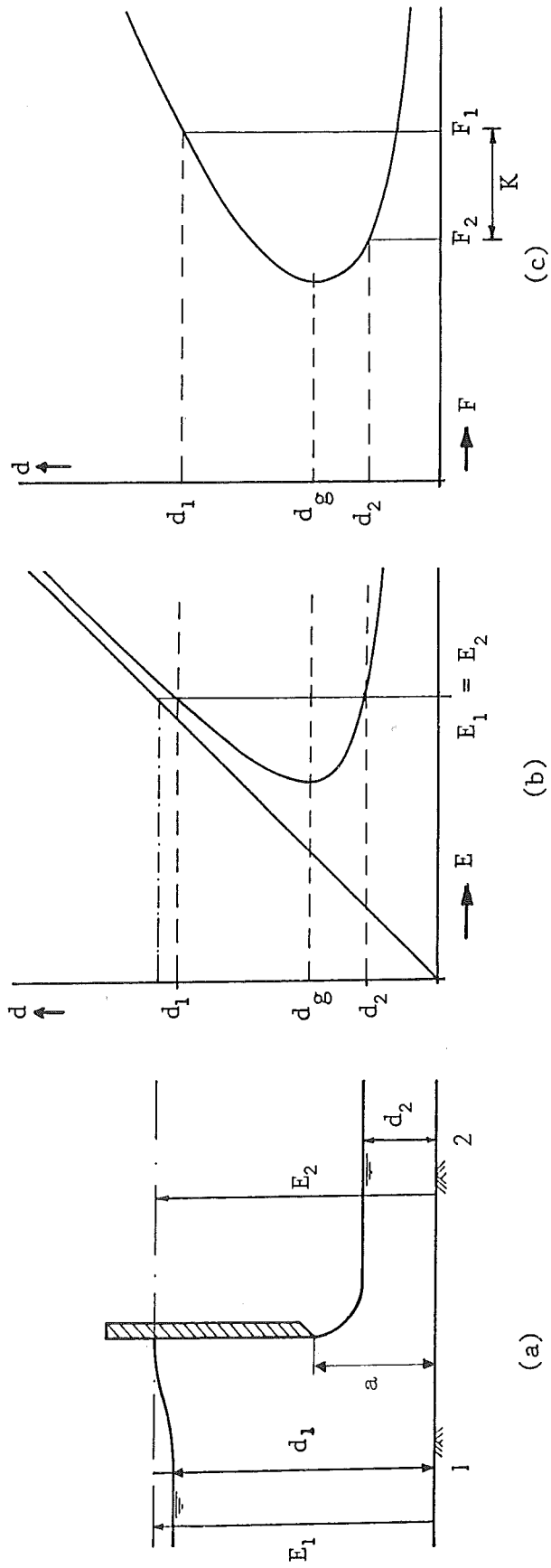


Figure 9.4

Bij gegeven  $q$  en  $d_2$  (of  $d_1$ ) is dit een vierkantsvergelijking in  $d_1$  (of  $d_2$ ) waaruit de oplossing voor  $d_1$  (of  $d_2$ ) kan worden bepaald.

Substitutie van (9.12) in (9.11c) geeft na enig herleiden

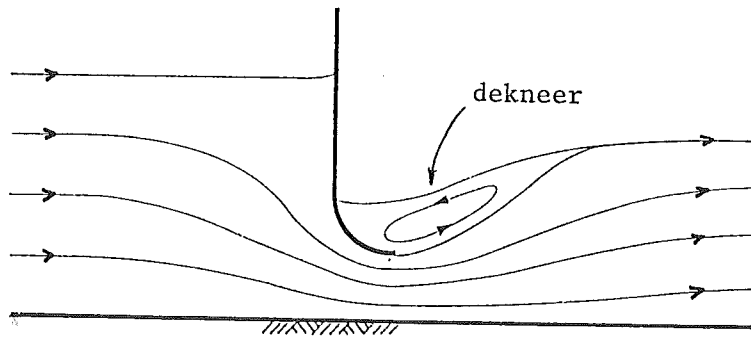
$$K = \frac{1}{2}\rho g \frac{(d_1 - d_2)^3}{d_1 + d_2} \quad (9.13)$$

De oplossing is grafisch toegelicht in Fig. 9.4.

De schuif veroorzaakt een overgang van subkritische naar superkritische stroming bij gelijkblijvende energie-overdracht ( $P$ ) en gelijkblijvende energiehoogte boven de bodem ( $E$ ) (Fig. 9.4b). De impuls-overdracht ( $F$ ) kan daarbij niet dezelfde waarde hebben aan weerszijden van de schuif; het verschil ( $K$ ) wordt door de schuif opgenomen (Fig. 9.4c).

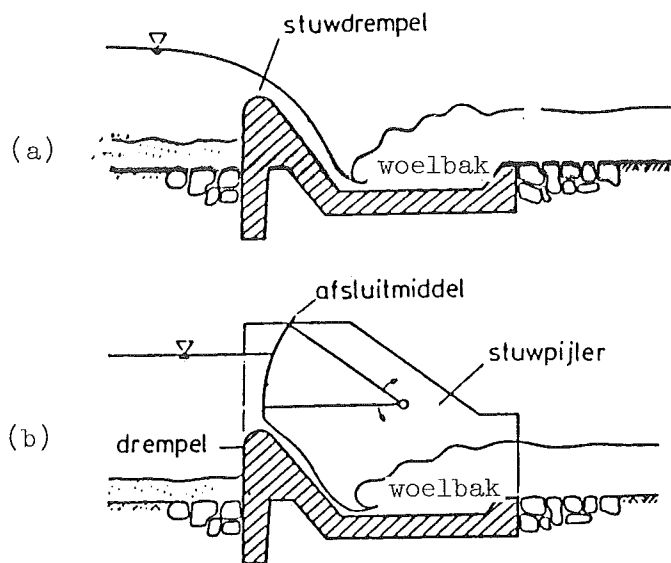
N.B.: In de afleiding zijn we uitgegaan van een versnellende stroom: bovenstroomse diepte ( $d_1$ ) groter dan benedenstroomse diepte ( $d_2$ ). Algebraïsch laat (9.12) echter ook het tegengestelde toe: stroming van de kleinste naar de grootste diepte. Dit zou een tekenwisseling van de snelheden inhouden. In het stelsel (9.11) zou dat niet merkbaar zijn, maar in dat geval zou de stroming vertragend zijn i.p.v. versnellend, en de ervaring leert dat het energieverlies dan niet verwaarloosd mag worden. Daardoor is de stroming in werkelijkheid ondubbelzinnig bepaald. (We weten so wie so uit ervaring dat bij het beeld in Fig. 9.4a een stroming van rechts naar links niet mogelijk is.)

In dit voorbeeld is aan de benedenstroomse sprake van vrije, superkritische uitstroming. Meestal wordt op enige afstand benedenstrooms van de schuif (of een andere constructie die superkritische stroming veroorzaakt) de stroming abrupt subkritisch in een z.g. watersprong (zie volgend voorbeeld). Bij voldoende hoge waterstand aan benedenstroomse zijde komt de watersprong tegen de schuif aan te liggen (z.g. "verdrongen watersprong"), zoals geschetst in Fig. 9.5. De stroming is dan subkritisch aan weerszijden van de schuif. In veel gevallen wordt de plaats van de watersprong gefixeerd in een z.g. woelbak die dan een



Figuur 9.5 Stroming onder schuif

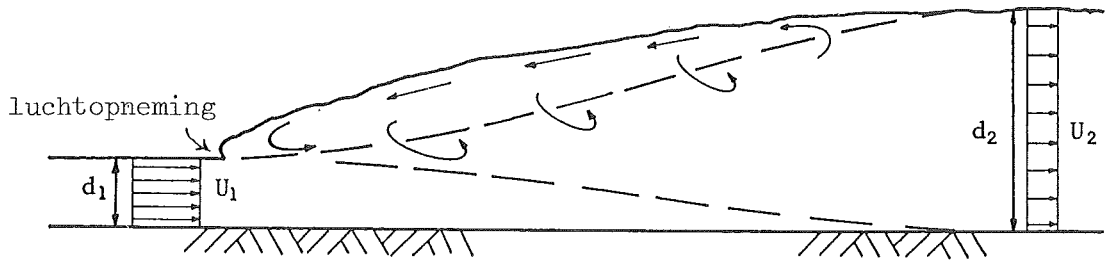
integraal deel vormt van de gehele constructie (zie Fig. 9.6 voor een voorbeeld).



Figuur 9.6 Stuw met woelbak; (a): vaste stuw; (b): beweegbare stuw

## (2) Stationaire watersprong

In tegenstelling tot het voorgaande behandelen we nu de overgang van superkritische naar subkritische stroming; deze overgang vindt altijd abrupt plaats, in de vorm van een z.g. watersprong (Fig. 9.7) (Engels: "hydraulic jump"). In een watersprong vindt een vrij sterke vertraging en lucht opneming plaats, samengaan met intensieve wervelingen en een niet te verwaarlozen energieverlies. Daarbij blijft de impuls behouden. Hieruit is een betrekking af te leiden tussen de diepten aan weerszijden ( $d_1$  en  $d_2$ ) en het (constante) debiet p.e.v. breedte ( $q$ ). Vervolgens kan uit de energiebalans het energieverlies in de watersprong worden berekend.



Figuur 9.7

We gaan uit van een horizontale bodem en een verwaarloosbare bodemweerstand over het relatief korte traject tussen de doorsneden 1 en 2 aan weerszijden van de sprong, waar de stroomlijnen (nog juist of net weer) vrijwel recht zijn (Fig. 9.7 of 9.8a). (N.B.: de watersprong is in Fig. 9.8a slechts schetsmatig en niet op schaal weergegeven.)

Balansvergelijkingen:

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= 0 && \text{(volume)} \\ F_1 - F_2 &= 0 && \text{(impuls)} \\ P_1 - P_2 &= \Delta P_v && \text{(energie)} \end{aligned}$$

ofwel

$$U_1 d_1 = U_2 d_2 = q \quad (9.14a)$$

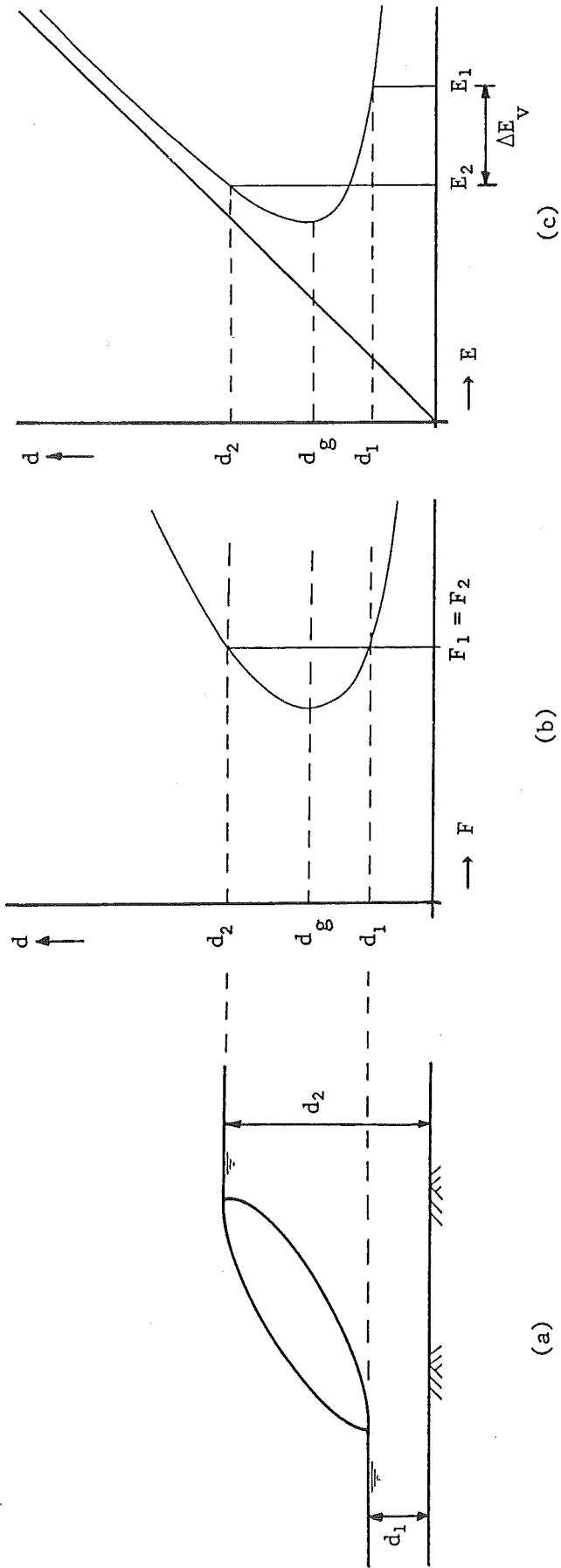
$$\frac{1}{2} \rho g d_1^2 + \rho q^2 / d_1 = \frac{1}{2} \rho g d_2^2 + \rho q^2 / d_2 \quad (9.14b)$$

$$\frac{\Delta P_v}{\rho g q} = E_1 - E_2 = d_1 + \frac{q^2}{2gd_1} - \left( d_2 + \frac{q^2}{2gd_2} \right) \quad (9.14c)$$

Voor het aantal onbekenden en variabelen in dit stelsel geldt hetzelfde als wat hierboven in het geval van de stroming onder de schuif is gezegd. Ook hier zijn bij gegeven  $\rho$  en  $g$  slechts twee onafhankelijk variabelen, bv.  $d_1$  en  $d_2$ , of  $d_1$  en  $q$ , of  $d_1$  en  $Fr_1 (= U_1 / \sqrt{gd_1})$ .

Ook hier is een expliciete analytische oplossing mogelijk. Uit (9.14b) volgt





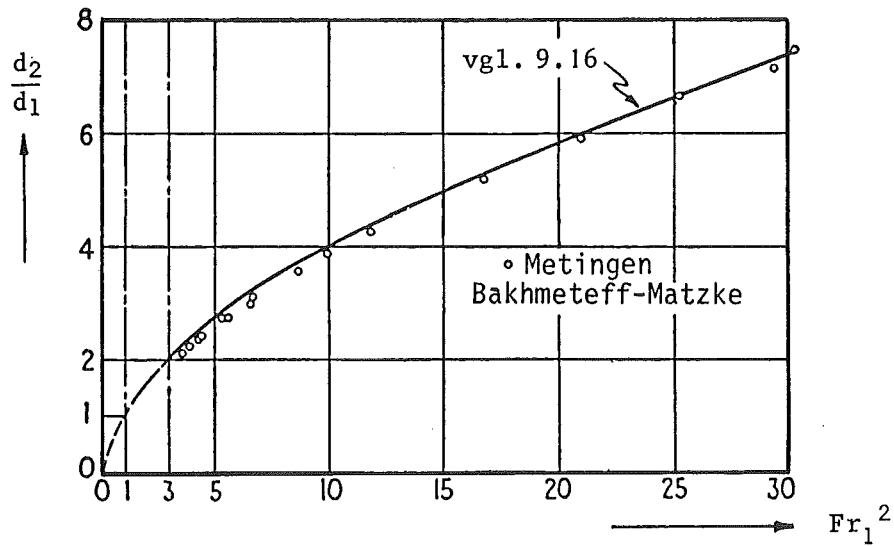
Figuur 9.8

$$\frac{d_1 + d_2}{2} d_1 d_2 = \frac{q^2}{g} \quad (= d^3) \quad (9.15)$$

Bij gegeven waarde van  $q$  en  $d_1$  (of  $d_2$ ) is  $d_2$  (of  $d_1$ ) uit deze vierkantsvergelijking te berekenen; voor de verhouding  $d_2/d_1$  is het resultaat

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} [(1 + 8 Fr_1^2)^{\frac{1}{2}} - 1] \quad (9.16)$$

Een vergelijking van (9.16) met meetwaarden is gegeven in Fig. 9.9. De overeenstemming tussen theorie en meetresultaat is goed.



Figuur 9.9

De twee diepten die – bij gegeven  $q$  – volgens (9.15) ofwel (9.16) van elkaar afhangen worden elkaars geconjugeerde genoemd.

Substitutie van (9.15) in (9.14c) geeft na enig herleiden

$$\Delta P_v = \frac{1}{4} \rho g \left[ \frac{g(d_1 + d_2)}{2d_1 d_2} \right]^{\frac{1}{2}} (d_2 - d_1)^3 \quad (9.17)$$

en

$$\Delta H_v = \Delta E_v = E_1 - E_2 = \frac{(d_2 - d_1)^3}{4d_1d_2} \quad (9.18)$$

De oplossing is grafisch toegelicht in Fig. 9.8.

De watersprong vormt een abrupte overgang van superkritische naar subkritische stroming bij gelijkblijvende impulsoverdracht (F) (Fig. 9.8b). De energie-overdracht (P) kan daarbij niet dezelfde waarde hebben aan weerszijden van de sprong; het verschil wordt gedissipeerd (Fig. 9.8c).

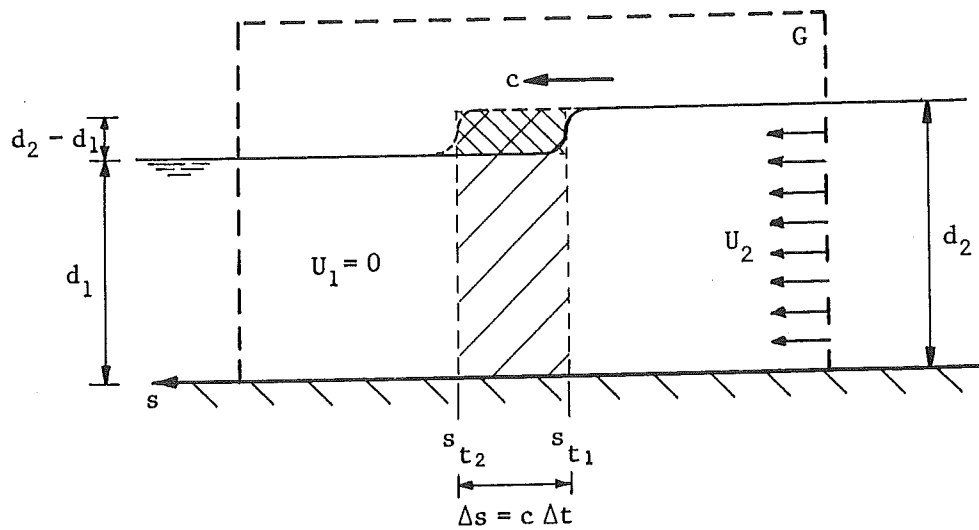
N.B.: Een eventuele tekenwisseling van de snelheden (stroming van grotere naar kleinere diepte) zou in de vergelijkingen voor het behoud van volume (9.14a) en van impuls (9.14b) niet merkbaar zijn maar in de energiebalans (9.14c) wèl. In dat geval zou  $\Delta P_v$  nl. negatief worden (want dan zou  $d_1 > d_2$  zijn), d.w.z. het doorgevoerde vermogen van de stroom zou toenemen bij het passeren van de sprong. Dat is niet mogelijk. Daardoor is de oplossing ondubbelzinnig: van superkritisch overgaand in subkritisch (vertragend).

### (3) Lopende watersprong

Zoals hierboven is opgemerkt wordt de plaats van de watersprong bij een waterloopkundige constructie meestal gefixeerd. Lopende watersprongen komen ook voor. Zo zijn er in de wereld enkele baaien of estuaria met een sterk getij waar zich bij elk opkomend water een (spectaculaire) lopende watersprong vormt (een z.g. vloedsprong; Engels: "tidal bore"). Bekende voorbeelden zijn de vloedsprongen in de estuaria van de Severn (Engeland) en van de Qiang Tang (China).

Uitgaande van een sprong die zonder vormverandering en met constante snelheid een gebied inloopt met stilstaand water, zullen we de waarde van de loopsnelheid (c) berekenen. Dit gebeurt in principe op dezelfde manier als de berekening van de snelheid van een schokgolf in een één-dimensionale compressibele stroming (par. 8.7). De watersprong wordt als een discontinuïteit behandeld (zie ook Fig. 5.3). Vóór de sprong is  $U = U_1 = 0$  en  $d = \text{constant} = d_1$ ; achter de sprong is  $U = \text{constant} = U_2$  en  $d = \text{constant} = d_2$ . De massadichtheid stellen we in het hele gebied constant.

We kiezen een balansgebied dat gedurende een zekere tijd de sprong bevat en stellen daarvoor balansen op van massa en impuls voor een tijdsinterval van  $t_1$  tot  $t_2 = t_1 + \Delta t$  (zie Fig. 9.10).



Figuur 9.10

Massabalans (berging = netto overdracht naar binnen):

$$\rho(d_2 - d_1)\Delta s = \rho U_2 d_2 \Delta t$$

Impulsbalans (idem)

$$\rho U_2 d_2 \Delta s = (F_2 - F_1)\Delta t$$

waarin

$$F_1 = \frac{1}{2} \rho g d_1^2 \quad \text{en} \quad F_2 = \frac{1}{2} \rho g d_2^2 + \rho U_2^2 d_2$$

Substitutie van  $\Delta s = c \Delta t$  en uitwerken geeft

$$c^2 = g \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{d_2}{d_1} \quad (9.19)$$

Dit resultaat had ook kunnen worden afgeleid uit de uitkomsten voor de stilstaande sprong, door een transformatie van het referentiestelsel. De z.g. "stilstaande" sprong (zie vorig voorbeeld) is beschreven in een

assenstelsel ten opzichte waarvan het water bovenstrooms een (superkritische) snelheid  $U_1$  heeft. In een met dit water meebewegend assenstelsel zien we een lopende sprong die een gebied met stilstaand water inloopt met een snelheid ( $c$ ) gelijk aan  $U_1 = q/d_1$  uit de stationaire oplossing. Substitutie van (9.15) geeft

$$c = \frac{q}{d_1} = \left[ g \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{d_2}{d_1} \right]^{1/2}$$

ofwel hetzelfde resultaat als (9.19).

Voor een lage sprong ( $d_2 \approx d_1 = d$ ) geldt de benadering

$$\boxed{c = (gd)^{1/2}} \quad (9.20)$$

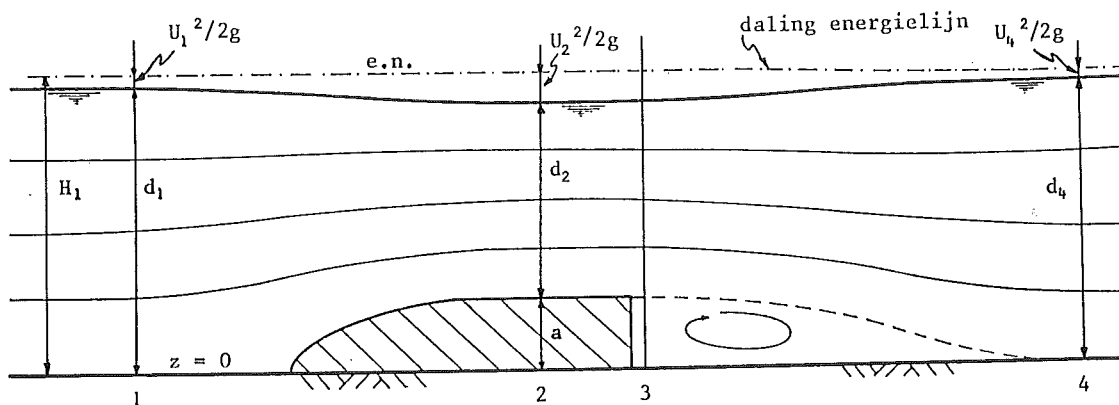
Dit is de voortplantingssnelheid (ten opzichte van het water bovenstrooms) van een lage storing in open water. Hiermee is bewezen dat het kental van Froude voor de stroom in een open waterloop de betekenis heeft van verhouding van stroomsnelheid tot golfvoortplantingssnelheid ( $Fr = U/\sqrt{gd} = U/c$ ), zoals het kental van Mach die betekenis heeft voor compressibele stromen.

In een subkritische stroming ( $Fr < 1$ ) is  $U < c$ ; een storing hierin kan zich in bovenstroomse richting voortplanten. In superkritische stroming ( $Fr > 1$ ) is dat echter niet mogelijk (voor een lage storing) omdat daar  $U > c$ . Hierin ligt de wezenlijke betekenis van het onderscheid tussen beide typen stroming.

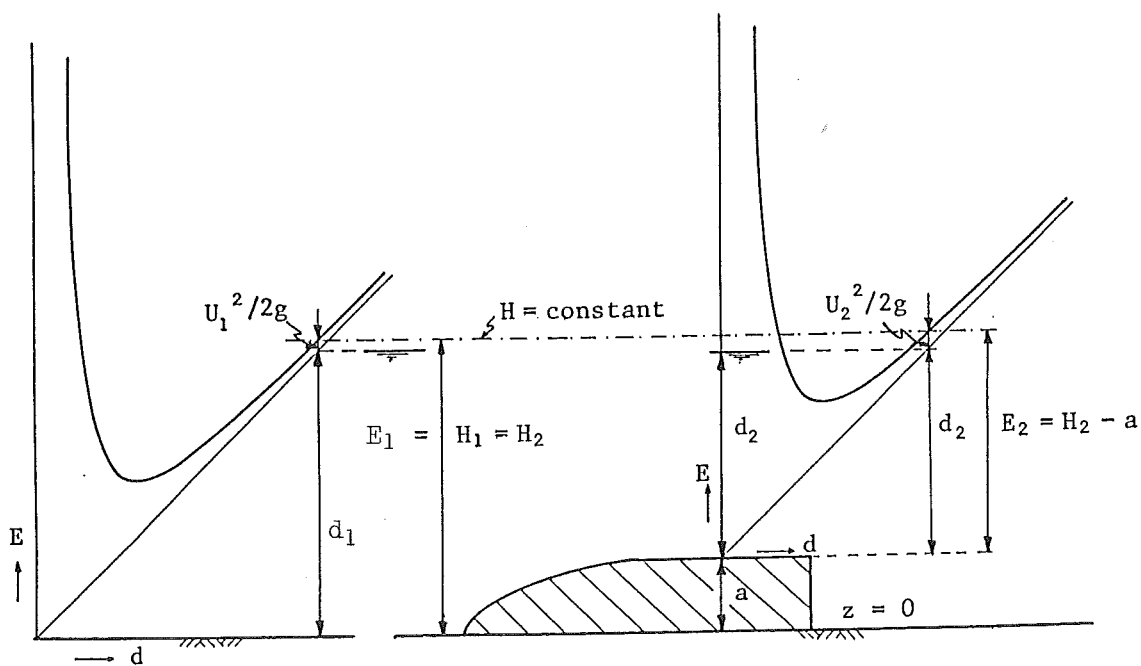
#### (4) Overlaten

Als laatste toepassing behandelen we opnieuw de stroming over een z.g. lange overlaat, waarbij het nu vooral gaat om het al dan niet voorkomen van kritische stroom.

Tussen de doorgangen 1 en 2 (Fig. 9.11a) ligt een kort versnellingsgebied waarin de energieverliezen te verwaarlozen zijn, zodat



(a)



(b)

Figuur 9.11 Lange overlaat met onvolkomen afvoer

$$H_1 = H_2 \quad \text{ofwel}$$

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^3} = a + d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^3} \quad (9.21)$$

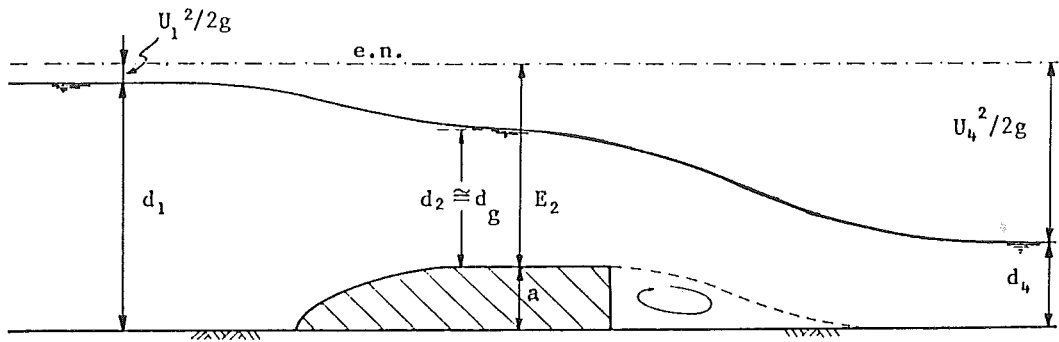
Uit deze betrekking tussen  $d_1$ ,  $d_2$  en  $q$  is één van deze grootheden te berekenen wanneer de twee andere gegeven zijn ( $a$  en  $g$  worden bekend verondersteld).

Voor het geval van subkritische stroming in het hele gebied, zoals getekend in Fig. 9.11a, is de oplossing grafisch geïllustreerd in Fig. 9.11b met behulp van het E-d diagram. Ondanks het feit dat  $H_1 = H_2$  geldt hier niet  $E_1 = E_2$  omdat  $z_{b_1} \neq z_{b_2}$ . Daarom zijn er twee E-d diagrammen getekend, één voor doorsnede 1 met  $E = 0$  in de bodem van het kanaal, en één voor doorsnede 2 met  $E = 0$  in de kruin van de overlaat (voor dezelfde  $q$ , dus met dezelfde waarde van  $d_g$ ).

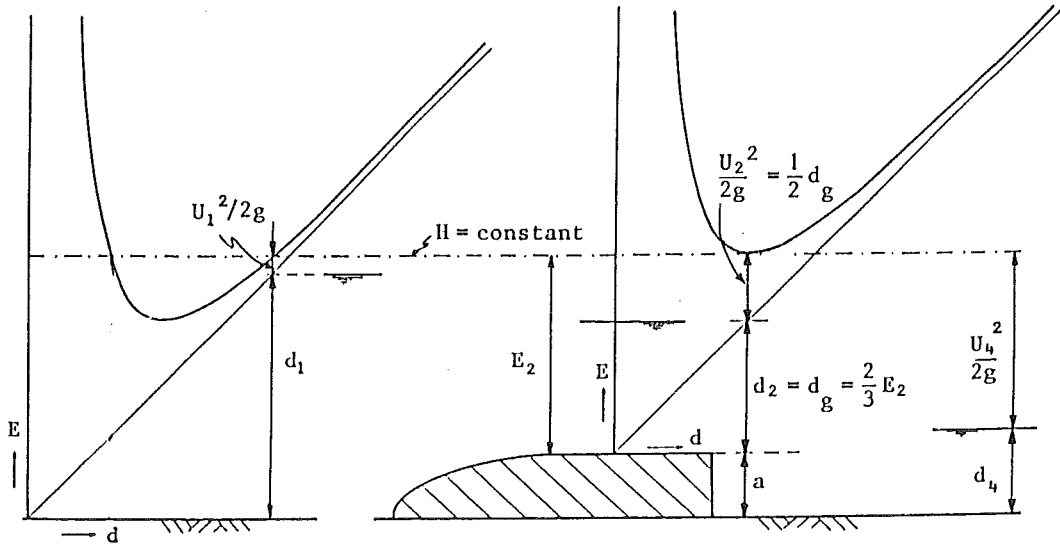
We gaan nu na wat er gebeurt wanneer bij gelijkblijvend energieniveau bovenstrooms (bijvoorbeeld bij stroming vanuit een diep reservoir) de benedenstroomse waterstand iets wordt verlaagd en daarna weer constant wordt gehouden. Omdat in de beschouwde situatie de stroming overal subkritisch is, ook boven de overlaat (zie Fig. 9.11b), kan deze verlaging zich in bovenstroomse richting voortplanten. Daarmee neemt  $d_2$  af. Het debiet  $q$  neemt daardoor toe totdat de nieuwe stationaire situatie zich heeft ingesteld waarvoor vergelijking (9.21) geldt. In deze situatie heeft de benedenstroomse waterstand dus invloed op het debiet. We spreken hierbij van een onvolkomen afvoer.

Wanneer de benedenstroomse waterstand steeds verder wordt verlaagd zal aanvankelijk de diepte boven de overlaat ( $d_2$ ) blijven afnemen, en dus ook de voortplantingssnelheid  $c_2 = (gd_2)^{\frac{1}{2}}$ . Doordat tegelijk  $q$  toeneemt neemt  $U_2 = q/d_2$  in sterkere mate toe, en het kental van Froude  $Fr_2 = U_2/c_2$  in nog sterkere mate, totdat dit de waarde één bereikt ( $Fr_2 = 1$ ) en de stroming boven de overlaat kritisch wordt. Een verdergaande verlaging van de benedenstroomse waterstand kan zich dan niet in stroomopwaartse richting voortplanten. De stroming boven de overlaat en bovenstrooms daarvan is daardoor niet meer afhankelijk van de benedenstroomse waterstand. We spreken in deze gevallen van een z.g. volkomen afvoer (zie Fig. 9.12). De stroming boven de overlaat is dan kritisch, waarbij

$$d_2 = d_g = \frac{2}{3}E_2$$



(a)



(b)

Figuur 9.12

en

$$\frac{U_2^2}{2g} = \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{3}E_2$$

Voor de afvoer geldt dan

$$q = \frac{2}{3}E_k \sqrt{\frac{2}{3}gE_k} \quad \left( = 1.70 \text{ m}^{1/2}/\text{s} E_k^{3/2} \right) \quad (9.22)$$

waarin

$$E_k = H - a$$



In deze uitdrukkingen is het subscript "2" vervangen door "k" voor "kruin", om te herinneren aan het gebruik van de kruin als referentieniveau.

In het bovenstaande is de aankomende stroom subkritisch ( $Fr < 1$ ), zoals meestal het geval is. Daarvoor resulteert een vermindering van  $E$  (zoals tussen de doorgangen 1 en 2) in een vermindering van de diepte (zie het  $E$ - $d$  diagram, of vergelijking 9.7) en dus in een versnelling van de stroom. Voor een superkritische stroming geldt het tegendeel. Als bovenstrooms van de overlaat de stroom superkritisch is dan treedt tussen 1 en 2 een vertraging op van de stroom en een stijging van de waterspiegel.

Overlaten komen o.a. voor tijdens de uitvoering van afsluitingen, bv. van een getijgeul. Door opbouw van een drempel over de volle breedte wordt het stroomprofiel verkleind en neemt het verval toe, evenals de lokale snelheden. Zodra de stroming boven de overlaat kritisch is geworden nemen de snelheden weer af met toenemende kruinhoogte (bij een zelfde buitenwaterstand). Het materiaal waaruit de drempel wordt opgebouwd kan qua stroombestendigheid worden gekozen voor de condities waarbij de stroming juist kritisch wordt.

In irrigatiesystemen komen permanent geïnstalleerde overlaten voor die worden gebruikt voor debietmetingen. Toepassing met onvolkomen afvoer heeft daarbij het voordeel van een gering energieverlies, tegenover de nadelen van de noodzaak van twee peilregistraties en een geringe nauwkeurigheid. Bij volkomen afvoer treedt meer energieverlies op maar daarbij is één peil voldoende voor bepaling van het debiet, en is een hoge(re) nauwkeurigheid te bereiken.

Voor debietmetingen worden vaak z.g. korte overlaten gebruikt, i.h.b. met een scherpe kruin. Daarbij zijn de stroomlijnen boven de kruin significant gekromd, en is het piëzometrisch niveau pal boven de kruin lager dan het niveau van de waterspiegel er boven (zie Fig. 6.6c voor een korte overlaat met ronde respectievelijk scherpe kruin). De stroomsnelheden zijn daardoor groter dan zij zouden zijn boven een lange overlaat. Voor het debiet geldt hetzelfde. Dit wordt in rekening

gebracht door het rechterlid van (9.23) te vermenigvuldigen met een empirisch te bepalen afvoercoëfficiënt ( $m$ ):

$$q = m \frac{2}{3} E_k \sqrt{\frac{2}{3} g E_k} \quad (9.23)$$

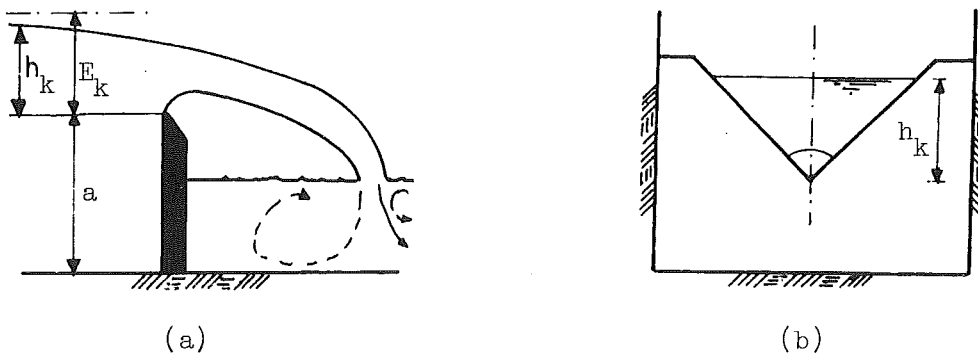
Voor de Rehbock-stuw met hoogte  $a$  (Fig. 9.13a) en met beluchte straal is  $m$  slechts afhankelijk van  $E_k/a$ . Deze verhouding is ook bepalend voor de verhouding  $h_k/a$  (zie par. 6.8), zodat we in plaats van (9.23) kunnen schrijven

$$q = m' \frac{2}{3} h_k \sqrt{\frac{2}{3} g h_k} \quad (9.24)$$

waarin  $m' = f(h_k/a)$ , bij benadering gegeven door

$$m' = 1.045 + 0.141 \frac{h_k + 0.11 \text{ cm}}{a} \quad (9.25)$$

Hierin moet  $h_k$  gemeten worden op een afstand  $2a$  bovenstrooms van de stuw.



Figuur 9.13 Rehbockstuw (a) en V-stuw of Thomson-stuw (b)

Wanneer relatief kleine debieten nauwkeurig gemeten moeten worden heeft het voordelen de stroming ook zijdelings te vernauwen, en wel zó dat de breedte van het doorstroomprofiel afneemt met afnemend debiet. Een voorbeeld daarvan is de V-stuw (Thomson stuw), getekend in Fig. 9.13b. Voor het (totale) debiet daaroverheen geldt

$$Q = m \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) g^{\frac{1}{2}} E_k^{\frac{5}{2}} \quad (9.26)$$

Meestal gebruikt men  $\theta = \pi/2$ ; daarvoor is  $m \approx 0.45$ .

Voor beschrijvingen van de vele typen meetstuw die zijn ontworpen en voor de daarbij horende afvoerformules en coëfficiënten wordt verwezen naar de desbetreffende boeken.

## 10. STROMING ROND EEN STAR LICHAAM

### 10.1 Inleiding

In dit hoofdstuk behandelen we de stroming rondom een lichaam of voorwerp, bijv. een deel van een waterbouwkundige constructie, zowel om inzicht te krijgen in het verschijnsel als om de kracht te kunnen berekenen die de vloeistof en het voorwerp op elkaar uitoefenen. Toepassingen in de civiele techniek waarin die krachtswisseling van belang is zijn bv.

- belasting van stroom en golven op offshore constructies;
- belasting van wind op (hoge) constructies;
- stromingsweerstand als gevolg van brugpijlers;
- stabiliteit en beweging van losse elementen (zandkorrel, betonblok) in stromend water.

Voor de wisselwerkingen tussen vloeistof en voorwerp is hun beweging t.o.v. elkaar van belang, en niet de eventuele beweging (of rust) van beide t.o.v. een andere referentie, bijv. de aarde. We maken hier daarom geen onderscheid tussen een "stilstaande" constructie in stromend water en een voorwerp dat door overigens "stilstaand" water beweegt. Voor beide categorieën gebruiken we een referentiestelsel dat vast aan het voorwerp is verbonden, zodat ten opzichte daarvan het voorwerp in rust is en alleen de vloeistof beweegt.

De component van de kracht van de vloeistof op het voorwerp in de richting van de relatieve stroomsnelheid is de z.g. sleepkracht ( $\vec{F}_w$ ) (Engels: drag force); die in de dwarsrichting is de z.g. liftkracht ( $\vec{F}_\rho$ ). (De sleepkracht kan ook worden gezien als een weerstand die het voorwerp en de vloeistof van elkaar ondervinden.)

We gaan uit van de volgende veronderstellingen:

- het lichaam of voorwerp is star en ondoorlatend;
- de massadichtheid en viscositeit van de vloeistof zijn constant;
- de vloeistof strekt zich in alle richtingen zover uit dat de stroming om het voorwerp geen invloed ondergaat van eventuele andere begrenzingen dan die van het beschouwde voorwerp;
- de stroming is stationair (in een referentiestelsel ten opzichte waarvan het voorwerp in rust is).

De twee laatstgenoemde veronderstellingen houden in dat de vloeistof-snelheid ( $\vec{u}$ ) op grote afstand van het voorwerp constant is in richting en grootte ( $u = \text{constant} = U$ ).

Omdat we afzien van de invloed van een eventuele vrije vloeistofspiegel kan de zwaartekracht buiten beschouwing blijven; we werken dan met de dynamische druk die we kortheidshalve met  $p$  weergeven (i.p.v.  $p_d$ ). In de ongestoorde stroming op grote afstand van het voorwerp is  $p$  constant (geen versnellingen).

Op grond van bovenstaande veronderstellingen is de stroming volledig bepaald door de volgende grootheden (zie ook par. 2.5):

- (dynamische) viscositeit ( $\eta$ )
- massadichtheid ( $\rho$ )
- ongestoorde snelheid ( $U$ )
- kenmerkende afmeting voorwerp ( $\ell$ )
- vorm en oriëntatie van het voorwerp

Uit de vier eerstgenoemden kan het dimensieloze kental van Reynolds worden geformeerd:

$$Re = \frac{\rho U \ell}{\eta} = \frac{U \ell}{\nu}$$

waarin  $\nu = \eta/\rho$ , de kinematische viscositeit. De vorm van het stroombeeld is hierbij uitsluitend een functie van  $Re$  en de vorm en oriëntatie van het voorwerp.

De viscositeit is van groot belang voor het stroombeeld dat zich vormt rondom een voorwerp, maar de precieze rol ervan is lang onbegrepen gebleven. Voorafgaand aan een behandeling daarvan geven we eerst een samenvatting van enkele eigenschappen van de stroming van een niet-viskeuze (ideale) vloeistof om een voorwerp.

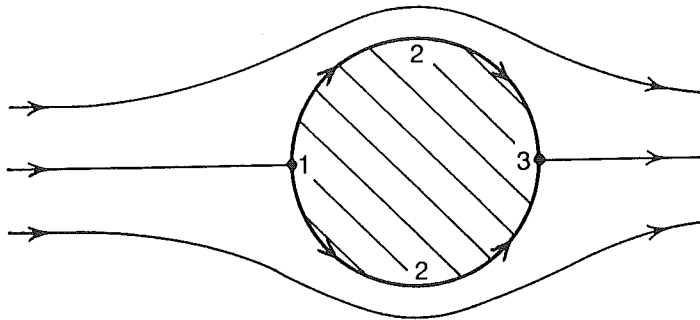
## 10.2 Ideale-vloeistof benadering

De beschouwde stroming is stationair en op grote afstand van het voorwerp ook uniform. In deze paragraaf gaan we bovendien uit van een ideale vloeistof; de stroming heeft dan een uniforme energie; het is een z.g. potentiaalstroming (zie par. 6.7).

In de idealisering van een niet-viskeuze vloeistof vervalt  $\eta$  als parameter, en  $Re$  dus ook. In dit geval is het stroombeeld dus slechts afhankelijk van de vorm en oriëntatie van het voorwerp, ongeacht de waarden van  $U$  en  $l$ .

In het grensvlak tussen het voorwerp en de vloeistof geldt voor de snelheid de randvoorwaarde dat de normaalcomponent ervan gelijk moet zijn aan nul ( $u_n = 0$ ) wegens de ondoorlatendheid en het stilstaan van het voorwerp. Voor een ideale vloeistof wordt aan de tangentiële component ( $u_t$ ) geen beperking opgelegd (slip is toegestaan).

Het stroombeeld van een potentiaalstroom rond een cirkelcilinder is getekend in Fig. 10.1. Een typerend kenmerk van zo'n potentiaalstroom



*Figuur 10.1 Stroombeeld potentiaalstroom rond cirkelcilinder*

is dat het stroombeeld omkeerbaar is: de oplossing voor de stroomlijnen en die voor de druk veranderen niet bij omkering van de stroomrichting (bij tekenwisseling van de snelheden). De stroming is symmetrisch t.o.v. een vlak haaks op de ongestoorde stroomrichting als het voorwerp dat ook is. In tegenstelling tot wat in de fysische werkelijkheid in veel gevallen wordt waargenomen laat de potentiaalstroom niet los van het voorwerp, maar blijft deze aanliggen vanaf het bovenstroomse stuwpunt (punt 1 in Fig. 10.1) tot aan een stuwpunt benedenstrooms (punt 3).

We gaan nu na hoe de dynamische druk  $p$  varieert langs de stroomlijn door de stuwpunten. We gebruiken daarvoor de wet van Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constant} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2$$

Langs de beschouwde stroomlijn neemt de dynamische druk bovenstrooms van het voorwerp in de stroomrichting toe tot aan het stuwpunt 1, waar  $u = 0$  en  $\Delta p = p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U^2$  (stuwdruk). Van dit punt tot aan de plaats van de grootste dwarsdoorsnede (2-2) versnelt de stroom tot snelheden groter dan  $U$  (bij een dwars aangestroomde cirkelcilinder tot  $2U$ ; zie Fig. 10.4a), waar dus een onderdruk heerst ( $\Delta p < 0$ ; bij een cirkelcilinder  $\Delta p = -\frac{3}{2}\rho U^2$ ). Voorbij de grootste dwarsdoorsnede vertraagt de stroom en neemt de druk toe, tot opnieuw de stuwdruk is bereikt ( $\Delta p = \frac{1}{2}\rho U^2$ ) in het benedenstroomse stuwpunt waar  $u = 0$ . Vandaar versnelt de stroom in stroomafwaartse richting tot deze asymptotisch weer de constante snelheid  $u = U$  bereikt, waar  $\Delta p = 0$ .

Bovenstaande ideale-vloeistof benadering leidt via  $p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constant}$  tot een volledig drukherstel aan de achterzijde. De bijbehorende drukkracht aan de achterzijde compenseert volledig die aan de voorzijde zodat in deze potentiaalbenadering de netto sleepkracht nul is ( $F_w = 0$ ). (Zie ook par. 8.7, pag. 109-110). Dit resultaat, dat in strijd is met de ervaring, staat bekend als de paradox van d'Alembert. De paradox is pas opgeheven met de onderkenning van de rol van de viscositeit.

### 10.3 Invloed viscositeit

Als gevolg van de viscositeit wordt stromingsenergie gedissipeerd (in warmte omgezet) in gebieden met snelheidsgradiënten. Daardoor neemt  $p + \frac{1}{2}\rho u^2$  af in de stroomrichting en is het stroombeeld niet omkeerbaar.

Een viskeuze vloeistof blijkt niet te kunnen slippen, in tegenstelling tot wat wordt gesteld voor een ideale vloeistof. De snelheid is een continue functie van de positie, zowel in de vloeistof zelf als in grensvlakken met andere materie. Ter plaatse van een stilstaande vaste wand geldt naast de voorwaarde van ondoorlatendheid (normaalcomponent  $u_n = 0$ ) daarom voor een echte vloeistof (viscositeit niet gelijk aan nul) de z.g. kleefconditie (tangentiële component  $u_t = 0$ ).

Als gevolg van de kleefconditie is het stroombeeld wezenlijk anders dan bij een niet-viskeuze vloeistof, hoe klein (relatief gezien) de viscositeit ook mag zijn, m.a.w., hoe groot  $Re$  ook mag zijn. Het stroombeeld

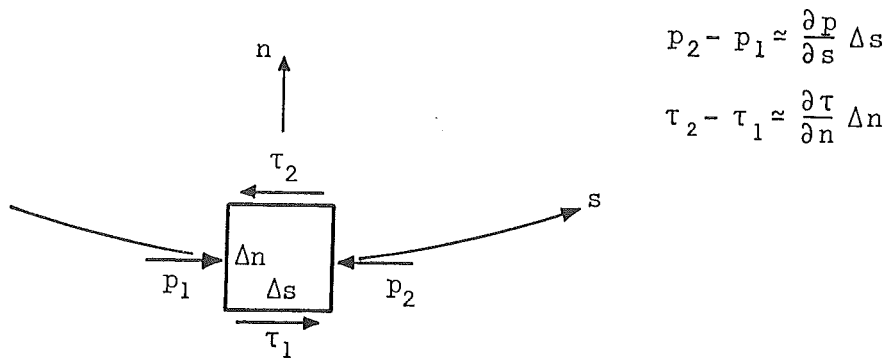
is in de limiet voor  $\eta \rightarrow 0$ ,  $Re \rightarrow \infty$  dus wezenlijk anders dan wanneer à priori  $\eta = 0$  wordt gesteld.

Als gevolg van de viscositeit is de sleepkracht ongelijk aan nul ( $F_w \neq 0$ ). Er is een directe bijdrage van de viscositeit aan  $F_w$  via de schuifspanning aan het oppervlak van het voorwerp ( $F_\tau$ ) en er is een indirecte bijdrage ( $F_p$ ) via de druk omdat  $p + \frac{1}{2}\rho u^2$  afneemt in de stroomrichting zodat er geen of geen volledig drukherstel is aan de achterzijde. In totaal geldt  $F_w = F_\tau + F_p$ .

Het relatieve belang van schuifkrachten en drukkrachten in de stroom is afhankelijk van de waarde van het kental van Reynolds. Om daarin inzicht te krijgen geven we een dynamische interpretatie van  $Re$ . Daartoe gaan we uit van de vergelijking van Euler in de stroomrichting (6.11s, 6.17a) waaraan we een viscositeitsterm toevoegen:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} = - \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial \tau}{\partial n} \quad (10.1)$$

Hierin is  $\tau$  de viskeuze schuifspanning ( $\tau = \eta \partial u / \partial n$ ) en  $-\partial \tau / \partial n$  de daaruit resulterende kracht p.e.v. volume (zie Fig. 10.2).



Figuur 10.2 Definitieschets

In de omgeving van het voorwerp, met kenmerkende afmeting  $\ell$ , heersen over afstanden van grootte-orde  $\ell$  snelheidsverschillen van grootte-orde  $U$ . De term  $\rho u \partial u / \partial s$  (traagheid p.e.v. volume) is dan van de grootte-orde  $\rho U^2 / \ell$  (notatie:  $\rho u \partial u / \partial s \sim \rho U^2 / \ell$ ). Voor  $\tau$  (schuifspanning) respectie-



velijk  $\partial\tau/\partial n$  (schuifkracht p.e.v. volume) geldt dan  $\tau \sim \eta U/\ell$  respectievelijk  $\partial\tau/\partial n \sim \eta U/\ell^2$ . De verhouding van de traagheid tot de schuifkracht is dan van de grootte-orde

$$\frac{\text{traagheid}}{\text{schuifkracht}} \sim \frac{\rho U^2/\ell}{\eta U/\ell^2} = \frac{\rho U \ell}{\eta} = \text{Re}$$

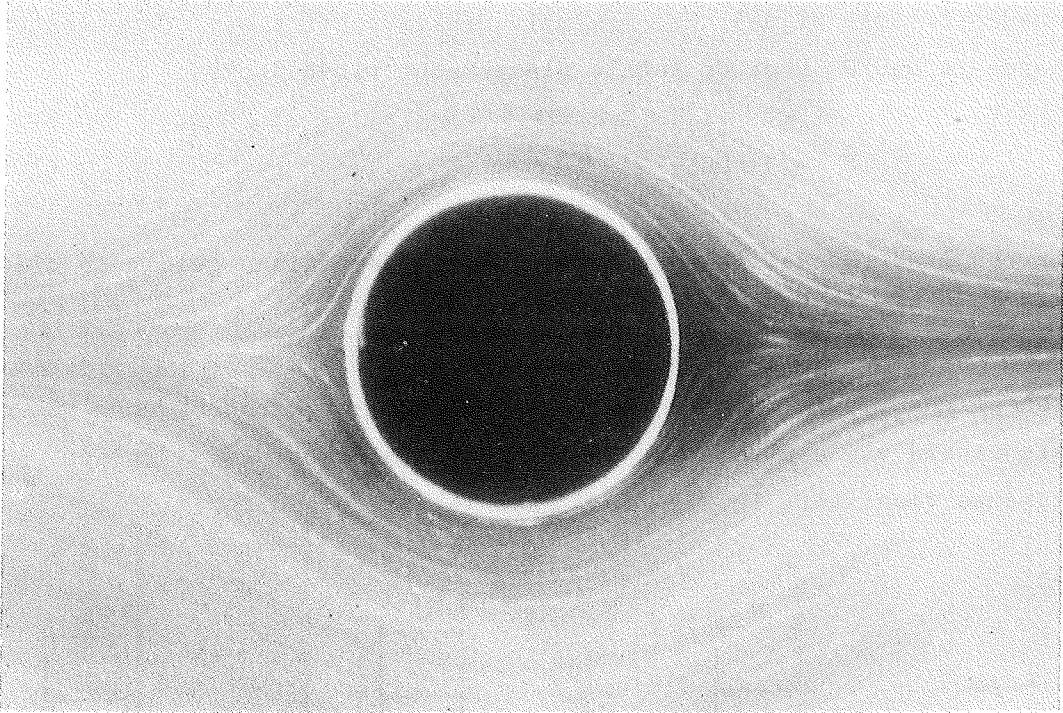
We zien hieruit de betekenis van Re voor de dynamica van de stroming. Als  $\text{Re} \ll 1$  is de traagheid verwaarloosbaar en (zie 10.1) is de drukgradiënt vrijwel in balans met de viscositeitsterm. Zulke stromen noemen we sterk-viskeus (denk aan een gletsjer). Als  $\text{Re} \gg 1$  is de lokale invloed van de viscositeit verwaarloosbaar in het gebied waar bovenstaande grootte-orde gelden, en is de drukgradiënt daar vrijwel in balans met de traagheidsterm (Bernoulli). We laten deze twee hoofdtypen achtereenvolgens de revue passeren.

#### 10.4 Sterk-viskeuze stroming ( $\text{Re} \ll 1$ )

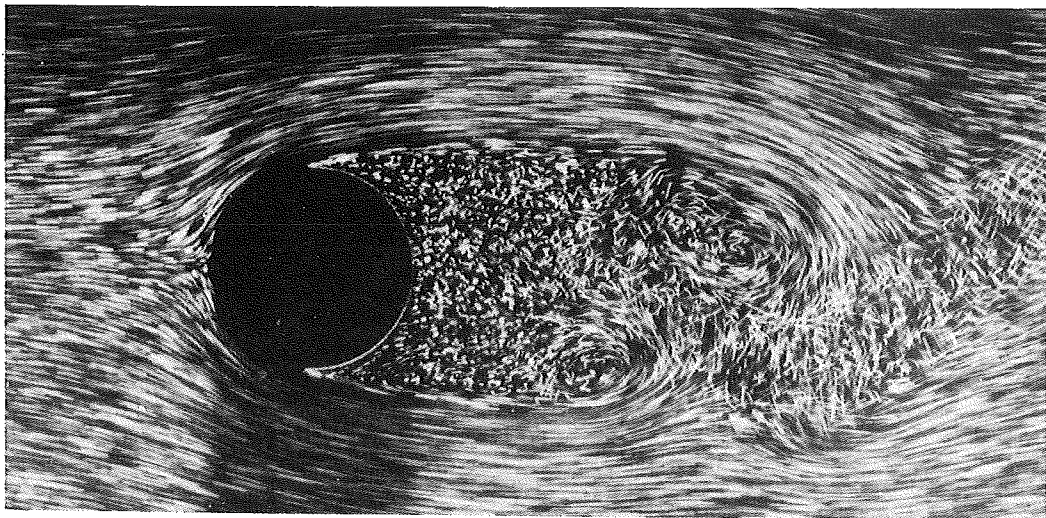
Fig. 10.3a geeft een voorbeeld van een sterk-viskeuze stroming rond een cirkelcilinder. De stroming blijft aanliggen. De variatie van de snelheid met de afstand uit de wand is voor de grootste dwarsdoorsnede geschetst in Fig. 10.4b. De snelheid neemt geleidelijk toe van de waarde  $u = 0$  aan de wand (kleefconditie) tot  $u \approx U$  op een afstand van enkele diameters daarvan (voor een willekeurig voorwerp: enkele malen de kenmerkende afmeting  $\ell$ ). De schuifspanningen in dit gebied zijn daarom van de orde  $\eta U/\ell$ . Hetzelfde geldt voor de drukvariaties want  $\partial p/\partial s$  en  $\partial\tau/\partial n$  maken (bijna) evenwicht als  $\text{Re} \ll 1$ . De respectievelijke bijdragen aan de sleepkracht op het voorwerp zijn in grootte-orde dan gegeven door  $F_\tau \sim \tau \ell^2 \sim \eta \ell U$  respectievelijk  $F_p \sim \Delta p \ell^2 \sim \eta \ell U$ , zodat ook  $F_w = F_\tau + F_p \sim \eta \ell U$ . Met de invoering van een dimensieloze coëfficiënt  $\gamma$  kunnen we dit schrijven als

$$F_w = \gamma \eta \ell U \tag{10.2}$$

Deze coëfficiënt  $\gamma$  is slechts afhankelijk van de vorm en oriëntatie van het voorwerp. Merk op dat de massadichtheid hierin niet voorkomt: de traagheid is verwaarloosd omdat  $\text{Re} \ll 1$ .



*Figuur 10.3 (a) Strooming van links naar rechts om  
cirkelcilinder bij  $Re = 0,16$*



*Figuur 10.3 (b) Strooming van links naar rechts om  
cirkelcilinder bij  $Re = 2000$*

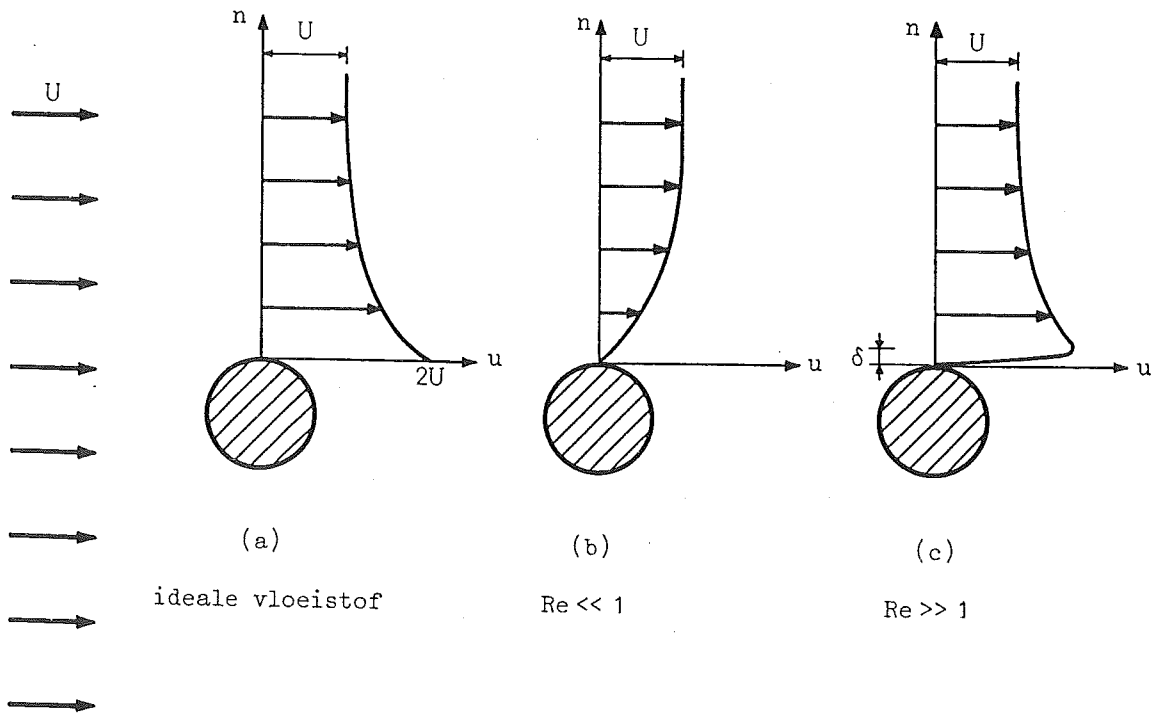
Als voorbeeld van het bovenstaande geven wij enkele resultaten van Stokes (1851) die de sterk-viskeuze strooming rondom een bol heeft berekend. Stokes vindt voor de maximale schuifspanning de waarde  $3\eta U/D$

(waarin  $D$  de diameter is van de bol). De druk aan het bol-oppervlak blijkt monotoon af te nemen in de stroomrichting (dus ook aan de benedenstroomse zijde). Het maximale drukverschil t.o.v. de ongestoorde waarde is  $3\eta U/D$ . Voor de totale sleepkracht vindt Stokes:

$$F_w = 3\pi\eta DU \quad (10.3)$$

Dit resultaat, afgeleid voor  $Re \rightarrow 0$ , blijkt empirisch geldig te zijn voor  $Re < ca. 1$  (zie par. 10.6).

Stokes' resultaat (10.3) wordt vooral gebruikt voor berekening van de valsnelheid van een bol (bv. een klein sedimentkorreltje) in een viskeuze vloeistof. In par. 10.7 gaan we daar op in.



Figuur 10.4 Snelheidsprofielen naast cirkelcilinder

### 10.5 Zwak-viskeuze stroming ( $Re \gg 1$ )

Fig. 10.3b geeft een voorbeeld van een zwak-viskeuze stroming ( $Re = 2000$ ) rond een cirkelcilinder. Het stroombeeld is wezenlijk verschillend van het beeld bij een sterk-viskeuze stroming (Fig. 10.3a) en ook van dat in het ideale-vloeistof model (Fig. 10.1).

Ook voor de zwak-viskeuze stroming geldt de kleefconditie zodat  $u = 0$  ter plaatse van de wand. Het verschil met de sterk-viskeuze stroming is dat in een zwak-viskeuze stroming om een voorwerp de snelheid varieert in een dunne laag, grenzend aan het voorwerp, van de waarde nul ter plaatse van het voorwerp tot de snelheid in het buitengebied (Fig. 10.4c). In deze z.g. grenslaag heerst dus een sterke snelheidsgradiënt, en alleen in deze laag zijn de schuifspanningen van betekenis. Het was Prandtl (1904) die dit idee introduceerde en die daarmee belangrijk heeft bijgedragen aan de ontwikkeling van de stromingsleer.

Hoe geringer de viscositeit, hoe groter het kental van Reynolds, en (zoals we zullen zien) hoe dunner de grenslaag (relatief). Maar, de kleefconditie blijft en daarmee ook het essentiële verschil tussen de stroming van een ideale vloeistof (Fig. 10.4a) en die van een viskeuze vloeistof (Fig. 10.4c; grenslaagdikte overdreven groot getekend).

Een principeschets van de zwak-viskeuze stroming rond een niet-gestroomlijnd voorwerp is gegeven in Fig. 10.5. We onderscheiden daarin de volgende gebieden:

- (a) een relatief dunne grenslaag van de voorzijde tot ongeveer de grootste dwarsdoorsnede;
- (b) een zone van loslating van de grenslaagstroming;
- (c) een zog benedenstrooms van het voorwerp, voorbij de loslaatpunten;
- (d) een buitengebied buiten grenslaag en zog.

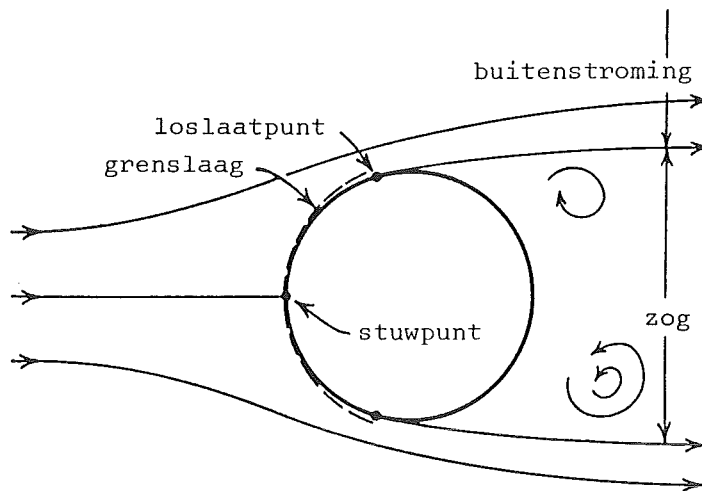


Fig. 10.5 Schetsmatig stroombeeld  $Re \gg 1$

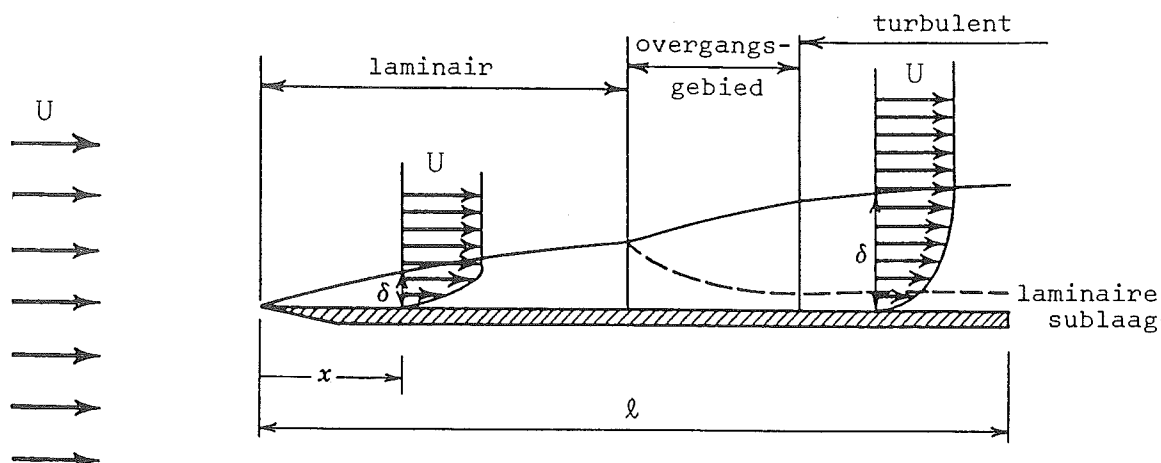
### Buitenstroming

In het buitengebied varieert de snelheid met een waarde  $\sim U$  over afstanden  $\sim \ell$ , zodat (10.2) daar van toepassing is. Het feit dat  $Re = U\ell/\nu \gg 1$  houdt dus in dat in de buitenstroming de schuifspanningen verwaarloosbaar zijn. In deze benadering heeft de buitenstroming een uniforme energie (potentiaalstroom) (vergelijk Fig. 10.4a met Fig. 10.4c, buitengebied). De drukvariaties in de buitenstroming voldoen dan aan  $p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constant}$  en zijn daarom van de grootte-orde  $\frac{1}{2}\rho U^2$ .

Ondanks het bovenstaande kan niet gezegd worden dat de buitenstroming identiek is aan die van een ideale vloeistof rond hetzelfde voorwerp. De begrenzing ervan is immers anders, vooral als gevolg van de loslating van de grenslaagstroom en de zogvorming; deze verschijnselen zelf zijn het gevolg van de werking van de viscositeit en kunnen niet met de potentiaaltheorie worden beschreven. Voor een begrip ervan gaan we in op het fenomeen "grenslaag", om te beginnen voor de stroming langs een vlakke plaat.

### Grenslaag langs vlakke plaat

We gaan uit van een vlakke, gladde plaat die in zijn vlak wordt aangestroomd (Fig. 10.6). De druk in de buitenstroming is daarbij constant.



Figuur 10.6 Grenslaag langs vlakke plaat

Langs de plaat bestaat een relatief dunne zone, de z.g. grenslaag, waarin de snelheid varieert in dwarsrichting van  $u = 0$  op de plaat

(kleef) tot  $u = U$  in de buitenstroming. In elke dwarsdoorsnede (afstand  $x$  benedenstrooms van de bovenstroomse rand) is aan de grenslaag een zekere dikte ( $\delta$ ) toe te kennen (bijv. de afstand van de plaat tot het punt waar  $u = 0,99 U$ ). De snelheidsgradiënt overdwars ( $\partial u / \partial n$ ) in de grenslaag is dus van de grootte-orde  $U/\delta$ , en de wandschuifspanning ( $\tau_0$ ) van de grootte-orde  $\eta U/\delta$ .

Als gevolg van de wandweerstand neemt de snelheid van de vloeistofdeeltjes die dicht langs de plaat stromen af in de stroomrichting. Deze deeltjes remmen vervolgens de vloeistof op wat grotere afstand. Dit leidt ertoe dat met toenemende afstand benedenstrooms de grenslaagdikte ( $\delta$ ) toeneemt terwijl de dwarse snelheidsgradiënt ( $\partial u / \partial n \sim U/\delta$ ) en de (wand)schuifspanning ( $\tau_0 \sim \eta U/\delta$ ) afnemen.

De grenslaaggroei is af te leiden uit een impulsbalans. Dit houdt in dat de wandschuifspanning ( $\tau_0 \sim \eta U/\delta$ ) en de afnemende impuls-overdracht in de grenslaag ( $\sim \rho U^2 \delta$ ) p.e.v. afstand ( $\sim x$ ) in balans zijn. In grootte-orde:

$$\eta U/\delta \sim \rho U^2 \delta/x$$

Hieruit volgt

$$\delta^2 \sim \frac{\nu x}{U}$$

De grenslaagdikte neemt dus toe evenredig met de vierkantswortel uit de afstand benedenstrooms van de aanstroomrand (zie Fig. 10.6).

Voor de grootte-orde van de maximale grenslaagdikte, aan het benedenstroomse einde van de plaat, waar  $x = \ell$ , geldt

$$\delta \sim \left(\frac{\nu \ell}{U}\right)^{1/2}$$

ofwel

$$\frac{\delta}{\ell} \sim \left(\frac{U \ell}{\nu}\right)^{-1/2} = Re^{-1/2} \quad (10.4)$$

Hieruit zien we dat voor een zwak-viskeuze stroming ( $Re \gg 1$ ) de grenslaag inderdaad relatief dun is ( $\delta/\ell \ll 1$ ), zoals hierboven al werd gesteld (in de figuren is de grenslaagdikte zwaar overdreven). Ook volgt

hieruit dat de schuifspanningen in de grenslaag ( $\sim \eta U/\delta$ ) veel groter zijn dan die in de buitenstroming ( $\sim \eta U/\ell$ ); hierop berust in feite het concept van de grenslaag.

Omdat de grenslaagdikte  $\delta$  toeneemt in benedenstroomse richting evenredig met  $x^{1/2}$  neemt de wandschuifspanning af omgekeerd evenredig met  $x^{1/2}$ :

$$\tau_o \sim \eta U/\delta \sim \eta U(\nu x/U)^{-1/2} = \left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/2} \rho U^2$$

Voor de over de plaatlengte ( $\ell$ ) gemiddelde schuifspanning geldt dan

$$\langle \tau_o \rangle \sim \left(\frac{U\ell}{\nu}\right)^{-1/2} \rho U^2 = Re^{-1/2} \rho U^2$$

ofwel

$$\langle \tau_o \rangle = c_\tau \rho U^2 \quad (10.5)$$

waarin de coëfficiënt  $c_\tau$  van de grootte-orde  $Re^{-1/2}$  is. We zien dat de wandschuifspanning in een zwak-viskeuze stroming ( $Re \gg 1$ , dus  $c_\tau \ll 1$ ) veel kleiner is dan de stuwdruk ( $\frac{1}{2}\rho U^2$ ).

Het bovenstaande is gebaseerd op laminaire stroming in de grenslaag. Waar  $Re_x = Ux/\nu$  een waarde van ca.  $2 \times 10^5$  overschrijdt slaat de grenslaagstroming echter om naar turbulent (afgezien van een laminaire sublaag vlak bij een gladde wand). De grotere menging die daarvan het gevolg is brengt hoge-snelheid vloeistof (met snelheid ongeveer gelijk aan  $U$ ) tot dicht bij de plaat; de snelheidsgradiënt  $\partial u/\partial n$  vlak bij de plaat wordt daardoor groter dan voor de laminaire stroming, en de wandschuifspanning en  $c_\tau$  ook.

N.B. 1 In stromingen van water door/over/rondom civiel-technische constructies is de lengte van de eventuele laminaire zone onbetekend. Neem bv. stromend water met  $U = 2$  m/s; dan is al voldaan aan  $Re_x > 2 \times 10^5$  voor  $x > 0,1$  m; dat interval is verwaarloosbaar t.o.v. afmetingen van civiel-technische constructies. Bovendien is daarbij de aankomende stroming zelf al turbulent.

N.B. 2 Ook de turbulente grenslaagdikte neemt toe in benedenstroomse richting, met als gevolg een in die richting afnemende schuifspanning. Dit doet zich bijv. voor in de grenslaag bij de bodem benedenstrooms

van een schuif waar water onderdoor stroomt; daarbij is het afnemen van de schuifspanning bij de bodem van belang voor het ontwerp van de benodigde lengte en opbouw van een eventuele bodembescherming; die kan uit lichtere en minder stabiele elementen bestaan op grotere afstand benedenstrooms.

#### Grenslaag bij voorwerp met dwarsafmeting

In tegenstelling tot de in zijn vlak aangestroomde vlakke plaat bekijken we nu een voorwerp met een dwarsafmeting (zie bijv. Fig. 10.3b). Daarbij is de druk in de buitenstroming niet constant maar varieert deze volgens Bernoulli. Deze druk, met variaties  $\Delta p$  van de grootte-orde  $\frac{1}{2}\rho U^2$ , werkt door over de hele grenslaagdikte omdat die relatief klein is.

De drukgradiënt in de stroomrichting ( $\partial p/\partial s$ ) beïnvloedt de grenslaag. Aan de voorzijde (bovenstroomse zijde) van het voorwerp, waar de buitenstroom versnelt (d.w.z. tussen punt 1 en punt 2 in Fig. 10.1), werkt de drukgradiënt in de richting van de stroom ( $\partial p/\partial s < 0$ ). Dit compenseert voor een deel de invloed van de wandweerstand zodat de stroming minder vertraagt en de grenslaag minder sterk groeit dan bij de vlakke plaat (waar  $\partial p/\partial s = 0$ ). Aan de benedenstroomse zijde, waar in de ideale-vloeistof benadering de druk weer toeneemt ( $\partial p/\partial s > 0$ ), versterkt de drukgradiënt de werking van de wandweerstand, resulterend in een versterkte vertraging van de stroming in de grenslaag en een versterkte groei van de grenslaagdikte.

#### Loslating van de stroom

De door de tegenwerkende drukgradiënt versterkte vertraging leidt ertoe dat de grenslaagstroming het in Fig. 10.1 gemerkte punt 3 niet haalt, maar eerder tot stilstand komt; verder benedenstrooms veroorzaakt de drukgradiënt langs het voorwerp zelfs een stroom tegen de oorspronkelijke richting in. Het punt waar de snelheid langs de wand van teken omkeert is een stuwpunt; daar laat de stroom los van de wand. Uit het bovenstaande volgt: loslating is het gevolg van de combinatie van wandweerstand en een (te sterke) vertragende drukgradiënt.

N.B. De in zijn vlak aangestroomde vlakke plaat geeft wel weerstand, maar omdat in dat geval de drukgradiënt gelijk is aan nul treedt daar



geen loslating op. Bij sterk-viskeuze stromingen is er aan benedenstroomse zijde zelfs sprake van een in de stroomrichting afnemende druk (zie par. 10.4); om die reden treedt in die stromingen evenmin loslating op, zoals te zien is in Fig. 10.3a.

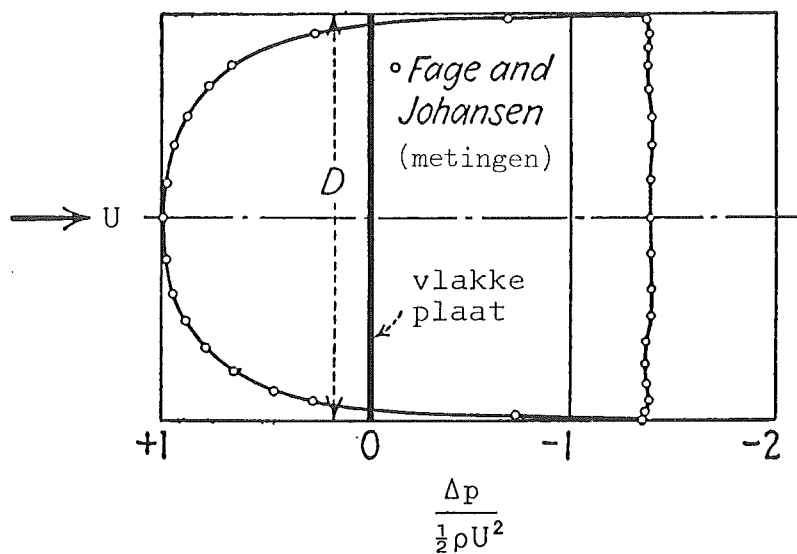
Bij toenemende waarden van  $Re$  wordt de grenslaag weliswaar relatief dunner, maar hij verdwijnt niet omdat het verschijnsel kleef blijft. Evenmin zal de stroming bij een bepaalde grote waarde van  $Re$  weer gaan aanliggen i.p.v. loslaten. Daarom is de stroming van een echte vloeistof, ook als  $\eta \rightarrow 0$  en  $Re \rightarrow \infty$ , totaal anders dan die van een ideale vloeistof.

Het gevolg van loslating is het ontstaan van een zog met relatief lage snelheden en met een relatief lage, vrijwel constante druk aan de achterzijde van het voorwerp. Er is geen drukherstel meer tot aan de stuwdruk; de drukken aan voorzijde en achterzijde zijn niet meer gelijk, waardoor een bijdrage aan de sleepkracht ontstaat evenredig aan  $\frac{1}{2}\rho U^2$  (naast die van de schuifspanning).

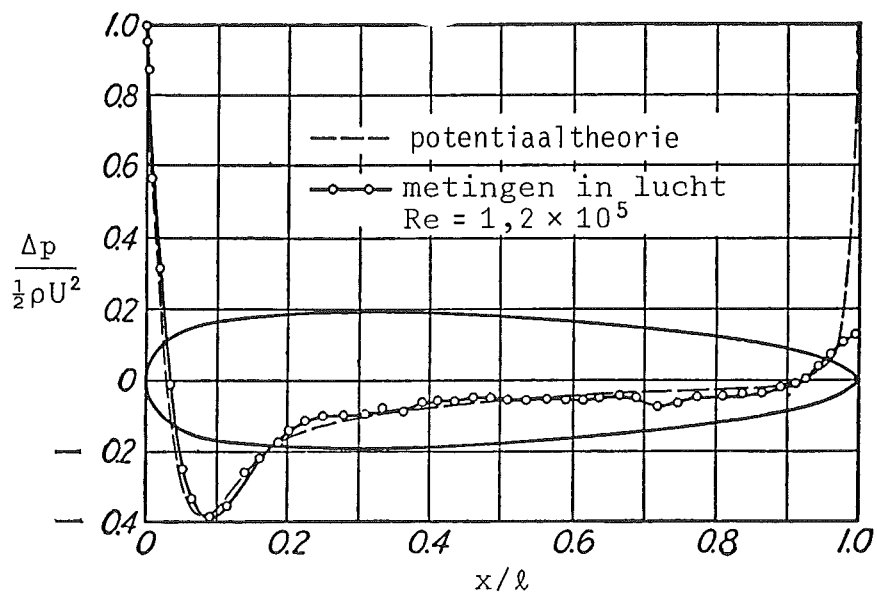
De plaats van loslating is bij gegeven  $Re$  nog afhankelijk van de vorm en oriëntatie van het voorwerp.

Bij een abrupte beëindiging aan benedenstroomse zijde, zoals bij een hoekig dwarsprofiel (bijv. vierkante staaf), zou bij niet-loslaten een sterke vertraging optreden, gepaard gaande met een sterke tegenwerkende drukgradiënt. Die veroorzaakt dan juist loslating. In dat geval is van enig drukherstel aan benedenstroomse zijde geen sprake (zie Fig. 10.7), en is er een relatief grote sleepkracht.

Door stroomlijning (geleidelijk reducerende dwarsafmeting aan de achterzijde) wordt de tegenwerkende drukgradiënt gereduceerd en kan de stroming over een zekere afstand blijven aanliggen in het vertraginggebied, waarbij eveneens nog een zeker drukherstel optreedt (Fig. 10.8).



Figuur 10.7 Drukverdeling langs vlakke plaat haaks op de stroming



Figuur 10.8 Drukverdeling langs gestroomlijnd profiel

## 10.6 Sleepkracht

We gaan nu na wat het voorgaande inhoudt voor de sleepkracht. Deze bestaat uit de som van de bijdragen van schuifspanning en druk, geïntegreerd over het oppervlak van het voorwerp, waarbij de component van de kracht in de (relatieve) stroomrichting moet worden genomen.

### Sterk-viskeuze stroming ( $Re \ll 1$ )

In dit geval zijn de schuifspanningen en de drukvariaties van dezelfde grootte-orde, gegeven door  $\tau \sim \Delta p \sim \eta U/\ell$ . Voor de totale sleepkracht geldt dan  $F_w \sim \eta U \ell$  (zie par. 10.4).

### Zwak-viskeuze stroming ( $Re \gg 1$ )

In dit geval is  $\tau_o \sim \eta U/\delta \sim c_r \frac{1}{2} \rho U^2$  en is  $\Delta p \sim \frac{1}{2} \rho U^2$ . Omdat  $c_r \ll 1$  (als  $Re \gg 1$ ) is  $\tau_o \ll \Delta p$  en zal  $F_p$  ver overheersen (behalve bij zeer lang-gerekte dwarsprofielen). Daarom stellen we  $F_w$  evenredig aan  $\frac{1}{2} \rho U^2$  en aan de oppervlakte (A) van het voorwerp, geprojecteerd in de stroomrichting (vaak is dit de oppervlakte van de grootste dwarsdoorsnede):

$$\boxed{F_w = c_w \frac{1}{2} \rho U^2 A} \quad (10.6)$$

De z.g. sleep- of weerstandscoefficiënt  $c_w$  (Engels: "drag coefficient",  $c_d$ ) is een functie van de vorm en oriëntatie van het voorwerp en van de waarde van  $Re$ .

Hoewel (10.6) bedoeld is voor zwak-viskeuze stromen is het gebruikelijk hem in het hele bereik van  $Re$  toe te passen. Voor lage waarden van  $Re$ , waar de stroming in feite sterk-viskeus is, geldt dan

$$F_w \sim \eta U \ell \sim c_w \frac{1}{2} \rho U^2 \ell^2$$

ofwel

$$c_w \sim \frac{\eta}{\rho U \ell} = \frac{1}{Re}$$

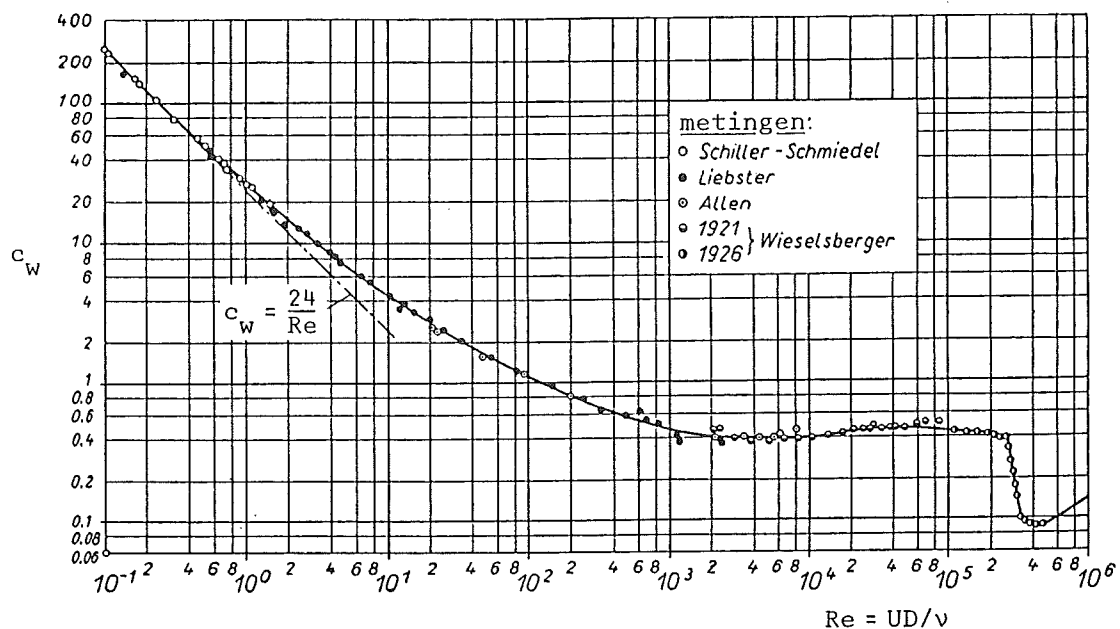
Voor een bol bijv. geldt in het sterk-viskeuze regime (zie vgl. 10.3):

$$F_w = 3\pi\eta DU = c_w \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right) \left(\frac{\pi}{4}D^2\right)$$

ofwel

$$c_w = 24 \frac{\eta}{\rho UD} = \frac{24}{Re} \quad (10.7)$$

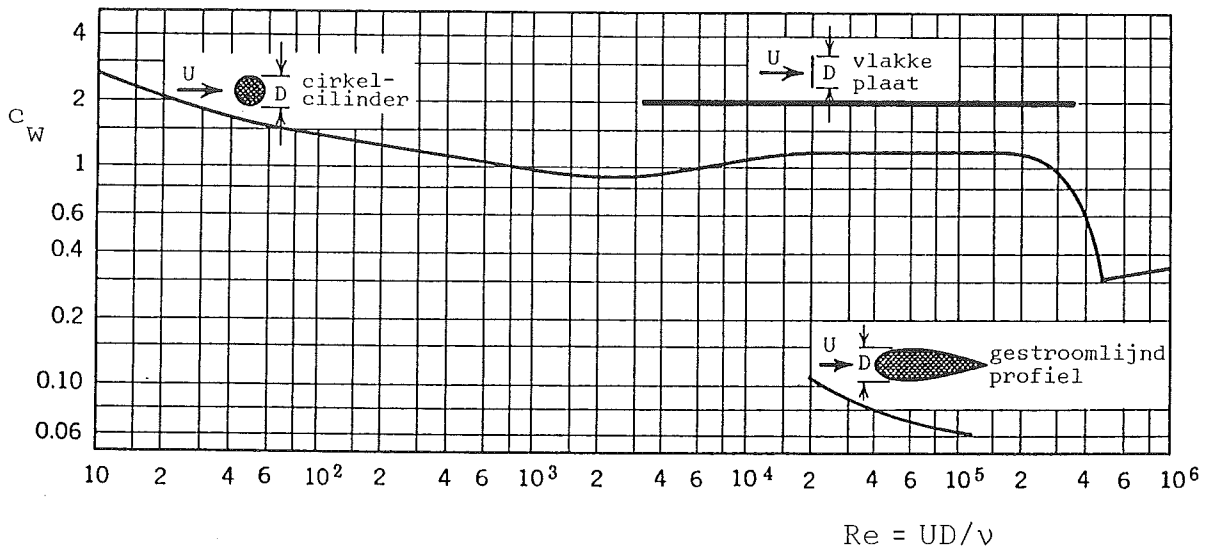
Het oneigenlijke gebruik van (10.6) voor sterk-viskeuze stromen wordt



Figuur 10.9 Weerstandscoefficiënt  $c_w$  voor bol

Fig. 10.9 geeft gemeten waarden van  $c_w$  voor een bol als functie van  $Re$ . We merken daarbij het volgende op:

- Vgl. (10.7) stemt goed met de meetwaarden overeen voor  $Re < ca. 1$ . Dit bevestigt de geldigheid van de theorie van Stokes en legt het toepassingsgebied ervan vast.
- Met toenemende waarden van  $Re$  van ca. 1 tot ca.  $10^3$  neemt de gevoeligheid van  $c_w$  voor  $Re$  af; dit is het gevolg van het toenemend relatieve belang van de traagheid. Voor  $Re$  tussen ca.  $10^3$  en ca.  $2 \times 10^5$  is  $c_w$  zelfs vrijwel onafhankelijk van  $Re$ ; in dat gebied is  $F_w$  dus vrijwel evenredig met  $U^2$ .
- Voor  $Re$  tussen ca.  $2 \times 10^5$  en ca.  $3 \times 10^5$  vertoont  $c_w$  een scherpe en sterke daling. Dit is het gevolg van de omslag van de grenslaagstroming van laminair naar turbulent. Dankzij de daardoor vergrote menging van hoge-snelheid vloeistof uit de buitenstroming met de langzamere grenslaag-vloeistof leidt dit tot een langer aanliggen van de stroom, een smaller zog en daarin een hogere druk dan bij de laminaire grenslaagstroming. (Deze omslag vindt bij een ca. tien



Figuur 10.10 Weerstandscoefficiënt  $c_w$  voor cirkelcilinder, vlakke plaat (dwars) en gestroomlijnd profiel

keer lagere waarde van  $Re$  plaats als het oppervlak van de bol ruw is, zoals dat van een golfbal.)

Fig. 10.10 geeft gemeten waarden van  $c_w$  voor enkele andere profielen. We merken daarbij het volgende op:

- Voor de cirkelcilinder gelden m.b.t. de loslaatpunten soortgelijke opmerkingen als voor de bol.
- In de stroming rond de dwars-aangestroomde vlakke plaat zijn de loslaatpunten gefixeerd, en is de vorm van de drukverdeling (zoals gegeven in Fig. 10.7) constant voor  $Re > ca. 10^3$ . Hetzelfde geldt dan voor de waarde van  $c_w$ . Dit is in het algemeen het geval voor hoekige profielen.
- In geval van een gestroomlijnd profiel is de tegenwerkende drukgradiënt zwak, waardoor de stroom lang kan blijven aanliggen en er een significant drukherstel optreedt (zie Fig. 10.8). Daardoor kan de  $c_w$ -waarde blijkbaar met ca. een factor 10 worden gereduceerd t.o.v. de waarde voor niet-gestroomlijnde profielen.

Omdat  $F_p$  sterk samenhangt met de vorm van het voorwerp noemt men deze de vormweerstand. De bijdrage  $F_\tau$  noemt men de huidweerstand. Zoals hierboven al is opgemerkt is  $\tau_o \ll \Delta p$  voor zwak-viskeuze stromen; daardoor is de vormweerstand in de meeste gevallen veel groter dan de huidweerstand. Alleen gestroomlijnde profielen (waarvoor de dwarsoppervlakte  $A$  klein is t.o.v. de feitelijke oppervlakte) kunnen hierop een uitzondering maken, en dat temeer naarmate  $Re$  lager is (grotere  $c_\tau$ ).

In schaalmodellen van (grotere) prototypen kan men de  $c_w$ -waarden van de prototypen bepalen mits er sprake is van geometrische gelijkvormigheid (gelijke vorm en oriëntatie), gelijkvormige aanstroming, en dynamische gelijkvormigheid (gelijke waarde van  $Re$ ). In geval van hoekige profielen, waarbij  $c_w$  constant is voor  $Re > ca. 10^3$ , behoeft de modelwaarde van  $Re$  niet gelijk te zijn aan de prototypewaarde, mits in beide gevallen  $Re > ca. 10^3$ . Voor ronde profielen geldt iets analoogs, mits de grenslaagstroming turbulent is.

In schaalmodellen van de stroming rondom constructies in open water, met invloed van een vrij oppervlak, wordt er meestal voorrang aan gegeven in het model dezelfde waarde te hebben van het kental van Froude als in het prototype, en wordt er water in de wijn gedaan m.b.t. het kental van Reynolds.

### Energieverlies

Als gevolg van de weerstand gaat stromingsenergie "verloren" (omgezet in warmte). Het gedissipeerd vermogen is

$$P_{diss} = F_w U$$

of

$$P_{diss} = c_w \frac{1}{2} \rho U^3 A \quad (10.8)$$

Omgekeerd moet dit vermogen geleverd worden om het voorwerp door een vloeistof of gas te bewegen (luchtweerstand van vliegtuigen, auto's etc.). Het energieverlies door stromingsweerstand bij overbrugging van een gegeven afstand  $L$ , gedurende een tijd  $t = L/U$ , is  $tP_{diss} = LP_{diss}/U$ , wat ongeveer evenredig is met  $U^2$  (als  $c_w \approx$  constant).

### 10.7 Valsnelheid

Een voorwerp dat door de zwaartekracht in een vloeistof valt (of opstijgt) ondervindt een weerstand. Bij een eenparige beweging maakt het gewicht minus de opwaartse hydrostatische druk evenwicht met de weerstand. De snelheid waarbij dit gebeurt is de valsnelheid ( $w$ ).

Stel  $M$  is de massa van het voorwerp en  $V$  het volume, dan geldt in de stationaire toestand (versnelling nul):

$$(M - \rho V)g = F_w$$

Voor een massieve bol met uniforme massadichtheid  $\rho_s$  wordt dit

$$(\rho_s - \rho)gV = (\rho_s - \rho)g \frac{\pi}{6} D^3 = F_w \quad (10.9)$$

ofwel

$$(\rho_s - \rho)g \frac{\pi}{6} D^3 = c_w \frac{1}{2} \rho w^2 \frac{\pi}{4} D^2$$

zodat

$$w^2 = \frac{4}{3c_w} \Delta g D \quad (10.10)$$

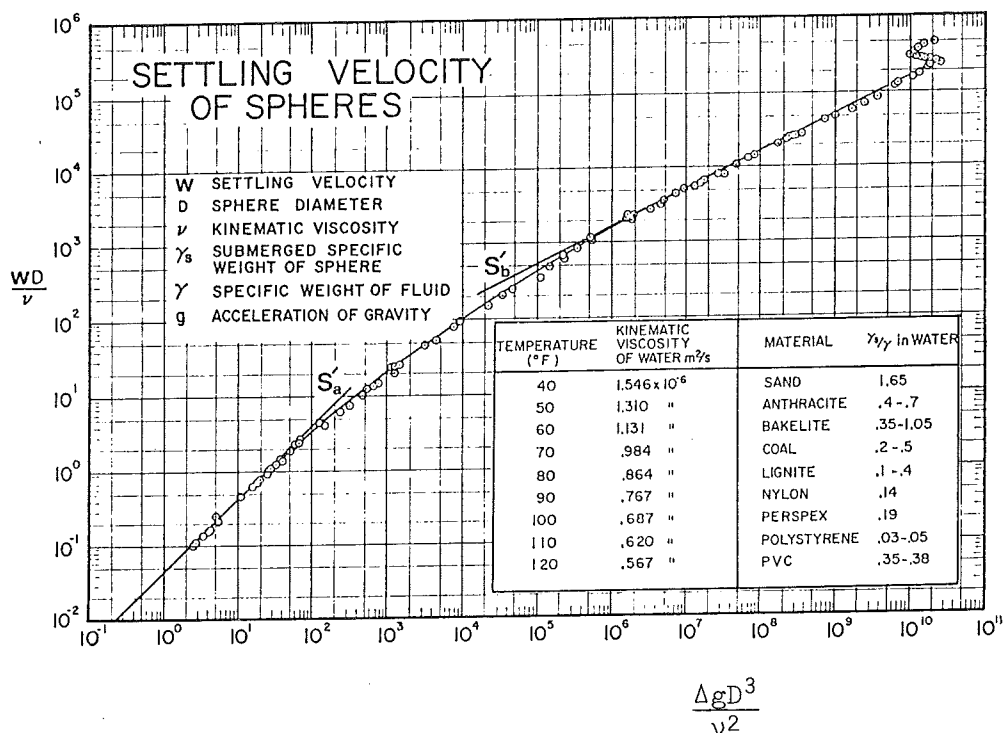
waarin  $\Delta = (\rho_s - \rho)/\rho$ . Met gebruikmaking van het bekende verband tussen  $c_w$  en  $Re = wD/\nu$  (Fig. 10.9) kan  $w$  hieruit worden berekend bij gegeven waarden van  $\Delta$ ,  $g$ ,  $D$  en  $\nu$ . Het is echter handiger om (10.10) eerst als volgt dimensieloos te maken:

$$c_w \frac{w^2 D^2}{\nu^2} = c_w Re^2 = \frac{4}{3} \frac{\Delta g D^3}{\nu^2} \quad (10.11)$$

Hierin is het linkerlid uitsluitend een functie van  $Re$ , zodat

$$Re = \frac{wD}{\nu} = f_1\left(\frac{\Delta g D^3}{\nu^2}\right) \quad (10.12)$$

Empirisch bepaalde waarden van deze functie zijn gegeven in Fig. 10.11. Deze kan worden gebruikt om zonder itereren  $w$  te bepalen (via  $Re$ ) bij gegeven waarden van  $\Delta$ ,  $g$ ,  $D$  en  $\nu$ .



Figuur 10.11 Dimensieloos valsnelheidsdiagram voor een bol (figuur overgenomen uit Yalin, 1972).

In het Stokes regime ( $Re < ca. 1$ ) geldt (10.3), in welk geval  $F_w = 3\pi\eta Dw$  en de valsnelheid gegeven is door

$$w = \frac{1}{18} \frac{\Delta g D^2}{\nu} \tag{10.13}$$

Deze is dus evenredig met  $D^2$ . De bijbehorende waarde van  $Re$  is

$$Re = \frac{wD}{\nu} = \frac{1}{18} \frac{\Delta g D^3}{\nu^2} \tag{10.14}$$

Deze evenredigheid is in Fig. 10.11 te zien als de tak  $S'_a$ , die voor  $Re < ca. 1$  de meetpunten goed weergeeft. Stellen we inderdaad  $Re = 1$  als bovengrens voor het Stokes regime (zie ook Fig. 10.9) dan is de bijbehorende diameter gelijk aan  $(18\nu^2/\Delta g)^{\frac{1}{3}}$ . Voor een zandkorrel in water ( $\Delta \approx 1,65$ ) van ca. 20°C ( $\nu \approx 10^{-6} m^2/s$ ) is dit een diameter van ca. 0,1 mm.

Voor waarden van  $Re$  tussen ca.  $10^3$  en ca.  $2 \times 10^5$  is  $c_w$  vrijwel constant (zie Fig. 10.9), in welk geval  $w$  evenredig is met  $D^{\frac{1}{2}}$ , en  $Re^2$



evenredig is met  $\Delta g D^3 / \nu^2$  (zie de tak  $S'_b$  in Fig. 10.11). Gebruiken we voor dit bereik  $c_w \approx 0,4$  dan gaat (10.10) over in

$$w = 1,83 \sqrt{\Delta g D} \quad (10.15)$$

Voor kwarts in water ( $\Delta = 1,65$ ) reduceert dit verder tot

$$w = 2,35 \sqrt{g D} \quad (10.16)$$

Stellen we  $Re = 10^3$  als ondergrens hiervoor dan moet  $D$  minstens gelijk zijn aan ca. 3 mm (voor  $\Delta = 1,65$ ).

## 11. WEERSTAND IN PIJPLEIDINGEN

### 11.1 Inleiding

Het onderwerp van dit hoofdstuk is stromingsweerstand in leidingen. We beperken ons tot stationaire stromen in rechte, geheel gevulde pijpleidingen van constante diameter, afgezien van plaatselijke profielvariëaties zoals bij splitsingspunten, pompen, afsluiters etc. Het gaat om het verband tussen weerstand en debiet.

In aansluiting op het voorgaande hoofdstuk verdelen we de totale stromingsweerstand ( $W$ ) in een leiding in twee typen bijdragen:

- vormweerstand (vertragsingsverliezen)
- huidweerstand (wandwrijving)

Het eerstgenoemde type weerstand doet zich alleen voor bij lokale, niet-gestroomlijnde profielvariëaties, knikken enz., en is voor elk daarvan in rekening te brengen als een sprongsgewijze daling van het energieniveau, het z.g. **vertragsingsverlies**  $\Delta H_v$ .

De tweede bijdrage is continu verdeeld over de leidinglengte en geeft een gelijkmatige daling van het energieniveau met een **verhang** (verval p.e.v. lengte) gelijk aan  $-dH/ds$ .

Figuur 11.1 geeft een schets van een leiding tussen twee reservoirs. Vertragsingsverliezen treden in dit voorbeeld op bij de intree, bij een abrupte verwijding, bij een lokale vernauwing en bij de uittree. Elk van deze lokale verliezen  $\Delta H_v$  wordt uitgedrukt in de plaatselijke snelheidshoogte, met een (dimensieloze) verliescoëfficiënt als evenredigheidsfactor:

$$\Delta H_v = \xi \frac{U^2}{2g}$$

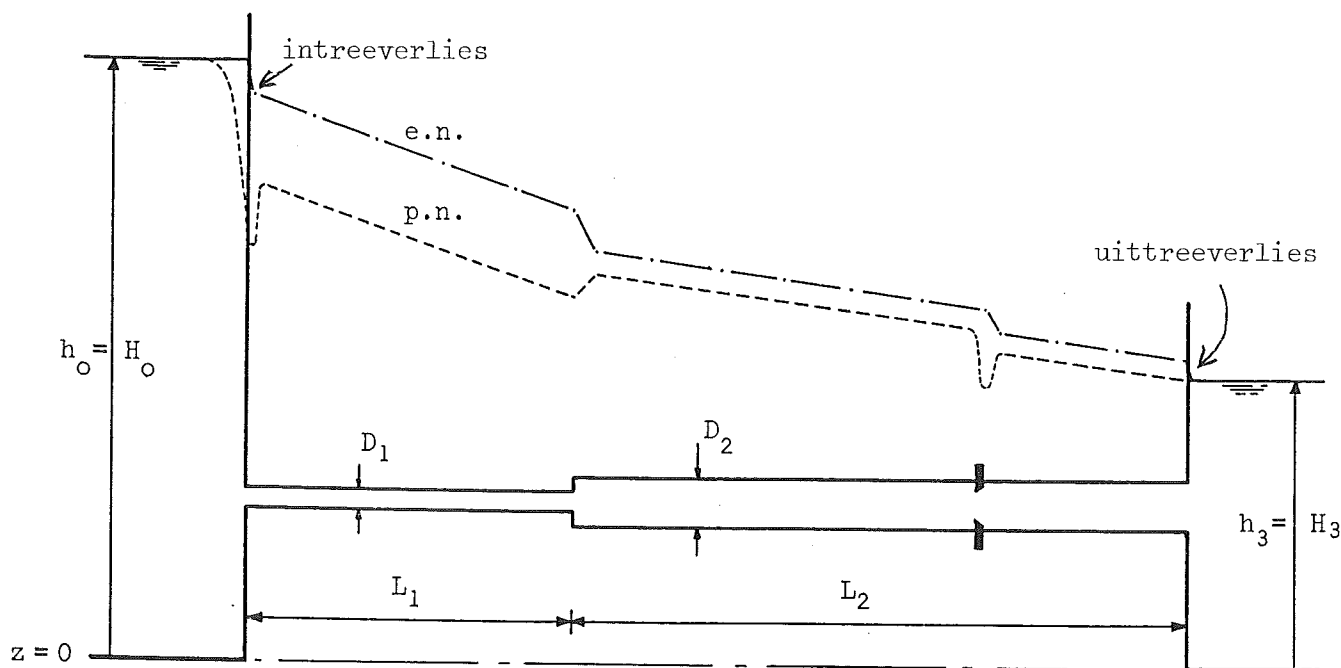
In par. 11.2 gaan we in op de bepaling van de waarden van  $\xi$  voor verschillende typen van profielvariëatie.

Wrijvingsverliezen treden op over de hele lengte van de leiding. Voor een leidinggedeelte met constante diameter  $D$  wordt het wrijvingsverhang ( $-dH/ds$ ), kortweg aangeduid als  $i_w$ , evenredig gesteld aan de verhouding van snelheidshoogte tot leidingdiameter:

$$i_w = - \frac{dH}{ds} = f \frac{U^2}{2gD}$$

In par. 11.3 wordt ingegaan op de bepaling van de wrijvingsfactor  $f$  (van Darcy-Weisbach) als functie van het kental van Reynolds ( $UD/\nu$ ) en de relatieve wandruwheid ( $k/D$ ). Het totale wrijvingsverlies over een uniform leidinggedeelte met lengte  $L$  is

$$\Delta H_w = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$



Figuur 11.1 - Pijpleiding tussen twee reservoirs, met plotselinge vergroting van pijpdiameter en met een uitstekende flens in deel 2.

Voor het totale verlies in een leiding bestaande uit enkele in serie geschakelde uniforme leidinggedeelten geldt

$$\Delta H_{\text{tot}} = \sum \Delta H_v + \sum \Delta H_w$$

In een gesloten leiding heeft het debiet  $Q$  dezelfde waarde in alle doorsneden, ook al verschillen die in diameter. We substitueren daarom  $U = Q/A$  in elke verliesterm, waarbij  $A$  per term een andere waarde kan

hebben. Dan resulteert het gezochte verband tussen het totale verlies en het debiet:

$$\Delta H_{\text{tot}} = \frac{1}{2g} \left[ \sum \frac{\xi}{A^2} + \sum f \frac{L}{D} \frac{1}{A^2} \right] Q^2 \quad (11.1)$$

Bij een relatief korte leiding met veel knikken, vernauwingen etc. overheersen de vertragingsverliezen en kan de wandwrijving worden verwaarloosd. Is daarentegen sprake van een lange pijpleiding met overwegend eenparige beweging dan zijn de vertragingsverliezen verwaarloosbaar. Voorbeelden van beide zijn te vinden in de vraagstukkenbundel.

Voor het totale verlies aan energiehogte in Fig. 11.1 geldt

$$\Delta H_{\text{tot}} = H_0 - H_3 = h_0 - h_3$$

Dit is gelijk aan het verval ( $h_0 - h_3$ ) tussen de reservoirs omdat de snelheidshogte in een reservoir verwaarloosbaar is.

Het hangt van de toepassing af welke van de grootheden in (11.1) gegeven zijn en welke de afhankelijke variabele is. Schematisch weergegeven:

- geg. verval en leiding → debiet
- geg. leiding en debiet → verval
- geg. verval en debiet → leiding(diameter)

In sommige gevallen zal de oplossing iteratief moeten worden bepaald. In de praktijk zijn hiervoor standaard software-pakketten beschikbaar. Voorbeelden zijn te vinden in de vraagstukkenbundel.

## 11.2 Vertragingsverliezen

In hoofdstuk 10 is de stroming rond een voorwerp behandeld. We hebben gezien dat daarbij loslating optreedt in geval van onvoldoende stroomlijning, en dat daarbij in het zog een relatieve onderdruk heerst waardoor er een netto sleepkracht ontstaat. Omgekeerd werkt deze als een weerstand op de stroming.

Zoals gezegd in hoofdstuk 10 is de waarde van de sleepkracht of weerstand voor gegeven geometrie evenredig met de stuwdruk ( $\frac{1}{2}\rho U^2$ ) en met een weerstandscoefficiënt die afhangt van het kental van Reynolds (Re) en indirect dus ook van de snelheid. Bij voldoende grote waarden van Re is  $c_w$  constant en varieert de weerstand recht evenredig met het kwadraat van de stroomsnelheid.

Bij een snelle verruiming van het doorstroomprofiel in een leiding treden soortgelijke verschijnselen op. Het energieverlies dat daarmee gepaard gaat, het z.g. vertragingsverlies, uit zich in een lokale daling van het energieniveau ( $\Delta H_v$ ), die eveneens bij benadering evenredig is met het kwadraat van de stroomsnelheid. Voor een willekeurige profielvariatie of bocht schrijven we  $\Delta H_v$  in de vorm

$$\Delta H_v = \xi \frac{U^2}{2g} \quad (11.2)$$

De coëfficiënt  $\xi$  hierin is in hoofdzaak afhankelijk van de lokale geometrie, maar zal tevens afhangen van de aanstroomcondities en van de waarde van het kental van Reynolds voor de pijpstroming,  $Re = UD/\nu$ . In het vervolg van dit hoofdstuk gaan we er van uit dat de aanstroming eenparig is en dat Re zó groot is dat  $\xi$  er niet meer mee varieert.

#### Geleidelijke verwijding

Empirische waarden van  $\xi$  voor een aantal gevallen van geleidelijke verwijding zijn gegeven in Tabel 11.1.

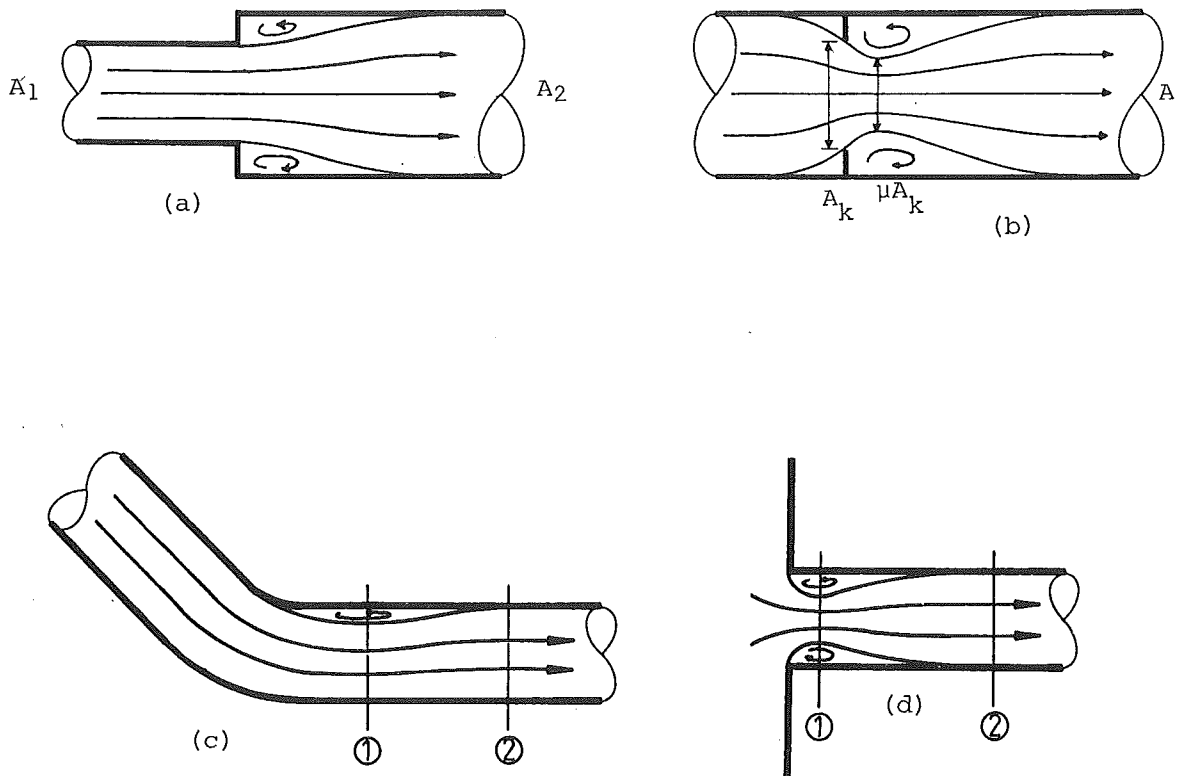
#### Abrupte verwijding

Voor een abrupte verwijding van een gesloten leiding (Fig. 11.2a) is de waarde van  $\Delta H_v$  gegeven door de z.g. regel van Carnot (zie hoofdstuk 8):

$$\Delta H_v = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

Hierin zijn  $U_1$  en  $U_2$  de gemiddelde snelheden in de leidinggedeelten aan weerszijden van de abrupte verwijding. Omdat  $Q = U_1 A_1 = U_2 A_2$  is  $\Delta H_v$  te schrijven als

$$\Delta H_v = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{U_1^2}{2g} \quad (11.3)$$



*Figuur 11.2 Stroomvertraging na abrupte vergroting van diameter (a), en na contractie achter een flens (b), achter een knik (c) en bij intree (d)*

Lokale vernauwing

Het geometrisch doorstroomprofiel in een pijp met dwarsoppervlak A en stroomsnelheid  $U = Q/A$  wordt plaatselijk vernauwd tot  $A_k$  (zie Fig. 11.2b). Wegens contractie is het kleinste doorstroomoppervlak kleiner dan  $A_k$ , zeg gelijk aan  $\mu A_k$  waarin  $\mu$  de contractiecoëfficiënt is, en is de grootste stroomsnelheid  $U_k$  gelijk aan  $Q/(\mu A_k)$ . Carnot geeft dan

$$\Delta H_v = \frac{(U_k - U)^2}{2g} = \left(\frac{A}{\mu A_k} - 1\right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

ofwel

$$\xi = \left(\frac{A}{\mu A_k} - 1\right)^2$$

Empirisch bepaalde waarden van  $\mu$  en  $\xi$  zijn voor diverse vernauwingen verzameld in handboeken (zie bijv. Idelchik, 1986). Tabel 11.1 geeft enkele waarden.

Bochten en knikken

In een (te) abrupte bocht van een leiding treedt loslating op gevolgd door contractie ( $\mu < 1$ ) en vertraging (Fig. 11.2c). Dan zal  $\xi > 0$  zijn, ook als er geen sprake is van variatie van de pijpdoorsnede. De waarde van  $\xi$  is daarbij afhankelijk van de verhouding van bochtstraal tot pijp diameter en van de ingesloten hoek ( $\theta$ ). Empirische waarden voor veel gevallen zijn verzameld in handboeken zoals dat van Idelchik. Tabel 11.1 geeft enkele daarvan.

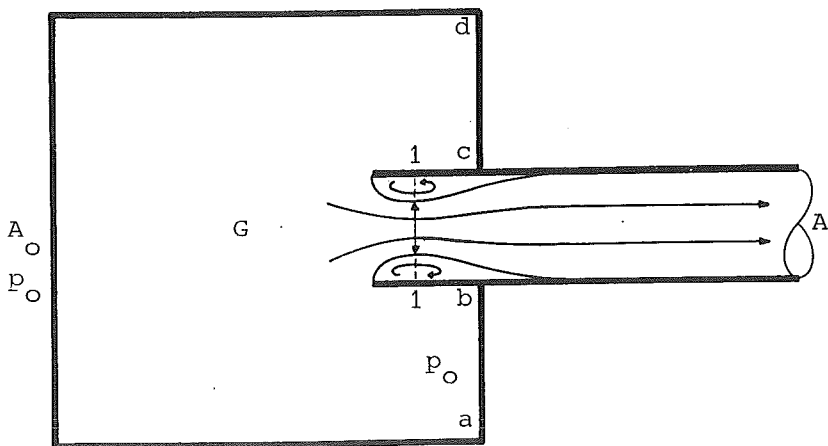
Intree

Bij de intree van de stroming vanuit een reservoir in een pijp kan de stroming loslaten, contraheren ( $\mu < 1$ ) en daarna vertragen (Fig. 11.2d). Toepassing van Carnot geeft in dit geval

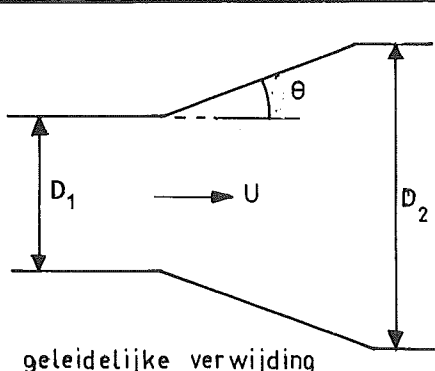
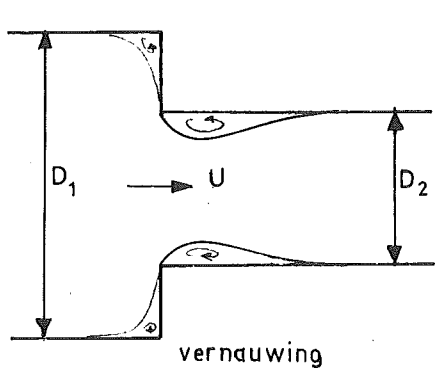
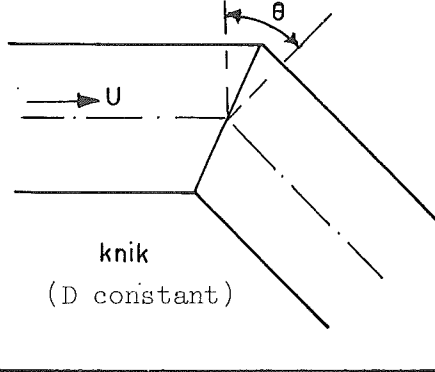
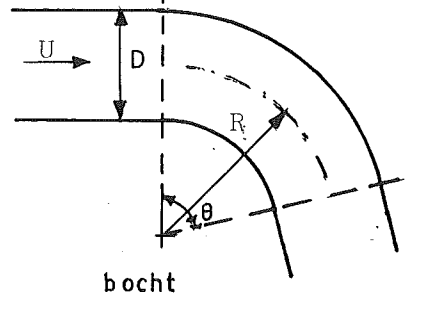
$$\xi = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2$$

Bij een goed gestroomlijnde aansluiting treden contractie en vertraging niet op, in welk geval  $\mu = 1$  en  $\xi = 0$ . Voor de rechthoekige aansluiting getekend in Fig. 11.2d is  $\mu \approx 0,6$  zodat  $\xi \approx 0,45$ .

Wanneer de pijp door de wand van het reservoir naar binnen steekt (zie Fig. 11.3) treedt een sterke contractie op, die als volgt is te berekenen.



11.3 Reservoir met buisje van Borda

(a)	 <p>geleidelijke verwijding</p>	$D_2/D_1$	$\theta$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	
		1,1		0,03	0,10	0,16	0,19	
		1,5		0,06	0,24	0,39	0,48	
		1,8		0,07	0,28	0,44	0,54	
		2,0		0,07	0,29	0,46	0,56	
> 3		0,08	0,31	0,49	0,60			
(b)	 <p>vernauwing</p>	$A_2/A_1$		0,01	0,20	0,60	0,80	
		$\mu$		0,60	0,62	0,70	0,77	
		$\xi$		0,49	0,42	0,22	0,13	
(c)	 <p>knik (D constant)</p>	$\theta$		$10^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	
		glad		0,034	0,130	0,47	1,13	
(d)	 <p>bocht</p>	$\xi = \xi \left\{ \frac{R}{D}, \frac{R}{k}, Re, \theta \right\}$						
		globaal gemiddelde:						
		$R/D$	$\theta$	1	2	3		
			$90^\circ$	1	0,2	0,1		
			$45^\circ$	0,67	0,13	0,07		
	$30^\circ$	0,5	0,1	0,05				

Tabel 11.1 Plaatselijk energieverlies buisleidingen ( $\xi$ -waarden)

N.B.: Bovenstaande  $\xi$ -waarden komen overeen met de definities  $\xi = \Delta H_V / (U_1^2 / 2g)$  in geval (a) en  $\xi = \Delta H_V / (U_2^2 / 2g)$  in geval (b) (in beide gevallen de grootste van de twee snelheidshoogten aan weerszijden).



In het reservoir zijn de versnellingen alleen van betekenis in de omgeving van de instroomopening van de pijp. Daarbuiten is de dynamische druk (en dus het piëzometrisch niveau) constant (stel gelijk aan  $p_0$ ). In de dwarsdoorsnede van de vena contracta stellen we de dynamische druk eveneens constant (gelijk aan  $p_1$ ).

Volgens Bernoulli geldt dan

$$p_0 = p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 \quad \text{ofwel} \quad \frac{p_0 - p_1}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = 1$$

We stellen verder een impulsbalans op voor het gebied G, bestaande uit het reservoir plus het daarin stekende buisgedeelte tot aan de vena contracta (zie Fig. 11.3) en gaan er daarbij van uit dat over de hele wand van het reservoir, ook die waar de pijp doorheen steekt (abcd), de dynamische druk gelijk is aan de ongestoorde waarde ( $p_0$ ). De impulsbalans  $F_0 = F_1$  geeft dan

$$p_0 A_0 = p_0 (A_0 - A) + p_1 A + \rho U_1^2 \mu A$$

ofwel

$$\mu = \frac{p_0 - p_1}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = 1$$

Dit resultaat is oorspronkelijk door Borda (1776) afgeleid; het naar binnen gestoken pijpgedeelte wordt het buisje van Borda genoemd. De bijbehorende coëfficiënt voor het intreeverlies is gelijk aan

$$\xi = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 = 1$$

### Uittree

Zoals reeds genoemd in hoofdstuk 8 kan  $U_2$  worden verwaarloosd t.o.v.  $U_1$  in geval van een relatief sterke profielvergroting, zoals bij uitstroming in een reservoir. Dan geldt bij benadering  $\Delta H_V = U_1^2/2g$ , ofwel  $\xi = 1$ . De gehele meegevoerde kinetische energie gaat dan verloren. In dat geval ligt het piëzometrisch niveau in de pijp bij de uittree in het waterniveau van het ontvangende reservoir (Fig. 11.1).

### 11.3 Weerstand in eenparige stroom

#### 11.3.1 Ontwikkeling tot eenparige stroom

Bij vloeistofstroming vanuit een reservoir in een pijpleiding ontwikkelt zich een grenslaag langs de pijpwand, aanvankelijk te vergelijken met de grenslaag die zich vormt in de stroming langs een vlakke plaat (zie hoofdstuk 10). Vanaf een zekere afstand benedenstrooms van de instroom begint de grenslaaggroei echter merkbaar beïnvloed (belemmerd) te worden door de eindige pijpdoorsnede, totdat op nog grotere afstand (tientallen diameters) geen groei meer plaatsvindt en het snelheidsprofiel vanaf daar constant blijft. Pas dan is de stroming echt eenparig (versnelling nul).

De hierna te geven behandeling van wandweerstand heeft betrekking op eenparige stroming (na middeling over de eventuele turbulentie), en is strikt gesproken niet van toepassing op bovengenoemd inloopgedeelte. In de praktijk wordt met dit verschil echter meestal geen rekening gehouden.

#### 11.3.2 Parameters

In par. 2.5 is al ingegaan op de parameters die bepalend zijn voor de weerstand bij eenparige stroming door een leiding. Volledigheids halve doen we dat hier opnieuw en voegen we daar enkele opmerkingen aan toe.

We gaan uit van een eenparige stroming van een vloeistof van constante massadichtheid ( $\rho$ ) en viscositeit ( $\eta$ ) door een pijpleiding met constante inwendige diameter  $D$ . Het debiet is  $Q$  en de over de dwarsdoorsnede gemiddelde snelheid is  $U = Q/A = Q/(\pi D^2/4)$ .

De binnenkant van de pijpwand kan ruw zijn als gevolg van het fabricageproces, corrosie, bio-activiteit, sedimentatie en eventueel andere oorzaken. Gemakshalve doen we hier alsof de ruwheid is weer te geven door slechts één karakteristieke lengtemaat ervan, die we met  $k$  aanduiden. In de hierna te noemen proeven van Nikuradse

bestond de ruwheid uit kleine, aaneengesloten zandkorrels van vrijwel eenzelfde diameter, gelijkmd op de wand, en stelt  $k$  de gemeenschappelijke diameter van deze korreltjes voor.

Het bovenstaande houdt in dat de beschouwde eenparige stroming slechts afhankelijk is van de volgende onafhankelijke variabelen:

$$(D, k, \rho, \eta, U) \tag{11.4}$$

Dezen zijn te combineren tot twee onafhankelijke dimensieloze parameters:

$$\left(\text{Re}, \frac{k}{D}\right) \tag{11.5}$$

Hierin is  $\text{Re} = \rho UD/\eta = UD/\nu$  het kental van Reynolds, gebaseerd op de pijpdiameter;  $k/D$  is de relatieve ruwheid.

Op het micro-niveau van de individuele ruwheidselementen versnelt en vertraagt de stroom en is er een sleepkracht op de ruwheidselementen die deels uit huidweerstand en deels uit vormweerstand kan bestaan. Op het macro-niveau van de totale stroming door de pijp zien we daar echter van af, beschouwen we de stroom als eenparig en als radiaal-symmetrisch, en noemen we de totale axiale kracht, op de wand uitgeoefend p.e.v. oppervlak daarvan, de wandschuifspanning ( $\tau_o$ ). We definiëren nu een (dimensieloze) weerstandscoefficiënt  $\lambda$  als de verhouding van  $\tau_o$  tot  $\rho U^2$  (vergelijk met  $c_\tau$  in hoofdstuk 10). M.a.w., we stellen

$$\boxed{\tau_o = \lambda \rho U^2} \tag{11.6}$$

Zolang alle onafhankelijk variabelen gegeven zijn door (11.4) is  $\tau_o$  geheel daardoor bepaald en kan  $\lambda$  slechts een functie zijn van de in (11.5) genoemde dimensieloze parameters:

$$\boxed{\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{k}{D}\right)} \tag{11.7}$$

De waarde van  $\lambda$  hangt samen met de vorm van het snelheidsprofiel, die op zijn beurt er sterk van afhangt of de stroming in de pijp laminair is of turbulent. Fig. 11.4 laat dat zien: in turbulente stromen varieert de snelheid in het grootste deel van het dwarsprofiel aanzienlijk minder dan in laminaire stromen; dit is het gevolg van de door de turbulentie veroorzaakte laterale menging. Hier moet bij een gegeven gemiddelde snelheid natuurlijk een sterkere gradiënt bij de wand tegenover staan, resulterend in een verhoogde wandweerstand dan bij laminaire stroom.

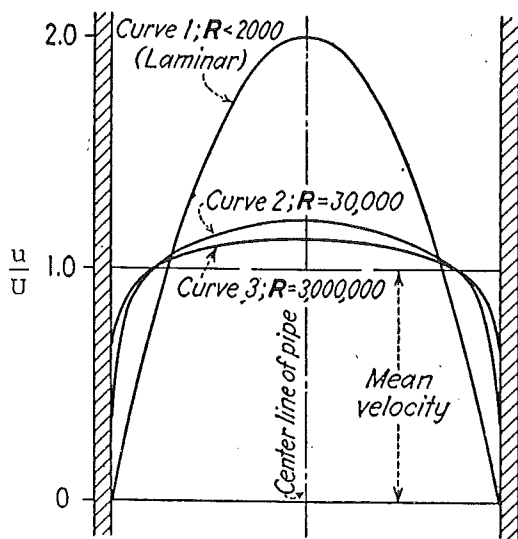


Fig. 11.4

Snelheidsprofielen in gladde buis voor laminaire stroom en voor twee gevallen van turbulente stroom. Zie Tabel 11.2 voor enkele bijbehorende waarden. Figuur ontleend aan Rouse (1938)

Nr	Re	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$
1	$<2 \times 10^3$	-	2	$4/3$
2	$3 \times 10^4$	0,0029	1,063	1,022
3	$3 \times 10^6$	0,0012	1,027	1,009

Tabel 11.2 Getalswaarden behorend bij Fig. 11.4; Re gegeven;  $\lambda$  conform (11.38) c.q. Fig. 11.10;  $\alpha$  en  $\beta$  conform A.5 en A.6.

De snelheidsprofielen in Fig. 11.4 zijn voor een gladde buis waarbij  $\lambda$  slechts van  $Re$  afhangt. De bijbehorende waarden van  $Re$  en  $\lambda$  zijn gegeven in Tabel 11.2, evenals die van de snelheidsverdelingscoëfficiënten  $\alpha$  en  $\beta$ . (De bepaling van die waarden komt nog aan de orde.)

Gezien de grote verschillen tussen laminaire en turbulente stromen worden deze twee gevallen afzonderlijk behandeld. Voorafgaand daaraan gaan we evenwichtsvoorwaarden opstellen. Die zijn onafhankelijk van het feit of de stroming laminair is dan wel turbulent.

### 11.3.3 Evenwichtsvoorwaarden

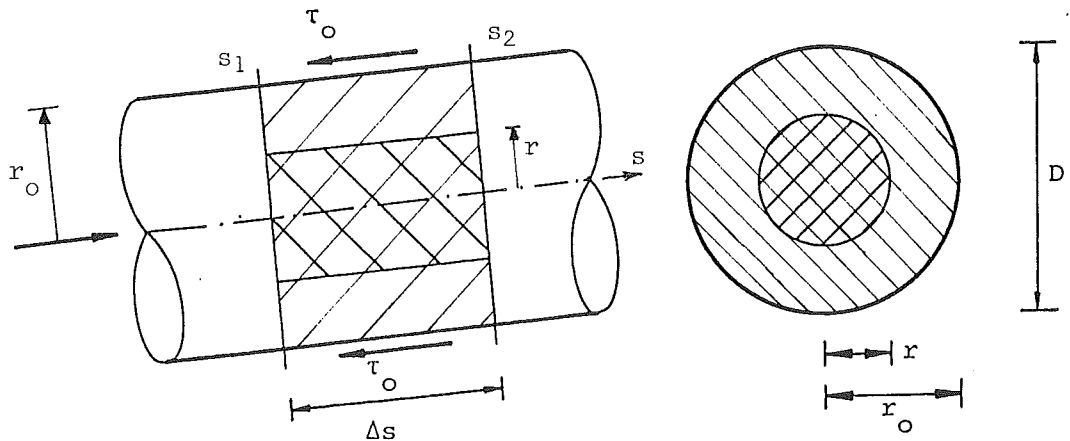
De drijvende kracht voor de stroming wordt geleverd door de gradiënt van de dynamische druk ( $p_d$ ), ofwel  $\rho g$  maal de gradiënt van het piëzometrisch niveau ( $h$ ) (zie hoofdstuk 6).

Bij eenparige stroming (zoals hier verondersteld) zijn de stroomlijnen recht en is het piëzometrisch niveau constant in elke dwarsdoorsnede. (Weerstand werkt alleen tegen de stroomrichting in en is daarom niet van invloed op de geldigheid van deze uitspraak.)

Omdat we uitgaan van eenparige stroming zijn de versnellingen nul, ook in axiale richting, en is er in die richting evenwicht tussen de drijvende kracht en de weerstand. We passen dit eerst toe op een cilindervormige moot tussen twee dwarsdoorsneden  $s = s_1$  en  $s = s_2 = s_1 + \Delta s$ , in radiale richting (coördinaat  $r$ ) begrensd door de pijpwand waar  $r = r_0 = \frac{1}{2}D$  (Fig. 11.5). (N.B. De in deze figuur dubbel gearceerde moot ( $r < r_0$ ) komt pas op p. 171 ter sprake, vgl. 11.19.)

Omdat de stroming eenparig is heffen de meevoeringen van impuls naar het balansgebied door de doorgangen  $s = s_1$  en  $s = s_2$  elkaar op. De resulterende kracht op de beschouwde moot is

$$F_1 - F_2 = (p_{d_1} - p_{d_2})A \approx - \frac{\partial p_d}{\partial s} A \Delta s = - \rho g \frac{\partial h}{\partial s} A \Delta s = - \rho g \frac{dh}{ds} A \Delta s$$



Figuur 11.5 Balansgebieden met lengte  $\Delta s$  en straal  $r$  of  $r_o$

Deze stellen we gelijk aan de wandwrijving ( $\Delta W$ ) op de moot. Dat geeft

$$-\frac{dH}{ds} = \frac{\Delta W}{\rho g A \Delta s} = i_w \quad (11.8)$$

Hierin is  $i_w$  het z.g. wrijvingsverhang, per definitie gelijk aan de wrijving p.e.v. gewicht.

De omtrek waarover de wandwrijving werkt (in een dwarsdoorsnede) geven we weer met het symbool  $O$ ; daarmee geldt  $\Delta W = \tau_o O \Delta s$ , en gaat (11.8) over in

$$\tau_o = \rho g (A/O) i_w = \rho g R i_w \quad (11.9)$$

Hierin is  $R$  gedefinieerd als de verhouding  $A/O$ , de z.g. hydraulische straal. Voor de pijp geldt  $R = \frac{1}{4}D = \frac{1}{2}r_o$ , zodat

$$\tau_o = \frac{1}{2} \rho g r_o i_w \quad (11.10)$$

Wanneer we (11.6) substitueren in (11.9) ontstaat een verband tussen  $i_w$  en  $U$ :

$$i_w = \lambda \frac{U^2}{gR} \quad (11.11)$$

De hiermee overeenkomende daling van het energieniveau over een pijplengte L is

$$\Delta H_w = i_w L = \lambda \frac{L}{R} \frac{U^2}{g} = 8\lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (11.12)$$

In de laatste vorm wordt  $\Delta H_w$  uitgedrukt in de snelheidshoogte, zoals ook gebruikelijk is voor de verdragingsverliezen  $\Delta H_v$ . Deze vorm wordt voor pijpleidingen veel gebruikt, waarbij de factor  $8\lambda$  vaak nog wordt vervangen door de z.g. wrijvingsfactor f van Darcy-Weisbach:

$$f = 8\lambda \quad (11.13)$$

$$\tau_o = \lambda \rho U^2 = \frac{f}{8} \rho U^2 \quad (11.14)$$

$$\Delta H_w = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (11.15)$$

N.B.1 De introductie van een factor 8 in de verhouding  $\tau_o/\rho U^2$ , naast een evenredigheidscoëfficiënt zoals  $\lambda$ , heeft fysisch geen betekenis en werkt in feite alleen maar verwarrend. Het is blijkbaar gedaan om het wrijvingsverlies te kunnen schrijven zoals in (11.15). Dat werkt overigens alleen voor leidingen met een cirkelvormige dwarsdoorsnede.

N.B.2 Het gebruik van symbolen in de vakliteratuur is niet gestandaardiseerd. (Wat hier  $\lambda$  is wordt bv. ook wel f genoemd, en omgekeerd.) Daarom moet per geval de precieze betekenis van een z.g. "wrijvingsfactor" worden nagegaan, bij voorkeur via betrekkingen zoals (11.14).

N.B.3 Omdat  $U = Q/A = \frac{4}{\pi} Q/D^2$  volgt uit (11.15) dat  $\Delta H_w$  bij gegeven Q omgekeerd evenredig varieert met  $D^5$ , als we de overige factoren (inclusief f) eveneens constant veronderstellen. Een geringe vergroting van de (ontwerp)diameter bij gegeven Q resulteert dus in een relatief sterke daling van de wrijvingsverliezen.

N.B.4 In berekeningen van wandweerstand wordt veel gebruik gemaakt van de z.g. schuifspanningssnelheid ( $u_x$ ), gedefinieerd zodanig dat  $\tau_o = \rho u_x^2$ , ofwel

$$u_* = (\tau_o / \rho)^{1/2} \quad (11.16)$$

Substitutie hierin van (11.6) respectievelijk (11.9) geeft

$$u_* = \sqrt{\lambda} U \quad (11.17)$$

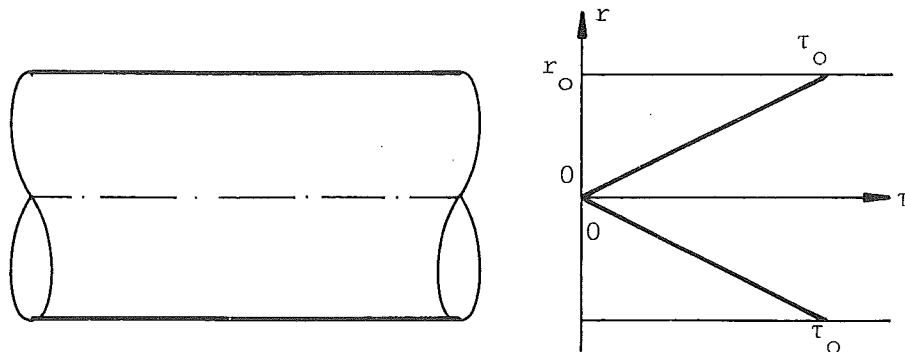
respectievelijk

$$u_* = (gRi_w)^{1/2} \quad (11.18)$$

Voor de hierna volgende berekening van het snelheidsprofiel moet de schuifspanning ( $\tau$ ) bekend zijn als functie van de radiale coördinaat  $r$ . Toepassing van dezelfde redenering die leidde tot (11.10), nu op het in Fig. 11.5 dubbel gearceerde mootje met willekeurige straal  $r$  i.p.v.  $r_o$ , geeft

$$\tau(r) = \frac{1}{2} \rho g r i_w = \frac{r}{r_o} \tau_o \quad (11.19)$$

De schuifspanning neemt dus lineair toe van de waarde nul in de pijp-as tot  $\tau_o$  aan de wand (Fig. 11.6).



*Figuur 11.6 Lineaire schuifspanningsverdeling in eenparige pijpstroming*

#### 11.3.4 Laminaire stroom

Voor laminaire pijpstroming ( $Re < ca. 2300$ ) geldt

$$\tau(r) = \eta \frac{du}{dn} = - \eta \frac{du}{dr} \quad (11.20)$$



Substitutie hierin van (11.19) geeft

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\tau}{\eta} = -\frac{\tau_0}{\eta r_0} r$$

Integratie hiervan naar  $r$  en gebruikmaking van de voorwaarde  $u = 0$  waar  $r = r_0$  (kleef) resulteert in het volgende parabolische snelheidsprofiel:

$$u(r) = \frac{\tau_0}{2\eta r_0} (r_0^2 - r^2) \quad (11.21)$$

Dit is een axiaal symmetrisch, parabolisch profiel (zie Fig. 11.4, "curve" 1) met een maximale snelheid  $u_{\max} = \frac{1}{2}\tau_0 r_0/\eta$ .

Om  $\tau_0$  uit te kunnen drukken in de gemiddelde snelheid berekenen we eerst het debiet:

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r u \, dr = \frac{\pi}{4} \frac{\tau_0 r_0^3}{\eta}$$

Hieruit volgt via  $U = Q/A$ :

$$U = \frac{\tau_0 r_0}{4\eta} \quad (= \frac{1}{2} u_{\max}) \quad (11.22)$$

en ook

$$\tau_0 = \frac{4}{\pi} \frac{\eta}{r_0^3} Q = 4\eta \frac{U}{r_0} \quad (11.23)$$

N.B.1 De evenredigheden in bovenstaande betrekkingen voor  $Q$ ,  $U$  en  $\tau_0$  volgen ook uit dimensiebeschouwingen alléén.

N.B.2 Substitutie van (11.21) en (11.22) in de definities van de coëfficiënten  $\alpha$  en  $\beta$  voor de meevoering van kinetische energie (vgl. 7.10) respectievelijk impuls (vgl. 8.10) geeft als resultaat  $\alpha = 2$  en  $\beta = 4/3$ . Deze waarden wijken aanzienlijk af van de eenheid, veel meer dan in eenparige turbulente stromen waar de lokale gemiddelde snelheden minder variëren in het dwarsprofiel (behalve vlak bij de

wand), als gevolg van de turbulente menging (zie Fig. 11.4 en de daarbij behorende waarden van  $\alpha$  en  $\beta$  in Tabel 11.2).

Door substitutie van (11.23) in (11.10) volgt voor het wrijvingsverhang

$$i_w = \frac{8}{\pi} \frac{\nu Q}{gr_o^4} = \frac{8\nu U}{gr_o^2} \quad (11.24)$$

De evenredigheden hierin zijn oorspronkelijk – onafhankelijk van elkaar – experimenteel vastgesteld door Hagen (1839) en Poiseuille (1841), maar (11.24), en ook de laminaire stroming door een buis in zijn totaliteit, wordt gewoonlijk slechts naar Poiseuille genoemd.

Stroming van grondwater door fijn zand is laminair en voldoet aan een soortgelijke betrekking als (11.24). Het is daarbij gebruikelijk de snelheid uit te drukken als een z.g. doorlatendheid ( $K$ ) maal het verhang ( $i$ ) (wet van Darcy). Deze  $K$  heeft de dimensie van een snelheid. Uit (11.24) volgt dat  $K$  evenredig moet zijn met  $gD^2/\nu$ , waarin  $D$  een kenmerkende korrelgrootte is (die bepalend is voor de dwarsafmeting van de poriën). Bij constante  $\nu$  en  $g$  hangt  $K$  slechts van  $D$  af, maar de waarden van  $K$  die voor grondwaterstromen worden gegeven als functie van  $D$  moeten voor toepassing op stromen van andere vloeistoffen (bv. olie) worden omgerekend via  $K \sim gD^2/\nu$ .

De laminaire stroming is strikt eenparig (geen turbulente fluctuaties) en daarom komt  $\rho$  niet voor in (11.23). Bovendien is  $\tau_o$  in (11.23) evenredig met  $U$ , niet met  $U^2$ . Op beide punten wijkt (11.23) af van (11.6). Passen we de laatste desondanks toe op de laminaire stroming dan geldt

$$\tau_o = \lambda \rho U^2 = 4\eta \frac{U}{r_o}$$

ofwel

$$\lambda = 4 \frac{\eta}{\rho U r_o} = \frac{8}{Re} \quad (f = \frac{64}{Re}) \quad (11.25)$$

Het oneigenlijke gebruik van (11.6) in het viskeuze (laminaire) regime wordt gecompenseerd door de coëfficiënt omgekeerd evenredig

met  $Re$  te laten variëren (evenals bij de sleepkracht op een bol in het Stokes-regime; zie hoofdstuk 10).

Fig. 11.9 geeft meetwaarden van  $f$  vs  $Re$  voor gladde en ruwe buizen. In het laminaire gebied ( $Re < ca\ 2300$ ) stemt de theoretische betrekking (11.25) voortreffelijk met de meetwaarden overeen.

### 11.3.5 Turbulente stroom

#### Inleiding

Voor waarden van  $Re$  boven ca. 4000 is de pijpstroming turbulent. De ongeordende, wervelende, in tijd en ruimte fluctuerende snelheden zijn niet in detail te voorspellen. De berekening van turbulente stromen is daarom zeer veel moeilijker dan die van laminaire. Theorievorming is slechts globaal; er is een zwaar beroep nodig op het experiment.

De behandeling van turbulentie-theorie valt buiten het bestek van dit inleidende vak. We volstaan daarom met kwalitatieve en grootte-orde beschouwingen, aangevuld met een résumé van de belangrijkste theoretisch/experimentele gebruikresultaten.

We maken onderscheid tussen de stroming in de onmiddellijke omgeving van de pijpwand ( $r \approx r_0$ ) en die in de turbulente hoofdstroom daarbuiten. Voor de beschrijving van beide gebruiken we als coördinaat de afstand uit de pijpwand ( $y = r_0 - r$ ).

#### Stroming bij de wand

Wandwrijving is het gevolg van zijdelingse overdracht, tussen vloeistof en pijpwand, van voorwaartse impuls. Deze overdracht kan op verschillende manieren plaatsvinden, afhankelijk van de relatieve ruwheid van de wand.

Vlak bij een gladde wand kan de stroom niet turbulent zijn, en is er een dunne laminaire sublaag (dikte  $\delta$ ) tussen de wand en de turbulente hoofdstroom. De impuls-overdracht tussen vloeistof en wand vindt dan plaats via een viskeuze schuifspanning (huidweerstand op micro-schaal). Daarvoor blijft de overall-weerstandscoëfficiënt  $f$  afnemen met toenemende waarden van  $Re$  (zie Fig. 11.9).

Bij een relatief ruwe wand steken de ruwheidselementen (hoogte:  $k$ ) door tot in de turbulente stroom. De impulsoverdracht op micro-schaal vindt dan plaats via de vormweerstand van de ruwheidselementen. Daarbij nadert de overall-weerstandscoefficiënt  $f$  voor een gegeven relatieve ruwheid  $k/D$  tot een constante waarde bij voldoende grote waarden van  $Re$  (zie Fig. 11.9).

Wanneer de ruwheidselementen niet tot in de turbulente stroom doordringen maar verzonken blijven in de laminaire sublaag, m.a.w. wanneer  $k \ll \delta$ , heeft een geometrisch ruwe wand op de hoofdstroom eenzelfde effect als een gladde wand. "Glad" of "ruw" is dus relatief. We spreken dan ook van hydraulisch glad respectievelijk hydraulisch ruw. Om dit onderscheid te verduidelijken gaan we in op de onafhankelijke parameters die bepalend zijn voor de stroming bij de wand.

We gaan uit van de stroming van een gegeven vloeistof ( $\rho$  en  $\eta$  bekend) langs een pijpwand van een gegeven ruwheid (hier weer te geven door een enkele ruwheidsafmeting  $k$ ). We stellen nu dat de stroming in de onmiddellijke omgeving van de wand slechts via de schuifspanning ( $\tau$ ) afhangt van de hoofdstroom, onafhankelijk van de pijpdiameter, het debiet of de gemiddelde snelheid ( $Q/A$ ). In de wandomgeving geldt  $r \approx r_0$  en dus tevens  $\tau(r) \approx \tau_0$  (zie 11.19). De stroming in deze omgeving is dan slechts afhankelijk van

$$(\rho, \eta, k, \tau_0)$$

Hieruit is één onafhankelijke dimensieloze parameter te formeren, bijv.  $(\rho\tau_0)^{1/2} k/\eta$  ofwel  $(\tau_0/\rho)^{1/2} k/\nu$ . Met substitutie van  $u_* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$  voor de z.g. schuifspanningssnelheid (zie 11.16) is deze parameter te schrijven als

$$Re_* = \frac{u_* k}{\nu} \tag{11.26}$$

d.w.z. als een kental van Reynolds dat typerend is voor de stroming op micro-schaal bij de pijpwand met ruwheid.

Voor een gladde wand ( $k \rightarrow 0$ ) is er een laminaire sublaag waarvan de dikte ( $\delta$ ) slechts van  $\rho$ ,  $\eta$  en  $\tau_0$  kan afhangen. Van deze grootheden

heeft alleen de combinatie  $\eta/(\rho\tau_0)^{1/2}$  ofwel  $\nu/u_*$  de dimensie van een lengte. Hieruit volgt  $\delta \sim \eta/(\rho\tau_0)^{1/2}$  ofwel  $\delta \sim \nu/u_*$  (een precieze waarde voor  $\delta$  wordt gegeven in vergelijking 11.33). Dan geldt ook

$$Re_* = \frac{u_* k}{\nu} \sim \frac{k}{\delta}$$

De waarde van  $Re_*$  is dus bepalend voor de vraag of de wandstroming in het hydraulisch gladde regime is ( $k \ll \delta$ ) dan wel in het hydraulisch ruwe regime ( $k \gg \delta$ ).

In de laminaire sublaag bij een gladde wand geldt

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

Integratie hiervan in de benadering  $\tau \approx \text{const} = \tau_0$  en met de randvoorwaarde  $u = 0$  op  $y = 0$  (kleef) levert

$$u = \frac{\tau_0}{\eta} y \tag{11.27a}$$

Dit komt overeen met (11.21) wanneer we daarin  $r$  tot  $r_0$  laten naderen (zodat  $r_0^2 - r^2 \rightarrow 2r_0 y$ ). In dimensieloze vorm wordt (11.27a):

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \tag{11.27b}$$

### Turbulente hoofdstroom

De turbulente wervelingen veroorzaken in de hoofdstroom een intensieve menging van vloeistof, resulterend in veel minder sterke snelheidsgradiënten ( $du/dr$ ) dan bij gelijke schuifspanning het geval zou zijn in laminaire stroming. Het profiel van de gemiddelde snelheid ( $u(r)$ ) in turbulente stroom is daardoor veel vlakker dan het parabolische profiel van de laminaire stroom (zie Figuur 11.4).

Globale theoretische beschouwingen van Prandtl en Von Karman leiden tot de verwachting dat de snelheidsverdeling in de turbulente hoofdstroom logaritmisch zou zijn, d.w.z. dat de lokale gemiddelde snelheid ( $u$ ) varieert evenredig met de logaritme van de afstand uit de wand:

$$\boxed{\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}} \quad (11.28)$$

Hierin is  $\kappa$  de z.g. constante van Von Karman;  $y_0$  is een integratie-  
"constante" zodanig dat  $u = 0$  waar  $y = y_0$ . De waarde van  $y_0$  hangt af  
van de condities bij de wand, zoals hieronder wordt toegelicht en  
uitgewerkt. Eerst leiden we uit (11.28) enige eigenschappen af die  
onafhankelijk zijn van de precieze waarde van  $y_0$ .

Door integratie van  $u(r)$  over de pijpdoorsnede kan het debiet  $Q$   
worden berekend en vervolgens  $U = Q/A$ , met als resultaat (zie  
Appendix, p. 190 e.v.):

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_0}{y_0} \right) \quad (11.29)$$

Omdat  $u_* = \sqrt{\lambda} U$  (zie 11.17) geldt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_0}{y_0} \right) = 5,75 \log \left( e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_0}{y_0} \right) \quad (11.30)$$

Alvorens in te gaan op berekeningen van  $\lambda$  duiden we kort op een  
verband tussen  $\lambda$  en het snelheidsprofiel. Dit profiel is logarith-  
misch, met  $u = 0$  waar  $y = y_0$  (dicht bij de wand) tot  $u = u_{\max}$  waar  
 $y = r_0$  (in de as van de buis). De waarde van de maximale snelheid  
volgt uit

$$\frac{u_{\max}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{r_0}{y_0}$$

Substitutie hierin van  $u_* = \sqrt{\lambda} U$  en vervolgens van (11.30) geeft

$$\frac{u_{\max}}{U} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\kappa} \ln \frac{r_0}{y_0} = 1 + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\lambda}}{\kappa}$$

Een toeneming van  $r_0/y_0$ , d.w.z. een afneming van de wandinvloed,  
heeft tot gevolg dat de weerstandsfactor  $\lambda$  afneemt (zie 11.30) en  
ook dat  $u_{\max}/U$  afneemt, tot deze voor  $\lambda \rightarrow 0$  de waarde 1 nadert. Het

snelheidsprofiel benadert met afnemende  $\lambda$  dus meer het uniforme profiel (zie Fig. 11.4). Voor de snelheidsverdelingscoëfficiënten  $\alpha$  respectievelijk  $\beta$  (voor meevoering van kinetische energie respectievelijk impuls) houdt dit in  $\alpha \rightarrow 1$  en  $\beta \rightarrow 1$  als  $\lambda \rightarrow 0$ . Dit blijkt ook uit de berekende variatie van  $\alpha$  en  $\beta$  met  $\lambda$ , gegeven in de Appendix bij dit hoofdstuk. Voor een getallenvoorbeeld wordt verwezen naar Fig. 11.4 en Tabel 11.2.

De geldigheid van het logaritmische profiel (11.28) is experimenteel onderzocht (en bevestigd) door Nikuradse (1932, 1933), die ook empirisch de waarden van  $\kappa$  en  $y_0$  bepaalde. Een resumé van zijn belangrijk(st)e resultaten wordt hieronder gegeven.

Nikuradse verrichtte gedetailleerde metingen van snelheidsprofielen en weerstand in eenparige stroom in gladde en ruwe buizen. De ruweheidselementen bestonden uit dicht opeengepakte zandkorrels van vrijwel dezelfde diameter ( $k$ ), gelijmd tegen de binnenwand van de buis. Zijn metingen voor turbulente hoofdstroom bestreken het bereik van hydraulisch gladde wandcondities via een overgangsrégime tot hydraulisch ruwe wandcondities.

#### Hydraulisch gladde wandcondities

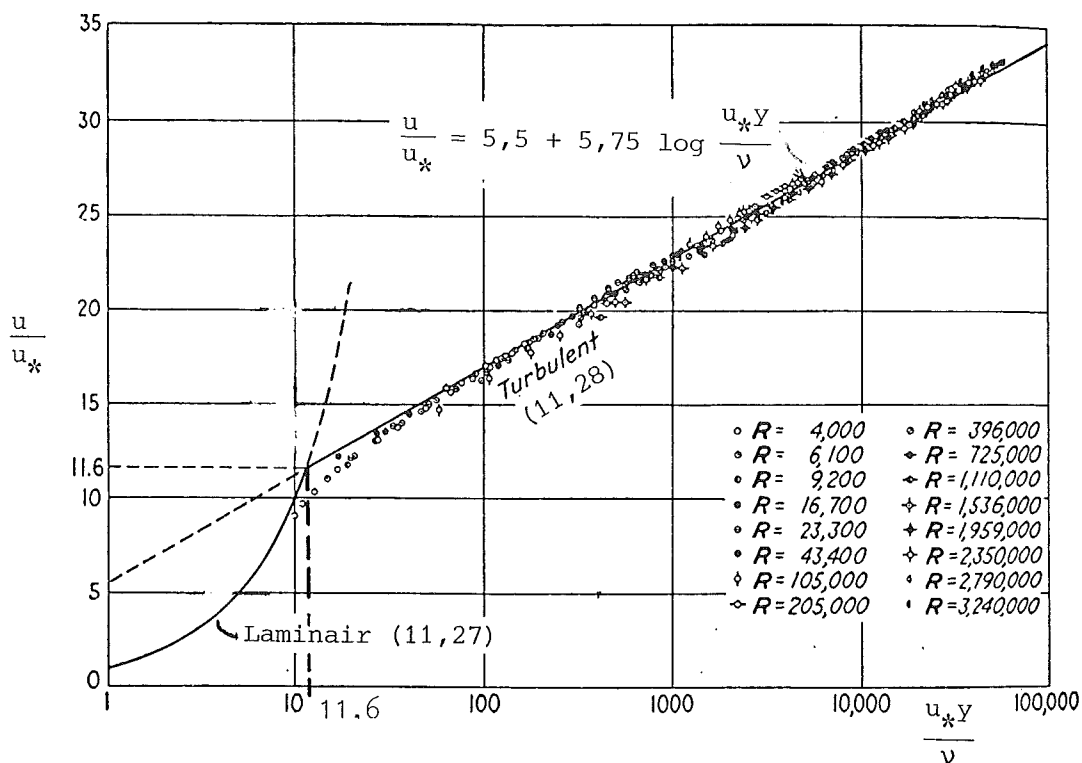
Voor hydraulisch gladde wandcondities kan  $y_0$  alleen evenredig zijn met  $\delta$ , de dikte van de laminaire sublaag. De verhouding  $y/y_0$  in (11.28) wordt dan evenredig aan  $y/\delta$ , ofwel aan  $u_* y/\nu$ . De door Nikuradse gemeten snelheidsprofielen voor turbulente hoofdstroom en hydraulisch gladde wandcondities staan op semi-logaritmische schaal in Fig. 11.7 in de vorm  $u/u_*$  (lineair) tegen  $u_* y/\nu$  (logaritmisch). Het rechtlijnig verloop van de meetpunten bevestigt de geldigheid van het logaritmisch snelheidsprofiel. Uit de helling en positie van de rechte lijn door de meetpunten is af te leiden dat

$$\kappa \approx 0,4 \quad (11.31)$$

$$y_0 \approx 0,11 \nu/u_* \text{ (glad)} \quad (11.32)$$

In Fig. 11.7 is de geleidelijke overgang te zien tussen het logaritmische profiel in de hoofdstroom en het lineaire profiel in de laminaire sublaag, gegeven door (11.27). (Dit lineaire profiel wordt

in het semi-logarithmische diagram van Fig. 11.7 kromlijinig afgebeeld.) De dikte van de laminaire sublaag ( $\delta$ ) wordt gelijk gesteld aan de afstand van het snijpunt van beide profielen uit de wand.



Figuur 11.7 Snelheidsprofielen gemeten door Nikuradse; gladde wandstroming (figuur ontleend aan Rouse, 1938).

Gelijkstelling van  $u/u_*$  volgens (11.27b) en (11.28) en substitutie van de empirische coëfficiënt-waarden volgens Nikuradse (11.31 en 11.32) resulteert in

$$\delta = 11,6 \nu/u_* \tag{11.33}$$

Voor de waarde van  $y_0$  (zie 11.32) volgt hieruit

$$y_0 \approx \delta/105 \tag{11.34}$$

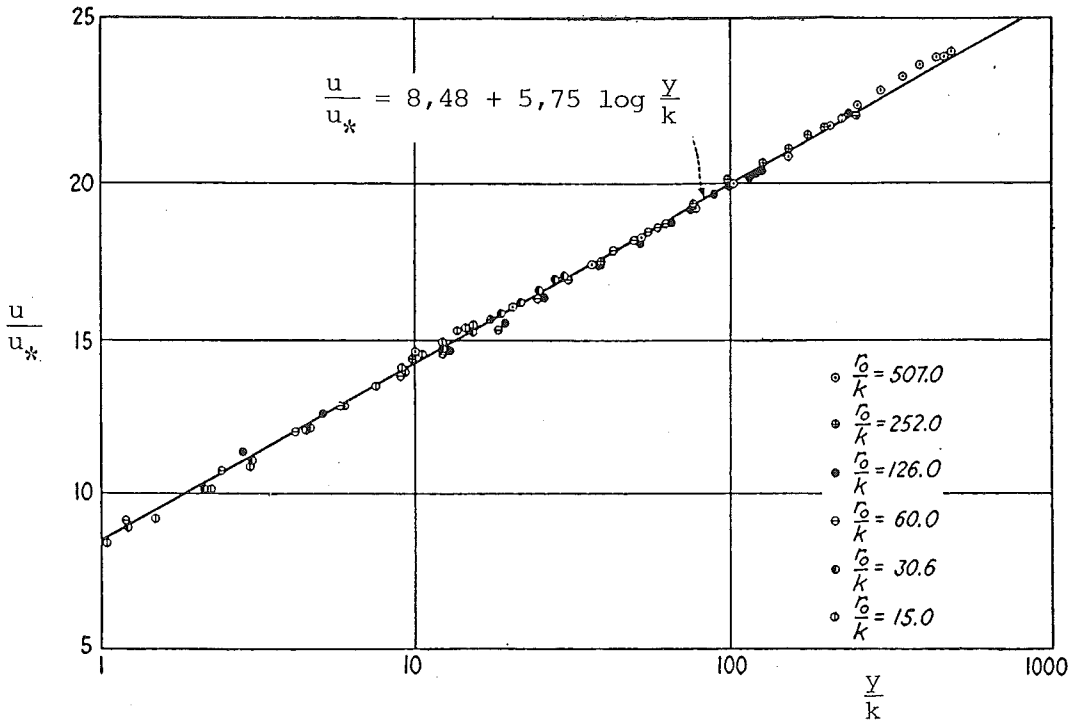
#### Hydraulisch ruwe wandcondities

Voor ruwe wandcondities kan  $y_0$  alleen evenredig zijn aan de ruweheidsmaat  $k$ . De verhouding  $y/y_0$  in (11.28) wordt daarmee evenredig aan  $y/k$ . De door Nikuradse gemeten snelheidsprofielen voor deze condities zijn in Fig. 11.8 weergegeven in de vorm van  $u/u_*$  (lineair) tegen  $y/k$  (logarithmisch). Ook voor dit geval bevestigt



het rechtlijnig verloop de geldigheid van het logaritmisch profiel, zelfs tot aan  $y/k = 1$ , d.w.z. tot aan de bovenkant van de ruweidskorreltjes. Bepaling van twee coëfficiënten uit de rechte lijn door de meetpunten levert opnieuw  $\kappa = 0,4$  (dezelfde waarde als bij gladde wandstroming) en daarnaast

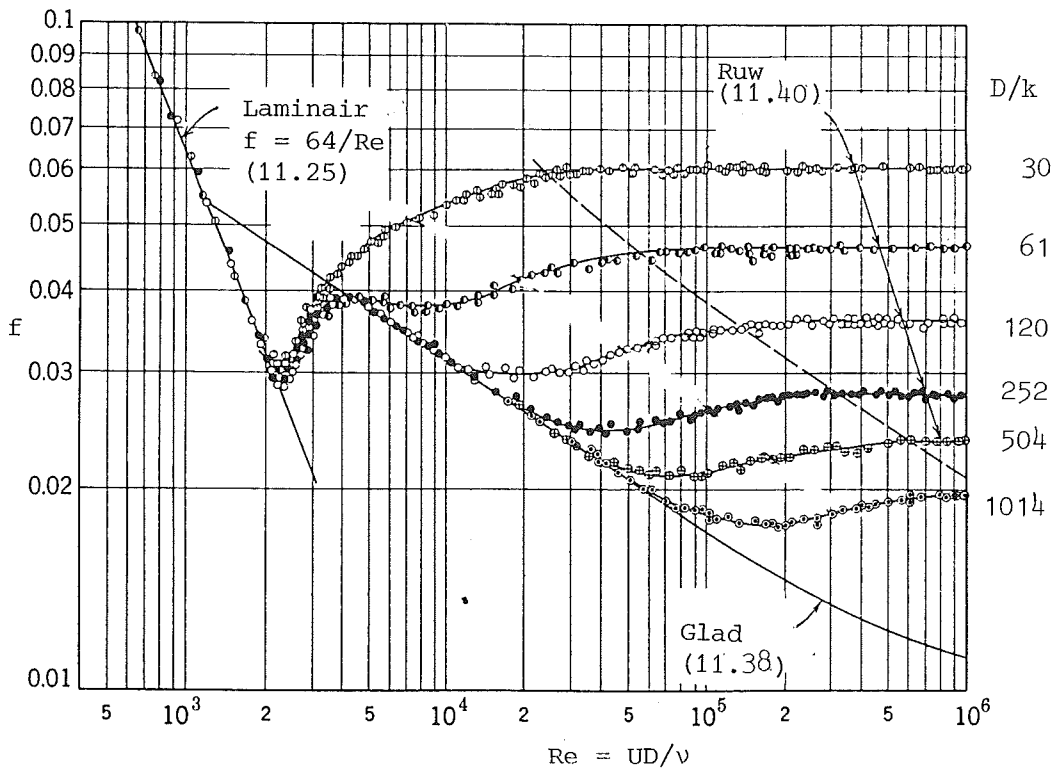
$$y_0 \approx k/30 \text{ (ruw)} \quad (11.35)$$



Figuur 11.8 Snelheidsprofielen gemeten door Nikuradse; ruwe wandstroming (Figuur ontleend aan Rouse, 1938).

Weerstandscoefficiënt

De weerstandscoefficiënt  $f$  (Darcy-Weisbach) is volgens (11.7) slechts afhankelijk van de relatieve ruwheid ( $k/D$ ) en het kental van Reynolds ( $Re = UD/\nu$ ). Nikuradse heeft dit verband empirisch vastgesteld; zijn resultaten staan in figuur 11.9 in de vorm van  $f$  tegen  $Re$  voor een aantal waarden van  $D/k$ .



Figuur 11.9 Meetresultaten van Nikuradse;  $f$  vs  $Re$  voor een reeks van waarden van  $D/k$  (figuur ontleend aan Rouse 1938)

Voor een turbulente hoofdstroom ( $Re > ca. 4000$ ) zijn drie regimes te onderscheiden:

- $f$  varieert met  $Re$ , onafhankelijk van  $k/D$  (hydraulisch glad)
- $f$  varieert met  $k/D$ , onafhankelijk van  $Re$  (hydraulisch ruw)
- overgang tussen bovengenoemde

Merk op dat het verloop van  $f$  vs  $Re$  bij gegeven  $k/D$  sterk lijkt op dat van  $c_w$  vs  $Re$  voor een gegeven voorwerp (zie hoofdstuk 10). In wezen gaat het ook om overeenkomstige stromingsverschijnselen.

De variatie van  $f$  met  $k/D$  en  $Re$  is te berekenen uit de gemeten snelheidsprofielen via (11.30). Substitueren we daarin  $\kappa \approx 0,4$  en  $f = 8\lambda$  dan ontstaat

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_o}{y_o} \right) \quad (11.36)$$

Voor hydraulisch gladde wandcondities geldt  $y_0 \approx 0,11 \nu/u_*$  (zie 11.32). Substitutie hiervan in (11.30) geeft na een kleine aanpassing van de coëfficiënten voor betere aansluiting aan de meetwaarden van  $f$ :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( 1,1 \frac{u_* D}{\nu} \right) \quad (11.37)$$

Omdat  $u_* = \sqrt{f/8} U$  is (11.37) ook te schrijven als

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (0,4 \operatorname{Re} \sqrt{f}) \quad (11.38)$$

Hieruit blijkt expliciet dat  $f$  in het hydraulisch gladde regime slechts van  $\operatorname{Re}$  afhangt (zoals ook volgt uit de algemenere betrekking 11.7).

Substitutie van  $\delta = 11,6 \nu/u_*$  in (11.37) geeft tenslotte

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( 12 \frac{D}{\delta} \right) \quad (11.39)$$

N.B.: Ondanks hun verschillende gedaante komen (11.37), (11.38) en (11.39) vanzelfsprekend op hetzelfde neer, afgezien van kleine numerieke verschillen wegens afrondingen.

Voor hydraulisch ruwe wandcondities geldt  $y_0 \approx k/30$  (zie 11.35). Daarmee gaat de algemene uitdrukking (11.36), voor hydraulisch ruwe condities en na enige empirische aanpassing van de coëfficiënten, over in

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log 3,7 \frac{D}{k} = - 2 \log \left( 0,27 \frac{k}{D} \right) \quad (11.40)$$

Hieruit blijkt expliciet dat  $f$  in het hydraulisch ruwe regime slechts van de relatieve ruwheid  $k/D$  afhangt (zoals ook volgt uit de algemenere betrekking 11.7).

Willekeurige ruwheid

Nikuradse voerde zijn proeven uit in buizen met een kunstmatig aangebrachte ruwheid, bestaande uit dicht gepakte zandkorrels van vrijwel eenzelfde (zeef)diameter ( $k$ ). In praktische toepassingen gaat het om ruwheid die het onbedoelde gevolg is van technische en natuurlijke processen; daarbij is sprake van aanzienlijke variatie in vorm en afmeting van de ruwheidselementen. Om bovenstaande resultaten daarbij toch te kunnen gebruiken is voor verschillende typen ruwheid empirisch een waarde van  $k$  bepaald die (bij hydraulisch ruwe condities) equivalent is aan die van Nikuradse. Tabel 11.3 geeft een overzicht van de uitkomsten (niet beperkt tot pijpleidingen - zie h. 12).

Colebrook en White (1937) hebben nagegaan hoe  $f$  verloopt in de overgang van gladde naar ruwe condities, als functie van  $Re$  bij constante  $k/D$ . Zij vonden dat  $f$  bij technisch-ruwe pijpen veel geleidelijker verloopt dan in Nikuradse's resultaten, en ook monotoon, in tegenstelling tot de resultaten van Nikuradse waarbij  $f$  een minimum heeft in het overgangsgebied. Colebrook (1939) vond dat deze monotone variatie van  $f$  op eenvoudige manier is te benaderen, zodanig dat de limietgevallen van gladde en ruwe condities correct worden weergegeven, nl. door voor  $y_0$  in de algemene uitdrukking (11.36) de som te substitueren van de waarde voor de gladde wandstroming (11.32) en die voor de ruwe wandstroming (11.35). Dan ontstaat (met enige afronding)

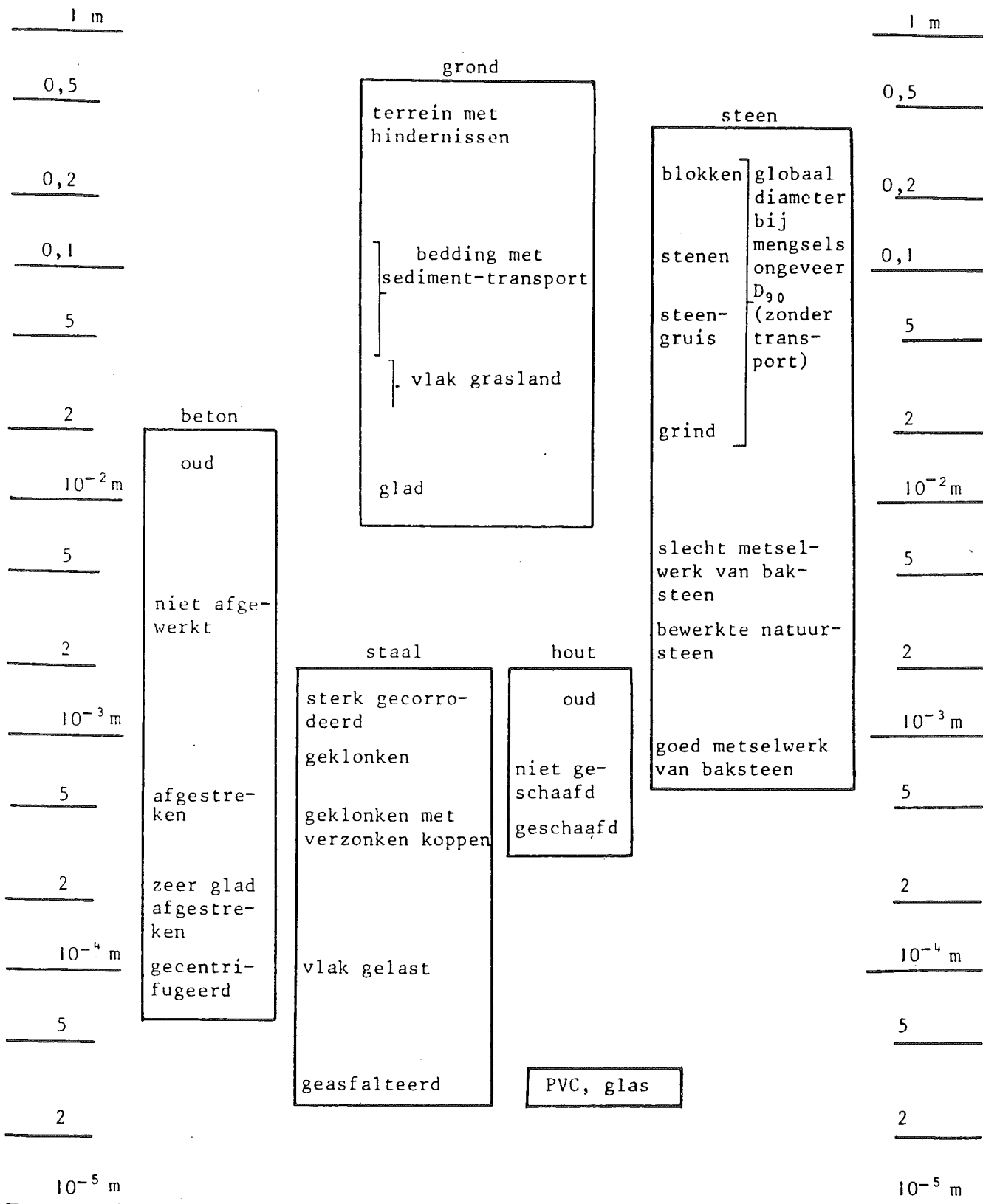
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left[ \frac{e^{-\frac{3}{2}} r_0}{0,1\nu/u_* + 0,03k} \right]$$

Dit is tot diverse andere vormen te herleiden, zoals

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,7 D}{k + \delta/3,5} \quad (11.41)$$

of

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = - 2 \log \left( 0,27 \frac{k}{D} + \frac{2,5}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (11.42)$$



Tabel 11.3 Gegevens k-waarden (equivalente zandruwheid volgens Nikuradse)

of

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ 0,27 \frac{k}{D} \left( 1 + \frac{3,3}{Re_*} \right) \right] \quad (11.43)$$

Dit type weerstandsformules wordt genoemd naar White-Colebrook.

Een grafische weergave van (11.42) is gegeven in Fig. 11.10, waar  $f$  is uitgezet tegen  $Re$  met  $D/k$  als parameter. Daardoorheen zijn lijnen getekend waarlangs  $Re_*$  constant is. De wandstroming is vrijwel ruw voor  $Re_* > ca. 70$  en vrijwel glad voor  $Re_* < ca. 0,15$  (zie ook 11.43).

Wanneer bij gegeven pijp ( $k, D$ ) en vloeistof ( $\rho, \eta$  ofwel  $\rho, \nu$ ) het debiet is gegeven (dus ook  $U$ ) kan  $f$  worden afgelezen in Fig. 11.10 via  $Re = UD/\nu$  en  $D/k$ . (Bij gebruikmaking van de formules zou itereren nodig zijn.) Daarna volgt het wrijvingsverval via de formule van Darcy-Weisbach (11.15). Is daarentegen het verhang gegeven en moet  $U$  worden berekend dan wordt eerst  $u_*$  bepaald volgens  $u_* = (gRi_w)^{1/2} = \frac{1}{2}(gDi_w)^{1/2}$  (zie 11.18) waarna  $Re_* = u_*k/\nu$  bekend is. Samen met de gegeven waarde van de relatieve ruwheid ( $k/D$ ) kan  $f$  vervolgens direct (zonder iteratie) worden berekend uit (11.43), of in Fig. 11.10 worden afgelezen.

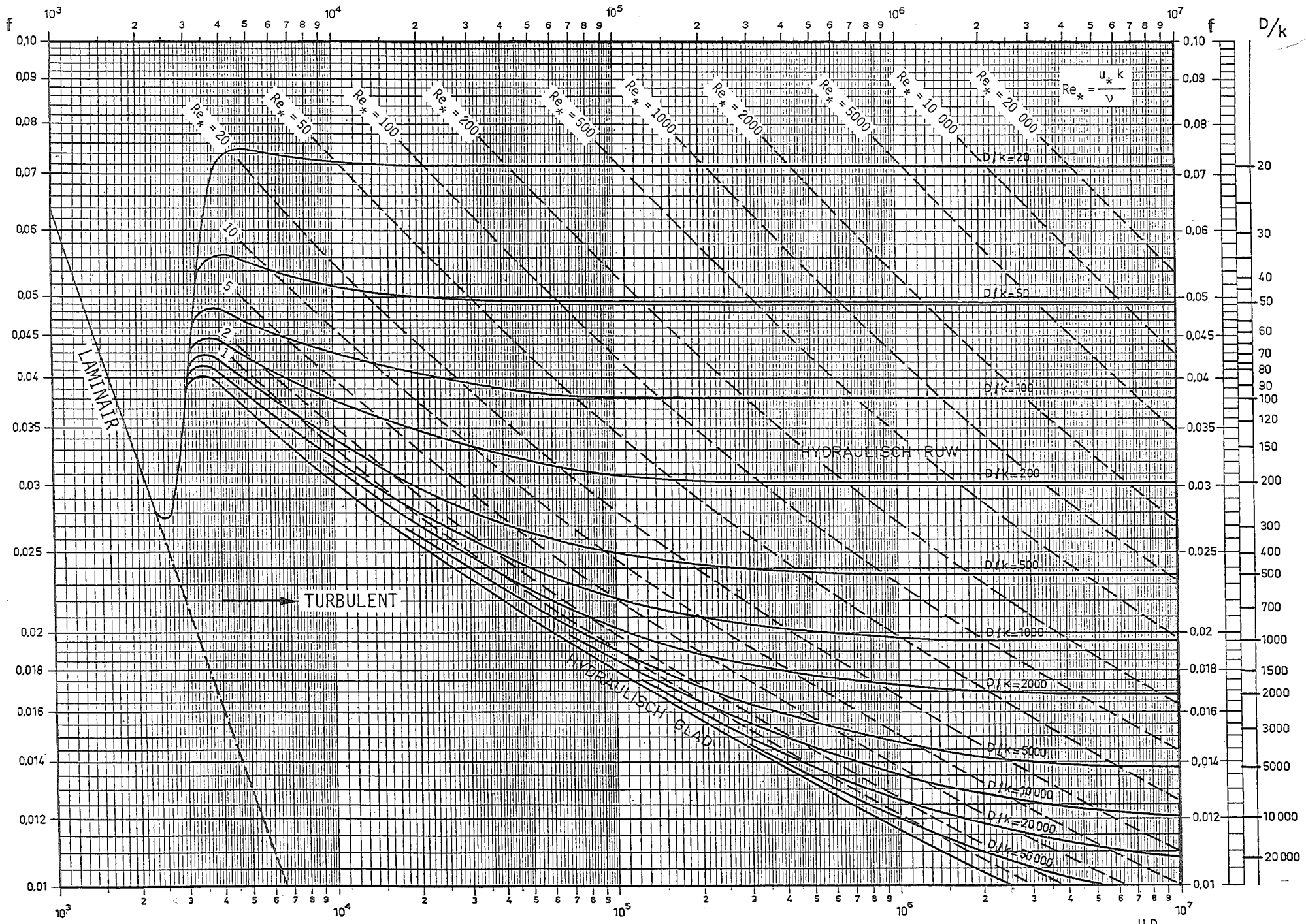
#### Voorbeeld

Bereken  $i_w$  voor de stroming van water ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) met een debiet  $Q = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$  door een pijp met  $D = 0,3 \text{ m}$  en  $k = 0,1 \text{ mm}$  (a) respectievelijk  $k = 1,5 \text{ mm}$  (b).

Opl.:  $A = \pi D^2/4 = 0,071 \text{ m}^2 \rightarrow U = Q/A = 1,41 \text{ m/s} \rightarrow Re = UD/\nu = 4,2 \times 10^5$ .

Geval (a):  $k = 0,1 \text{ mm} \rightarrow D/k = 3000$ ; met  $Re = 4,2 \times 10^5 \rightarrow$  Fig. 11.10  $\rightarrow f = 0,017 \rightarrow i_w = f \frac{U^2}{2gD} = 5,8 \times 10^{-3}$  (antw.)

N.B.1:  $u_* = \sqrt{f/8} U = 0,065 \text{ m/s} \rightarrow \delta = 11,6 \nu/u_* = 0,18 \text{ mm}$ . Merk op



Waarde van de wrijvingscoëfficiënt  $f$  als functie van het getal van Reynolds en de relatieve wandruwheid volgens Colebrook

$\rightarrow Re = \frac{UD}{\nu}$

Figuur 11.10

dat  $\delta$  inderdaad zeer klein is t.o.v. de straal van de pijp. (Voor  $y_0 \approx \delta/105$  geldt dit nog sterker.)

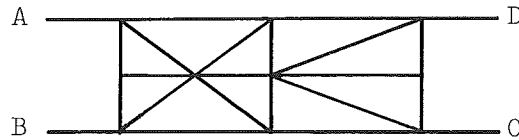
N.B.2: In dit geval zijn  $\delta$  en  $k$  van dezelfde grootte-orde, maar de invloed van  $\delta$  overheerst. (Zie de ligging van het punt  $Re = 4,2 \times 10^5$  en  $D/k = 3000$  in Fig. 11.10.)

Geval (b):  $k = 1,5 \text{ mm} \rightarrow D/k = 200$ ; met  $Re = 4,2 \times 10^5 \rightarrow$  Fig. 11.10  
 $\rightarrow f = 0,030 \rightarrow i_w = f \frac{U^2}{2gD} = 1,0 \times 10^{-2}$  (antw.)

N.B.:  $u_* = 0,086 \text{ m/s} \rightarrow \delta = 0,13 \text{ mm}$  ofwel vrijwel verwaarloosbaar t.o.v.  $k \rightarrow$  ruwe regime (volgt ook uit  $Re_* = 86$ ; zie voorts de ligging van het punt met  $Re = 4,2 \times 10^5$  en  $D/k = 200$  in Fig. 11.10).

#### 11.4 Leidingstelsels

We geven in het kort weer hoe bovenstaande resultaten kunnen worden gebruikt voor de berekening van de debieten en de piëzometrische niveaus in een stelsel van leidingen, bestaande uit z.g. takken ( $i = 1, 2, \dots$ ) die samenkomen in knooppunten (zie Fig. 11.11). Elke tak wordt verondersteld een constante diameter en ruwheid te hebben,



Figuur 11.11 Leidingstelsel (principeschets)

zodat de stroming per tak eenparig is, met een verval van knooppunt 1 tot knooppunt 2 gegeven door

$$\Delta h_{1,2} = h_1 - h_2 = \chi_1 Q_1 |Q_1| \quad (11.44)$$

waarin

$$\chi_1 = \frac{f_1}{2g} \frac{L_1}{D_1 A_1^2} = \frac{8}{\pi^2 g} \frac{f_1 L_1}{D_1^5}$$



en waar  $Q_i > 0$  bij stroming van 1 naar 2 en  $Q_i < 0$  bij stroming van 2 naar 1.

Voor een knooppunt geldt dat de som van de debieten ernaartoe, inclusief een eventueel (bekende) toevoer  $Q_{\text{ext}}$  van buitenaf, gelijk is aan nul:

$$\sum_{i=1}^m Q_i + Q_{\text{ext}} = 0 \quad (11.45)$$

Hierin is  $m$  het aantal takken dat in het betreffende knooppunt samenkomt.

Met verwaarlozing van de verschillen in snelheidshoogte en van lokale verliezen in de knooppunten geldt bovendien

$$h_1 = h_2 = \dots h_m \quad (11.46)$$

Samen met (11.45) levert dit  $m$  vergelijkingen per knooppunt, evenveel als het aantal takken dat er samenkomt. Per tak zijn er twee knooppunten. Samen met (11.44) zijn er dus drie vergelijkingen per tak, juist genoeg voor bepaling van de drie variabelen  $h_1$ ,  $h_2$  en  $Q$  per tak. We gaan er hierbij van uit dat de piëzometrische niveaus bij de systeemgrens gegeven zijn (punten A, B, C en D in Fig. 11.11).

Het totale stelsel vergelijkingen is niet lineair vanwege de kwadratische weerstand, en - wanneer de stroming niet overal hydraulisch ruw is - vanwege de variatie van de weerstandscoefficiënt  $f_i$  met  $Q_i$  (via  $Re_i$  of via  $\delta_i$ ). In de ontwerp-praktijk zijn diverse software pakketten beschikbaar voor de oplossing ervan.

#### APPENDIX - Berekening van gemiddelde snelheid en coëfficiënten $\alpha$ en $\beta$ uit logaritmisch snelheidsprofiel

De meevoering van massa, impuls en kinetische energie door een dwarsdoorgang in een parallelstroom is gegeven door respectievelijk

- massa:  $\iint \rho u \, dA = \rho UA$
- impuls:  $\iint \rho u^2 \, dA = \beta \rho U^2 A$
- kin.en.:  $\iint \frac{1}{2} \rho u^3 \, dA = \alpha \frac{1}{2} \rho U^3 A$

Deze betrekkingen definiëren respectievelijk

- de gemiddelde stroomsnelheid:

$$U = \frac{1}{A} \iint u \, dA = \frac{Q}{A}$$

- de snelheidsverdelingscoëfficiënt voor transport van impuls:

$$\beta = \frac{1}{A} \iint (u/U)^2 \, dA$$

- de snelheidsverdelingscoëfficiënt voor transport van kinetische energie:

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint (u/U)^3 \, dA$$

We gaan deze grootheden berekenen voor een logaritmisch snelheidsprofiel, gegeven door

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (\text{A.1})$$

(I) BUISSTROMING

(a) Gemiddelde snelheid

Voor een axialsymmetrische buisstroming met logaritmisch snelheidsprofiel in het interval  $y_0 \leq y \leq r_0$  (waarbij  $y_0 \ll r_0$ ) geldt

$$Q = \iint u \, dA = \int_0^{r_0} u \, 2\pi r \, dr \approx \frac{u_*}{\kappa} \int_{y_0}^{r_0} \left( \ln \frac{y}{y_0} \right) 2\pi r \, dr$$

ofwel

$$Q = 2\pi \frac{u_*}{\kappa} \int_{y_0}^{r_0} \left( \ln \frac{y}{y_0} \right) (r_0 - y) \, dy$$

Gebruikmaking van de onbepaalde integralen

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x \quad \text{en} \quad \int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2})$$

en uitwerken geeft

$$U = \frac{u_*}{\kappa} \left[ \ln \frac{r_o}{y_o} - \frac{3}{2} + 2 \frac{y_o}{r_o} - \frac{1}{4} \left( \frac{y_o}{r_o} \right)^2 \right]$$

Omdat  $y_o \ll r_o$  kan dit worden benaderd als

$$U = \frac{u_*}{\kappa} \left[ \ln \frac{r_o}{y_o} - \frac{3}{2} \right] = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_o}{y_o} \right) \quad (\text{A.2})$$

(b) Weerstandscoëfficiënt

Omdat  $r_o = \lambda \rho U^2 = \rho u_*^2$  volgt de weerstandscoëfficiënt  $\lambda$  uit

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{r_o}{y_o} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \left( e^{-\frac{3}{2}} \frac{r_o}{y_o} \right) \quad (\text{A.3})$$

(c) Snelheidsverdelingscoëfficiënten

Omdat  $u_* = \sqrt{\lambda} U$  kan het snelheidsprofiel (A.1) worden geschreven als

$$\frac{u}{U} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\kappa} \ln \frac{y}{y_o} \quad (\text{A.4})$$

Met gebruikmaking hiervan wordt  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{\pi r_o^2} \frac{\lambda}{\kappa^2} \int_{y_o}^{r_o} \left( \ln \frac{y}{y_o} \right)^2 2\pi(r_o - y) \, dy$$

Dit kan worden uitgewerkt m.b.v. de onbepaalde integralen

$$\int \ln^2 x \, dx = x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)$$

$$\int x \ln^2 x \, dx = \frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2})$$

In het resultaat worden termen die tenminste een factor  $(y_0/r_0)$  kleiner zijn dan de overige verwaarloosd (evenals in de afleiding van A.2). Waar in de resterende termen de factor  $\ln(r_0/y_0)$  voorkomt wordt deze geëlimineerd door substitutie van (A.3). Het resultaat is

$$\beta = 1 + \frac{5}{4} \frac{\lambda}{\kappa^2} \quad (\text{A.5})$$

Evenzo leidt berekening van  $\alpha$  tot

$$\alpha = 1 + \frac{15}{4} \frac{\lambda}{\kappa^2} - \frac{9}{4} \left(\frac{\lambda}{\kappa^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.6})$$

Daarbij is gebruik gemaakt van de onbepaalde integralen

$$\int \ln^3 x \, dx = x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6)$$

$$\int x \ln^3 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln^3 x - \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x - \frac{3}{4})$$

## (II) TWEE-DIMENSIONALE STROMING

Vooruitlopend op hoofdstuk 12 geven we hier een soortgelijke bewerking als de bovenstaande, nu voor een twee-dimensionale stroming met een vrij oppervlak en diepte  $d$ ; hierbij is  $y$  de afstand boven de bodem.

### (a) Gemiddelde snelheid

$$q = \int_0^d u \, dy \approx \frac{u_*}{\kappa} \int_{y_0}^d \ln \frac{y}{y_0} \, dy$$

ofwel

$$q = \frac{u_* d}{\kappa} \left[ \ln \frac{d}{y_0} - 1 - \frac{y_0}{d} \right] \approx \frac{u_* d}{\kappa} \left[ \ln \frac{d}{y_0} - 1 \right] = \frac{u_* d}{\kappa} \ln \left( e^{-1} \frac{d}{y_0} \right)$$

zodat

$$U = \frac{q}{d} = \frac{u_*}{\kappa} \left[ \ln \frac{d}{y_0} - 1 \right] = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( e^{-1} \frac{d}{y_0} \right) \quad (\text{A.7})$$

(b) Weerstandscoefficiënt

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{d}{y_0} - 1 \right] = \frac{1}{\kappa} \ln \left( e^{-1} \frac{d}{y_0} \right) \quad (\text{A.8})$$

c. Snelheidsverdelingscoefficienten

Op analoge manier als voor de buisstroming is gedaan is af te leiden dat voor de twee-dimensionale stroming geldt

$$\beta = 1 + \frac{\lambda}{\kappa^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\alpha = 1 + 3 \frac{\lambda}{\kappa^2} - 2 \left( \frac{\lambda}{\kappa^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.10})$$

## 12 EENPARIGE STROOM IN OPEN WATERLOPEN

### 12.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk is de eenparige stroom door een buisleiding behandeld. In dit hoofdstuk gaan we in op eenparige stroom in leidingen met een willekeurig dwarsprofiel, in het bijzonder open waterlopen.

In een eenparige stroom variëren de snelheid en de schuifspanning niet in de stroomrichting. Voor de berekening ervan kunnen we dus volstaan met een enkele dwarsdoorsnede.

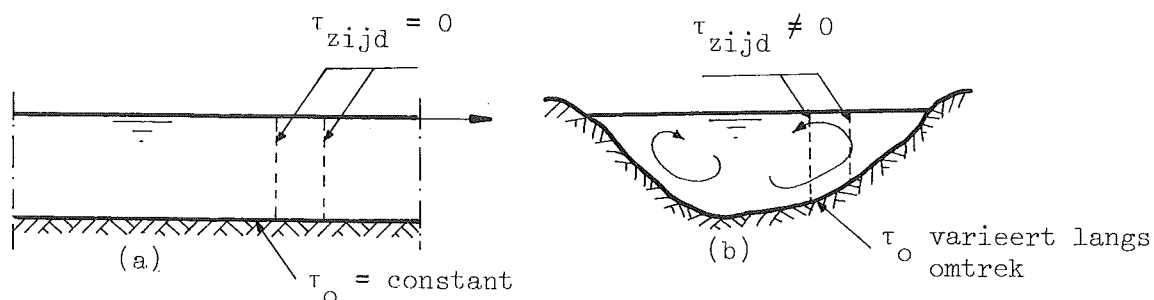
De eenparige stroom in een buisleiding is axiaal symmetrisch, wat o.m. inhoudt:

- de snelheid ( $u$ ) varieert alleen in radiale ( $r$ ) richting, niet in tangentiële ( $\theta$ ) richting;
- in axiale vlakken (door de pijp-as) heerst geen schuifspanning;
- de wandschuifspanning ( $\tau_0$ ) varieert niet met  $\theta$  (is constant langs de omtrek).

Daardoor reduceert het probleem van de bepaling van de verdeling van schuifspanning en snelheid in het hele dwarsprofiel van de buis in feite tot een één-dimensionaal probleem langs een straal vanuit het middelpunt ( $0 \leq r \leq r_0$ ), ofwel langs een loodlijn vanuit de wand ( $0 \leq y \leq r_0$ ) (zie hoofdstuk 11).

Een soortgelijke vereenvoudiging doet zich voor bij een eenparige stroom over een vlakke bodem als daarbij in zijdelingse richting geen variaties optreden in de diepte of snelheid, zoals bij benadering het geval kan zijn in een brede, open waterloop. In deze situaties heersen er geen zijdelingse schuifspanningen in verticale vlakken in de stroomrichting, en varieert de bodemschuifspanning niet in zijdelingse richting (zie Fig. 12.1a). In die gevallen kunnen we dus volstaan met de berekening van schuifspanning en snelheid in een enkele vertikaal (paragraaf 12.2).

Voor leidingen met een willekeurig dwarsprofiel is een vereenvoudiging tot een één-dimensionaal probleem niet mogelijk. In de open waterloop in Fig. 12.1b bijvoorbeeld zijn de stroomsnelheden in de diepere delen



Figuur 12.1 Dwarsdoorsnede van een stroming met vrij oppervlak; (a): twee-dimensionale stroom; (b): willekeurig dwarsprofiel; secundaire stromen aanwezig zoals geschetst.

groter dan in de ondiepere, resulterend in zijdelingse schuifspanningen en in variaties van de bodemschuifspanning langs de omtrek. Als gevolg hiervan heeft de tijd-gemiddelde snelheid een relatief kleine component in het vlak van de dwarsdoorsnede; deze z.g. **secundaire stromen** (zie Fig. 12.1b) herverdelen de stroomafwaartse snelheid in het dwarsprofiel, en zijn ook van belang voor de ontwikkeling van de bodemligging in het dwarsprofiel.

Voor leidingen met een willekeurig dwarsprofiel moet strikt gesproken een twee-dimensionale berekening voor het hele dwarsprofiel worden uitgevoerd voor de bepaling van de verdeling van snelheid en schuifspanningen. De beschikbare kennis van de turbulentie is daarvoor echter nauwelijks voldoende, nog afgezien van de rekeninspanningen die per geval nodig zouden zijn. In de praktijk beperkt men zich tot meer grove, quasi één-dimensionale benaderingen. Voorzover dat enigszins theoretisch gebeurt, uitgaande van een logaritmische snelheidsverdeling, gaan we daarop in in paragraaf 12.3. Enkele oude, empirische formuleringen komen aan de orde in paragraaf 12.4.

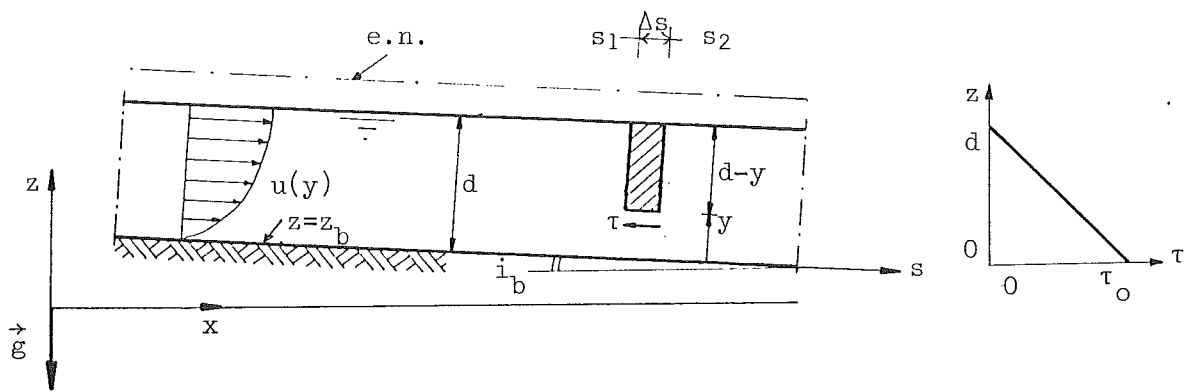
## 12.2 Twee-dimensionale stroming met vrij oppervlak

Voor de behandeling van wandwrijving in stromen met een vrij oppervlak beginnen we met het eenvoudigste geval, nl. een eenparige, twee-dimensionale stroom (zonder variaties in dwarsrichting, dus ook geen invloed van zijwanden of oevers). We beschrijven deze stromen in een vertikaal vlak in de stroomrichting.

We gaan uit van een flauwe bodemhelling ( $\tan i_b = -dz_b/dx \ll 1$ ; zie Fig. 12.2) waarvoor geldt

$$\cos i_b \approx 1 \quad \text{en} \quad \tan i_b \approx \sin i_b \approx i_b \quad (12.1)$$

In parallele stromen met een vrij oppervlak ligt het piëzometrisch niveau in de lokale waterspiegel. Is de stroming eenparig dan variëren snelheid en diepte niet in de stroomrichting. Dit houdt in dat de energielijn en de piëzometrisch-niveaulijn parallel lopen aan elkaar (dit geldt in elke eenparige stroom, ongeacht of er een vrij oppervlak is of niet) en aan de bodem, ofwel  $i_w = i_b (= i)$ .



Figuur 12.2 Definitieschets

We stellen een impulsbalans op (evenwichtsvoorwaarde) voor een kolom (gearceerd in Fig. 12.2) die zich uitstrekt van een afstand  $y$  uit de bodem tot aan het vrije oppervlak, waar  $y = d$ . De drukkracht en de meevoering van impuls door de vlakken  $s = s_1$  en  $s = s_2$  heffen elkaar op omdat de stroming eenparig is. De component in de stroomrichting van het gewicht p.e.v. breedte is  $(\rho g \sin i_b)(d - y) \Delta s \approx \rho g i_b (d - y) \Delta s$ . Deze maakt evenwicht met de schuifkracht p.e.v. breedte werkend in het ondervlak van de kolom ( $\tau \Delta s$ ), zodat

$$\tau(y) = \rho g i_b (d - y) \quad (12.2)$$

De schuifspanning varieert dus lineair van  $\tau = 0$  aan het oppervlak tot de waarde

$$\tau_o = \rho g d i_b \quad (12.3)$$

aan de bodem (Fig. 12.2).



De lineaire variatie van  $\tau$  is dezelfde als die in een cirkelvormige buis, van de as tot aan de wand. Als de vrije-oppervlakte stroming laminair zou zijn zou het snelheidsprofiel identiek zijn aan dat voor laminaire buisstroming, d.w.z. parabolisch. In de civiele praktijk doet dit zich echter niet voor.

In twee-dimensionale turbulente stroming met een vrij oppervlak kan de turbulente menging anders zijn dan in de axiaal-symmetrische turbulente stroming in een pijp. Ondanks het gelijke (lineaire) verloop van de schuifspanning in beide gevallen zouden de snelheidsprofielen dus kunnen verschillen. We zien daar echter van af en gaan hier eveneens uit van het logaritmische snelheidsprofiel in de turbulente hoofdstroom:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (12.4)$$

Door dit over de diepte ( $d$ ) te integreren vinden we het debiet p.e.v. breedte ( $q$ ) en daaruit de gemiddelde snelheid  $U = q/d$ . In de Appendix aan hoofdstuk 11 staan de tussenstappen. (Ook worden daar uitdrukkingen gegeven voor de snelheidsverdelingscoëfficiënten  $\alpha$  en  $\beta$ .) Het resultaat m.b.t.  $U$  is

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( e^{-1} \frac{d}{y_0} \right) \quad (12.5)$$

Stellen we ook hier  $\tau_0 = \lambda \rho U^2 = \rho u_*^2$  dan volgt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( e^{-1} \frac{d}{y_0} \right) \quad (12.6)$$

Voor de uitwerking hiervan kunnen we voor  $\kappa$  en  $y_0$  de resultaten gebruiken die Nikuradse en White-Colebrook vonden voor turbulente pijpstroming (zie hoofdstuk 11). Daarmee is  $\lambda$  bepaald. Het wrijvingsverhang, gegeven door

$$i_w = \lambda \frac{U^2}{gd} \quad (12.7)$$

is dan bij gegeven  $U$ ,  $d$ ,  $k$  en  $\nu$  te berekenen. Bij eenparige stroom (zoals hier verondersteld) is dit tevens het verhang van de bodem en van de waterspiegel. Bij niet-eenparige stroom zijn die drie echter onderling verschillend.

### 12.3 Stroming in leiding met willekeurig dwarsprofiel

We gaan nu in op de weerstand van een eenparige stroom door een open of gesloten leiding met een willekeurig dwarsprofiel. In hoofdstuk 11 (vergelijking 11.8) is het wrijvingsverhang ( $i_w$ ) gedefinieerd als

$$i_w = \frac{\Delta W}{\rho g A \Delta s} \quad (12.8)$$

d.w.z. als de verhouding van de weerstand op een schijf vloeistof in een leiding, met lengte  $\Delta s$ , tot het gewicht van die schijf. Deze definitie geldt ongeacht de vorm van het dwarsprofiel, voor stromen met of zonder vrij oppervlak.

De weerstand  $\Delta W$  is de integraal van de lokale wandschuifspanning  $\tau_o$  over het weerstand-leverende oppervlak, met omtrek  $O$ . Als  $\tau_o$  constant is over die omtrek, zoals in de buis of in de twee-dimensionale stroming, geldt eenvoudig  $\Delta W = \tau_o O \Delta s$ . In alle andere dwarsprofielen zal  $\tau_o$  echter variëren langs de omtrek. We werken dan met de waarde van  $\tau_o$ , gemiddeld over de omtrek waarin  $\tau_o$  werkt, gedefinieerd als

$$\langle \tau_o \rangle = \frac{\Delta W}{O \Delta s} \quad (12.9)$$

Voor deze gemiddelde waarde van  $\tau_o$  geldt dus (zie 12.8)

$$\langle \tau_o \rangle = \rho g R i_w \quad (12.10)$$

waarin  $R = A/O$ , de hydraulische straal.

Om ook nu een verband te leggen tussen weerstand en gemiddelde snelheid kunnen we formeel stellen (als definitie van  $\lambda$  respectievelijk  $u_*$ ):

$$\langle \tau_o \rangle = \lambda \rho U^2 = \rho u_*^2 \quad (12.11)$$

zodat (zie ook 11.11):

$$i_w = \lambda \frac{U^2}{gR} \quad \text{of} \quad U = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{gRi_w} \quad (12.12)$$

De eenvoud van deze uitdrukkingen is echter voor een deel schijn omdat de coëfficiënt  $\lambda$  hierin op een onbekende manier afhangt van de vorm van het dwarsprofiel (in tegenstelling tot de twee bijzondere gevallen van axiaal-symmetrische stroming en twee-dimensionale stroming).

Een eerste benadering voor een praktische oplossing van dit probleem bestaat uit de veronderstelling dat het dwarsprofiel van een leiding slechts via zijn hydraulische straal ( $R$ ) van invloed is op de weerstand. De invloed van verschillen in vorm wordt hiermee dus verwaarloosd.

Om dit uit te werken gaan we eerst de uitdrukkingen voor de weerstandscoëfficiënt voor pijpstroming respectievelijk voor twee-dimensionale stroming met een vrij oppervlak schrijven in termen van  $R$ .

Voor een pijp met straal  $r_o$  geldt  $R = \frac{1}{2}r_o$ , en kan (11.30) geschreven worden als

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 2 e^{-\frac{3}{2}} \frac{R}{y_o} \right) \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left( 0,44 \frac{R}{y_o} \right) \quad (12.13)$$

In een rechthoekig kanaal met breedte  $B$  en diepte  $d$  geldt:

$R = Bd/(B + 2d) = d/(1 + 2d/B)$ . In een twee-dimensionale stroming met een vrij oppervlak ( $B/d \rightarrow \infty$ ) geldt dus  $R = d$ , en kan (12.6) geschreven worden als

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( e^{-1} \frac{R}{y_o} \right) \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left( 0,37 \frac{R}{y_o} \right) \quad (12.14)$$

Als globale waarde van  $1/\sqrt{\lambda}$  voor een leiding met een willekeurig dwarsprofiel nemen we nu een soort gemiddelde van (12.13) en (12.14):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 0,40 \frac{R}{y_o} \right) \quad (12.15)$$

Substitueren we hierin Nikuradse's waarden  $y_0 \approx k/30$  voor ruwe condities en  $y_0 \approx \delta/105$  voor gladde condities, en passen we de optelling hiervan toe volgens Colebrook, dan ontstaat

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{12 R}{k + \delta/3,5}$$

ofwel

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 5,75 \log \frac{12 R}{k + \delta/3,5}} \quad (12.16)$$

Hierin is  $\delta = 11,6 \nu/u_*$  en  $u_* = \sqrt{\lambda} U = (gRi_w)^{1/2}$ . Met betrekking tot het onderscheid glad vs. ruw en met betrekking tot de berekening van  $\lambda$  uit deze vergelijking geldt hetzelfde als wat daarover is gezegd voor de stroming in een cirkelvormige buis.

Bovenstaande veralgemenisering van de formules van Colebrook wordt zowel op gesloten als open leidingen toegepast. Gesloten leidingen met een niet-cirkelvormig profiel komen o.a. voor in ventilatiesystemen, waar de luchtkokers vaak een rechthoekig profiel hebben. Vanwege de relatief geringe wandruwheid zal de viscositeit daar via  $\delta$  van invloed kunnen zijn (bovendien is  $\nu_{\text{lucht}} \text{ ca. } 15 \times \nu_{\text{water}}$ ).

In natuurlijke open waterlopen in alluviaal materiaal, waarbij bovendien in de meeste gevallen bodemribbels of andere beddingvormen aanwezig zijn, is de stroming vrijwel altijd hydraulisch ruw, en kan (12.16) worden benaderd met

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 5,75 \log \frac{12R}{k}} \quad (12.17)$$

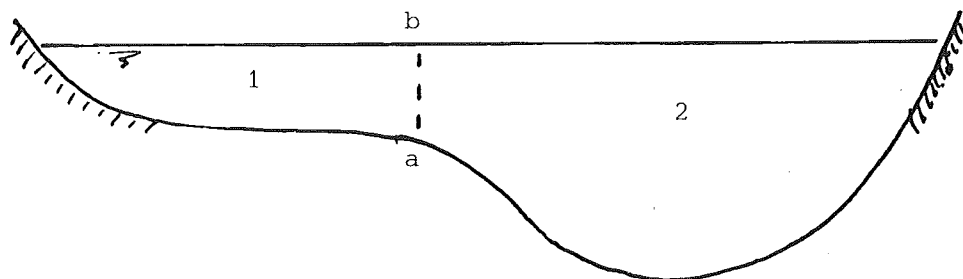
Hierin is  $\lambda$  slechts afhankelijk van de relatieve ruwheid ( $k/R$ ).

Zoals gezegd komt de specifieke vorm van een gegeven dwarsprofiel in bovenstaande globale aanpak niet tot uiting, en stellen we één gemiddelde snelheid en één gemiddelde wandschuifspanning representatief voor het hele dwarsprofiel. Dit is niet altijd een acceptabele benadering.

Een voorbeeld waar dit niet opgaat is gegeven in Fig. 12.3, van een rivier met een relatief diepe geul en een relatief ondiep deel. In beide delen (1 en 2) is de diepte klein t.o.v. de breedte (de diepten zijn in Fig. 12.3 sterk overdreven getekend), zodat de weerstand in beide delen overwegend door de plaatselijke condities wordt bepaald (vooral diepte en ruwheid). Ten opzichte daarvan kan de schuifspanning in het grensvlak tussen beide profieldelen (ab in Fig. 12.3) buiten beschouwing blijven zodat we de stromen in beide delen als onafhankelijk van elkaar kunnen behandelen. Het grensvlak draagt dan niet bij aan de weerstand—leverende omtrek van elk van de twee delen ( $O_1$  respectievelijk  $O_2$ ). Op deze basis berekenen we voor beide delen afzonderlijk een hydraulische straal ( $R_1$  respectievelijk  $R_2$ ) en daarbij een waarde van de weerstandscoëfficiënt  $\lambda_1$  respectievelijk  $\lambda_2$ ), bv. volgens (12.17). (Het verhang in beide delen is gelijk:

$$i = \lambda_1 \frac{U_1^2}{gR_1} = \lambda_2 \frac{U_2^2}{gR_2}$$

Bij gegeven  $i$  volgen hieruit de waarden van  $U_1$  en  $U_2$  zodat met de bekende  $A_1$  en  $A_2$  ook de totale afvoer  $Q$  is te berekenen.



Figuur 12.3 Dwarsprofiel met geul en ondiep gedeelte

#### 12.4 Empirische weerstandsformules

Al vele eeuwen worden leidingstelsels aangelegd voor het transport van water, aanvankelijk voor irrigatie en huishoudelijk gebruik, later ook voor de industrie. Ten behoeve van het ontwerp daarvan is veel empirisch onderzoek verricht van de afvoercapaciteit van open en gesloten leidingen, vooral in Europa in de 18e en de 19e eeuw (zie Rouse en Ince

(1963) voor een historisch overzicht). De ontwikkeling van een theoretische basis voor de aanpak van het probleem van de stromingsweerstand in leidingen is pas in de 20e eeuw tot stand gekomen.

Het empirisch onderzoek heeft geleid tot tientallen formules voor de afvoercapaciteit van leidingen c.q. de stromingsweerstand daarvan. We presenteren hier slechts de twee meest bekende, die ook nu nog veel worden gebruikt, ondanks het feit dat ze niet homogeen zijn in de dimensies. We zullen ook aangeven hoe die in verband staan met de meer recente resultaten die in het voorgaande zijn behandeld.

#### Formule van Chézy

Chézy beredeneerde (ca. 1770) dat de gemiddelde snelheden bij eenparige stroom in twee verschillende open waterlopen met een gegeven dwarsprofiel evenredig zouden moeten zijn aan de respectievelijke waarden van  $(Ri)^{1/2}$ . Later is dit geschreven in de vorm

$$\boxed{U = C\sqrt{Ri}} \quad (12.18)$$

Hoewel de vergelijking in deze vorm niet van Chézy afkomstig is wordt hij wel naar hem genoemd, en heet C de Chézy-coëfficiënt.

C is niet dimensieloos; de dimensie ervan is  $L^{1/2}/T$ , ofwel  $m^{1/2}/s$  in het S.I. De herkomst van deze dimensie is te zien aan (12.12):

$$U = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{gRi} \quad (12.19)$$

Blijkbaar geldt

$$C = \sqrt{g/\lambda} \quad \text{of} \quad \lambda = g/C^2 \quad (12.20)$$

Voor de gemiddelde bodemschuifspanning geldt (12.11):

$$\langle \tau_o \rangle = \lambda \rho U^2$$

Wanneer we werken met de coëfficiënt van Chézy wordt dit

$$\langle \tau_o \rangle = \frac{g}{C^2} \rho U^2 \quad (12.21)$$

Deze uitdrukking suggereert ten onrechte dat  $g$  van betekenis zou zijn voor het verband tussen  $\langle \tau_0 \rangle$  en  $U$ . De oorzaak hiervan ligt natuurlijk in het feit dat niet een factor  $\sqrt{g}$  is opgenomen in (12.18) toen destijds de evenredigheid, gegeven door Chézy, in deze vergelijking voor  $U$  werd omgezet; daardoor is  $C$  een verborgen factor  $\sqrt{g}$  gaan bevatten.

Ondanks het feit dat er al meer dan een halve eeuw formuleringen beschikbaar zijn die fysisch meer zinvol zijn (Darcy-Weisbach, Nikuradse, Colebrook) is in de waterbouwkunde het gebruik van de oudere formuleringen nog steeds gangbaar, en wordt de formule van Chézy veel gebruikt. De compactheid ervan is een voordeel in routinematig rekenwerk.

Toen de nieuwe(re) uitdrukkingen voor  $\lambda$  (c.q.  $f$  van Darcy-Weisbach) beschikbaar kwamen is dit niet benut om via (12.20)  $C$  te elimineren. Integendeel, men heeft de oude  $C$  in een nieuw jasje gestoken door substitutie van de Nikuradse-Colebrook uitdrukkingen voor  $\lambda$  in (12.20). Voor open waterlopen in natuurlijke materialen is de complete uitdrukking (12.16), inclusief  $k$  en  $\delta$ , nodeloos ingewikkeld omdat de stroming daarin altijd in het ruwe regime is. Daarvoor is (12.17) meer geschikt. Substitutie daarvan in (12.20) geeft

$$C = 5,75 \sqrt{g} \log \left( 12 \frac{R}{k} \right) \quad (12.22)$$

ofwel

$$C = (18 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}) \log \left( 12 \frac{R}{k} \right) \quad (12.23)$$

De waarde van  $R/k$  ligt in veel (niet alle) gevallen tussen 50 en 500; dit geeft  $\lambda$ -waarden van ca.  $4 \times 10^{-3}$  tot ca.  $2 \times 10^{-3}$  en  $C$ -waarden van ca.  $50 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$  tot ca.  $68 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$ . (Merk op dat een hogere  $C$ -waarde minder weerstand betekent.  $C$  is dus geen weerstandsfactor maar een "gladheids"-factor.)

Formule van Manning-Strickler

Manning (1890) toonde aan dat de beschikbare meetgegevens betreffende eenparige stromen in open en gesloten leidingen goed konden worden weergegeven met een uitdrukking

$$U = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}} \quad (12.24)$$

De factor n hierin zou slechts van de ruwheid van het wand- of bodemoppervlak afhangen. Uitvoerige tabellen hiervoor staan bv. in Chow (1959). Tabel 12.1 geeft een verkorte weergave.

Glass, plastic, machined metal .. .. .	0.010
Dressed timber, joints flush .. .. .	0.011
Sawn timber, joints uneven .. .. .	0.014
Cement plaster .. .. .	0.011
Concrete, steel troweled .. .. .	0.012
Concrete, timber forms, unfinished .. .. .	0.014
Untreated gunite .. .. .	0.015-0.017
Brickwork or dressed masonry .. .. .	0.014
Rubble set in cement .. .. .	0.017
Earth, smooth, no weeds .. .. .	0.020
Earth, some stones and weeds .. .. .	0.025
<i>Natural river channels:</i>	
Clean and straight .. .. .	0.025-0.030
Winding, with pools and shoals .. .. .	0.033-0.040
Very weedy, winding and overgrown .. .. .	0.075-0.150

Tabel 12.1 Waarden van de factor n van Manning (overgenomen uit Henderson, 1966).

De factor n heeft de dimensie  $L^{-\frac{1}{3}}T$ ; de getabelleerde waarden gelden in feite voor het m,s-stelsel hoewel de eenheden meestal niet worden genoemd. Bij conversie van de meter naar de voet als lengte-eenheid is men zelfs dezelfde getalswaarden voor n blijven hanteren, en werd als compensatie een vermenigvuldigingsfactor toegevoegd gelijk aan  $(1 \text{ m}/1 \text{ ft})^{\frac{1}{3}} = 3,28^{\frac{1}{3}} = 1,4865\dots$ , resulterend in

$$U = \frac{1,49}{n} R^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ft,s-stelsel}) \quad (12.25)$$

Deze vorm wordt zeer veel gebruikt in Engelstalige landen.



Onafhankelijk van Manning kwam Strickler (1923), eveneens uit analyse van waarnemingen, tot een uitdrukking zoals (12.24), d.w.z. U evenredig aan  $R^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}}$ . Bovendien stelde Strickler vast dat de evenredigheidsfactor evenredig is met  $D^{-\frac{1}{6}}$ , waarin D een lengte-maat is voor de wand(bodem)-ruwheid. Terugvertaald naar Manning's n betekent dit dat n evenredig is met  $D^{\frac{1}{6}}$ . In termen van de Nikuradse-ruwheid, en met toevoeging van een factor  $\sqrt{g}$  die zowel door Manning als door Strickler was weggelaten, is het resultaat te schrijven in de vorm

$$n = \gamma g^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{6}} \quad (12.26)$$

Hierin is  $\gamma$  een dimensieloze constante met een waarde van ca. 0,12.

Uit een onderlinge vergelijking van (12.12), (12.18) en (12.24) volgen betrekkingen tussen  $\lambda$ , C en n. Eliminatie van n via (12.26) geeft

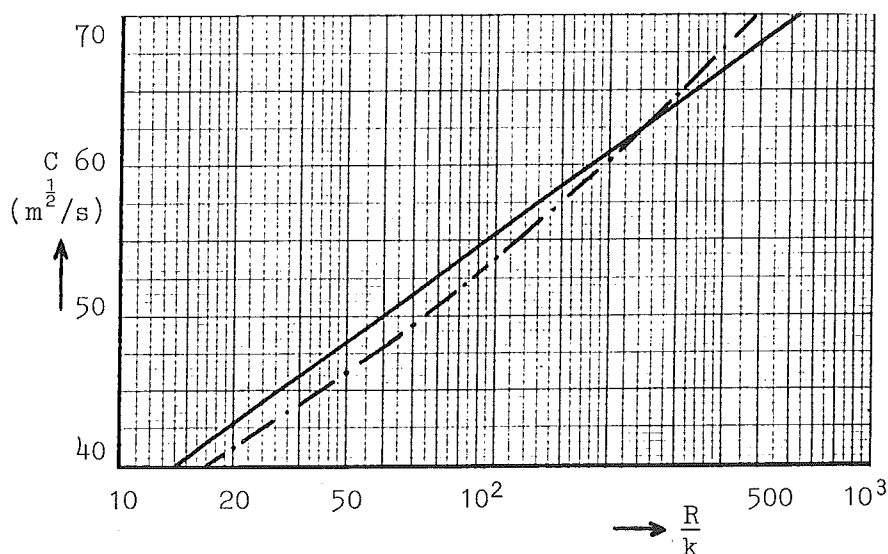
$$\lambda = \gamma^2 \left(\frac{k}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,015 \left(\frac{k}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (12.27)$$

en

$$C = \gamma^{-1} \sqrt{g} \left(\frac{R}{k}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 8 \sqrt{g} \left(\frac{R}{k}\right)^{\frac{1}{6}} \quad (12.28)$$

ofwel

$$C \approx (25 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}) \left(\frac{R}{k}\right)^{\frac{1}{6}} \quad (12.29)$$



Figuur 12.4 Vergelijking van C-waarden volgens Colebrook (—, vgl. 12.23) en Strickler (-.-, vgl. 12.29)

Laatstgenoemde betrekking staat bekend als de vergelijking van Strickler. Deze is te zien als een benadering, in een beperkt bereik van  $R/k$ , van de theoretisch meer gefundeerde logaritmische betrekking (12.23) (Zie Fig. 12.4). Voor waarden van  $R/k$  van 50 tot 500 varieert  $C$  volgens (12.29) van ca.  $48 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$  tot ca.  $70 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ , ofwel maximaal 4% afwijkend van de waarden volgens (12.23).

### 12.5 Slotopmerkingen

Bovenstaande formuleringen gaan uit van een eenparige hoofdstroom. De ruwheid wordt geacht klein te zijn zodat alleen op deze micro-schaal sprake is van niet-eenparige stroom; de weerstand van de individuele ruwheidselementen wordt daarbij op de macro-schaal van de hoofdstroom in rekening gebracht als een wand(bodem/oever)schuifspanning, met een coëfficiënt die geacht wordt slechts van de relatieve ruwheid ( $k/R$ ) af te hangen (zie bovenstaande vergelijkingen).

Bij de berekening van de stromingsweerstand in (natuurlijke) waterlopen in loskorrelig materiaal doen zich echter enkele problemen voor die in bovengenoemde aanpak niet tot uiting komen.

Eén probleem is de voorspelling van de effectieve bodemruwheid ( $k$ ), die bv. in rivieren en getijwateren varieert met de stromingscondities vanwege het ontstaan of weer verdwijnen van beddingvormen in het loskorrelige bodemmateriaal (ribbels, duinen enz.).

Een tweede probleem is dat natuurlijke waterlopen niet recht zijn, zodat alleen al daardoor de hoofdstroom niet eenparig kan zijn. De bochten veroorzaken gecompliceerde spiraalstromen met een verhoogde weerstand.

Ten derde is er vaak sprake van een opeenvolging van natuurlijke of kunstmatige profielvariaties (ondiepten en geulen; variabele afstand tussen oevers; dammen; kribben enz.) van zodanig grote afmetingen dat zij niet zinvol als een relatief kleine ruwheid in rekening kunnen worden gebracht. Anderzijds zijn er te veel van en volgen zij elkaar te dicht op om er individueel het lokale verlies conform een Carnot-formulering aan toe te kennen. In feite is hier voor de hoofdstroom geen ondubbelzinnig onderscheid te maken tussen wand(bodem)wrijving en

vertragingverliezen. Empirisch bepaalde weerstandsfactoren weerspiegelen slechts het totaal effect. Uitdrukkingen zoals die van Colebrook of Strickler hebben daarbij geen betekenis.

Dit alles leidt ertoe dat het vraagstuk van de totale weerstand aanzienlijk gecompliceerder is voor (natuurlijke) waterlopen in loskorrelig materiaal dan voor (pijp)leidingen met gegeven ruwheid. Voor praktische toepassingen zal zoveel mogelijk gestreefd moeten worden naar een ijking op grond van lokale metingen.

## LITERATUUR

- Batchelor, G.K., 1967. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press. Cambridge.
- Chow, V.T., 1959. Open-Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York.
- Francis, J.R.D., 1975. Fluid Mechanics for engineering students. Edward Arnold Ltd., London, 4e druk 370 pp.
- French, R.H., 1985. Open-Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York.
- Henderson, F.M., 1966. Open-Channel Flow. McMillan, New York.
- Huisman, L., 1955. Stromingsweerstand in buisleidingen, Kiwa, Den Haag.
- Hütte, 1955. Des Ingenieurs Taschenbuch. Deel I: Theoretische Grundlagen. 28e druk, Berlijn, 1668 pp.
- I.E. Idelchik, 1986. Handbook of Hydraulic Resistance. Springer, Berlijn.
- Putte, L.A. van de, 1975. Stromingsleer. Agon-Elsevier, Amsterdam, 183 pp.
- Rouse, H., 1938. Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers, Dover, New York.
- Rouse, H. en Ince, S., 1963. History of hydraulics. Dover Publ., New York.
- Thijsse, J. Th., 1951. Hydraulica. In: Technische Vraagbaak, deel W, Kluwer, Deventer, pp. 95-134.
- Vennard, J.K. en Street, R.L., 1982. Elementary Fluid Mechanics. Wiley, New York (6th edition).
- Yalin, M.S., 1972. Mechanics of Sediment Transport. Pergamon Press., Oxford.

