

# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 12

August 1932

Heft 4

## Inhalt:

Seite		Seite
<p>Hauptaufsätze. Herbert Wagner: Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten . . . . . 193</p> <p>K. Hohenemser und W. Prager: Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua . . . . . 216</p> <p>K. Sezawa: Das Ausknicken von allseitig befestigten und gedrückten rechteckigen Platten . . . . . 227</p> <p>Alfred Konecny: Wärmeleitung im Rohr bei ungleichmäßiger Wärmebelastung . . . . . 229</p> <p>Sydney Goldstein: The application of Heaviside's operational method to the solution of a problem in heat conduction . . . . . 234</p> <p>Eugen Lukács: Über zwei theoretische Fragen der Nomographie und die Anwendung der Trans-</p>	<p>formation von Nomogrammen zur Gewinnung von Fluchttafeln und Flächenschiebern . . . . . 244</p> <p>Kleine Mitteilungen. A. Roussopoulos: Die Verschiebungsellipsoide elastischer Körper — Konjugierte Ellipsoide — Die erzeugenden vektoriellen Dyaden . . . . . 252</p> <p>Buchbesprechungen. Tietjens: Hydro- und Aeromechanik nach Vorlesungen von L. Prandtl. — Berliner und Scheel: Physikalisches Handwörterbuch. — Lutz: Untersuchungen über die Spülung von Zweitaktmotoren. — Rosmanith: Mathematische Statistik der Personenversicherung. — Lorey und Beyrodt: Tafeln zur Mathematik des Geldverkehrs und der Versicherung. . . . . 254</p> <p>Nachrichten . . . . . 256</p> <p>Zuschriften an den Herausgeber . . . . . 256</p>	

## HAUPTAUFsätze

### Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten.

Von *Herbert Wagner* in Berlin.

(Aus dem flugwissenschaftlichen Institut der Technischen Hochschule zu Berlin.)

Diese Überlegungen wurden im Hinblick auf Start und Landung von Seeflugzeugen angestellt<sup>1)</sup>. Es wird reibungsfreie unzusammendrückbare Flüssigkeit vorausgesetzt. Die Erdbeschleunigung wird vernachlässigt; die folgenden Überlegungen gelten daher um so genauer, je kleiner der Körper ist und je schneller er sich bewegt. Bei lange währenden, vor allem bei stationären Vorgängen gelten diese Überlegungen nur in naher Umgebung des Körpers.

Zuerst werden die Grenzbedingungen an der freien Oberfläche hinsichtlich auftretender Unstetigkeiten untersucht. Je nach Art dieser Unstetigkeiten lassen sich zwei Arten von Flüssigkeitsbewegung unterscheiden, die man vielleicht als Stoß- und Gleitvorgänge<sup>2)</sup> ansprechen kann.

Bei Stoßvorgängen (Abb. 1, 2, 23 oben) besteht die freie Oberfläche während des betrachteten Zeitabschnittes aus den gleichen Flüssigkeitsteilchen<sup>3)</sup>. Ist eine Kontur zwischen



Abb. 1.



Abb. 2.

<sup>1)</sup> Vgl. Vortrag des Verf. am Int. Kongr. f. Mech., Stockholm 1930, und Vortr. d. Verf. vor der Wiss. Ges. f. Luftfahrt 1930, Z. f. Flugtechnik u. Mot. (ZFM) 1931, Heft 1. Mit der Abschätzung der Stoßkraft beim Landen von Seeflugzeugen beschäftigen sich die beiden mir nachträglich bekannt gewordenen Arbeiten: v. Kármán, „The Impact on Seaplane Floats during Landing“ (Sonderdruck Washington, 1. Oktober 1929) und W. Papst, „Theorie des Landestoßes von Seeflugzeugen“ (ZFM 1930, Heft 9).

<sup>2)</sup> Gleitvorgänge sind das gleiche wie Ausflußvorgänge, doch schien letzte Bezeichnung in diesem Zusammenhang unzweckmäßig.

<sup>3)</sup> Will man den Grenzfall vollkommen gleichzeitigen Aufschlages einer Körperfläche nicht als Grenzfall eines sehr schnellen Aufschlages (etwa nach § 14) betrachten, so scheidet der entsprechende Teil der Flüssigkeitsoberfläche aus der freien Oberfläche aus und es entsteht kein Spritzer. Man muß dann die Kompressibilität berücksichtigen; statt der Spritzerenergie entsteht Schallenergie. Aber auch in diesem Grenzfall treten im Gegensatz zum Gleitvorgang keine neuen Flüssigkeitsteilchen an die Oberfläche.

freier Oberfläche und Körper vorhanden, so wird diese in ihrer ganzen Länge von Spitzen (Kanten von Flüssigkeitskeilen, Abb. 7) gebildet. Diese Spitzen arten oft zu Spritzern aus, die als Ausdruck der beim Stoß „vernichteten“ Bewegungsenergie aufgefaßt werden können. Stoßvorgänge sind durch die ursprüngliche Bewegung der Flüssigkeit und den Verlauf der Bewegung des Körpers eindeutig bestimmt.

Bei Gleitvorgängen (Abb. 12, 26) gibt es längs der Kontur zwischen Körper- und Flüssigkeitsoberfläche Bereiche (z. B. Gleitkanten), längs welcher neue Flüssigkeitsteilchen an die Oberfläche treten. Zur Bestimmung von Gleitvorgängen sind außer der Angabe der ursprünglichen Bewegung der Flüssigkeit und des Verlaufs der Bewegung des Körpers Annahmen über die Lage der Ablösungsstelle der Strömung von der Körperoberfläche erforderlich. Ist im Bereich der Strömung eine vorspringende Kante vorhanden und soll unendlich großer Unterdruck an dieser Stelle vermieden werden, so muß die Ablösung längs dieser Kante stattfinden<sup>4)</sup>.

Der Gleitvorgang läßt sich vergleichen mit der Flüssigkeitsbewegung um einen Körper, von dem sich eine Wirbelfläche löst: die Bestimmung der Tangentialgeschwindigkeit der neu an die Oberfläche tretenden Flüssigkeitsteilchen entspricht der Bestimmung der Wirbelstärke der neu entstehenden Wirbelfäden.

Eingehend untersucht wird die Bewegung von Körpern mit sehr (unendlich) flachem Boden an der Flüssigkeitsoberfläche (Abb. 12). Die bisherige Behandlung des Problems mit Hilfe von Druckpunkten<sup>5)</sup> berücksichtigte die Erdbeschleunigung und gab eine Klärung des Wellenbildes. Sie war aber wegen Nichtbeachtung der am Vorderrand auftretenden Unstetigkeit (Spritzer) nur in Sonderfällen in der Lage, die Strömungsvorgänge in Körpernähe zu beschreiben und den Widerstand richtig zu berechnen. Vorliegende Arbeit zeigt, daß im betrachteten Grenzfall stationäre oder nicht stationäre Gleit- oder Stoßbewegungen eines flachen Bodens an der freien Oberfläche durch die „gleiche Tragflügelbewegung“ bestimmt sind: Mit Ausnahme des Spritzerbereiches herrscht an der Druckfläche des Bodens der gleiche Druck wie an der Unterseite des gleichen Tragflügels; statt der beim Tragflügel auftretenden Saugkraft löst sich am Rande der Druckfläche ein Spritzer ab, dessen Energie der Widerstandsvermehrung infolge des Wegfalls der Saugkraft entspricht. Während beim Tragflügel der Widerstand nur vom Auftrieb abhängt (induzierter Widerstand), ist beim Boden der zusätzliche Widerstand infolge Wegfalls der Saugkraft auch bei gleichem Auftrieb für verschiedene Formgebung des Bodens verschieden. Einige Beispiele zeigen, wie sich die Randbedingung für die Kontur der Druckfläche (Erhebung der Flüssigkeitsteilchen gleich Höhe des Bodens, vgl. § 10) erfüllen läßt.

Ferner werden Beziehungen für zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung mit freier Oberfläche abgeleitet, wenn ein Ähnlichkeitszentrum vorhanden ist. Beispiele solcher Bewegung sind: das ebene Problem des Eindringens eines Keiles mit konstanter Geschwindigkeit  $V_0$  in eine Flüssigkeit, die ursprünglich ebene oder keilförmige Oberfläche besaß (Abb. 2, 26, 29) und das achsensymmetrische Problem des Eindringens eines Kegels mit konstanter Geschwindigkeit in eine Flüssigkeit mit ursprünglich ebener oder kegelförmiger Oberfläche.

Schließlich wird der m. W. noch nicht behandelte Fall des stationären Gleitens einer ebenen Platte durchgerechnet (ebenes Problem, endlich großer Anstellwinkel).

Bezeichnungen: Skalare mit lateinischen oder griechischen Buchstaben, Vektoren mit deutschen Buchstaben

$t$	Zeit
$\varphi$	Geschwindigkeitspotential
$v = \text{grad } \varphi, v$	Geschwindigkeit der Flüssigkeit
$\frac{D}{Dt}$	Stockesscher Operator (für die substantielle Änderung)
$e_n$	Einheitsvektor senkrecht zur Oberfläche
$v_n, v_n = e_n v$	Normal- } Komponente der Geschwindigkeit
$v_t, v_t$	Tangential- } der Flüssigkeit an der Oberfläche
$\mathfrak{B}, V$	Translationsgeschwindigkeit eines starren Körpers
$V_n$	Normalgeschwindigkeit der Kontur eines (im allgemeinen seine Form verändernden) Körpers
$\rho$	spec. Dichte der Flüssigkeit.

<sup>4)</sup> Auch der in Abb. 29 Mitte gezeigte Vorgang ist wegen der Ablösungsstelle C („Gleitkante“) ein Gleitvorgang. Seine allfällige Behandlung als Stoßvorgang ist eine Näherungsbetrachtung, die nur im Grenzfall unendlich dünner Spritzerdicke zu genauen Ergebnissen führt.

<sup>5)</sup> Lamb, Hydrodynamik, deutsch von Helly, 1931. S. 446 ff. (insbesondere Abb. S. 454) und S. 487 ff.

Ferner für das ebene Problem der Flüssigkeitsbewegung

- a Neigungswinkel der Oberfläche (meist bezogen auf die ursprünglich ebene Oberfläche)
- s Bogenlänge der Oberfläche
- $e_t$  Einheitsvektor in Richtung der Tangente an die Oberfläche
- $\psi$  Stromfunktion
- $z = x + iy$  komplexe Koordinate
- $w = \varphi + i\psi$  komplexe Strömungsfunktion
- $\frac{dw}{dz} = v_x - i v_y$  komplexe Geschwindigkeit.

I. Grundlagen.

1. **Grenzbedingung.** Als geometrische Grenzbedingung bezeichnen wir im folgenden die Beziehung, daß an der Oberfläche der Flüssigkeit (am Körper und an der freien Oberfläche) die Normalgeschwindigkeit  $v_n$  der Flüssigkeit gleich ist der Fortbewegungsgeschwindigkeit der Oberfläche senkrecht zu sich selbst<sup>\*)</sup>. An der freien Oberfläche werden wir sie beim ebenen Problem oft durch ihre „Differentialform“ (vgl. Abb. 3)

$$\frac{D\alpha}{Dt} = e_n \frac{\partial v}{\partial s} \dots \dots \dots (1)$$

ersetzen<sup>2)</sup>, müssen dann aber an einer Stelle die ursprüngliche Bedingung selbst befriedigen.

Hierzu kommt an der freien Oberfläche die dynamische Grenzbedingung. Da die freie Oberfläche eine Fläche konstanten Druckes ist, steht der Druckgradient und folglich die Beschleunigung  $\frac{Dv}{Dt}$  senkrecht auf die freie Oberfläche. Also fürs ebene Problem

$$e_t \frac{Dv}{Dt} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Oder mit

$$\begin{aligned} \frac{De_t}{Dt} &= e_n \frac{D\alpha}{Dt} & \frac{D\bar{e}_t \bar{v}}{Dt} &= \bar{v} \frac{D\bar{e}_t}{Dt} + \bar{e}_t \frac{D\bar{v}}{Dt} \\ \frac{De_t v}{Dt} &= \frac{De_t v}{Dt} = v \frac{De_t}{Dt} & &= v e_n \frac{D\alpha}{Dt} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Wir fassen die dynamische Grenzbedingung Gl. (3) mit der geometrischen Gl. (1) zusammen

$$\frac{Dv_t}{Dt} - e_n e_n \frac{\partial v}{\partial s} \dots \dots \dots (4)$$

Auch beim räumlichen Problem ist  $\frac{De_n}{Dt}$  wegen der geometrischen Grenzbedingung bestimmt durch die Angabe von v an der freien Oberfläche:

$$\frac{De_n}{Dt} = [e_n [e_n \text{ grad}]] \cdot e_n v \dots \dots \dots (5)$$

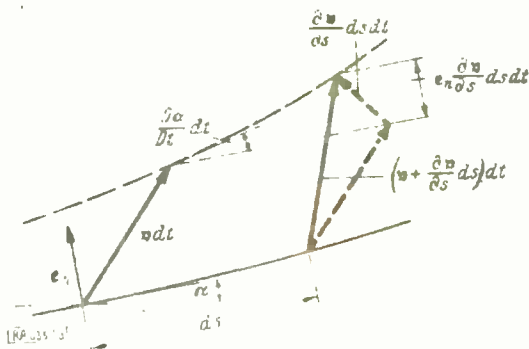


Abb. 3

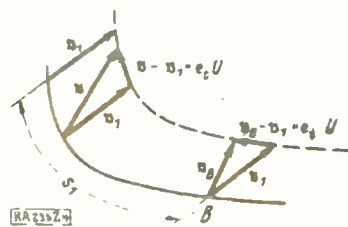


Abb. 4.

<sup>\*)</sup> Lamb, I, S. 8, 8

<sup>2)</sup> Wir verwenden  $\frac{D}{Dt}$ , weil wir hier und bei allen späteren Angaben über den Geschwindigkeitsverlauf an der Oberfläche lediglich die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen der Oberfläche selbst in Betracht ziehen wollen.

Der dynamischen Grenzbedingung  $\left[ c_n \frac{Dv}{Dt} \right] = 0$  wollen wir die Form geben:

$$\frac{Dv_t}{Dt} - \frac{D}{Dt} [c_n [c_n v]] = c_n \cdot v \frac{Dc_n}{Dt} + c_n v \cdot \frac{Dc_n}{Dt} \quad (6)$$

Wegen Gl. (4) bzw. Gl. (5) und Gl. (6) gilt

**Satz 1:** Ist zu einem Zeitpunkt für alle Flüssigkeitsteilchen der freien Oberfläche die Geschwindigkeit  $v$  einschließlich ihrer Richtungsableitung (in Richtung der Oberfläche) bekannt, so ist für diese Teilchen auch die zeitliche Änderung der Tangentialgeschwindigkeit  $v_t$  bekannt.

**2. Grenzbedingung bei unstetiger Krümmung.** Vorbetrachtung: Für ein ebenes Problem der Flüssigkeitsbewegung gelte folgende Voraussetzung (Abb. 4): Auf einem Stück  $s_1$  der freien Oberfläche verschiebe sich die Form der Oberfläche parallel zu sich selbst mit der zeitlich unveränderlichen Geschwindigkeit  $v_1$ . Alle jeweils am Beginn  $B$  von  $s_1$  befindlichen Flüssigkeitsteilchen sollen an dieser Stelle die gleiche Geschwindigkeit  $v_B$  haben.

Wegen der geometrischen Grenzbedingung gilt längs  $s_1$  für die „relative“ Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen  $c_t U = v - v_1$ , wobei  $U$  der Betrag der relativen Geschwindigkeit ist.

Daraus  $v$  in die dynamische Grenzbedingung Gl. 2 eingesetzt, gibt  $\frac{DU}{Dt} = 0$ , d. h. für jedes Flüssigkeitsteilchen ist bei seiner Bewegung längs  $s_1$  der Betrag  $U$  konstant. Da im Punkte  $B$  für alle Flüssigkeitsteilchen  $U = |v_B - v_1|$  gleich groß ist, folgt aus obiger Voraussetzung:  $U$  ist längs  $s_1$  konstant.

**Grenzübergang:** Wir wenden diese Betrachtung auf einen sehr (unendlich) kleinen Bereich  $s_1 \rightarrow 0$  an, längs dessen sich die Neigung der freien Oberfläche im allgemeinen um einen endlichen Winkel ändere (Abb. 5). An der  $B$  benachbarten Oberfläche außerhalb  $s_1$  sei die Krümmung der Oberfläche und das Geschwindigkeitsfeld stetig und zeitlich stetig veränderlich. Für die Verschiebung dieses Bereiches  $s_1$  mit einer stetig veränderlichen Geschwindigkeit  $v$ , ergibt obige Betrachtung: ändert sich die Form der Oberfläche  $s_1$  auf einem (endlichen) Wege  $W$  stetig<sup>\*)</sup>, so ist längs  $s_1$  in jedem Augenblick  $U$  von einer Konstanten nur um  $\Delta U$  verschieden, wobei  $\frac{\Delta U}{U}$  klein ist wie  $\frac{s_1}{W}$ . Oder kurz gesagt:

**Satz 2:** Für jeden kleinen Bereich  $s_1 \rightarrow 0$  der freien Oberfläche mit stetiger oder unstetiger Krümmung, dessen Form sich „nahezu unverändert“ mit einer Geschwindigkeit  $v_1$  verschiebt, gilt mit  $U = \text{konst.}$ :  $v - v_1 \rightarrow c_t U$ ; d. h. die Grenzbedingung an der freien Oberfläche ist für das relative Geschwindigkeitsfeld  $v - v_1$  die gleiche wie bei einer stationären Strömung.

Mit entsprechenden Stetigkeitsbedingungen läßt sich diese Betrachtung auch räumlich anstellen. Es ergibt sich mit den für das ebene Problem festgelegten Bezeichnungen  $v = v_1 + c_t U + \mathcal{R}$ , wobei  $\mathcal{R}$  eine längs  $s_1$  konstante Geschwindigkeit in Richtung der Kante darstellt.

**3. Strömung im Bereich unstetiger Krümmung. Ecken.** Durch den unendlich kleinen Kreis  $r$ , umschließen wir die Unstetigkeit  $s_1$  (Abb. 6) und das Flüssigkeitsgebiet  $G_1$ . Das Flüssigkeitsgebiet  $G_2$  liegt zwischen dem Kreis  $r_1$  und dem (z. B. konzentrischen) größeren (aber immer noch unendlich kleinen) Kreis  $r_2$ . Wegen Satz 2 ist  $v_B$  längs  $BB_1$  und  $v_C$  längs  $CC_1$  konstant. Wegen des Satzes<sup>\*)</sup> der Funktionentheorie „Besitzt eine in einem Gebiet ( $G_2$ ) analytische Funktion an einem glatten Kurvenbogen die Randwerte Null, so ist sie identisch



Abb. 5.

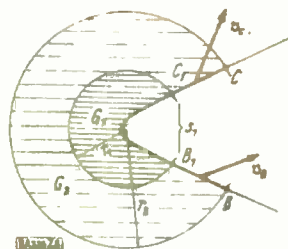


Abb. 6.

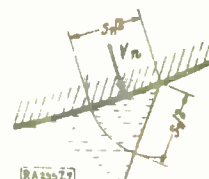


Abb. 7.

<sup>\*)</sup> d. h. die im Maßstab  $\frac{1}{s_1}$  vergrößerte Oberfläche soll ihren Charakter einer (mindestens stückweise) glatten Kurve beibehalten. Ferner soll es möglich sein, auf  $s_1$  eine unendliche Folge von Punkten (Abstand  $\Delta$ ) so auszuwählen, daß auf dem Wege  $W$  jedes  $\Delta$  eine zeitlich stetig veränderliche Drehung um einen (im allgemeinen) endlichen Winkel erfährt.

<sup>\*)</sup> Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, Springer 1929, S. 375.

Null<sup>10</sup> muß im Gebiet  $G_1$  gelten:  $v - v_B = 0$ . Daraus folgt  $v_C = v_B$ , was wegen Satz 2 nur mit  $U = 0$ , also mit  $v = v_1$  verträglich ist. Längs der ganzen Kontur von  $G_1$  ist folglich  $v = v_1$ , also<sup>11</sup>) auch in  $G_1$  selbst.

**Satz 3:** In einer einspringenden oder vorspringenden Unstetigkeit der freien Oberfläche, die mindestens um  $r_0$  von anderen Unstetigkeiten oder der Körperoberfläche entfernt ist, ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich der Geschwindigkeit  $v_1$  der Unstetigkeit.

**Spitze des Spritzers.** Mit Hilfe des gleichen Satzes der Funktionentheorie läßt sich für den Fall Abb. 7, daß längs  $\frac{\delta}{2}$  die Kontur des Körpers und der freien Oberfläche stetig gekrümmt ist und daß die Normalgeschwindigkeit  $V_n$  am Körper stetig und zeitlich stetig veränderlich ist, beweisen

**Satz 4:** Bildet die freie Oberfläche mit der Körperoberfläche eine Spitze, so ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Spitze gleich der Geschwindigkeit der Spitze.

**Wurzel des Spritzers.** Wir betrachten den Fall einer Unstetigkeit in Körpernähe. Mit Hilfe der Methode von Schwarz-Christoffel<sup>12</sup>) finden wir für die Strömung Abb. 8

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\tau + 1}{\tau} \quad \text{und} \quad d \ln \frac{ds}{dw} = -i \frac{d\tau}{(\tau + 1)\sqrt{\tau}}$$

$\tau$  ist die komplexe Hilfeebene. Ist  $-U$  die Geschwindigkeit an der freien Oberfläche und  $\delta$  die Spritzerdicke, so erhalten wir daraus

$$w = -U \frac{\delta}{\pi} (1 + \ln \tau + \tau) \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$z = \frac{\delta}{\pi} \left( \ln \frac{1}{\tau} + 4i\sqrt{\tau} + \tau + 5 \right) \quad \dots \dots \dots (8)$$

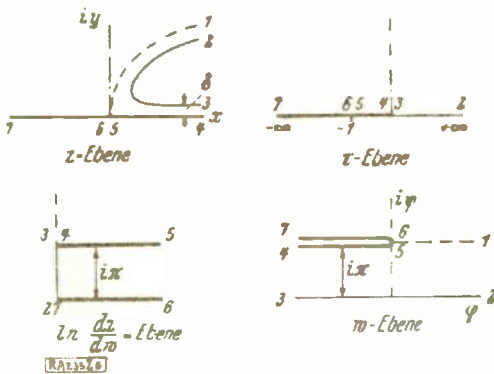


Abb. 8.

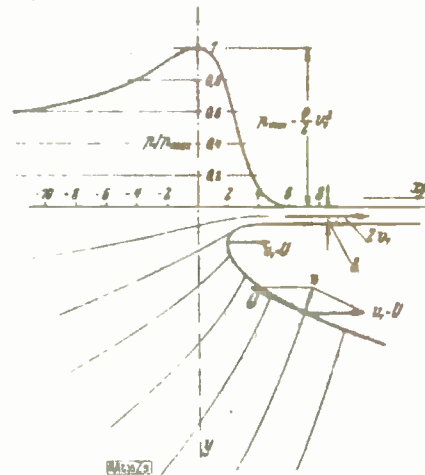


Abb. 9.

Die freie Oberfläche ist gegeben durch

$$\pi \frac{x}{\delta} = 5 + \frac{\pi^2}{16} \left( \frac{y}{\delta} - 1 \right)^2 - \ln \left| \frac{\pi^2}{16} \left( \frac{y}{\delta} - 1 \right)^2 \right| \quad \dots \dots \dots (9)$$

Am Boden (negativ reelle  $\tau$ ) herrscht der Flüssigkeitsdruck (vgl. Abb. 9):

$$P = 2 \rho U^2 \frac{1}{(1 + \tau)^2} \quad \dots \dots \dots (10)$$

Der maximale Druck  $p_{\max} = \frac{1}{2} \rho U^2$  tritt an der Stelle  $\tau = -1$ , also  $x = 0$  auf. Die Druckkraft  $P_w$  auf das Stück des Bodens zwischen  $x$  und  $x = +\infty$  ist  $P_w = \frac{4}{\pi} \rho \delta U^2 \sqrt{-\tau}$ . Für  $\tau \rightarrow -\infty$  ist nach Gl. (8)  $\frac{z}{\tau} \rightarrow \frac{\delta}{\pi}$ ; also

$$\text{für } x \rightarrow \infty \text{ wird } P_w \rightarrow 4 \rho U^2 \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \sqrt{-x} \quad \dots \dots \dots (11)$$

<sup>10</sup>) vgl. Lamb, l. c. S. 99.  
<sup>11</sup>) Lamb, l. c. S. 100.

Überlagert man der Strömung Abb. 8 eine konstante Geschwindigkeit  $v_1$ , so entsteht eine im engen Sinn des Wortes nichtstationäre Strömung, ohne daß sich die Druckverteilung ändert. Überlagert man insbesondere eine Geschwindigkeit  $v_1 = U$  in Richtung des Bodens (Abb. 9), also wegen Gl. 7

$$w_1 = v_1 \left[ \frac{\delta}{\pi} (1 + \ln \tau + \tau) + z \right] \dots \dots \dots (12),$$

so herrscht an der freien Oberfläche hinreichend weit außerhalb des Spritzers die Tangentialgeschwindigkeit Null. Für so große  $z$  bzw.  $\tau$ , daß man  $\ln \tau$  gegenüber  $\sqrt{\tau}$  vernachlässigen kann, geht Gl. 12 bei Beachtung von Gl. 8 über in

$$w_1 \rightarrow \pm v_1 \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \sqrt{V - z} \dots \dots \dots (12).$$

Eine der hier beschriebenen ähnlichen Strömung tritt in einem kleinen Bereich wohl bei jedem Stoß- und Gleitvorgang auf.

Gleitkante. Wir wenden Satz 2 auf die freie Oberfläche hinter einer Gleitkante an. Stetige Krümmung der Körperoberfläche an dieser Stelle vorausgesetzt, wird (vgl. Abb. 10) die relative Strömung in einem Bereich (unendlich) kleiner  $z$  gegeben durch

$$d \ln \frac{dz}{dn} = \frac{i dn}{\pm \sqrt{n}} \dots \dots \dots (14), \quad \text{also} \quad \frac{z}{A} = 2 \int_0^w e^{\pm i \sqrt{w}} \sqrt{w} dw \frac{n}{A U} \dots \dots \dots (15).$$

$A$  ist eine den Maßstab bestimmende Konstante,  $U$  ist die relative Tangentialgeschwindigkeit.

4. Eindeutigkeit. Bei einem Stoßvorgang sei zur Zeit  $t=0$  die Form von freier Oberfläche und Körperoberfläche und das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit gegeben. Für  $t \geq 0$  sei der Verlauf der bewegten Grenze der Körperoberfläche ( $V_n$ ) gegeben. Treten im Verlauf der Zeit keine neuen Flüssigkeitsteilchen an die freie Oberfläche (Stoßvorgang), so ist durch diese Angaben der zeitliche Verlauf der Strömung eindeutig bestimmt, denn:

Durch Angabe des Geschwindigkeitsfeldes (also auch von  $v_n$ ) zur Zeit  $t$  ist die Form der Oberfläche zur Zeit  $t+dt$  eindeutig bestimmt. An der Körperoberfläche ist voraussetzungsgemäß  $V_n$  auch zur Zeit  $t+dt$  gegeben. An der freien Oberfläche ist  $v_t$  zur Zeit  $t+dt$  (nach Satz 1) und daraus bei einfach zusammenhängender Oberfläche auch  $\varphi$  (abgesehen von einer bedeutungslosen Konstanten) eindeutig bestimmbar. Durch diese Angaben  $V_n$  bzw.  $\varphi$  ist das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit zur Zeit  $t+dt$  eindeutig bestimmt<sup>17)</sup> und somit auch  $v_n$  an der freien Oberfläche eindeutig berechenbar. Usw. für alle späteren  $dt$ . Dabei dürfen nur die oben geklärten Unstetigkeiten (außer Gleitkanten) auftreten. Auf dem Wege dieses Beweises ließen sich (wenn auch sehr umständlich) allgemeine Fälle nichtstationärer Stoßvorgänge tatsächlich berechnen.

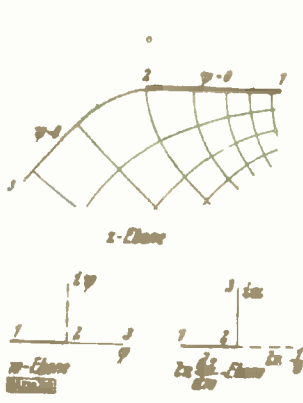


Abb. 10.



Abb. 11.

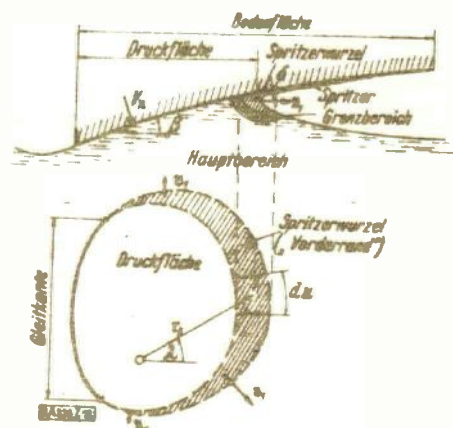


Abb. 12.

Bei Gleitvorgängen ist es nach Abb. 10 für die Strömung in Umgebung der Ablösungsstelle gleichgültig, ob die Ablösungsstelle eine Gleitkante ist oder ob sich hinter der

<sup>17)</sup> Lamb, 1. c. S. 46.

Ablösungsstelle der Boden stetig gekrümmt fortsetzt. Ist für letzten Fall der zeitliche Verlauf der Lage der Ablösungsstelle gegeben<sup>13)</sup>, so sind beide Probleme gleichwertig.

Es scheint mir zweifelsfrei, daß ein Gleitvorgang eindeutig bestimmt ist durch Angabe von Oberfläche und Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit zur Zeit  $t=0$  und durch Angabe des Verlaufs von Körperkontur und Lage der Ablösungsstelle für  $t \geq 0$ . Die für Stoßvorgänge gebrauchte Beweisführung stößt hier aber auf folgende Schwierigkeit. Während der Zeit  $dt$  hat sich ein neues Stückchen der freien Oberfläche gebildet, dessen Tangentialgeschwindigkeit nicht nach Satz 1 bestimmbar ist. Es scheint nun, daß diese Geschwindigkeit  $v_t$  für das unendlich kleine neue Stückchen der Oberfläche durch die Strömung Abb. 10 bestimmt ist: es müßten sich für die Zeit  $t+dt$  die Größen  $A$  und  $U$  der Gl. 15 so bestimmen lassen, daß dieses Geschwindigkeitsfeld glatt übergeht in den angrenzenden Bereich. Ich habe aber diese Überlegung nicht näher durchgeführt.

Abhebevorgänge. Es ist mir nicht gelungen, Klarheit über die Vorgänge beim Abheben eines Körpers von der Oberfläche der Flüssigkeit zu erhalten (Abb. 11), wenn in einem Bereich  $C$  sich zurückziehender Körperoberfläche andere als die bisher besprochenen Arten von Unstetigkeiten auftreten. Von solchen Strömungsvorgängen ist weiterhin nicht mehr die Rede.

## II. Unendlich flacher Boden.

**5. Bezeichnungen und Bereiche.** Die den halben Raum vollständig erfüllende Flüssigkeit besitze ursprünglich ebene Oberfläche. Sie sei ursprünglich in Ruhe. Durch die Bewegung des Bodens eines Körpers an der Oberfläche (Abb. 12) entstehe eine Flüssigkeitsbewegung (räumliches Problem). Wir betrachten den Grenzfall, daß die Neigung  $\beta$  der Druckfläche gegenüber der ursprünglichen Oberfläche der Flüssigkeit an jeder Stelle unendlich klein ist.

Die Druckfläche besitze im Grundriß nach jeder Richtung endliche Ausdehnung. Die Normalgeschwindigkeit  $V_n$  an der Druckfläche, deren Größenordnung wir willkürlich festsetzen können, sei klein wie  $\beta$ . Die seit Beginn des Vorganges verlaufene Zeit, während welcher die unendlich kleine Eintauchtiefe (klein wie  $\beta$ ) erreicht wurde, ist folglich endlich.

Wir zerlegen den von Flüssigkeit erfüllten Raum in die Bereiche (Abb. 12)

- Hauptbereich (Hauptströmung)
- Spritzerwurzel (Wurzelströmung)<sup>14)</sup>
- Spritzer.

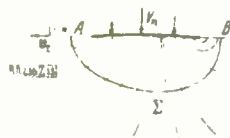
Hauptbereich und Spritzerwurzel haben gemeinsam den Grenzbereich.

Die zeitlich veränderliche Kontur der Druckfläche wird gebildet (Abb. 12) am Vorderrand, d. h. an Stellen, an welchen sie sich (mit der Geschwindigkeit  $v_t$ ) ausbreitet, durch die Spritzerwurzel an Stellen, an welchen sie sich zurückzieht, durch die Gleitkaute.

Als gleiche Tragflügelbewegung bezeichnen wir die nichtstationäre Bewegung einer unendlich dünnen Platte, die in jedem Augenblick gleiche Form, Kontur und Geschwindigkeiten  $V_n$  besitzt wie die Druckfläche, in allseitig ausgedehnter, im Unendlichen ruhender Flüssigkeit (vgl. Abb. 13 rechts).

**6. Geometrische Beziehung.** In beiden Fällen Abb. 13 werde im betrachteten Augenblick durch die gleiche Bewegung gleicher Platten die gleiche Geschwindigkeit  $V_n$  hervorgerufen:

Halbraum: Die Strömung ist eindeutig bestimmt durch die Angabe von  $V_n$  an der Druckfläche und von  $v_t$  an der freien Oberfläche. Die Angabe  $v_t$  kann ersetzt werden durch die Angabe eines zirkulationsfreien Geschwindigkeitsfeldes  $v_t$  an der freien Oberfläche.



Gleiche Tragflügelströmung: Diese Strömung im einfach zusammenhängenden Raum ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Geschwindigkeit  $V_n$  an der Tragflügelfläche und die Angabe der Unstetigkeiten. Als solche seien in der Hauptebene Wirbelflächen von der Stärke  $2[c_n v_t]$  vorhanden.

Abb. 13.

<sup>13)</sup> Die Wahl der Ablösungsstelle ist bei stetig gekrümmtem Boden der einschränkenden Bedingung unterworfen, daß sich die Strömung nach außen von der Bodenfläche ablöst. Dies ist entsprechend der Strömung Abb. 10 mit einem Druckanstieg in Richtung der Geschwindigkeit verbunden. Es liegt nahe, die Ablösungsstelle so zu wählen, daß dieser Druckanstieg vermieden wird. Dies kann durch die als Grenzfall mögliche Bedingung stetiger Krümmung an dieser Stelle gerade noch erreicht werden. Beim Gleiten von Flugbooten (schwach gekrümmter Boden, große Reynoldssche Zahl) löst sich die Flüssigkeit, wie man aus Versuchen schließen kann, unter Umständen erst weit hinter dem Druckminimum ab.

<sup>14)</sup> Für unsern Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  wird sich ergeben, daß die Spritzerwurzel unendlich dünn ist.

Sind gleiche  $v_t$  gegeben, so folgt die Identität beider Geschwindigkeitsfelder im unteren Halbraum für diesen Zeitpunkt aus der Identität und Eindeutigkeit beider Grenzbedingungen.

Im Sinne dieses Vergleiches sprechen wir auch bei der Strömung im Halbraum von „Wirbelstärke“  $2[e_n v_t]$  und „Zirkulation“  $\Gamma = 2 \Sigma^{13)}$ .

Es läßt sich leicht beweisen: Ist  $v_t$  und dessen Richtungsableitung an der freien Oberfläche stetig (dies wollen wir voraussetzen) und ist  $v_t$ , ebenso wie  $V_n$ , klein wie  $\beta$ , so ist auch  $v_n$  an der freien Oberfläche stetig und klein wie  $\beta$ . Nur gegen den Rand der Druckfläche hin wird  $v_n$  im allgemeinen unstetig (unendlich groß).

Wir zeigen noch (der Einfachheit halber fürs ebene Problem), daß die stillschweigende Voraussetzung unendlich kleiner Neigung der freien Oberfläche zutrifft: In stetigen Bereichen ist wegen Gl. (1)  $\frac{D\alpha}{Dt} = \epsilon_n \frac{\partial v}{\partial s}$  und wegen  $\alpha = 0$  für  $t=0$  die Neigung  $\alpha$  der freien Oberfläche klein wie  $v$ , also klein wie  $\beta$ . Dies gilt auch fürs räumliche Problem.

**7. Dynamische Beziehung.** Für die Änderung  $\Delta v_t$  der Tangentialgeschwindigkeit  $v_t$  während eines Zeitabschnitts  $\Delta t$  gilt in stetigen Bereichen nach Gl. (3) fürs ebene Problem:

$$\Delta v_t = \int v_n \frac{D\alpha}{Dt} dt = \int v_n d\alpha.$$

$\Delta v_t$  ist folglich klein wie  $v_n \Delta \alpha$ , also klein wie  $\beta^2$ , also hinsichtlich der Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes Abb. 13 aus den Grenzbedingungen gegenüber den anderen Geschwindigkeiten vernachlässigbar klein. Da sich fürs räumliche Problem aus Gl. (6) das gleiche ergibt, gilt

**Satz 5:** In einem stetigen Bereich der freien Oberfläche ist die Tangentialgeschwindigkeit  $v_t$  zeitlich unveränderlich. Flüssigkeitsteilchen, welche seit  $t=0$  der freien Oberfläche angehören, besitzen die Tangentialgeschwindigkeit Null. Treten Flüssigkeitsteilchen hinter einer Gleitkante mit einer Tangentialgeschwindigkeit  $v_t$  (klein wie  $\beta$ ) an die freie Oberfläche, so behalten sie diese unverändert bei.

Dies entspricht genau der Bedingung für den Fortbestand der Wirbelfläche hinter dem gleichen Tragflügel<sup>14)</sup>.

Entstehung von  $v_t$ . Nach Satz 5 können nur neu an die Oberfläche getretene Flüssigkeitsteilchen  $v_t$  besitzen. Wie bereits bemerkt, würde durch willkürlich gegebenes  $v_t$  im allgemeinen an der Gleitkante unendlich große Geschwindigkeit  $v_n$  bedingt. Längs der Gleitkante muß aber nach Gl. (14)  $v_n$  endlich sein. Wir bestimmen folglich das neuentstehende  $v_t$  für jeden Augenblick aus der Stetigkeitsbedingung an der Gleitkante. Dies ist zufolge der bereits gezeigten Identitäten § 6 und Satz 5 identisch mit der Berechnung der Wirbelfläche hinter dem gleichen Tragflügel aus der Stetigkeitsbedingung an der Hinterkante<sup>15)</sup>.

**8. Spritzerwarzel.** Am Vorderrand wird  $v$  (im allgemeinen) unstetig. Wir legen durch einen Punkt des Vorderrandes senkrecht zu diesem eine komplexe Zahlenebene  $s$ .

Beim gleichen Tragflügel sind Strömungsfunktion  $w_s$  im nahen Bereich der Vorderkante und hier ausgeübte spezifische Saugkraft  $\mathcal{S}$  gegeben durch ( $C = \text{Konstante}$ )<sup>16)</sup>

$$w_s = C\sqrt{-s} \dots \dots (16) \quad \text{und} \quad |\mathcal{S}| = \frac{\pi}{4} \rho C^2 \dots \dots (17).$$

Wie leicht zu zeigen, ist  $\mathcal{S}$  klein wie  $\beta^2$ .

Beim Gleit- oder Stoßvorgang wird nach Gl. (1) durch unstetiges  $v_n$  unstetige Krümmung der freien Oberfläche bedingt. Da außerhalb der Unstetigkeit an der freien Oberfläche  $v_t = 0$  ist, versuchen wir, ob im unstetigen Bereich das Geschwindigkeitsfeld  $w$ , nach Gl. (12) (Abb. 9) herrscht:

Wir wählen den Durchmesser des Grenzbereiches einerseits unendlich klein (klein wie  $\beta$ ) gegenüber den Abmessungen der Druckfläche, so daß dort die der Tragflügelströmung identische

<sup>14)</sup> Ist im Unendlichen die Geschwindigkeit  $v_\infty \neq 0$ , so ist  $\Gamma = 2 \int_A^B (v - v_\infty) ds$  zu setzen.

<sup>15)</sup> Verf. „Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln“, ZAMM, 1925, Heft 1, § 2.

<sup>16)</sup> Verf. I. a. § 1. Dieser Vergleich ist nur dann eindeutig, wenn die Bestimmung der Wirbelstärke beim Tragflügelproblem aus der Stetigkeitsbedingung an der Kante eindeutig ist. Dies scheint aber zweifellos. Sollte dies jedoch z. B. in besonderen Fällen nicht zutreffen, so müßte die Mehrdeutigkeit in eine Mehrdeutigkeit der auf Grund dieser Bedingung angenommenen Integralgleichung zum Ausdruck kommen. Die Integralgleichung ZAMM 1925, Gl. 8 scheint eindeutig zu sein.

<sup>17)</sup> Grammel, „Hydrodynamische Grundlagen des Fluges“, Braunschweig 1917, S. 21.



Strömung des Gleit- oder Stoßvorganges gegeben ist durch Gl. (16), andererseits aber unendlich groß (groß wie  $\frac{1}{\beta}$ ) gegenüber der Spritzerdicke  $\delta$ , so daß  $\ln \tau$  gegenüber  $\sqrt{\tau}$  vernachlässigt werden kann [vgl. Gl. (13)]. In diesem Grenzbereich gehen Hauptströmung und Wurzelströmung glatt ineinander über ( $v_1 = v_2$ ), wenn wir längs des ganzen Vorderrandes die Spritzerdicke wählen zu [vgl. Gl. (13) mit Gl. (16) und Gl. (17)]

$$\delta = \frac{\pi C^2}{16 v_1^2} \sqrt{\frac{\Sigma}{2}} \quad (18)$$

Da sich  $\delta$  klein wie  $\Sigma$ , also klein wie  $\beta^2$  ergibt, erweist sich unsere Größenordnungsbetrachtung nachträglich als zulässig.

Berechnet man für den Hauptbereich gegen den Vorderrand zu die Form der freien Oberfläche entsprechend der dort herrschenden Strömungsfunktion  $w_3$ , so erkennt man, daß im Grenzbereich auch die Form der Oberfläche des Hauptbereiches glatt übergeht in die der Spritzerwurzel Gl. (9), wenn Gl. (18) erfüllt ist<sup>19)</sup>. Ferner erkennt man, daß im Grenzbereich die Neigung der Oberfläche noch unendlich klein ist und daß hier auch  $v_1$  unendlich klein ist gegenüber  $v_n$ , daß hier also die Grenzbedingungen wie im Hauptbereich erfüllt sind.

**9. Zusammenfassung.** Wir vergleichen unsern Gleit- oder Stoßvorgang mit der gleichen Tragflügelbewegung. Bei der gleichen Tragflügelbewegung herrscht in der Hauptebene außerhalb des Tragflügels aus Symmetriegründen der Druck  $p=0$ . Die Gleichheit dieser Bedingung und die Gleichheit der Normalgeschwindigkeit  $V_n$  an Druckfläche bzw. Tragflügel, ferner die gleiche Stetigkeitsbedingung an Gleitkante bzw. Hinterkante führen dazu, daß im Hauptbereich (unterer Halbraum) in beiden Fällen jederzeit gleiche Strömungen herrschen. Nur im unendlich kleinen Unstetigkeitsbereich am Vorderrand tritt statt der Saugkraft unser Spritzer auf.

Dieses aus zwei örtlich verschiedenen Bereichen zusammengesetzte Geschwindigkeitsfeld erfüllt im Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  (vorausgesetzt, daß Gl. (18) zeitlich stetig veränderliches  $\delta$  ergibt, daß also die Stetigkeitsbedingungen § 2 erfüllt sind), längs der ganzen freien Oberfläche (Hauptbereich, Grenzbereich, Spritzerwurzel) die geometrische und die dynamische Grenzbedingung und erfüllt die Grenzbedingung  $v_n = V_n$  an der Druckfläche. Haupt- und Wurzelströmung gehen glatt ineinander über; das Geschwindigkeitsfeld ist im ganzen Bereich drehungs- und quellenfrei.

Das im Spritzer abgeschleuderte Wasser bewegt sich mit zeitlich unveränderter Geschwindigkeit fort.

**Kraftwirkung.** Der Druck auf die Bodenfläche ist an jeder Stelle des Hauptbereiches genau so groß wie der Druck auf die untere Seite des Tragflügels, in diesem Grenzfall also halb so groß wie die Druckdifferenz zwischen Oberseite und Unterseite.

Der Wurzelbereich  $\left[ \text{bis } \frac{z}{\delta} \rightarrow \infty \text{ in Gl. (11)} \right]$  ist klein wie  $\beta$ . Folglich ist nach Gl. (11) die im Bereich der Spritzerwurzel ausgeübte Kraft klein wie  $\beta^{3/2}$  und kann bezüglich Auftrieb und Widerstand vernachlässigt werden.

**Satz 6:** In jedem Augenblick ist die Größe der Auftriebskraft der Bodenfläche (nichtstationäres räumliches Problem) halb so groß wie bei der gleichen Tragflügelbewegung. Auch die Lage der Kräfte stimmt in beiden Fällen überein.

Gegenüber dem Widerstand  $\mathfrak{W}_T$  des gleichen Tragflügels fällt die Saugkraft weg. Für den Widerstand  $\mathfrak{W}$  der Gleitfläche beim nichtstationären räumlichen Problem gilt also

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2} (\mathfrak{W}_T - \int \Sigma du) \quad (19)$$

Das Integral ist über alle Elemente  $du$  (Abb. 12) des Vorderrandes zu erstrecken.

**Energiebetrachtung.** Das auf der Breitereinheit  $du = 1$  der Spritzerwurzel in der Zeit  $dt$  neu entstehende Spritzervolumen  $\delta v_1 dt$  besitzt eine Geschwindigkeit  $2v_1$ , und folglich eine Bewegungsenergie  $dT = \frac{1}{2} \rho \cdot \delta v_1 dt \cdot (2v_1)^2$ . Mit Gl. (18) wird  $dT = v_1 dt \cdot \frac{\Sigma}{2}$ . Dies sagt, daß die auf dem Wege  $v_1 dt$  der Vorderkante infolge Wegfalls der halben Saugkraft  $\frac{\Sigma}{2}$  gegenüber dem gleichen Tragflügel erforderliche Mehrarbeit als „vernichtete“ Bewegungsenergie im Spritzwasser erscheint.

<sup>19)</sup> Man kann auch diese Bedingung zur Aufstellung von Gl. (18) verwenden.

**10. Integralgleichung der Stoßbewegung.** Für den betrachteten Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  einer Stoßbewegung sei ursprünglich ruhende Flüssigkeit bei ebener Oberfläche gegeben. Ferner sei (Abb. 14) für den ganzen zeitlichen Verlauf die Erhebung  $\eta_b$  aller Punkte  $r_b$  der Bodenfläche gegeben, also  $\eta_b = \eta_b(t, r_b)$  und daraus ihre Normalgeschwindigkeit  $V_n = V_n(t, r_b)$ . Es ist der zeitliche Verlauf der Kontur der Druckfläche zu suchen; die Radienvektoren  $r_x$  der Kontur (vgl. Abb. 12) wollen wir angeben durch ihren Betrag  $r_x(t, \lambda)$ .



Abb. 14.

Wir denken fürs erste den zeitlichen Verlauf der Kontur  $r_x(t, \lambda)$  gegeben. Durch Lösung des in Abb. 13 gezeigten Strömungsproblems in grundsätzlich bekannter Weise erhalten wir nun die Geschwindigkeit  $v_n = v_n(x, t)$  für die freie Oberfläche. Wir bezeichnen diese Geschwindigkeit mit  $v_n(x, V_n[t, r_b \rightarrow r_x(t, \lambda)])$ , um anzudeuten, daß diese Geschwindigkeit an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  abhängt von den gegebenen Geschwindigkeiten  $V_n$  zu dieser Zeit  $t$  für alle  $r_b$ , soweit  $r_b$  innerhalb der augenblicklichen Kontur  $r_x(t, \lambda)$  der Druckfläche liegt. Die Erhebung der Flüssigkeitsteilchen ist dann  $\eta = \int_0^t v_n dt$ . Das Flüssigkeitsteilchen hebt sich immer weiter dem Boden entgegen und erreicht ihn schließlich zur Zeit  $t_0$ , wenn seine Erhebung so groß geworden ist wie die des Bodens an dieser Stelle  $r_x$  der Kontur der Druckfläche<sup>20)</sup> zu dieser Zeit  $t_0$ , also

$$\eta_b[t_0, r_x(t_0, \lambda)] = \int_0^{t_0} v_n(x, V_n[t, r_b \rightarrow r_x(t, \lambda)]) dt \dots \dots \dots (20)$$

Aus dieser Integralgleichung, die für jedes  $t_0$  längs der ganzen Kontur (also von  $\lambda = 0$  bis  $2\pi$ ) erfüllt sein muß, ist  $r_x(t, \lambda)$  zu bestimmen.

Beim Gleitvorgang ist voraussetzungsgemäß der zeitliche Verlauf der Gleitkante gegeben. Die an der Gleitkante automatisch erfüllte Bedingung Gl. (20) ist nur für den Vorderrand auszuwerten. Als Komplikation kommt hinzu, daß  $v_n$  noch von  $v_t$  abhängt, wobei  $v_t$  seinerseits aus der als Integralgleichung aufzufassenden Stetigkeitsbedingung an der Gleitkante zu bestimmen ist. Von näheren Ausführungen wollen wir absehen.

Die folgenden Beispiele geben Lösungen für dieses Problem in besonders einfachen Fällen. Wir werden dabei aber nicht auf die allgemeine Form der Integralgleichung zurückgreifen.

### III. Beispiele für unendlich flachen Boden.

**11. Stationäres Gleiten. Ebenes Problem.** Beim stationären Gleiten ist der Auftrieb  $A$  gleich dem halben Auftrieb des stationär bewegten gleichen Tragflügels; der Widerstand  $W$  ist gleich der halben Saugkraft dieses Tragflügels. So ist z. B. entsprechend der Tragflügeltheorie für eine kreisförmige Druckfläche mit dem Wölbungsprofil  $f$ , der Tiefe (Profiltiefe)  $2c$  der Druckfläche (vgl. Abb. 15) und dem Anstellwinkel  $\beta_0$  der Sehne

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{b} &= \pi \rho V^2 (f + c \beta_0) & \frac{W}{b} &= \pi \rho V^2 c \beta_0^2 \\ \frac{M}{b} &= \pi \rho V^2 c \left( f + \frac{1}{2} c \beta_0 \right) & \delta &= \frac{\pi}{2} c \beta_0^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

$M$  = Moment um die Vorderkante,  $b$  = (unendlich große) Spannweite. Die Gleitkraft ist immer zum Mittelpunkt der Druckfläche gerichtet.

In Abb. 15 sind für einige Druckflächen die Kräfte vergleichsweise maßstäblich eingezeichnet. Wir erkennen, daß für  $\beta_0 = 0$  widerstandloses Gleiten möglich ist. Obige Gleichungen gelten auch für negatives  $f$ , nicht aber für negatives  $\beta_0$ , da dann die Vorderkante überpült wird und eine andere Strömung eintritt.

<sup>20)</sup> Eine nähere Überlegung zeigt, daß man über den Wurzelbereich integrieren kann, ohne von der speziellen Form der Umstetigkeit (Wurzelströmung) Notiz zu nehmen.

Denken wir uns die Gleitfläche ruhend und die Flüssigkeit bewegt, so erkennen wir, daß (abgesehen von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung) die freie Oberfläche identisch ist mit der Stromlinie (Bahnlinie), die bei der Tragflügelbewegung vom Tragflügel ausgeht. Die in § 17 berechnete Plattenströmung geht für  $\beta_0 \rightarrow 0$  in die hier gezeigte Strömung über.

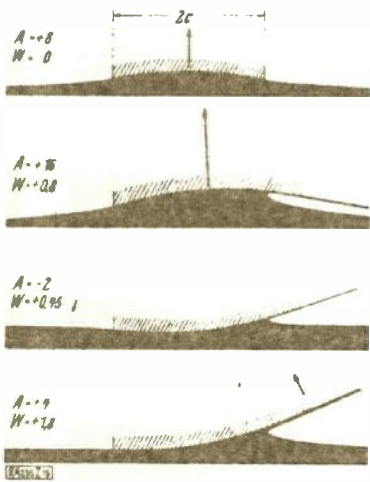


Abb. 15.

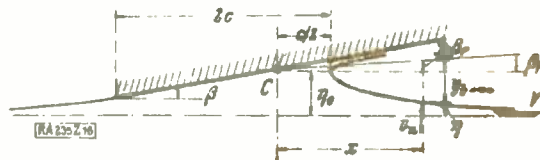


Abb. 16.

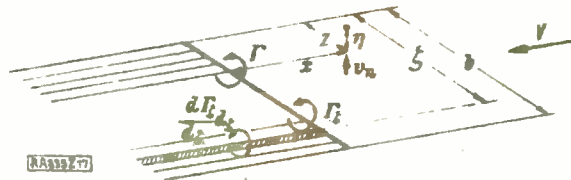


Abb. 17.

12. Stationäres Gleiten. Grenzfall breiter Gleitfläche. Die Spannweite  $b^{21)}$  (Abb. 17) sei im betrachteten Grenzfall unendlich groß gegenüber der über  $b$  veränderlichen Tiefe  $2c$  der Druckfläche ( $b \gg 2c$ ). Die „Schwerpunkte“  $C$  (Abb. 16) der Zirkulation  $\Gamma$  um die einzelnen ebenen Profilschnitte sollen im Grundriß auf einer geraden Linie liegen<sup>22)</sup>. Der Anstellwinkel  $\beta$  kann über die Spannweite veränderlich sein.

Nach der Prandtl'schen Tragflügeltheorie besteht die Beziehung

$$\Gamma = 4 \pi V c (\beta - \beta_P) \dots \dots \dots (22),$$

$\beta_P$  ist der Abwindwinkel nach Prandtl.

Würde man bei der Gleitfläche die Höhenlage der einzelnen Profilschnitte (den Verlauf von  $\eta_n$ ) ändern, so würde auch die Druckfläche ihre Form ändern, die Vorderseite taucht mehr oder weniger weit ein). Unser Ziel (im Sinne des § 10) ist die Beziehung Gl. (27) zwischen dem Verlauf der Höhenlage  $\eta_n = \eta_0(z)$  der Profilschnitte und dem Verlauf der Tiefe  $2c = 2c(z)$  der Druckfläche, wobei wir uns  $\Gamma$  in Gl. (27) durch  $2c$  nach Gl. (22) ersetzt denken<sup>23)</sup>.

Die Geschwindigkeit  $v_n$  eines Teilchens  $x, z$  der Oberfläche infolge der tragenden Linie  $\Gamma_\zeta = \Gamma_\zeta(\zeta)^{24)}$  und infolge der Wirbelfläche  $\frac{d\Gamma_\zeta}{d\zeta} d\zeta$  läßt sich nach Helmholtz ohne weiteres berechnen (Abb. 17). Da die Flüssigkeit aus dem Unendlichen mit  $V = -\frac{dx}{dt}$  anströmt, ist die Erhebung  $\eta$  eines Teilchens

$$\eta = \int_{t=0}^t v_n dt = \frac{1}{V} \int_{x=0}^x v_n dx.$$

Einsetzen von  $v_n$  und Ausführung der Integration gibt

$$\eta = \frac{1}{4\pi V} \int_0^b \frac{\Gamma_\zeta d\zeta}{V^2 x^2 + (\zeta - z)^2} - \frac{1}{4\pi V} \int_0^b \frac{1}{\zeta - z} \sqrt{x^2 + (\zeta - z)^2} \cdot x d\Gamma_\zeta d\zeta \dots \dots (23).$$

Das erste Glied entspricht der tragenden Linie, das zweite der Wirbelfläche.

<sup>21)</sup> Sämtliche Bezeichnungen sind aus Abb. 16 und Abb. 17 erkennbar.  $z$  bedeutet in diesem Beispiel die rechte Koordinate Abb. 17.

<sup>22)</sup> Bei Nichtzutreffen dieser Voraussetzung (z. B. im Falle eines Versuches) dürften ziemlich große Abweichungen zu erwarten sein. Andererseits dürfte das Fallenlassen dieser Voraussetzung keine allzu großen Schwierigkeiten geben.

<sup>23)</sup> Dabei kann man näherungsweise  $\beta_P$  gegenüber  $\beta$  vernachlässigen.

<sup>24)</sup> Um die Beziehung  $\Gamma$  für die Zirkulation an der Stelle  $z = \zeta$  (also hinter dem betrachteten Flüssigkeitsteilchen) vorzubehalten, bezeichnen wir die Zirkulation an allen übrigen Stellen  $\zeta$  mit  $\Gamma_\zeta$ .

Entsprechend unserm Grenzfall  $b \gg 2c$  betrachten wir nun eine Stelle  $x$ , für die  $b \gg x \gg 2c^{26)}$ . Für kleine  $\frac{x}{b}$  erhalten wir aus Gl. (23) durch Reihentwicklung nach  $\frac{x}{b}$  unter Beachtung der ersten Glieder (stetiges  $\frac{dI'}{d\zeta}$  vorausgesetzt)<sup>26)</sup>

$$\eta = \frac{I'}{4\pi V} \left[ \int_0^b \left( \frac{I'_{\zeta}}{I'} - 1 \right) \frac{d\zeta}{|\zeta - z|} + \ln \frac{4z(b-z)}{c^2} \right] - \frac{I'}{2\pi V} + x\beta_P \dots \dots \dots (24)$$

$I'$  ist die Zirkulation an der Stelle  $\zeta = z$  (vgl. Abb. 17).

Im Vergleich zur Strömung um die unendliche breite Platte ist die Strömung im Bereich des Profilquerschnitts um  $\beta_P$  geneigt (Abb. 16). Im übrigen ist aber (wie sich zeigen läßt) in naher Umgebung des Profils ( $b \gg x$ ) die Form der Oberfläche in erster Näherung die gleiche wie beim ebenen Problem. Folglich ist (Abb. 16)

$$\eta_0 = \eta + y_b = \infty - x\beta_P \dots \dots \dots (25)$$

$y_b = \infty$  läßt sich für den Grenzfall  $x \gg 2c$  und für  $\beta \rightarrow 0$  z. B. aus Gl. (80) ermitteln:

$$y_b = \infty = \frac{I'}{4\pi V} \left( 1 + \ln \frac{4x^2}{c^2} \right) \dots \dots \dots (26)$$

Wir setzen dies und  $\eta$  nach Gl. (24) in Gl. (25) ein<sup>27)</sup>:

$$\eta_0 = \frac{I'}{4\pi V} \left[ \int_0^b \left( \frac{I'_{\zeta}}{I'} - 1 \right) \frac{d\zeta}{|\zeta - z|} + \ln \frac{16z(b-z)}{c^2} - 1 \right] \dots \dots \dots (27)$$

Noch eine Betrachtung über den Widerstand. Bezeichnen wir mit  $\frac{dA}{dz}$  die Auftriebsdichte, so ist, da die Kraft an jeder Stelle um  $\beta$  geneigt ist, der Widerstand

$$W = \int_0^b \beta \frac{dA}{dz} dz = \int_0^b \beta_P \frac{dA}{dz} dz + \int_0^b (\beta - \beta_P) \frac{dA}{dz} dz \dots \dots \dots (28)$$

Der erste Teil entspricht wie beim Tragflügel der Bewegungsenergie des sich „abwärts“ bewegenden Wassers hinter der Gleitfläche. Der zweite Teil wird zur Erzeugung des Spritzwassers aufgewendet. Dieser Teil kann durch Wölbung des Profils vermieden werden.

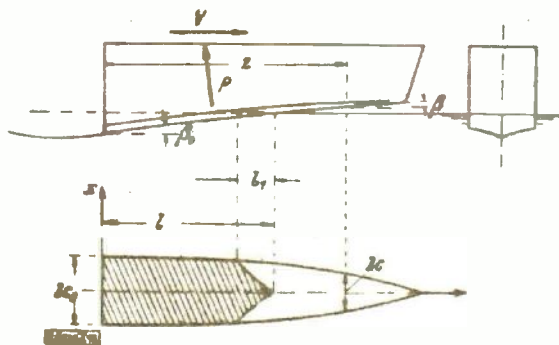


Abb. 18.

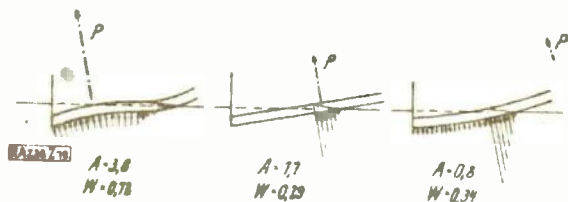


Abb. 19.

<sup>26)</sup> Diese doppelte Kleinsetzung  $2c$  gegenüber  $b$ , die wegen Gl. (24) und Gl. (26) notwendig ist, läßt erwarten, daß bei endlichen Spannweiten größere Abweichungen auftreten als bei der Prandtl'schen Tragflügeltheorie. Andererseits scheint die Voraussetzung  $b \gg x$  nicht allzu einschränkend, da bereits für  $x \approx +c$  bzw. für  $x \approx -1,8c$  die Erhebungen  $y$  der freien Oberfläche für unendlich breiten Tragflügel von den durch Gl. (26) gegebenen kaum zu unterscheiden sind.

<sup>27)</sup> Für  $x=0$  gibt das zweite Integral von Gl. (23)  $\eta = \frac{I'}{2\pi V}$ . Das Glied  $x\beta_P$  können wir ohne rechnerischen Nachweis hinzufügen, da  $\beta_P$  über  $x=0$  hinweg stetig verläuft.

<sup>28)</sup> Das letzte Glied in der Klammer, nämlich „-1“, ist entsprechend unserm Grenzfall klein gegenüber den beiden ersten Gliedern. Es scheint aber zweckmäßig, dieses Glied bei einer zahlenmäßigen Rechnung zu berücksichtigen.

13. Stationäres Gleiten. Grenzfall langer Gleitfläche. Wir betrachten (Abb. 18) den Grenzfall  $\frac{l}{2c} \rightarrow \infty$ . Ist der Boden (unendlich flach) gekielt und braucht das Wasser im vorderen Teil der Gleitfläche die Länge  $l_1$ , um den seitlichen Rand des Bodens zu erreichen, so sei auch  $\frac{l_1}{2c} \rightarrow \infty$ .

Bewegt sich eine unendlich lange Platte von der Breite  $2c$  in allseitig ausgedehnter Flüssigkeit senkrecht zu ihrer Ebene mit der Geschwindigkeit  $V_n$ , so läßt sich das Verhalten des umgebenden Wassers auf das einer mitgeführten Wassermasse von der Größe  $\pi \rho c^2$  (pro Längeneinheit der Platte) zurückführen. Hinter unserer Gleitfläche entsteht im unteren Halbraum in jeder Sekunde auf einem Stück von der Länge  $V$  das Geschwindigkeitsfeld um eine sich mit der Geschwindigkeit  $V_n = V \beta$ , abwärts bewegende Platte von der Breite  $2c$ , der Stufe. Der auf das Wasser pro Sekunde übertragene Impuls

$$B/\text{sek} = V \cdot \frac{1}{2} \pi \rho c^2 \cdot V \beta_0 = P \quad (29)$$

ergibt die Gleitkraft  $P$  von gleicher Größe.

Bei unendlich flach gekieltem Boden ist auf dem Stück  $l_1$  die Druckverteilung mit  $V_n = V \beta$  und  $\frac{dV_n}{dt} = -V \frac{d\beta}{dz}$  durch Gl. (45) gegeben; hinter  $l_1$  treten nur bei veränderlicher Neigung des Bodens Drücke auf:  $p = -\rho V^2 \frac{d\beta}{dz} \sqrt{c^2 - x^2}$ . Zur Erzeugung der hinter dem Boden im Wasser zurückbleibenden Energie wird pro Meter Weg die Arbeit

$$A/\text{Meter} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi \rho c^2 \cdot (V \beta_0)^2 = W_0 \quad (30)$$

verbraucht, der ein Widerstand  $W_0$  gleicher Größe entspricht. Beim Boden mit geradem Kiel  $\beta = \beta_0$  beträgt (vgl. Gl. (29)) der Gesamtwiderstand  $W = P \beta_0$ , gerade das Doppelte von  $W_0$ . Eine Energiemenge gleicher Größe wird also im Spritzwasser entführt, das im Bereich  $l_1$  entsteht. Vermindert man den Winkel  $\beta$  im Bereich  $l_1$ , so läßt sich dieser Energieverlust im gleichen Maße verringern und schließlich ganz vermeiden. In Abb. 19 sind Kräfteverteilung und Resultierende  $P$  für einzelne Fälle dargestellt.

14. Der Aufschlag gekielter Flächen. Die ursprünglich ebene Wasseroberfläche bewege sich nach oben gegen den ruhend gedachten Boden (Abb. 20). Die Geschwindigkeit  $V$  des Wassers im Unendlichen sei in Abhängigkeit von der Zeit gegeben:  $V = V(t)$ .

Bei diesem Stoßvorgang ist an der freien Oberfläche im Hauptbereich die Geschwindigkeit vertikal gerichtet ( $v_t = 0$ ). Die Geschwindigkeit am Boden fällt in Richtung des Bodens. Die durch diese Grenzbedingungen eindeutig gegebene Strömung (vgl. Abb. 20) stimmt sehr (unendlich) angenähert mit der Strömung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit um eine ruhende ebene Platte überein (vgl. § 6). Die Breite  $2c$  der Platte ist die augenblickliche Breite der Druckfläche. Die Geschwindigkeit des Wassers an einer Stelle  $x > c$  der Oberfläche ist <sup>28)</sup>

$$v_n = \int_0^x \frac{V}{1 - \frac{c^2}{x^2}} \quad (31)$$

Die Erhebung  $\eta$  des Wassers, vom Momente des Eintauchens ( $t = 0$ ) gerechnet, ist

$$\eta = \int_0^t v_n dt = \int_0^t \int_0^x \frac{V dt}{1 - \frac{c^2}{x^2}} \quad (32)$$

<sup>28)</sup> Alle Angaben über Plattenströmung vgl. Lamb, I. c. S. 92.

Die Breite  $2c$  der Druckfläche nimmt mit der Zeit zu:  $c = c(t)$ . Wählen wir fürs erste  $c$  als unabhängige Variable, also  $t = t(c)$  und auch  $V = V(c)$ , so können wir  $dt = \frac{dt}{dc} \cdot dc$  setzen, also (wegen  $u$  siehe weiter unten)

$$\eta = \int_{c=0}^{c=x} \frac{V \cdot dt}{1 - \frac{c^2}{x^2}} \cdot dc = \int_{c=0}^{c=x} \frac{u(c) \cdot dc}{1 - \frac{c^2}{x^2}} \quad (33)$$

Im Augenblick, wenn unser Wasserteilchen an der Stelle  $x$  die Kontur der Druckfläche erreicht, ist  $c = x$  und  $\eta = \eta_b$  geworden:

$$\eta_b = \int_0^x \frac{V \cdot dt}{1 - \frac{c^2}{x^2}} \cdot dc = \int_0^x \frac{u(c) \cdot dc}{1 - \frac{c^2}{x^2}} \quad (34)$$

Die beiden abhängig Veränderlichen  $V$  und  $\frac{dt}{dc}$  haben wir in

$$u = u(c) = \frac{V}{dc} \cdot \frac{V}{dt} \quad (35)$$

zusammengefaßt. Gl. (34) muß für alle  $x$  gelten; sie ist als Integralgleichung zur Bestimmung von  $u(c)$  aufzufassen (vgl. § 10). Die unendlich kleine Größe  $u$  ist eine rein geometrische Größe; sie hängt nur von  $\eta_b(x)$ , nicht aber von  $V = V(t)$  ab. Es wird immer möglich sein, die gegebene Bodenform durch die Reihe

$$\eta_b = \beta_0 x + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \beta_3 x^4 + \beta_4 x^5 + \dots \quad (36a)$$

darzustellen. Die Lösung von Gl. (34) lautet dann (Probe durch Einsetzen!)

$$u = u(c) = \frac{2}{\pi} \beta_0 + \beta_1 c + \frac{4}{\pi} \beta_2 c^2 + \frac{3}{2} \beta_3 c^3 + \frac{16}{3\pi} \beta_4 c^4 + \dots \quad (36b)$$

Ist nun  $V_n$  z. B. in Abhängigkeit von  $t$  gegeben, so kann man nach Gl. (35), nämlich aus

$$\int_0^c u(c) \cdot dc = \int_0^t V_n(t) \cdot dt \quad (37)$$

$c = c(t)$  bestimmen. Die Form der Wasseroberfläche  $\eta = \eta(x)$  läßt sich aus Gl. (33) bestimmen, indem man nach Ausführung der Integration jeweils  $c$  als gegeben und  $x$  als veränderlich ansieht. Man erhält z. B. für geradlinig gekielten Boden

$$\eta = \frac{2}{\pi} \beta_0 \cdot x \cdot \arcsin \frac{c}{x} \quad (38)$$

Um die Kraft  $P$  auf den Körper zu bestimmen, denken wir uns die Flüssigkeit ursprünglich ruhend und den Körper gegen die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit  $V = V(t)$  bewegt. Die „Bewegungsgröße“ der Flüssigkeit ist

$$B = \frac{\pi}{2} \rho c^2 V \quad (39)$$

Durch Differentiation nach  $t$  bei Beachtung von Gl. (35) erhalten wir

$$P = \pi \rho c \frac{V^2}{u} + \frac{\pi}{2} \rho c^2 \frac{dV}{dt} \quad (40)$$

Für den besonderen Fall, daß ein Körper von gegebener Masse  $m$  mit der ursprünglichen Geschwindigkeit  $V_0$  aufs Wasser aufschlägt, setzen wir die Bewegungsgröße der Flüssigkeit (Gl. 39) gleich der vom Körper abgegebenen Bewegungsgröße  $m(V_0 - V)$  und erhalten

$$V = \frac{V_0}{1 + \mu} \quad (41), \quad \text{wobei} \quad \mu = \frac{\pi \rho c^2}{2m} \quad (42)$$

Setzen wir  $P = m \frac{dV}{dt}$  in Gl. (40) ein, so erhalten wir bei Beachtung von Gl. (41) und Gl. (42)

$$P = \frac{\pi \rho c V_0^2}{(1 + \mu)^2} u \quad (42)$$

Dies gibt z. B. für den geradlinig gekielten Boden  $y_b = \beta x$ , also  $u = \frac{2}{\pi} \beta$ :

$$P = \frac{\pi^2}{2} \frac{\rho c V_0^2}{(1 + \mu)^2} \beta \quad (43a)$$

Es mag interessieren, welche Form man dem Boden bei gegebener Masse des Körpers geben muß, damit  $P = P_0$  zeitlich konstant ist. Man hat dann  $u = u(c)$  entsprechend Gl. (43) in Gl. (34) einzusetzen und für konstantes  $P = P_0$  zu integrieren, wobei aber zu beachten ist, daß  $\mu$  nach Gl. (42) von  $c$  abhängt. Die Integration ergibt

$$y_b = \frac{m V_0^2}{2 P_0} \frac{\mu_x}{1 + \mu_x} \left[ 1 + 2(1 + \mu_x) + \frac{3 \ln(\mu_x + \sqrt{1 + \mu_x})}{2(1 + \mu_x)^2} \right] \quad (44)$$

wobei  $\mu_x = \frac{\pi \rho x^2}{2m}$ . Ein Boden dieser Art ist in Abb. 21 dargestellt.

Wir berechnen die Druckverteilung am Boden. Für  $|x| < c$  ist das Geschwindigkeitspotential  $\varphi = V \sqrt{c^2 - x^2}$ . Der Flüssigkeitsdruck  $p$  ist<sup>29)</sup>

$$p = \rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v_x^2 + F(t) \right]$$

Mit  $\varphi = \varphi(V, c)$  und  $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  erhalten wir mit Gl. (35)

$$\frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{u} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}} + \frac{dV}{dt} \sqrt{c^2 - x^2} - \frac{1}{2} \frac{V^2}{\frac{x^2}{c^2} - 1} \right] \quad (45)$$

Das letzte Glied, das vom Geschwindigkeitsquadrat herrührt, ist unendlich klein gegenüber den beiden ersten Gliedern, die von  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  herrühren (dies gilt nicht für den Bereich der Spritzerwurzel).

Für den Fall des Aufschlags eines Körpers mit gegebener Masse  $m$  erhält man aus Gl. (41) und Gl. (43)

$$P = \frac{P}{\pi c} \left[ \frac{1 + \mu}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}} - 2u \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} - \frac{u(1 + \mu)}{2(\frac{x^2}{c^2} - 1)} \right] \quad (46)$$

Das erste Glied, das von  $\frac{dc}{dt}$  herrührt, gibt am Rand der Druckfläche große positive Drücke, während das zweite Glied negative Drücke mit elliptischer Verteilung ergibt, welche dadurch entstehen, daß gleichzeitig mit dem Körper auch das Wasser im Verlauf des Aufschlages verzögert wird. Da dem ersten Glied in der Mitte des Bodens verhältnismäßig geringe Drücke entsprechen, kommt es in praktischen Fällen sehr wohl vor, daß in der Mitte des Bodens negativer Druck herrscht, während am Rande der Druckfläche sehr hohe positive Drücke, die in ihrer Gesamtheit überwiegen, die Verzögerung des Aufschlages bedingen. Hat die Druckfläche schließlich den seitlichen Rand des Bodens erreicht, so ist der Stoßvorgang beendet.

Wir berechnen die Spritzerdicke  $\delta$ . Wir legen (vgl. § 8) bei der Plattenströmung (vgl. Abb. 20 unten) den Ursprung der komplexen Koordinate  $z$  in dem Punkt  $x = c$ . Die komplexe Strömungsfunktion der Plattenströmung  $w_p = iV \sqrt{2cz} \sqrt{\frac{z}{2c} - 1}$  geht für kleine  $z$  über in  $w_p = V \sqrt{2c} z - z^2$ . Durch Vergleich mit Gl. (13) erhalten wir

$$\delta = \frac{\pi}{8} c u^2 \quad (47)$$

<sup>29)</sup> Lamb, I, c. S. 20.

Den gleichen Wert  $\delta$  erhalten wir, wenn wir im Bereich kleiner  $z$  die Form der Oberfläche der Spritzerwurzel gleichsetzen der Form der Oberfläche der Hauptströmung oder wenn wir die vom aufschlagenden Körper abgegebene Energie gleichsetzen der Bewegungsenergie der Hauptströmung plus derjenigen der Spritzerströmung (vgl. § 9). Es sei bemerkt, daß bei Beginn des Aufschlags die halbe Bewegungsenergie der Flüssigkeit im Spritzer enthalten ist; gegen Ende des Aufschlags enthält der Spritzer fast die gesamte vom Körper abgegebene Bewegungsenergie.

Um den Übergang von Plattenströmung in Spritzerströmung bei endlichem Kielungswinkel zu zeigen, sind in Abb. 22 für den Wurzelbereich Form von freier Oberfläche Gl. (33) und Druckverteilung Gl. (45) entsprechend der Plattenströmung für endlichen Winkel  $\beta = 0,1$  verglichen mit diesen Angaben aus der Spritzerströmung. (Gl. (9) bzw. Gl. (10).

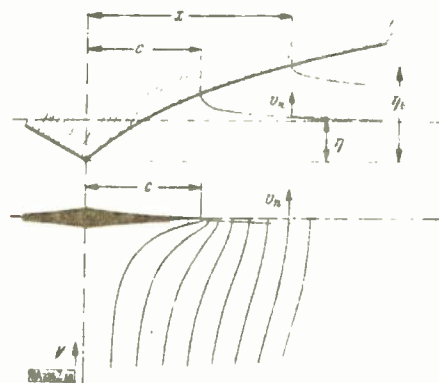


Abb. 20.

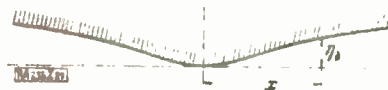


Abb. 21.

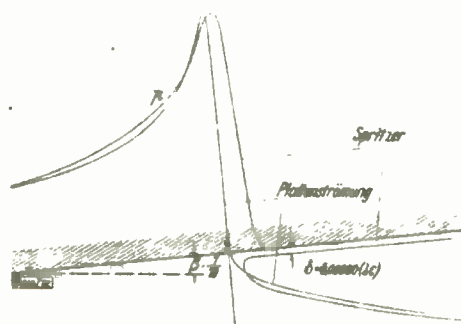


Abb. 22.

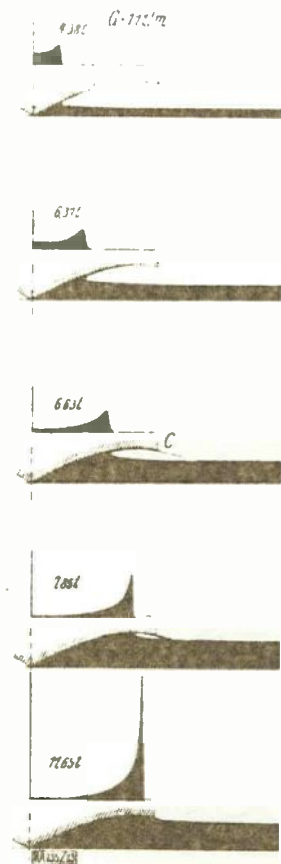


Abb. 23.

Abb. 23 zeigt den Druckverlauf während des Aufschlags eines Körpers von  $2b = 2\text{ m}$  Breite,  $1100\text{ kg}$  Gewicht pro Meter Länge bei einer Sinkgeschwindigkeit  $V_0 = 5\text{ m/sek}$ . Die angegebenen Zahlen sind die Stoßkräfte in Tonnen.

**15. Aufsetzen einer Stufe. Ebenes Problem.** Als Beispiel einer nichtstationären Gleitbewegung besprechen wir das Aufsetzen einer Stufe (Abb. 24). Wir denken uns gegeben: die zeitlich konstante Geschwindigkeit  $W^{**}$  der Stufe und die Normalgeschwindigkeit  $W_n = W(\beta + \kappa)$ ; ferner die (zeitlich veränderliche) Tiefe  $2c$  der Druckfläche im Vergleich zum Weg  $Wt$ , den die Stufe in der Zeit  $t$  zurückgelegt hat; der Kürze halber wählen wir die Zeit  $t$ , in welcher  $c = 1$  ist. Das Ziel unserer Rechnung, nämlich (im Sinne des § 10) die Ermittlung von  $\beta$  bzw.  $\kappa$ , erreichen wir über die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes und die Berechnung der freien Oberfläche (insbesondere von  $\eta_1$ ).

Wir erkennen (vgl. § 16), daß eine zentrisch ähnliche Flüssigkeitsbewegung entsteht. Ähnlichkeitszentrum ist der Punkt der ursprünglichen Oberfläche, an dem die Stufe aufsetzte

\*\* In diesem Beispiel bezeichnen wir die Körpergeschwindigkeit mit  $W$  statt wie bisher mit  $V$ .



(in Abb. 24 der Ausgangspunkt des Vektors  $Wl$ ). Auf dem von der Gleitkante überstrichenen Stück der freien Oberfläche  $x_0 \leq x \leq c$  besteht eine Horizontalgeschwindigkeit  $v_x$  (vgl. § 7), welcher bei der gleichen Tragflügelbewegung eine Wirbelfläche mit dem Geschwindigkeitsprung  $u = 2v_x$  entspricht. Da die Größe von  $u$  an jeder Stelle zeitlich unveränderlich ist (Satz 5), wegen der Ähnlichkeit aber Zirkulation um die Wirbelfläche und Länge derselben linear mit der Zeit zunehmen, muß auf dem Stück  $x_0 \leq x \leq c$  die Größe  $u = 2v_x$  der Unstetigkeit auch örtlich konstant sein.

Um das Geschwindigkeitsfeld zu beherrschen, müssen wir vor allem den Zusammenhang zwischen  $W_n$  und  $u$  kennen<sup>21)</sup>. Wir bezeichnen (Abb. 25) die Koordinaten der einzelnen Wirbelfäden mit  $\xi$ , die Zirkulation um einen Faden mit  $u d\xi$ . In der konformen Abbildung der Plattenströmung um einen Kreiszyylinder bezeichnen wir alle Größen mit den großen Buchstaben. Es gilt<sup>22)</sup>

$$X = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \dots (48) \quad \text{und} \quad \Xi = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \quad \dots (49)$$

Das Geschwindigkeitsfeld zerlegen wir in die beiden Felder I und II.

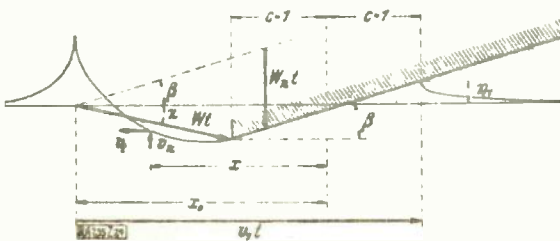


Abb. 24.

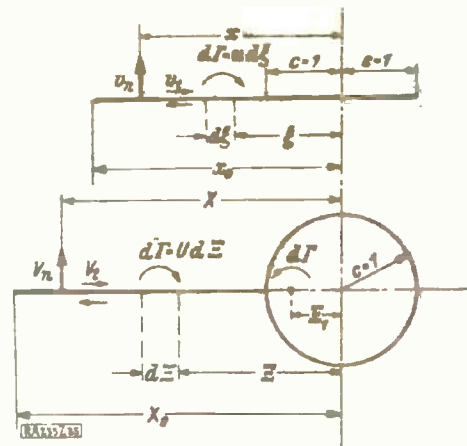


Abb. 25.

Geschwindigkeitsfeld I infolge Zirkulation um Wirbelfläche und ruhend gedachten Tragflügel bei ruhender Flüssigkeit im Unendlichen. Die Geschwindigkeit an einer Stelle  $X$  der Oberfläche im System der Kreiskontur infolge eines Wirbelfadens ist mit  $\Xi_1 = \frac{1}{\Xi}$ <sup>23)</sup>:

$$dV_{nI} = -\frac{d\Gamma}{2\pi(\Xi - X)} - \frac{d\Gamma}{2\pi(X - \Xi_1)}$$

Da sich bei der konformen Abbildung die Zirkulation nicht ändert, gilt  $d\Gamma = U d\Xi = u d\xi$ . Folglich ist

$$V_{nI} = -\frac{u}{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi} \left( \frac{1}{\Xi - X} + \frac{\Xi}{\Xi X - 1} \right) d\xi d\Xi \quad \dots (50)$$

Wir setzen  $\frac{d\xi}{d\Xi}$  nach Gl. (49) ein und integrieren. Bei konformer Abbildung ist  $v = V \frac{dX}{dx}$ .

Wir multiplizieren daher Gl. (50) mit  $\frac{dX}{dx}$  entsprechend Gl. (48) und erhalten:

$$v_{nI} = \frac{u}{2\pi} \left( \frac{X^2 + 1}{X^2 - 1} \ln X_0 + X \frac{X_0}{X^2 - 1} + \ln \left| \frac{X_0 - X}{X_0 X - 1} \right| \right) \quad \dots (51)$$

<sup>21)</sup> Aus Verf. l. c. Gl. (8) ergibt sich mit unseren Bezeichnungen für  $u = \text{konst}$  ohne weiteres unsere Gl. (54). Wir haben hier den Weg so wiederholt, daß wir auch die Geschwindigkeiten  $v_R$  an der freien Oberfläche erhalten (Gl. 55).

<sup>22)</sup> Verf. l. c. Gl. (4)

<sup>23)</sup> Verf. l. c. Gl. (5)

An der Gleitkante wird für  $X \rightarrow 1$

$$v_{nI} = \lim_{X \rightarrow 1} \left[ -\frac{u}{2\pi X^2} \frac{1}{X-1} (X_0 - X_0^{-1} + 2 \ln X_0) \right] \dots \dots \dots (52).$$

Geschwindigkeitsfeld II ist das zirkulationsfreie Feld um den mit  $W_n$  bewegten Tragflügel bei ruhender Flüssigkeit im Unendlichen. Es ist <sup>24)</sup>  $v_{nII} = W_n \left( \frac{x}{x^2 - 1} - 1 \right)$ . Wir führen entsprechend Gl. (48) statt  $x$  die Variable  $X$  ein:

$$v_{nII} = W_n \frac{2}{X^2 - 1} \dots \dots \dots (53).$$

Gesamtfeld. Damit nach Bedingung § 7 an der Gleitkante (für  $X \rightarrow 1$ )  $v_n = v_{nI} + v_{nII}$  endlich bleibt, muß nach Gl. (52) und Gl. (53) gelten

$$u = 2v_t = \frac{4\pi W_n}{X_0 - X_0^{-1} + 2 \ln X_0} \dots \dots \dots (54).$$

Wir setzen  $W_n$  nach dieser Gleichung in Gl. (53) ein und bilden mit Gl. (51)  $v_n = v_{nI} + v_{nII}$

$$v_n = \frac{u}{2\pi} \left( \frac{X_0 - X_0^{-1}}{X+1} + \ln \left| \frac{X - X_0}{X - X_0^{-1}} \right| \right) \dots \dots \dots (55).$$

Die Erhebungen  $\eta$  berechnen wir am einfachsten mit Gl. (75), wobei in unserm Grenzfall  $s = x_0 - x$  ist. So wird z. B. im Bereich negativer  $x$ :

$$\eta = (x_0 - x) \int_{-\infty}^x \frac{v_n t}{(x_0 - x)^2} dx \dots \dots \dots (56).$$

Damit ist auch  $\eta_1$  für  $x = -1$  bekannt. Wegen  $2c\beta - Wt\kappa = \eta$ , (vgl. Abb. 24) und  $W_n = W(\kappa + \beta)$  sind jetzt die Winkel  $\kappa$  und  $\beta$  einzeln bekannt.

Um die Spritzerdicke  $\delta$  zu ermitteln, legen wir den Ursprung unseres Koordinatenkreuzes in die Spritzerwurzel ( $x = -1$ ) und entwickeln  $v_n$  (Gl. (55)) nach Potenzen dieser neuen Abszisse. Diese Geschwindigkeit  $v_n$  vergleichen wir mit  $v_n = \left| \frac{dv_t}{dz} \right|$  für reelle  $s > 0$  nach Gl. (18), wobei nach Abb. 24 für die Geschwindigkeit  $v_1$  der Spritzerwurzel gilt  $v_1 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} W$ . Wir erhalten mit unseren alten Bezeichnungen

$$\delta = \frac{\pi}{2} \left( \frac{X_0 - 1}{X_0 + 1} \right)^2 \left( \frac{\kappa + \beta}{1 + \frac{2 \ln X_0}{X_0 - X_0^{-1}}} \right)^2 \dots \dots \dots (57).$$

Wir ermitteln die Kraft ( $2P$ ) auf den zugeordneten Tragflügel <sup>25)</sup>. Es ist <sup>26)</sup>

$$\int_{F_1 + F_1'} dF = \pi W_n + \int_1^{x_0} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) u d\xi = \frac{B}{\rho} \dots \dots \dots (58),$$

wobei wir  $b = 1$ ,  $v_p \sin \beta = W_n$ ,  $\Gamma = u d\xi$  gesetzt haben und statt  $x_0$ ,  $X_0$  unsere Bezeichnungen  $\xi$ ,  $\Xi$  eingeführt haben. Ferner haben wir bereits das Integral über alle Wirbelfäden  $u d\xi$  angedeutet.  $B$  ist die „Bewegungsgröße“ der Flüssigkeit.

<sup>24)</sup> Lamb, l. c. S. 32.  
<sup>25)</sup> Verf. l. c. Gl. (24).  
<sup>26)</sup> Verf. l. c. Gl. (23), (29), (31).

Es ist  $(2P) = \frac{DB}{Dt}$ . Da (vgl. § 16) sowohl das Potential  $\varphi$  wie auch die Flächen  $M$  mit  $t$  zunehmen, ist  $B$  proportional  $t^2$ , also  $\frac{DB}{Dt} = \frac{2B}{t}$ . Nach Abb. 24 können wir setzen  $t = \frac{x_0 - 1}{W}$ . Durch Ausführung der Integration Gl. (58) erhalten wir schließlich die Gleitkraft:

$$P = \frac{\rho W u}{8(x_0 - 1)} (1 + X_0)^2 (1 - X_0^{-2}) \dots \dots \dots (59).$$



Abb. 26.

Ich habe das Beispiel  $x_0 = 2,5c$  durchgerechnet. Es ergab sich (Gl. (54))  $v_1 = 0,813 W_n$ , ferner nach Berechnung von  $\eta_1$  nach Gl. (56)  $\beta = 1,25 \pi$ ; die Oberfläche ist für  $\beta = 0,21$  in Abb. 26 gezeichnet. Im Bereich um  $x = x_0$  ist wegen Unstetigkeit (Neigung der Oberfläche nicht unendlich klein) unsere Rechnung ungültig. Hier geben aber Satz 3 und Gl. (64) und Gl. (65) auch ohne Rechnung guten Anhalt für das Zeichnen der Oberfläche. An einzelnen Stellen der Oberfläche ist die Geschwindigkeit  $v$  eingezeichnet.

#### IV. Verschiedene Grenzfälle.

16. **Zentrisch ähnliche Flüssigkeitsbewegung.** Wir lassen die Annahme unendlich kleiner Neigung der Oberfläche fallen. Taucht z. B. der geradlinig gekielte Boden mit zeitlich konstanter Geschwindigkeit  $V_0$  in die Flüssigkeit ein, so ist diese Flüssigkeitsbewegung, wie leicht einzusehen, dem allgemeinen dynamischen Ähnlichkeitsgesetz unterworfen: Die Formen der Oberfläche zu verschiedenen Zeiten sind geometrisch ähnlich und an einander entsprechenden Stellen herrschen dann die gleichen Geschwindigkeiten. Denken wir uns die Flüssigkeit gegen den ruhenden Boden bewegt, so stellt der tiefste Punkt des Bodens das Ähnlichkeitszentrum 0 dar.

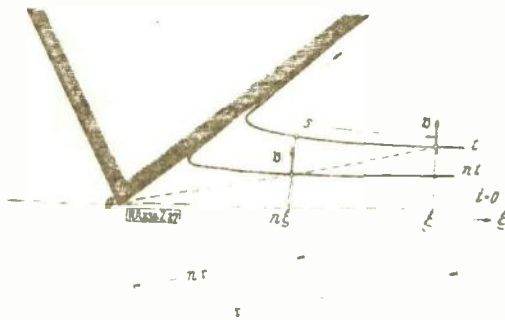
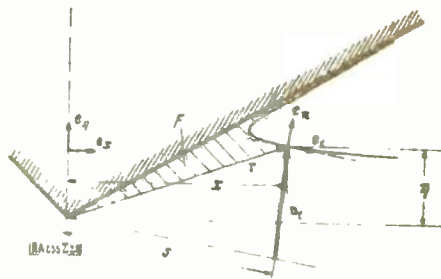


Abb. 27.



Korrektur: Es muß heißen  $v t$  statt  $v_1$ .

Abb. 28.

Wir kennzeichnen (Abb. 27) die einzelnen Flüssigkeitsteilchen der freien Oberfläche durch ihre Abszissen  $\xi$  zur Zeit  $t=0$ . Ihre Lage zu einer späteren Zeit  $t$  werde gegeben durch den auf 0 bezogenen Radiusvektor  $r = r(\xi, t)$ . Die Geschwindigkeit ist  $v = v(\xi, t) = \frac{\partial r}{\partial t}$ . Das Ähnlichkeitsgesetz sagt aus (Abb. 27): Hat ein Flüssigkeitsteilchen  $\xi$  zur Zeit  $t$  die Lage  $r$  und die Geschwindigkeit  $v$ , so hatte (mit  $n > 1$ ) das Flüssigkeitsteilchen  $n\xi$  zur Zeit  $nt$  die Lage  $nr$  und die Geschwindigkeit  $v$ . Mathematisch formuliert:

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{t} \left( \frac{\xi}{t} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v \left( \frac{\xi}{t} \right).$$

Wir differenzieren beide Gleichungen partiell nach  $t$

$$v \frac{r}{t} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{r}{t^2} \right) \xi \quad \dots \quad (60) \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{d\xi} \frac{\xi}{t^2} \quad \dots \quad (61).$$

Für einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  führen wir als unabhängige Variable statt  $\xi$  die Bogenlänge  $s = s(\xi)$  der freien Oberfläche ein:  $r = r(s)$ ,  $v = v(s)$ . Die Gl. (60), (61) nehmen jetzt die Form an

$$v t - r = \frac{dr}{ds} \cdot \xi \frac{ds}{d\xi} \quad \dots \quad (62) \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{d\xi} \frac{\xi}{t} \quad \dots \quad (63).$$

Gl. (63) zeigt, daß  $\frac{dv}{ds}$  die Richtung von  $\frac{\partial v}{\partial t}$  besitzt, also wegen der dynamischen Grenzbedingung senkrecht zur Oberfläche  $\frac{dr}{ds}$  gerichtet ist. Wir differenzieren Gl. (62) nach  $s$

$$t \frac{dv}{ds} - \frac{dr}{ds} = - \frac{d^2 r}{ds^2} \xi \frac{ds}{d\xi} - \frac{dr}{ds} \frac{d}{ds} \left( \xi \frac{ds}{d\xi} \right).$$

Die ersten Glieder beider Seiten stehen senkrecht auf  $\frac{dr}{ds}$ . Folglich ist  $\frac{d}{ds} \left( \xi \frac{ds}{d\xi} \right) = 1$ . Mit Konstanten  $A$  und  $B$  ist  $\xi \frac{ds}{d\xi} = s + A$  und daraus  $s + A = B\xi$ . Mit  $\frac{dr}{ds} = e_t$  geht Gl. (62) über in  $v t = r - e_t (s + A)$ . In unserm Fall (Abb. 27) ist  $\xi = 0$  für  $s = 0$  und  $\frac{ds}{d\xi} = 1$  für  $\xi = \infty$ . Folglich ist  $A = 0$ ,  $B = 1$ ; also

$$v t = r - e_t s \quad \dots \quad (64) \quad \text{und} \quad s = \xi \quad \dots \quad (65).$$

Gl. (64) sagt aus (Abb. 28): Bei bekannter Form der freien Oberfläche erhält man für einen Punkt derselben den andern Endpunkt des Vektors  $v t$ , indem man vom Ähnlichkeitszentrum aus die Bogenlänge  $s$  der freien Oberfläche, vom Ende des Spritzers gerechnet, parallel zur Tangente an die Oberfläche aufträgt<sup>27)</sup>.

Gl. (64) läßt sich (durch Multiplikation mit  $e_n$  und  $e_t$ ) ersetzen durch die beiden skalaren Beziehungen

$$v_n t = e_n r \quad \dots \quad (66) \quad \text{und} \quad v_t t = e_t r - s \quad \dots \quad (67).$$

Daraus folgt mit  $d\psi = v_n ds$  bzw.  $d\varphi = v_t ds$

$$\psi t = 2F + \text{konst.} \quad \dots \quad (68) \quad \text{und} \quad \varphi t = \frac{1}{2} (s^2 - r^2) + \text{konst.} \quad \dots \quad (69).$$

$\psi$  Stromfunktion,  $\varphi$  Potential.  $F$  ist die in Abb. 28 schraffierte Fläche.

<sup>27)</sup> Es sei erwähnt, daß die Umrandung des dem Flüssigkeitsraum entsprechenden Bereiches der Hilfsgröße  $\lambda = \int \sqrt{\frac{dv}{ds}} ds$  geradlinig verläuft. Die Geschwindigkeitsänderung in Richtung der freien Oberfläche steht nämlich nach Gl. (63) senkrecht auf die Richtung der Oberfläche, so daß mit  $v = v_x - i v_y$  das Produkt  $d v dz$  an der freien Oberfläche die Richtung der imaginären Achse besitzt.  $\sqrt{dv ds} = \sqrt{\frac{dv}{dz}} dz$  besitzt also längs der

freien Oberfläche die Richtung  $\pm \frac{\pi}{4}$ . Längs des Bodens besitzt es die Richtung der reellen Achse (vgl. nebenstehende Abb. 34).

Bei Aufstellung einer zweiten, von der obigen unabhängigen komplexen Beziehung ist man versucht, davon Gebrauch zu machen, daß (vgl. Abb. 28)  $\frac{dz}{s - v_x - i v_y}$  an der freien Oberfläche reell ist. Da dies aber die zu  $v$  konjugierte Größe enthält, ist es mir nicht gelungen, eine geschlossene Lösung für das ganze Problem zu finden.

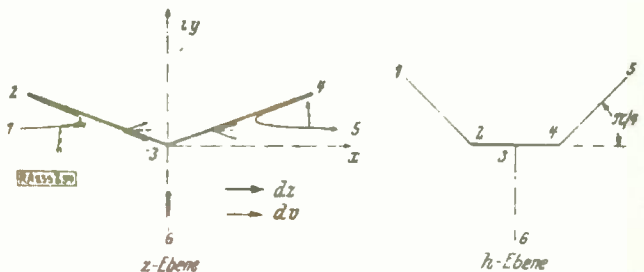


Abb. 34.

Für spätere Zwecke leiten wir noch eine Beziehung ab. Das im Zeitpunkt  $t$ , an der Stelle  $r_0$  der Oberfläche befindliche Flüssigkeitsteilchen  $\xi_0$  hat sich im Verlauf von  $t$ , um  $r_0 - e_x \xi_0 = \int_0^{t_0} v dt$  verschoben. Nach dem Ähnlichkeitsgesetz (Abb. 27) war die Geschwindigkeit  $v$  dieses Teilchens zu einer kleineren Zeit  $t$  ebenso groß wie die augenblickliche Geschwindigkeit des Teilchens  $\xi = \frac{t_0}{t} \xi_0$ . Wir können daher  $dt = -\frac{1}{\xi^2} t_0 \xi_0 d\xi$  in unser Integral einsetzen. Wegen Gl. (65)  $s = \xi$  gilt also

$$r_0 - e_x s_0 = s_0 t_0 \int_{s_0}^{\infty} \frac{v}{s^2} ds \dots \dots \dots (70).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit  $e_\eta$  (Abb. 28) und erhalten Gl. (75). Dabei haben wir die nicht mehr notwendigen Indizes 0 weggelassen.

Stoßkraft. Die Stoßkraft auf den Körper sei  $\mathfrak{P}_T$ , seine benetzte Bodenfläche  $F_T$ , die freie Oberfläche der Flüssigkeit  $F_0$ . Denken wir uns die Flächenelemente  $df$  von der Flüssigkeit nach außen gerichtet, so wird\*\*)

$$\mathfrak{P}_T = -\rho \frac{D}{Dt} \int_{F_T + F_0} \varphi df.$$

Da wegen der Ähnlichkeit  $\varphi$  und  $F$  linear mit der Zeit  $t$  wachsen, ist der Integralwert proportional  $t^2$ . Seine zeitliche Änderung ist folglich das  $\frac{2}{t}$ -fache seines jeweiligen Wertes. Also

$$t \mathfrak{P}_T = -2\rho \int_{F_T} \varphi df - 2\rho \int_{F_0} \varphi df \dots \dots \dots (71).$$

Wegen des linearen Anwachsens von  $\mathfrak{P}_T$  und wegen der konstanten Aufschlaggeschwindigkeit  $V_0$  des Körpers ist die der Flüssigkeit zugeführte Energie  $E = -\frac{1}{2} \mathfrak{B}_0 t \cdot \mathfrak{P}_T$ . Folglich ist\*\*)

$$-\mathfrak{B}_0 t \mathfrak{P}_T = \rho \int_{F_T} \varphi v df + \rho \int_{F_0} \varphi v df + \rho \int_{F_\infty} \varphi v df \dots \dots \dots (72).$$

Wie sich zeigen läßt, wird das Integral über die unendlich ferne Grenzfläche  $F_\infty$  unendlich klein; es kann weggelassen werden. An der Körperoberfläche  $F_T$  ist wegen der geometrischen Grenzbedingung  $v df = \mathfrak{B}_0 df$ . Wir heben daher aus dem ersten Integral der rechten Seite  $\mathfrak{B}_0$  heraus, multiplizieren Gl. (71) mit  $\mathfrak{B}_0$  und eliminieren aus Gl. (71) und Gl. (72) das erste Integral der rechten Seite:

$$\mathfrak{B}_0 \mathfrak{P}_T t = 2\rho \int_{F_0} \varphi (v + \mathfrak{B}_0) df \dots \dots \dots (73).$$

Da  $v$  und  $\varphi$  durch Gl. (64) und Gl. (69) in Abhängigkeit von der Form der freien Oberfläche bekannt sind, ist durch Gl. (73) die in  $\mathfrak{B}_0$ -Richtung fallende Komponente der Stoßkraft  $\mathfrak{P}_T$  durch die Form der Oberfläche bestimmt.

Iteration. Mit Hilfe von Gl. (64) kann man die Form der freien Oberfläche beim Stoßvorgang dadurch bestimmen, daß man eine geschätzte Form durch Iteration verbessert. Man kann z. B. so vorgehen: Man schätzt die Form der freien Oberfläche  $\eta = \eta(x)$  und bestimmt nach der Gleichung

$$t v_x = s - s \frac{dx}{ds} \dots \dots \dots (74),$$

die aus Gl. (64) durch Multiplikation mit  $e_x$  (vgl. Abb. 28) entsteht, die Geschwindigkeit  $v_x$  an der freien Oberfläche. Daraus und aus der Grenzbedingung am Boden bestimmt man mit Hilfe des Greenschen Satzes\*\*)) an allen Stellen der freien Oberfläche die der quellen-

\*\*)) vgl. Verf. I, S. 16.

\*\*)) Laub, I, c, S. 51.

\*\*)) Eine ähnliche Rechnung ist in ZAMM 1925, Heft 1, ausgeführt worden: Laub, „Der Oberfall über ein Wehr“.

und drehungsfreien Strömung entsprechende Geschwindigkeit  $v_y$  und verwendet dieses  $v_y$  zur Berechnung neuer

$$\eta = s t \int_0^t \frac{v_y}{s^2} ds \dots \dots \dots (75)$$

(vgl. Gl. (70)). Mit dieser neuen Form der Oberfläche kann man das Verfahren wiederholen: neue  $v_x$  nach Gl. (74), neue  $v_y$  mit Hilfe des Greenschen Satzes, neue  $\eta$  nach Gl. (75).



Abb. 29.

Ich habe dieses Verfahren (nach erheblicher Änderung, um es den speziellen Bedingungen unseres Beispiels anzupassen) zur Berechnung der Oberfläche beim Aufschlag eines symmetrischen Bodens mit  $\beta = 18^\circ$  Kielungswinkel verwendet<sup>41)</sup> (Abb. 29). Daraus und mit Gl. (73) ergibt sich die Stoßkraft

$$P = 49,8 T \rho V_0^2 \dots \dots \dots (76)$$

Im Gegensatz zu § 14 ist die Stoßkraft  $P$  auf die Eintauchtiefe  $T$  (Abb. 29) bezogen, da die Breite der Eintauchfläche bei endlichem Kielungswinkel keine definierte Größe ist.

Wir wollen für konstante Eintauchgeschwindigkeit  $V_0$  die Abhängigkeit der Stoßkraft  $P$  für den ganzen Bereich der Kielungswinkel  $\beta$  von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  abschätzen. Dazu wollen wir Gl. (43a) ( $\mu = 1, \frac{2c}{\pi} \beta = T$ ) durch Einführung eines Wertes  $K$  verallgemeinern:

$$P = K \frac{\pi^2}{4} \rho V_0^2 \frac{T}{\beta^2} \dots \dots \dots (77)$$

Für  $\beta \rightarrow 0$  gilt Gl. (43a), also  $K = 1$ . Für  $\beta = 18^\circ$  gibt Gl. (76)  $K = 0,635$ . Schließlich ist die Kurve des Wertes  $K$  entsprechend Gl. (83) für das Eintauchen einer Schneide in Abb. 30 eingetragen.

Als Näherungsangabe könnte die eingezeichnete Parabel  $K = \left(1 - \frac{2\beta}{\pi}\right)^2$ , also mit Gl. (77)

$$P = 2\pi \left(\frac{\pi}{2\beta} - 1\right)^2 \rho V_0^2 T \dots \dots \dots (78)$$

dienen.

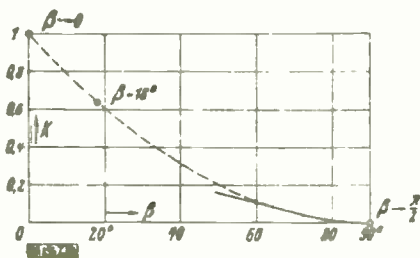


Abb. 30.

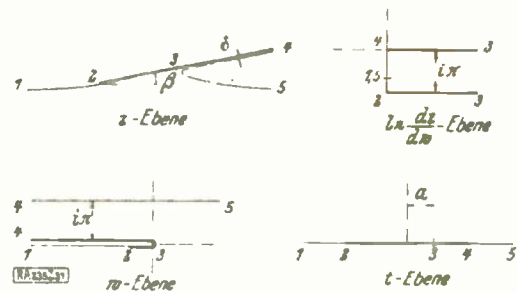


Abb. 31.

**17. Stationäres Gleiten. Ebenes Problem.** Für das ebene Problem des stationären Gleitens einer ebenen Platte (vgl. Abb. 31) gilt nach der Methode von Schwarz-Christoffel<sup>42)</sup>

$$\frac{dw}{dt} = A \frac{t-a}{t-1}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \frac{dz}{dw} \right) = \frac{i}{\sqrt{t^2 - 1}} (t-a)$$

<sup>41)</sup> Ich bin Herrn A. W. Quick, Danzig, für die verständnisvolle Hilfe bei der Durchführung der zahlenmäßigen Rechnung sehr zu Dank verpflichtet. Ferner danke ich dem Lehrstuhl Professor Pohlhausen, Techn. Hochsch. Danzig, für das Leihen einer Rechenmaschine.

<sup>42)</sup> In „Besant und Ramsay, Hydrodynamics, II. Bd.“ wird auf S. 142 ein mathematisch ähnliches Beispiel durchgerechnet.

folglich

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{dt} = a t \frac{-1 \pm i \sqrt{1-a^2}}{t-a} \sqrt{t^2-1} \cdot A \frac{t-a}{t-1} \dots (79)$$

$$\frac{z}{A} = a(1+t) - (1-a) \ln \frac{1-t}{2} + \sqrt{1-a^2} \sqrt{1-t^2} + i \sqrt{1-a^2} \ln(-t - \sqrt{t^2-1}) \dots (80)$$

An der Kontur gilt längs 12, 24, 45 bzw. das obere, mittlere, untere Vorzeichen. Für Logarithmen ist der Hauptwert einzusetzen. Dabei ist längs 45 zu beachten, daß 45 einen Bereich mit positivem Imaginärteil umgrenzt. Es ist  $a = \cos \beta$ . Die Konstante  $A$  läßt sich z. B. durch die Spritzerdicke  $\delta$  darstellen:  $\delta = \pi(1-a)A$ . Die gleitende Platte liegt (logarithmisch) unendlich hoch über dem Flüssigkeitsspiegel im Unendlichen.

Aus der leicht zu berechnenden Druckverteilung erhält man durch Integration die Gleitkraft  $P$  ( $V =$  Gleitgeschwindigkeit)

$$P = A \pi \rho V^2 \sin \beta = \rho \delta V^2 \cot \frac{\beta}{2} \dots (81)$$

Im Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  besteht in jeder Hinsicht Übereinstimmung mit Abschnitt II.

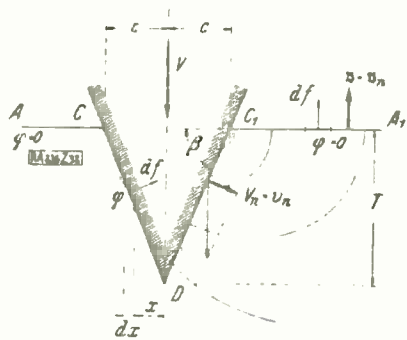


Abb. 32

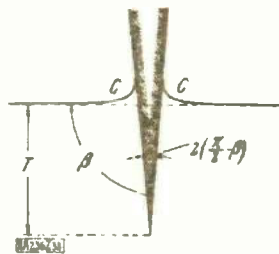


Abb. 33

**18. Eintauchen einer Schneide.** Ein ebenes Geschwindigkeitsfeld Abb. 32 besitze  $v_t = 0$  (also auch  $q = 0$ ) längs  $AC$  und  $A_1C_1$  und  $v_n = V \cos \beta = \text{konst.}$  längs  $CD$   $C_1A_1$ . Seine Berechnung bietet keine Schwierigkeit. Insbesondere ist die „Bewegungsgröße“

$$B = \rho \int_F df = \rho \int_C^{+C} dx - \rho V T^2 \cot \beta \left\{ \frac{\pi - 2\beta}{\sin 2\beta} \left[ \Gamma\left(1 - \frac{\beta}{\pi}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\pi}\right) \right]^2 - 1 \right\} \dots (82)$$

Der Vektor  $df$  ist ein Element der Fläche  $F$ , die in Abb. 32 als Kontur  $ACDC_1A_1$  erscheint.  $\Gamma$  ist das Funktionszeichen der Gammafunktion.

Wir betrachten nun das Eintauchen einer scharfen Schneide  $2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \rightarrow 0$  (Abb. 33).

Es läßt sich zeigen, daß mit Ausnahme unendlich kleiner, bedeutungsloser Bereiche um  $C$  die freie Oberfläche unendlich flach geneigt ist und folglich das Geschwindigkeitsfeld Abb. 32 herrscht. Für das Eintauchen mit konstanter Geschwindigkeit  $V_0$  gilt wie in § 16 (Stoßkraft)  $\frac{DB}{Dt} = \frac{2}{T} B$ . Mit  $V_0 t = T$  und mit  $R$  für den Klammerwert der Gl. (82) [für  $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  wird

$$R = 0,89 \dots \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)^2$$

$$\frac{DB}{Dt} = 2 \rho V_0^2 T \cot \beta \cdot R = 1,78 \rho V_0^2 T \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)^2 \dots (83)$$

Auch das Eintauchen einer Schneide mit veränderlichem Schneidenwinkel läßt sich mit Hilfe von Superposition aus obigem Ergebnis ableiten. Ferner läßt sich wie in § 14 der Aufschlag einer Schneide mit gegebener Masse berechnen.