

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Civiele Techniek
Vakgroep Waterbouwkunde

COLLEGEHANDLEIDING b70N
INLEIDING VLOEISTOFMECHANICA

hoofdstuk 1 t/m 5

prof. dr. ir. J.A. Battjes

januari 1988

Uitg. jan.88			b70N	203120					f1 1.25
-----------------	--	--	------	--------	--	--	--	--	---------

1. INLEIDING

Mechanica is de leer van de beweging en vervorming van materie onder invloed van uitwendige krachten. Een belangrijk onderscheid is daarbij te maken tussen vaste stoffen enerzijds (Engels: solids) en vloeistoffen en gassen anderzijds (in het Engels gezamenlijk aangeduid als "fluids", d.w.z. stoffen die kunnen vloeien, of stromen). Het onderscheid tussen beide categorieën is hierin gelegen dat een schuifspanning in vaste stoffen aanleiding geeft tot een eindige vervorming, en in vloeistoffen en gassen tot een voortgaande vervorming, zij het met een eindige snelheid.

De relatief geringe weerstand die vloeistoffen en gassen kunnen bieden tegen vervormingen, en hun vermogen tot vervormingen van onbeperkte omvang, veroorzaken dat stromingen vaak instabiel zijn. De beweging krijgt daarbij veelal een chaotisch fluctuerend, wervelend karakter (turbulentie), waarvan de details niet zijn bepaald door de begin- en randvoorwaarden, en daaruit dus theoretisch principieel niet zijn af te leiden. Voor de bepaling van de gemiddelde eigenschappen van turbulente bewegingen moet een zwaar beroep op het experiment worden gedaan (veel meer dan nodig is voor de bepaling van de vervorming van constructies). Dit resulteert veelal in wiskundige modellen van semi-theoretische aard, aangevuld met empirische informatie over de stroming.

De beweging van vloeistoffen en die van gassen kunnen voor een belangrijk deel op dezelfde manier worden behandeld. De leer van die bewegingen heet "stromingsleer" (Engels: "Fluid Mechanics"). Een principieel verschil tussen beide typen, gezien uit het oogpunt van de stromingsleer, is dat alleen bij vloeistoffen sprake kan zijn van een vrij oppervlak. Een meer gradueel verschil (dat in wezen trouwens nauw samenhangt met het voorgaande) is dat gassen meer compressibel zijn dan vloeistoffen. Overigens is de compressibiliteit alleen van significante invloed op de stroming bij relatief grote snelheidsvariaties.

In de civiele techniek komen zowel problemen voor van stroming van

2. VLOEISTOFEIGENSCHAPPEN

2.1 Continuümmodel

Theoretische modellen kunnen niet betrekking hebben op de totale complexiteit van de werkelijkheid, maar slechts op enkele aspecten daarvan die voor een bepaalde vraagstelling van belang worden geacht. Bovendien worden die aspecten in een min of meer benaderende, geïdealiseerde vorm weergegeven.

Mechanische eigenschappen van de materie worden bepaald door de moleculaire massa's en hun onderlinge posities, bewegingen en wisselwerkingen. De afmetingen van technische systemen zijn veelal echter veel groter dan de moleculaire lengteschaal. Voor de beschrijving van het gedrag van die systemen kunnen we daarom afzien van de moleculaire microstructuur, en op macro-niveau doen alsof de materie continu verdeeld is in de fysische ruimte. Wij spreken dan van een continuümmodel van de materie.

Een eigenschap die lokaal aan het continuüm wordt toegekend (bv. massadichtheid) is in feite het resultaat van de bijdragen (bv. massa's) van de moleculen in een klein gebiedje. Zo'n gebiedje is enerzijds groot genoeg om zo veel moleculen te bevatten dat de som van hun bijdragen statistisch stabiel is; anderzijds is het klein genoeg t.o.v. de afmetingen van de beschouwde systemen om te kunnen spreken van de eigenschappen in een punt. (Het feit dat dit mogelijk is vormt de basis van de continuüm-benadering.) Die eigenschappen kunnen dus worden behandeld als functies van de continue fysische ruimte. Zulke functies heten velden. Voorbeelden daarvan zijn het veld van de massadichtheid, het snelheidsveld en het drukveld.

De ruimtelijke variatie van een veldgrootte in de omgeving van een punt wordt mathematisch beschreven met de partiële afgeleiden naar de verschillende coördinaten; dit leidt tot het begrip gradiënt (zie college 1, Analyse). Daarnaast kan er nog variatie in de tijd zijn, waarvoor de partiële afgeleide naar de tijd een maat is. Wij komen in het volgende hoofdstuk hierop

Continuum
verdeel

veld =
functie

gradiënt =
afg. naar
 x, y, z, t

$\sigma_{ii} = \text{normaal}$
 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
 schief

De spanningstoestand in een punt van de materie (ongeacht de chemische samenstelling of de fysische fase) wordt beschreven met een zogenaamde spanningstensor. De negen componenten hiervan t.o.v. een rechthoekig assenstelsel Oxyz zijn te schrijven als σ_{xx}, σ_{xy} , enz. (zie bl1). Hierin stellen de drie componenten σ_{xx}, σ_{yy} en σ_{zz} de normaalspanningen voor, en de overige zes de schuifspanningen, die paarsgewijs aan elkaar gelijk zijn ($\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, enz.).

Wanneer in een punt alle schuifspanningen gelijk zijn aan nul, ongeacht de oriëntatie van de beschouwde vlakjes, dan hebben alle normaalspanningen in dat punt dezelfde waarde: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$. Men spreekt dan van een isotrope spanningstoestand. Dit doet zich bijvoorbeeld voor in stilstaande vloeistoffen (wet van Pascal).

gem
 isotoop
 deel.



In bewegende vloeistoffen en in vaste stoffen zijn de schuifspanningen in het algemeen niet nul, en is de spanning niet isotroop. We kunnen dan dus niet spreken van "de" normaalspanning in een punt. Men kan echter bewijzen dat het gemiddelde van de normaalspanningen in drie onderling loodrechte vlakjes (notatie: $\sigma_o \equiv \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$) een waarde heeft die onafhankelijk is van de oriëntatie van die vlakjes. Men noemt dit gemiddelde het isotrope deel van de spanning. De afwijkingen van de werkelijke spanningen t.o.v. het isotrope deel heten deviatorspanningen (zie bl1). De schuifspanningen behoren in hun totaliteit tot de deviatorspanningen.



Bij de gebruikelijke tekenafspraken komt een positieve waarde van een normaalspanning overeen met een trekspanning. In gasen respectievelijk vloeistoffen komt trek echter niet respectievelijk vrijwel niet voor. Voor deze stoffen voert men daarom het begrip druk in, gedefinieerd als het isotrope deel van de drukspanningen: $p = -\sigma_o = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$.

Variaties in het isotrope deel van de spanning (trek en/of druk) veroorzaken volumeveranderingen, en de deviatorspanningen

constant, waarbij k_0 voor elk gas een constante is (voor lucht is $k_0 \approx 1.40$). Voor adiabatische compressie geldt dus $K = k_0 p$.

Dankzij het elastische karakter van de samendrukbaarheid kunnen drukgolven zich voortplanten in een samendrukbaar medium. Men kan aantonen dat voor de voortplantingssnelheid daarvan, de zg. geluidssnelheid (c), geldt:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (2.3)$$

Gebruik makend van (2.2) kan dit worden herleid tot

$$c^2 = \frac{K}{\rho} \quad (2.4)$$

Substitutie van bovengenoemde getalswaarden levert voor zuiver water respectievelijk lucht bij een druk van 10^5 Pa (ca. 1 atmosfeer) de waarden $c \approx 1480$ m/s respectievelijk $c \approx 340$ m/s.

Stel nu dat in een gebied van de stroming van een vloeistof of gas de stroomsnelheid varieert tussen de waarden nul en u . De druk in dat gebied zal dan variëren met een waarde (δp) die ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{2}\rho u^2$. Iets globaler uitgedrukt geldt dat δp van de grootte-orde ρu^2 is: $\delta p = O(\rho u^2)$. De hiermee overeenkomende variatie ($\delta \rho$) van de massadichtheid is volgens (2.3) van de orde $\rho u^2 / c^2$.

De verhouding van stroomsnelheid (u) tot geluidssnelheid (c) heet het kental van Mach: $M = u/c$. In termen hiervan geldt voor de relatieve dichtheidsvariatie: $\delta \rho / \rho = O(u^2 / c^2) = O(M^2)$.

Stromingen waarvoor $M < 1$ respectievelijk $M > 1$ heten subsoon respectievelijk supersoon. Als $M \ll 1$ geldt destemee $M^2 \ll 1$, en zijn de relatieve dichtheidsverschillen verwaarloosbaar. In civiel-technische toepassingen is deze benadering vrijwel altijd geoorloofd. Nemen we als kenmerkende waarden voor de snelheid 1.5 m/s voor stromend water, en 35 m/s voor de wind (in geval van een orkaan), dan zijn de bijbehorende waarden van het getal van Mach ca 10^{-3} respectievelijk 10^{-1} ; overeenkomend met $\delta \rho / \rho$ in de orde van 10^{-6} respectievelijk 10^{-2} . Het water respectievelijk de lucht zijn dan als onsamendrukbaar te benaderen. Merk op dat deze

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

$$d\rho = \frac{dp}{c^2} = \frac{1}{2} \rho \frac{u^2}{c^2}$$

$$O\left(\frac{\rho u^2}{c^2}\right)$$

$$M = \frac{u}{c}$$

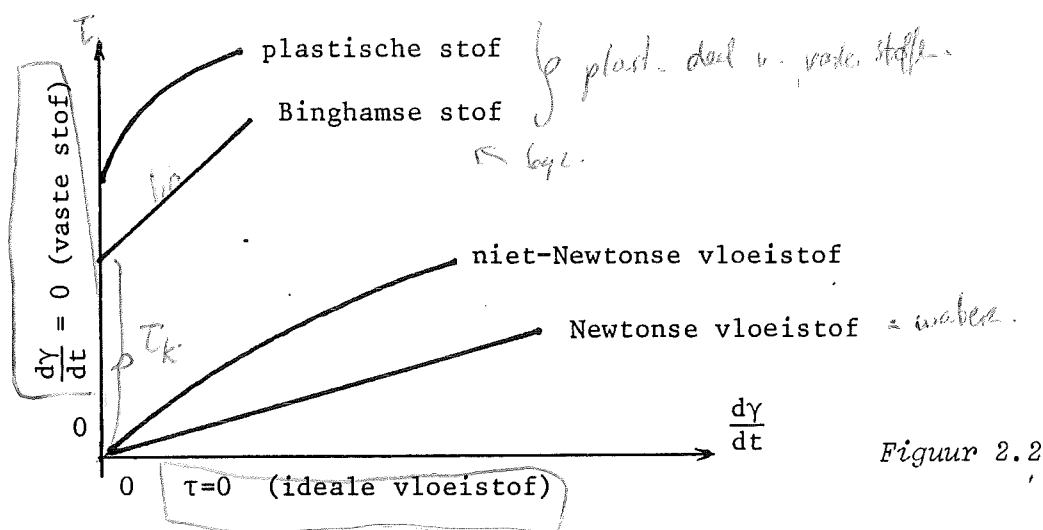
$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{u^2}{c^2}$$

normale
omstandigheden

In vloeistoffen en gassen daarentegen veroorzaakt een schuifspanning een voortgaande vervorming, met een eindige vervormingssnelheid ($d\gamma/dt$). De evenredigheidsfactor tussen beide heet (coëfficiënt van) dynamische viscositeit (η):

$$\tau = \eta \frac{d\gamma}{dt} \quad \uparrow \quad (2.4)$$

Het verschillend gedrag van vaste stoffen enerzijds en vloeistoffen of gassen anderzijds, onder invloed van een schuifspanning, is geïllustreerd in Fig. 2.2.



Figuur 2.2

Voor een vaste stof geldt $d\gamma/dt = 0$ ongeacht de waarde van τ , mits deze kleiner is dan een zekere kritieke waarde (τ_k) waarbij vloeï gaat optreden (plastisch gedrag). Wanneer τ in het plastisch gebied lineair varieert met $d\gamma/dt$ spreken we van een Binghamse stof.

Voor vloeistoffen en gassen geldt $d\gamma/dt \neq 0$ zodra $\tau \neq 0$. In een stilstaande vloeistof of gas heersen dus geen schuifspanningen, en is de spanningstoestand isotroop (wet van Pascal). In een stroming zal echter in het algemeen gelden dat $d\gamma/dt \neq 0$; dan is ook $\tau \neq 0$. Wanneer τ daarbij recht evenredig is met $d\gamma/dt$ spreken we van een Newtonse stof. Dit is een realistisch model voor water (o.a.).

In sommige stromingsproblemen heeft de viscositeit slechts een zeer geringe invloed. Wanneer, in een mathematisch model van zulke stromingen, de viscositeit bij benadering gelijk aan nul

Voor de dimensies van η respectievelijk ν volgt uit (2.5) respectievelijk (2.6) dat $[\eta] = [\tau]/[du/dz] = ML^{-1}T^{-1}$ respectievelijk $[\nu] = [\eta]/[\rho] = L^2 T^{-1}$. In het SI-stelsel geldt $[\eta] = 1 \text{ Pa.s}$ respectievelijk $[\nu] = 1 \text{ m}^2/\text{s}$.

De waarden van η en ν verschillen sterk tussen verschillende stoffen, en variëren nogal met de temperatuur (die van η niet met de druk). Enkele waarden voor lucht en water zijn gegeven in bijgaande tabel.

Temperatuur		-20° C	0° C	10° C	20° C
=====					
Water	$\eta/(\text{mPa.s})$		1.80	1.33	1.00
	$\nu/(10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})$		1.80	1.33	1.00

Lucht	$\eta/(\mu\text{Pa.s})$	16.2	17.2	17.7	18.1
	$\nu/(10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})$	11.6	13.3	14.2	15.1

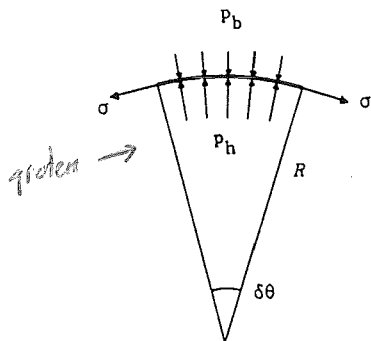
De invloed van de viscositeit op een stroming hangt niet af van de grootte van η op zich zelf, en zelfs niet van de grootte van het viskeuze of diffusieve impulstransport ($\tau = \eta du/dz$), maar van de grootte van dat impulstransport ten opzichte van het impulstransport door meevoering of convectorie (ρu^2) (zie college b7, Algemene Mechanica I). De dimensieloze verhouding $\rho u^2 / (\eta du/dz)$ is dus bepalend. De precieze waarde hiervan zal van punt tot punt in een stroomveld kunnen variëren. Een waarde van die verhouding die kenmerkend is voor de stroming als geheel kan worden gevonden door voor de diverse factoren kenmerkende waarden te substitueren. Bij de stroming om een obstakel heen nemen we bijvoorbeeld voor de stroomsnelheid de ongestoorde waarde (U) daarvan, en voor du/dz de verhouding U/ℓ , waarin ℓ een kenmerkende afmeting is van het obstakel (bijvoorbeeld de straal of de diameter, in geval van een bol). Substitutie hiervan in bovengenoemde verhouding levert het zg. kental van Reynolds (Re):

obstakel.

$$Re = \frac{\rho U \ell}{\eta}$$

(2.7)

Beschouw een infinitesimaal elementje van zo'n grensvlak, dat slechts in één richting gekromd is, met kromtestraal R en booglengte $R\delta\theta$ (zie schets). De grensvlakspanning aan beide randen



heeft een naar het kromtemiddelpunt gerichte resultante die per eenheid van breedte gelijk is aan $\sigma\delta\theta$. Evenwicht vereist dan dat $(p_h - p_b)R\delta\theta = \sigma\delta\theta$ ofwel

$$p_h - p_b = \frac{\sigma}{R} \quad \text{een richting gekromd} \quad (2.9)$$

Bij kromming in twee richtingen, met hoofdkromtestralen R_1 en R_2 , geldt

$$p_h - p_b = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sigma \quad \text{2 richtingen gekromd} \quad (2.10)$$

Het belang van dit drukverschil voor een stroming is bepaald door de relatieve grootte ervan ten opzichte van de impulsoverdracht door meevoering (ρU^2). Dit leidt tot het kental van Weber:

$$We = \frac{\rho U^2 \ell}{\sigma} \quad (2.11)$$

Hierin is ℓ een kenmerkende waarde voor de kromtestraal van het grensvlak. Voor het grensvlak water-lucht geldt $\sigma/\rho = 7.3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}^2$, zodat de grensvlakspanning alleen van belang kan zijn bij zeer kleinschalige en langzame bewegingen ($U^2 \ell = 7.3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}^2$ als $We = 1$). Rimpels aan het wateroppervlak met een golflengte van enkele millimeters of minder zijn daarvan een voorbeeld.

adhesie

Bij de doorsnijding van een vloeistof-oppervlak door een wand van vaste stof treedt adhesie op, d.w.z. onderlinge aantrekking tussen vloeistof en vaste stof. Daardoor wordt het grensvlak in de omgeving van de aanraking gekromd en ontstaat de z.g. meniscus (Fig. 2.3a). Voor het contact tussen water, lucht en glas is de meniscus hol naar de zijde van de lucht, en (voor zuiver water) rakend aan het glas. Hierdoor wordt water in een open, nauw buisje (een z.g. capillair) gezogen (Fig. 2.3b).

3. KINEMATICA

3.1 Snelheidsveld

In het continuümmodel van stromende materie is de stroomsnelheid ($\vec{u}$) gedefinieerd als functie van continue ruimte en tijd. Deze snelheid is in ieder punt en op ieder tijdstip gelijk aan de snelheid (t.o.v. de gekozen referentie) van het massacentrum van de materie die zich op het beschouwde tijdstip bevindt in een zeer kleine omgeving van het beschouwde punt.

De verzameling vectoren $\vec{u}$ op een willekeurig tijdstip in een gebied G heet het snelheidsveld in G op dat tijdstip.

Wanneer de snelheid in een zeker gebied niet varieert met de plaats heet het snelheidsveld in dat gebied uniform.

Wanneer het snelheidsveld in een zeker tijdsinterval niet met de tijd varieert heet de stroming gedurende dat interval stationair; daarbij is de snelheid in elk vast punt dus constant in de tijd. Bij een stationair maar niet-uniform snelheidsveld zal een bewegend waterdeeltje echter in de loop van de tijd wel een variërende snelheid hebben; de versnelling van de deeltjes is dan niet gelijk aan nul. Hierop komen we terug in par. 3.3.

Turbulente stroming

In het vorige hoofdstuk is al opgemerkt dat een stroming laminair of turbulent kan zijn, afhankelijk van het kental van Reynolds (zie par. 2.5). Alleen een laminaire stroming kan in strikte zin uniform en stationair zijn. Bij een turbulente stroming treden per definitie onregelmatige fluctuaties op in de momentane snelheid.

Het optreden van turbulentie heeft een sterke vergroting tot gevolg van menging en van onomkeerbare omzettingen van (macroscopische) kinetische energie in warmte (microscopische kinetische energie). Daardoor is het een zeer belangrijk verschijnsel.

Stroomlijnen

Een belangrijk hulpmiddel in de beschrijving van een snelheidsveld is de stroomlijn, d.i. een zodanige lijn dat de stroomsnelheid in elke punt ervan raakt aan die lijn (Fig. 3.2). Een

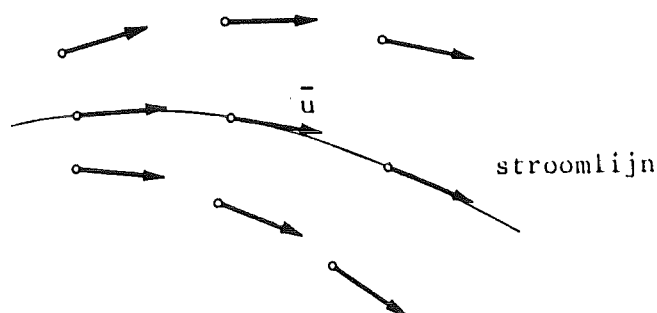


Fig. 3.2 Stroomlijn

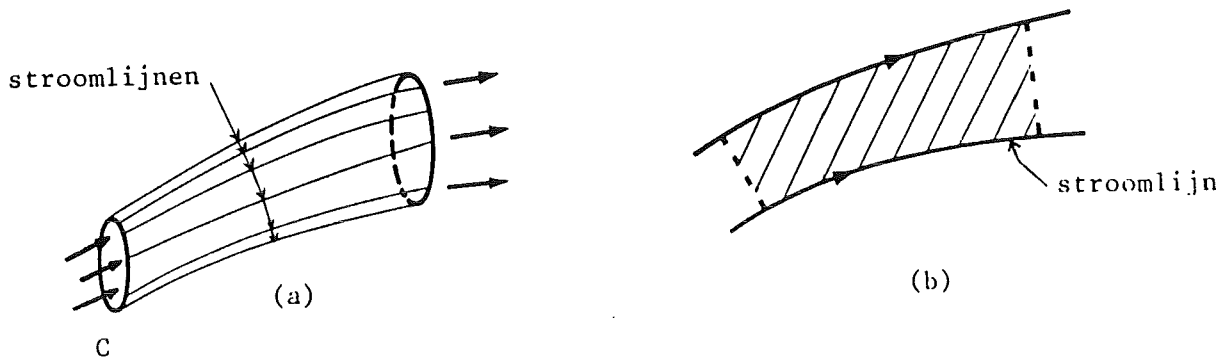
stroomlijn geeft dus een beeld van de richting van de stroomsnelheid (afgezien van het teken). Stroomlijnen zijn gedefinieerd op elk willekeurig tijdstip.

Een verzameling stroomlijnen geeft een goede indruk van de stroming in het betreffende gebied; het gebruik ervan is een onmisbaar hulpmiddel in de analyse van veel stromingsproblemen, in het bijzonder die van sterk niet-uniforme stromingen zoals die zich voordoen rondom constructies en bij abrupte veranderingen in het profiel van een leiding. Figuur 3.3 geeft daarvan enkele voorbeelden. Eén daarvan is afkomstig van Leonardo da Vinci (1452-1519), die veel stroombeelden nauwkeurig heeft geobserveerd en getekend.

Bij stationaire stromen liggen de buitenste stroomlijnen in principe in de grensvlakken (bodem, zijwand, oppervlak enz.). Bij abrupte veranderingen in het profiel kan de stroom echter van een vaste wand loslaten (Fig. 3.3). Dit gaat gepaard met wervelingen en energieverliezen. De voorspelling van de eigenschappen van de stroming in zulke situaties is een moeilijk probleem. Voor een belangrijk deel moet hier empirisch te werk worden gegaan. In hoofdstuk ⁽²⁾ komen we hier op terug.

De stroomlijnen die gaan door alle punten van een gesloten kromme

(C) vormen tezamen een buisvormig oppervlak dat een z.g. stroombuis insluit (Fig. 3.4a). (Hierbij is stilzwijgend aangenomen dat de kromme niet geheel in het vlak van de stroming ligt.)



Figuur 3.4 Stroombuis (a) en stroomstrook (b)

Per definitie vindt er geen stroming plaats door de zijdelingse, buisvormige begrenzing van de stroombuis, ongeacht of deze begrenzing slechts een denkbeeldig vlak is, midden in de stromende materie, of dat deze bestaat uit een fysisch grensvlak zoals bodem, wand of oppervlak.

In sommige situaties vindt de stroming plaats in onderling evenwijdige platte vlakken, althans bij benadering. Een voorbeeld hiervan is de stroming haaks over een brede drempel op een horizontale bodem. In zulke gevallen van een z.g. twee-dimensionale stroming werken we niet met een stroombuis maar met een stroomstrook, d.i. een deel van een vlak waarin de stroming plaats vindt dat zijdelings begrensd wordt door twee stroomlijnen (Fig. 3.4b.)

Stroomlijnen geven een beeld van de richtingen van het momentane snelheidsveld. Zij moeten niet worden verward met de banen die waterdeeltjes in de loop van de tijd afleggen. Alleen wanneer de stroming stationair is valt de baan van een deeltje samen met een stroomlijn. (Hierbij zien wij af van turbulentie.)

3.2 Variaties in ruimte en tijd

In deze paragraaf gaan we achtereenvolgens in op veranderingen in de ruimte, in de tijd en in de combinatie daarvan zoals erva-

Het rechterlid hiervan is het inwendig product van de vector $\vec{\Delta r} = \Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z$ en de gradiënt van f, gedefinieerd als

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (3.2)$$

zodat

$$\Delta f \approx \vec{\Delta r} \cdot \text{grad } f \quad (3.3)$$

Het is gebruikelijk de gradiënt-vector te schrijven in termen van de z.g. nabla-operator ∇ , die gedefinieerd is als

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.4)$$

Dan geldt

$$\nabla f = \text{grad } f$$

Hiermee kan (3.3) worden geschreven als

$$\Delta f \approx \nabla f \cdot \vec{\Delta r}$$

Met $\vec{\Delta r} = (\Delta \ell) \vec{e}_\ell$ gaat dit over in

$$\frac{\Delta f}{\Delta \ell} \approx \nabla f \cdot \vec{e}_\ell,$$

en in de limiet voor $\Delta \ell \rightarrow 0$ in

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \nabla f \cdot \vec{e}_\ell \quad (3.5)$$

Het rechterlid hiervan is de waarde van de component van ∇f in de richting $\vec{e}_\ell$. Uit (3.5) volgt dus dat de toeneming van f per eenheid van lengte ($\partial f / \partial \ell$) in een willekeurige richting gelijk is aan de waarde van de component van de gradiënt van f in die richting. (Dit volgt ook onmiddellijk uit de definitie (3.2) van grad f.)

Ten tweede volgt uit (3.5) dat de toeneming van f per eenheid van lengte het sterkst is (bij gegeven ∇f) wanneer $\vec{e}_\ell$ de richting van ∇f heeft. De gradiëntvector wijst dus in de richting van de sterkste toeneming van de betreffende functie. Dit kan ook als volgt worden ingezien.

veld toch een verandering van f worden waargenomen, en wel $\Delta f_{\vec{r}} \approx \Delta \vec{r} \cdot \nabla f = (\vec{W} \cdot \nabla f) \Delta t$. Als gevolg van de instationariteit is er echter in elk punt in het tijdsinterval Δt ook een verandering van f , en wel $\Delta f_t \approx (\partial f / \partial t) \Delta t$. De totale waargenomen verandering is gegeven door de som van deze twee bijdragen:

$$\Delta f \approx \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{W} \cdot \nabla f \right) \Delta t$$

De verhouding $\Delta f / \Delta t$ gaat in de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ over in de z.g. totale afgeleide:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{W} \cdot \nabla f \quad (3.6)$$

Materiële afgeleide

Een bijzonder geval van (3.6) dat van groot belang is voor stromingen is de verandering van een veldgrootte (f) ondergaan door een deeltje van de stromende materie. Daarvoor geldt $\vec{W} = \vec{u}$, de stroomsnelheid. De totale afgeleide noemen we in dat geval de meebewegende afgeleide, en ook wel de materiële afgeleide, omdat de "waarnemer" in dit geval met de materie mee beweegt. Vanwege de bijzondere betekenis krijgt de operator voor deze afgeleide een apart symbool, D/Dt :

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla f)} \quad (3.7)$$

Deze meebewegende afgeleide bestaat uit de som van de lokale afgeleide, $\partial f / \partial t$, en de z.g. convectieve afgeleide, $\vec{u} \cdot \nabla f$. Laatstgenoemde kan worden uitgeschreven in componenten t.o.v. het Oxyz-stelsel volgens

$$\vec{u} \cdot \nabla f = u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

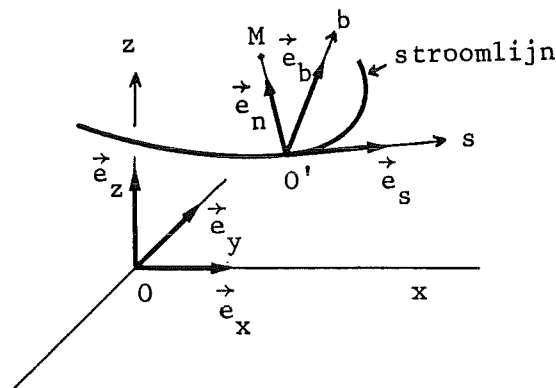
De convectieve afgeleide van f hangt samen met een verandering van f langs de stroomlijn, omdat die de richting van $\vec{u}$ heeft. Om dit uit te drukken voeren we langs de stroomlijn een lengtecoördinaat s in die toeneemt in de richting van $\vec{u}$. Schrijven we verder $\vec{u} = u \vec{e}_s$ dan geldt, met gebruikmaking van (3.5):

Het hierboven gebruikte Oxyz-assenstelsel heeft een willekeurige oriëntatie. Het heeft voordelen de versnelling in componenten te ontbinden t.o.v. het z.g. natuurlijk assenstelsel ($O'snb$), dat georiënteerd is t.o.v. de stroomlijn op een zeker tijdstip in een infinitesimale omgeving van een punt O' (Fig. 3.7). Voor de definitie van dit stelsel gebruiken we de volgende basisvectoren:

- $\vec{e}_s$, in de richting van de snelheid $\vec{u}$ in O' , en dus rakend aan de stroomlijn.
- $\vec{e}_n$, gericht van O' naar het kromtemiddelpunt M van de stroomlijn in O' ; $\vec{e}_n$ heet de (hoofd)normaal.
- $\vec{e}_b = \vec{e}_s \times \vec{e}_n$; deze staat dus haaks op $\vec{e}_s$ en $\vec{e}_n$; $\vec{e}_b$ heet de binormaal.

Het natuurlijk assenstelsel in O' is gericht langs deze vectoren, met coördinaten (s, n, b) .

In een infinitesimale omgeving van O' ligt de gekromde stroomlijn in een plat vlak, het zg. osculatievlak. Dit is dus het vlak opgespannen door $\vec{e}_s$ en $\vec{e}_n$; de binormaal $\vec{e}_b$ staat haaks op dit vlak.



Figuur 3.7 Stroomlijn met natuurlijk assenstelsel

We splitsen de snelheid in O' nu naar grootte en richting volgens $\vec{u} = u \vec{e}_s$. Voor de versnelling geldt dan

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{Du}{Dt} \vec{e}_s + u \frac{D\vec{e}_s}{Dt}$$

Resumerend vinden we de volgende waarden van de versnellingscomponenten t.o.v. het natuurlijke assenstelsel:

$$a_s = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \quad (3.12s)$$

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} \quad (3.12n)$$

$$a_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} \quad (3.12b)$$

De termen $\partial(\frac{1}{2}u^2)/\partial s$ en u^2/R komen overeen met de baanversnelling en de centripetale versnelling van een deeltje dat beweegt langs een kromlijnige, stationaire baan in een inertiaalstelsel, zoals behandeld in de mechanica van een puntmassa (b7). De daaraan toegevoegde lokale versnellingen ($\partial u/\partial t$ enz.) zijn in deze analogie op te vatten als versnellingen van die baan zelf (vergelijk met een achtbaan tijdens een aardbeving).

Bovenstaande resultaten voor de versnelling zullen in hoofdstuk 5 worden gebruikt in een analyse van de dynamica van een deeltje. We gaan eerst verder met aspecten van de kinematica.

3.4 Volumestroom en meevoering

In het voorgaande werd een deeltje gevolgd, en werd het daaraan verbonden begrip meebewegende afgeleide geïntroduceerd. Dit is een beschrijving volgens Lagrange.

In stromingsproblemen richt de aandacht zich vaak niet zo zeer op de baan van een deeltje, maar op een bepaald deel van de ruimte (bijvoorbeeld rondom een brugpijler in een rivier) welk deel in de loop van de tijd door steeds andere deeltjes wordt doorstroomd. Het is dan geschikt een vast deel van de ruimte te definiëren, een z.g. balansgebied, en te bepalen in hoeverre de daarin aanwezige massa, impuls, energie enz. variëren in de tijd.

De volumestroom door de hele doorgang D wordt gevonden door sommatie van de bijdragen ΔQ over de doorgang. Bij een onbegrensd fijne verdeling is sprake van een integratie:

$$Q = \iint u_N \, dA \quad (3.14)$$

Bij stromingen door een open waterloop of een andere leiding ligt het voor de hand de begrenzingen van de doorgang te leggen in de fysische grensvlakken van de stroming (bodem, oever, oppervlak e.d.). De volumestroom door zo'n doorgang noemen we het debiet of (vooral bij rivieren) de afvoer.

In open waterlopen en andere leidingen valt de stroomrichting ongeveer samen met de as van de leiding. We kiezen de doorgang dan bij voorkeur dwars op de as, zodat dan (bij benadering) $u_N = u$, in welk geval we voor het debiet kunnen schrijven:

$$Q = \iint u \, dA \quad (3.15)$$

Delen we dit door het oppervlak (A) van het doorstroomde deel van het dwarsprofiel dan krijgen we de over het dwarsprofiel gemiddelde waarde van de stroomsnelheid:

$$U = \frac{\iint u \, dA}{\iint dA} = \frac{Q}{A} \quad (3.16)$$

Wanneer we in een open waterloop de snelheid niet over het gehele dwarsprofiel integreren, maar slechts over de diepte, langs een vertikaal, dan krijgen we het debiet per eenheid van breedte (q):

$$q = \int_{z_b}^{z_o} u \, dz \quad (3.17)$$

Hierin is z een vertikale coördinaat, positief omhoog; de waarde hiervan bij de bodem respectievelijk het oppervlak is z_b respec-

Wanneer ρ uniform is reduceert deze uitdrukking voor de massastroom tot

$$\rho \iint u_N dA = \rho Q$$

De SI-eenheid hiervan is $1(\text{kg/m}^3)(\text{m}^3/\text{s}) = 1 \text{ kg/s}$.

Op analoge wijze kunnen we de stroom definiëren van andere meegevoerde eigenschappen met een (volumieke) dichtheid. Als voorbeeld noemen we de kinetische energie. De waarde daarvan voor de massa $\Delta m = \rho \Delta V$ met snelheid u is $\frac{1}{2}(\Delta m)u^2 = \frac{1}{2}\rho u^2 \Delta V$. (N.B.: $u^2 = |\vec{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$.) De kinetische energie per eenheid van volume, ofwel de (volumieke) dichtheid van de kinetische energie, is dus gelijk aan $\frac{1}{2}\rho u^2$. De stroom van kinetische energie door het infinitesimale vlakje is dan

$$(\frac{1}{2}\rho u^2)u_N \Delta A = \frac{1}{2}\rho u^2 \Delta Q$$

en door de gehele doorgang

$$\iint (\frac{1}{2}\rho u^2)u_N dA$$

De SI-eenheid hiervan is $1(\text{J/m}^3)(\text{m}^3/\text{s}) = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$.

Algemener gesteld geldt dat de stroom door een doorgang (meevoering per tijdseenheid) van een grootte X , waarvan de volumieke dichtheid ρ_X is, gegeven is door

$$\iint \rho_X u_N dA$$

De dimensie hiervan is $[X]/T$.

Bovenstaande resultaten zullen op een aantal plaatsen in volgende hoofdstukken worden toegepast.

4. BALANSVERGELIJKINGEN

De berekening van diverse mechanische eigenschappen van een stroming gedurende een zekere tijd in een zeker gebied gaat uit van

- begin- en randvoorwaarden
- balansen voor massa, impuls en energie
- constitutieve vergelijkingen

In dit hoofdstuk worden enkele algemene opmerkingen gemaakt over de balansvergelijkingen die in dergelijke berekeningen voorkomen.

Een balans van een grootte (bv. energie) beschrijft de verandering van de hoeveelheid daarvan in een (eventueel variërend) gebied G gedurende een zeker tijdsinterval, in relatie tot processen van overdracht van de beschouwde grootte door de begrenzungen van G , en tot processen van productie (of afbraak) in G .

Tijdsinterval

Het tijdsinterval waarvoor een balans wordt opgesteld kan in principe willekeurig zijn; meestal worden bijdragen per eenheid van tijd gebruikt.

Balansgebied

Het balansgebied kan in principe ook willekeurig worden gekozen, eventueel variërend in de tijd, maar de geometrie en de kinematica van een gegeven probleem zullen in de praktijk de keuze grotendeels bepalen. Twee voor de hand liggende mogelijkheden zijn al genoemd in hoofdstuk 3:

- (a) Een variërend balansgebied dat steeds dezelfde materie bevat; m.a.w., in de tijd volgen we een "brok" materie. Er vindt in dit geval per definitie geen massatransport plaats door de begrenzing van het gebied, en dus geen meevoering van wat dan ook. We spreken hierbij van een beschrijving van Lagrange.
- (b) Een ruimtelijk vast balansgebied; er vindt in dit geval massatransport plaats door de begrenzungen van het gebied, evenals meevoering van impuls, van energie, enz. We spreken

De balans voor de beschouwde grootheid in het gebied G drukt uit dat

$$\begin{array}{ccccc} \text{toeneming voorraad in G} & = & \text{overdracht naar G} & + & \text{productie in G} & (4.1) \\ (I) & & (II) & & (III) \end{array}$$

Alle bijdragen hierin zijn netto waarden (bv. netto overdracht naar G = overdracht naar binnen minus overdracht naar buiten) in hetzelfde tijdsinterval.

In het algemeen kunnen verschillende fysische processen aan de overdracht van een grootheid bijdragen, evenals aan de productie. Energie bv. kan worden overgedragen door meevoering (behalve in een Lagrange-beschrijving) en door wisselwerkingen van de materie in het balansgebied met die er buiten. In de desbetreffende hoofdstukken komen wij hierop terug.

Een grootheid waarvoor de productie of afbraak (III) altijd gelijk is aan nul noemen we een behouden grootheid. De balansvergelijking daarvoor reduceert tot een behoudsvergelijking:

$$\begin{array}{ccccc} \text{toeneming voorraad in G} & = & \text{overdracht naar G} & & (4.2) \\ (I) & & (II) & & \end{array}$$

We beperken ons nu tot een stationaire stroming en tot een ruimtelijk vast balansgebied. Dan is (I) gelijk aan nul. Wanneer we bovendien met een behouden grootheid te doen hebben (bv. massa of impuls) dan is ook (III) gelijk aan nul, en reduceert de balansvergelijking van de algemene gedaante (4.1) tot

$$\begin{array}{ccc} \text{overdracht naar G} & = & 0 \\ (II) & & (4.3) \end{array}$$

5. MASSABALANS EN VOLUMEBALANS

5.1 Onsamendrukbaarheid

Massa is een behouden grootheid, waarvoor dus een behoudsvergelijking geldt. Voorzover de stromende materie als onsamendrukbaar mag worden benaderd ($K \rightarrow \infty$) kunnen we eveneens spreken van behoud van volume (zie vgl. 2.1). In de meeste civiel-technische stromingsproblemen is dit een goede benadering (zie par. 2.4), zeker waar het vloeistofstromen met een vrij oppervlak betreft. We zullen ons daarom hier meteen beperken tot een onsamendrukbaar medium, en daarvoor vergelijkingen opstellen voor het behoud van volume. Zulke vergelijkingen worden vaak continuïteitsvergelijkingen genoemd.

Opgemerkt wordt dat het behoud van volume fysisch niet een fundamenteel karakter heeft zoals het behoud van massa of impuls. Het is een benadering die onder verwaarlozing van samendrukbaarheid is afgeleid uit het behoud van massa.

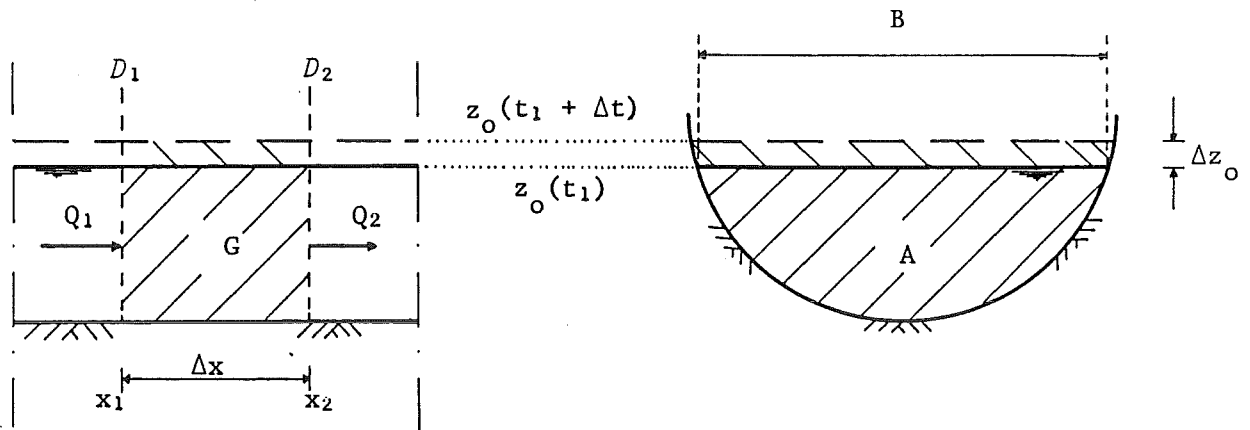
Vergelijkingen voor het behoud van volume van de stromende materie in een ruimtelijk vast balansgebied zijn in het algemeen van de gedaante (4.2). De toeneming van het volume in een zeker balansgebied (met een variërende waterspiegel) wordt berging genoemd. Wanneer deze gelijk is aan nul is de gedaante (4.3) van toepassing. Dit doet zich voor bij stationaire stromen, en ook bij instationaire stromen mits het balansgebied ten alle tijde geheel gevuld is met stromende materie. De precieze vorm hangt af van de beschouwde situatie. Enkele gevallen worden hierna behandeld.

5.2 Balans voor een stroombuis

Als eerste voorbeeld nemen we een stationaire stroming, en als balansgebied G een ruimtelijk vast deel van een stroombuis tussen twee doorgangen D_1 en D_2 (Fig. 5.1). De doorgangen staan niet noodzakelijkerwijs dwars op de stroomrichting.

5.3 Balans voor open waterloop

We behandelen tenslotte de volumebalans voor een niet-stationaire stroming door een open waterloop, bv. een geul in een getijdengebied. Voor de geometrie en de betekenis van symbolen wordt verwezen naar Fig. 5.2.



Figuur 5.2

Elke dwarsdoorsnede D ($x = \text{constant}$) van de geul heeft op elk tijdstip ($t = \text{constant}$) een doorstroomd oppervlak (A), een debiet (Q) en een niveau (z_o) van de waterspiegel (horizontaal verondersteld in dwarsrichting). Dezen variëren met x en t . Voor het bepalen van een verband tussen deze variaties stellen we een volumebalans op voor een gebied G van de geul tussen twee dwarsdoorsneden $x = x_1$ en $x = x_2 = x_1 + \Delta x$, waarbij Δx infinitesimaal is (Fig. 5.2).

Het momentane volume van het water in G is gelijk aan $A \Delta x$. Het kan variëren als gevolg van het stijgen of dalen van de waterspiegel. De toeneming ervan per eenheid van tijd is daarom te schrijven als

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Delta x = B \frac{\partial z_o}{\partial t} \Delta x$$

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Civiele Techniek
Vakgroep Waterbouwkunde

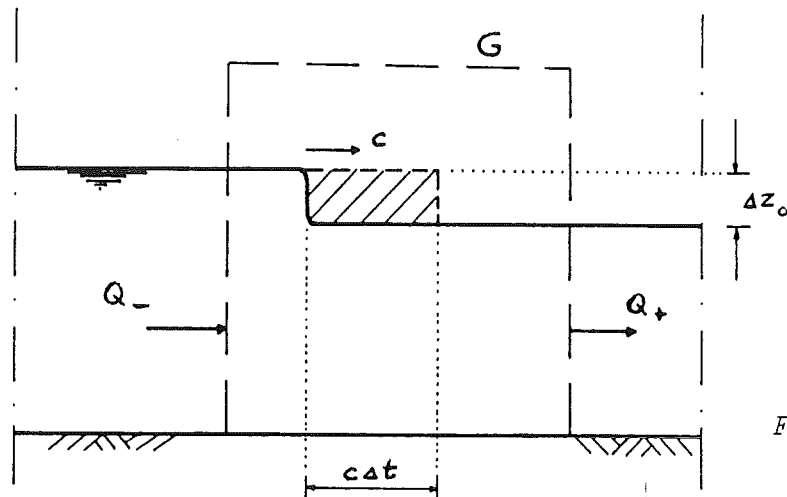
COLLEGEHANDLEIDING b70N
INLEIDING VLOEISTOFMECHANICA

Hoofdstukken 6 t/m 8

prof.dr.ir. J.A. Battjes

april 1988

Uitg. april '88			b70N	203120					f1 2.--
--------------------	--	--	------	--------	--	--	--	--	---------



Figuur 5.3

De berging in G gedurende een tijdje Δt is $B(c\Delta t)\Delta z_0$, ofwel $B c \Delta z_0$ per eenheid van tijd. Hierin is B de lokale breedte van de waterspiegel. De netto volumestroom naar G per eenheid van tijd is $Q_- - Q_+ = \Delta Q$ (zie Fig. 5.3). Hierin stellen Q_- respectievelijk Q_+ de waarde voor van Q juist bovenstrooms respectievelijk benedenstrooms van de (als discontinu benaderde) golf. De volumebalans geeft dan

$$B c \Delta z_0 = \Delta Q \quad (5.4)$$

Wanneer de stroming als twee-dimensionaal kan worden beschouwd geldt

$$c \Delta z_0 = \Delta q \quad (5.5)$$

Met vergelijking (5.4) dan wel (5.5) is een verband gelegd tussen Δz_0 en het toegevoegde debiet (ΔQ respectievelijk Δq), dat echter nog wel c als een onbekende bevat. Later zal de impulsbalans, toegepast op hetzelfde gebied G , de ontbrekende vergelijking leveren (hoofdstuk 7). In het volgende hoofdstuk (6) gaan we echter eerst de impulsbalans behandelen voor een infinitesimaal klein deeltje in een willekeurig stroomveld.

6. IMPULSBALANS VOOR EEN DEELTJE

In dit hoofdstuk behandelen we de impulsbalans voor een deeltje (Lagrange beschrijving). Anders gezegd: we passen de tweede wet van Newton toe op een (infinitesimale) massa in de vorm $\text{kracht} = \text{massa} \times \text{versnelling}$.

6.1 Impulsvoorraad

We beschouwen een infinitesimaal vloeistofpakketje dat we in zijn beweging zullen volgen. Het volume ervan is ΔV , de massa $\Delta m = \rho \Delta V$, en de impuls $(\Delta m) \vec{u} = (\rho \vec{u}) \Delta V$. (Merk op dat $\rho \vec{u}$ de volumieke impulsdichtheid is.)

De massa van het beschouwde vloeistofpakketje varieert niet in de tijd, zodat de verandering van de impuls per eenheid van tijd gegeven is door

$$\frac{D}{Dt} (\Delta m \vec{u}) = \Delta m \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \Delta V \quad (6.1)$$

6.2 Impulsoverdracht

Omdat we het vloeistofpakketje volgen kan er slechts impuls aan worden overgedragen via wisselwerkingen met de overige materie. De uit deze wisselwerkingen resulterende overdracht per tijdseenheid van impuls naar het beschouwde pakketje duiden we aan met $\vec{F}_{ww}$. Anders gezegd: $\vec{F}_{ww}$ is de uitwendige kracht die op de betreffende massa wordt uitgeoefend.

We onderscheiden hier moleculaire wisselwerkingen en zwaartewisselwerkingen. De eerstgenoemden zijn slechts over zeer kleine afstanden werkzaam; hun bijdrage aan de overdracht van impuls naar het beschouwde vloeistofpakketje is te modelleren als een spanning in het begrenzend oppervlak. Het zwaarteveld van de aarde (en van de hemellichamen) daarentegen strekt zich uit over afstanden die groot zijn vergeleken met de afmetingen van technische en geofysische stromingen, en de bijdrage ervan aan de

We zien dat $\vec{F}_{p_x}$ evenredig is met de x-component van de gradiënt van p. Omdat voor de y- en z-component van $\vec{F}_p$ overeenkomstige uitdrukkingen gelden kunnen we voor de resultante schrijven

$$\vec{F}_p = (-\nabla p) \Delta V \quad (6.2)$$

Hiermee is het volgende belangrijke resultaat verkregen: de drukkracht per eenheid van volume is gelijk aan het tegengestelde van de drukgradiënt. We kunnen het drukveld dus zien als een krachtpotentiaal (zie b7).

Zwaartekracht

De zwaartekracht per eenheid van massa schrijven we als $\vec{g}$. De waarde daarvan zullen we als een constante beschouwen ($g = 9.8 \text{ N/kg}$). Wanneer we de z-as vertikaal kiezen, positief omhoog, geldt $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

De zwaartekracht op de beschouwde massa is

$$\vec{F}_g = (\Delta m) \vec{g} = -(\Delta m) g \vec{e}_z \quad (6.3)$$

Hiermee komt overeen een potentiële (zwaarte-)energie (zie b7) met de waarde $(\Delta m) gz = (\rho gz) \Delta V$, waarin z de hoogte is van het massacentrum van het pakketje boven het horizontale vergelijkingsvlak $z = 0$. De grootheid ρgz is dus de volumieke dichtheid van potentiële energie. (Vanwege de veronderstelde onsamendrukbaarheid is er geen sprake van elastische potentiële energie.)

De potentiële zwaarte-energie per eenheid van massa noemen we de zwaarte-potentiaal; de waarde ervan is gz. Het lokale zwaarteveld is van deze potentiaal af te leiden volgens

$$\vec{g} = -\text{grad}(gz) = -\nabla(gz) \quad (6.4)$$

Hebben we bijv. de waarde nodig van de component van $\vec{g}$ in de stroomrichting ($\vec{e}_s$) dan schrijven we die volgens (6.4) als

gecombineerde werking van druk en zwaarte. Omdat slechts de gradiënt van deze potentiaal fysisch betekenis heeft, kunnen we naar willekeur een constante aan de potentiaal toevoegen. Dit komt ook hierin tot uiting dat we de referentieniveaus voor z en p willekeurig kunnen kiezen. Gemakshalve zullen we de atmosferische druk als referentie nemen voor de drukken in de vloeistof. De waarde van p zal dan niet de absolute druk voorstellen maar de overdruk ten opzichte van de atmosferische druk. In de formulering is dit eenvoudig weer te geven door $p_{\text{atm}} = 0$ te stellen.

6.3 Impulsbalans voor een deeltje

Volgens de tweede wet van Newton geldt

$$\frac{D}{Dt} (\Delta m \vec{u}) = \vec{F}_{\text{ww}}$$

Substitutie hierin van (6.1) en (6.6) levert

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla(p + \rho gz)} \quad (6.7)$$

Deze zgn. vergelijking van Euler (1750) is de basisvergelijking voor de dynamica van (een deeltje van) een ideale vloeistof in het zwaarteveld.

In het geval van voortdurende stilstand (t.o.v. een inertiaalstelsel) zijn de versnellingen overal gelijk aan nul. In deze statische toestand spreken we van een hydrostatische drukverdeling; de daarbij horende druk (p_s) voldoet aan

$$\nabla(p_s + \rho gz) = 0$$

Dit houdt in dat de druk niet varieert in elk horizontaal vlak in de vloeistof, en dat de druk vertikaal naar beneden toeneemt in dezelfde mate als het gewicht van de vloeistofkolom boven het beschouwde punt (zie b7). (Voor een behandeling van vraagstukken uit de hydrostatica verwijzen we naar de vraagstukkenbundel.)

$$\begin{aligned} p + \rho gz + \frac{\rho u^2}{2} &= \text{const} \\ p + \rho gz &= \text{const} \\ p_p + \rho z_p &= p_b + \rho z_b \\ p_p &= p_b + \rho (z_b - z_p) \end{aligned}$$

$$\nabla \left(\frac{\rho g z + p}{\rho g} \right) = \nabla \left(\frac{p_d}{\rho g} \right)$$

want z en p hebben een gradient op z staat

Het piëzometrisch niveau is van groot belang omdat de gradiënt ervan de drijvende kracht levert voor de stroming, en dus bepalend is voor de versnellingen in een ideale vloeistof. [Merk op dat $\nabla h = \nabla(z + p/\rho g) = \nabla(p_d/\rho g)$.]

Om de betekenis en het gebruik van het piëzometrisch niveau toe te lichten bekijken we eerst een situatie van evenwicht, waarvoor de versnellingen nul zijn. In dat geval geldt $\nabla h = 0$: alle punten in een vloeistof in evenwicht hebben hetzelfde piëzometrisch niveau. Dit komt overeen met de hydrostatische drukverdeling.

We passen het voorgaande toe op een stilstaande vloeistof in evenwicht, met een vrij oppervlak, waar $z = z_0$ en $p = p_{atm} = 0$.

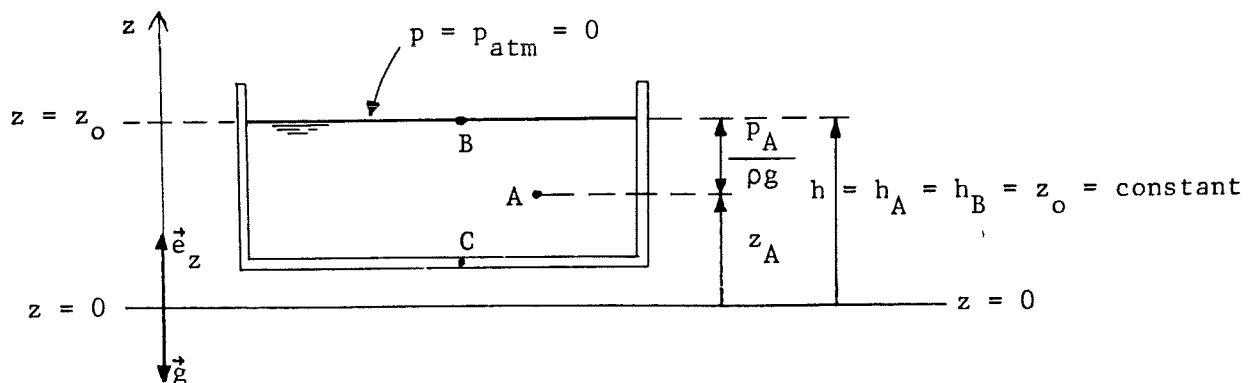
Nemen we een willekeurig punt A in de vloeistof, en een ander punt B ergens aan het vrije oppervlak (fig. 6.3), dan geldt

$$h = z_A + \frac{p_A}{\rho g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} = z_0 = \text{constant}$$

My case

$$\begin{aligned} gh &= gz_A + \frac{p_A}{\rho} = gz_B + \frac{p_B}{\rho} \\ 0 &= g(-h+d) + \frac{p_A}{\rho} = 0 + 0 \\ &= p_A = \rho g(h-d) \end{aligned}$$

Hieruit concluderen we dat in de beschouwde evenwichtssituatie het vrije oppervlak horizontaal ligt (omdat $p_B = p_{atm} = \text{constant}$) en dat het piëzometrisch niveau van alle punten in de (stilstaande) vloeistof daarmee samenvalt (als we $p_{atm} = 0$ stellen).



Figuur 6.3

Wanneer de vloeistof geen vrij oppervlak heeft, maar geheel is ingesloten door vaste wanden (bijv. van een buis), is het piëzometrisch niveau zichtbaar te maken door middel van open

6.5 Vergelijking van Euler in natuurlijk assenstelsel

Van de vergelijking van Euler nemen we achtereenvolgens de componenten in de richtingen van de s-, n- en b-coördinaten. Voor de componenten van de versnelling $\vec{Du}/Dt$ substitueren we (3.12). Doen we dit voor de vergelijking van Euler in termen van de dynamische druk dan ontstaat

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right) = - \frac{\partial p_d}{\partial s} \quad (6.11s)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} \right) = - \frac{\partial p_d}{\partial n} \quad (6.11n)$$

$$\rho \frac{\partial u_b}{\partial t} = - \frac{\partial p_d}{\partial b} \quad (6.11b)$$

In termen van het piëzometrisch niveau (6.10) is het resultaat

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} \quad (6.12s)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n} \quad (6.12n)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b} \quad (6.12b)$$

We gaan in de volgende paragrafen de betekenis hiervan na, in het bijzonder voor het geval van stationaire stromingen.

Vergelijking langs de binormaal

In een stationaire stroming is $\partial u_b / \partial t = 0$ en reduceert de vergelijking van Euler langs de binormaal (6.12b) tot

$$\frac{\partial h}{\partial b} = 0 \quad (6.13)$$

Daar waar de stroomlijn recht is ($R \rightarrow \infty$) geldt $\partial h / \partial n = 0$. We zullen van deze eigenschap veel gebruik maken, vooral voor de stroming in een doorsnede waarin alle stroomlijnen recht zijn. Daarvoor geldt: in een dwarsdoorsnede waar de stroomlijnen recht zijn is het piëzometrisch niveau constant.

Voorbeeld 1 - Rivierbocht

Voor het al genoemde voorbeeld van de horizontale stroming in een rivierbocht hadden we uit de vergelijking langs de binormaal gezien dat het piëzometrisch niveau voor alle punten van een vertikaal in de lokale waterspiegel ligt. Uit de vergelijking langs de normaal (6.15 of 6.16) zien we nu dat dit niveau aan de holle zijde van de stroming lager ligt dan aan de bolle zijde. Het niveauverschil in een bocht in een 200 m brede rivier waarvoor $u \approx 1$ m/s en $R \approx 500$ m (globale waarden) is volgens (6.16) ca. 4 cm.

Voorbeeld - 2 Stuw

Als tweede voorbeeld nemen we de stationaire twee-dimensionale stroming over een brede stuw (Fig. 6.6a). Om inzicht te krijgen in de stroming zijn enkele stroomlijnen getekend, en ook enkele doorgangen dwars daarop (I t/m III). Omdat de stroming stationair is en twee-dimensionaal, is de afvoer per eenheid van breedte constant:

$$q_I = q_{II} = q_{III}$$

Convergentie van de stroomlijnen houdt dus een vergroting van de stroomsnelheid in.

We passen de vergelijking langs de normaal toe in de doorgangen I, II en III.

De stroomsnelheden in het diepe reservoir zijn onbetekenend, en de stroomlijnen zijn er slechts zwak gekromd, zodat het piëzometrisch er langs een normaal (I) nauwelijks zal variëren.

▲
nivo

Dit geldt voor alle doorsneden op voldoende grote afstand bovenstrooms van de stuw, op een afstand van tenminste enkele keren de diepte boven de kruin.

In de omgeving van de kruin van de stuw zijn de snelheden aanzienlijk, en zijn de stroomlijnen sterk gekromd (in het geschetste voorbeeld is R van dezelfde grootte-orde als de diepte). Het piëzometrisch niveau zal daardoor langs een normaal (II) aanzienlijk afnemen in de richting van de kruin ($h_B < h_A$). De druk in punt B zal daarom significant lager zijn dan de hydrostatische waarde (zie getekend drukverloop in Fig. 6.6b), en kan bij voldoende grote snelheden en/of kromming zelfs negatief worden.

In doorsnede III tenslotte zijn de snelheden weliswaar groot, maar zijn de stroomlijnen vrijwel recht ($R \gg d$) waardoor het piëzometrisch niveau langs de normaal toch niet noemenswaard varieert. We kunnen dan stellen $h_D = h_C$, wat samen met $p_C = 0$ inhoudt dat $p_D = \rho g (z_C - z_D)$ (Fig. 6.6c). De druk op de stuwwand is dan uit te drukken in de plaatselijke diepte d (gemeten haaks op de wand) via $p_D = \rho g d \cos \theta$, waarin θ de hoek is die de wand en de stroomlijnen maken met het horizontale vlak.

Vergelijking langs de stroomlijn (Bernoulli)

Van de vergelijkingen van Euler in het natuurlijk assenstelsel bekijken we als laatste de vergelijking langs een stroomlijn voor een stationaire stroom. Uitgaand van de formulering in termen van de dynamische druk (6.11s) is het resultaat

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} = - \frac{\partial p_d}{\partial s}$$

Dit houdt in

$$\frac{\partial}{\partial s} (p_d + \frac{1}{2} \rho u^2) = 0$$

(6.17a)

ofwel

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial s} = 0} \quad (6.20a)$$

ofwel

$$H = \text{constant langs een stroomlijn} \quad (6.20b)$$

of ook

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{constant langs een stroomlijn} \quad (6.20c)$$

Het is van belang op te merken dat de vergelijkingen van Euler zijn afgeleid voor een ideale vloeistof (uitsluitend conservatieve krachten). In werkelijkheid zal er wrijving kunnen optreden. Die zal tegen de stroom in zijn gericht, en daardoor niet van invloed zijn op de geldigheid van de vergelijkingen van Euler langs de binormaal en langs de normaal, maar juist wel op de vergelijking van Euler langs de stroomlijn, d.i. de vergelijking van Bernoulli, waarin wrijvingsinvloed zich manifesteert als een energieverlies. Bij de toepassing van deze vergelijking moeten we van geval tot geval dus goed nagaan of deze energieverliezen inderdaad verwaarloosbaar zijn. Wanneer dit niet het geval is moeten we die invloed apart in rekening brengen. Dit blijkt vooral nodig te zijn bij de volgende twee situaties:

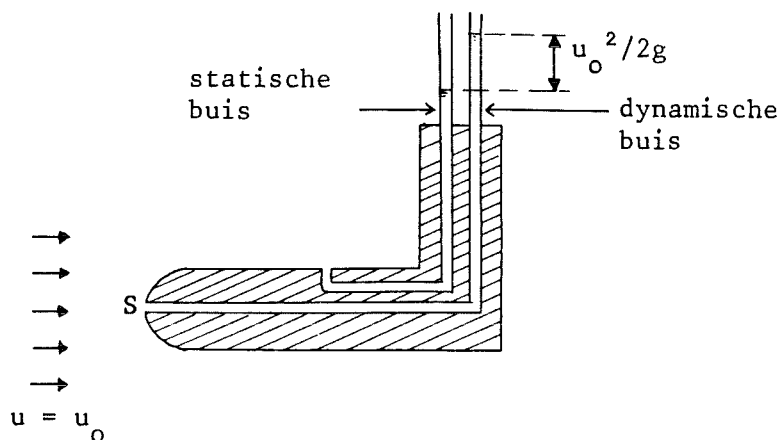
- (a) abrupte verwijding van een begremsd stroomprofiel, waarbij de stroming sterk wordt vertraagd en turbulentie wordt opgewekt.
- (b) stroming over grote afstand langs een vaste wand, waarbij de invloed van wandweerstand zich cumulatief kan doen gelden.

Is daarentegen sprake van een versnelling over een kort traject, dan blijkt de wrijvingsinvloed verwaarloosbaar, en kunnen we de vergelijking van Bernoulli goed toepassen. In volgende hoofdstukken komen we op deze problemen terug. In dit hoofdstuk beperken we ons tot de ideale-vloeistof benadering, waarvoor de vergelijking van Bernoulli geldig is.

$$p_{dS} = \frac{1}{2} \rho u_o^2 \quad (6.21)$$

Dit is de zgn. **stuwdruk**. Hiermee komt overeen een stijging van het piëzometrisch niveau met de waarde $u_o^2/2g$, zoals ook volgt uit (6.18).

Een Pitotbuis (Fig. 6.8) is een combinatie van een zgn. dynamische buis, waarmee het energieniveau van de ongestoorde stroming wordt gemeten (via het piëzometrisch niveau in het stuwpunt) en een zgn. statische buis, waarmee het piëzometrisch niveau van de ongestoorde beweging wordt gemeten. Het verschil in stijghoogte in de twee peilbuizen is (theoretisch) gelijk aan de snelheidshoogte ($u_o^2/2g$) van de ongestoorde beweging. Zodoende kan een Pitotbuis worden gebruikt als snelheidsmeter (voor niet al te lage snelheden, in verband met de nauwkeurigheid; voor $u = 1$ m/s is $u_o^2/2g = 0.05$ m; voor $u_o = 0.2$ m/s is $u_o^2/2g = 0.002$ m).



Figuur 6.8 - Pitotbuis

(2) Opening

Als tweede voorbeeld nemen we de stroming uit een reservoir via een relatief kleine opening. In de omgeving van de opening zijn de stroomlijnen relatief sterk gekromd (Fig. 6.9), maar verder benedenstrooms (zeg vanaf doorsnede 1) is de kromtestraal zoveel groter dan de straaldikte dat ook in het inwendige van de straal de druk vrijwel gelijk is aan de atmosferische druk.

z_0 , en vanwege de rust ($u^2/2g$ verwaarloosbaar) geldt $H_{\text{res}} = h_{\text{res}}$, zodat daar tevens geldt $H_{\text{res}} = \text{constant} = z_0$. In dat gebied is de energiehoogte dus uniform ($\nabla H_{\text{res}} = 0$). Omdat H constant is langs elke stroomlijn, ook waar de versnellingen aanzienlijk zijn (zolang Bernoulli opgaat), en alle stroomlijnen beginnen in het reservoir, is H uniform ($\nabla H = 0$) in het hele stroomveld. Alle punten in zulke stromingen hebben dus een gemeenschappelijk energieniveau, grafisch weer te geven door één energielijn (Fig. 6.9).

Uit de vergelijking langs de normaal weten we dat in een doorsnede met gekromde stroomlijnen het piëzometrisch niveau lager wordt in de richting naar het kromtemiddelpunt. Als H uniform is (niet alleen $\partial H / \partial s = 0$ maar ook $\partial H / \partial n = 0$) moet de snelheidshoogte toenemen in de richting van het kromtemiddelpunt, en wel even sterk als de hoogte van het piëzometrisch niveau afneemt (immers, $H = h + u^2/2g$).

In een doorsnede met rechte stroomlijnen daarentegen varieert h niet, en (als H uniform is) u dus evenmin. Bij berekeningen van debieten wordt hiervan veel gebruik gemaakt.

Door gebruik te maken van de eigenschap van uniforme energiehoogte kan een goede analyse van een stroming worden gemaakt. Figuur 6.10 geeft daarvan een (kwalitatief) voorbeeld voor de stroming over een stuw met een scherpe kruin. De drukhoogte in een vertikaal vlak door de overstortende straal (doorgang 1-2) en langs de binnenkant van de stuw (stroomlijn 3-2) is horizontaal uitgezet, evenals de waarde $(H-z)$. Het verschil tussen beide waarden in een punt stelt de snelheidshoogte in dat punt voor (gearceerd). In de punten 1 en 2 is $p = 0$, en is de snelheidshoogte gelijk aan de plaatselijke waarde van $H-z$. Punt 3 daarentegen is een stuwpunt, waar $u = 0$, zodat daar de drukhoogte gelijk is aan $H-z$ (ofwel gelijk aan H , als we $z = 0$ kiezen in de bodem).

Bovenstaand voorbeeld toont aan dat de vergelijking van Bernoulli, samen met die van het behoud van volume, kan leiden tot uitspraken over de totale stroom door een doorsnede, hoewel de vergelijking van Bernoulli zelf alleen betrekking heeft op individuele stroomlijnen. Dit is mogelijk dank zij de aanwezigheid van doorsneden met rechte stroomlijnen en het gegeven dat de stroming begint met een uniforme energiehogte.

Met de bovenomschreven aanpak kan een groot aantal problemen van stromen (van een ideale vloeistof) door leidingen worden opgelost. Alvorens enkele voorbeelden daarvan te behandelen zal een verwante formulering worden gegeven die direct gericht is op de totale stroom door een leiding. Dat gebeurt in het volgende hoofdstuk.

Meevoering

We gaan de energie-overdracht door meevoering berekenen conform de algemene formulering voor meevoering die is gegeven in par. 3.4.

De volumieke dichtheid van de zwaarte-energie is $\rho g z$ (zie par. 6.2), en die van de kinetische energie is $\frac{1}{2}\rho u^2$ (zie par. 3.4). Samen is dit $(\rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2)$. De meevoering van potentiële en kinetische energie per eenheid van tijd door het beschouwde vlakje heen is dus

$$\Delta P_{mv} = (\rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2) u_N \Delta A \quad (7.2)$$

Totaal

Sommatie van de bijdragen geleverd door de drukkracht en door meevoering geeft voor de totale energie-overdracht per eenheid van tijd door het beschouwde vlakje heen:

$$\Delta P = (p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2) u_N \Delta A$$

Voor de hele doorgang D is de overeenkomstige waarde

$$P = \iint (p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2) u_N dA \quad (7.3)$$

De dimensie hiervan is die van energie per tijd, ofwel die van een vermogen (SI-eenheid: 1 J/s ofwel 1 W).

Merk op dat deze energie-overdracht alleen kan plaatsvinden door een echte door-gang, dat wil zeggen een vlak waar de stroom door heen gaat ($u_N \neq 0$). Er vindt geen energie-overdracht plaats door een vlak waarin de stroomlijnen liggen, zoals de zijdelingse begrenzing van een stroombuis, waar $u_N = 0$. (Schuifspanningen kunnen wel energie overdragen door zulke vlakken, maar die blijven voorlopig buiten beschouwing.)

De verschillen in definitie van H en $\langle H \rangle$ zijn belangrijk: H is gedefinieerd in elk punt, terwijl $\langle H \rangle$ toegevoegd is aan een gehele doorgang. In feite is $\langle H \rangle$ een over de doorgang gemiddelde waarde van H , gewogen met u_N . Dit blijkt uit substitutie van (7.4) en (3.14) in (7.6):

$$\langle H \rangle = \frac{\iint H u_N dA}{\iint u_N dA} \quad (7.8)$$

Vanzelfsprekend reduceert dit tot $\langle H \rangle = H$ voor stromingen waarin H uniform is.

Voor een dwarsdoorgang (waar $u_N = \pm u$) wordt (7.8)

$$\langle H \rangle = \frac{\iint H u dA}{\iint u dA}$$

We substitueren hierin $H = h + u^2/2g$. Wanneer de stroomlijnen in de dwarsdoorgang recht zijn is h constant in die doorgang, en reduceert de vergelijking tot

$$\langle H \rangle = h + \frac{1}{2g} \frac{\iint u^3 dA}{\iint u dA}$$

Per definitie van de over de doorgang gemiddelde stroomsnelheid U (zie vgl.3.16) is de noemer in de laatste term gelijk aan UA . Wanneer echter de lokale snelheid u niet constant is in de doorgang (bijv. als gevolg van weerstand bovenstrooms) is de teller niet gelijk aan U^3A , maar groter. De verhouding ervan tot U^3A wordt met een apart symbool (α) aangeduid:

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\iint u^3 dA}{U^3A} = A^{-1} \iint (u/U)^3 dA \quad (7.9)$$

Hiermee is $\langle H \rangle$ te schrijven als

$$\langle H \rangle = h + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (7.10)$$

Wanneer de stroming een uniforme energiehogte heeft is u in (7.9) in elk punt gelijk aan U , en geldt $\alpha = 1$. Als gevolg van

De energievoorraad in G varieert niet in de tijd wegens het stationaire karakter van de stroom.

Wanneer er geen toevoer of onttrekking is van energie van buitenaf (zoals in een pomp of turbine), en we de inwendige energieverliezen verwaarlozen (waarover later meer), dan geldt voor de energie een behoudswet in de eenvoudige gedaante (4.3), inhoudende dat de netto overdracht van energie naar G toe gelijk moet zijn aan nul. De energie-overdracht naar binnen door de bovenstroomse doorgang D_1 , met de waarde P_1 , moet daarom gelijk zijn aan de overdracht naar buiten door de benedenstroomse doorgang D_2 , met de waarde P_2 . (Door de zijdelingse begrenzing vindt immers geen energie-overdracht plaats, omdat die in elk punt evenredig is aan u_N .) Door elke doorgang van de stroombuis wordt dus evenveel energie overgedragen. Dit houdt in dat

$$\frac{\partial P}{\partial s} = 0 \quad (7.12)$$

Hierin is s een lengte-coördinaat langs de as van de stroombuis.

Vanwege het behoud van volume, en het constant zijn van ρg , geldt $\partial(\rho g Q)/\partial s = 0$. Samen met (7.12) geeft dit

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial s} = 0 \quad (7.13)$$

Hiermee is een vergelijking verkregen die nauw verwant is aan die van Bernoulli. De hier gebruikte formulering heeft de volgende voordelen ten opzichte van de oorspronkelijke:

- . de formulering geldt voor een stroombuis met eindige dwarsdoorsnede, en is als zodanig meer geschikt voor toepassing op leidingen dan de vergelijking van Bernoulli, die betrekking heeft op een individuele stroomlijn.
- . de formulering toont aan dat de energiehogte evenredig is aan de energieoverdracht; eventuele toevoegingen (pomp), onttrekkingen (turbine) of inwendige verliezen (turbulentie, viscositeit) van energie kunnen daarom direct worden vertaald in variaties van de energiehogte.

Voor de hele leiding geldt

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial s} = 0 \quad (7.15)$$

Voor elk van de leidinggedeelten met constante diameter geldt bovendien $\partial A / \partial s = 0$, en vanwege (7.15) dan ook $\partial U / \partial s = 0$ en $\partial h / \partial s = 0$. Elk van deze leidinggedeelten heeft dus een constant piëzometrisch niveau.

In de vernauwing, waar de snelheid groter wordt, neemt h af, maar op een verschillende manier voor verschillende stroomlijnen omdat deze daar gekromd zijn. Het verloop van h in de vernauwing is in de figuur slechts schetsmatig weergegeven (met een onderbroken lijn).

Gelijkstelling van Q respectievelijk $\langle H \rangle$ in de doorsneden 1 en 2, waar de stroomlijnen recht zijn, levert

$$Q = U_1 A_1 = U_2 A_2$$

respectievelijk

$$\langle H \rangle = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

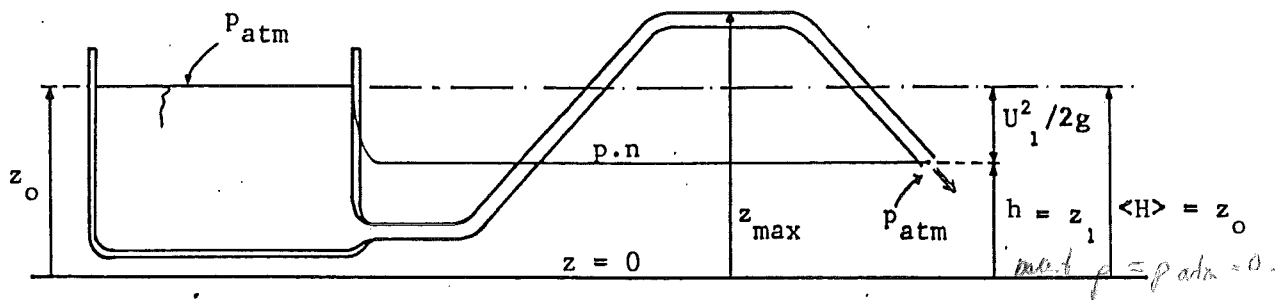
zodat

$$h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g} (A_2^{-2} - A_1^{-2}) \quad (7.16)$$

Bij bekende waarden van A_1 en A_2 en een gemeten waarde van het piëzometrisch niveauverschil ($h_1 - h_2$) kan Q hieruit worden berekend.

(2) Venturimeter

In pijpleidingen kan voor het doel van debietmeting een gestroomlijnde lokale vernauwing zijn aangebracht, waarbij het verschil tussen de piëzometrische niveaus in een doorsnede vlak bovenstrooms van de meter en in de nauwste doorsnede (de keel) wordt gemeten (Fig. 7.2). Men noemt dit een Venturimeter.



Figuur 7.3

In Fig. 7.3 is een hevel getekend bestaande uit een buis van constante diameter. Het piëzometrisch niveau in de hevel is daarom constant, afgezien van lokale afwijkingen in de bochtstukken (en, zoals steeds in dit hoofdstuk, afgezien van weerstand). In het voorbeeld vindt aan het einde van de hevel vrije uitstrooming plaats in de atmosfeer; het piëzometrisch niveau in de hevel ligt daarom op de hoogte van (het midden van) de uitstroomopening (z_1). De snelheid in de hevel is dan gelijk aan $\sqrt{2g(z_0 - z_1)}$ (Torricelli). De minimumdruk treedt op boven in het hoogste deel van de hevel, waar $z = z_{max}$. De drukhoogte daar is gelijk aan $p_{min}/\rho g = h - z_{max}$. De absolute minimumdruk is gelijk aan $p_{min} + p_{atm}$; deze moet groter zijn dan de dampdruk om cavitatie te voorkomen.

(4) Pomp of turbine

Een pomp in een gesloten leiding voegt een vermogen (P_{pomp}) toe aan de stroming. Dat vermogen is te behandelen als een productieterm in een energiebalans (zie hoofdstuk 4). De energiebalans voor het leidinggedeelte tussen twee doorsneden 1 respectievelijk 2 vlak bovenstrooms respectievelijk benedenstrooms van de pomp (Fig. 7.4), waar het doorgevoerde vermogen P_1 respectievelijk P_2 is, luidt

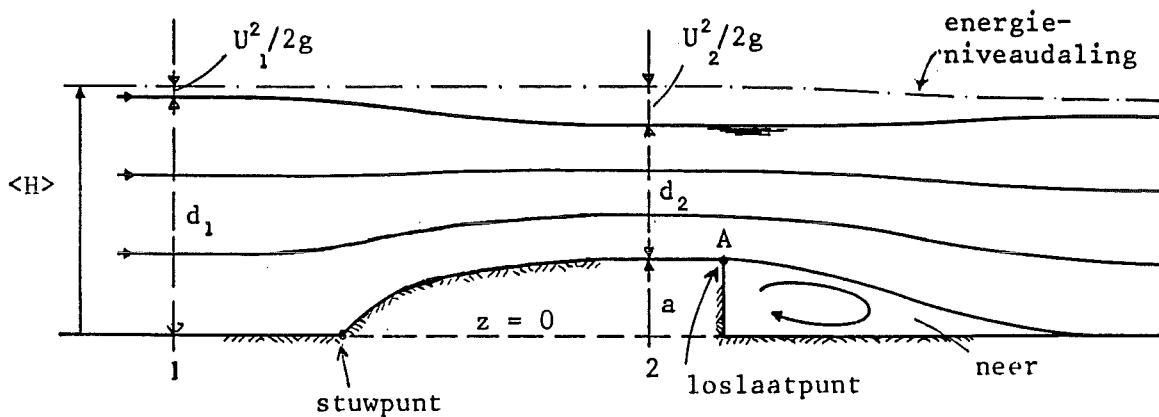
$$P_1 + P_{pomp} = P_2 \quad (7.18)$$

(5) Overlaat

Als vijfde toepassing behandelen we de twee-dimensionale stroming in een open leiding (kanaal of rivier) over een lokale verhoging, een zgn. overlaat (Fig. 7.5). De berekening hiervan verloopt in principe analoog aan die voor de stroming door een vernauwing in een gesloten leiding, maar de aanwezigheid van een vrije vloeistofspiegel geeft toch aanleiding tot enkele verschillen.

In een gevulde gesloten leiding ligt de geometrie van de doorstroomprofielen vast, en past het piëzometrisch niveau zich aan profielvariaties aan via variaties in de druk. Bij stromen met een vrije vloeistofspiegel daarentegen is de druk aan het oppervlak constant (p_{atm}), en kan het piëzometrisch niveau zich slechts aanpassen aan profielvariaties via verhogingen of verlagingen van de vloeistofspiegel. Deze hebben op hun beurt een bijkomende profielvariatie tot gevolg.

Ten tweede zijn in een vloeistof met een vrij oppervlak zgn. zwaartekrachtsgolven mogelijk. Dit kan aanleiding geven tot complicaties, waarop wij hier overigens nog niet in zullen gaan.



Figuur 7.5

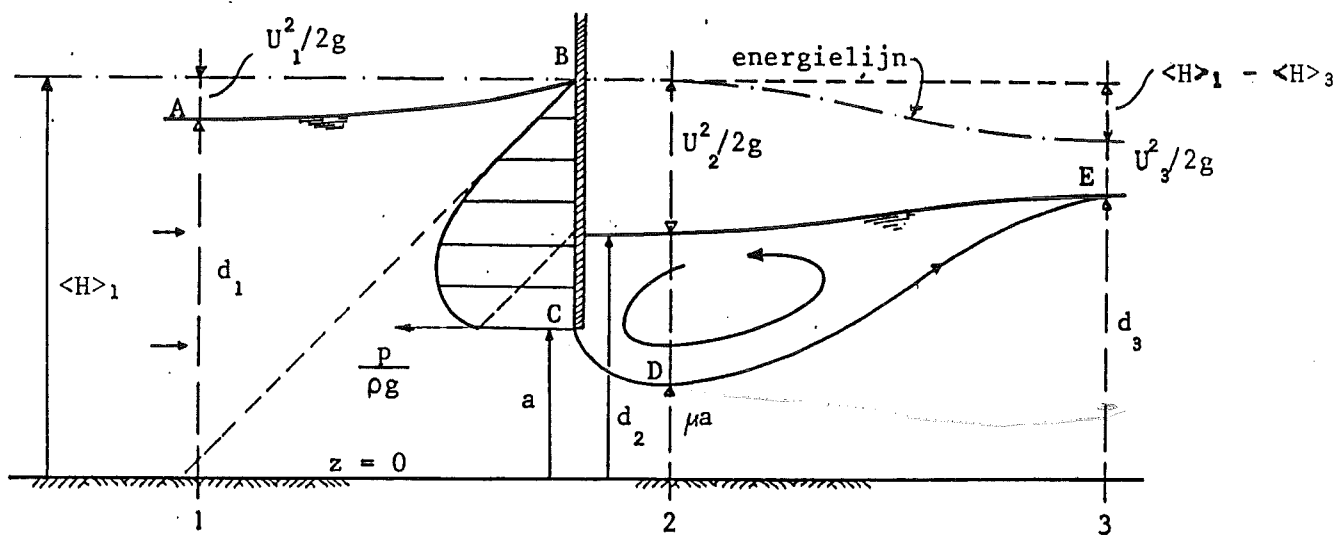
Toepassing van de behoudswetten voor volume en energie op het versnellingsgebied tussen de doorsneden 1 en 2, waar de stroomlijnen recht zijn (Fig. 7.5), levert

$$q = U_1 d_1 = U_2 d_2$$

circuleert; men noemt dat een neer. Als gevolg van deze processen verliest de doorgaande stroom een deel van zijn energie, en daalt het energieniveau dienovereenkomstig (Fig. 7.5). We zullen hierop later ingaan.

(6) Schuif

Als laatste toepassing berekenen we het debiet door een opening onder een verticale schuif boven een horizontale bodem, bij gegeven waterdiepten aan weerszijden (Fig. 7.6). De stroming wordt twee-dimensionaal verondersteld.



Figuur 7.6

Ten gevolge van de neerwaartse stroming langs de schuif vindt voorbij het punt waar de stroom loslaat van de schuif (C) contractie plaats tot aan een punt (D) waar de stroomrichting weer horizontaal is. De gegeven waterstand onmiddellijk benedenstrooms van de schuif ligt hoger dan dit punt, waardoor voorbij punt D (doorsnede 2) de hoofdstroom vertraagt, en zich boven de stroomlijn CDE een zgn. dekneer vormt, waarin het water relatief langzaam en sterk wervelend rondgaand beweegt. Omdat deze bewegingen relatief langzaam zijn kunnen we voor het effect van de neer op de hoofdstroom doen alsof de drukverdeling in de neer hydrostatisch is. Volgens deze benadering ligt het piëzometrisch niveau van de punten van de stroomlijn CDE in de waterspiegel erboven.

8. IMPULSBALANS VOOR EEN STROOMBUIS

In dit hoofdstuk wordt de impulsbalans voor een ruimtelijk vast gebied van eindige afmetingen behandeld. De formulering wordt aanvankelijk gegeven voor een gebied met willekeurige begrenzingen; het geval van een stroombuis komt daarna aan de orde.

8.1 Impulsvoorraad

De impuls $\Delta \vec{I}$ in een infinitesimaal gebiedje met volume ΔV is $\Delta \vec{I} = (\rho \vec{u}) \Delta V$. Voor de totale impuls in het beschouwde gebied G geldt

$$\vec{I} = \iiint_G \rho \vec{u} \, dV \quad (8.1)$$

Voor berekening hiervan moeten de massadichtheid en snelheid in elk punt in G bekend zijn. Voor de impulsbalans van een stationaire stroom is een dergelijke berekening echter niet nodig omdat het in een balans niet gaat om de impuls zelf maar om de verandering daarvan in de tijd, welke voor een ruimtelijk vast gebied gelijk is aan nul als de stroming stationair is.

8.2 Impulsoverdracht

De overdracht van impuls per eenheid van tijd naar het gebied G bestaat uit bijdragen van wisselwerkingen (zwaarte en inwendige spanningen) en uit bijdragen van meevoering door de (ruimtelijk vaste) begrenzing van G heen. Bij de wisselwerkingen laten we voorlopig de schuifspanningen buiten beschouwing.

Zwaartekracht

De bijdrage van het zwaarteveld aan de impulsoverdracht naar G is te schrijven als

$$\vec{F}_g = \iiint \rho \vec{g} \, dV \quad (8.2)$$

De berekening van $\vec{F}_g$ is niet altijd nodig. In stromingen waarin bij gelijke druk geen verschillen in massadichtheid voorkomen (en

Meevoering

De naar binnen gerichte volumestroom door een infinitesimaal vlakje heen is $u_N \Delta A$. De impuls per eenheid van volume is $\rho \vec{u}$, zodat de impuls die per tijdseenheid naar G wordt meegevoerd door dit vlakje heen gelijk is aan $\Delta \vec{F}_{mv} = (\rho \vec{u}) u_N \Delta A$. De totale impulsoverdracht per eenheid van tijd naar G, als gevolg van meevoering, is gegeven door

$$\vec{F}_{mv} = \iint (\rho \vec{u}) u_N dA \quad (8.5)$$

Ook hier strekt de integratie zich uit over het gehele oppervlak rondom G.

8.3 Impulsbalans voor willekeurig gebied

Omdat impuls behouden blijft luidt de impulsbalans voor het ruimtelijk vaste gebied G, onder invloed van bovengenoemde bijdragen aan de impulsoverdracht:

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_{mv} \quad (8.6)$$

In geval van voortdurende stilstand (ten opzichte van een geschikt gekozen inertiaalstelsel) reduceert (8.6) tot

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p = 0 \quad (8.7)$$

Dit komt overeen met de hydrostatische drukverdeling.

Wanneer we de zwaartekracht en de daarmee overeenkomende hydrostatische druk buiten beschouwing laten en we ons bovendien beperken tot stationaire stromen, reduceert (8.6) tot

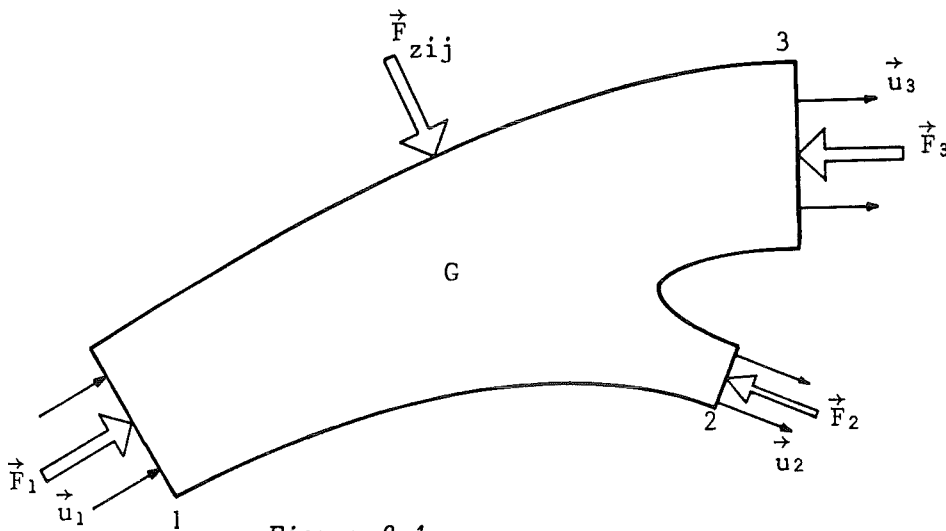
$$\vec{F}_p + \vec{F}_{mv} = 0 \quad (8.8)$$

Hierin stelt $\vec{F}_p$ in feite dus slechts de bijdrage voor van de dynamische druk.

$$\vec{F}_{dd} = \iint (p + \rho u^2) \vec{e}_N dA \quad (8.10)$$

De impulsbalans voor het beschouwde deel van de stroombuis tussen twee doorgangen (of meer, als de stroming zich splitst - zie Fig. 8.1) is dan te schrijven als

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \vec{F}_g + \vec{F}_{zij} + \Sigma \vec{F}_{dd} \quad (8.11)$$



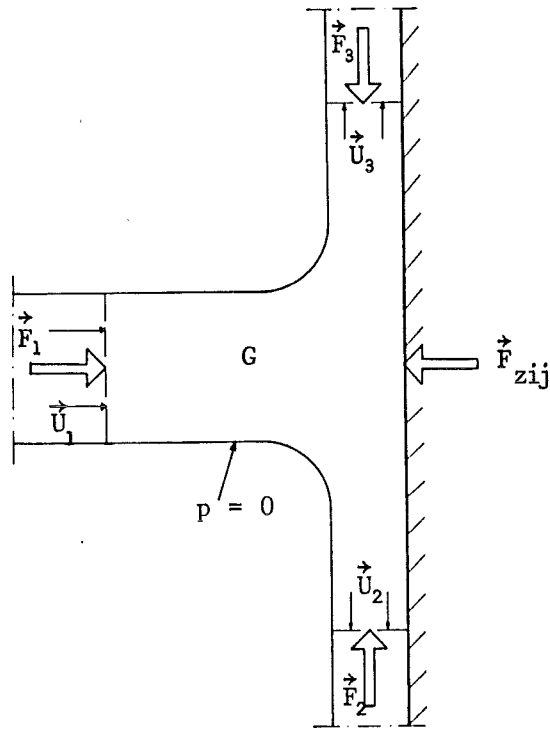
In toepassingen kiezen we de dwarsdoorgangen bij voorkeur daar waar de stroomlijnen recht zijn (dynamische druk c.q. piëzometrisch niveau constant) en evenwijdig ($\vec{e}_N = \text{constant}$). In dit geval zal de berekening van de bijdrage van de druk geen problemen opleveren, en kan de bijdrage van de meevoering van impuls worden geschreven in een vorm analoog aan die voor de meevoering van kinetische energie (zie h.7):

$$\vec{F}_{mv} = \iint \rho u^2 \vec{e}_N dA = \rho \vec{e}_N \iint u^2 dA = \beta \rho U^2 A \vec{e}_N \quad (8.12)$$

ofwel

$$\vec{F}_{mv} = \beta \rho Q U \vec{e}_N \quad (8.13)$$

waarin β een factor is die conform bovenstaande definitie te schrijven is als



Figuur 8.2

We kiezen een balansgebied G zoals aangegeven in de figuur.

Omdat $p_{\text{atm}} = 0$ levert de aan de atmosfeer blootgestelde begrenzing van G geen bijdrage aan de impulsoverdracht, en is $\vec{F}_p = 0$ in alle doorgangen met rechte stroomlijnen. Vanwege de symmetrie geldt $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$, zodat de impulsbalans (8.16) reduceert tot

$$\vec{K} = \vec{F}_1 = \rho U_1^2 A_1 \vec{e}_{N_1} = \rho Q U_1 \vec{e}_{N_1}$$

Hierin is gebruik gemaakt van het gegeven dat $p_{\text{atm}} = 0$.

We gaan nu uit van een twee-dimensionale stroming die op grote afstand van de wand een willekeurige hoek (θ) maakt met de normaal ($\vec{e}_x$) op de wand (Fig. 8.3). Deze situatie heeft geen symmetrie.

Uit het gegeven dat $K_y = 0$ kunnen de straaldikten d_2 en d_3 worden berekend, althans wanneer ook gebruik wordt gemaakt van de drie behoudsvergelijkingen:

Behoud van volume:

$$q = U_1 d_1 = U_2 d_2 + U_3 d_3$$

Behoud van energie (Bernoulli met $g = 0$ en $p = 0$):

$$U_1 = U_2 = U_3$$

Behoud van y-impuls:

$$K_y = \sum_i F_{i_y}$$

ofwel, samen met $K_y = 0$:

$$\rho U_1^2 d_1 \sin \theta + \rho U_2^2 d_2 - \rho U_3^2 d_3 = 0$$

Hierin is gebruik gemaakt van de gelijkheden $\vec{e}_{N_2} = \vec{e}_y$ en $\vec{e}_{N_3} = -\vec{e}_y$. ($\vec{F}_{dd}$ is altijd naar binnen gericht, d.w.z. in doorgang 2 in de richting van $\vec{e}_y$, en in doorgang 3 daaraan tegengesteld; in beide doorgangen is $\vec{F}_{dd}$ tegengesteld gericht aan de lokale snelheid.)

Eliminatie van de snelheden geeft

$$d_2 = \frac{1}{2} d_1 (1 - \sin \theta)$$

$$d_3 = \frac{1}{2} d_1 (1 + \sin \theta)$$

(2) Vernauwing

Een gestroomlijnd verloopstuk in een leiding verbindt twee buizen (Fig. 8.4) waarvan de dwarsprofielen een oppervlakte hebben van A_1 respectievelijk A_2 ($A_1 > A_2$). De leiding is gevuld met vloeistof. De druk bovenstrooms respectievelijk benedenstrooms van het verloopstuk is p_1 respectievelijk p_2 . Gevraagd: het debiet (Q), en de kracht ($\vec{K}$) door de vloeistof op het verloopstuk uitgeoefend.

Eliminatie van Q geeft

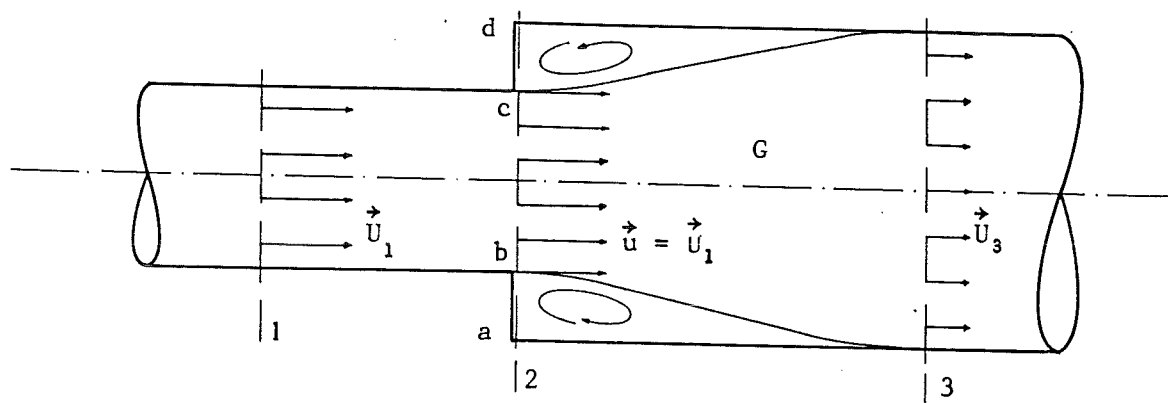
$$K = (p_1 A_1 - p_2 A_2) \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \quad (8.17)$$

Een spuitmond is een vernauwing aan het einde van een leiding. Wanneer de stroom vrij in de atmosfeer uittreedt geldt $p_2 = 0$. De kracht door de vloeistof op de spuitmond uitgeoefend heeft dan de waarde

$$K = p_1 A_1 \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

(3) Abrupte verwijding in gesloten leiding

We behandelen nu het geval van een abrupte verwijding, waarbij twee buizen van verschillende diameter met een platte flens aan elkaar zijn verbonden (Fig. 8.5). De druk en de gemiddelde snelheid in de buis met de kleinste diameter zijn gegeven. De waarden daarvan benedenstrooms van de verwijding moeten worden berekend.



Figuur 8.5

Vanwege de abrupte verwijding laat de stroom los van de wand, en vormt zich een neer in de zône pal benedenstrooms van de flens (Fig. 8.5). Vanwege de niet-verwaarloosbare energieverliezen die daarmee gepaard gaan geldt voor het vertragingsgebied niet een behoud van energie (mechanische energie wordt door niet-conservatieve processen in het inwendige van het balansgebied

Hieruit volgt voor de drukstijging:

$$\Delta p = p_3 - p_1 = \rho(U_1 U_3 - U_3^2) \quad (8.18)$$

Volgens Bernoulli zou Δp groter geweest zijn, nl.

$$\Delta p_{\text{Bern}} = \frac{1}{2} \rho (U_1^2 - U_3^2) \quad (8.19)$$

$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{U_3^2}{2g}$
 $p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = p_3 + \frac{1}{2} \rho U_3^2$

Het tekort aan drukstijging is als een drukverlies aan te merken:

$$\Delta p_{\text{verl}} = \Delta p_{\text{Bern}} - \Delta p$$

$\Delta p = p_3 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (U_1^2 - U_3^2)$

Substitutie van (8.18) en (8.19) geeft

$$\Delta p_{\text{verl}} = \frac{1}{2} \rho (U_1 - U_3)^2$$

(8.20)

Dit is de zgn. regel van Carnot.

Nu uit de volumebalans en de impulsbalans de druk en snelheid in de doorsneden 1 en 3 bekend zijn is het vermogen (P_{diss}) te berekenen dat wordt gedissipeerd in het tussengelegen gebied, en wel uit een energiebalans:

$$P_1 - P_3 = P_{\text{diss}}$$

Dit geeft

cf H.

$$P_{\text{diss}} = [(p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2) - (p_3 + \frac{1}{2} \rho U_3^2)] Q$$

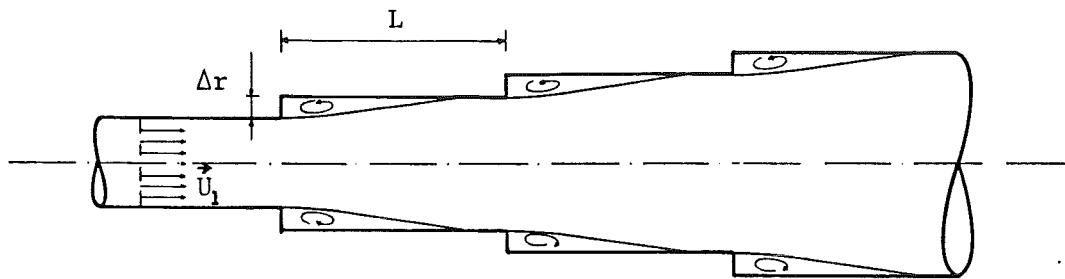
ofwel

P Q

$$P_{\text{diss}} = \Delta p_{\text{verl}} Q = \frac{1}{2} \rho (U_1 - U_3)^2 Q \quad (8.21)$$

Hiermee komt overeen een daling van het energieniveau gelijk aan

$$\Delta \langle H \rangle_{\text{verl}} = \frac{P_{\text{diss}}}{\rho g Q} = \frac{\Delta p_{\text{verl}}}{\rho g} = \frac{(U_1 - U_3)^2}{2g} \quad (8.22)$$



Figuur 8.6

Een getallenvoorbeeld: het verlies in een abrupte verwijding van A_1 tot $A_3 = 2A_1$ is $\frac{1}{2}(U_1^2/2g)$. Bij tussenvoeging van één trap, waarvoor $A_2 = \frac{3}{2} A_1$, is het totale verlies volgens de regel van Carnot te berekenen als

$$\frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} + \frac{(U_2 - U_3)^2}{2g} = \frac{U_1^2}{2g} \left[\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{A_1}{A_3}\right)^2 \right]$$

De waarde hiervan is $(5/36) (U_1^2/2g)$, ofwel een factor $5/9$ kleiner dan zonder tussen-trap.

In het bovenstaande is verondersteld dat per trap de regel van Carnot geldt. Daarvoor moet elke trap tenminste zo lang zijn dat de stroom weer vrijwel uniform over het volle beschikbare profiel is verdeeld (zoals geschetst in Fig. 8.6). De hiervoor benodigde traplengte (L) is ca. 8x de trap"hoogte" (Δr). De verhouding van 1:8 is tevens (globaal) de maat voor de maximale hoek van divergentie (θ) van een continue, geleidelijke verwijding waarbij de stroomlijnen nog blijven aanliggen (hierin is θ de hoek tussen de zijwand en de as van de leiding). Wanneer dit het geval is, (zoals in een goede diffusor) blijft het verlies beperkt tot een kleine fractie van het Carnot-verlies.

(4) Lokale vernauwing

In aansluiting op het voorgaande behandelen we nu de stroming door een lokale vernauwing in een overigens cilindervormige leiding. We vergelijken het energieverlies en de weerstand in twee gevallen, nl. een Venturimeter, d.w.z. een vernauwing gevolgd door een diffusie (Fig. 8.7a) en een vernauwing van

Omdat $A_1 = A_3$ ($= A$) geldt $U_1 = U_3$ ($= U$).

Zoals bij de vorige toepassing al is gesteld is het energieverlies in geval van een gestroomlijnde verwijding (Venturi) slechts een kleine fractie van het verlies volgens Carnot, dat optreedt bij een abrupte verwijding. Om de essentiële verschillen tussen beide situaties tot uiting te laten komen gaan we het verlies in de Venturimeter zelfs geheel verwaarlozen ($P_{\text{diss}} = 0$). In dat geval geldt $P_3 = P_1$, en omdat $U_3 = U_1$ geldt dus ook $p_3 = p_1$. Hieruit volgt $F_3 = F_1$, waarna het behoud van impuls resulteert in $K = 0$. De drukstijging in het vertragsgebied is in deze geïdealiseerde benadering voor de gestroomlijnde verwijding gelijk aan de drukdaling in het versnellingsgebied bovenstrooms van de vena contracta, waardoor de netto (axiale) kracht op de wand tussen 1 en 3 gelijk is aan nul.

In het geval van de abrupte verwijding kunnen we het energieverlies in het vertragsgebied niet verwaarlozen, en is $p_3 < p_1$. Volgens Carnot geldt

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho U_3^2 \Leftrightarrow p_3 = p_1 - \frac{1}{2}\rho(U_2^2 - U_3^2) \quad (8.25)$$

Hierin is U_2 de gemiddelde snelheid in de keel. Substitutie hiervan in de impulsbalans geeft

$$K = (\Delta p_{\text{verl}})A$$

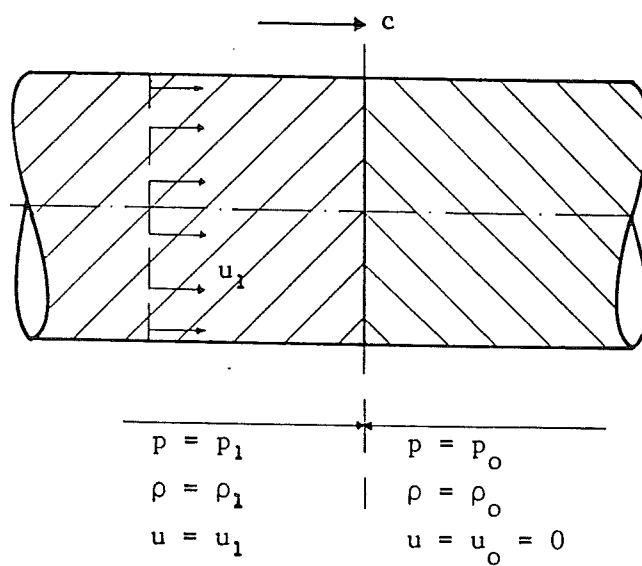
$$\begin{aligned} K &= F_1 - F_3 \\ &= (p_1 + \rho U_1^2)A - (p_3 + \rho U_3^2)A \\ &= (p_1 + \rho U_2^2)A - (p_1 - \frac{1}{2}\rho(U_2^2 - U_3^2) + \rho U_3^2)A \end{aligned}$$

In dit geval oefent de vloeistof dus wel een netto kracht uit op het betreffende wandgedeelte, en wel een kracht in de richting $= 1/2$ etc. van de stroming. We kunnen ook zeggen dat de vloeistofstroming een weerstand ondervindt met een grootte (W) gelijk aan K :

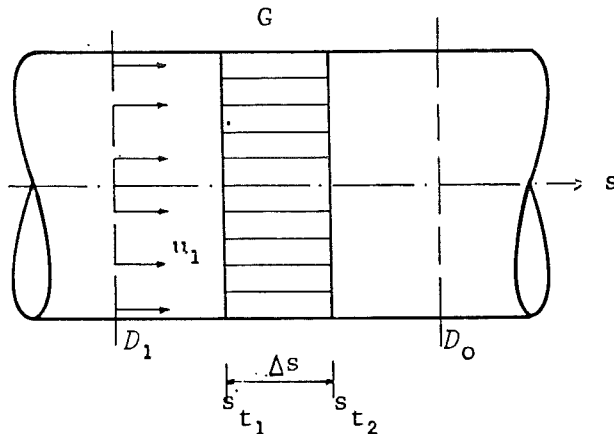
$$W = (\Delta p)_{\text{verl}} A$$

(8.26)

We gaan ervan uit dat een abrupte drukverhoging zich als een schokgolf in de leiding voortplant (met te berekenen snelheid c), waarbij er sprake is van een ongestoord gebied waar $u = u_0 = 0$, $p = \text{constant} = p_0$ en $\rho = \text{constant} = \rho_0$ (zie Fig. 8.8a). Achter het golffront stellen we $p = \text{constant} = p_1$, $\rho = \text{constant} = \rho_1$ en $u = \text{constant} = u_1$, waarbij $p_1 - p_0 = \delta p$ en $\rho_1 - \rho_0 = \delta \rho$. We zien af van de details in het golffront, d.w.z. het overgangsgebied tussen beide gebieden van uniforme toestand.



Figuur 8.8a



Figuur 8.8b

We stellen voor het tijdsinterval van $t = t_1$ tot $t = t_2 = t_1 + \Delta t$ een massabalans en een impulsbalans op voor een ruimtelijk vast gebied G dat het front bevat (Fig. 8.8b). Het front ondergaat in die tijd een verplaatsing van $s = s_{t_1}$ tot $s = s_{t_2}$, over een afstand $\Delta s = c \Delta t$. In het gebied tussen s_{t_1} en s_{t_2} (gearceerd in Fig. 8.8b) is de massadichtheid toegenomen van ρ_0 tot ρ_1 , en de impulsdichtheid van $\rho_0 u_0$ tot $\rho_1 u_1$.

$$\delta p = \rho_1 u_1 c \quad (8.32)$$

Dit is de zgn. formule van Joukowski. Hieruit is te zien dat de geringe samendrukbaarheid van vloeistoffen (K groot) via grote waarden van c (bijna 1500 m/s voor zuiver water) leidt tot relatief hoge drukvariaties wanneer de snelheid snel varieert ("waterslag"). Te snelle manipulatie van pompen en afsluiters in starre leidingen moet daarom worden voorkomen, om ongewenst grote drukvariaties te vermijden. (In flexibele leidingen is c^2 veel kleiner dan K/ρ en is de drukvariatie dus ook veel kleiner dan in een starre leiding.)