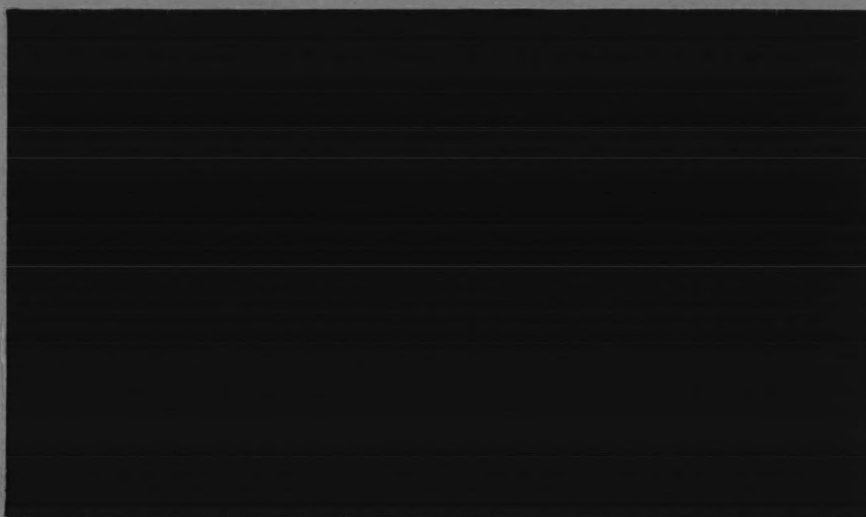


1978



DEELONTWERP VLOEISTOFMECHANICA

Bij Prof.dr.ir. M. de Vries

Een tweedimensionale getijberekening  
betreffende de aanleg van een zanddam  
t.b.v. de overslag van L.N.G.  
voor de kust van Voorne-Putten

door  
A.M. Burger

Met dank aan:

ir. M.A.M. de Ras  
ir. C. Verspuy  
ir. N. Booy  
ing. S. de Boer

Typografische verzorging:

Eveline Burger-Weulen Kranenbarg

INHOUDSOPGAVEBlz.

HOOFDSTUK I		1
- Inleiding		1
- Doelstelling		3
- Samenvatting		3a
HOOFDSTUK II	<u>Hydrodynamische grondslagen</u>	4
- Basisvergelijkingen		4
- De vergelijkingen van lange golven		5
HOOFDSTUK III	<u>Berekeningsmethode</u>	9
- Differentiemethoden		9
- Expliciete + impliciete methode		10
- Impliciete methode in afwisselende richting		10
HOOFDSTUK IV	<u>Opzet van de berekeningen</u>	27
- Programma		27
- Berekeningen		27
- Plaats en Tijd		28
HOOFDSTUK V	<u>Het maken van de modellen</u>	30
- $T_0$ en $T_1$ model		30
- $T_2$ model		36
HOOFDSTUK VI	<u>Interpretatie van de uitvoer</u>	39
- Het ijken van de modellen		39
- Verschillen tussen $T_0$ en $T_1$ model		44
- Beschouwing van de $T_2$ toestand		44
- Springtij - Doodtij		46
HOOFDSTUK VII	<u>Analyse differentiaalvergelijking</u>	48
- Inleiding		48
- Het rekenproces		48
- De differentiebenaderingen		49
- Het schema volgens TIDES met tijdcorrecties		51
- Eigen differenties van de differentiaalvergelijking		55
- De resultaten		61
- Fouten beschouwing		65

HOOFDSTUK VIII	<u>Slotopmerkingen</u>	70
	- Verstoringen bij de Zuid-westrand	70
	- Wachten op uitvoer	72
	- Plotefficiëncy	72
	- Eindbeschouwing	73

N.B.: De hoofdstukken II en III zijn fotocopieën van blz. 4 t/m 26  
uit het afstudeerverslag van ir. Th.J.M. Leijen en  
ir. H.J. de Haan.  
(zie: geraadpleegde literatuur).



## Geraadpleegde literatuur

- dr. J.J. Dronkers  
Tidal computation in rivers and coastal waters, 1964
- dr.ir. J.J. Leendertse  
Aspects of a computational model for long-period water-wave propagation  
Proefschrift, The Rand Corporation, Santa Monica, 1967
- ir. N. Booy  
Gebruikersgids voor het programma TIDES voor twee-dimensionale  
getijberekeningen
- Ministerie van Marine  
Stroomatlas voor de Nederlandse kust  
Den Haag, 1951
- Getijtafels voor Nederland, 1975
- ir. C. Verspuy  
Collegedictaat Lange Golven, 1978
- Ballast Nedam groep N.V.  
Voornedam, landingsplaats voor vloeibaar aardgas op strekdam in  
de Noordzee, 1977
- C. Flokstra  
The closure problem for depth-averaged two-dimensional flow  
Waterloopkundig Laboratorium Delft, 1977
- Th.J.M. Leijen en H.J. de Haan  
Afstudeerverslag Vloeistofmechanica  
Technische Hogeschool Delft, 1976

## HOOFDSTUK I

### *Inleiding*

De N.V. Nederlandse Gasunie heeft eind juni 1977 met de Algerijnse Staatsmaatschappij Sonatrach een kontrakt afgesloten voor de levering van 4 miljard Nm<sup>3</sup> vloeibaar aardgas per jaar gedurende een periode van 20 jaar. Dit gas zal vanuit Algerije met gastankers worden toegeleverd aan een nog te bouwen overslagstation waar het vloeibare produkt weer gasvormig wordt gemaakt voor distributie door het bestaande leidingnet. De Stuurgroep Studie Noordzee-eilanden en Terminal (STUNET) heeft een studie uitgevoerd naar de wenselijkheid en modaliteiten van een buitengaats overslagstation op een kunstmatig eiland. In aansluiting daarop is hetzelfde gebeurd t.a.v. een vestiging op het vaste land.

De voornaamste in die studies gehanteerde toetsings-kriteria zijn enerzijds de milieu- en veiligheidsaspecten, anderzijds de bouwkosten en de bouwtijd. Het resultaat is opgenomen in een door de Interdepartementale Coördinatiecommissie voor Noordzee-aangelegenheden (ICONA) aan de Ministeriële Commissie voor Noordzee-aangelegenheden (MICONA) aangeboden beleidsadvies.

In het ICONA-rapport wordt gesteld dat:

- Voor realisering van een terminal op de Maasvlakte minstens 4 jaar nodig is en voor een buitengaats overslagstation minstens 6 jaar.
- Het goedkoopste eiland-type, geschikt voor beperkte L.N.G.-overslag, tenminste 1 miljard gulden meer investeringen vergt dan een overslagstation op de Maasvlakte.
- De bruikbaarheid van dit eiland echter nader onderzoek vereist (golf-onderzoek, rustige ligging van de schepen binnen de haven, wachttijden bij slecht weer etc.).
- Van de bestudeerde landlokaties de Maasvlakte uit het oogpunt van nautische veiligheid en bereikbaarheid geschikter is dan Delfzijl-Eemshaven of Vlissingen-Sloegebied.
- De lokatie op de Maasvlakte nog nader planologisch dient te worden bekeken.
- Bij een vestiging op de Maasvlakte beperkingen aan het uitgaande normale scheepvaartverkeer moeten worden opgelegd, hetgeen bij toekomstige uitbreiding van de L.N.G.-aanvoer een vestiging op een

eiland alsnog noodzakelijk maakt.

Het rapport geeft aan dat voorshands aan de Maasvlakte de voorkeur moet worden gegeven, aangezien het alternatief, een kunstmatig eiland, te kostbaar is, en bovendien te laat gereed zou zijn.

Een derde alternatief is de logische tussenvorm tussen de vestiging op het vaste land en de vestiging op een eiland, namelijk die op een schiereiland. Van deze mogelijkheid is een 'feasibility-study' uitgevoerd door Ballast Nedam. Hun ontwerp gaat uit van een zanddam die vanaf het zuidelijke gedeelte van de Maasvlakte in westelijke richting de Noordzee insteekt (bijlage I-1 en I-2). Over de invloed van een dergelijke grote ingreep is nog slechts weinig bekend. Wel mag aangenomen worden dat het stroombeeld plaatselijk zeer grote veranderingen zal ondergaan. Stroomsnelheden zullen in grootte en richting sterk veranderen en daarmee samenhangend ook de morfologische processen in het betrokken kustgebied. Ook de waterstanden zullen zich wijzigen onder invloed van deze ingreep.

De belangrijkste voordelen van dit derde alternatief zijn:

1. goedkoper dan een kunstmatig eiland in volle zee, zowel qua investerings- als qua exploitatiekosten;
2. op ruime afstand van de kust gelegen;
3. gescheiden scheepvaartverkeer, minder kans op aanvaring;
4. geen beperking van het Waterwegverkeer;
5. de mogelijkheid van een snelle vlucht naar open zee voor een L.N.G.-tanker in geval van brand;
6. draagt bij tot kustbescherming van Voorne;
7. vorming van een nieuw natuur- en recreatiegebied, zoals aangegeven in het Streekplan Rijnmond 1974 (ontwikkeling Voordelta);
8. aansluiting bij reeds bestaande plannen van beperktere omvang;
9. behoud van Maasvlakte voor toekomstige bestemmingen (kolenterminal, etc.);
10. is onmiddellijk geschikt te maken voor uitbreiding van de doorvoercapaciteit zonder nadelige gevolgen voor de omgeving;
11. kent voor het bedienend personeel niet de psychische nadelen van een eiland in open zee (vluchtweg aanwezig);
12. is onder alle omstandigheden, ook in nood, goed bereikbaar (logistiek eenvoudig).

Als nadelen moeten worden aangemerkt:

1. duurder dan een vestiging op de Maasvlakte;
2. realisering kost meer tijd dan op de Maasvlakte.

De waarde van deze voor- en nadelen is moeilijk meetbaar. Toch zal elk der genoemde overwegingen bij een verantwoorde keuzebepaling in de evaluatie moeten worden betrokken.

### *Doelstelling*

Om een indruk te krijgen van de grootte van het kustgebied dat door deze ingreep wordt beïnvloed is een twee-dimensionale getijberekening gemaakt.

*Aan de hand van deze getijberekening wil ik in de eerste plaats vaststellen of onder normale omstandigheden de stroomsnelheden dwars over de toegangseul, die voor de havenmond wordt gebaggerd, niet zo groot zijn dat een veilige invaart voor de L.N.G.-carriers onmogelijk is geworden.*

Bovenstaande doelstelling benut slechts één van de vele toepassingen van de getijberekening.

Als de gegevens uit de getijberekening op hun betrouwbaarheid getoetst zijn, kunnen ze bijvoorbeeld gebruikt worden voor een beschouwing van de morfologische aspecten van het strand aan de noordzijde van de dam, of voor een toekomstvoorspelling met betrekking tot het slafter-gebied aan de zuidzijde van de dam. Ook kunnen met deze getijberekening alternatieve damtracées onderzocht worden. Enige van deze facetten zullen in een later stadium van mijn studie aan de orde komen.

In de twee volgende hoofdstukken wordt beschreven hoe men een twee-dimensionaal getijdemodel numeriek kan doorrekenen en wat de hydrologische grondslag hiervan is. Het betreft hier een overname uit het afstudeerwerk van ir. Th.J.M. Leijen en ir. H.J. de Haan.

### *Samenvatting*

Er is een twee-dimensionaal numeriek getijdemodel gemaakt voor een deel van het Nederlandse kustgebied, tussen Kijkduin en de kop van Schouwen-Duivenland.

De basis voor de berekeningsmethode wordt gevormd door het rekenmodel van dr. J.J. Leendertse. Nadat het model geijkt is, zijn er enige wijzigingen in aangebracht. Hierdoor is het mogelijk voorspellingen te doen over de stroomsnelheden en waterstanden die op zullen treden als die wijzigingen in het werkelijke kustgebied worden verwezenlijkt.

Na de toegepaste vloeistofmechanica van de twee-dimensionale getijberekening (hoofdstuk II t/m VI) is ook een fundamentele studie verricht naar het gedrag gedurende een getijperiode van de termen van de bewegingsvergelijkingen in x- en y-richting en de continuïteitsvergelijking die de waterbeweging beschrijven (hoofdstuk VII).

Dit is gedaan door die termen te beschrijven met een centrale differentiebenadering. Normaal is een dergelijke analyse niet uitvoerbaar door de grote hoeveelheid benodigde gegevens, maar in dit geval kunnen alle gegevens over de optredende stroomsnelheden en waterstanden betrokken worden uit de getijberekening.

Door het verloop in de tijd van de in differentievorm geschreven termen te tekenen en de grootte van de termen te vergelijken wordt inzicht verkregen in het belang van elke term voor de beschrijving van de waterbeweging.



## Hoofdstuk II Hydro-dynamische grondslagen

### II.1. Basisvergelijkingen.

De bewegingsvergelijkingen

Voor een drie-dimensionale niet-viskeuze vloeistofstroming luiden de bewegingsvergelijkingen volgens Euler als volgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z \quad (3)$$

hierin zijn  $u$ ,  $v$  en  $w$  de snelheden in respectievelijk de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -richting,  $p$  is de druk,  $\rho$  de dichtheid en  $X$ ,  $Y$  en  $Z$  zijn de componenten van de externe krachten per eenheid van massa. Deze externe krachten zijn: de zwaartekracht, de getijverwekkende krachten en de krachten die ontstaan door de Coriolisversnelling. De vloeistofstroming mag als niet-viskeus worden beschouwd omdat het getal van Reynolds ( $Re = \frac{v h}{\nu}$ ) vele malen groter is dan 600, dus de stroming is turbulent. De viskeuze krachten zijn te verwaarlozen ten opzichte van de andere krachten

De continuïteitsvergelijking

De continuïteitsvergelijking voor onsamendrukbare vloeistof luidt :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

## II.2. De vergelijkingen voor lange golven.

Bij lange golven mogen de verticale versnellingen  $\frac{\partial w}{\partial z}$  verwaarloosd worden ten opzichte van de versnelling van de zwaartekracht. Ook de verticale snelheden  $w$  zijn klein ten opzichte van de horizontale snelheden  $x$  en  $y$ . Hierdoor zullen in bovengenoemde vergelijkingen de termen waarin de verticale snelheid  $w$  voorkomt wegvallen.

Als de oorsprong van het Cartesische coördinatenstelsel op het stil water niveau genomen wordt, met de X- en Y- as in het horizontale vlak en de Z- as vertikaal omhoog,

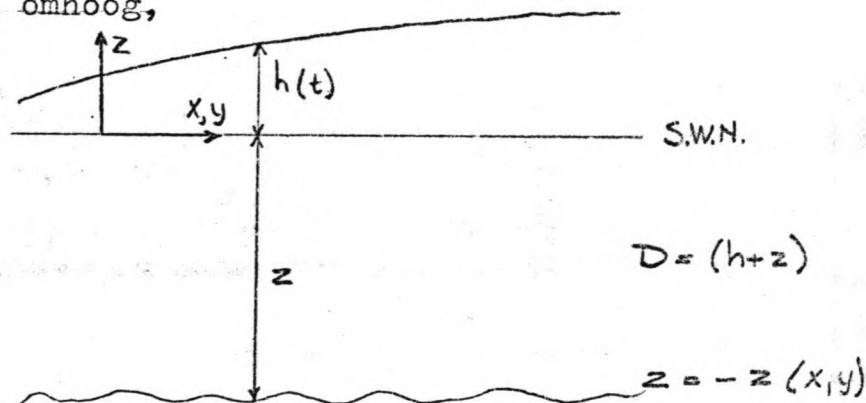


fig II 2.1.

dan worden de gemiddelde snelheden over de vertikaal in x- en y- richting respectievelijk:

$$U = \frac{1}{(z+h)} \int_{-z}^h u \, dz \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{(z+h)} \int_{-z}^h v \, dz \quad (6)$$

De verdeling van de snelheidscomponenten  $u$  en  $v$  over de vertikaal op een bepaalde plaats kan gegeven worden als een functie van de gemiddelde snelheid door zogenaamde verdelingscoëfficiënten in te voeren.



Dit gebeurt als volgt:

$$u(z) = U[1 + a(z)] \quad (7)$$

$$v(z) = V[1 + b(z)] \quad (8)$$

$u(z)$  en  $v(z)$  is het verloop van de snelheden over de vertikaal in respectievelijk de x- en y- richting.

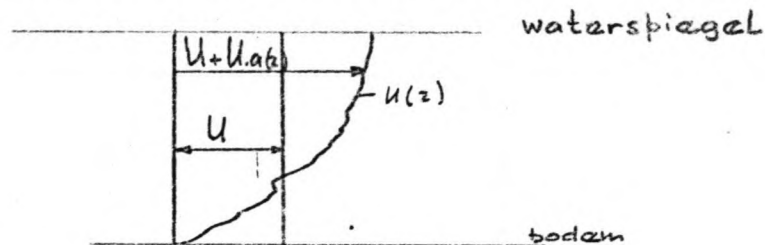


fig. 2.2

Voor de verdelingscoëfficiënten  $a(z)$  en  $b(z)$  gelden de volgende betrekkingen:

$$\int_{-z}^h a(z) dz = 0 \quad \text{en} \quad \int_{-z}^h b(z) dz = 0 \quad (9)$$

(10)

De horizontale uitwendige krachten  $X$  en  $Y$  kunnen gesplitst worden in de krachten ten gevolge van de rotatie van de aarde en de getijverwekkende krachten:

$$X = \Omega V + K_x \quad (11)$$

$$Y = \Omega U + K_y \quad (12)$$

waarin  $\Omega$  is de Corioliscoëfficiënt en  $K_x$  en  $K_y$  zijn de getijverwekkende krachten in x- en y- richting.

De Corioliscoëfficiënt  $\Omega$  is afhankelijk van de breedtegraad  $\varphi$ , want

$$\Omega = 2\omega \sin \varphi \quad (13)$$

Hierin is  $\omega$  de hoeksnelheid van de aarde. De bewegingsvergelijking in verticale richting wordt na verwaarlozing van de verticale snelheden en versnellingen

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z \quad (14)$$

$Z$  bestaat uit:

- 1) De zwaartekracht.
- 2) De component van de krachten die ontstaan door rotatie van de aarde.
- 3) De getijverwekkende kracht.

Indien de golflengte veel groter is dan de waterdiepte mogen de krachten 2) en 3) verwaarloosd worden ten opzichte van 1).

Er wordt vanuit gegaan dat de dichtheid uniform is en dat de drukverdeling hydrostatisch is en de druk dus een lineaire funktie met de diepte, dus

$$p(z) = \rho g (h-z) + p_0 \quad (15)$$

Hierin is  $p_0$  de atmosferische druk en  $\rho$  de dichtheid van het water. De afgeleiden van de druk in x- en y-richting worden nu een funktie van het waterniveau en de atmosferische druk  $p_0$ .

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (17)$$

$\frac{\partial p_0}{\partial x}$  en  $\frac{\partial p_0}{\partial y}$  worden verder nul gesteld.

Integratie van vergelijkingen (1) en (2) over de hoogte  $z=-z(x,y)$  tot  $z=h(x,y)$  geeft na invoering van vergelijking (5) tot en met (12), (16) en (17) en deling door  $(h+z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v + g \frac{\partial h}{\partial x} = A(x) \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega u + g \frac{\partial h}{\partial y} = A(y) \quad (19)$$

De termen  $A(x)$  en  $A(y)$ , waarin het effect van de getij-verwekkende krachten, worden verwaarloosd.

De bodemschuifspanning  $\tau_b$  blijkt het gedrag van de lange golven aanzienlijk te beïnvloeden.

$$\tau_b = \frac{\rho g}{C^2} v |v| \quad (20)$$

waarin  $C$  is de Chézy-coëfficiënt.

Invoering van deze bodemschuifspanning in het tweedimensionale stelsel geeft met de weerstandscoeffi-

ciënt  $f=f(x,y)=\frac{g}{c^2}$  en met  $D=(h+z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v + g \frac{\partial h}{\partial x} + f \frac{u(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}{D} = F(x) \quad (21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega u + g \frac{\partial h}{\partial y} + f \frac{v(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}{D} = F(y) \quad (22)$$

$F(x)$  en  $F(y)$  zijn hier funkties van de krachten door wind in respectievelijk x- en y- richting, deze worden in de berekening nul gesteld.

Op dezelfde wijze kan de continuïteitsvergelijking geïntegreerd worden over de vertikaal.

De voorwaarde aan het vrije oppervlak luidt:

$$W(h) = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \quad (23)$$

Er treden geen waterdeeltjes uit het vloeistofoppervlak.

De voorwaarde aan de bodem luidt:

$$W(-z) + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

de snelheid loodrecht op de bodem is nul.

Hiermee geeft integratie van de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Du)}{\partial x} + \frac{\partial(Dv)}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

of

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (h-z) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial(h-z)}{\partial x} + (h-z) \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial(h-z)}{\partial y} \quad (25)$$

### Hoofdstuk III Berekeningsmethode

#### III.1. Differentiemethoden.

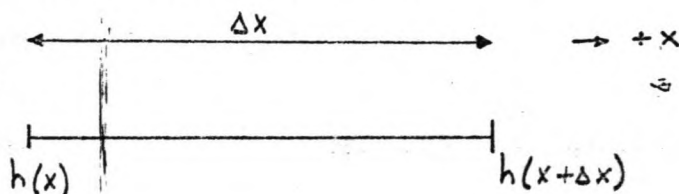
In de benodigde vergelijkingen, die hierboven afgeleid zijn, komen partiële afgeleiden voor zoals bijvoorbeeld  $\frac{\partial h}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  enz. Deze differentiaalquotiënten kunnen benaderd worden met differentiequotiënten. Hierdoor wordt echter een fout geïntroduceerd. De grootte van deze fout is afhankelijk van de benaderingen. Er is onderscheid tussen de voorwaartse, de achterwaartse en de centrale differentiebenadering.

Door gebruik te maken van de centrale differentiebenadering kan de afbreekfout bij de ontwikkeling in de reeks van Taylor een orde kleiner gehouden worden dan bij de andere benaderingen.

Bij de voorwaartse differentiebenadering van bijvoorbeeld de afgeleide van  $h$  naar  $x$  wordt gesteld dat:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \quad \text{op een tijdstip } t$$

in schema kan dit voorgesteld worden door:

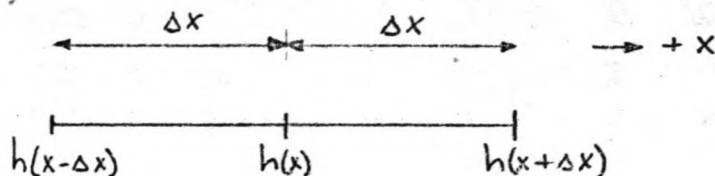


De achterwaartse differentiebenadering kan op analoge wijze verkregen worden als voor  $x+\Delta x$ ,  $x$  wordt ingevuld en voor  $x$ ,  $x-\Delta x$  wordt ingevuld.

Bij de centrale differentiebenadering van  $\frac{\partial h}{\partial x}$  wordt dit differentiaalquotiënt vervangen door:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{h(x+\Delta x) - h(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad \text{op een tijdstip } t$$

of in schema:



### III.2. Expliciete en impliciete methode.

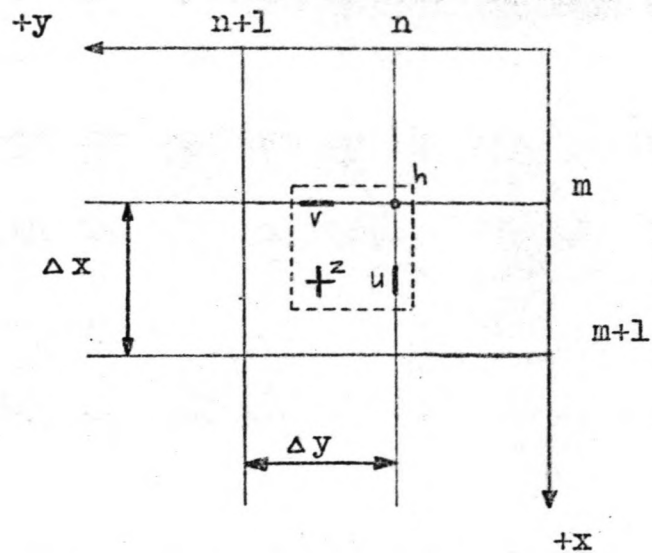
Met behulp van deze differentiebenaderingen is het nu mogelijk om uitgaande van bekende waarden van  $h$ ,  $u$  en  $v$  op verschillende tijdstippen, nieuwe waarden voor resp.  $h$ ,  $u$  en  $v$  te berekenen. Wanneer men nu uit één vergelijking, één nog onbekende waarde van  $h$ ,  $u$  of  $v$  kan berekenen uit overige bekende waarden van  $h$ ,  $u$  en  $v$ , dan heet genoemde methode, expliciete methode. Worden in één vergelijking meerdere onbekenden genoemd, dan zijn meerdere vergelijkingen nodig om deze nog onbekende waarden voor de grootheden te bepalen. In dit geval spreekt men van een impliciete methode.

### III.3. Impliciete methode in afwisselende richting.

De berekening wordt uitgevoerd door gebruik te maken van een impliciete methode in afwisselende richting, of, in het Engels: "alternating direction implicit method". Hierbij worden om beurten nieuwe waarden van  $h$  en  $u$  en van  $h$  en  $v$  bepaald door impliciete berekening in  $x$ - resp.  $y$ - richting.

Bij de discretisatie wordt een in de ruimte en in de tijd versprongen schema gehanteerd:





waarin • een punt is waar  $h$  berekend wordt, — een punt waar  $v$  berekend wordt, | een punt waar  $u$  berekend wordt en in het + punt wordt de diepte van het  $\Delta x$ - $\Delta y$  vlakje bepaald.

Er geldt nu:

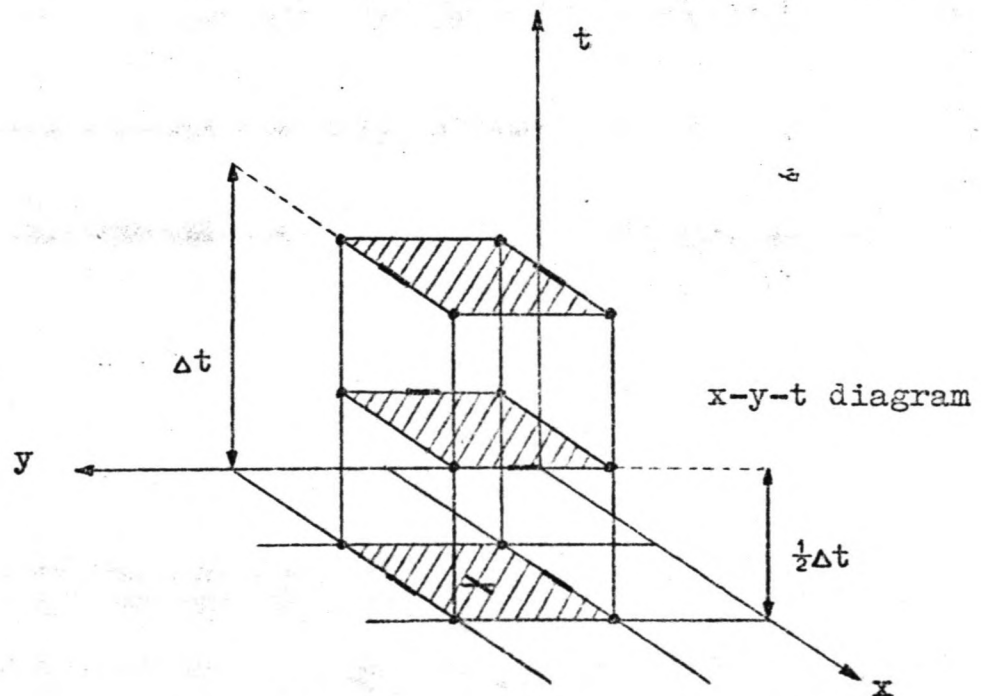
$$h(m, n) = h(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y)$$

$$u(m, n) = u((m + \frac{1}{2}) \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y)$$

$$v(m, n) = v(m \cdot \Delta x, (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta y)$$

$$z(m, n) = z((m + \frac{1}{2}) \cdot \Delta x, (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta y)$$

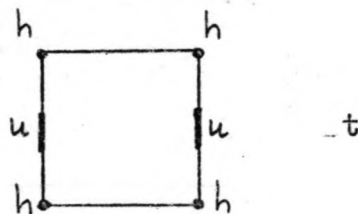
of, als we ook de tijd in beschouwing nemen:



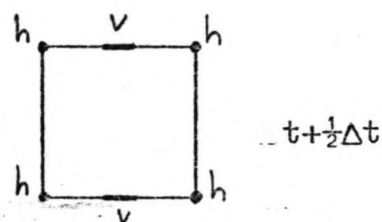
In de tijd gezien worden stap voor stap nieuwe waarden van  $h$  en  $u$  en van  $h$  en  $v$  berekend door impliciete berekening in  $x$ - respectievelijk  $y$ - richting.

Voor een willekeurig punt  $m, n$ :

Op tijdstip  $t$ :  $h$  en  $u$



Op tijdstip  $t + \frac{1}{2}\Delta t$ :  $h$  en  $v$



De discretisatie van elk van de termen van de bewegingsvergelijking in  $x$ - richting is als volgt:  
(waarden met ' stellen nieuwe waarden voor, zonder ' oude waarden)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{H'(m+1, n) - H'(m, n)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U'(m, n) - U(m, n)}{\Delta t}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = U(m, n) \left\{ \frac{U(m+1, n) - U(m-1, n)}{2 \Delta x} \right\}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = A \left\{ \frac{U(m, n+1) - U(m, n-1)}{2 \Delta y} \right\}$$

Hierin is  $D = (h - z(x, y))$

$$H'(m, n) = h(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y, t + \frac{1}{2} \Delta t)$$

$$H(m, n) = h(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y, t)$$

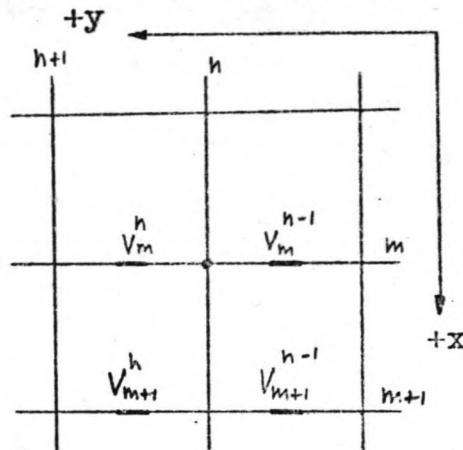
$$U'(m, n) = U\left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \Delta x, n \Delta y, t + \frac{1}{2} \Delta t\right]$$



$$U(m, n) = U\left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \Delta x, n \Delta y, t - \frac{1}{2} \Delta t\right]$$

$$V(m, n) = V\left[m \Delta x, \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta y, t\right]$$

A stelt voor een gemiddelde snelheid in y-richting van de vier in het onderstaande schema aangegeven punten.



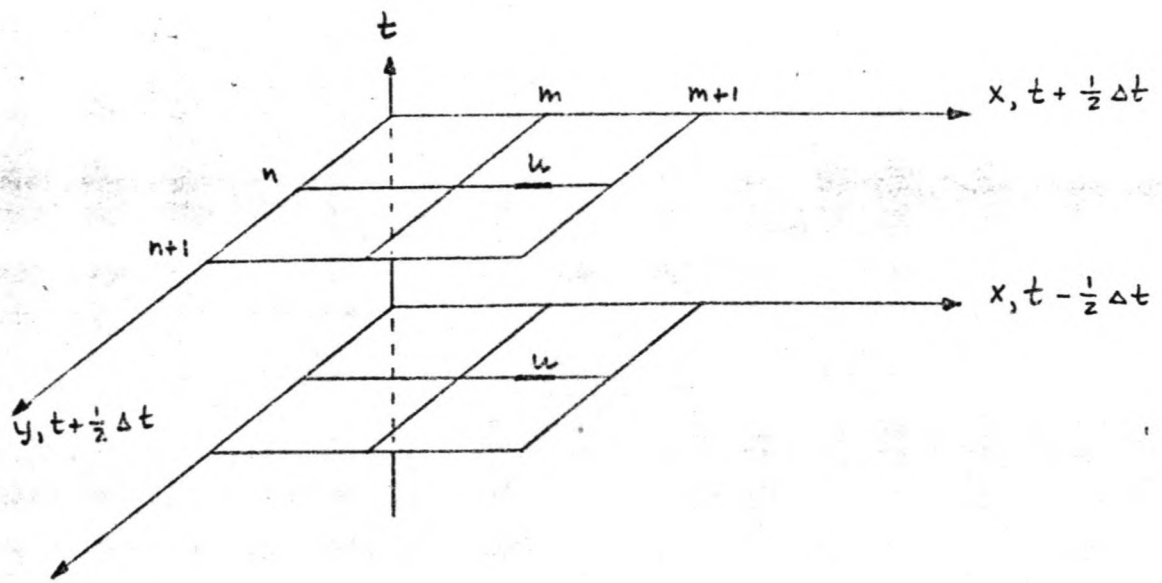
zodat A voorgesteld kan worden als

$$A = \frac{1}{4} \left\{ V(m, n) + V(m, n-1) + V(m+1, n) + V(m+1, n-1) \right\}$$

Hiermee kan de gehele bewegingsvergelijking in x-richting als differentievergelijking geschreven worden.

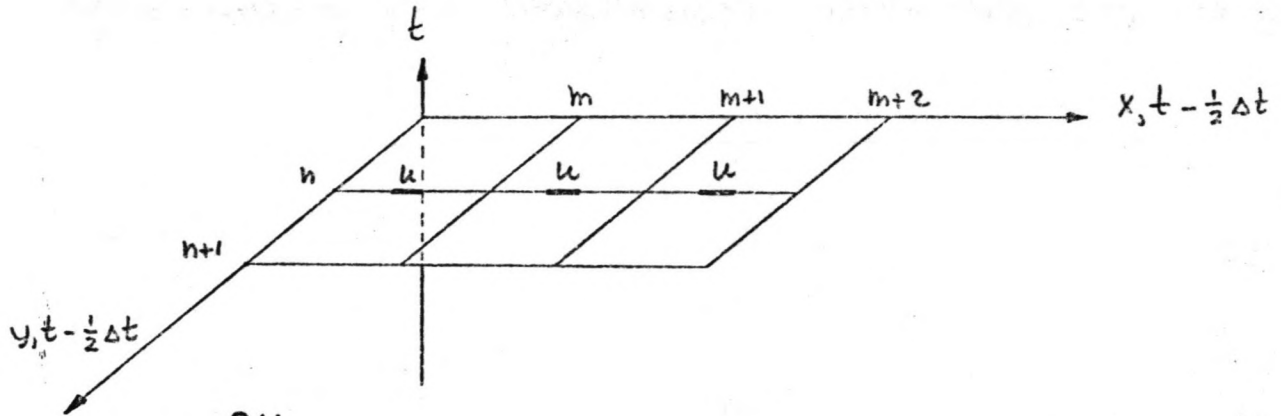
De termen 1 t/m 6 uit vergelijking 21 worden hier afzonderlijk uitgeschreven en met een schema verduidelijkt.

1.  $\frac{\partial U}{\partial t}$  wordt: 
$$\frac{U_{m+\frac{1}{2}}^n(t+\frac{1}{2}\Delta t) - U_{m+\frac{1}{2}}^n(t-\frac{1}{2}\Delta t)}{\Delta t}$$



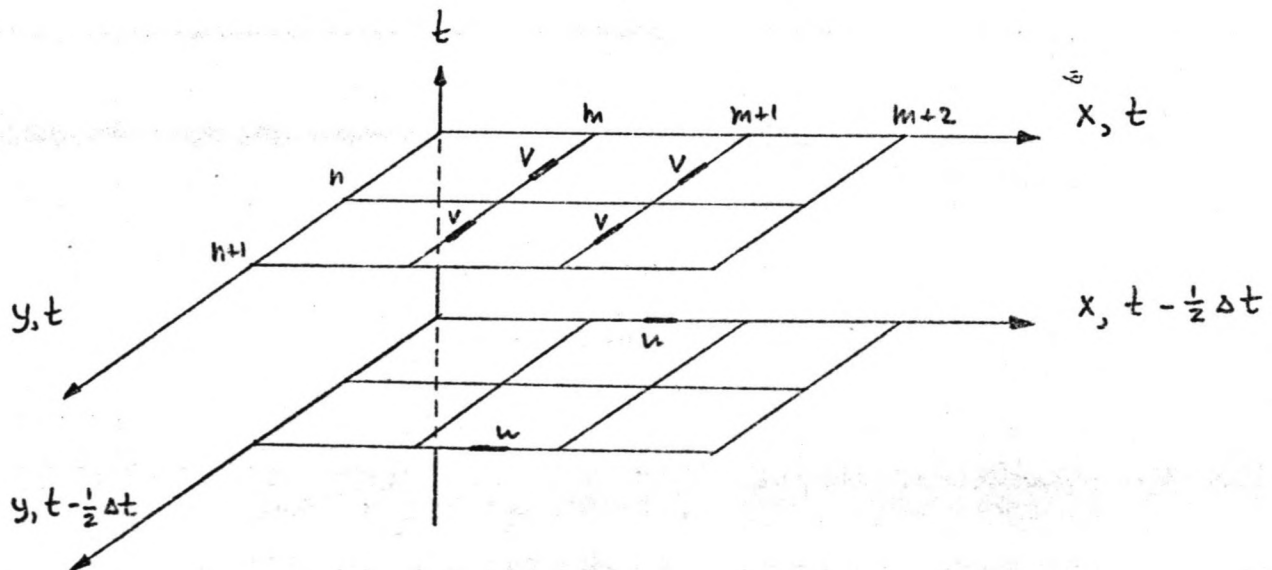
2.  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  wordt:

$$u_{m+\frac{1}{2}}^n \frac{(u_{m+\frac{3}{2}}^n - u_{m-\frac{1}{2}}^n)}{2 \Delta x}$$



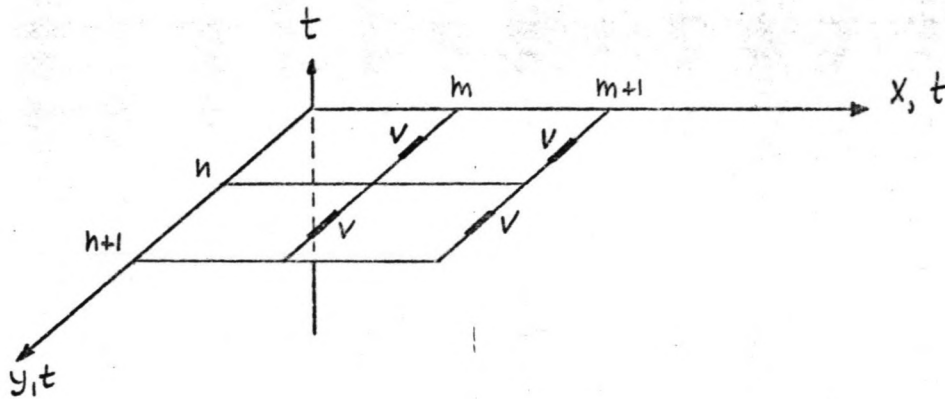
3.  $v \frac{\partial u}{\partial y}$  wordt:

$$\frac{v_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v_{m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + v_{m+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v_{m+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{4} * \frac{u_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{m+\frac{1}{2}}^{n-1}}{2 \Delta y}$$



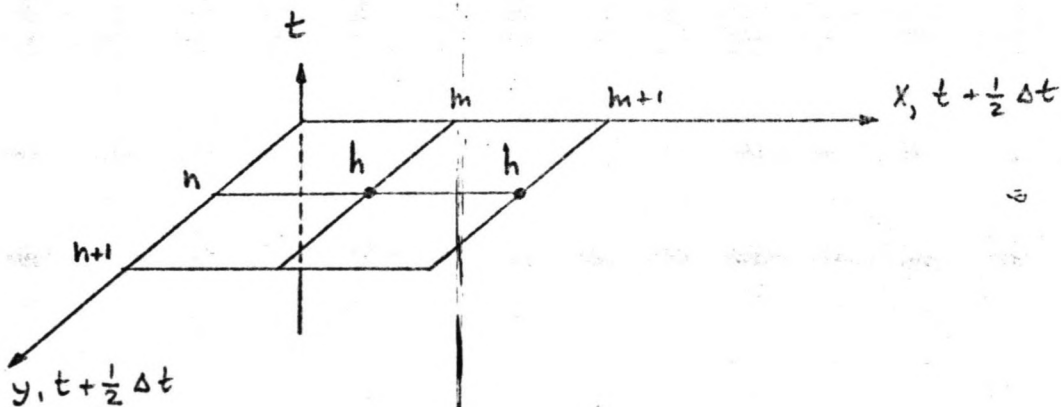
4.  $\Omega V$  wordt:

$$\Omega * \left( \frac{V_m^{n+\frac{1}{2}} + V_m^{n-\frac{1}{2}} + V_{m+1}^{n+\frac{1}{2}} + V_{m+1}^{n-\frac{1}{2}}}{4} \right)$$



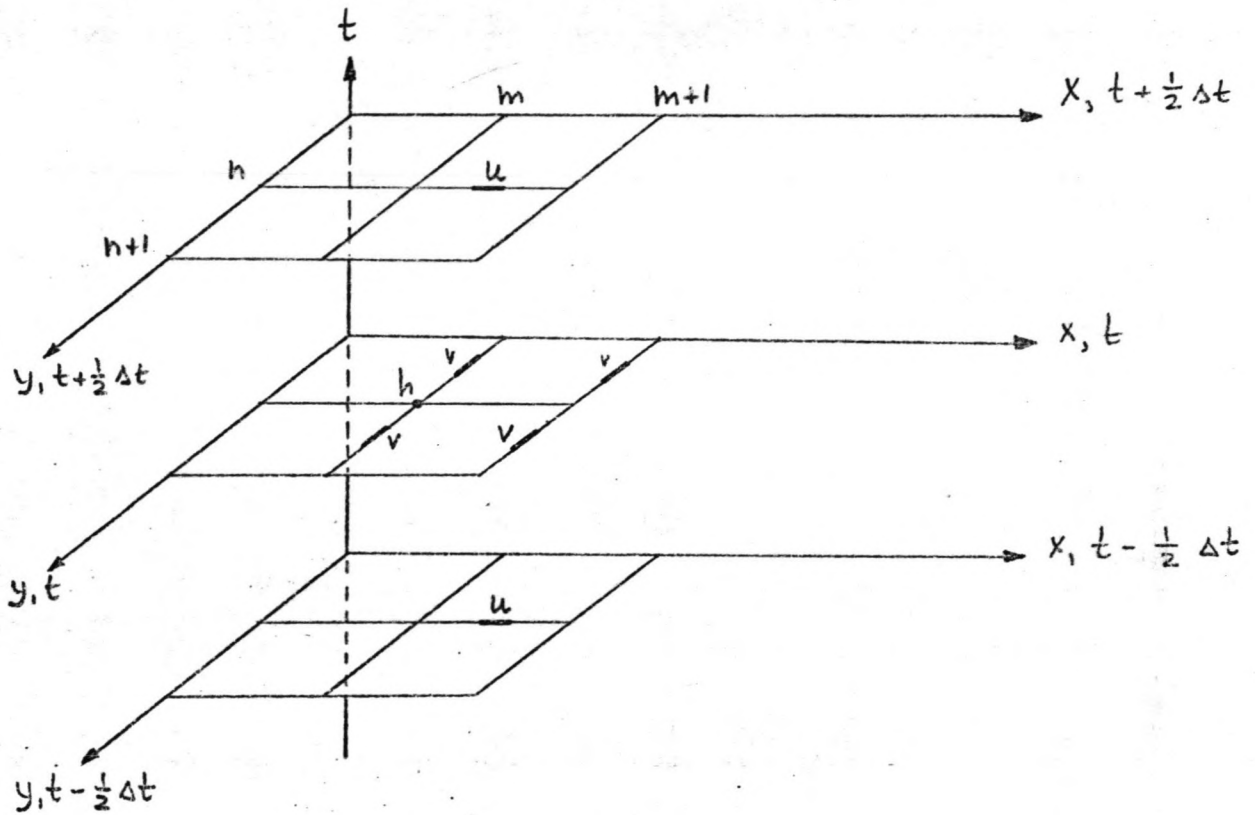
5.  $g \frac{\partial h}{\partial x}$  wordt:

$$g * \frac{h_{m+1}^{t+\frac{1}{2}} - h_m^{t+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$



6.  $f \frac{U(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}{D}$  wordt:

$$f * \frac{U_{m+\frac{1}{2}}^h \left\{ U_{m+\frac{1}{2}}^{2h} + \left( \frac{V_m^{h+\frac{1}{2}} + V_m^{h-\frac{1}{2}} + V_{m+1}^{h+\frac{1}{2}} + V_{m+1}^{h-\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{h_m^h - z_{m+\frac{1}{2}}^{h+\frac{1}{2}}}$$

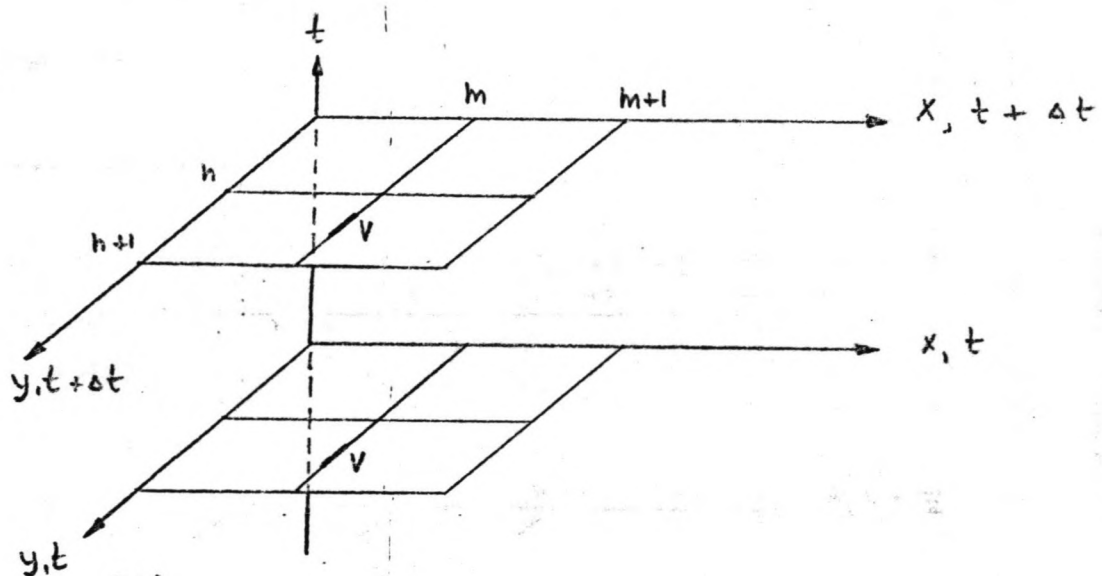


De bewegingsvergelijking in y- richting.

De termen 1 t/m 6 uit vergelijking 22 worden afzonderlijk uitgeschreven.

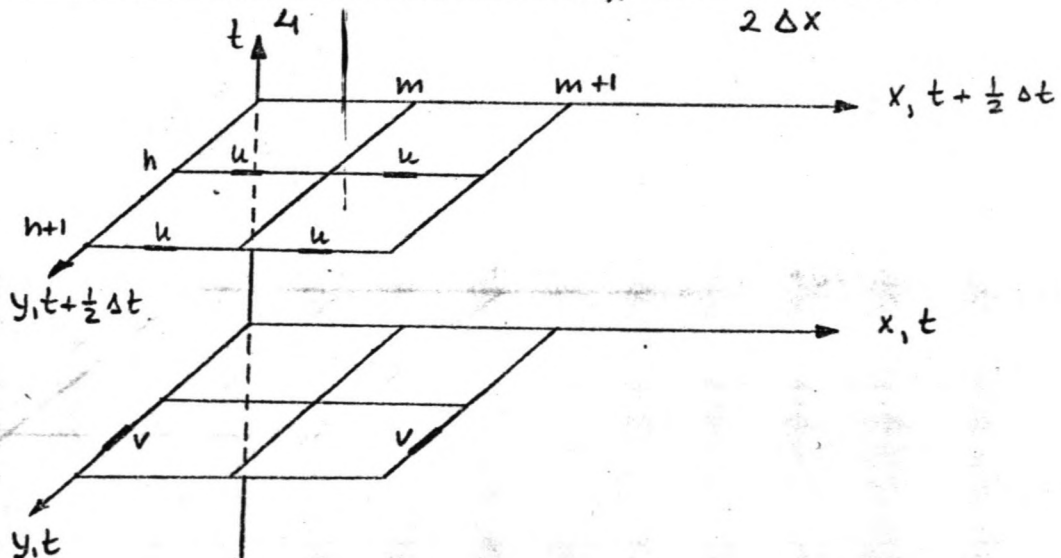
1.  $\frac{\partial V}{\partial t}$  wordt:

$$\frac{V_{m, t+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - V_{m, t}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$



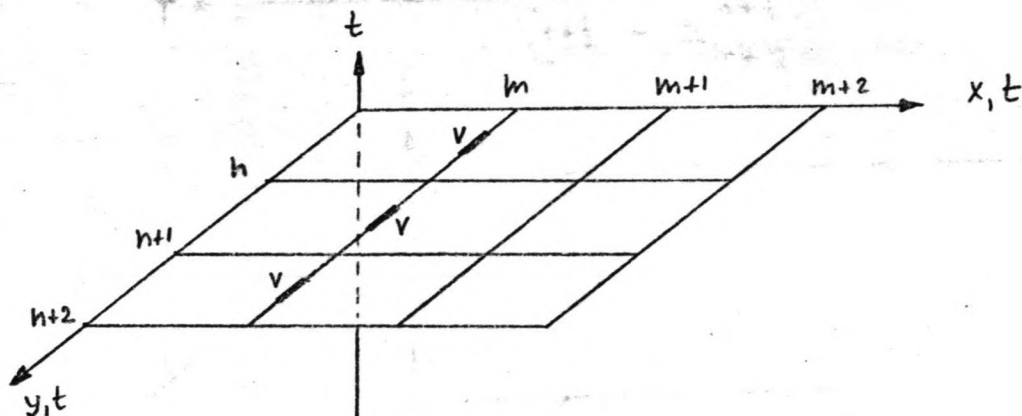
2.  $u \frac{\partial V}{\partial x}$  wordt:

$$\frac{U_{m+\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}}^n + U_{m-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}}^n + U_{m+\frac{1}{2}, t}^{n+1} + U_{m-\frac{1}{2}, t}^{n+1}}{4} * \frac{V_{m+1, t}^{n+\frac{1}{2}} - V_{m-1, t}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \Delta x}$$



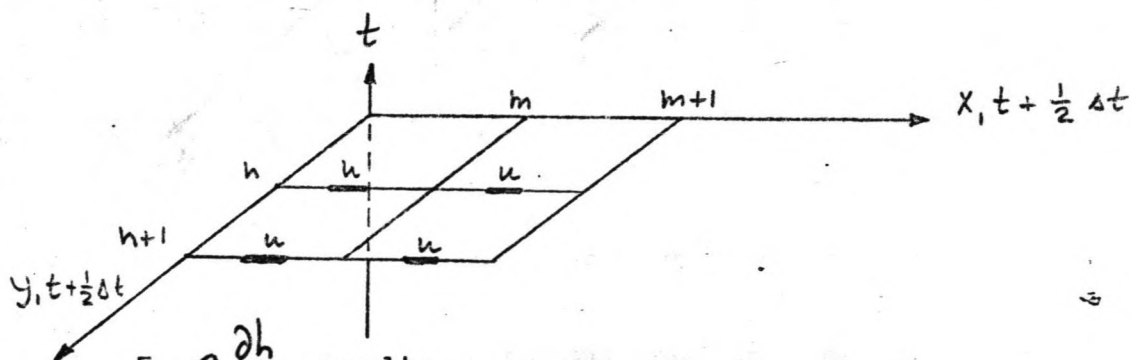
3.  $V \frac{\partial V}{\partial y}$  wordt:

$$V_{m, t}^{n+\frac{1}{2}} * \frac{V_{m, t}^{n+\frac{3}{2}} - V_{m, t}^{n-\frac{1}{2}}}{2 \Delta y}$$



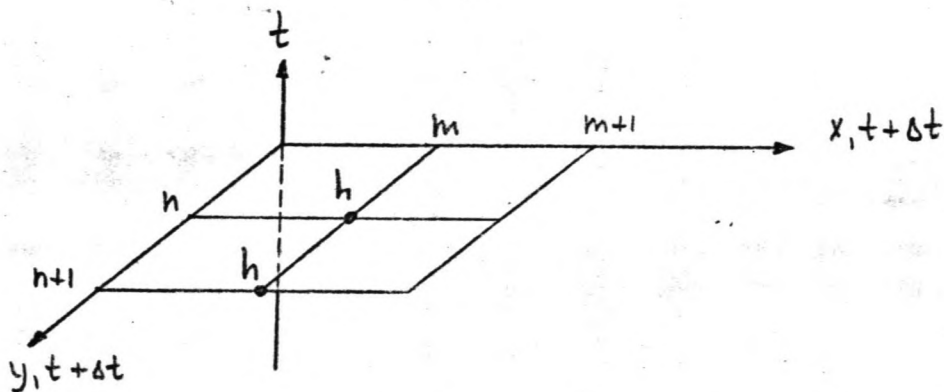
4.  $\Omega U$  wordt:

$$\Omega * \frac{U_{m+\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}\Delta t}^n + U_{m-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}\Delta t}^n + U_{m+\frac{1}{2}, t-\frac{1}{2}\Delta t}^{n+1} + U_{m-\frac{1}{2}, t-\frac{1}{2}\Delta t}^{n+1}}{4}$$



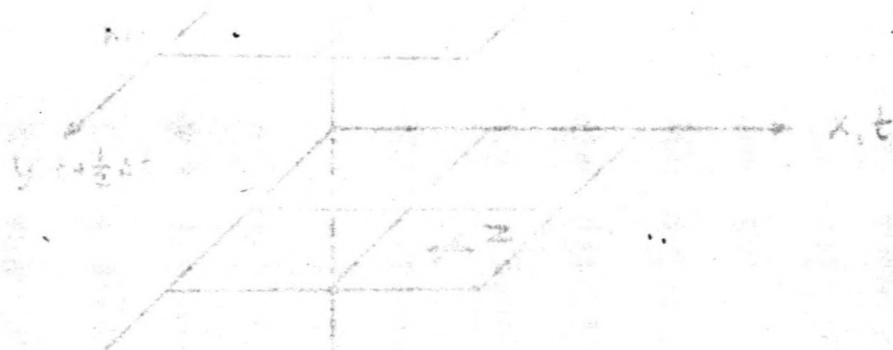
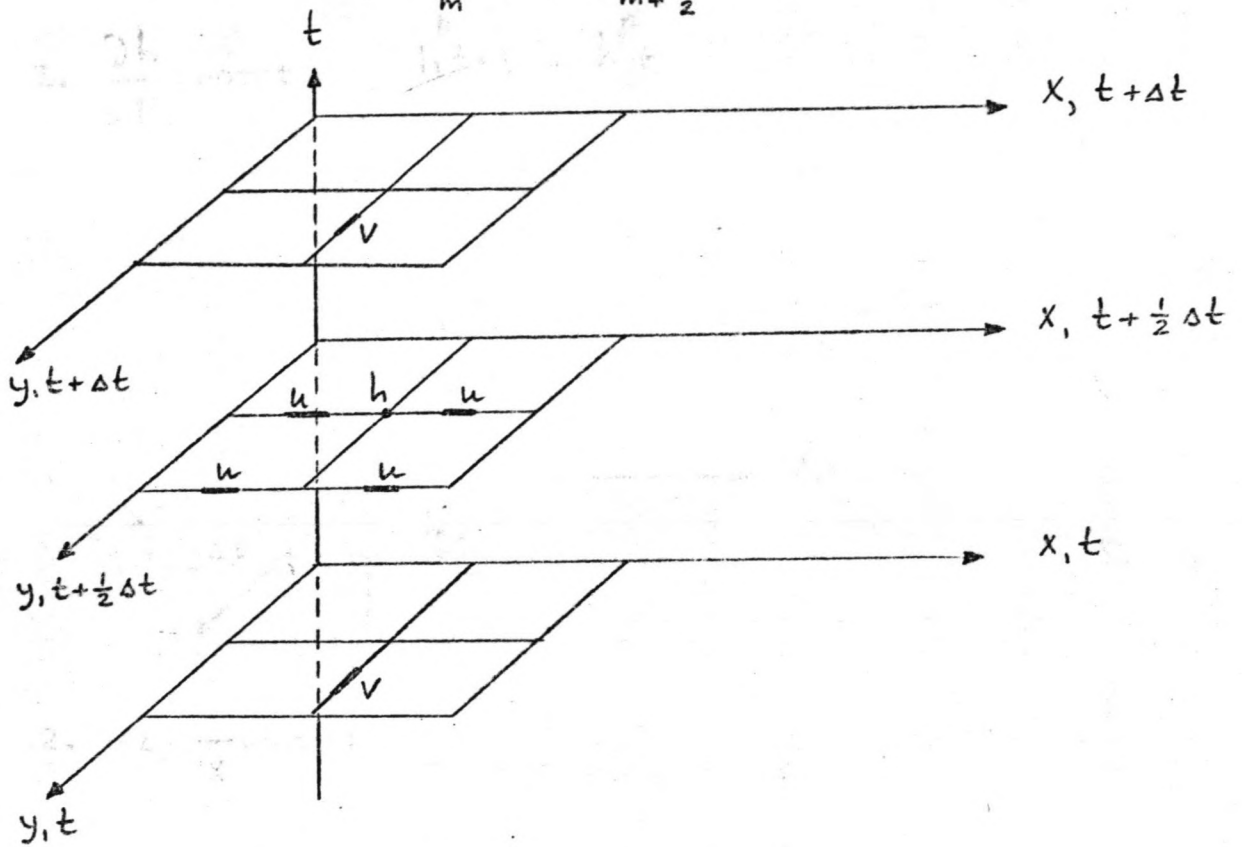
5.  $g \frac{\partial h}{\partial x}$  wordt:

$$g * \frac{h_{m, t+\Delta t}^{n+1} - h_{m, t+\Delta t}^n}{\Delta y}$$



6. f  $\frac{v(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{D}$  wordt:

$$f * \frac{V_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} * \left\{ V_m^{n+\frac{1}{2}} + \left( \frac{U_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + U_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + U_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} + U_{m-\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{h_m^{n+\frac{1}{2}} - z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}$$

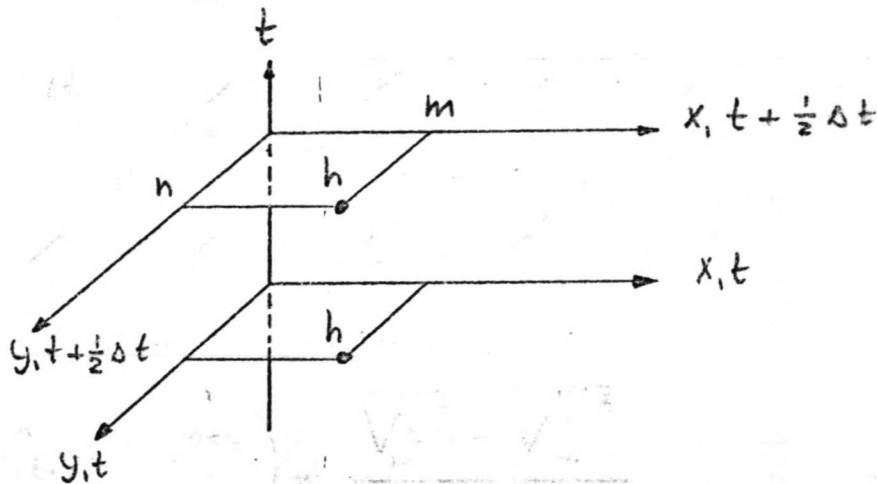




De continuïteitsvergelijking voor de x- richting.

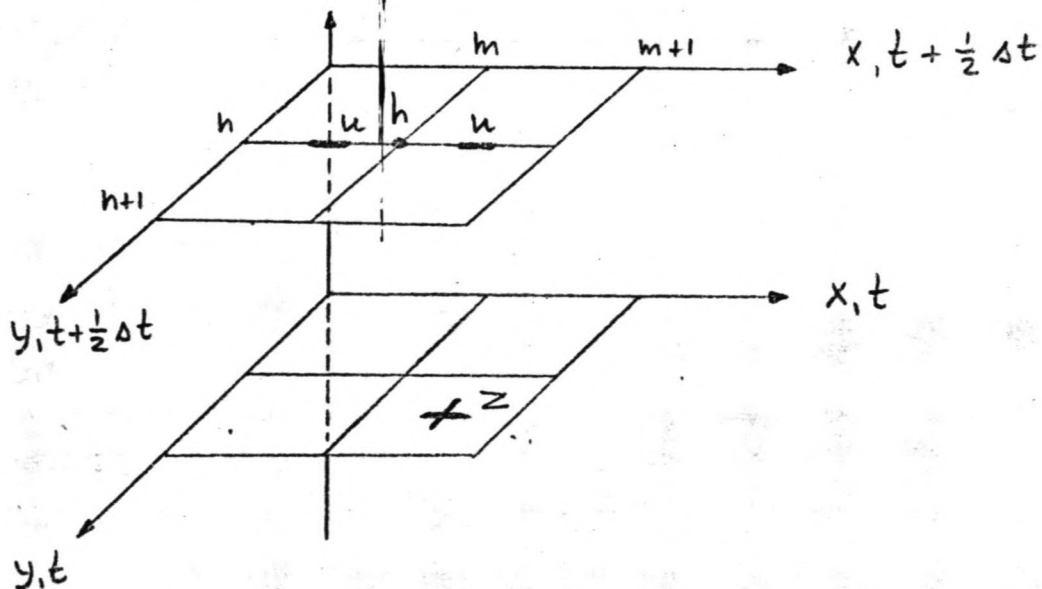
De termen 1 t/m 5 in verg. 25 worden afzonderlijk uitgeschreven.

1.  $\frac{\partial h}{\partial t}$  wordt: 
$$\frac{h_m^{t+\frac{1}{2}} - h_m^t}{\frac{1}{2} \Delta t}$$



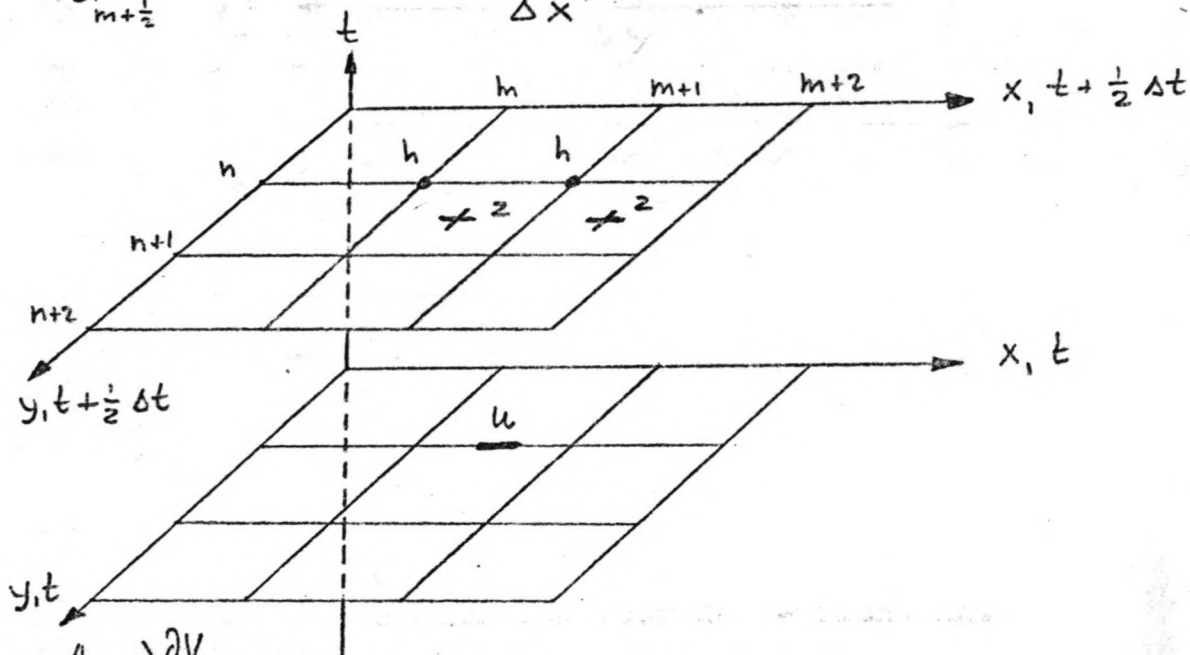
2.  $(h-z) \frac{\partial u}{\partial x}$  wordt:

$$\left( h_m^{t+\frac{1}{2}} - z_{m+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \right) \times \frac{u_{m+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$



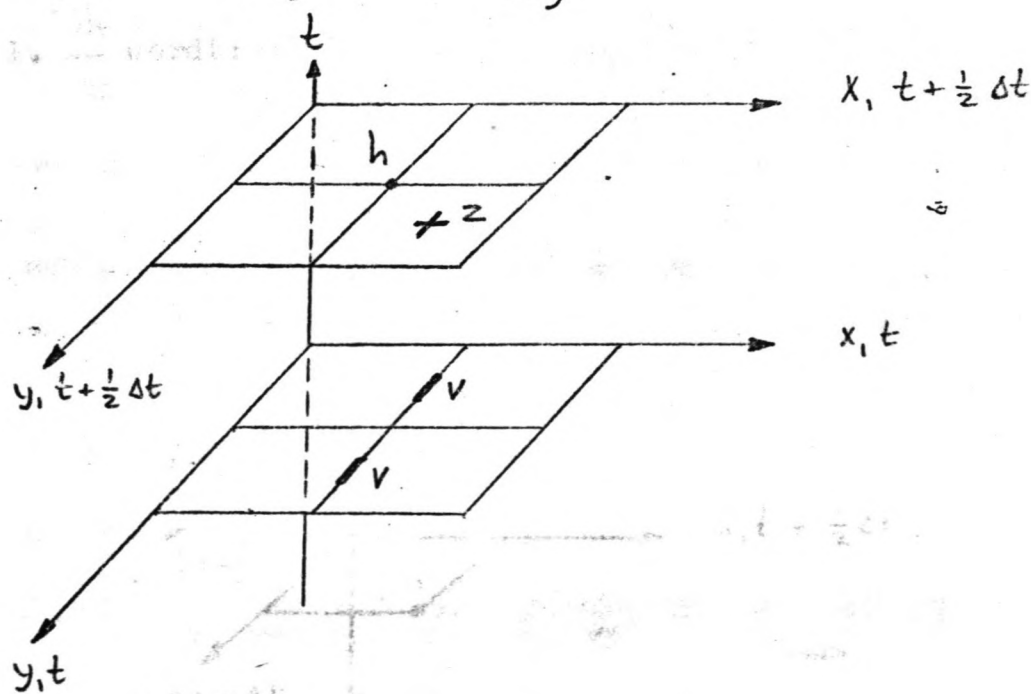
3.  $U \frac{\partial(h-z)}{\partial x}$  wordt:

$$U_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} * \frac{h_{m+1}^{n+\frac{1}{2}} - z_{m+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - h_m^{n+\frac{1}{2}} + z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$



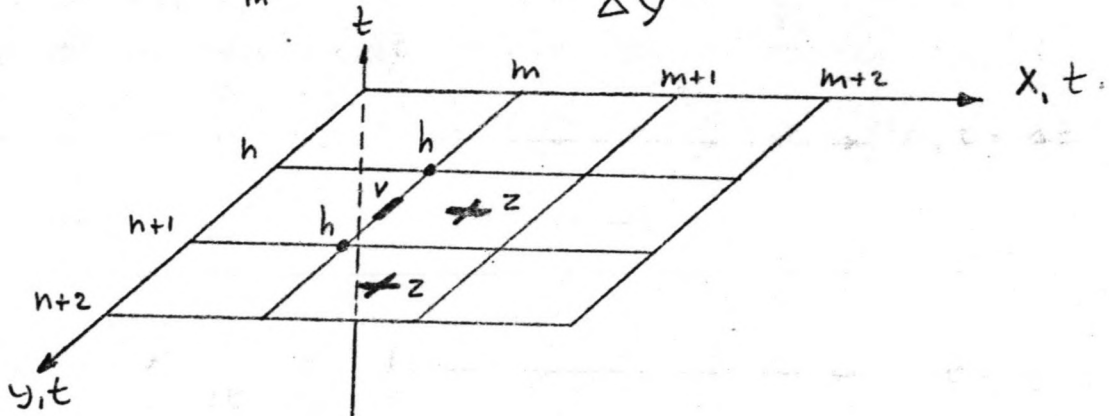
4.  $(h-z) \frac{\partial V}{\partial y}$  wordt:

$$\left( h_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) * \frac{V_m^{n+\frac{1}{2}} - V_m^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$



5.  $V \frac{\partial(h-z)}{\partial y}$  wordt:

$$V_m^{n+\frac{1}{2}} * \frac{h_m^{n+1} - z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - h_m^n + z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

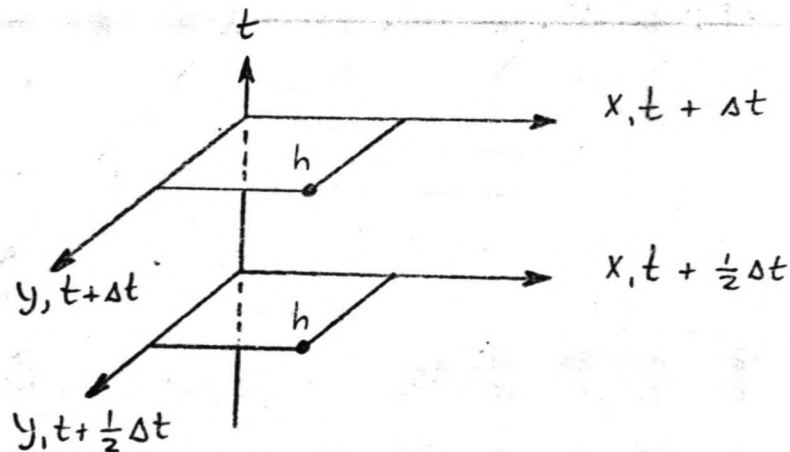


De continuïteitsvergelijking voor de  $y$ -richting.

De termen 1 t/m 5 in verg. 25 worden afzonderlijk uitgeschreven.

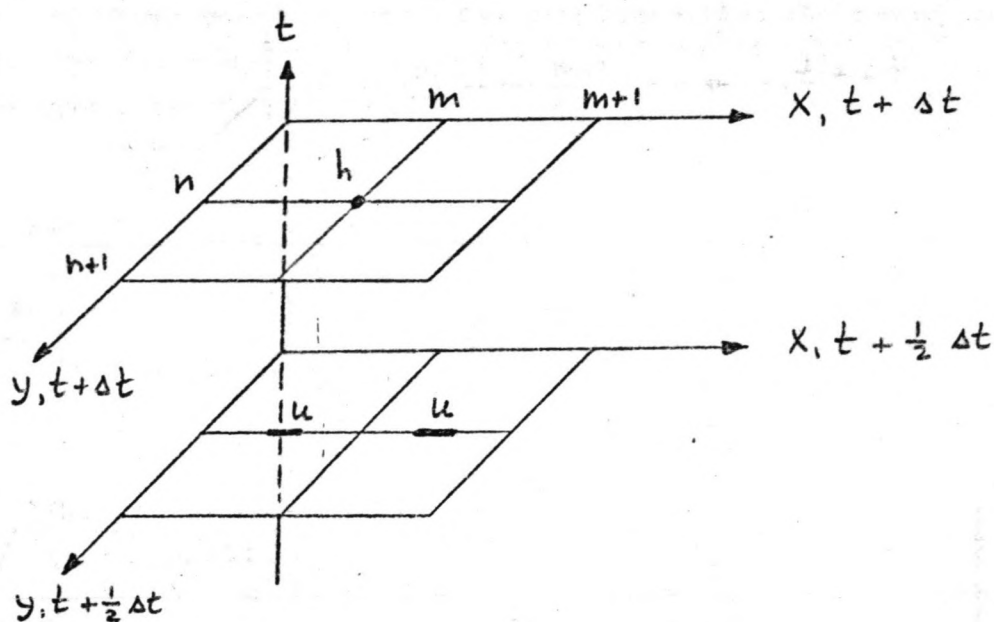
1.  $\frac{\partial h}{\partial t}$  wordt:

$$\frac{h_m^{n+1} - h_m^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \Delta t}$$



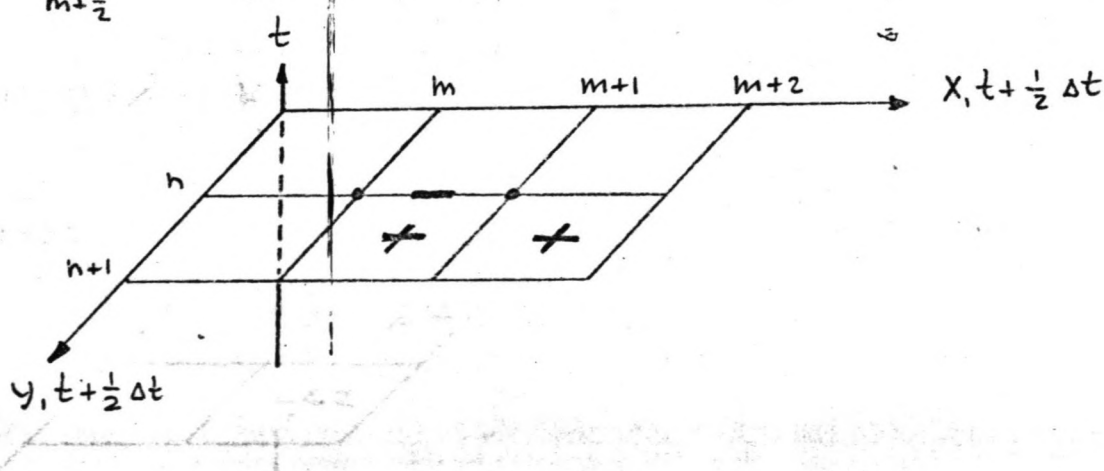
2.  $(h-z) \frac{\partial u}{\partial x}$  wordt:

$$\left( h_m^n - z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) * \frac{U_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - U_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$



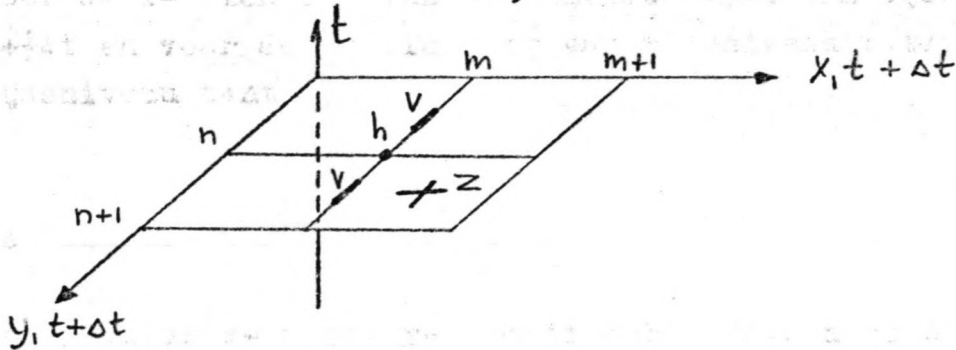
3.  $U \frac{\partial(h-z)}{\partial x}$  wordt:

$$U_{m+\frac{1}{2}}^n * \frac{h_{m+1}^{n+\frac{1}{2}} - z_{m+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - h_m^{n+\frac{1}{2}} + z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$



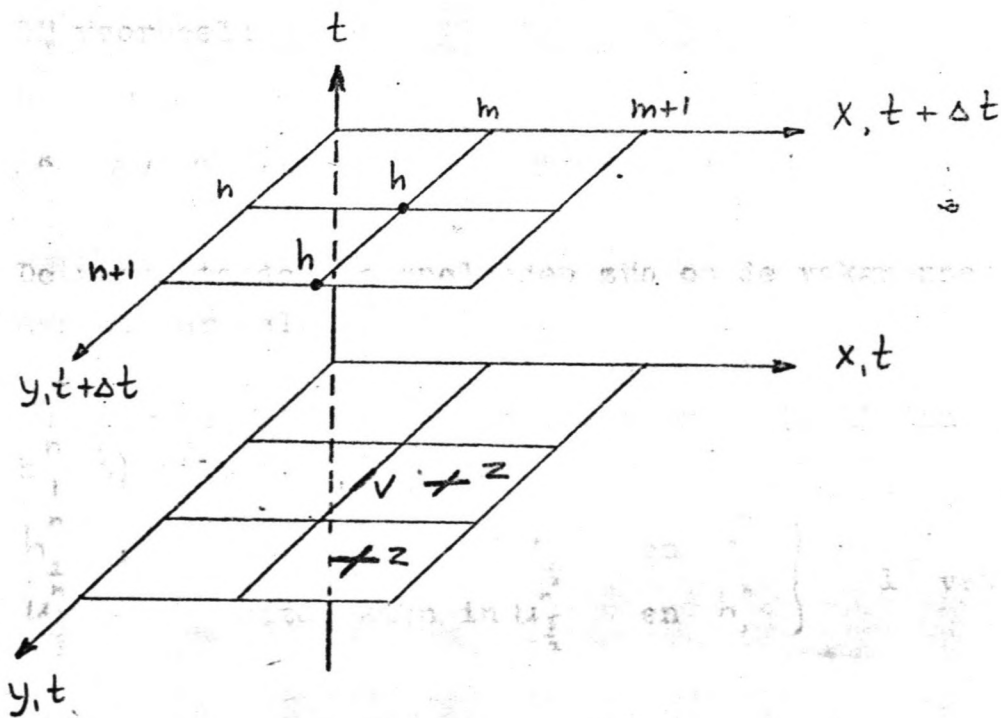
4.  $(h-z) \frac{\partial v}{\partial y}$  wordt:

$$\left( h_m^{t+1} - z_{m+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \right) * \frac{V_m^{n+\frac{1}{2}, t+1} - V_m^{n-\frac{1}{2}, t+1}}{\Delta y}$$



5.  $V \frac{\partial(h-z)}{\partial y}$  wordt:

$$V_m^{n+\frac{1}{2}, t} * \frac{h_m^{t+1} - z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}, t} - h_m^{t+1} + z_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}, t}}{\Delta y}$$



Met deze schema's voor de afzonderlijke termen kunnen we nu de rekenmoleculen weergeven voor een berekeningsstapje in x- richting (bijlage III 1) en voor een berekeningsstapje in y- richting (bijlage III 1). Voor de x- richting van tijdsniveau  $t - \frac{1}{2}\Delta t$  t/m tijdsniveau  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  en voor de y- richting van tijdsniveau t t/m tijdsniveau  $t + \Delta t$

De 'double sweep' methode.

Per stap in x- resp. y- richting beschikken we over twee vergelijkingen, n.l. de bewegingsvergelijking en de continuïteitsvergelijking.

Wanneer verder alleen de x- richting ( $n = \text{constant}$ ) beschouwd wordt dan zijn er per stap vier grootheden die berekend moeten worden, n.l.  $h_m^n$ ;  $h_{m+1}^n$ ;  $u_{m-\frac{1}{2}}^n$ ;  $u_{m+\frac{1}{2}}^n$  op  $t = t + \frac{1}{2}\Delta t$ .

Door eliminatie en substitutie kunnen we twee grootheden uitdrukken in de overige grootheden.

Bij voorbeeld

$$\begin{array}{ll} h_{m+1}^n \quad t + \frac{1}{2} & \text{uitdrukken in } u_{m+\frac{1}{2}}^n \quad t + \frac{1}{2} \text{ en } h_m^n \quad t + \frac{1}{2} \\ u_{m+\frac{1}{2}}^n \quad t + \frac{1}{2} & \text{uitdrukken in } u_{m+\frac{3}{2}}^n \quad t + \frac{1}{2} \text{ en } h_m^n \quad t + \frac{1}{2} \end{array}$$

De waterstanden en snelheden zijn op de vakgrenzen aan elkaar gelijk.

Wanneer we met het eerste vak starten ( $m=1$ ) dan is de  $h_1^n(t)$  bekend.

$$\left. \begin{array}{ll} h_2^n & \text{uitdrukken in } u_{\frac{5}{2}}^n \text{ en } h_1^n \\ u_{\frac{3}{2}}^n & \text{uitdrukken in } u_{\frac{5}{2}}^n \text{ en } h_1^n \end{array} \right\} \quad 1^{\text{e}} \text{ vak}$$

$$\left. \begin{array}{l} h_3^n \\ u_{\frac{5}{2}}^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{uitdrukken in } u_{\frac{7}{2}}^n \text{ en } h_2^n \\ \text{uitdrukken in } u_{\frac{7}{2}}^n \text{ en } h_2^n \end{array} \quad 2^e \text{ vak}$$

of:

$$\left. \begin{array}{l} h_3^n \\ u_{\frac{5}{2}}^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{uitdrukken in } u_{\frac{7}{2}}^n, u_{\frac{5}{2}}^n \text{ en } h_1^n \\ \text{uitdrukken in } u_{\frac{7}{2}}^n \text{ en } h_1^n \end{array}$$

dus:

$$\left. \begin{array}{l} h_3^n \\ u_{\frac{5}{2}}^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{uitdrukken in } u_{\frac{7}{2}}^n \text{ en } h_1^n \\ \text{uitdrukken in } u_{\frac{7}{2}}^n \text{ en } h_1^n \end{array} \quad 2^e \text{ vak}$$

Voor het laatste vak geldt  $m+1=M$ , R.V.W. =  $h_M^n(t)$

$$\left. \begin{array}{l} h_M^n \\ u_{M-\frac{1}{2}}^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{uitgedrukt in } u_{M+\frac{1}{2}}^n \text{ en } h_1^n \\ \text{uitgedrukt in } u_{M+\frac{1}{2}}^n \text{ en } h_1^n \end{array}$$

Met behulp van deze vergelijkingen kan men dan  $u_{M-\frac{1}{2}}^n$  en  $u_{M+\frac{1}{2}}^n$  oplossen omdat  $h_M^n$  en  $h_1^n$  bekend zijn.

Met  $u_{M-\frac{1}{2}}^n$  kan men weer de  $u_{M-\frac{3}{2}}^n$  en de  $h_{M-1}^n$  aldus terugwerkend uitrekenen.

Om deze reden heet de hierboven beschreven methode de 'double sweep' methode.

Voor de coëfficiënten van de vergelijkingen zijn recurrente betrekkingen af te leiden met behulp van de bekende grootheden  $u$ ,  $v$  en  $h$  op de tijdsniveau's  $t-\frac{1}{2}\Delta t$  en  $t$ .

Over de modellen kan nu een roosterwerk gemaakt worden met vierkante rooster en een tijdsniveaustap van 1000 m.



## HOOFDSTUK IV

### Opzet van de berekeningen

#### *Programma*

Op de Technische Hogeschool Delft is enige jaren geleden een computer-programma ontwikkeld, TIDES, waarmee twee-dimensionale getijberekeningen gemaakt kunnen worden. Door enkele van mijn voorgangers is dit programma getest en na enige wijzigingen leidt het nu tot bevredigende resultaten.

Het programma is weggeschreven in een achtergrondgeheugen van het Rekencentrum in Delft en staat ter beschikking van de studenten aan de T.H. In de hierbij behorende 'gebruikersgids' worden de nodige gegevens over de in- en uitvoermogelijkheden verstrekt.

In de periode waarin ik mijn getijberekening heb uitgevoerd was juist een 'plot-procedure' ter beschikking gekomen. Voor deze procedure dient de berekening als test. Aan de hand van de opgedane ervaringen kunnen dan nog wijzigingen in de procedure worden aangebracht.

#### *Berekeningen*

De uitgevoerde berekeningen zijn op te splitsen in drie delen.

Het eerste gedeelte, dat ik  $T_0$ -berekening zal noemen, rekent de stroomsnelheden en waterhoogten uit in het betrokken zeegebied. De uitkomsten van deze berekening moeten overeenstemmen met gemeten waarden in het gebied; er is immers nog niets veranderd. Met de  $T_0$ -berekening wordt dus gecontroleerd of het numerieke model een goede afspiegeling is van de werkelijkheid.

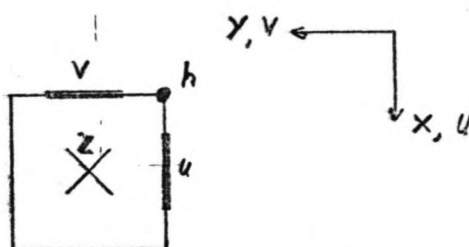
Het tweede gedeelte, de  $T_1$ -berekening, is in principe dezelfde berekening als  $T_0$ , alleen zijn nu de voorgenomen veranderingen in bodemconfiguratie en kustvorm in het model opgenomen. In mijn geval is de zanddam met de L.N.G.-haven in het model gebracht en is de bodem gewijzigd door de voorgenomen baggerwerken. De  $T_1$ -berekening heeft een tweeledig doel:

1. een indruk te geven van de veranderingen in het stroombeeld voor een groter zeegebied;
2. het verschaffen van randvoorwaarden voor de  $T_2$ -berekening.

Het derde gedeelte, de  $T_2$ -berekening, strekt zich uit over een veel kleiner zeegebied en is bedoeld om meer plaatselijk een indruk te krijgen van het gewijzigde stroombeeld.

Om de berekeningen te kunnen uitvoeren moet over het betrokken zeegebied een netwerk worden gebracht. Aan de vierkante of rechthoekige mazen van het net kunnen dan eigenschappen toegekend worden, zoals waterhoogte, diepte, en de snelheden in x- en y-richting.

In onderstaand figuurtje is aangegeven waar de eigenschappen toegekend of uitgerekend worden.



$h$  is behalve het punt waarin de waterstand moet worden gegeven of uitgerekend, ook het punt waar de coördinaten  $(x, y)$  worden toegekend.

In alle berekeningen is voor de bodemwrijving een konstante Chezy-koefficiënt van  $50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$  aangehouden. De wrijvings-koefficiënt wordt dan  $Fr = g/C^2 = 0,00392$ .

### *Plaats en tijd*

#### Plaats

Indien ik in dit verslag een plaats aanduid, zal ik dat zoveel mogelijk doen in de x- en y-coördinaten van mijn eigen model. Wanneer er gesproken wordt over plaatsen in het  $T_0$  of  $T_1$ -model zullen de coördinaten van de '1600-meter-schematisatie' gebruikt worden, en voor plaatsen in het  $T_2$ -model worden de coördinaten van de '800-meter-schematisatie' gebruikt.

Als het onvermijdelijk is om andere plaatsaanduidingen te gebruiken, worden 'tussen haakjes' de coördinaten van mijn model erachter gegeven.

# Tijd

In dit verslag lopen drie tijdsaanduidingen door elkaar, t.w.:

- de tijdsaanduiding van het computermodel. Deze loopt van 90.000 tot 180.000 seconden. Deze tijdsaanduiding is terug te vinden op de computeruitvoer en de plots.
- de tijdsaanduiding van de werkelijkheid, deze loopt van 1 tot 5 september 1975. De periode waarop mijn getijberekening van toepassing is loopt van 1 september 20.00 uur tot 2 september 21.00 uur.
- de tijdsaanduiding welke veelal op de bijlagen wordt gehanteerd.

Deze tijdsaanduiding loopt van tijdstip 1 tot tijdstip 12.

Voor de duidelijkheid verschijnt hieronder een omrekeningstabel.

	Werkelijkheid	Computer tijd	Tijd op bijlage
1-9-'75	20.30 u	162.000 sec.	10
	21.30	165.600	
	22.30	169.200	11
2-9-'75	23.30	172.800	
	00.30	176.400	12
	01.30	180.000=90.000	
	02.30	93.600	
	03.30	97.200	1
	04.30	100.800	
	05.30	104.400	2
	06.30	108.000	
	07.30	111.600	3
	08.30	115.200	
	09.30	118.800	4
	10.30	122.400	
	11.30	126.000	5
	12.30	129.600	6
	13.30	133.200	7
	14.30	136.800	8
	15.30	140.400	9
	16.30	144.000	
	17.30	147.600	10
	18.30	151.200	
	19.30	154.800	
	20.30	158.400	
	21.30	162.000	

## HOOFDSTUK V

### Het maken van de modellen

Bij het maken van de modellen worden achtereenvolgens de volgende punten onderzocht:

- a. Bepalen van de grootte van het model
- b. Bepalen van de grootte van de mazen
- c. Schematiseren van de randen en de diepte
- d. Schematiseren van de dam ( $T_1$ ,  $T_2$ )
- e. Bepalen van de randvoorwaarden en de beginvoorwaarden
- f. Bepalen van de tijdstap en de inspeeltijd

### $T_0$ en $T_1$ model

ad a: Bepaling van de grootte van het  $T_0$  en  $T_1$  model (bijlage V-1)

De periodieke randvoorwaarden van de modellen zijn bepaald door een getij-analyse van de gemeten waterstanden in het bestaande gebied. Als nu na een ingreep in de kust- en bodenvorm van het zeegebied het stroombeeld en de waterstanden sterk gewijzigd zijn, is het onjuist om voor het model van het gewijzigde zeegebied dezelfde randvoorwaarde te gebruiken als voor het model van het oorspronkelijke zeegebied.

Voor het gewijzigde zeegebied, dit is het  $T_1$ -model, is het dus onmogelijk om aan betrouwbare randvoorwaarden te komen tenzij men de randen zover weglegt, dat daar geen invloed meer merkbaar is van de ingreep. Maar om te weten te komen hoever de invloed van de ingreep zich uitstrekt, is het eigenlijk nodig een getijberekening te maken. We zitten dus in een vicieuze cirkel.

We kunnen nu de randen zover weg kiezen, dat de invloed van de ingreep in ieder geval niet meer merkbaar is, maar dan lopen we een gereede kans om ons model onnodig groot en dus onnodig bewerkelijk en duur in rekenkosten te maken. Het is dus zaak een nauwkeurige schatting van de ligging van de randen te verkrijgen. Hiertoe heb ik gebruik gemaakt van een elektrisch analogon van het kustgebied. Hierop zijn natuurlijk wel enige aanmerkingen te maken. De belangrijkste hiervan is dat een elektrisch analogon eigenlijk alleen bruikbaar is voor een potentiaalstroming en dat de stroming in een kustgebied hier stellig niet aan voldoet.

Binnen een elktrisch analogen is de stromingsweerstand voor de elektrische stroom per eenheid van lengte overal gelijk, ook deze veronderstelling gaat voor een kustgebied niet op. Ik heb toch deze benadering gekozen omdat ik hier alleen maar geïnteresseerd ben in de grootte van het gebied dat door deze ingreep in de kustvorm wordt beïnvloed, dus niet in de stroomrichtingen of -snelheden, die bij een echte potentiaal stroming wel uit het model kunnen worden bepaald.

Ik ben verder van de volgende veronderstellingen uitgegaan:

1. de getijstroom is het sterkst als de richting ongeveer evenwijdig aan de kust is (van zuid-west naar noord-oost). Het kustgebied dat beïnvloed wordt, zal dan ook het grootst zijn.
2. Om een vierkantennet te verkrijgen moeten dus twee volkomen gelijkvormige modellen gemaakt worden. Waarbij op het ene model een spanningsverschil over de randen in het N.O. en het Z.W. wordt gezet en in het andere model over de kustlijn en de N.W.-rand.
3. Als ik mijn model laat lopen van de Belgische grens tot Katwijk aan Zee, met een noord-westelijke grens op 65 km uit de kust, is het voor het gestelde doel in ieder geval groot genoeg.
4. Als ik de vierkante netten van de ongewijzigde en de gewijzigde kustvorm vergelijk, krijg ik een goede indruk van de grootte van het beïnvloede gebied.

Het resulterende model voor de getijberekening is weergegeven in bijlage V-1. Het loopt van de kop van Schouwen Duiveland tot Kijkduin met een zeegrens die samenvalt met die van het rand-delta II model van Rijkswaterstaat.

#### ad b: Bepalen van de grootte van de mazen

Het randdelta II-model van Rijkswaterstaat heeft een maaswijdte van 800 meter, uit praktische overwegingen is het dus aan te bevelen die 800 meter of een veelvoud daarvan aan te houden als maaswijdte. Hoe kleiner nu de maaswijdte wordt, hoe groter de rekenkosten per tijdstap worden. Uit kostenoverweging mag mijn model niet veel meer dan 1000 rekenpunten bevatten, met een 800 meter-net worden dat er ongeveer 3400, zodat de keuze bepaald werd op een 1600 meter schematisatie met 850 rekenpunten.



ad c: Schematiseren van de randen en de diepte

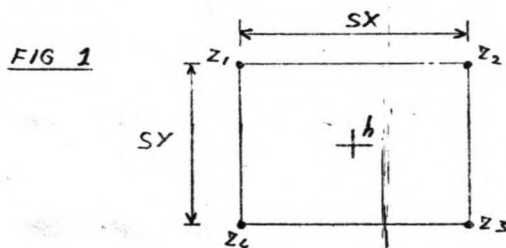
Voor de diepteschematisatie van het  $T_0$ -model is volledig gebruik gemaakt van de gegevens van Rijkswaterstaat betreffende dit zeegebied.

Voor de diepteschematisatie van het  $T_1$ -model wordt uitgegaan van de dieptelijnen zoals die gegeven zijn in bijlage V-2.

De interpretatie van de dieptelijnen naar het 1600 meter-net geeft wel problemen, omdat dit net door zijn grofmazigheid plaatselijk sterke diepteverschillen afvlakt.

Bij de schematisatie van de kustlijn van het model is eerst grofweg aan alle mazen die op het droge liggen een grote negatieve diepte (positieve hoogte) toegekend. Voor een minder grove schematisatie van de kust is vervolgens gebruik gemaakt van de omstandigheid dat het TIDES-programma ook getijproblemen moet kunnen behandelen waarbij gedeelten van het beschouwde gebied soms wel, en soms niet onder water staan. Hiertoe zijn enkele bijzondere voorzieningen aangebracht.

Bij de continuïteitsvergelijking speelt een belangrijke rol het bergend oppervlak behorende bij een h-punt. De verhoging van de waterstand in dit punt vermenigvuldigd met het bergend oppervlak is gelijk aan de som van de instromende minus de uitstromende debieten. Bij de berekening van het bergend oppervlak B wordt de h vergeleken met de vier omringende z-waarden ( $z$  = peil van de bodem).  $h - z$  is immers de momentane waterdiepte.



Als  $h >$  alle vier de  $z$ -waarden dan wordt gesteld  $B = sx \cdot sy$ .

Als  $h <$  alle vier de  $z$ -waarden dan is  $B = 0$ . Voor tussenliggende waarden van  $h$  wordt een formule voor  $B$  gebruikt waarbij een continue overgang wordt bewerkstelligd (zie voorbeeld in fig. 3). De formule luidt:

$$B = sx \cdot sy \frac{\sum_{i=1}^4 G(y - z_i)}{\sum_{i=1}^4 |y - z_i|}$$

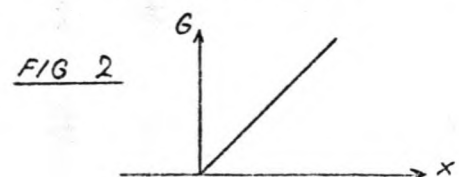
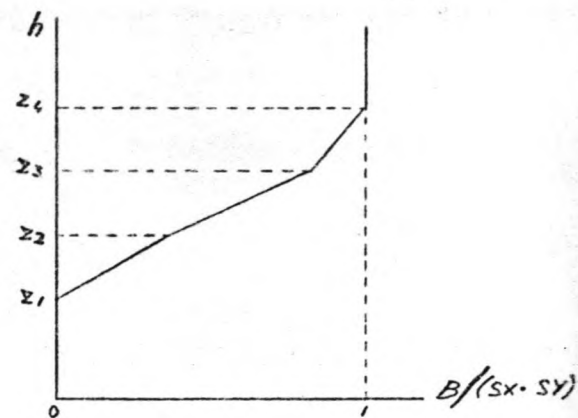




FIG 3

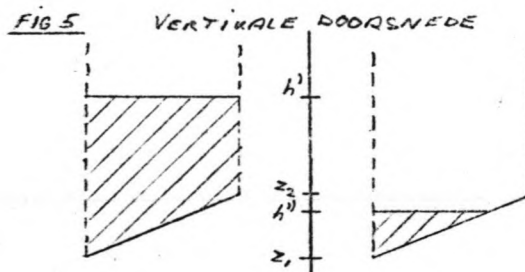
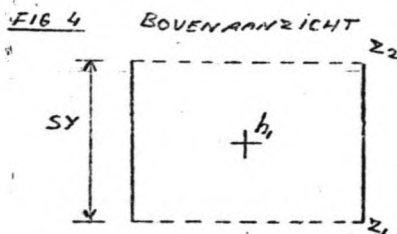


Hierin in G de volgende functie:

$$G(x) = x, \text{ als } x > 0 \\ = 0, \text{ als } x \leq 0 \text{ (zie figuur 2)}$$

De continue overgang in B is gewenst om te vermijden dat bij drooglopen schokken in het model worden geïntroduceerd.

Bij de bewegingsvergelijking speelt het doorstromingsprofiel tussen twee h-punten een belangrijke rol (zie fig. 4). In deze doorsneden worden de debieten berekend. Als voorbeeld wordt de stroom in x-richting bekeken.



In de doorsnede wordt voor h genomen:  $h = \frac{1}{2} (h_1 + h_3)$ .

Deze h wordt vergeleken met  $z_1$  en  $z_2$  (zie fig. 5). Als h groter is dan de beide z-waarden dan wordt voor het doorstromingsprofiel A genomen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot sy \cdot (2h - z_1 - z_2)$$

en voor de hydraulische straal R:

$$R = \frac{1}{2} \cdot (2h - z_1 - z_2)$$

Als h kleiner is dan de beide z-waarden, dan worden A en R beide = 0 gesteld. In het tussenliggende gebied  $z_1 < h < z_2$  wordt gesteld:

$$R = \frac{1}{2} (h - z_1)$$

$$A = 2 R^2 \cdot sy / (z_2 - z_1)$$

Op deze manier wordt, afhankelijk van de waarden van z, beslist of een bepaald vierkantje op het land ligt of in het water, of gedeeltelijk onder water. Door nu de waterdiepte in de nabijheid van de kust een bepaalde waarde te geven, kan in het model een goede aansluiting verkregen worden bij de werkelijke kustlijn.

De bestaande golfbreker voor de havenmond van Europoort bij Hoek van Holland is niet goed weer te geven door het invoeren van een negatieve diepte, hierdoor zouden de hem toegekende afmetingen het stroombeeld veel meer verstoren dan in werkelijkheid het geval is. Daarom wordt hier gebruik gemaakt van de tweede mogelijkheid om een modelrand te schematiseren. Het TIDES-programma kent namelijk de mogelijkheid om in bepaalde punten de watersnelheid een constante waarde in x- en of y-richting te geven. De golfbreker wordt geschematiseerd door v (de snelheid in y-richting) in de punten (18,9), (19,9) en (20,9) de waarde 0 te geven. (zie bijlage V-6)

ad d: Schematiseren van de dam ( $T_1$ -model)

Voor de schematisatie van de zanddam met de L.N.G.-haven in het  $T_1$ -model is gebruik gemaakt van een combinatie van beide hierboven beschreven manieren om de randen van het model te schematiseren.

Eerst wordt aan bepaalde punten een negatieve diepte toegekend (te weten die mazen die geheel boven zeeniveau liggen), vervolgens wordt door middel van het 0-stellen van de snelheden in bepaalde punten getracht de vorm van de zanddam nauwkeuriger in het model te brengen. Dit lijdt tot schematisatie zoals weergegeven in bijlage V-7.

ad e: Bepalen van de randvoorwaarden en de beginvoorwaarden ( $T_0$  en  $T_1$ -model)

Voor de  $T_0$ - en  $T_1$ -berekening zijn de rand- en beginvoorwaarden identiek. Op het tijdstip  $T = 0$  wordt als waterstand het N.A.P.-niveau aangehouden. Op de open randen wordt als randvoorwaarde een periodieke waterstand ingevoerd. Deze randvoorwaarde wordt verkregen uit een Fourier-analyse van getijmetingen (uitgevoerd door Rijkswaterstaat). De waterstanden worden verkregen uit metingen in de periode van 1 t/m 5 september 1975. Op deze metingen wordt een Fourier-analyse toegepast en hieruit zijn Fourier-coëfficiënten verkregen ( $A_k$  en  $B_k$ ) waaruit direct door Rijkswaterstaat de amplituden  $C_k$  en de fasehoeken  $\phi_k$  van een aantal getijkcomponenten

$$M_k = c_k \cos (k\omega t - \phi_k) \quad \text{/zijn bepaald.}$$

$M_k$  = een getijcomponent

$c_k$  = amplitude

$k$  = nummer van de getijcomponent

$\omega$  = hoeksnelheid in radialen/sec.

$t$  = tijd in seconden

$\phi_k$  = fasehoek

In het TIDES-programma is het echter noodzakelijk dat de getij-componenten ingevoerd worden met behulp van de Fourier-coëfficiënten die bij R.W.S. verloren zijn gegaan. De relatie tussen de Fourier-coëfficiënten en  $C_k$  en  $\phi_k$  is:

$$M_k = A_k \cos kwt + B_k \sin kwt$$

$A_k, B_k$  = Fourier coëfficiënten

De Fourier-coëfficiënten kunnen nu weer uit de amplituden en fase-hoeken worden bepaald:

$$\begin{aligned} c_k \cos (kwt - \phi_k) &= c_k (\cos kwt \cdot \cos \phi_k + \sin kwt \cdot \sin \phi_k) \\ &= c_k \cos \phi_k \cdot \cos kwt + c_k \sin \phi_k \cdot \sin kwt \end{aligned}$$

$$\text{dus } A_k = c_k \cos \phi_k$$

$$B_k = c_k \sin \phi_k$$

De belangrijkste bijdragen aan het getij worden geleverd door het enkeldaagse, het dubbeldaagse en het 4x daagse getij. Samen met de middenstand zijn dit de componenten die in de randvoorwaarden zijn meegenomen. Voor de waarden van  $c_k$ ,  $\phi_k$ ,  $a_k$  en  $b_k$  wordt verwezen naar bijlage V-3 en V-4.

De waterstand t.o.v. het referentievlak (N.A.P.) wordt dan berekend uit:

$$h = \sum_{k=0}^n a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T}$$

$h$  = waterstand

$T$  = periode van de getijcomponent met de grootste periode

$n$  = aantal getijcomponenten

De randvoorwaarden worden ingevoerd in de randpunten om de 4800 meter. De randvoorwaarden in de tussenliggende 2 punten van het netwerk (1600 m.-net) worden lineair geïnterpoleerd.

#### ad f: Bepalen van de tijdstap en de inspeeltijd

Bij het bepalen van de tijdstap blijken twee parameters een belangrijke rol te spelen:

$$\frac{\Delta t}{\Delta L} \sqrt{g \cdot d}$$

$$\frac{L}{\Delta L}$$

$\Delta t$  = tijdstap (sec.)

$\Delta L$  = maaswijdte (m)

$g$  = gravitatieversnelling

$d$  = waterdiepte

$L$  = golflengte van de getijgolf

Deze parameters bepalen in hoeverre de differentiaalvergelijking van de getijgolf (fysische golf) in fase verschilt met de getijgolf die weer-gegeven wordt in de differentievergelijking (berekende golf).

Bepalend voor de mate waarin dit verschijnsel het rekenproces verstoort is de golflengte van de getijcomponent met de kleinste periode (hier  $6\frac{1}{4}$  uur). Die golflengte is ongeveer 300 km. Kiezen we een tijdstap van 900 sec. dan:  $\frac{\Delta t}{\Delta L} \sqrt{g \cdot d} \approx 7,2$

$$\frac{L}{\Delta L} \approx 188$$

Bij beschouwing van bijlage V-5, waarin de relatie tussen de parameters is weergegeven, zien we dat de fysische golf t.o.v. de berekende golf slechts weinig in fase verloopt en dat dus de differentievergelijking de differentiaalvergelijking voldoende nauwkeurig weergeeft.

Negenhonderd sec. is daarom gekozen als een aanvaardbaar compromis tussen rekenkosten en nauwkeurigheid.

Als inspeelperiode is 90.000 sec. gekozen. Dit komt overeen met de periode van de enkeldaagse getijcomponent.

In de bijlagen V-6 en V-7 worden de  $T_0$  en  $T_1$  modellen zoals ingevoerd in de computer weergegeven.

## $T_2$ model

### ad a: Bepaling van de grootte van het $T_2$ model

Bij de bepaling van de afmetingen van het  $T_2$  model stond voorop dat de gehele dam in het model opgenomen moest zijn. Hoewel mijn interesse in eerste instantie uitgaat naar de stroomsnelheden in het zeegebied direkt voor de havenmond zal ik de resultaten van deze getijberekening eventueel t.z.t. aanwenden voor het beschouwen van de morfologische aspecten van de ingreep. Voor een beschouwing van de nautische problemen in de scheepvaartgeul is een model van alleen de havenmond trouwens ook ontoereikend.

Op grond van deze overwegingen is de zuid-west grens van het  $T_2$  model ter plaatse van de kop van Goeree gekozen en de noord-oost grens ter plaatse van de kop van de Maasvlakte. De zeegrens ligt evenwijdig aan de zeegrens van het  $T_0$ ,  $T_1$  model maar 14,4 kilometer (9 mazen van 1600 meter) ten zuid-oosten daarvan. Het geheel zoals weergegeven in bijlage V-8.

ad b: Bepaling van de grootte van de mazen

Op grond van dezelfde overwegingen bij het  $T_0$ ,  $T_1$  model is hier gekozen voor een maaswijdte van 800 meter. Het aantal rekenpunten komt dan op 837, hetgeen uit kosten oogpunt aanvaardbaar is.

ad c: Schematiseren van de randen en de diepte

Ten gevolge van de kleinere maaswijdte kan nu nauwkeuriger aangesloten worden bij de dieptelijnen uit bijlage V-2 dan bij het  $T_0$ ,  $T_1$  model. Verder is de gevolgde werkwijze gelijk aan die bij het  $T_0$ ,  $T_1$  model.

ad d: Schematiseren van de dam ( $T_2$  model)

Ook de vorm van de zanddam is nu nauwkeuriger weer te geven, waarbij weer gebruik is gemaakt van het toekennen van een negatieve diepte aan bepaalde mazen van het net en het 0-stellen van de snelheid in x- en/of y-richting in sommige punten.

ad e: Bepalen van de randvoorwaarden en de beginvoorwaarden

De randvoorwaarden voor het  $T_2$  model worden verkregen uit het  $T_1$  model. Het TIDES-programma biedt namelijk de mogelijkheid bepaalde gegevens over te brengen naar het achtergrondgeheugen, waaruit ze dan later weer kunnen worden opgevraagd. In dit geval laten wij de waterhoogte in ieder rekenpunt van het  $T_1$  model, dat op de rand van het  $T_2$  model ligt, wegschrijven. Dit gebeurt bij iedere tijdstap (voor het  $T_1$  model 900 sec.), zodat per twee tijdstappen in het  $T_2$  model (450 sec.) een randvoorwaarde aanwezig is.

Omdat de maaswijdte van het  $T_2$  model maar 800 meter is en we slechts randvoorwaarden hebben om de 1600 meter, wordt tijdens de berekening lineair geïnterpoleerd om de randvoorwaarden in de tussenliggende punten te bepalen.

Voor de beginvoorwaarden geldt weer dat overal de waterstand gelijk is aan N.A.P. en dat alle snelheden 0 zijn.



ad f: Bepalen van de tijdstap en de inspeeltijd

Op grond van dezelfde overwegingen als bij het  $T_0$ ,  $T_1$  model, wordt hier besloten tot een tijdstap van 450 sec.

Voor de bepaling van de inspeeltijd wordt uitgegaan van het feit dat de randvoorwaarden van het  $T_2$  model geleidelijk aan betrouwbaarder worden.

Omdat deze randvoorwaarden van de  $T_1$  berekening worden betrokken, zullen  $h$  en  $u$  en  $v$  voor de eerste tijdstap 0 zijn (nl. de beginvoorwaarde van de  $T_1$  berekening) en na de inspeeltijd van de  $T_1$  berekening volledig betrouwbaar zijn. De betrouwbaarheid van de randvoorwaarden van de  $T_2$  berekening neemt dus toe naarmate de  $T_1$  berekening beter ingespeeld raakt.

Doordat deze overgang zich geleidelijk voltrekt, is het zinvol om te veronderstellen dat het  $T_2$  model tegelijk ingespeeld is met het  $T_1$  model.

Als inspeeltijd wordt dus gekozen voor dezelfde 25 uur (90.000 sec.) als bij het  $T_1$  model.

Deze inspeeltijd kan wellicht verkort worden door als randvoorwaarden voor het  $T_2$  model de berekende waterstanden uit het  $T_1$  model te nemen over de periode van 90.000 tot 180.000 sec. Dus nadat het  $T_1$  model is ingespeeld. Het is echter niet mogelijk om dergelijke randvoorwaarden in het geheugen van de computer weg te schrijven.



## HOOFDSTUK VI

### Interpretatie van de uitvoer

#### *Het ijken van de modellen*

Om de betrouwbaarheid van de uitkomsten van een tweedimensionale getijberekening met betrekking tot een gewijzigde kust te kunnen beoordelen, is het noodzakelijk dat het model geijkt wordt aan de bestaande toestand ( $T_0$  model). Alleen van deze toestand is het namelijk mogelijk waarden te meten.

Om het  $T_0$  model adequaat te ijken zou men eigenlijk de beschikking moeten hebben over 2 onafhankelijke series metingen in dit gebied. De eerste serie wordt dan gebruikt om, na vergelijking met de berekende  $T_0$  -toestand, het model (C-waarde, bodemschematisatie, randvoorwaarden e.d.) zodanig aan te passen dat de gemeten en berekende waarden goed overeenstemmen. De tweede serie metingen kan dan gebruikt worden om te controleren of het aangepaste model nu ook betrouwbare waarden geeft voor een andere periode, met andere getijomstandigheden.

In dit geval waren er echter geen twee series meetresultaten beschikbaar. Van zuiver ijken kan dan ook geen sprake zijn. Er kan alleen gecontroleerd worden of de door het  $T_0$  model berekende resultaten voor een bepaalde periode overeenstemmen met de voor die periode gemeten waterstanden en stroomsnelheden.

Ik maak gebruik van een meetcyclus gehouden in augustus-september 1975 in het Randdelta II-model van Rijkswaterstaat (bijlage V-1).

In een groot aantal punten van het Randdelta II-model zijn voor een langere periode ( $\pm 15$  dagen) waterstandsmetingen gedaan.

Als nu na vergelijken van de meetresultaten van Rijkswaterstaat en de uitkomsten van mijn getijberekening ( $T_0$ ) blijkt, dat de resultaten goed overeenstemmen, is de conclusie gerechtvaardigd dat ook de gewijzigde toestand ( $T_1$ ,  $T_2$  model) betrouwbaar wordt berekend door het computerprogramma. Het ijken dient dus om te controleren of bij de schematisatie van de kust en het zeegebied daarvoor geen grove fouten zijn gemaakt of te rigoureuze vereenvoudigingen zijn toegepast.

Ook wordt duidelijk of bij de harmonische componenten die als randvoorwaarden dienen, geen belangrijke getijcomponenten zijn verwaarloosd.

Voor het vergelijken van de  $T_0$ -berekening met de bestaande toestand heb ik de beschikking over de waterhoogten van 29-8-1975 om 0.00 uur tot 13-9-1975 om 0.00 uur in een aantal meetpunten. De meetpunten die voor mij interessant zijn omdat ze binnen het model liggen, zijn:

- Lichteiland Goeree
- G-paal
- B.G.-II
- B.G.-V
- H.A.-I
- M.A.-III (zie bijlage V-6)

Verder heb ik de beschikking over watersnelheden in x- en y-richting over ongeveer dezelfde periode in de punten:

- Euro-IA
- B.G.-II
- Schouwenbank Noord
- Meetpunt A
- Meetpunt B
- Meetpunt C

Om nu tot een goed vergelijk te komen, ben ik als volgt tewerk gegaan:

De periodieke randvoorwaarden van mijn model hebben een periode van 25 uur. De resultaten van mijn berekening zijn, na de vereiste inspeelperiode, dan ook periodiek met eenzelfde periode.<sup>\*)</sup> Mijn randvoorwaarden zijn tot stand gekomen door een Fourier-analyse van het getij van 1 tot 5 september 1975. Ik moet dus uit door Rijkswaterstaat gemeten waterhoogten tussen 1 en 5 september die periode van 25 uur bepalen, waarover de door mij berekende waterstanden zo goed mogelijk aansluiten bij die van Rijkswaterstaat, natuurlijk met inachtneming van de fase van het getij. Omdat Lichteiland Goeree centraal gelegen is in mijn model, waardoor de eventuele storende invloeden van de randen van het model hier zijn uitgewerkt, heb ik dit meetpunt gekozen om die periode te bepalen. Nu blijkt, dat de beste aansluiting wordt verkregen over de periode van 20.00 uur op 1-9-1975 tot 21.00 uur op 2-9-1975 (bijlage VI-1). We zien nu echter dat het tijdstip 20.30 uur op 1-9-1975 van de gemeten getijkromme vergeleken wordt met de computeruitvoer voor  $T = 162.000$  sec. Het tijdstip 162.000 sec. valt 20 uur (72.000 sec.) na  $T \approx 90.000$  sec. en het tijdstip 90.000 sec. valt in fase precies samen met 0.00 uur op 1-9-1975. We vergelijken nu dus eigenlijk de gemeten kromme op 20.30 uur op 1-9-1975 met de berekende kromme om 20.00 uur. Om de oorzaak van deze verschuiving op te sporen ben ik als volgt tewerk gegaan:

Door Rijkswaterstaat is een Fourier-analyse gemaakt van het berekende getij in alle punten van hun Randdelta II-model over de periode van 1 tot 5 september 1975. Ik heb de beschikking over de harmonische componenten  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  en  $M_4$  met perioden van resp.  $\infty$ , 25,  $12\frac{1}{2}$  en  $6\frac{1}{4}$  uur. Door de functies van deze componenten stuk voor stuk te berekenen en te sommeren wordt de door het Randdelta II-model berekende getijkromme verkregen (zie bijlagen VI-2 en VI-3).

<sup>\*)</sup> Dit is voor het  $T_0$  model gecontroleerd door de uitgevoerde waarden op 86.400 sec. (24 uur na  $T=0$ ) te vergelijken met de uitgevoerde waarden op  $T = 176.400$  sec. (24 uur na afloop van de gekozen inspeelperiode).

(Alle gemeten en berekende getijkrommen worden vergeleken voor Lichteiland Goeree).

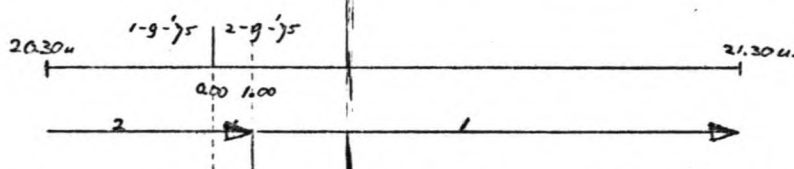
Die getijkromme heb ik vergeleken met de door mijn  $T_0$  model berekende. De overeenkomst is voortreffelijk (zie bijlage VI-3) en het is dan ook niet aannemelijk dat de verschuiving van een half uur een modelfout zou zijn. Zodra de verkregen kromme vergeleken wordt met de gemeten kromme wordt de verschuiving van een half uur weer zichtbaar. Gezien het feit dat de gemeten kromme berust op half-uur-waarnemingen en gezien de verwarring bij Rijkswaterstaat veroorzaakt doordat soms de eerste waarneming van een meetcyclus het rangnummer 0 en soms het rangnummer 1 krijgt, lijkt het aannemelijk dat de verschuiving van een half uur hierdoor veroorzaakt is.

In bijlage VI-3 zien we, dat de "verschuiving" niet steeds precies een half uur is, maar schommelt tussen  $\pm 15$  en  $\pm 45$  minuten. Ik heb geprobeerd om de harmonische componenten  $M_6$  en  $M_8$  (perioden resp.  $4 \frac{1}{6}$  en  $3 \frac{1}{8}$  uur) te verkrijgen, om te zien of door die in de randvoorwaarden mee te nemen, de spreiding in de "verschuiving" verkleind kan worden. Deze harmonische componenten zijn echter niet beschikbaar.

Er blijft nu nog één manier over om de herkomst van de verschuiving van een half uur te ontdekken, nl. het zelf uitvoeren van een Fourier-analyse op de beschikbare waarnemingen van Lichteiland Goeree.

Voor deze procedure zijn standaardprogramma's beschikbaar. In bijlage VI-4 wordt het gebruik van één van deze programma's verduidelijkt.

Met de door de Fourier-analyse ter beschikking gekomen harmonische componenten, is het mogelijk het getij te reconstrueren. Het is hierbij belangrijk dat het tijdstip  $T = 0$  eenduidig vastligt.



Ik heb  $T = 0$  gekozen om 01.00 uur op 2-9-1975, de fase van de Rijkswaterstaat componenten is dan weer gelijk aan die om 0.00 uur op 1-9-1975, en ik kan dan de fasen van de door mij berekende harmonische componenten en die van Rijkswaterstaat vergelijken.

Omdat de periode waarover ik het getij wil analyseren loopt van 20.30 uur op 1-9-1975 tot 21.30 uur op 2-9-1975 en de gekozen  $T = 0$  daar ergens tussenin ligt, heb ik de waarnemingen van 20.30 uur op 1-9-1975 tot 01.00 uur op 2-9-1975 laten volgen op die van 01.00 uur op 2-9-1975 tot 21.30 uur op 2-9-1975.



Door astronomische getijcomponenten met een langere periode dan 25 uur en door weersinvloeden ten tijde van de metingen, sluiten die twee waarnemingenreeksen in  $T = 0$  niet netjes op elkaar aan, zodat enige aanpassing in het overgangspunt dan wel noodzakelijk is.

Het resultaat van deze getij-analyse zien we in bijlage VI-5.

Hierin zijn aangegeven:

- 1) de gemeten getijkromme ter plaatse van Lichteiland Goeree
- 2) het met behulp van de  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  en  $M_4$ -componenten van mijn Fourier-analyse berekende getij
- 3) het met behulp van de  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $M_5$  en  $M_6$ -componenten van mijn Fourier-analyse berekende getij
- 4) het met behulp van het door Rijkswaterstaat verstrekte  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  en  $M_4$ -componenten berekende getij

We zien nu dat de som van  $M_0$  t/m  $M_6$ , zoals berekend, de gemeten kromme zeer goed beschrijft. De verschillen zijn 2 à 3 cm. en dit is, gezien het doel van de uitgevoerde Fourier-analyse nauwkeurig genoeg.

Laten we vervolgens de  $M_5$  en  $M_6$ -componenten weg, dan zien we dat de verschillen tussen het gemeten en berekende getij weliswaar groter worden, doch nergens blijkt een half uur verschuiving t.o.v. het gemeten getij. De conclusie kan dan ook zijn dat het niet meenemen van  $M_5$  en  $M_6$  in de randvoorwaarden van mijn model niet de oorzaak kan zijn van de geconstateerde faseverschuiving van  $\pm$  een half uur.

Als we nu tenslotte de door mij berekende getijkromme, waarbij  $M_5$  en  $M_6$  niet zijn meegenomen, vergelijken met de kromme van Rijkswaterstaat waarbij ook  $M_5$  en  $M_6$  niet zijn meegenomen (de invloed van  $M_3$  is zeer klein), dan treedt weer heel duidelijk een verschuiving van een half uur t.o.v. elkaar op. Nu duidelijk is dat het al dan niet meenemen van  $M_5$  en  $M_6$  geen invloed heeft op de faseverschuiving, blijven twee mogelijke oorzaken over:

- 1) de reeds genoemde onzorgvuldigheid bij Rijkswaterstaat in de rangorde van de waarnemingen, waardoor de gehele reeks een half uur is verschoven
- 2) door een fout in de Fourier-analyse van Rijkswaterstaat is de fasehoek van de  $M_2$ -component foutief berekend. De verticale verschillen zijn n.l. ongeveer periodiek met een periode van 12,5 uur.

Welke van de twee de oorzaak is, is voor mij onmogelijk te achterhalen. Het half uur wordt verwerkt in de berekening en om de oorzaak van de verschuiving op te sporen wordt contact opgenomen met Rijkswaterstaat.

Hierna vergelijken we de gemeten en berekende waterstanden in de overige vijf meetpunten (bijlage VI-6 t/m VI-10).

De overeenstemming blijkt goed te zijn. We zien wel dat in meetpunt B.G.-II, dat dicht bij de rand van het model gelegen is, de kromme vervormd is. We mogen wel concluderen dat de waterhoogten door het model betrouwbaar worden weergegeven.

Het vergelijken van de gemeten en de berekende watersnelheden geeft wat meer problemen, omdat alle zes de meetpunten van Rijkswaterstaat toevalligerwijze op of in de nabijheid van de randen van mijn model liggen. (Het verdient aanbeveling om hiermee bij de keuze van de ligging van de randen rekening te houden).

Vooraf de meetpunten B.G.-II en A (waar verstoringen optreden van twee randen) zijn door de grootte van de afwijkingen voor vergelijking onbruikbaar geworden. Bij de overige vier vergelijkingspunten, te weten Euro-IA, Schouwenbank Noord, Meetpunt B en Meetpunt C, zijn de resultaten beduidend beter (bijlage VI-11 t/m VI-16). Toch vallen hier een tweetal verschijnselen op, te weten:

- 1) het model heeft de neiging om de snelheden iets groter te berekenen (ca. 10%) dan ze in werkelijkheid zijn. We zullen hier rekening mee moeten houden bij de interpretatie van de resultaten van de  $T_1$  en de  $T_2$  berekening.
- 2) Het model heeft de neiging om de gemiddelde oriëntering van de snelheden te wijzigen. De berekende snelheden zijn aan de rechterkant van het model over een hoek van  $\pm 10^\circ$  rechtsom gedraaid en aan de linkerzijde van het model over eenzelfde hoek linksom.

Beide verschijnselen duiden erop, dat de snelheden in x-richting groter worden berekend dan ze in werkelijkheid zijn. Omdat het gebied waarin ik in de  $T_1$  en  $T_2$  berekening het meest geïnteresseerd ben centraal gelegen is in het model (de snelheid in x-richting is hier maar klein), denk ik van dit verschijnsel verder geen hinder te ondervinden.

#### Conclusie

Gezien de hierboven beschreven resultaten is de conclusie gerechtvaardigd, dat het  $T_0$  model de bestaande toestand redelijk weergeeft. We kunnen daarom nu de  $T_1$  toestand gaan beschouwen.



### *Verschillen tussen $T_0$ en $T_1$ model*

Vergelijking van de stroombeelden in het  $T_0$  en  $T_1$  model is goed mogelijk door middel van de door de computer vervaardigde plots (zie plotboek 1). Helaas zijn door een storing slechts voor een gedeelte van de tijd plots van de  $T_0$  toestand geleverd. Het is dus niet mogelijk om over de gehele getijperiode van 25 uur de  $T_0$  en  $T_1$  toestand te vergelijken. Bij vergelijking van de plots van overeenkomende tijdstippen in het  $T_0$  en het  $T_1$  model vallen wel direkt enige opmerkingen te maken:

- 1) Aan de zuidkant van de dam is de verstoring van het stroombeeld groter dan aan de noordkant.
- 2) Het zeegebied dat omsloten wordt door de noordkust van Voorne en de zuidkant van de zanddam, gedraagt zich min of meer als een kombergingsgebied, dat tweemaal per dag wordt gevuld en geledigd.
- 3) Aan de noordzijde van de dam treden slechts kleine stroomsnelheden op, ook tijdens de zogenaamde ebstroom, die van het Noord-oosten naar het Zuid-westen stroomt.

Kwantitatieve conclusies omtrent de stroomsnelheden en de richtingen daarvan zal ik hier niet trekken, omdat daarvoor het  $T_2$  model, dat de situatie nauwkeuriger weergeeft, meer geschikt is. In de bijlagen VI-17 en VI-18 is beoogd een beeld te geven van de manier waarop de getijstroom zich in de loop van een getijperiode om de kop van de zanddam buigt.

### *Beschouwing van de $T_2$ toestand*

Deze getijdeberekening is uitgevoerd om een indruk te krijgen van de stroomsnelheden vóór de havenmond en in de toegangsgeul naar de haven. Bij het beschouwen van de  $T_2$  toestand worden dan ook in het bijzonder deze plaatsen bekeken.

De toegangsgeul loopt onder een hoek van  $65^\circ$  met het Noorden (bijlage VI-19). De bijlagen VI-20 t/m VI-23 tonen het traject wat een schip dat de haven nadert in de toegangsgeul af moet leggen met daarop uitgezet de stroomsnelheden op de tijdstippen 1 t/m 12 in de punten (11,18), (11,19), (10,20), (10,21), (10,22), (9,23), (9,25) en (8,26).

Punt (11,18) is de plaats waar het schip de haven invaart. Er moet wel opgemerkt worden dat de momentane stromingstoestanden worden weergegeven, er is dus geen rekening gehouden met de tijd die het schip warend in

de toegangsgeul doorbrengt.

Wat ons opvalt is het afwijkende stroombeeld in het punt (9,25).

De afwijkingen zijn het duidelijkst op de tijdstippen 3, 4, 9 en 10, maar ook op andere tijdstippen is de stroomsnelheid in punt (9,25) geen logische verbinding tussen die in de punten (9,24) en (8,26).

Een nadere beschouwing van de computer-uitvoer leert, dat dit veroorzaakt moet zijn door een systeemfout in het programma of in de rekenmethode.

Het verschijnsel treedt op in de buurt van de Zuid-west-rand van het  $T_2$  model, maar het treedt ook op in de buurt van de Zuid-west-rand van zowel het  $T_0$  als het  $T_1$  model, terwijl dit toch wel degelijk twee verschillende randen zijn. Vreemde bijkomstigheid is dat de afwijking zich alleen voordoet in de u-component van de snelheid en niet in de v-component. We doen er daarom goed aan niet teveel waarde te hechten aan de afwijkingen in punt (9,25). Een verklaring van dit verschijnsel zal gegeven worden in hoofdstuk VIII.

Kijken we verder naar de bijlagen VI-20 t/m VI-23, dan zien we dat direct vóór de havenmond de watersnelheden dwars op de vaargeul erg groot worden. Op tijdstip 12 wordt zelfs 1,1 m./sec. gemeten. Of een dergelijke dwarsstroming uit nautisch of morfologisch oogpunt aanvaardbaar is, en zo niet, wat we eraan kunnen doen, is een onderwerp voor verdere studie. De langs- en dwarsstromen in de geul op grotere afstand van de havenmond blijken geen problemen te geven voor de scheepvaart. Een schip heeft namelijk maar betrekkelijk weinig last van een constante dwarsstroom; pas als die dwarsstroom van plaats tot plaats sterk wijzigt, gaat dit een probleem vormen voor de bestuurbaarheid.

Een fraai overzicht van het stroombeeld van het gehele  $T_2$  model wordt gegeven door de plots (plotboek 2). Met tussenpozen van 3600 sec. wordt hier een stroombeeld gegeven. Doordat de capaciteit van het plotgeheugen niet groot genoeg is om de snelheden in alle netwerkpunten van het  $T_2$  model te bevatten, heb ik het aantal punten waarin de snelheid geplotted wordt tot 25% moeten reduceren. Zowel in x- als y-richting ligt er tussen de punten waarin de snelheid geplotted wordt dus nog een rekenpunt van het netwerk.

### Springtij - doodtij

Raadpleging van de "Getijtafels voor de Nederlandse kust 1975" leert ons, dat de periode waarover onze getijberekening zich uitstrekt - 1-9-1975 om 20.30 uur tot 2-9-1975 om 21.30 uur - vrijwel samenvalt met het doodtij volgend op de maanstand Laatste Kwartier (30-8-1975 om 00.20 uur).

De normale waterstanden bij Hoek van Holland voor de diverse maanstanden zijn:

	<u>H.W.</u>	<u>L.W.</u>	<u>H.W.-L.W.</u>
Springtij	+ 130	- 85	215
Gemiddeld tij	+ 100	- 71	171
Doodtij	+ 71	- 56	127

(waterstanden in centimeters t.o.v. N.A.P.)

Als wij ons nu realiseren dat getijstromen veroorzaakt worden door een waterspiegelverhang en als we ons realiseren dat, als we twee verschillende waterstanden in twee verschillende punten met een bepaalde factor vermenigvuldigen, dan ook het gemiddelde waterspiegelverhang tussen die twee punten met diezelfde factor groter wordt, dan kunnen we met behulp van de formule van Chezy een factor bepalen, waarmee we een relatie krijgen tussen waterstanden en optredende stroomsnelheden.

$$v = C\sqrt{hi} = C\sqrt{h} \cdot \sqrt{i} = C\sqrt{h} \cdot \sqrt{\left(\frac{h_1 - h_2}{L_{12}}\right)} = C\sqrt{\frac{h}{L_{12}}} \cdot \sqrt{h_1 - h_2}$$

$$= \text{konst.} \cdot \sqrt{h_1 - h_2}$$

v = stroomsnelheid

C = konstante van Chezy

i = waterspiegelverhang

h = waterdiepte

L12 = afstand tussen twee punten

1,2 = indice behorende bij resp. punt 1 en 2

We kunnen nu een vermenigvuldigingsfactor bepalen, waarmee de watersnelheden bij doodtij vermenigvuldigd moeten worden om de watersnelheden bij gemiddeld tij en springtij te berekenen.

$$v_{\text{Springtij}} = \sqrt{\frac{215}{127}} \cdot v_{\text{Doodtij}} = 1,30 \cdot v_{\text{Doodtij}}$$

$$v_{\text{Gem.tij}} = \sqrt{\frac{171}{127}} \cdot v_{\text{Doodtij}} = 1,16 \cdot v_{\text{Doodtij}}$$

Zoals in hoofdstuk VII wordt aangetoond, wordt in dit geval de getijbeweging echter beheerst door de coriolis-termen uit de bewegingsvergelijkingen en door die termen uit de bewegingsvergelijkingen en continuïteitsvergelijking waarin de afgeleide van  $h$  naar tijd of weg voorkomt. De weerstandstermen spelen, door de grote diepte (ca. 22 m), een ondergeschikte rol.

Het is dus veel aanneemlijker om te veronderstellen dat de optredende stroomsnelheden evenredig zijn met de verandering van  $h$  met de tijd of de plaats, en dus evenredig met  $h$ . We krijgen dan:

$$v_{\text{Springtij}} = \frac{215}{127} \cdot v_{\text{Doodtij}} = 1,70 \cdot v_{\text{Doodtij}}$$

$$v_{\text{Gem.tij}} = \frac{171}{127} \cdot v_{\text{Doodtij}} = 1,35 \cdot v_{\text{Doodtij}}$$

In de praktijk is het gebruikelijk om het gemiddelde te nemen van beide invloeden zodat:

$$v_{\text{Springtij}} = \frac{1,30 + 1,70}{2} \cdot v_{\text{Doodtij}} = 1,50 \cdot v_{\text{Doodtij}}$$

$$v_{\text{Gem.tij}} = \frac{1,16 + 1,35}{2} \cdot v_{\text{Doodtij}} = 1,25 \cdot v_{\text{Doodtij}}$$

Herinneren we ons nu de opmerking dat het model de snelheden ca. 10% groter weergeeft dan de werkelijkheid, dan worden de maximaal optredende stroomsnelheden direct vóór de havenmond:

$$v_{\text{Doodtij}} = 1,05 \text{ m/sec.}$$

$$v_{\text{Gem.tij}} = 1,30 \text{ m/sec.}$$

$$v_{\text{Springtij}} = 1,50 \text{ m/sec.}$$

## HOOFDSTUK VII

### Analyse van de differentiaalvergelijkingen

#### *Inleiding*

In aansluiting op de getijberekening volgt nu een analyse van het rekenproces. Deze analyse spitst zich vooral toe op het berekenen van de afzonderlijke termen van de bewegingsvergelijking en de continuïteitsvergelijkingen in x- en y-richting. Hierdoor wordt een duidelijke indruk verkregen van de grootte van de invloeden die de getijbeweging beheersen. Als basis voor het berekenen van de afzonderlijke termen dient de uitvoer van de  $T_1$ -berekening.

#### *Het rekenproces*

Het computerprogramma waarmee mijn getijberekening is gemaakt, is ontwikkeld door de heer N. Booy, medewerker van de vakgroep vloeistofmechanica van de Afdeling der Civiele Techniek aan de T.H.-Delft. De basis voor het gebruikte rekenproces wordt gelegd in het proefschrift van dr. J.J. Leendertse (lit.). Het is echter zodanig aangepast dat een aanzienlijke besparing in de rekentijd wordt verwezenlijkt. In het rekenschema van Leendertse worden eerst van tijdstip  $t$  tot tijdstip  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  volgens een impliciete rekenmethode de waterstanden 'h' en de snelheden in x-richting 'u' uitgerekend. Vervolgens worden op het tijdstip  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  de snelheden in y-richting 'v' volgens een expliciete rekenmethode bepaald. In de tijdstap van  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  tot  $t + \Delta t$  is de berekening impliciet in h en v en expliciet in u. Per tijdstap  $\Delta t$  worden dus u, v en h allemaal twee keer berekend voor elke maas van het netwerk.

Het rekenschema van Booy rekent in de tijdstap van  $t$  tot  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  volgens een impliciete methode h en u uit in elk punt, zonder daarna expliciet v te berekenen. In de tijdstap van  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  tot  $t + \Delta t$  wordt vervolgens de h en v berekend in dat punt. Per tijdstap  $\Delta t$  wordt nu dus tweemaal een waterstand en eenmaal een u en een v uitgerekend. Het is duidelijk dat dit een grote besparing in rekenkosten met zich meebrengt. Het is gebleken dat de nauwkeurigheid van de berekening nauwelijks door de aangebrachte veranderingen wordt beïnvloed. Een en ander heeft wel gevolgen voor de interpretatie van de uitvoer van de berekeningen. Als wij bijvoorbeeld waarden laten uitvoeren op het tijdstip  $n\Delta t$ , dan moeten we ons realiseren dat de uitgevoerde h's en v's inderdaad voor dat tijdstip gelden, maar dat de uitgevoerde u's gelden voor het tijdstip  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$ .



Dus behalve dat de uitgevoerde u's en v's niet op exact dezelfde plaats gelden (zie b.v. hoofdstuk IV), gelden ze ook niet op hetzelfde tijdstip. Ze zijn  $\frac{1}{2}\Delta t$  ten opzichte van elkaar verschoven.

### *De differentiebenaderingen*

In deze paragraaf worden de differentiebenaderingen van de termen van de bewegingsvergelijkingen in x- en y-richting en de continuïteitsvergelijking besproken. Voor de vergelijkingen wordt verwezen naar hoofdstuk II.

Met die differentiebenaderingen kan het verloop in de tijd van de termen van bewegingsvergelijkingen en continuïteitsvergelijking afzonderlijk berekend worden, hetgeen het inzicht in de getijbeweging verbetert. In hoofdstuk III zijn de differentiebenaderingen van de termen zoals die zijn verwerkt in het TIDES-programma beschreven en getekend. In deze differentiebenaderingen komen h's, u's en v's voor op verschillende tijdstippen. Hierdoor is het mogelijk om met het in hoofdstuk III opgestelde differentieschema in de tijd vooruit te rekenen. Het is dus mogelijk om uit waarden van h, u en v op een bepaald tijdstip waarden van h, u en v te bepalen op een later tijdstip.

Met het in hoofdstuk III beschreven differentieschema is het ook mogelijk om uit waarden van h, u en v in een bepaald punt van het netwerk, waarden van h, u en v te bepalen in een ander, nabij gelegen, punt van dat netwerk.

Hoewel de boven beschreven eigenschappen essentieel zijn voor het uitvoeren van een getijberekening, maken zij het onmogelijk om dit schema te gebruiken voor een berekening van de termen van de bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking. De differentiebenaderingen zoals gebruikt in het computerprogramma vereisen n.l. informatie over h, u en v op de tijdstippen  $n \cdot \Delta t$  en op de tijdstippen  $(n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$ , terwijl de uitvoer van het programma zo geregeld is dat alleen waarden van h, u en v worden uitgevoerd op de tijdstippen  $n \cdot \Delta t$ .

Het is voor een afzonderlijke berekening van de termen dus noodzakelijk dat het rekenschema van TIDES zodanig aangepast wordt dat de door de computer uitgevoerde h's, u's en v's voldoende zijn om de differentiebenadering te kunnen berekenen. Dit aangepaste TIDES rekenschema wordt "het schema volgens TIDES met tijdcorrecties" genoemd.

Naast dit aangepaste TIDES-schema is ook een rekenschema opgesteld dat volledig gebaseerd is op de centrale differentiebenadering zowel in de



tijd als in de plaats.

Er wordt verwacht dat met de centrale differentiebenadering een nauwkeuriger beschrijving van de termen van bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking wordt verkregen dan met het gecorrigeerde schema volgens TIDES.

Dit omdat bij het schema volgens TIDES concessies zijn gedaan aan de kwaliteit van de differentiebenadering om van de ene plaats naar de andere en in de tijd vooruit te kunnen rekenen.

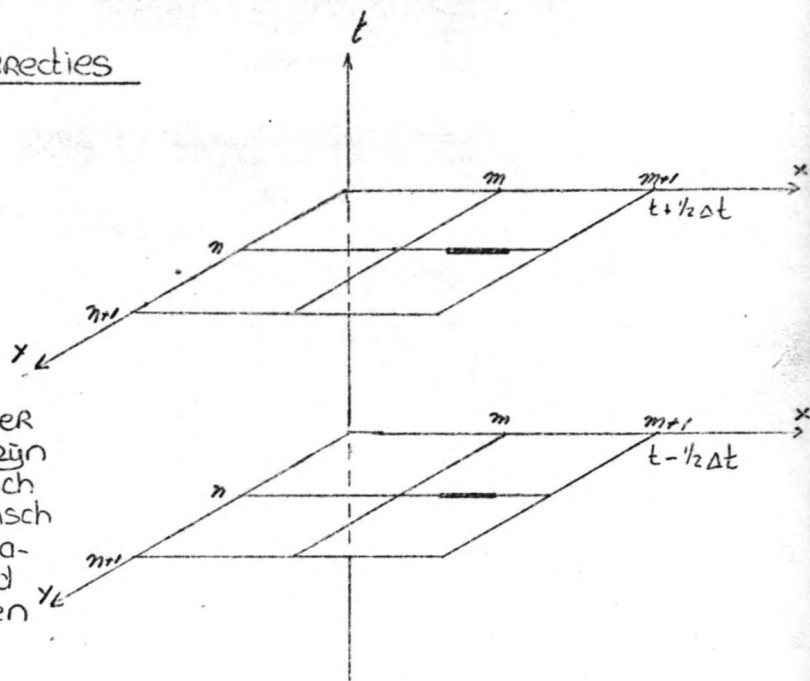
Beide rekenschema's zijn opgesteld voor differentiebenaderingen in het punt  $(m, n)$  op het tijdstip  $t$ .

# Het schema volgens Tides met tijdcorrecties

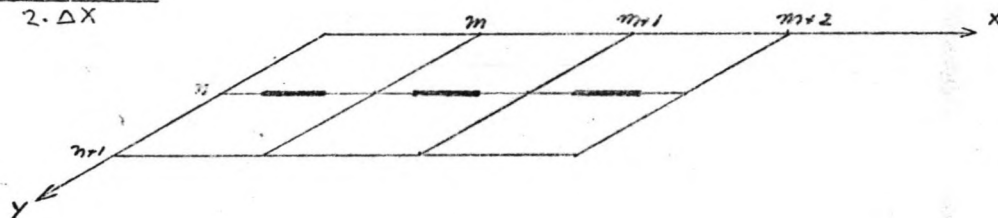
## Bewegingsvgl. in x-Richting

$$1) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n \approx \frac{u_{m+1/2}^n t + 1/2 \Delta t - u_{m+1/2}^{n-1} t - 1/2 \Delta t}{\Delta t}$$

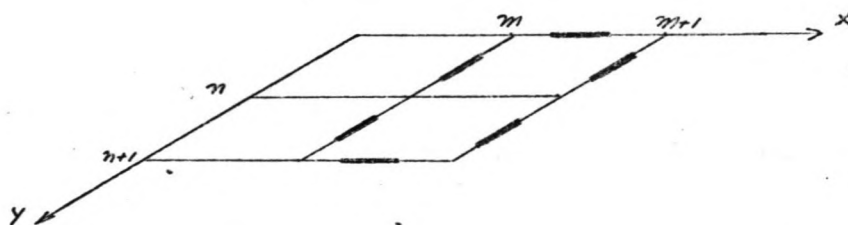
Dit differentieschema is met mijn uitvoer niet te berekenen. Dit zou wel mogelijk zijn over het tijdsinterval  $(t - \Delta t, t + \Delta t)$ , doch de hoeveelheid uitvoer zou dan zo gigantisch worden dat besloten is deze term te benaderen door het verloop van  $u$  met de tijd te schetsen en door middel van Raaklijnen aan die kromme  $\frac{\partial u}{\partial t}$  te schatten.



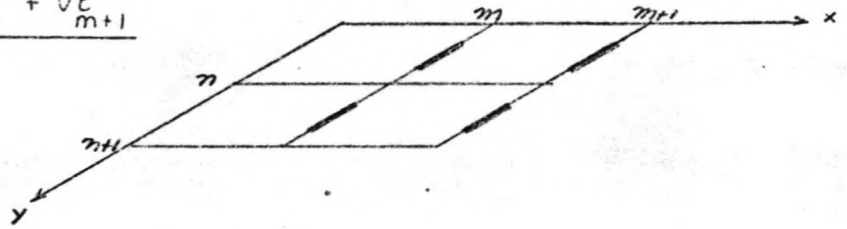
$$2) \left( u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n \approx u_{m+1/2}^n \cdot \frac{u_{m+3/2}^n - u_{m-1/2}^n}{2 \cdot \Delta x}$$



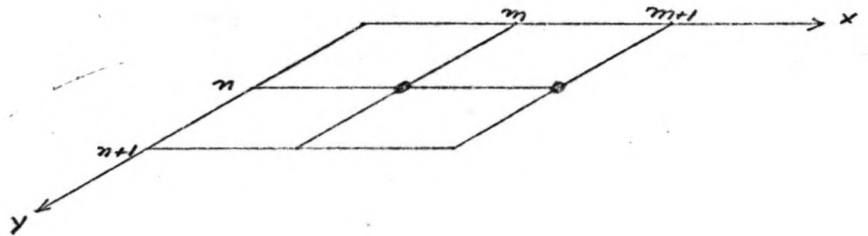
$$3) \left( v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_m^n \approx \frac{v_{m+1/2}^{n+1/2} + v_{m+1/2}^{n-1/2} + v_{m+1}^{n+1/2} + v_{m+1}^{n-1/2}}{4} \times \frac{u_{m+1/2}^{n+1} - u_{m+1/2}^{n-1}}{2 \cdot \Delta y}$$



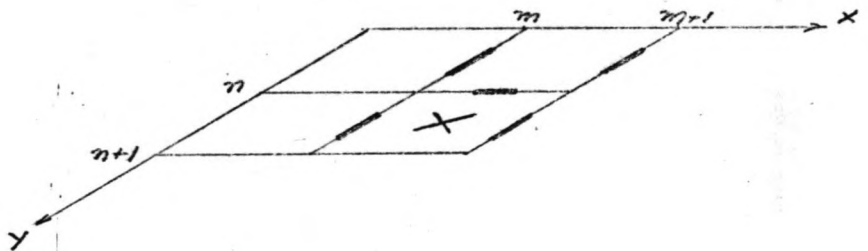
$$4) (\Omega \cdot V)_m^n \approx \Omega \cdot \frac{V_m^{n+1/2} + V_m^{n-1/2} + V_{m+1}^{n+1/2} + V_{m+1}^{n-1/2}}{4}$$



$$5) \left(g \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right)_m^n \approx g \cdot \frac{h_m^n - h_m^{n+1}}{\Delta x}$$

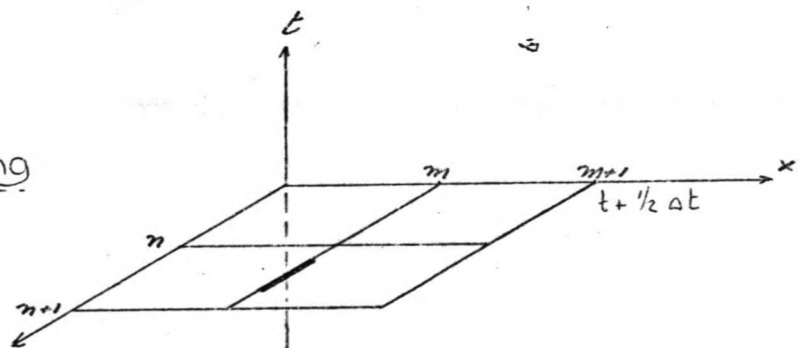


$$6) \left(f \cdot \frac{U \cdot (U^2 + V^2)^{1/2}}{D}\right)_m^n \approx f \cdot \frac{U_m^{n+1/2} \cdot \left\{ U_m^{n+1/2} + \left( \frac{V_m^{n+1/2} + V_m^{n-1/2} + V_{m+1}^{n+1/2} + V_{m+1}^{n-1/2}}{4} \right)^{1/2} \right\}}{h_m^n - z_m^{n+1/2}}$$

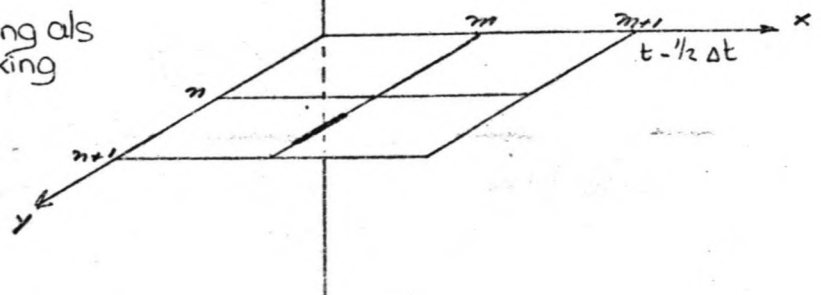


Bewegingsvergelijking in y-Richting

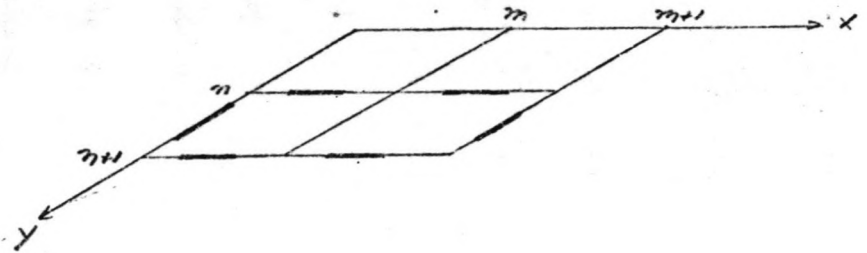
$$1) \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_m^n \approx \frac{V_m^{n+1/2} - V_m^{n-1/2}}{\Delta t}$$



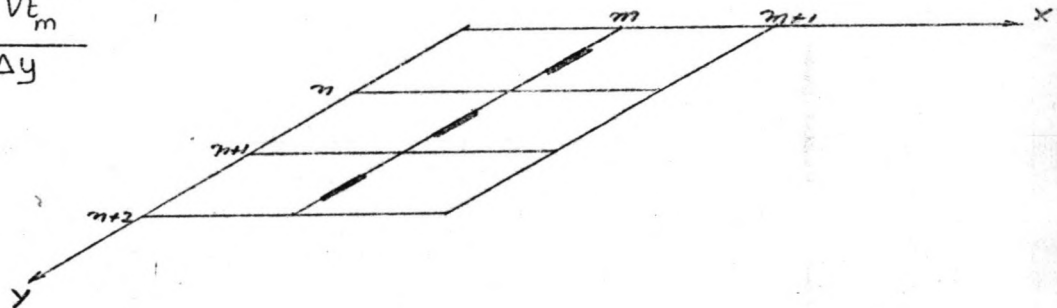
Hiervoor geldt dezelfde opmerking als voor (1) in de bewegingsvergelijking in x-Richting



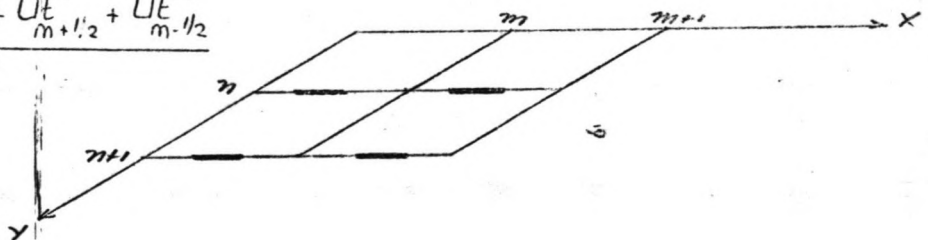
$$2) \left( u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)_m^n \approx \frac{u_{m+1/2}^n + u_{m-1/2}^n + u_{m+1/2}^{n+1} + u_{m-1/2}^{n+1}}{4} \times \frac{v_{m+1}^{n+1/2} - v_{m-1}^{n+1/2}}{2 \Delta x}$$



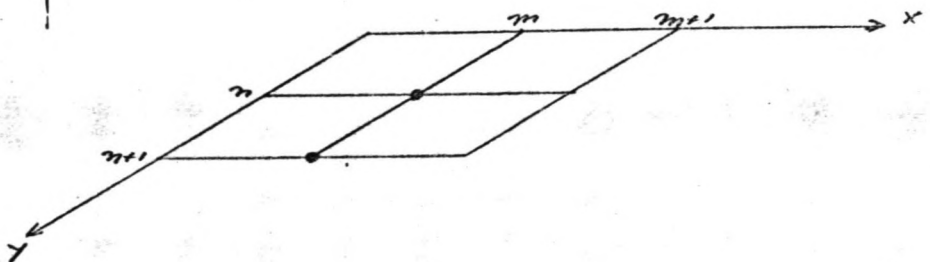
$$3) \left( v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)_m^n \approx v_m^{n+1/2} \cdot \frac{v_m^{n+3/2} - v_m^{n-1/2}}{2 \Delta y}$$



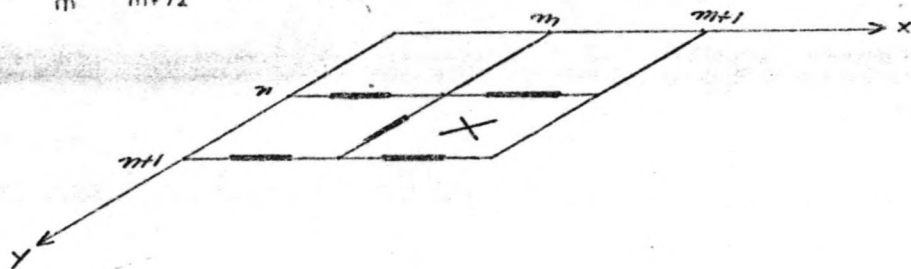
$$4) \left( -\Omega \cdot u \right)_m^n \approx -\Omega \cdot \frac{u_{m+1/2}^n + u_{m-1/2}^n + u_{m+1/2}^{n+1} + u_{m-1/2}^{n+1}}{4}$$



$$5) \left( g \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right)_m^n \approx g \cdot \frac{h_m^{n+1} - h_m^n}{\Delta y}$$



$$b) \left( f \cdot \frac{V(V^2 + U^2)^{1/2}}{D} \right)_m^n \approx \underbrace{f \cdot V_{t_m}^{n+1/2} \cdot \left\{ V_{t_m}^{n+1/2^2} + \left( U_{t_{m+1/2}}^n + U_{t_{m-1/2}}^n + U_{t_{m+1/2}}^{n+1} + U_{t_{m-1/2}}^{n+1} \right)^2 \right\}^{1/2}}_{h_{t_m}^n - z_{m+1/2}^{n+1/2}}$$

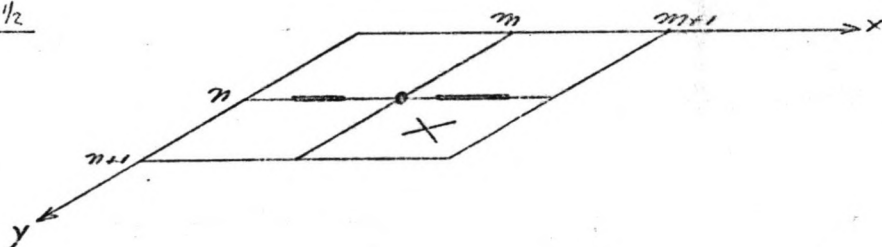


Continuïteitsvergelijking

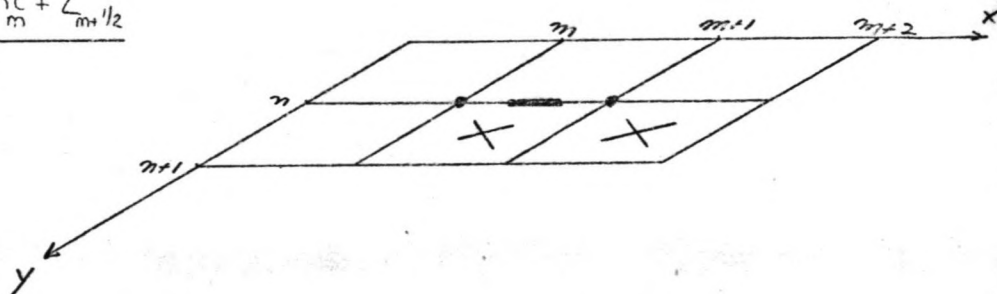
$$1) \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_m^n \approx \frac{h_{t_m}^{n+1/2} - h_{t_m}^{n-1/2}}{\Delta t}$$

Hierboor geldt weer dezelfde opmerking als voor (1) in de bewegingsvergelijking in x-Richting

$$2) \left( D \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n \approx \left( h_{t_m}^n - z_{m+1/2}^{n+1/2} \right) \cdot \frac{U_{t_{m+1/2}}^n - U_{t_{m-1/2}}^n}{\Delta x}$$

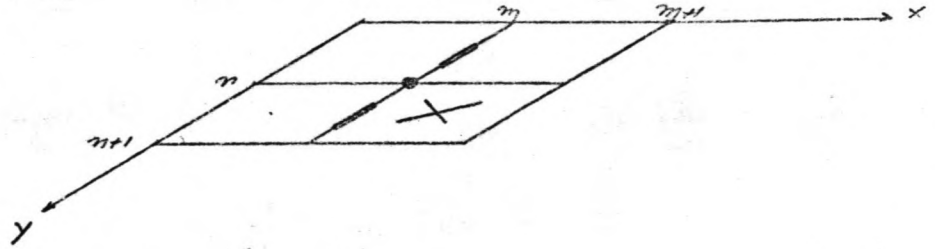


$$3) \left( U \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right)_m^n \approx U_{t_{m+1/2}}^n \cdot \frac{h_{t_{m+1}}^{n+1/2} - z_{m+3/2}^{n+1/2} - h_{t_m}^{n+1/2} + z_{m+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}$$

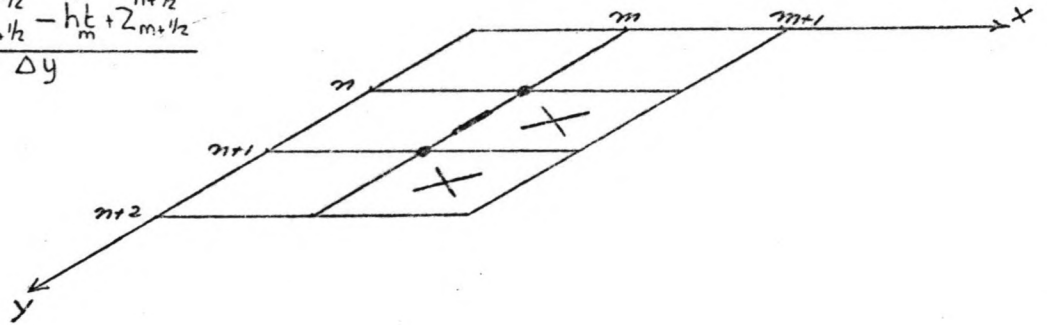




$$4) \left( D \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \right)_m^n \approx \left( h_m^n - z_{m+1/2}^{n+1/2} \right) \cdot \frac{V_m^{n+1/2} - V_m^{n-1/2}}{\Delta y}$$



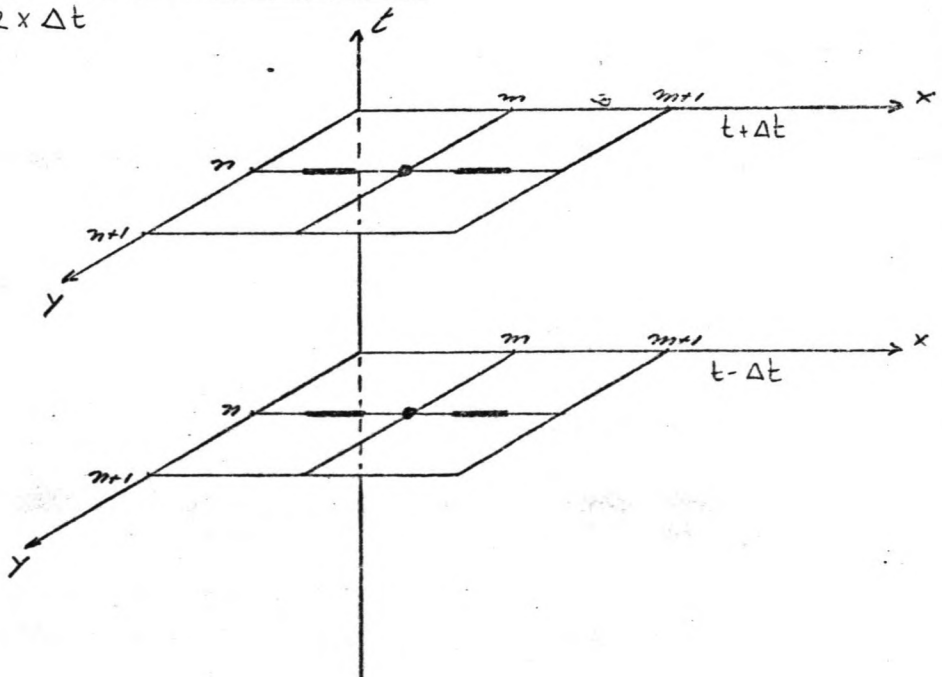
$$5) \left( V \cdot \frac{\partial D}{\partial y} \right)_m^n \approx V_m^{n+1/2} \cdot \frac{h_m^{n+1} - z_{m+1/2}^{n+3/2} - h_m^n + z_{m+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}$$



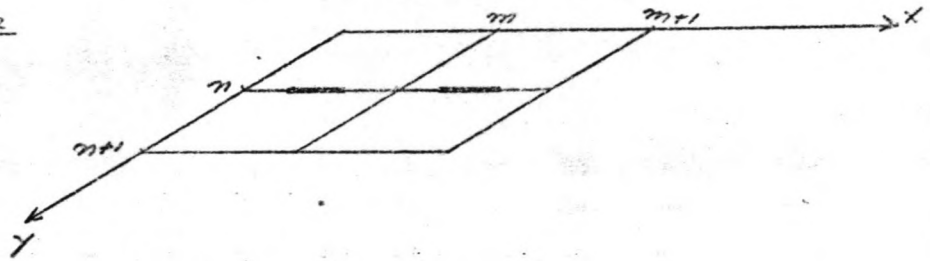
Centrale differentiebenaderingen voor de termen in de differentiaalvergelijkingen

Bewegingsvergelijking in x-Richting; geldig voor punt (m, n) en tijdstip t

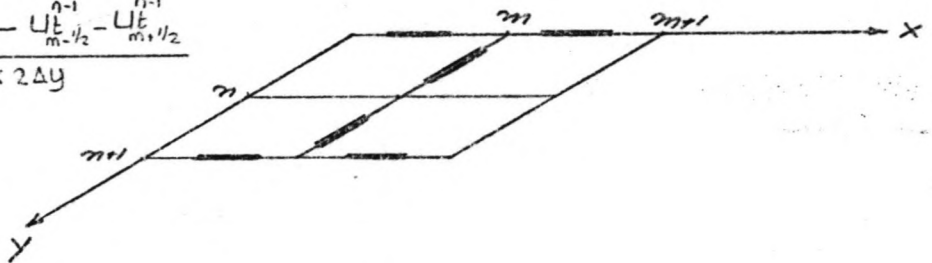
$$D \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n \equiv \frac{\frac{u_{m+1/2}^n + \Delta t}{2} + \frac{u_{m-1/2}^n + \Delta t}{2} - \frac{u_{m+1/2}^{n-1} + \Delta t}{2} - \frac{u_{m-1/2}^{n-1} + \Delta t}{2}}{2 \times \Delta t}$$



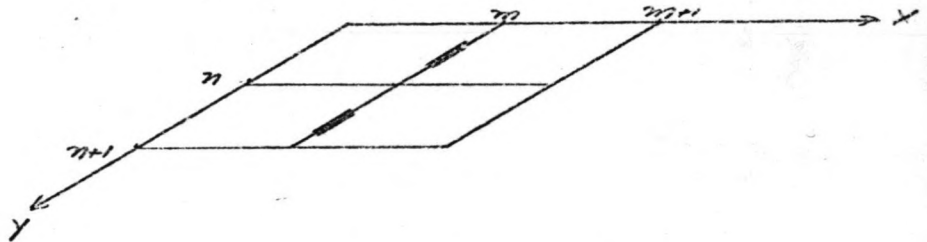
$$2) \left( U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right)_n^m \equiv \frac{U_{m-1/2}^n + U_{m+1/2}^n}{2} \cdot \frac{U_{m+1/2}^n - U_{m-1/2}^n}{\Delta x}$$



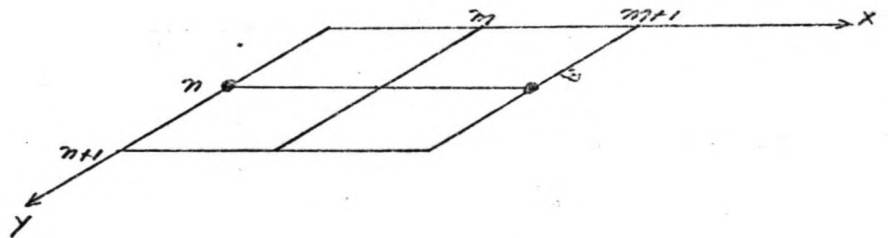
$$3) \left( V \frac{\partial U}{\partial y} \right)_n^m \equiv \frac{V_{m-1/2}^{n-1/2} + V_{m+1/2}^{n+1/2}}{2} \cdot \frac{U_{m+1/2}^{n+1} + U_{m+1/2}^n - U_{m-1/2}^{n-1} - U_{m-1/2}^n}{2 \times 2 \Delta y}$$



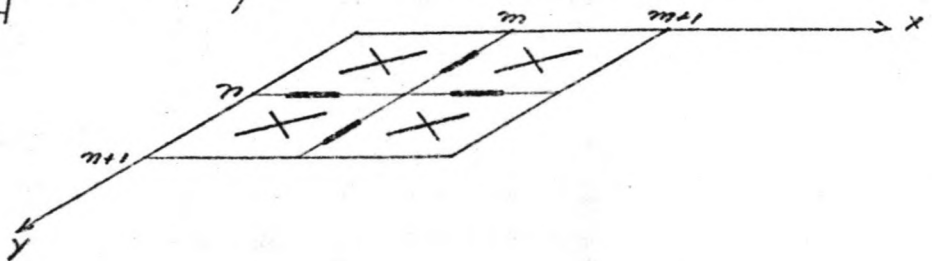
$$4) (\Omega \times V)_n^m \equiv \Omega \cdot \frac{V_{m-1/2}^{n-1/2} + V_{m+1/2}^{n+1/2}}{2}$$



$$5) \left( g \frac{\partial h}{\partial x} \right)_n^m \equiv g \cdot \frac{h_{m+1}^n - h_{m-1}^n}{2 \cdot \Delta x}$$

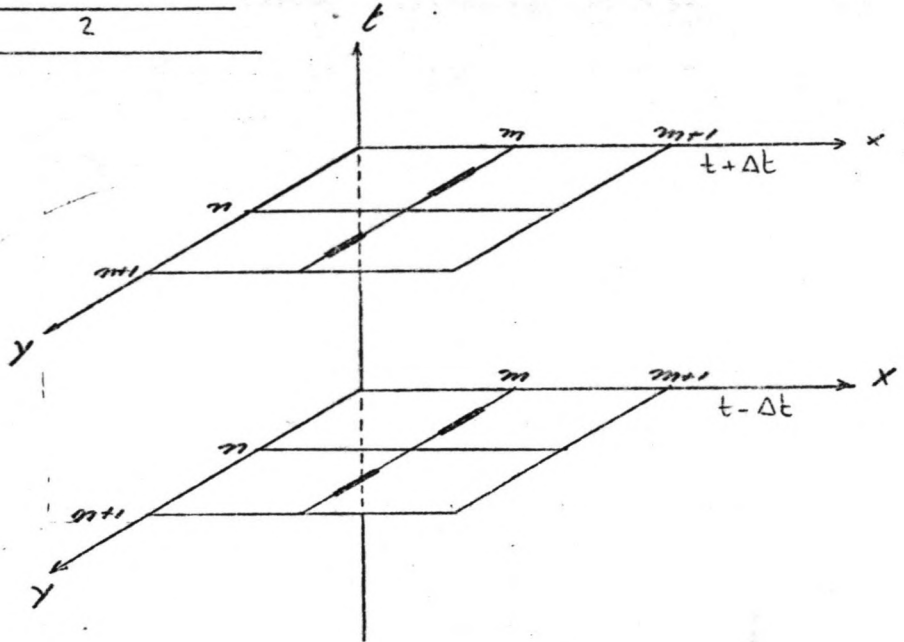


$$6) \left( f \cdot \frac{U(U^2 + V^2)^{1/2}}{D} \right)_n^m \equiv \frac{\left( \frac{U_{m+1/2}^n + U_{m-1/2}^n}{2} \right) \cdot \left\{ \left( \frac{U_{m+1/2}^n + U_{m-1/2}^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{V_{m+1/2}^{n+1/2} + V_{m-1/2}^{n-1/2}}{2} \right)^2 \right\}^{1/2}}{\left( \frac{h_m^n - (Z_{m+1/2}^{n+1/2} + Z_{m-1/2}^{n-1/2} + Z_{m+1/2}^{n-1/2} + Z_{m-1/2}^{n+1/2})}{4} \right)}$$

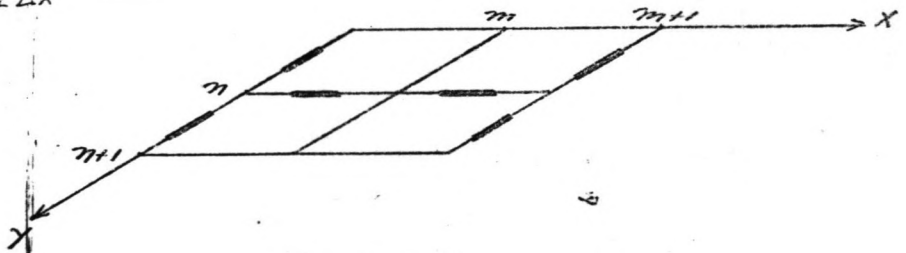


Bewegingsvergelijking in de y-richting

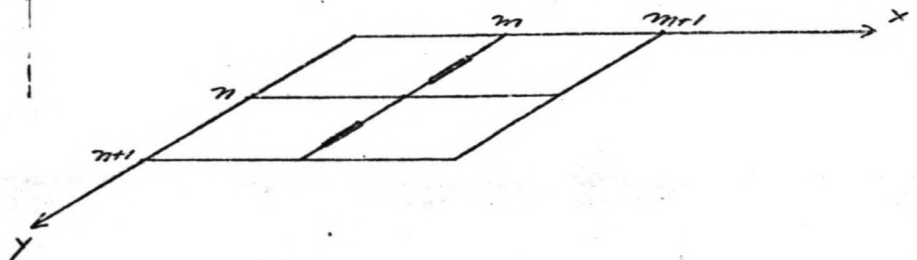
$$1) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_m^n \equiv \frac{\frac{v_m^{n+1/2} \Delta t + v_m^{n-1/2} \Delta t}{2} - \frac{v_m^{n+1/2} \Delta t + v_m^{n-1/2} \Delta t}{2}}{2 \cdot \Delta t}$$



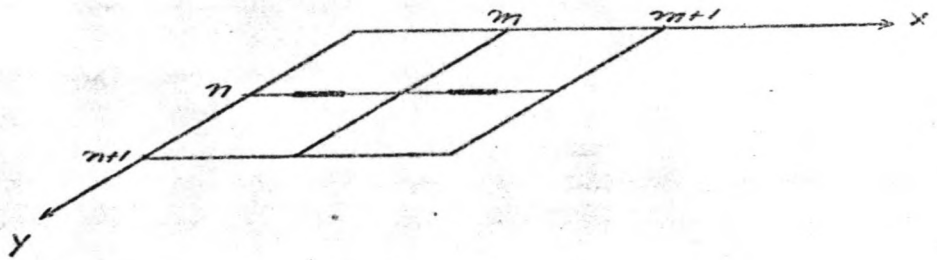
$$2) \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right)_m^n \equiv \frac{u_m^{n+1/2} + u_m^{n-1/2}}{2} \cdot \frac{v_{m+1}^{n+1/2} + v_{m+1}^{n-1/2} - v_{m-1}^{n+1/2} - v_{m-1}^{n-1/2}}{2 \cdot 2 \Delta x}$$



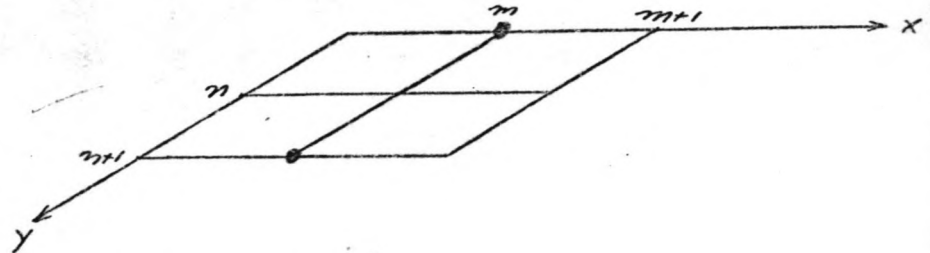
$$3) \left( v \frac{\partial v}{\partial y} \right)_m^n \equiv \frac{v_m^{n+1/2} + v_m^{n-1/2}}{2} \cdot \frac{v_m^{n+1/2} - v_m^{n-1/2}}{\Delta y}$$



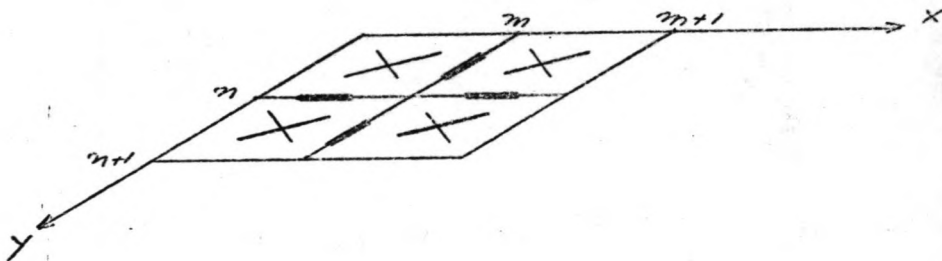
$$4) (-\Omega \cdot U)_m^n \equiv -\Omega \cdot \frac{U_{m+1/2}^n + U_{m-1/2}^n}{2}$$



$$5) \left(g \frac{\partial h}{\partial y}\right)_m^n \equiv g \cdot \frac{h_m^{n+1} - h_m^{n-1}}{2 \cdot \Delta y}$$

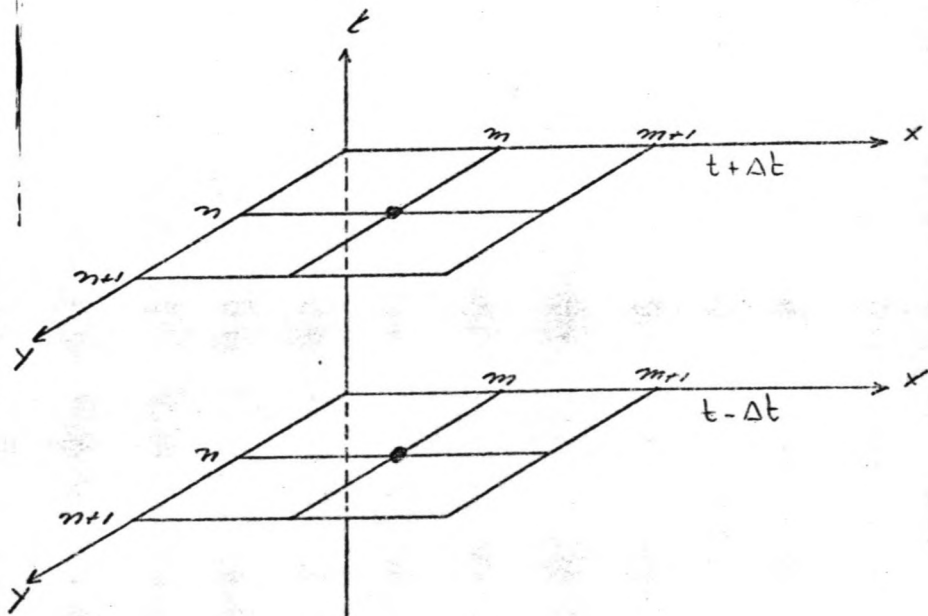


$$6) \left(f \cdot \frac{v(U^2 + V^2)^{1/2}}{D}\right)_m^n \equiv f \cdot \left( \frac{V_m^{n+1/2} + V_m^{n-1/2}}{2} \right) \left\{ \left( \frac{U_{m+1/2}^n + U_{m-1/2}^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{V_{m+1/2}^{n-1/2} + V_{m-1/2}^{n-1/2}}{2} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ \left( h_m^n - \frac{Z_{m+1/2}^{n+1/2} + Z_{m+1/2}^{n-1/2} + Z_{m-1/2}^{n+1/2} + Z_{m-1/2}^{n-1/2}}{4} \right)$$

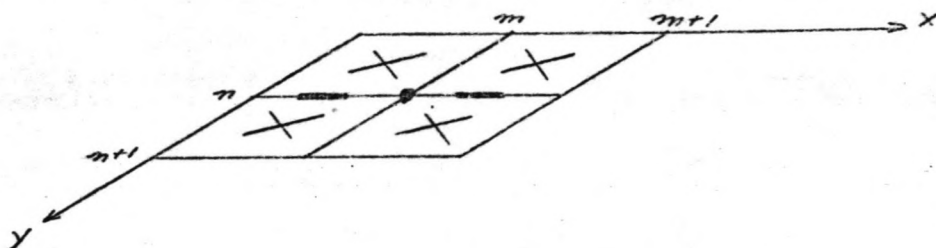


Continuïteitsvergelijking

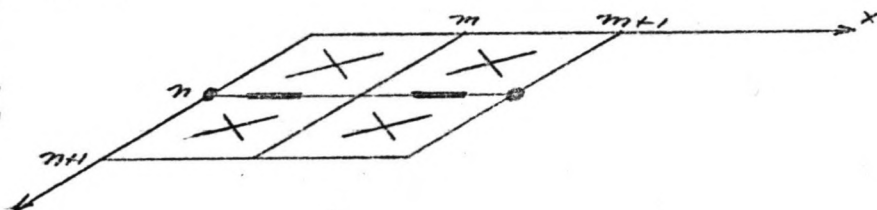
$$1) \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_m^n \equiv \frac{h_m^{n+1} + 3600 - h_m^n - 3600}{2 \cdot 3600}$$



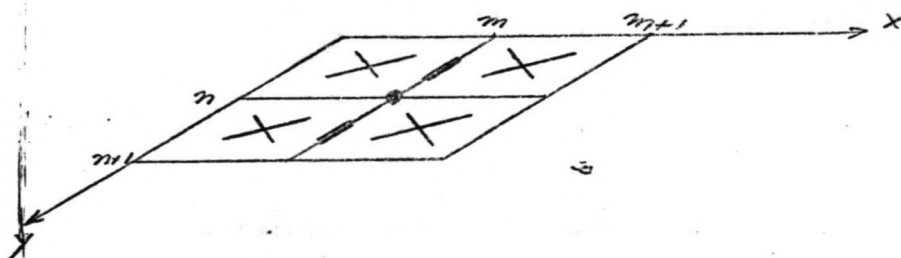
$$2) \left( (h-z) \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n \equiv \left( h_m^n - \left( \frac{z_{m+1/2}^{n+1/2} + z_{m-1/2}^{n+1/2} + z_{m+1/2}^{n-1/2} + z_{m-1/2}^{n-1/2}}{4} \right) \right) \cdot \frac{u_{m+1/2}^n - u_{m-1/2}^n}{\Delta x}$$



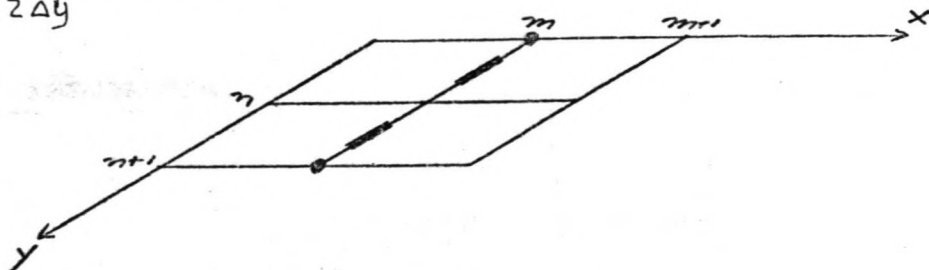
$$3) \left( U \frac{\partial (h-z)}{\partial x} \right)_m^n \equiv \frac{u_{m-1/2}^n + u_{m+1/2}^n}{2} \cdot \frac{(h_{m+1}^n - h_{m-1}^n - z_{m+1/2}^{n+1/2} - z_{m+1/2}^{n-1/2} + z_{m-1/2}^{n+1/2} + z_{m-1/2}^{n-1/2})}{2 \Delta x}$$



$$4) \left( D \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \right)_m^n \equiv \left( h_m^n - \frac{z}{4} \right) \cdot \frac{V_{m+1/2}^n + V_{m-1/2}^n}{\Delta y}$$



$$5) \left( V \cdot \frac{\partial D}{\partial y} \right)_m^n \equiv \frac{V_{m+1/2}^n + V_{m-1/2}^n}{2} \cdot \frac{h_{m+1}^n - z_{m+1/2}^{n+1/2} - z_{m+1/2}^{n-1/2} - h_{m-1}^n + z_{m-1/2}^{n+1/2} + z_{m-1/2}^{n-1/2}}{2 \Delta y}$$





Nu het differentieschema , waarmee we de differentiaalvergelijkingen kunnen benaderen ontworpen is, is het mogelijk om voor een beperkt aantal punten van het netwerk de afzonderlijke termen van de differentievergelijkingen te berekenen. We doen dit om een indruk te krijgen van het verloop van de termen tijdens een getijperiode. Het zal dan duidelijk worden welke termen van de differentie- c.q. differentiaalvergelijking het proces van de waterbeweging beheersen en welke een ondergeschikte rol spelen. We kunnen dan ook zien of termen die bijvoorbeeld op diep water en bij relatief rechte stroomlijnen een onbelangrijke rol spelen, in andere omstandigheden de waterbeweging voor een belangrijker deel bepalen.

Om te verduidelijken hoe de uitvoergegevens van de computer in de differentieschema's worden ingevuld, wordt voor een netwerk van 5 mazen in x- en y-richting een demonstratie gegeven:

De computer verstrekt waterstanden in de punten (m, n)

$u's \quad " \quad " \quad " \quad (m + \frac{1}{2}, n)$   
 $v's \quad " \quad " \quad " \quad (m, n + \frac{1}{2})$   
 $\text{waterdiepten} \quad " \quad " \quad " \quad (m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$

H	<u>m-2</u>	<u>m-1</u>	<u>m</u>	<u>m+1</u>	<u>m+2</u>	U	<u>m-2</u>	<u>m-1</u>	<u>m</u>	<u>m+1</u>	<u>m+2</u>
n-2	10	11	13	14	16	n-2	20	21	23	23	24
n-1	12	13	16	16	18	n-1	18	20	23	21	25
n	12	14	13	16	19	n	17	20	22	20	23
n+1	13	15	16	17	20	n+1	17	19	22	19	22
n+2	15	16	16	18	20	n+2	16	18	20	19	21

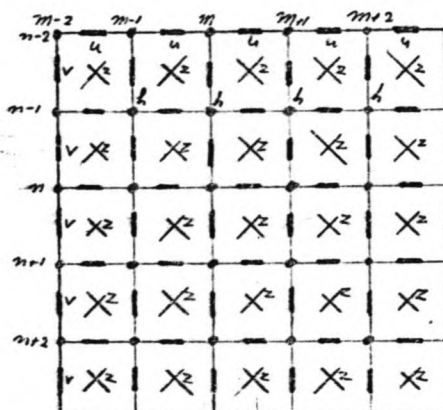
V	<u>m-2</u>	<u>m-1</u>	<u>m</u>	<u>m+1</u>	<u>m+2</u>	Z	<u>m-2</u>	<u>m-1</u>	<u>m</u>	<u>m+1</u>	<u>m+2</u>
n-2	33	34	34	33	31	n-2	-210	-212	-214	-213	-215
n-1	32	33	34	33	30	n-1	-216	-215	-217	-214	-216
n	30	31	30	32	30	n	-217	-216	-215	-216	-218
n+1	29	30	31	30	29	n+1	-212	-214	-214	-213	-215
n+2	29	30	32	29	27	n+2	-220	-218	-216	-214	-216

H in cm.

U, V in cm./sec.

Z in cm.

Als we H, U en V in een plat vlak willen weergeven, ziet die figuur er als volgt uit:



Als we nu bijvoorbeeld de vijfde term van de continuïteitsvergelijking van het door mijzelf ontworpen differentieschema in het punt (m, n) willen berekenen, gaan we als volgt te werk:

$$\left( v \cdot \frac{\partial D}{\partial y} \right)_m = \frac{V_m^{n-1/2} + V_m^{n+1/2}}{2} \cdot \frac{h_m^{n+1} - 2h_m^{n+1/2} - 2h_m^{n-1/2} - h_m^{n-1} + 2h_m^{n-1/2} + 2h_m^{n+1/2}}{2 \cdot \Delta y}$$

Stel  $\Delta y = 1600$  m., dan wordt  $v \cdot \frac{\partial D}{\partial y}$

$$\frac{34+30}{2} \cdot \frac{16+216+215-13-215-217}{2 \cdot 1600} = 32 \cdot \frac{2}{2 \cdot 1600} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

Deze werkwijze wordt gevolgd voor alle termen van de bewegingsvergelijkingen in x- en y-richting en de continuïteitsvergelijking voor een aantal tijdstippen met een interval van 1 uur van een getijperiode.

### De resultaten

De procedure die in de vorige paragraaf uiteengezet is, wordt nu toegepast op het punt (7,24) van het  $T_1$  model (zie bijlage V-7).

De uitvoer van het computerprogramma is zo geregeld dat wordt uitgevoerd na 2 rekenstappen. In dit model, met  $\Delta t = 900$  sec., komt dit overeen met ieder half uur. Dit wordt voldoende geacht om een nauwkeurige getijkromme te kunnen tekenen.

Het punt (7,24) is in het model een zgn. 'net'punt; dat wil zeggen dat de stroomlijnen relatief weinig gebogen zijn en dat het bodemprofiel gelijkwaardig verloopt. De waterdiepte rond dit punt is ongeveer 22 m.

Voor het punt (7,24) is met beide differentieschema's, dus het schema dat zo dicht mogelijk aansluit bij het schema zoals verwerkt in het computerprogramma en het door mijzelf ontworpen schema dat volledig gebaseerd is op centrale differentiebenaderingen, een berekening gemaakt van de afzonderlijke termen van de differentiaalvergelijkingen.

Omdat de differentievergelijkingen slechts een benadering van de differentiaalvergelijkingen zijn, is de som van die termen niet precies 0; er is dus een rest- of sluitterm. De grootte van die term heb ik gebruikt om een indicatie te geven van de kwaliteit van de differentiebenadering.

Zoals te verwachten was geeft het door mijzelf ontworpen schema een kleinere restterm en dus een betere benadering van de differentiaalvergelijkingen.

In de bijlagen VII-4 t/m VII-10 en de tabel bijlage VII-11 zijn dan ook alleen de resultaten weergegeven van het door mijzelf ontworpen schema.

Nu volgt een bespreking van de resultaten van de afzonderlijke termen van de benadering van de differentiaalvergelijkingen.

#### bewegingsvergelijking in x-richting (N.W. → Z.O.)

1) Op bijlage VII-1 is de u-kromme getekend waaruit de  $\frac{\delta u}{\delta t}$  op de tijdstippen 0 t/m 12 zijn verkregen. Bij beschouwing van 1) op bijlage VII-5 valt het 'plateau' in de  $\frac{\delta u}{\delta t}$ -kromme tussen tijdstip 5 en 6 op. Dit is een logisch gevolg van het monotoon stijgen van de u-kromme op bijlage VII-4 tussen tijdstip 5 en 6.

2) ! Merk op dat de verticale schaal 10 maal vergroot is!

De invloed van deze term op de bewegingsvergelijking is erg klein. Dit is een gevolg van de keuze van punt (7,24) in een gebied van het model waar de stroomlijnen relatief recht zijn; daardoor is  $\frac{\delta u}{\delta x}$  erg klein.

Bij het beschouwen van 2) op bijlage VII-5 valt op dat  $u \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$  meerdere nuldoorgangen heeft en vrijwel steeds negatief is. Dit is een gevolg van het in tegenfase zijn van de functies u en  $\frac{\delta u}{\delta x}$ .

3) ! Schaal 10 maal vergroot!

Hetzelfde beeld als in 2) treedt ook hier op. Een relatief kleine invloed op de bewegingsvergelijking en veel nuldoorgangen. Beide zijn een gevolg van een kleine  $\frac{\delta u}{\delta y}$ . Door de kleine waarde zal namelijk door een toevallige verandering in bijvoorbeeld de bodemligging het teken snel omslaan.

4) Direct valt op dat deze Coriolis-term een overheersende rol speelt in de bewegingsvergelijking. Hij beheerst voor een belangrijk gedeelte de

waterbeweging.

Merk op dat het verloop van  $\Omega.v$  natuurlijk gelijkvormig is aan dat van  $v$  ( $\Omega$  is immers slechts een constante).

- 5) Zoals te verwachten was is  $g \cdot \frac{\delta h}{\delta x}$  de belangrijkste term in de bewegingsvergelijking. Deze term maakt evenwicht met de gecombineerde invloed van  $\frac{\delta u}{\delta t}$  en  $\Omega.v$  en de andere termen.

Zoals op bijlage VII-6 te zien is, heeft de functie een glad verloop. Dit vindt zijn oorzaak in het regelmatige stroombeeld in het beschouwde punt.

- 6) Zoals we op bijlage VII-6 zien is de invloed van de weerstandsterm niet erg groot. Dit is natuurlijk een gevolg van de diepte van  $\pm 22$  m. in punt (7,24). De weerstandsterm is namelijk bij diepten waarvoor  $h$  klein is t.o.v.  $D$  vrijwel omgekeerd evenredig met die diepte.

Verder valt op dat het teken van de weerstandsterm bepaald wordt door het verloop van  $u$ .

#### bewegingsvergelijking in y-richting (N.O. $\rightarrow$ Z.W.)

- 1)  $\frac{\delta v}{\delta t}$  wordt verkregen uit  $v$ , zoals getekend op bijlage VII-2.

Op bijlage VII-7 in figuur 1) is het verloop getekend van  $\frac{\delta v}{\delta t}$ . Omdat  $v$  groter is dan  $u$ , maar wel hetzelfde periodieke verloop heeft, is  $\frac{\delta v}{\delta t}$  groter dan  $\frac{\delta u}{\delta t}$ .

- 2) ! Schaal 10 maal vergroot!

We zien een zeer kleine invloed van deze term op de bewegingsvergelijking. Dit wordt veroorzaakt door een combinatie van een kleine  $u$  en een kleine  $\frac{\delta v}{\delta x}$ .

- 3) ! Schaal 10 maal vergroot!

We zien weer het grote aantal nuldoorgangen dat kenmerkend is voor de convectieve termen in de bewegingsvergelijking. Het vrijwel steeds positief blijven van  $v \cdot \frac{\delta v}{\delta y}$  wordt veroorzaakt door de onderlinge ligging van de nulpunten van  $v$  en  $\frac{\delta v}{\delta y}$  (in tegenfase).

- 4) Doordat  $u$  veel kleiner is dan  $v$  is de Coriolis-term hier wat minder groot dan in de bewegingsvergelijking in x-richting. Deze grootte-verhouding is natuurlijk volledig afhankelijk van de keuze van de x- en de y-as. Ook hier blijft de waarde van  $-\Omega.u$  echter aanzienlijk. Het verloop van



de Coriolis-term is nu evenredig met het verloop van  $u$ .

- 5) Door de grotere snelheid in de  $y$ -richting is het verval in de  $y$ -richting ook groter dan in de  $x$ -richting.

We zien in figuur 5) op bijlage VII-8 dat de functie  $g \cdot \frac{\delta h}{\delta y}$  een glad verloop heeft. We zien ook dat deze term een overheersende rol speelt in de bewegingsvergelijking in  $y$ -richting.

- 6) We zien in figuur 6) op bijlage VII-8 dat de wrijvingsterm in  $y$ -richting aanzienlijk groter is dan die in  $x$ -richting. Dit is een gevolg van het bepalende karakter van  $v$  in deze wrijvingsterm. Ook het tekenverloop wordt hier bepaald door dat van  $v$ .

### Resumée

Behalve de termen 1) en 5) in de bewegingsvergelijkingen in  $x$ - en  $y$ -richting, spelen de termen 4) en 6) toch ook een vrij bepalende rol. De zgn. convectieve termen 2) en 3) zijn, zoals te verwachten was in het rechtlijnige stroombeeld rond punt (7,24), relatief onbelangrijk voor de beschrijving van de waterbeweging.

### de continuïteitsvergelijking

- 1)  $\frac{\delta h}{\delta t}$  wordt verkregen door op bepaalde tijdstippen een raaklijn te tekenen aan de  $h$ -kromme. Het resultaat is weergegeven in figuur 1) op bijlage VII-9.

- 2) Omdat  $D (= h - z)$  slechts weinig fluctueert in de tijd, is het verloop van  $D \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$  vrijwel gelijkvormig met dat van  $\frac{\delta u}{\delta x}$ .

- 3)  $\frac{\delta D}{\delta x}$  is te beschouwen als de som van twee componenten, te weten  $\frac{\delta h}{\delta x}$  en  $\frac{\delta z}{\delta x}$ . De verandering van de bodemligging in  $x$ -richting ( $\frac{\delta z}{\delta x}$ ) is constant in de tijd.  $\frac{\delta h}{\delta x}$ , dit is de verandering van de waterhoogte in de  $x$ -richting, heeft hier altijd een waarde die klein is t.o.v.  $\frac{\delta z}{\delta x}$ . Hieruit volgt dat  $\frac{\delta D}{\delta x}$  vrijwel constant is. Dit verklaart dat de kromme van  $u \cdot \frac{\delta D}{\delta x}$  in figuur 3) op bijlage VII-9 vrijwel gelijkvormig is met die van  $u$  op bijlage VII-4.

- 4) Het verloop van de kromme in figuur 4) op bijlage VII-9 is vrijwel gelijkvormig aan het verloop van  $\frac{\delta v}{\delta y}$ .



- 5) Omdat  $\frac{\delta D}{\delta y}$  in dit geval een vrijwel constante negatieve waarde heeft, is het verloop van  $v \cdot \frac{\delta D}{\delta y}$  gelijkvormig aan de om de  $v = 0$ -as gespiegelde  $v$ -kromme van bijlage VII-4.

Een overzicht van de resultaten van de berekeningen wordt gegeven in de tabel op bijlage VII-11. Hierin zijn de termen van de bewegingsvergelijkingen weergegeven als vervallen over de lengte van één maas van het netwerk, dus 1600 m. De resultaten zijn in mm.

Ook voor punt (15,22) is een berekening uitgevoerd zoals hierboven beschreven. Het punt (15,22) ligt in het  $T_1$  model direct onder de havenmond aan de kop van de Voornedam. Het water is hier minder diep ( $\pm 16,00$  m.) dan in punt (7,24) en de stroomlijnen zijn hier gekromd.

Naast dezelfde opmerkingen die over de termen van de differentievergelijkingen in punt (7,24) gemaakt zijn, vallen bij een aantal termen aanzienlijke veranderingen waar te nemen; namelijk de convectieve termen:  $u \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$  en  $v \cdot \frac{\delta u}{\delta y}$  (bijlage VII-15) en  $u \cdot \frac{\delta v}{\delta x}$  (bijlage VII-17) en  $v \cdot \frac{\delta v}{\delta y}$  (bijlage VII-18). Deze termen zijn allemaal aanzienlijk groter dan de overeenkomstige termen bij punt (7,24) (! merk op dat de schaal 10 maal vergroot is!). Dit is een direct gevolg van de keuze van punt (15,22) in een gebied met gebogen stroomlijnen. Een gebogen stroomlijn wordt namelijk beschreven door grote veranderingen van  $u$  en  $v$  in de richtingen  $x$  en  $y$ .

Een overzicht van de resultaten van de berekening van de termen van de bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking in punt (15,22) wordt gegeven in de tekeningen op bijlage VII-12 t/m VII-20 en de tabel op bijlage VII-21.

#### *foutenbeschouwing*

Bij het beoordelen van de krommen zoals weergegeven op de bijlagen VII-5 t/m VII-10 en VII-15 t/m VII-20 moet worden opgemerkt dat deze krommen alleen tot doel hebben een indruk te geven van het verloop van de afzonderlijke termen in de bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking in een aantal min of meer willekeurige punten van het model. Het is niet de bedoeling zeer veel waarde te hechten aan de absolute grootte van de termen, maar veel meer om een indruk te krijgen van de onderlinge grootteverhoudingen en hun verloop in de tijd en de verschillen die optreden als een ander punt van het netwerk wordt beschouwd.

Ook moet worden opgemerkt dat de weergegeven krommen slechts op informatie gebaseerd zijn op de discrete tijdstippen 0 t/m 12. Tussen die tijdstippen is een gladde kromme getrokken als zijnde een continu verloop van de beschouwde term in de tijd. Hoe goed of fout de getekende kromme is, kan niet worden bepaald; het werkelijke verloop van de kromme is immers onbekend. Er kan wel een beschouwing gemaakt worden van de fouten die gemaakt worden door van de door de computer uitgevoerde waarden van  $h$ ,  $u$  en  $v$  te komen tot een benadering van de differentievorm van de termen van de bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking op een aantal discrete tijdstippen.

Het is daarbij niet mogelijk een uitspraak te doen over de exacte grootte van de daarbij gemaakte fout. Daarvoor is het namelijk noodzakelijk om te weten hoe het werkelijke verloop van zo'n term van de bewegings- of continuïteitsvergelijking in de tijd is. Er kunnen wel een aantal manieren om van de door de computer berekende  $h$ 's,  $u$ 's en  $v$ 's tot een benadering van bijvoorbeeld  $\frac{\delta u}{\delta t}$  te komen, met elkaar worden vergeleken. Als de waarden van een op verschillende manieren bepaalde term nu niet sterk uiteenlopen, is het redelijk om te veronderstellen dat de bij de benaderingen gemaakte fouten klein zijn. Er is echter geen garantie dat de verschillende benaderingsmethoden niet allemaal dezelfde fout in de benadering veroorzaken, zodat ten onrechte geconcludeerd wordt dat die benaderingen goed zijn.

In onderstaande berekening wordt de orde van grootte van de fouten in een aantal afzonderlijke termen van de bewegingsvergelijking in  $x$ -richting berekend op de tijdstippen  $t = 2$ ,  $t = 4$  en  $t = 6$  uur voor punt (7,24) van het  $T_1$  model. Door op drie tijdstippen afzonderlijk de fouten te berekenen, kan het resultaat representatief worden verondersteld te zijn voor de gehele kromme.

de term  $\frac{\delta u}{\delta t}$

Om van de door de computer berekende watersnelheden tot een benadering van  $\frac{\delta u}{\delta t}$  te komen, staan ons drie wegen open:

- 1) door een differentiebenadering zoals weergegeven op blz. 55
- 2) door middel van een parabolenbenadering van de  $u$ -kromme in de tijd, waar vervolgens de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen op bepaalde tijdstippen aan berekend worden
- 3) door middel van het tekenen van het verloop van de  $u$ -kromme in de tijd waar vervolgens de raaklijnen op bepaalde tijdstippen aan getrokken worden waarvan de richtingscoëfficiënten worden opgemeten.

Door alle drie de benaderingen uit te voeren wordt een indruk verkregen van de nauwkeurigheid van de  $\frac{\delta u}{\delta t}$ -kromme.

ad 1) Omdat slechts uitvoer verstrekt wordt om het half uur, wordt in het differentieschema gemiddeld over 1 uur:

$$\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right)_m \approx \frac{\frac{U_{t_{m+1/2}} + 1800}{2} + \frac{U_{t_{m-1/2}} + 1800}{2} - \frac{U_{t_{m+1/2}} - 1800}{2} + \frac{U_{t_{m-1/2}} - 1800}{2}}{2 \cdot 1800}$$

$$\text{Voor } t = 2 \text{ uur: } \frac{\delta u}{\delta t} = 26,4 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

$$\text{Voor } t = 4 \text{ uur: } \frac{\delta u}{\delta t} = 14,4 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

$$\text{Voor } t = 6 \text{ uur: } \frac{\delta u}{\delta t} = 8,75 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

ad 2) Met behulp van een parabolenbenadering:

We kunnen door de waarde van  $u$  op de tijdstippen  $t - \Delta t$ ,  $t$  en  $t + \Delta t$  de kromme benaderen door een parabool. Die parabool gaat exact door die drie punten. Door nu de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan die parabool in  $t$  te bepalen, wordt een schatting verkregen voor  $\frac{\delta u}{\delta t}$  op tijdstip  $t$ . Het blijkt echter dat deze benadering dezelfde is als onder ad 1) doordat de parabool zo berekend wordt dat de raaklijn in  $t$  aan die parabool evenwijdig loopt met de verbindinglijn van  $u$  op tijdstip  $t - \Delta t$  en  $u$  op tijdstip  $t + \Delta t$ .

ad 3) Dit is de methode waarmee  $\frac{\delta u}{\delta t}$  oorspronkelijk berekend is. De waarden voor  $\frac{\delta u}{\delta t}$  op de tijdstippen  $t = 2$ ,  $t = 4$  en  $t = 6$  uur zijn:

$$\text{Voor } t = 2 \text{ uur: } \frac{\delta u}{\delta t} = 27,2 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

$$\text{Voor } t = 4 \text{ uur: } \frac{\delta u}{\delta t} = 13,6 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

$$\text{Voor } t = 6 \text{ uur: } \frac{\delta u}{\delta t} = 8,6 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

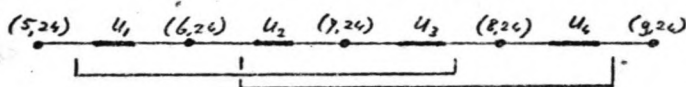
We zien dat het verschil in de twee gebruikte benaderingen ongeveer 5% is. Hieruit meen ik te mogen concluderen dat de fout t.o.v. het ware verloop van  $\frac{\delta u}{\delta t}$  van dezelfde orde van grote zal zijn. Dit alles onder de aanname dat de uitvoer van de computer foutloos is.

de term  $u \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$

Deze term van de bewegingsvergelijking in  $x$ -richting zal ik hier op twee

manieren benaderen, te weten:

1) met behulp van overlappende parabolen



We berekenen een parabool die exact door  $u_1$ ,  $u_2$  en  $u_3$  gaat en één door  $u_2$ ,  $u_3$  en  $u_4$ . Voor beide parabolen berekenen we in punt (7,24) de waarde van  $u$  en bepalen daarvan het gemiddelde. Zo bepalen we ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijnen aan de parabolen in punt (7,24) en middelen die. Hierdoor wordt een redelijke benadering verkregen voor  $u$  en voor  $\frac{\delta u}{\delta x}$  in het beschouwde punt. Deze berekening wordt uitgevoerd voor  $t = 2, 4$  en  $6$  uur.

2) Met behulp van het differentieschema voor  $u \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$ :

$$\left(u \cdot \frac{\delta u}{\delta x}\right)_m \approx \frac{u_{m-1/2}^n + u_{m+1/2}^n}{2} \cdot \frac{u_{m-1/2}^n - u_{m+1/2}^n}{\Delta x}$$

ad 1) Voor  $t = 2$ :  $u_1 = -84$  cm/sec.

$u_2 = -82$  cm/sec.

(7,24) →  $u_3 = -75$  cm/sec.

$u_4 = -60$  cm/sec.

$$f_1(x) = -82 + 4\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}x^2$$

$$f_2(x) = -75 + 11x + 4x^2$$

$$u_{(7,24)} = \frac{-79,1 - 79,5}{2} = -79,3$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{7,0 + 7,0}{2 \cdot 1600 \cdot 10^2} = 4,38 \cdot 10^{-4} \text{ (1/sec.)}$$

$$u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = -79,3 \cdot 7,0 / (1600 \cdot 10^6) = -0,347 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

$$\text{Voor } t = 4: u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = -0,03 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

$$\text{Voor } t = 6: u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = -0,71 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

ad 2) Met behulp van de differentiebenadering van blz. 56 komen we tot de volgende waarden:

$$\text{Voor } t = 2 \text{ uur: } u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = -0,34 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

$$\text{Voor } t = 4 \text{ uur: } u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

$$\text{Voor } t = 6 \text{ uur: } u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = -0,71 \cdot 10^{-6} \text{ m/sec.}^2$$

Het blijkt dat de relatieve fout van de eerste ten opzichte van de tweede benadering van de orde van grootte van  $10^{-8}$  m/sec.<sup>2</sup> is.

Er kan dan ook gesteld worden dat de getekende figuur op bijlage VII-5 de term  $u \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$  goed weergeeft.

#### Conclusie

We hebben gezien dat op de tijdstippen  $t = 2, 4$  en  $6$  uur  $\frac{\delta u}{\delta t}$  en  $u \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$  goed door de figuren op bijlage VII-5 worden weergegeven. Er is geen enkele reden om aan te nemen dat dit op andere tijdstippen of voor andere termen van de bewegingsvergelijkingen of continuïteitsvergelijking niet geldt. Het is dan ook redelijk te veronderstellen dat alle termen van de bewegingsvergelijkingen en continuïteitsvergelijking voor de gehele getijperiode goed door de figuren worden weergegeven voor de toestand zoals die door het  $T_1$  model is berekend.

Toch worden in de differentiebenadering fouten gemaakt als gevolg van het feit dat de vaklengte in het model, waarover moet worden gemiddeld,  $1600$  m. is. Het zou interessant zijn om een vergelijking te maken tussen de waarden van de differentiebenadering van een term in een bepaald punt in het model bij verschillende maaswijdten. Als nu bij een afnemende maaswijdte de waarde van de differentiebenadering niet, of vrijwel niet, verandert, is aangetoond dat de gebruikte maaswijdte klein genoeg is om het gebruik van de centrale differentiebenadering voor de termen van de differentiaalvergelijkingen te rechtvaardigen.



## HOOFDSTUK VIII

### Slotopmerkingen

#### 1) verstoringen bij de Zuid-westrand

##### analyse van het probleem

In de nabijheid van de Zuid-westrand in zowel het  $T_0$  en  $T_1$  model als in het  $T_2$  model (dit heeft een andere Zuid-westrand) treden verstoringen op in het stroombeeld. Deze verstoringen, die al duidelijk blijken uit de numerieke uitvoer van het computerprogramma, heb ik in beeld gebracht in bijlage VIII-1 t/m VIII-3.

Hier zijn op vier raaien van elk  $8.1600 = 12.800$  m. lengte de snelheden in x- en y-richting (u en v) weergegeven. Een positieve u of v is naar boven uitgezet en een negatieve naar beneden. De raaien hebben een oriëntering evenwijdig aan de x-as van het model en liggen op onderlinge afstand van 1600 m. De hier uitgezette snelheden zijn berekend in het  $T_1$  model, maar soortgelijke verstoringen treden op in het  $T_0$  en het  $T_2$  model.

raai 1 komt overeen met  $x = 4$  t/m 12 en  $y = 30$

raai 2 " " "  $x = 4$  t/m 12 en  $y = 31$

raai 3 " " "  $x = 4$  t/m 12 en  $y = 32$

raai 4 " " "  $x = 4$  t/m 12 en  $y = 33$

In de bovenste figuur op bijlage VIII-1 is het bodemprofiel in beeld gebracht langs alle vier de raaien. Hoewel deze profielen niet volledig gelijkvormig zijn, mag toch verondersteld worden dat de vreemde veranderingen in het stroombeeld niet veroorzaakt kunnen worden door onregelmatigheden in het bodemprofiel.

Beschouwen we nu vervolgens het verloop van v in de tijd, dan zien we dat onafhankelijk van de tijd en dus van de grootte van v de oriëntatie van de lijnen 1 t/m 4 t.o.v. elkaar nauwelijks verandert. Pieken worden bij grotere v wel extra geaccentueerd, maar iets dergelijks was ook wel te verwachten. Beschouwen we nu het verloop van u met de tijd dan krijgen we een heel ander beeld. Voor  $T = 0, 1$  en  $2$  zijn de getekende lijnen nog een logische opvolging op elkaar. Hun oriëntering t.o.v. elkaar verandert nauwelijks bij het veranderen van de waarde van u.

De figuur voor  $T = 3$  kan als een overgang gekenmerkt worden. De oriëntatie van de lijnen t.o.v. elkaar verandert en de lijnen kruisen elkaar vaak.

De figuren voor  $T = 4$  t/m  $T = 10$  geven echter een totaal ander beeld. De oriëntatie van de lijnen t.o.v. elkaar is anders, met als opvallendste ver-

andering, dat de lijn voor raai 3 niet meer een logische tussenstap is tussen de lijnen voor raai 2 en raai 4.

In de figuren 11 en 12 herstelt het stroombeeld zich tot een gelijkvormige situatie als die in de figuren 0, 1 en 2. De kring is gesloten en de verschijnselen zullen zich gaan herhalen.

#### oorzaak

De problemen vinden hun oorzaak in de randvoorwaarden van het model.

Om een tweedimensionale getijberekening te maken is het voldoende om in de randen van het model waterstanden op te geven (we doen dit in de vorm van harmonische componenten). Zo lijkt het in ieder geval. In het computerprogramma worden echter nog één of twee vaste randvoorwaarden aangehouden. Bijvoorbeeld dat op een rand evenwijdig aan de x-as de waarde van  $\frac{\delta u}{\delta y}$  en  $\frac{\delta v}{\delta y}$  gelijk aan 0 gesteld worden. Een dergelijke hulprandvoorwaarde is noodzakelijk voor het rekenproces. Het is echter heel goed mogelijk dat zo'n randvoorwaarde helemaal niet goed past bij de optredende stromingstoestand in de werkelijkheid. In feite zou het wel heel toevallig zijn als zo'n randvoorwaarde wel netjes zou passen bij de berekende stromingstoestand. Dit is de oorzaak van die verstoringen aan de randen van ons model.

Het is verder aannemelijk te maken dat een rand waarlangs water het model binnenstroomt zich anders gedraagt dan een rand waardoor water het model uitstroomt. Een verstoring zoals boven beschreven treedt alleen op langs randen waardoor water het model uitstroomt.

In het beschouwde  $T_1$  model treedt het verschijnsel op ten tijde van de ebstroom (van noord-oost naar zuid-west) aan de zuid-westrand van het model en ten tijde van de vloedstroom aan de noord-oostrand.

De berekeningsresultaten sluiten goed aan bij de theorie. De verstoringen worden groter als de uitgaande stroming groter wordt en breiden zich van de randen af naar binnen in het model uit. Na omkering van de stroomrichting verdwijnt het verschijnsel aan de ene en ontstaat het aan de andere rand van het model.

#### oplossing

Een oplossing voor het probleem is nog niet gevonden, er is echter wel een manier om het verschijnsel te voorkomen.

We memoreren dat de oorzaak van de verstoringen ligt in het 0-stellen aan de randen van het model van termen als  $\frac{\delta u}{\delta x}$ ,  $\frac{\delta u}{\delta y}$  enz. We kunnen het probleem nu omzeilen door de rand die evenwijdig loopt aan de x-as bijvoorbeeld 5 maaslengten naar buiten te verplaatsen, waarbij we over die 5 maaslengten het bodemprofiel aanhouden van de oorspronkelijke rand.

De termen  $\frac{\delta u}{\delta y}$  en  $\frac{\delta v}{\delta y}$  zullen dan, door het gelijkmatige bodemprofiel, vrijwel 0 zijn, zodat de opgelegde randvoorwaarden 'passend' zijn geworden. Hierdoor wordt het probleem omzeild. We moeten er nu echter wel rekening mee houden, dat de waterstanden die we als randvoorwaarden gebruiken, nu niet meer exact geldig zijn voor de modelrand. Er wordt dus een fout geïntroduceerd. Eenzelfde kunstgreep kunnen we toepassen aan de rand die evenwijdig loopt met de y-as van het model.

#### opmerking

Een soortgelijke verstoring als boven beschreven treedt soms ook op bij een sterke stroomcontractie in het model. We moeten hierop dus bedacht zijn.

### *2) wachten op uitvoer*

Ieder die een tweedimensionale getijberekening gaat maken, moet zich wel realiseren dat er veel tijd in gaat zitten; altijd meer dan je van tevoren verwacht.

Voor het programma naar behoren werkt moeten tientallen 'run's' gemaakt worden. Met uitzondering van de hele korte run's ben je met het TIDES-programma aangewezen op het rekenen in de nacht. Dus de ene dag invoer en pas de volgende dag uitvoer! Nu er ook nog een 'plotprocedure' in het programma is opgenomen, kan de wachttijd soms wel oplopen tot 48 uur. Zorg er dus altijd voor dat je naast de getijberekening andere bezigheden hebt om de wachttijd nuttig op te vullen. De getijberekening biedt echter wel grote mogelijkheden om als leidraad te dienen voor de rest van je afstuderen.

### *3) plotefficiëncy*

Omdat het maken van 'plots' een hoop tijd en geld kost, is het van belang dat een en ander efficiënt geregeld is. Ook al werkt de plotprocedure nu naar behoren, toch een tweetal opmerkingen:

1. Om te voorkomen dat van een getijberekening waarin nog één of meer fouten zitten, onnodig plots gemaakt worden, dient de gebruiker gewezen te worden op de mogelijkheid van 'plot-preview'. Hiermee kan men voordat van de plotter gebruik gemaakt wordt via een beeldscherm beoordelen of er nog fouten in de getijberekening schuilen. Indien dit het geval is, kan van het plotten van de afbeelding worden afgezien.
2. Nadat het programma doorgerekend is door de computer, wordt de uitvoer

getransformeerd naar een geheugen dat dient als invoer voor de plotter. Bij een zo grote hoeveelheid uitvoer als bij een getijberekening wordt geleverd, is de kans op fouten bij deze transformatie erg groot. Na de transformatie gaan de resultaten van de rekencomputer verloren. Hierdoor is het mogelijk dat er een fout in de plots zit (soms lijken die plots helemaal nergens op) terwijl de uitvoer van de getijberekening toch goed is. Om dan toch goede plots te krijgen, moet men de hele procedure opnieuw beginnen en weer voor vele honderden guldens gaan verrekenen, om weer gegevens te krijgen voor het voeden van de plotcomputer, waarbij de kans op fouten bij de transformatie weer even groot is. Het zou mogelijk gemaakt moeten worden dat de gegevens uit de rekencomputer ook na de transformatie naar het geheugen van de plotcomputer, tijdelijk bewaard blijven in de oorspronkelijke vorm. Gaat er dan bij de transformatie wat fout (wat men kan ontdekken door plotpreview), dan kan de transformatie herhaald worden zonder dat daarvoor opnieuw rekenkosten gemaakt moeten worden.

Deze wijzigingen kunnen m.i. een hoop kosten en moeite besparen.

#### *4) eindbeschouwing*

De waarde van de uitgevoerde twee-dimensionale getijberekening is tweeledig. Ten eerste worden als direct resultaat voorspellingen van de waterstanden en stroomsnelheden verkregen voor een nog niet bestaande situatie. De kosten van een numeriek model zijn maar een fractie van de kosten die een schaalmodel vereist. De berekende resultaten kunnen aangewend worden voor diverse doeleinden. In dit geval zullen ze gebruikt worden om het gedrag van een schip bij de nadering van de haven op de Voornedam te bestuderen. Het is echter ook mogelijk om de resultaten te gebruiken voor morfologische berekeningen. Ten tweede is van de grote hoeveelheid informatie die bij een twee-dimensionale getijberekening beschikbaar komt, gebruik gemaakt om het verloop van de termen van bewegingsvergelijkingen en continuïteitsvergelijking in de tijd te beschouwen. Hierdoor wordt in belangrijke mate het inzicht verhoogd in de factoren die de getijberekening beïnvloeden.

De resultaten van een getijberekening uit een model met een maaswijdte van 1600 meter zijn echter weinig gedetailleerd, terwijl ook de betrouwbaarheid van die resultaten in de details niet erg groot is.

Mijns inziens is een twee-dimensionale getijberekening een nuttig hulpmiddel om een globale indruk te krijgen van de gevolgen van een verandering in een kustgebied. En dan nog slechts over de grootte van het gebied dat door de



verandering wordt beïnvloed.

Vooraf op plaatsen waar de stroomlijnen sterk gekromd zijn is de betrouwbaarheid van de resultaten gering.

Bij sterk gekromde stroomlijnen is de waterbeweging n.l. duidelijk driedimensionaal, zodat dan ook niet verwacht kan worden dat een twee-dimensionale getijberekening gedetailleerde informatie kan verschaffen.

oOo

