



**Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics**

**Een analytische en algebraïsche beschouwing van de Wilson-
en Racahpolynomen**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**Bachelor of Science
in
Technische Wiskunde**

door

Dani Rozenbroek

Delft, Nederland

8 juli 2022



BSc verslag Technische Wiskunde

“Een analytische en algebraïsche beschouwing van de Wilson- en Racahpolynomen”

Dani Rozenbroek

Technische Universiteit Delft

Begeleiders

Dr.ir. W.G.M. Groenevelt ir. C.C.M.L. Wagenaar

Overig commissielid

Dr. C. Kraaikamp

8 juli 2022

Delft

Samenvatting

De Wilson- en Racahpolynomen zijn hypergeometrische orthogonale polynomen die helemaal bovenaan staan in het Askey-schema. Deze polynomen zijn de meest algemene hypergeometrische orthogonale polynomen in één variabele en generaliseren de andere hypergeometrische orthogonale polynomen in het Askey-schema.

In deze scriptie wordt ingegaan op twee specifieke eigenschappen van de Wilson- en Racahpolynomen: de drieterms recurrente betrekking en de orthogonaliteitsrelatie. Deze eigenschappen worden met analytische en algebraïsche methoden bestudeerd.

Bij de analytische methode wordt eerst algemene theorie van hypergeometrische functies en orthogonale polynomen bestudeerd. Er worden identiteiten, transformaties en aaneengesloten relaties voor hypergeometrische functies afgeleid. Hiermee kan de drieterms recurrente betrekking van de Wilson- en Racahpolynomen worden afgeleid. Met behulp van de residuenstelling van Cauchy en de theorie van hypergeometrische functies kan de orthogonaliteitsrelatie van beide polynomen worden verkregen.

Bij de algebraïsche methode wordt de Racah-Wilsonalgebra bestudeerd. De Racah-Wilsonalgebra voldoet aan een zogenaamde laddereigenschap waarmee een keten van eigenvectoren kan worden geconstrueerd. Hiermee is het mogelijk om een eindig dimensionale irreducibele representatie te krijgen. Door een inproduct te definiëren op de bases van eigenvectoren van de generatoren van Racah-Wilsonalgebra, kan met behulp van overlapcoëfficiënten een drieterms recurrente betrekking worden afgeleid. Door vervolgens enkele transformaties toe te passen, kan worden aangetoond dat deze drieterms recurrente betrekking overeenkomt met de drieterms recurrente betrekking van de Racahpolynomen. Ten slotte laten we met dit gekozen inproduct zien dat de Racahpolynomen orthogonale polynomen zijn.

Voorwoord

Voor u ligt mijn scriptie ter afronding van de bachelor Technische Wiskunde aan de Technische Universiteit Delft. De afgelopen twee jaar heb ik met plezier veel verschillende wiskundevakken gevolgd. Eén van de interessantste vakken vond ik het vak *Special Functions and Representation Theory*. Het mooie aan dit vak vond ik dat eigenschappen van speciale functies werden afgeleid met behulp van methoden uit de analyse en de abstracte algebra. Ik wilde graag een scriptie schrijven dat aansloot op dit vak. Het resultaat is deze scriptie: “Een analytische en algebraïsche beschouwing van de Wilson- en Racahpolynomen”.

Mathematics is the most beautiful and most powerful creation of the human spirit

Stefan Banach

Een groot gedeelte van deze scriptie is geschreven in de trein tussen Amsterdam en Delft. Ik wil de NS bedanken voor de (niet-)werkende wifi, de zitplaatsen (op de trap) en de vele overstappen die ik net (niet) haalde. Kortom: een (on)aangename situatie om een scriptie te schrijven.

Ik wil mijn begeleiders Wolter Groenevelt en Carel Wagenaar enorm bedanken voor alle energie en tijd die zij in mij hebben gestoken bij het begeleiden van deze scriptie. Ik wil hun bedanken voor hun enthousiasme, positiviteit en vertrouwen; zonder dit laatste had ik mijn scriptie in de eerste week al opgegeven. Het was enorm fijn dat jullie zoveel tijd voor mij vrij maakte tijdens de wekelijkse meetings en daarbuiten. Ik kon altijd langs jullie kamer lopen voor een ‘minicollege’. Jullie leerden mij rustig en vooral precies na te denken. De vele meetings, gesprekken en het koffiedrinken vond ik enorm leuk. Elke keer als ik hieraan denk, krijg ik een lach op mijn gezicht. Wolter en Carel, bedankt!

Graag wil ik Cor Kraaikamp bedanken dat hij de tijd neemt om mijn scriptie te lezen en in de beoordelingscommissie wil zitten.

Ik wil mijn familie en vrienden bedanken voor alle steun die zij mij de afgelopen maanden hebben gegeven bij het schrijven van deze scriptie. Jim van der Ven wil ik bedanken voor het lezen van mijn hele scriptie en de nuttige en kritische feedback die hij heeft gegeven. Ten slotte wil ik mijn wiskundedocenten van de middelbare school, Hanneke Jansen en Martijn de Vries, bedanken voor hun enthousiasme dat ze bij mij hadden overgebracht tijdens de wiskundelessen.

Rest mij niets anders dan u veel leesplezier toe te wensen.

Dani Rozenbroek, Amsterdam, 1 juli 2022.

Inhoudsopgave

1	Introductie	1
I	De Wilson- en Racahpolynomen vanuit een analytisch perspectief	3
2	Hypergeometrische orthogonale polynomen	4
2.1	De gamma functie	4
2.2	Hypergeometrische functies	15
2.3	Orthogonale polynomen	26
3	De Wilson- en Racahpolynomen	31
3.1	Definitie en eigenschappen van de Wilson- en Racahpolynomen	31
3.2	De drieterms recurrente betrekking	35
3.3	De orthogonaliteitsrelatie	39
3.4	De Jacobipolynomen	47
II	De Wilson- en Racahpolynomen vanuit een algebraïsch perspectief	49
4	De Racah-Wilsonalgebra	50
4.1	Representatietheorie	50
4.2	De laddereigenschappen van de Racah-Wilsonalgebra	52
4.3	De connectie tussen de Racah-Wilsonalgebra en de Racahpolynomen	63
	Bibliografie	66

Hoofdstuk 1

Introductie

Orthogonale polynomen hebben veel toepassingen binnen en buiten de wiskunde. Zo verschijnen Hermitepolynomen in de kwantummechanica als eigenfuncties van de harmonische oscillator [GS17]. In de numerieke wiskunde worden Chebyshevpolynomen veel gebruikt om functies te benaderen, te interpoleren en te integreren [BF10]. De Hermite- en Chebyshevpolynomen zijn voorbeelden van hypergeometrische orthogonale polynomen. Dit betekent dat deze polynomen uitgedrukt kunnen worden in een hypergeometrische functie en orthogonaal zijn ten opzichte van een bepaald inproduct. Hypergeometrische orthogonale polynomen, zoals de Hermite- en Chebyshevpolynomen, worden veel toegepast en daarom zijn de eigenschappen uitvoerig bestudeerd [BW16; AAR99].

De hypergeometrische orthogonale polynomen worden in het Askey-schema geordend op basis van een zekere hiërarchie [KLS10]. Bovenaan in dit schema staan de Wilson- en Racahpolynomen. Beide polynomen en hun eigenschappen kunnen expliciet worden uitgedrukt in hypergeometrische functies. Hieruit kunnen eigenschappen van de andere hypergeometrische orthogonale polynomen worden afgeleid. Daarom worden de Wilson- en Racahpolynomen ook wel de meest algemene hypergeometrische orthogonale polynomen in één variabele genoemd.

In de literatuur worden eigenschappen van de Wilson- en Racahpolynomen omschreven en bewezen [KLS10; Wil78; Zhe91]. De literatuur is van een hoog niveau: details en tussenstappen worden weggelaten en de motivatie is beperkt. Het doel van deze scriptie is om twee belangrijke eigenschappen van de Wilson- en Racahpolynomen gedetailleerd te bestuderen, te motiveren en te bewijzen. Deze eigenschappen zijn een drieterms recurrenente betrekking en de orthogonaliteitseigenschap.

Deze eigenschappen worden met analytische en algebraïsche methoden bestudeerd. In deel I worden de Wilson- en Racahpolynomen bestudeerd vanuit een analytisch perspectief. Er worden transformaties, identiteiten en integraalrepresentaties voor hypergeometrische functies afgeleid. Hiermee kan de drieterms recurrenente betrekking en de orthogonaliteitsrelatie van beide polynomen bewezen worden. In deel II worden de Racahpolynomen bestudeerd vanuit een algebraïsch perspectief. Hiervoor wordt de Racah-Wilsonalgebra bestudeerd. Door gebruik te maken van de representatietheorie kan de drieterms recurrenente betrekking en de orthogonaliteit van de Racahpolynomen bewezen worden.

In het tweede hoofdstuk worden eigenschappen van de gammafunctie, hypergeometrische functies en orthogonale polynomen bestudeerd. In het volgende hoofdstuk wordt dit gebruikt om de Wilson- en Racahpolynomen te definiëren en de orthogonaliteitsrelatie en de drieterms recurrenente betrekking te bewijzen. In hoofdstuk 4 wordt de Racah-Wilsonalgebra bestudeerd waarmee we expliciet de drieterms recurrenente betrekking van de Racahpolynomen afleiden. Verder wordt aangetoond dat de Racahpolynomen orthogonale polynomen zijn.

Deel I

**De Wilson- en Racahpolynomen vanuit een
analytisch perspectief**

Hoofdstuk 2

Hypergeometrische orthogonale polynomen

Dit hoofdstuk behandelt de theorie die nodig is om de Wilson- en Racahpolynomen te kunnen bestuderen in hoofdstuk 3. We zullen zien dat de Wilson- en Racahpolynomen uit zijn te drukken in een hypergeometrische functie. We zijn dus geïnteresseerd in eigenschappen van hypergeometrische functies. In paragraaf 2.1 worden eigenschappen van de gamma- en bètafunctie bestudeerd. Het blijkt namelijk dat veel identiteiten en transformaties van de hypergeometrische functie uit zijn te drukken met behulp van de gammafunctie. Enkele eigenschappen en bekende formules van de gammafunctie worden bewezen. Vervolgens wordt in de volgende paragraaf de hypergeometrische functie bestudeerd. Er worden integraalrepresentaties, transformaties en identiteiten afgeleid. In paragraaf 2.3 worden orthogonale polynomen bestudeerd. We bewijzen een fundamentele stelling voor de theorie van orthogonale polynomen en geven voorbeelden van enkele orthogonale polynomen. In dit hoofdstuk beperken we ons strikt tot de theorie die nodig is in deze scriptie. Voor meer details wordt gerefereerd naar boeken over speciale functies, e.g. [AAR99; BW16].

2.1 De gamma functie

In deze paragraaf worden de gamma- en bètafunctie bestudeerd. Van deze twee functies worden enkele formules afgeleid zoals de relatie tussen de gamma- en bètafunctie, de reflectieformule van Euler, de verdubbelingsformule van Legendre en ten slotte de formule van Stirling.

De gamma- en bètafunctie

In de achttiende eeuw zochten wiskundigen een continue functie op $(0, \infty)$ die de waarde $n!$ aanneemt voor elke $n \in \mathbb{N}$. De wiskundigen Euler, Gauss en Weierstrass vonden een dergelijke functie en representeerden deze functie in de vorm van een oneindig product. Euler schreef ook een dergelijke functie op in de vorm van een integraal. Voor veel doeleinden in deze scriptie is deze integraalvorm het handigst. Daarom wordt ervoor gekozen om dit als definitie te nemen.

Definitie 2.1. De gammafunctie is voor $\operatorname{Re}(z) > 0$ gedefinieerd door

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.2)$$

□

Bovenstaande integraal is een oneigenlijke integraal. Er moet dus aangetoond worden dat de gammafunctie goed gedefinieerd is. Om aan te tonen dat de gammafunctie goed gedefinieerd is, moet worden aangetoond dat de integraal convergeert voor alle $z \in \Omega$, met $\Omega := \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Stelling 2.3. De gammafunctie convergeert voor iedere $z \in \Omega$.

Bewijs. Om te bewijzen dat de gammafunctie convergeert voor iedere $z \in \Omega$, volstaat het om te bewijzen dat de gammafunctie absoluut convergeert voor iedere $z \in \Omega$. We splitsen de gammafunctie op in twee delen

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Merk op dat

$$\left| t^{z-1} e^{-t} \right| = e^{-t} \left| e^{(\operatorname{Re}(z)-1) \ln(t)} e^{i \operatorname{Im}(z) \ln(t)} \right| = e^{-t} e^{(\operatorname{Re}(z)-1) \ln(t)} = e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1}.$$

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^{\operatorname{Re}(z)-1}$ convergeert wegens het quotiëntkenmerk, immers

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-(n+1)} (n+1)^{\operatorname{Re}(z)-1}}{e^{-n} n^{\operatorname{Re}(z)-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\operatorname{Re}(z)-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Wegens de integraaltest voor convergentie volgt dat de integraal $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt$ ook convergeert.

Voor $0 \leq t \leq 1$ geldt dat $e^{-t} \leq 1$. Dus de convergentie van $\int_0^1 e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt$ wordt bepaald door de convergentie van $\int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt$. Omdat $\operatorname{Re}(z) > 0$, geldt

$$\int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt = \lim_{p \downarrow 0} \int_p^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt = \lim_{p \downarrow 0} \left[\frac{t^{\operatorname{Re}(z)}}{\operatorname{Re}(z)} \right]_p^1 = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}.$$

Deze integraal is convergent, dus de integraal $\int_0^1 e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt$ is convergent onder de aanname dat $\operatorname{Re}(z) > 0$. Dus de gammafunctie convergeert absoluut op Ω . Dit betekent dat de gammafunctie goed gedefinieerd is. ■

In stelling 2.5 wordt bewezen dat de gammafunctie analytisch is op Ω . In het bewijs wordt gebruik gemaakt van het volgende lemma uit de complexe functietheorie.

Lemma 2.4. Zij C een pad, U een open verzameling en zij $\phi(z, \zeta)$ een functie gedefinieerd voor $z \in U$ en $\zeta \in C$. Neem aan dat $\phi(z, \zeta)$ continu is in $\zeta \in C$, analytisch in $z \in U$ en dat de complexe afgeleide $\frac{\partial \phi}{\partial z}(z, \zeta)$ continu is in $\zeta \in C$. Dan is de functie

$$g(z) = \int_C \phi(z, \zeta) d\zeta$$

analytisch in U en is haar afgeleide gegeven door

$$g'(z) = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial z}(z, \zeta) d\zeta.$$

Bewijs. Zie stelling 3.8.5 van [AG18]. ■

Stelling 2.5. De gammafunctie is analytisch op Ω .

Bewijs. Schrijf $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(z)$, met $I_n(z) = \int_n^{n+1} e^{-t} t^{z-1} dt$. We laten eerst zien dat I_n analytisch is op Ω . Definieer de functie ϕ door $\phi(z, t) = e^{-t} t^{z-1}$. Er geldt dat ϕ analytisch is op $z \in \Omega$ en $\frac{\partial \phi}{\partial z}(z, t) = e^{-t} t^{z-1} \ln(t)$. Voor $n = 0$ geldt dat ϕ en $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ continu zijn in $t \in [p, 1]$ voor alle $p > 0$. Voor alle $n > 0$ zijn ϕ en $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ beide continu in $t \in [n, n+1]$. Wegens lemma 2.4 volgt nu dat I_n analytisch is op Ω .

We laten nu zien dat $\Gamma(z)$ analytisch is op Ω . Zij S een begrensde deelverzameling van Ω en laat $0 < \varepsilon \leq \operatorname{Re}(z) \leq K < \infty$ voor alle $z \in S$. Voor $n = 0$ geldt de volgende afchatting

$$\left| \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^1 |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_0^1 e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \leq \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt = \left[\frac{t^{\operatorname{Re}(z)}}{\operatorname{Re}(z)} \right]_0^1 \leq \frac{1}{\varepsilon} =: M_0.$$

Voor $n \geq 1$ geldt de afchatting

$$\left| \int_n^{n+1} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^{n+1} |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_n^{n+1} e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \leq (n+1)^K e^{-n} =: M_n.$$

In de laatste ongelijkheid is gebruikgemaakt van de *ML*-afchatting. Er geldt dat

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^K e^{-n-1}}{(n+1)^K e^{-n}} \right| = \frac{1}{e} < 1.$$

Dus wegens het quotiëntkenmerk volgt dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ convergeert. Wegens Weierstrass M-test volgt dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(z)$ uniform convergeert op Ω . Elke $I_n(z)$ is analytisch op Ω en $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(z)$ convergeert uniform op S . Dit betekent dat $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(z) = \Gamma(z)$ analytisch is op Ω . ■

Eén van de basiseigenschappen van de gammafunctie is dat zij voldoet aan de functionele vergelijking

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{2.6}$$

Dit kan worden ingezien door gebruik te maken van partiële integratie;

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

Wegens het feit dat $\Gamma(1) = 1$ en door gebruik te maken van volledige inductie, volgt dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Om deze reden kan de gammafunctie gezien worden als een functie die de faculteitsfunctie generaliseert.

De functionele vergelijking (2.6) kan gebruikt worden om de gammafunctie analytisch voort te zetten tot een meromorfe functie op \mathbb{C} met polen in de punten $z = -n$, met $n \in \mathbb{N}_0$. Immers voor $-1 < \operatorname{Re}(z) \leq 0$ geldt dat $\operatorname{Re}(z+1) > 0$. Oftewel

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad -1 < \operatorname{Re}(z) \leq 0, \quad z \neq 0.$$

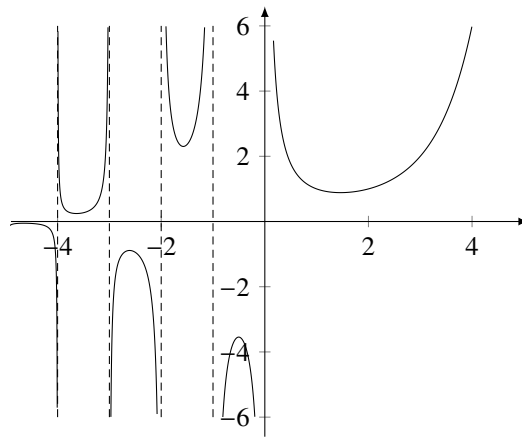
Dan is de gammafunctie $\Gamma(z)$ analytisch voor $\operatorname{Re}(z) > -1$, behalve in $z = 0$. Voort hebben we

$$\lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = 1.$$

Dit betekent dat het punt $z = 0$ een enkelvoudige pool is met residu 1. Dit procedé kan herhaald worden voor $-2 < \operatorname{Re}(z) \leq -1$, $-3 < \operatorname{Re}(z) \leq -2$, \dots . Op deze manier kan worden ingezien dat de gammafunctie analytisch is voort te zetten tot een meromorfe functie op \mathbb{C} met polen in de punten $z = -n$, met $n \in \mathbb{N}_0$. Het residu in deze punten is

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1) \cdots (-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Figuur 2.1 toont de grafiek van de gammafunctie.



Figuur 2.1: De gammafunctie langs een deel van de reële as

In figuur 2.1 is te zien dat $\Gamma(z) > 0$ voor alle $\operatorname{Re}(z) > 0$ en dat de grafiek een asymptoot heeft bij de punten $z = -n$, met $n \in \mathbb{N}_0$.

In definitie 2.8 wordt een andere functie in de vorm van een integraal gedefinieerd.

Definitie 2.8. De bètafunctie is gedefinieerd door

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

met $\operatorname{Re}(x) > 0$ en $\operatorname{Re}(y) > 0$. □

Een eigenschap van de bètafunctie is dat zij symmetrisch is. Dit is in te zien door gebruik te maken van de substitutie $t = 1 - s$;

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = - \int_1^0 (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds = \int_0^1 s^{y-1} (1-s)^{x-1} ds = B(y, x).$$

Een andere eigenschap van de bètafunctie is dat zij geschreven kan worden in andere vormen. Door de substitutie $t = s/(s+1)$ te gebruiken, volgt dat

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^\infty s^{x-1} (s+1)^{1-x} (s+1)^{1-y} (s+1)^{-2} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}} ds. \end{aligned}$$

Door de substitutie $t = \cos^2(\phi)$ te gebruiken, volgt dat

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2x-2}(\phi) \sin^{2y-2}(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\phi) \sin^{2y-1}(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

Alle drie de vormen van de bètafunctie worden in de rest van dit hoofdstuk gebruikt.

De relatie tussen de gamma-en bètafunctie wordt gegeven door onderstaande stelling.

Stelling 2.9. Voor $\operatorname{Re}(x) > 0$ en $\operatorname{Re}(y) > 0$ geldt

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+y)B(x,y) &= \Gamma(x+y) \int_0^1 t^{y-1} (1-t)^{x-1} dt \\
&\stackrel{(*)}{=} \Gamma(x+y) \int_0^\infty u^{y-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{x+y} du \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{y-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{x+y} v^{x+y-1} e^{-v} dv du \\
&\stackrel{(**)}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty u^{y-1} s^{x+y-1} e^{-s(u+1)} ds du \\
&= \int_0^\infty s^x e^{-s} \int_0^\infty (us)^{y-1} e^{-su} du ds \\
&= \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} \Gamma(y) ds \\
&= \Gamma(x)\Gamma(y).
\end{aligned}$$

Bij (*) en (**) is gebruikgemaakt van de substitutie $t = u/(1+u)$ en $s = v/(1+u)$ respectievelijk. Het verwisselen van de volgorde van integratie is toegestaan wegens de stelling van Fubini. ■

Met behulp van deze relatie kunnen integralen berekend worden. Dit wordt geïllustreerd met een voorbeeld.

Voorbeeld 2.10. Er geldt $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, want

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}(\theta) \sin^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

Omdat $\Gamma(z) > 0$ voor alle $\operatorname{Re}(z) > 0$, volgt dat $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. △

Ten slotte wordt het pochhammersymbool geïntroduceerd. Het pochhammersymbool $(a)_n$ is gedefinieerd door

$$\begin{cases} (a)_0 := 1, \\ (a)_n := a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Het pochhammersymbool kan als volgt gerelateerd worden aan de gammafunctie

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \tag{2.11}$$

De reflectieformule van Euler en de verdubbelingsformule van Legendre

Met behulp van de bètafunctie en de relatie tussen de gamma- en bètafunctie kan de reflectieformule van Euler worden bewezen.

Stelling 2.12 (De reflectieformule van Euler). Voor $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ geldt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Bewijs. De bètafunctie is

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}} ds$$

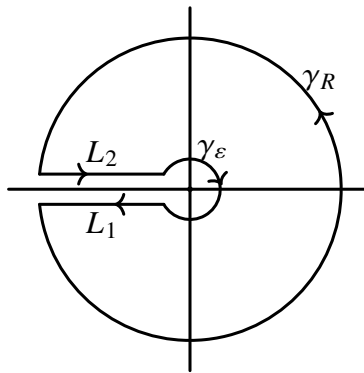
en wegens stelling 2.9 geldt

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Laat nu $y = 1 - x$, met $0 < x < 1$. Dan volgt dat

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{t+1} dt.$$

Bezie de contour $C = \gamma_R \cup \gamma_\varepsilon \cup L_1 \cup L_2$. Hier is γ_R een cirkel met straal R en γ_ε een cirkel met straal ε . Zie figuur 2.2.



Figuur 2.2

Definieer de functie f door het functievoorschrift $f(z) = \frac{z^{x-1}}{1-z}$. Hier heeft z^{x-1} haar hoofdwaarde. Merk op dat $z = 1$ het enige singuliere punt is van de functie f binnen de contour C . Het punt $z = 1$ is een enkelvoudige pool. Het residu in dit punt is

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z^{x-1}}{1-z} = -1.$$

De residuenstelling van Cauchy toepassen, geeft

$$\int_C \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 1) = -2\pi i.$$

Er volgt

$$-2\pi i = \int_{\gamma_R} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz + \int_{L_2} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz + \int_{L_1} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz.$$

Voor de grote cirkel geldt, met $z = Re^{i\theta}$, dat

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{i(x-1)\theta}}{1-Re^{i\theta}} d(Re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta$$

Analoog geldt voor de kleine cirkel, met $z = \varepsilon e^{i\theta}$, dat

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{i\varepsilon^x e^{ix\theta}}{1-\varepsilon e^{i\theta}} d\theta.$$

Voor het lijnstuk L_2 , van $-R$ naar $-\varepsilon$, met $z = -t = te^{\pi i}$, volgt dat

$$\int_{L_2} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_R^\varepsilon \frac{t^{x-1} e^{i(x-1)\pi}}{1+t} d(te^{\pi i}) = \int_R^\varepsilon \frac{t^{x-1} e^{ix\pi}}{1+t} dt.$$

Net zo volgt dat voor het lijnstuk L_1 , van $-\varepsilon$ naar $-R$, met $z = -t = te^{-\pi i}$, dat

$$\int_{L_1} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_\varepsilon^R \frac{t^{x-1} e^{-\pi ix}}{1+t} dt$$

Alles gecombineerd geeft

$$-2\pi i = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta + \int_R^\varepsilon \frac{t^{x-1} e^{ix\pi}}{1+t} dt + \int_{-\pi}^{-\pi} \frac{i\varepsilon^x e^{ix\theta}}{1-\varepsilon e^{i\theta}} d\theta + \int_\varepsilon^R \frac{t^{x-1} e^{-\pi ix}}{1+t} dt.$$

Er geldt $x \in (0, 1)$. Hieruit volgt dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta = 0 \text{ en } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\pi}^{-\pi} \frac{i\varepsilon^x e^{ix\theta}}{1-\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = 0.$$

Er volgt

$$-2\pi i = \int_\infty^0 \frac{t^{x-1} e^{ix\pi}}{1+t} dt + \int_0^\infty \frac{t^{x-1} e^{-i\pi x}}{1+t} dt,$$

oftewel

$$-2\pi i = (e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}) \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

Herschrijven geeft

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{2\pi i}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Hieruit volgt dat voor $0 < x < 1$ geldt dat

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Vanwege de analyticiteit geldt dat voor $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ geldt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Vanwege de continuïteit geldt deze formule ook voor $\operatorname{Re}(z) = 0$ met $z \neq 0$. Door gebruik te maken van de functionele vergelijking $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ en het feit dat $\sin(z+\pi) = -\sin(z)$ volgt dat

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

voor $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Dit bewijst de stelling. ■

Een tweede belangrijke formule voor de gammafunctie is de verdubbelingsformule van Legendre.

Stelling 2.13 (De verdubbelingsformule van Legendre). Voor $\operatorname{Re}(z) > 0$ geldt

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Bewijs. Merk op dat geldt

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = B(z, z) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2z-1}(\phi) \sin^{2z-1}(\phi) d\phi = 2 \cdot 2^{1-2z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1}(2\phi) d\phi.$$

Gebruik nu de substitutie $2\phi = \tau$. Dan volgt dat

$$2^{1-2z} \int_0^{\pi} \sin^{2z-1}(\tau) d\tau = 2^{1-2z} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1}(\tau) d\tau = 2^{1-2z} B\left(z, \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}.$$

Er geldt $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (zie voorbeeld 2.10). Hieruit volgt de gevraagde formule

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$
■

Asymptotiek voor de gammafunctie

De formule van Stirling is een asymptotische benadering voor de gammafunctie. In onderstaande definitie wordt precies gemaakt wat er bedoeld wordt wanneer een functie ϕ een asymptotische benadering is voor de functie f . Voor meer details over asymptotiek, in het bijzonder van speciale functies, wordt gerefereerd naar [Olv70].

Definitie 2.14. De functie f heet asymptotisch gelijk aan ϕ , of ϕ is een asymptotische benadering van f , als

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 1.$$

Dit wordt als volgt genoteerd: $f(x) \sim \phi(x)$ als $x \rightarrow \infty$. □

De formule van Stirling wordt in stelling 2.15 bewezen. Het bewijs is gebaseerd op [pat89].

Stelling 2.15 (De formule van Stirling).

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}, \quad \text{als } \operatorname{Re}(z) \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Bewijs. Om de formule van Stirling te bewijzen, tonen we aan dat

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z) e^z \sqrt{z}}{z^z} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2v^2} dv = \sqrt{2\pi},$$

met $z \in (0, \infty)$. Door de substitutie $t = u^2$ toe te passen, zien we dat de gammafunctie als volgt te schrijven is

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} u^{2z-1} e^{-u^2} du.$$

Oftewel

$$\frac{\Gamma(z) e^z \sqrt{z}}{z^z} = 2 \int_0^{\infty} e^{z-u^2} \left(\frac{u}{\sqrt{z}} \right)^{2z-1} du.$$

Gebruik nu de substitutie $u = \sqrt{z} + v$. Dan volgt dat

$$\frac{\Gamma(z) e^z \sqrt{z}}{z^z} = 2 \int_{-\sqrt{z}}^{\infty} e^{-2v\sqrt{z}} \left(1 + \frac{v}{\sqrt{z}} \right)^{2z-1} e^{-v^2} dv = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2v\sqrt{z}} \left(1 + \frac{v}{\sqrt{z}} \right)^{2z-1} \mathbf{1}_{(-\sqrt{z}, \infty)} e^{-v^2} dv.$$

Om de formule van Stirling te bewijzen, willen we z naar oneindig laten gaan. We moeten dus rechtvaardigen dat de limiet en integraal verwisseld mogen worden.

Definieer de functie ϕ_z door

$$\phi_z(v) = e^{-2v\sqrt{z}} \left(1 + \frac{v}{\sqrt{z}} \right)^{2z-1} \mathbf{1}_{(-\sqrt{z}, \infty)}.$$

Er geldt dat $\lim_{z \rightarrow \infty} \phi_z(v) = e^{-v^2}$. Dit volgt direct dat voor $v \geq -\sqrt{z}$ geldt

$$\ln(\phi_z(v)) = -2v\sqrt{z} + (2z-1) \ln \left(1 + \frac{v}{\sqrt{z}} \right) = -2v\sqrt{z} + (2z-1) \left(\frac{v}{\sqrt{z}} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{z} + \dots \right) = -v^2 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right).$$

De functie $\phi_z(v)$ heeft een maximum bij $v = -\frac{1}{2\sqrt{z}}$ en dus hebben we dat

$$\phi_z(v) \leq \phi_z \left(-\frac{1}{2\sqrt{z}} \right) = e \left(1 - \frac{1}{2z} \right)^{2z-1}.$$

De functie $\phi_z(v)$ blijft begrensd, want $\left(1 - \frac{1}{2z} \right)^{2z-1} \rightarrow e^{-1}$ als $z \rightarrow \infty$.

We hebben dus

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi_z(v) e^{-v^2} = e^{-2v^2}.$$

Verder hebben we het triviale feit dat $\mathbf{1}_{(-\sqrt{z}, \infty)} \rightarrow 1$ als $z \rightarrow \infty$. Omdat de functie $\phi_z(v) e^{-v^2}$ puntsgewijs convergeert en gedomineerd wordt door een integreerbare functie, kan de gedomineerde convergentiestelling

worden toegepast om limiet en integraal te verwisselen. Op deze manier krijgen we dat

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z) e^z \sqrt{z}}{z^z} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2v^2} dv = \sqrt{2\pi}.$$

Hieruit volgt (2.16). ■

2.2 Hypergeometrische functies

In deze paragraaf worden eigenschappen van hypergeometrische functies bestudeerd. Het doel is om transformatieformules en identiteiten voor hypergeometrische functies te bewijzen. Deze worden gebruikt om eigenschappen van de Wilson- en Racahpolynomen in hoofdstuk 3 te bewijzen.

Definitie en eigenschappen van hypergeometrische functies

Definitie 2.17. De hypergeometrische functie ${}_pF_q := {}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; x)$ is gedefinieerd door

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix}; x \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n x^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n n!}. \quad (2.18)$$

□

Natuurlijk moeten de parameters $(b_i)_n$, $i = 1, 2, \dots, q$ in de noemer niet nul zijn. Als één van de parameters a_i in de teller gelijk is aan $-k$, met $k \in \mathbb{N}$, is de hypergeometrische functie een polynoom in x . In dit geval heet de ${}_pF_q$ afbrekend. Met behulp van het quotiëntkenmerk kan worden aangetoond dat de hypergeometrische functie (2.18) divergeert voor $x \neq 0$ als $p > q + 1$, absoluut convergeert voor $|x| < 1$ als $p = q + 1$ en voor alle x als $p \leq q$. De functie ${}_2F_1$ heet de (klassieke) hypergeometrische functie en de functie ${}_pF_q$, met $p \neq 2$ en $q \neq 1$, heet de gegeneraliseerde hypergeometrische functie.

Voorbeeld 2.19. Veel speciale functies kunnen worden weergegeven in de vorm van een hypergeometrische functie. Zo geldt bijvoorbeeld dat

$${}_0F_0 \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; x \right) = e^x$$

en

$${}_1F_0 \left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(n+1)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+n-1}{n} x^n = (1-x)^{-a}.$$

△

Differentiaalvergelijkingen kunnen vaak worden opgelost in termen van hypergeometrische functies. De hypergeometrische differentiaalvergelijking is van de vorm

$$x(1-x)y''(x) + (c - (a+b+1)x)y'(x) - aby(x) = 0.$$

Voor $|x| < 1$ is de algemene oplossing gegeven door

$$y = A \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right) + B \cdot x^{1-c} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+1-c, b+1-c \\ 2-c \end{matrix}; x \right), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Identiteiten voor de klassieke hypergeometrische functies

De integraalrepresentatie van Euler drukt de ${}_2F_1$ uit in een integraal. In stelling 2.21 wordt deze integraalrepresentatie bewezen.

Stelling 2.21 (Euler's integraalrepresentatie voor ${}_2F_1$). Zij $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ en $|x| < 1$, dan geldt

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a} dt.$$

Bewijs. In voorbeeld 2.19 is aangetoond dat geldt

$$(1-tx)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n t^n, \quad |xt| < 1.$$

Vermenigvuldig beide kanten met $t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}$ en integreer van 0 tot 1. Dan volgt dat

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1} dt.$$

Het verwisselen van sommatie en integratie is toegestaan, omdat de machtreeks uniform convergeert op $[0, 1]$, want $|x| < 1$. De laatste integraal is een bètaïntegraal met parameters $n+b$ en $c-b$. Dus volgt

$$B(n+b, c-b) = \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)} = \frac{(b)_n}{(c)_n} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)},$$

oftewel

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a} dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

Dit geeft:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a} dt. \quad \blacksquare$$

Uit de integratierepresentatie van Euler kan de sommatieformule van Gauss en de stelling van Kummer worden afgeleid.

Stelling 2.22 (De sommatieformule van Gauss). Voor $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ geldt dat

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (2.23)$$

Bewijs. Laat $x \uparrow 1$ in Euler's integraalrepresentatie voor ${}_2F_1(a, b; c; x)$. Dan volgt

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1} dt = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} B(b, c-a-b) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \end{aligned}$$

onder de aanname dat $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$. De voorwaarde $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b)$ kan worden weggelaten door analytische voortzetting. \blacksquare

Stelling 2.24 (De stelling van Kummer). Voor $\operatorname{Re}(a) < 1$ en $\operatorname{Re}(b) > 0$ geldt:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ b - a + 1 \end{matrix}; -1\right) = \frac{\Gamma(b - a + 1)\Gamma(1 + \frac{1}{2}b)}{\Gamma(b + 1)\Gamma(1 - a + \frac{1}{2}b)}.$$

Bewijs. Neem $c = b - a + 1$ en neem de limiet $x \downarrow -1$ in Euler's integraalrepresentatie. Dan krijgen we

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ b - a + 1 \end{matrix}; -1\right) &= \frac{\Gamma(b - a + 1)}{\Gamma(b)\Gamma(1 - a)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{-a}(1+t)^{-a} dt = \frac{\Gamma(b - a + 1)}{\Gamma(b)\Gamma(1 - a)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t^2)^{-a} dt \\ &\stackrel{(t^2=u)}{=} \frac{\Gamma(b - a + 1)}{2\Gamma(b)\Gamma(1 - a)} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}b-1}(1-u)^{-a} du. \end{aligned}$$

Dit is een bètaïntegraal met parameters $\frac{1}{2}b$ en $1 - a$. Voor $\operatorname{Re}(a) < 1$ en $\operatorname{Re}(b) > 0$ krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(b - a + 1)}{2\Gamma(b)\Gamma(1 - a)} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}b-1}(1-u)^{-a} du &= \frac{\Gamma(b - a + 1)}{2\Gamma(b)\Gamma(1 - a)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}b)\Gamma(1 - a)}{\Gamma(\frac{1}{2}b - a + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(b - a + 1)}{\Gamma(b)\Gamma(1 - a)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}b + 1)\Gamma(1 - a)}{b\Gamma(\frac{1}{2}b - a + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(b - a + 1)\Gamma(1 + \frac{1}{2}b)}{\Gamma(b + 1)\Gamma(1 - a + \frac{1}{2}b)}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de gevraagde identiteit. ■

Met Euler's integraalrepresentatie kunnen transformatieformules voor ${}_2F_1$ worden afgeleid. In onderstaande stelling wordt de transformatie van Pfaff bewezen.

Stelling 2.25 (Pfaff's transformatie). Er geldt

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c - b \\ c \end{matrix}; \frac{x}{x-1}\right).$$

Bewijs. Neem aan dat $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ en pas de substitutie $s = 1 - t$ toe op Euler's integraalrepresentatie. Er volgt

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) &= (1-x)^{-a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-s)^{b-1} s^{c-b-1} \left(1 - \frac{xs}{x-1}\right)^{-a} ds \\ &= (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c - b \\ c \end{matrix}; \frac{x}{x-1}\right). \end{aligned}$$

De voorwaarde $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ kan worden weggelaten door analytische voorzetting. ■

Door de transformatie van Pfaff nog een keer toe te passen, krijgen we

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) &= (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix}; \frac{x}{x-1}\right) \\ &= (1-x)^{-a} \cdot \left(1 - \frac{x}{x-1}\right)^{b-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; \frac{x/(x-1)}{x/(x-1)-1}\right) \\ &= (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; x\right). \end{aligned}$$

Merk op dat in bovenstaande afleiding gebruik is gemaakt dat ${}_2F_1$ symmetrisch is in de parameters a en b , i.e. ${}_2F_1(a, b; c; x) = {}_2F_1(b, a; c; x)$. De zojuist afgeleide transformatie staat bekend als de transformatie van Euler.

Stelling 2.26 (Euler's transformatie).

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; x\right).$$

Identiteiten voor de gegeneraliseerde hypergeometrische functies

Met de ontwikkelde theorie, identiteiten en transformaties voor de klassieke hypergeometrische functies, kunnen identiteiten voor de gegeneraliseerde hypergeometrische functies bewezen worden. De eerste identiteit die bewezen wordt, staat bekend als de sommatieformule van Pfaff-Saalschütz voor een afbrekende ${}_3F_2$.

Stelling 2.27 (Pfaff-Saalschütz sommatieformule). Er geldt

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}. \quad (2.28)$$

Bewijs. Wegens Euler's transformatie hebben we dat

$$(1-x)^{a+b-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a)_n (c-b)_n x^n}{(c)_n n!}. \quad (2.29)$$

De linkerkant van (2.29) kan als volgt geschreven worden

$$\begin{aligned} (1-x)^{a+b-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(c-a-b)_j}{j!} x^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} x^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k (c-a-b)_{n-k}}{(c)_k k! (n-k)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k! (n-k)!} \cdot \frac{(c-a-b)_n}{(-1)^k (1+a+b-c-n)_k} x^n. \end{aligned}$$

Als we de coëfficiënten x^n van beide kanten van (2.29) met elkaar vergelijken, krijgen we dat

$$\sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k! (n-k)!} \cdot \frac{(c-a-b)_n}{(-1)^k (1+a+b-c-n)_k} = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n n!}.$$

Als we beide kanten vermenigvuldigen met $n!$, gebruik maken van het feit dat $\frac{n!}{(n-k)!} = (-1)^k (-n)_k$ en delen door $(c-a-b)_n$ dan krijgen we de gevraagde identiteit

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}.$$

■

Definitie 2.30. De hypergeometrische functie ${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; x)$ heet gebalanceerd als

$$1 + a_1 + a_2 + \dots + a_p = b_1 + b_2 + \dots + b_q.$$

□

Er kunnen diverse formules en identiteiten voor gebalanceerde hypergeometrische functies worden afgeleid. In onderstaande stellingen kan een gebalanceerde ${}_4F_3$ in een andere gebalanceerde ${}_4F_3$ worden getransformeerd. Deze transformatieformule staat bekend als de transformatieformule van Whipple voor een afbrekende gebalanceerde reeks. Het bewijs is gebaseerd op [KA02].

Stelling 2.31 (De transformatieformule van Whipple). Er geldt

$${}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, a, b, c \\ d, e, f \end{matrix}; 1\right) = \frac{(e-a)_n (f-a)_n}{(e)_n (f)_n} \cdot {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, a, d-b, d-c \\ d, a+1-n-e, a+1-n-f \end{matrix}; 1\right), \quad (2.32)$$

met de balansvergelijking

$$a + b + c - n + 1 = d + e + f.$$

Bewijs. Merk op dat

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} d, e \\ f \end{matrix}; x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d)_n (e)_n}{(f)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k (d)_{n-k} (e)_{n-k}}{k! (c)_k (f)_{n-k} (n-k)!} \right) x^n. \end{aligned}$$

De coëfficiënt x^n is dus $\sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k (d)_{n-k} (e)_{n-k}}{k! (c)_k (f)_{n-k} (n-k)!}$. Deze coëfficiënt kan geschreven worden als een ${}_4F_3$, want

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k (d)_{n-k} (e)_{n-k}}{k! (c)_k (f)_{n-k} (n-k)!} &= \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} \cdot \frac{(d)_n}{(1-d-n)_k} \frac{(e)_n}{(1-e-n)_k} \cdot \frac{(1-f-n)_k}{(f)_n} \cdot \frac{(-n)_k}{n!} \\ &= \frac{(d)_n (e)_n}{n! (f)_n} {}_4F_3\left(\begin{matrix} a, b, 1-f-n, -n \\ c, 1-d-n, 1-e-n \end{matrix}; 1\right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Wegens de transformatie van Euler geldt dat

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} d, e \\ f \end{matrix}; x\right) = (1-x)^{c-a-b+f-d-e} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; x\right) \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} f-d, f-e \\ f \end{matrix}; x\right). \quad (2.34)$$

Stel nu $c - a - b + f - d - e = 0$. Deze voorwaarde komt overeen met de balansvergelijking. In dit geval is de coëfficiënt x^n van de rechterkant van (2.34) gelijk aan

$$\frac{(f-d)_n(f-e)_n}{n!(f)_n} \cdot {}_4F_3\left(\begin{matrix} c-a, c-b, 1-f-n, -n \\ c, 1-f+d-n, 1-f+e-n \end{matrix}; 1\right). \quad (2.35)$$

Als we (2.33) en (2.35) combineren en gebruik maken van het feit dat $(d)_n = (1-d-n)_n$ dan krijgen we

$${}_4F_3\left(\begin{matrix} a, b, 1-f-n, -n \\ c, 1-d-n, 1-e-n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(f-d)_n(f-e)_n}{(1-d-n)_n(1-e-n)_n} {}_4F_3\left(\begin{matrix} c-a, c-b, 1-f-n, -n \\ c, 1-f+d-n, 1-f+e-n \end{matrix}; 1\right). \quad (2.36)$$

Als we nu de parameters hernoemen, krijgen we

$${}_4F_3\left(\begin{matrix} a, b, c, -n \\ d, e, f \end{matrix}; 1\right) = \frac{(e-c)_n(f-c)_n}{(e)_n(f)_n} {}_4F_3\left(\begin{matrix} d-a, d-b, c, -n \\ d, c+1-n-e, c+1-n-f \end{matrix}; 1\right)$$

Verwissel nu de rollen van a en c dan krijgen we de formule van Whipple. ■

In de volgende stelling wordt de identiteit van Dixon bewezen. We volgen het bewijs van [Bai36] en [Sla66].

Stelling 2.37 (De identiteit van Dixon). We hebben de volgende identiteit

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a+1)\Gamma(a-b+1)\Gamma(a-c+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-b-c+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-b+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-c+1)\Gamma(a-b-c+1)}.$$

Bewijs. Het bewijs van de identiteit van Dixon is gebaseerd op de volgende transformatie

$$\begin{aligned} ab(1-x){}_3F_2\left(\begin{matrix} a+1, b+1, c \\ 1+a-b, 2+a-c \end{matrix}; x\right) + (a-c+1)(a-2b-2c+2){}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; x\right) \\ = (a-2c+2)(a-b-c+1){}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c-1 \\ 1+a-b, 2+a-c \end{matrix}; x\right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

We tonen de juistheid van de transformatie (2.38) aan door de coëfficiënten x^n aan beide kanten met elkaar te vergelijken. De coëfficiënt x^n van de linkerkant van (2.38) is gelijk aan

$$\begin{aligned} ab \frac{(a+1)_n(b+1)_n(c)_n}{(1+a-b)_n(2+a-c)_n n!} - ab \frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}(c)_{n-1}}{(1+a-b)_{n-1}(2+a-c)_{n-1}(n-1)!} \\ + (a-c+1)(a-2b-2c+2) \frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(1+a-b)_n(1+a-c)_n n!}. \end{aligned}$$

Dit is gelijk aan

$$\begin{aligned} \frac{(a)_n(b)_n(c-1)_n}{(1+a-b)_n(2+a-c)_n n!} \\ \times \left(\frac{(a+n)(b+n)(c+n-1)}{c-1} + \frac{n(a-b+n)(1+a-c+n)}{c-1} + \frac{(a-c+n+1)(a-2b-2c+2)(c-1+n)}{c-1} \right) \end{aligned}$$

De haakjes netjes uitwerken, geeft

$$(a-c+1)(a-2b-2c+2)\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(1+a-b)_n(1+a-c)_nn!}.$$

We zien dat dit gelijk is aan de coëfficiënt x^n aan de rechterkant van (2.38). Dit toont de juistheid aan van de transformatie.

Laat $x \uparrow 1$. Dan volgt

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right) = \frac{(1+\frac{1}{2}a-c)(1+a-b-c)}{(1+a-c)(1+\frac{1}{2}a-b-c)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c-1 \\ 1+a-b, 2+a-c \end{matrix}; 1\right).$$

Vervang nu $c-1$ door c en herhaal dit procedé n keer. Dan volgt

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right) = \frac{(1+\frac{1}{2}a-c)_n(1+a-b-c)_n}{(1+a-c)_n(1+\frac{1}{2}a-b-c)_n} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c-n \\ 1+a-b, 1+a-c+n \end{matrix}; 1\right).$$

Merk op dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c-n)_r}{(1+a-c+n)_r} = (-1)^r.$$

Laat nu $n \rightarrow \infty$ dan volgt voor $\operatorname{Re}(b) < 1$ dat

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b-c)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}a-c)\Gamma(1+a-b-c)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ 1+a-b \end{matrix}; -1\right).$$

De ${}_2F_1$ aan de rechterkant kan met behulp van de identiteit van Kummer bepaald worden. Dit geeft

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a+1)\Gamma(a-b+1)\Gamma(a-c+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-b-c+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-b+1)\Gamma(\frac{1}{2}a-c+1)\Gamma(a-b-c+1)}.$$

In het bewijs wordt gebruik gemaakt dat $\operatorname{Re}(b) < 1$, maar deze voorwaarde kan worden weggelaten door middel van analytische voortzetting van de parameters. ■

In onderstaande stelling kan een afbrekende ${}_5F_4$ worden uitgedrukt in een afbrekende ${}_4F_3$.

Stelling 2.39.

$$\begin{aligned} & {}_5F_4\left(\begin{matrix} a, b, c, d, -m \\ a-b+1, a-c+1, a-d+1, a+m+1 \end{matrix}; 1\right) \\ &= \frac{(a+1)_m(\frac{1}{2}a-d+1)_m}{(\frac{1}{2}a+1)_m(a-d+1)_m} {}_4F_3\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}a, a-b-c+1, d, -m \\ a-b+1, a-c+1, d-m-\frac{1}{2}a \end{matrix}; 1\right). \end{aligned}$$

Bewijs. Er geldt dat

$$\begin{aligned} & {}_5F_4\left(\begin{matrix} a, b, c, d, -m \\ a-b+1, a-c+1, a-d+1, a+m+1 \end{matrix}; 1\right) \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{(a)_n (d)_n (-m)_n}{n! (a-d+1)_n (a+m+1)_n} \frac{(b)_n (c)_n}{(a-b+1)_n (a-c+1)_n}. \end{aligned}$$

Als we gebruik maken van de identiteit van Pfaff-Saalschütz, dan krijgen we dat deze ${}_5F_4$ te schrijven is als

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^m \frac{(a)_n (d)_n (-m)_n}{n! (a-d+1)_n (a+m+1)_n} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (a-b-c+1)_r (a+n)_r}{r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r} \right) \\ &= \sum_{n=0}^m \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (a)_{n+r} (d)_n (-m)_n (a-b-c+1)_r}{(n-r)! r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r (a-d+1)_n (a+m+1)_n} \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{n=r}^m \frac{(-1)^r (a)_{n+r} (d)_n (-m)_n (a-b-c+1)_r}{(n-r)! r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r (a-d+1)_n (a+m+1)_n}. \end{aligned}$$

Laat nu $t = n - r$. Dan volgt

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^{m-r} \frac{(a)_{t+2r} (d)_{t+r} (-m)_{t+r} (a-b-c+1)_r (-1)^r}{t! r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r (a-d+1)_{t+r} (a+m+1)_{t+r}} \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{(a)_{2r} (d)_r (-m)_r (a-b-c+1)_r (-1)^r}{r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r (a-d+1)_r (a+m+1)_r} \\ & \quad \times \sum_{t=0}^{m-r} \frac{(a+2r)_t (d+r)_t (-m+r)_t}{t! (a-d+r+1)_t (a+m+r+1)_t}. \end{aligned}$$

Het toepassen van de identiteit van Dixon geeft

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^m \frac{(a)_{2r} (d)_r (-m)_r (a-b-c+1)_r (-1)^r}{r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r (a-d+1)_r (a+m+1)_r} \\ & \quad \times \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a+r+1) \Gamma(a-d+1+r) \Gamma(a+m+1+r) \Gamma(\frac{1}{2}a-r-d+m+1)}{\Gamma(a+1+2r) \Gamma(\frac{1}{2}a-d+1) \Gamma(\frac{1}{2}a+m+1) \Gamma(a-d+m+1)} \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{(a)_{2r} \Gamma(\frac{1}{2}a+r+1)}{\Gamma(a+1+2r)} \cdot (-1)^r \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a-r-d+m+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}a-d+1)} \cdot \frac{\Gamma(a-d+1+r)}{(a-d+1)_r} \\ & \quad \times \frac{\Gamma(a+m+1+r)}{(a+m+1)_r} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}a+1+m)} \cdot \frac{1}{\Gamma(a-d+1+m)} \cdot \frac{(a-b-c+1)_r (d)_r (-m)_r}{r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r} \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{(\frac{1}{2}a)_r \Gamma(\frac{1}{2}a+1)}{\Gamma(a+1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a-d+m+1)}{(d-m-\frac{1}{2}a)_r \Gamma(\frac{1}{2}a-d+1)} \cdot \Gamma(a-d+1) \cdot (a+1)_m \Gamma(a+1) \\ & \quad \times \frac{1}{(\frac{1}{2}a+1)_m \Gamma(\frac{1}{2}a+1)} \cdot \frac{1}{(a-d+1)_m \Gamma(a-d+1)} \cdot \frac{(a-b-c+1)_r (d)_r (-m)_r}{r! (a-b+1)_r (a-c+1)_r}. \end{aligned}$$

Dit is gelijk aan

$$\begin{aligned} & \frac{(a+1)_m}{(\frac{1}{2}a+1)_m(a-d+1)_m} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a-d+m+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}a-d+1)} \sum_{r=0}^m \frac{(\frac{1}{2}a)_r(a-b-c+1)_r(d)_r(-m)_r}{(a-b+1)_r(a-c+1)_r(d-m-\frac{1}{2}a)_r r!} \\ &= \frac{(a+1)_m(\frac{1}{2}a-d+1)_m}{(\frac{1}{2}a+1)_m(a-d+1)_m} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}a, a-b-c+1, d, -m \\ a-b+1, a-c+1, d-m-\frac{1}{2}a \end{matrix}; 1 \right). \end{aligned}$$

Dit bewijst de stelling. ■

Als we nu $b = 1 + \frac{1}{2}a$ kiezen in stelling 2.39, dan reduceert de ${}_5F_4$ naar de volgende gebalanceerde ${}_3F_2$

$$\frac{(a+1)_m(\frac{1}{2}a-d+1)_m}{(\frac{1}{2}a+1)_m(a-d+1)_m} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}a-c, d, -m \\ a-c+1, d-m-\frac{1}{2}a \end{matrix}; 1 \right).$$

Als we de nu de sommatieformule van Pfaff-Saalschütz toepassen, krijgen we de volgende identiteit.

Gevolg 2.40. Er geldt

$${}_5F_4 \left(\begin{matrix} a, \frac{1}{2}a+1, c, d, -m \\ \frac{1}{2}a, a-c+1, a-d+1, a+m+1 \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(a+1)_m(a-c-d+1)_m}{(a-c+1)_m(a-d+1)_m}.$$

In de volgende stelling wordt een ${}_7F_6$ gereduceerd naar een ${}_4F_3$.

Stelling 2.41. Er geldt

$$\begin{aligned} & {}_7F_6 \left(\begin{matrix} a, \frac{1}{2}a+1, b, c, d, e, -m \\ \frac{1}{2}a, a-b+1, a-c+1, a-d+1, a-e+1, a+m+1 \end{matrix}; 1 \right) \\ &= \frac{(a+1)_m(a-d-e+1)_m}{(a-d+1)_m(a-e+1)_m} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a-b-c+1, d, e, -m \\ a-b+1, a-c+1, d+e-a-m \end{matrix}; 1 \right). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Bewijs. Er geldt dat

$$\begin{aligned} & {}_7F_6 \left(\begin{matrix} a, \frac{1}{2}a+1, b, c, d, e, -m \\ \frac{1}{2}a, a-b+1, a-c+1, a-d+1, a-e+1, a+m+1 \end{matrix}; 1 \right) \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{(a)_n(\frac{1}{2}a+1)_n(d)_n(e)_n(-m)_n}{n!(\frac{1}{2}a)_n(a-d+1)_m(a-e+1)_n(a+m+1)_n} \cdot \frac{(b)_n(c)_n}{(a-b+1)_n(a-c+1)_n} \end{aligned}$$

Als we de identiteit van Pfaff-Saalschütz toepassen, dan volgt dat bovenstaande ${}_7F_6$ gelijk is aan

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^m \frac{(a)_n (\frac{1}{2}a + 1)_n (d)_n (e)_n (-m)_n}{n! (\frac{1}{2}a)_n (a - d + 1)_n (a - e + 1)_n (a + m + 1)_n} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (a - b - c + 1)_r (a + n)_r}{r! (a - b + 1)_r (a - c + 1)_r} \right) \\ &= \sum_{n=0}^m \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (a)_{n+r} (\frac{1}{2}a + 1)_n (d)_n (e)_n (-m)_n (a - b - c + 1)_r}{(n - r)! r! (a - b + 1)_r (a - c + 1)_r (\frac{1}{2}a)_n (a - d + 1)_n (a - e + 1)_n (a + m + 1)_n} \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{n=r}^m \frac{(-1)^r (a)_{n+r} (\frac{1}{2}a + 1)_n (d)_n (e)_n (-m)_n (a - b - c + 1)_r}{(n - r)! r! (a - b + 1)_r (a - c + 1)_r (\frac{1}{2}a)_n (a - d + 1)_n (a - e + 1)_n (a + m + 1)_n} \end{aligned}$$

Laat $t = n - r$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^m \sum_{t=0}^{m-r} \frac{(a)_{t+2r} (\frac{1}{2}a + 1)_{t+r} (d)_{t+r} (e)_{t+r} (-m)_{t+r} (a - b - c + 1)_r (-1)^r}{t! r! (a - b + 1)_r (a - c + 1)_r (\frac{1}{2}a)_{t+r} (a - d + 1)_{t+r} (a - e + 1)_{t+r} (a + m + 1)_{t+r}} \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{(a)_{2r} (\frac{1}{2}a + 1)_r (d)_r (e)_r (-m)_r (a - b - c + 1)_r (-1)^r}{r! (a - b + 1)_r (a - c + 1)_r (a - d + 1)_r (\frac{1}{2}a)_r (a - e + 1)_r (a + m + 1)_r} \\ & \quad \times \sum_{t=0}^{m-r} \frac{(a + 2r)_t (\frac{1}{2}a + r + 1)_t (d + r)_t (e + r)_t (-m + r)_t}{t! (\frac{1}{2}a + r)_t (a - d + r + 1)_t (a - e + r + 1)_t (a + m + r + 1)_t}. \end{aligned}$$

We passen nu de identiteit uit gevolg 2.40 toe. Dan krijgen we

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^m \frac{(a)_{2r} (\frac{1}{2}a + 1)_r (d)_r (e)_r (-m)_r (a - b - c + 1)_r (-1)^r}{r! (a - b + 1)_r (a - c + 1)_r (a - d + 1)_r (\frac{1}{2}a)_r (a - e + 1)_r (a + m + 1)_r} \\ & \quad \times \frac{(a + 2r + 1)_{m-r} (a - d - e + 1)_{m-r}}{(a + 2r - d - r + 1)_{m-r} (a - e + r + 1)_{m-r}}. \end{aligned}$$

Na wat termen herschrijven, zien we dat dit gelijk is aan

$$\frac{(a + 1)_m (a - d - e + 1)_m}{(a - d + 1)_m (a - e + 1)_m} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a - b - c + 1, d, e, -m \\ a - b + 1, a - c + 1, d + e - a - m \end{matrix}; 1 \right).$$

Dit bewijst de gevraagde stelling. ■

Laat nu $2a + 1 = b + c + d + e - m$ in (2.42). Dan reduceert de ${}_4F_3$ tot een ${}_3F_2$, immers:

$$\begin{aligned} & \frac{(a + 1)_m (a - d - e + 1)_m}{(a - d + 1)_m (a - e + 1)_m} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a - b - c + 1, d, e, -m \\ a - b + 1, a - c + 1, d + e - a - m \end{matrix}; 1 \right) \\ &= \frac{(a + 1)_m (a - d - e + 1)_m}{(a - d + 1)_m (a - e + 1)_m} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} d, e, -m \\ a - b + 1, a - c + 1 \end{matrix}; 1 \right). \end{aligned}$$

Toepassen van de formule van Pfaff-Saalschütz geeft:

$$\begin{aligned} & \frac{(a+1)_m(a-d-e+1)_m}{(a-d+1)_m(a-e+1)_m} \cdot \frac{(a-b+1-d)_m(a-b+1-e)_m}{(a-b+1)_m(a-b+1-d-e)_m} \\ &= \frac{(a+1)_m(a-b-c+1)_m(a-b-d+1)_m(a-c-d+1)_m}{(a-b+1)_m(a-c+1)_m(a-d+1)_m(a-b-c-d+1)_m}. \end{aligned}$$

Hier is gebruik gemaakt van onder andere de formule $(a-b+1-d-e)_m = (-a+c-m)_m = (1+a-c)_m$. Het resultaat is de volgende identiteit en staat bekend als de formule van Dougall.

Stelling 2.43 (De formule van Dougall). Er geldt

$$\begin{aligned} & {}_7F_6 \left(\begin{matrix} a, \frac{1}{2}a+1, b, c, d, e, -m \\ \frac{1}{2}a, a-b+1, a-c+1, a-d+1, a-e+1, a+m+1 \end{matrix}; 1 \right) \\ &= \frac{(a+1)_m(a-b-c+1)_m(a-b-d+1)_m(a-c-d+1)_m}{(a-b+1)_m(a-c+1)_m(a-d+1)_m(a-b-c-d+1)_m}, \end{aligned}$$

onder de aanname dat $2a+1 = b+c+d+e-m$.

Ten slotte bewijzen we een identiteit die een ${}_5F_4$ uitdrukt in de gammafunctie.

Stelling 2.44. Er geldt:

$$\begin{aligned} & {}_5F_4 \left(\begin{matrix} a, 1+\frac{1}{2}a, c, d, e \\ \frac{1}{2}a, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix}; 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+a-c-d-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)\Gamma(1+a-c-e)\Gamma(1+a-c-d)}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Bewijs. Toepassen van Dougall's formule met $b = 2a - c - d - e + m + 1$, het feit dat $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ en $m \rightarrow \infty$ geeft het gevraagde resultaat. ■

2.3 Orthogonale polynomen

In deze paragraaf wordt de definitie gegeven van orthogonale polynomen en wordt de drieterms recurrente betrekking besproken, een fundamentele stelling in de theorie van orthogonale polynomen. Verder wordt het Askey-schema besproken en het verband tussen de Wilson- en Racahpolynomen en de andere hypergeometrische orthogonale polynomen uitgelegd. We refereren naar [Koo21; FK19; AAR99] voor meer informatie.

Neem aan dat μ een positieve Borelmaat is op \mathbb{R} met een oneindige support. We nemen aan dat de momenten van alle orden bestaan, i.e. $\int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x) < \infty$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$. Verder geldt dat het inproduct op een Hilbertruimte $\mathcal{L}^2(\mu)$ gedefinieerd is door

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

Definitie 2.46. Een rij polynomen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $\text{graad}(p_n) = n$ heet orthogonaal ten opzichte van de maat $d\mu(x)$ op \mathbb{R} als

$$\langle p_m, p_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} p_m(x) \overline{p_n(x)} d\mu(x) = h_n \delta_{mn},$$

met

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{als } m = n \\ 0 & \text{als } m \neq n \end{cases}.$$

Hierbij zijn h_n positieve constanten en δ_{mn} heet de Kronecker delta. □

Indien de maat μ een eindige support heeft, dan hebben we een eindige verzameling van orthogonale polynomen. Een eindige verzameling van orthogonale polynomen voldoet nog steeds aan een orthogonaliteitsrelatie. De orthogonaliteitsrelatie is in dit geval van de vorm

$$\sum_{x=0}^N p_n(x) p_m(x) w(x) = h_n \delta_{mn}$$

met h_n positieve constanten en $w(x)$ de gewichtsfunctie die hoort bij de maat met eindige support.

Orthogonale polynomen voldoen aan veel mooie eigenschappen. Eén daarvan is dat orthogonale polynomen voldoen aan een zogenaamde drieterms recurrente betrekking, dat wil zeggen dat elke drie opeenvolgende polynomen aan elkaar zijn gerelateerd door een eenvoudige relatie. Deze eigenschap wordt precies gemaakt in onderstaande stelling en is fundamenteel voor de theorie van orthogonale polynomen.

Stelling 2.47 (Drieterms recurrente betrekking). Een rij orthogonale polynomen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voldoet aan de drieterms recurrente betrekking

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) p_n(x) + C_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

met $A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ en $C_n = -\frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{h_n}{h_{n-1}}$. Hierbij geldt dat k_n de kopcoëfficiënt is van de polynoom p_n . Verder wordt aangenomen dat $p_{-1}(x) := 0$.

Bewijs. Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $\text{graad}(p_n) = n$. Dit betekent dat de rij polynomen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lineair

onafhankelijk is. Definieer $A_n := \frac{k_{n+1}}{k_n}$. Dan is $p_{n+1}(x) - A_n x p_n(x)$ een polynoom van graad kleiner of gelijk aan n . Dan volgt dat

$$p_{n+1}(x) - A_n x p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x)$$

voor zekere waarden van c_m . Nu volgt uit de orthogonaliteitseigenschap dat

$$\langle p_{n+1}(x) - A_n x p_n(x), p_k(x) \rangle = \sum_{m=0}^n c_m \langle p_m(x), p_k(x) \rangle = c_k \langle p_k(x), p_k(x) \rangle = c_k h_k.$$

Hieruit volgt dat

$$c_k h_k = \langle p_{n+1}(x) - A_n x p_n(x), p_k(x) \rangle = \langle p_{n+1}(x), p_k(x) \rangle - A_n \langle x p_n(x), p_k(x) \rangle = -A_n \langle p_n(x), x p_k(x) \rangle.$$

Er geldt $\text{graad}(x p_k(x)) < n$ voor $k < n - 1$, dus volgt dat $\langle p_n(x), x p_k(x) \rangle = 0$. Kortom $c_k = 0$ voor $k < n - 1$. Dit bewijst dat de polynomen voldoen aan de drieterms recurrenente betrekking:

$$p_{n+1}(x) - A_n x p_n(x) = c_n p_n(x) + c_{n+1} p_{n-1}(x).$$

Verder geldt

$$h_{n-1} c_{n-1} = -A_n \langle p_n(x), x p_{n-1}(x) \rangle = -A_n \frac{k_{n-1}}{k_n} h_n$$

en dus geldt dat

$$c_{n-1} = -\frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{h_n}{h_{n-1}}.$$

Dit bewijst de stelling. ■

De stelling is omkeerbaar onder bepaalde omstandigheden, i.e. als een rij polynomen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voldoet aan een drieterms recurrenente betrekking, dan is deze rij polynomen orthogonaal op een zeker interval ten opzichte van een specifieke gewichtsfunctie. Deze stelling staat in de literatuur bekend als de stelling van Favard. We refereren naar [Fav35] voor meer details.

In onderstaand voorbeeld introduceren we de Chebyshevpolynomen. Deze polynomen zijn een voorbeeld van hypergeometrische orthogonale polynomen waarvan we eenvoudig de drieterms recurrenente betrekking en drieterms recurrenente betrekking kunnen aantonen.

Voorbeeld 2.48. De Chebyshevpolynomen van de eerste soort zijn gedefinieerd door

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad \text{met } x = \cos(\theta) \text{ en } \theta \in [0, \pi].$$

Met behulp van elementaire calculus kan worden aangetoond dat de Chebyshevpolynomen voldoen aan de volgende orthogonaliteitseigenschap

$$\langle T_m, T_n \rangle = \int_{-1}^1 \cos(m\theta) \cos(n\theta) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \delta_{mn} \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } m = n. \end{cases}$$

Voort voldoen de Chebyshevpolynomen aan de volgende drieterms recurrenente betrekking

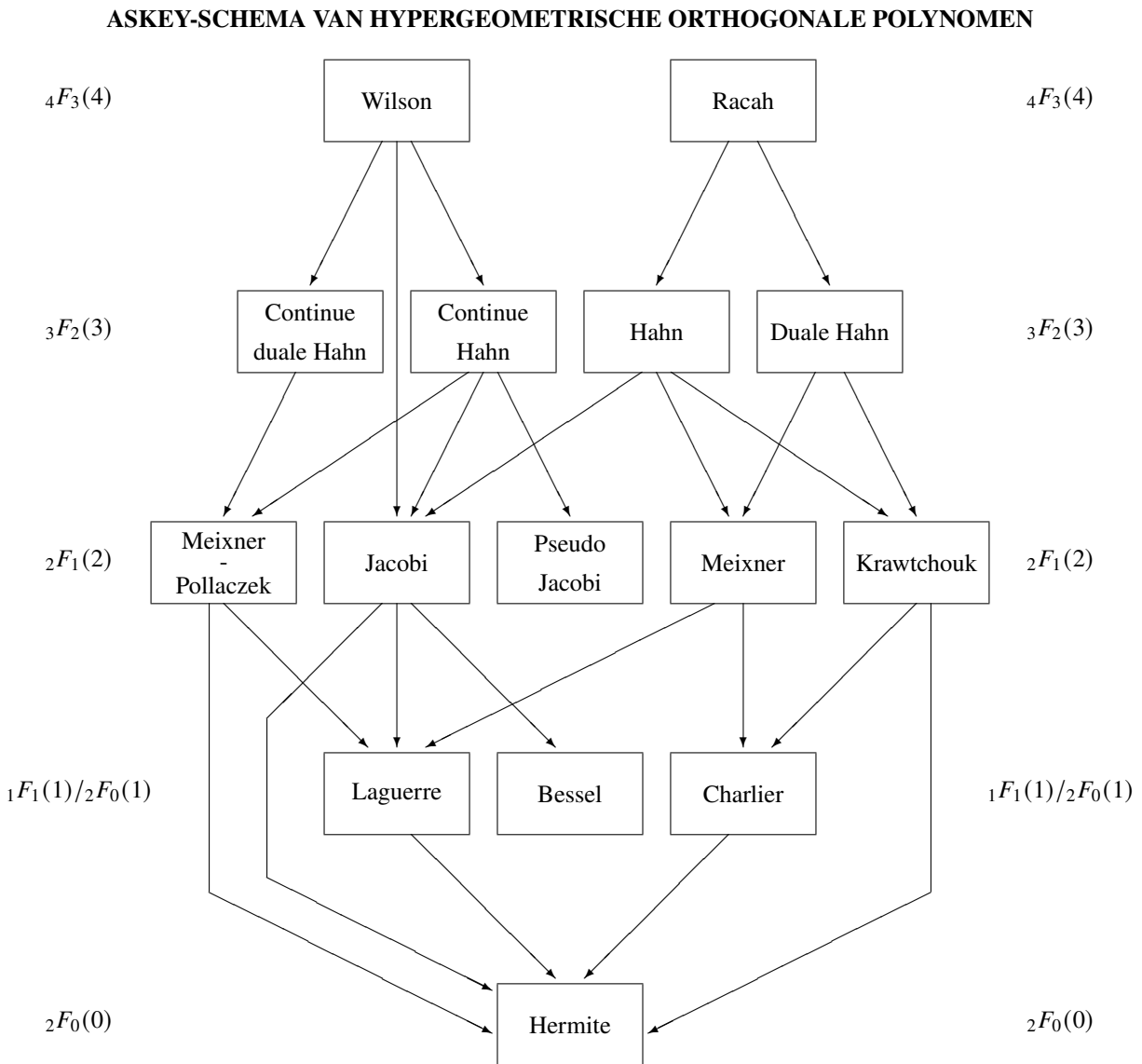
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Dit kan ingezien worden door gebruik te maken van verdubbelingsformules voor de cosinus. Er geldt dus

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$$

△

Het Askey-schema is een schema waarin hypergeometrische orthogonale polynomen worden geordend op basis van een zekere hiërarchie. In figuur 2.3 is dit schema weergegeven [KLS10].



Helemaal bovenaan dit schema staan de Wilsonpolynomen en de Racahpolynomen. Beide zijn uit te drukken in een ${}_4F_3$, zoals weergegeven in de zijkant van dit schema. De Wilson- en Racahpolynomen zijn de meest algemene hypergeometrische orthogonale polynomen in één variabele, omdat deze polynomen en hun eigenschappen expliciet zijn uit te drukken. De Wilson- en Racahpolynomen generaliseren de andere polynomen uit het Askey-schema. Dit betekent dat de andere polynomen een speciaal of limiet geval zijn van de Wilson- of Racahpolynomen.

De Wilsonpolynomen, Jacobipolynomen en Hermitepolynomen zijn voorbeelden van continue orthogonale

polynomen, omdat hun orthogonaliteitseigenschap uit zijn te drukken in een integraal. Indien de orthogonaliteitsrelatie uit te drukken is in een sommatie, dan spreken we van discrete orthogonale polynomen. Discrete orthogonale polynomen zijn dus orthogonaal ten opzichte van een discrete maat. Voorbeelden hiervan zijn de Racahpolynomen, Hahnpolynomen en de Chaliierpolynomen.

De Wilson- en Racahpolynomen generaliseren de andere orthogonale polynomen uit het Askey-schema. Het is dus mogelijk om eigenschappen van de andere polynomen uit het Askey-schema af te leiden uit de eigenschappen van de Wilson- en Racahpolynomen door een bepaalde keuze te maken voor de parameters en/of door een limiet te nemen. Dit motiveert om eigenschappen van de Wilson- en Racahpolynomen te onderzoeken en af te leiden in het volgende hoofdstuk.

Hoofdstuk 3

De Wilson- en Racahpolynomen

In dit hoofdstuk worden de Wilson- en Racahpolynomen gedefinieerd en de orthogonaliteitsrelatie en drieterms recurrenente betrekking wordt voor beide polynomen afgeleid. We volgen hiervoor het bewijs dat Wilson gaf in zijn proefschrift, zie [Wil78; Wil80].

In de eerste paragraaf worden de Wilson- en Racahpolynomen gedefinieerd, worden enkele eigenschappen besproken en de orthogonaliteitsrelatie en de drieterms recurrenente betrekking wordt gegeven. In paragraaf 3.2 wordt de drieterms recurrenente betrekking van de Wilsonpolynomen afgeleid. Hiermee kan de drieterms recurrenente betrekking van de Racahpolynomen worden afgeleid. Vervolgens wordt de orthogonaliteitsrelatie van de Wilson- en Racahpolynomen bewezen in paragraaf 3.3. Ten slotte wordt in paragraaf 3.4 de orthogonaliteitseigenschap van de Jacobipolynomen afgeleid uit de orthogonaliteitseigenschap van de Wilsonpolynomen.

3.1 Definitie en eigenschappen van de Wilson- en Racahpolynomen

De Wilsonpolynomen zijn in 1978 geïntroduceerd in de dissertatie van Wilson [Wil78]. Ze zijn gedefinieerd door

$$\begin{aligned} W_n(x^2) &:= W_n(x^2; a, b, c, d) \\ &:= (a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n \cdot {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, a+b+c+d+n-1, a+ix, a-ix \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix} ; 1 \right). \end{aligned}$$

Om formules in het vervolg mooier en overzichtelijker weer te kunnen geven, worden de Wilsonpolynomen genormaliseerd. Deze polynomen worden aangegeven door \tilde{W}_n en zijn gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \tilde{W}_n(x^2) &:= \tilde{W}_n(x^2; a, b, c, d) := \frac{W_n(x^2, a, b, c, d)}{(a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n} \\ &= {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, a+b+c+d+n-1, a+ix, a-ix \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix} ; 1 \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Er geldt dat $W_n(x^2)$ een polynoom is van graad n in x^2 . Dit volgt uit

$$(a + ix)_n (a - ix)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (a + ix + j)(a - ix + j) = \prod_{j=0}^{n-1} ((a + j)^2 + x^2).$$

De kopcoëfficiënt van $W_n(x^2)$ is gelijk aan

$$\gamma_n = (-1)^n (n + a + b + c + d - 1)_n.$$

Het is evident dat W_n symmetrisch is onder permutaties van b, c en d . Door de transformatieformule van Whipple toe te passen op deze ${}_4F_3$, zien we dat

$$W_n(x^2; a, b, c, d) = W_n(x^2; b, a, c, d).$$

Hieruit volgt dat de Wilsonpolynomen symmetrisch zijn onder permutaties van a, b, c en d .

In de volgende stellingen worden de drieterms recurrente betrekking en de orthogonaliteitsrelatie van de Wilsonpolynomen geformuleerd. Deze stellingen worden respectievelijk in paragraaf 3.2 en 3.3 bewezen.

Stelling 3.2. De polynomen \tilde{W}_n voldoen aan de drieterms recurrente betrekking

$$A_n \left(\tilde{W}_{n+1}(x^2) - \tilde{W}_n(x^2) \right) + B_n \left(\tilde{W}_{n-1}(x^2) - \tilde{W}_n(x^2) \right) + (a^2 + x^2) \tilde{W}_n(x^2) = 0,$$

met

$$A_n = \frac{(n + a + b + c + d - 1)(n + a + b)(n + a + c)(n + a + d)}{(2n + a + b + c + d - 1)(2n + a + b + c + d)}$$

en

$$B_n = \frac{n(n + c + d - 1)(n + b + d - 1)(n + b + c - 1)}{(2n + a + b + c + d - 2)(2n + a + b + c + d - 1)}.$$

De Wilsonpolynomen voldoen aan verschillende orthogonaliteitsrelaties die afhangen van voorwaarden van de parameters a, b, c en d . Deze orthogonaliteitsrelaties zijn geformuleerd in stelling 3.3 en 3.4.

Stelling 3.3. Voor $\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(d) > 0$ geldt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a + ix)\Gamma(b + ix)\Gamma(c + ix)\Gamma(d + ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_m(x^2) W_n(x^2) dx \\ &= \delta_{mn} n! (n + a + b + c + d - 1)_n \\ & \quad \times \frac{\Gamma(a + b + n)\Gamma(a + c + n)\Gamma(a + d + n)\Gamma(b + c + n)\Gamma(b + d + n)\Gamma(c + d + n)}{\Gamma(a + b + c + d + 2n)}. \end{aligned}$$

Stelling 3.4. Indien $\operatorname{Re}(a) < 0$, $\operatorname{Re}(a + b) > 0$, $\operatorname{Re}(a + c) > 0$ en $\operatorname{Re}(a + d) > 0$ dan geldt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a + ix)\Gamma(b + ix)\Gamma(c + ix)\Gamma(d + ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_m(x^2)W_n(x^2)dx \\ & + \frac{\Gamma(a + b)\Gamma(a + c)\Gamma(a + d)\Gamma(b - a)\Gamma(c - a)\Gamma(d - a)}{\Gamma(-2a)} \\ & + \sum_{\substack{k=0,1,\dots \\ a+k < 0}} \frac{(2a)_k(a+1)_k(a+b)_k(a+c)_k(a+d)_k}{(a)_k(a-b+1)_k(a-c+1)_k(a-d+1)_k k!} W_m(-(a+k)^2)W_n(-(a+k)^2) \\ & = \delta_{mn} n! (n + a + b + c + d - 1)_n \\ & \times \frac{\Gamma(a + b + n)\Gamma(a + c + n)\Gamma(a + d + n)\Gamma(b + c + n)\Gamma(b + d + n)\Gamma(c + d + n)}{\Gamma(a + b + c + d + 2n)}. \end{aligned}$$

De Racahpolynomen kunnen gezien worden als de discrete versie van de Wilsonpolynomen. Substitueer de waarden $a = \frac{1}{2}(\gamma + \delta + 1)$, $b = \frac{1}{2}(2\alpha - \gamma - \delta + 1)$, $c = \frac{1}{2}(2\beta - \gamma + \delta + 1)$ en $d = \frac{1}{2}(\gamma - \delta + 1)$ in (3.1). Pas vervolgens de substitutie $ix \mapsto x + \frac{1}{2}(\gamma + \delta + 1)$ toe en neem $\alpha + 1 = -N$ of $\beta + \delta + 1 = -N$ of $\gamma + 1 = -N$, met $N \in \mathbb{N}_0$. Hieruit volgt dat de Racahpolynomen gedefinieerd zijn door

$$R_n(\lambda(x)) := R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta) = {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1, -x, x + \gamma + \delta + 1 \\ \alpha + 1, \beta + \delta + 1, \gamma + 1 \end{matrix}; 1 \right),$$

met $n = 0, 1, \dots, N$ en $\lambda(x) = x(x + \gamma + \delta + 1)$ met $\alpha + 1 = -N$ of $\beta + \delta + 1 = -N$ of $\gamma + 1 = -N$, met $N \in \mathbb{N}_0$.

Uit de definitie van de Racahpolynomen volgt dat we x en n kunnen verwisselen. Uiteraard moeten de parameters verwisseld worden, i.e. $\alpha \leftrightarrow \gamma$ en $\beta \leftrightarrow \delta$. Er geldt dus dat $R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta) = R_x(\mu(n); \gamma, \delta, \alpha, \beta)$, met $\mu(n) = n(n + \alpha + \beta + 1)$. Dit heet de dualiteitseigenschap van de Racahpolynomen.

De genormeerde Racahpolynomen zijn gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(\lambda(x)) & := \tilde{R}_n(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ & := \frac{(\alpha + 1)_n(\beta + \delta + 1)_n(\gamma + 1)_n}{(n + \alpha + \beta + 1)_n} \cdot {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1, -x, x + \gamma + \delta + 1 \\ \alpha + 1, \beta + \delta + 1, \gamma + 1 \end{matrix}; 1 \right). \end{aligned}$$

De Racahpolynomen zijn een discreet geval van de Wilsonpolynomen. Dus de drieterms recurrenente betrekking van de Racahpolynomen volgt uit de drieterms recurrenente betrekking van de Wilsonpolynomen. Een expliciete vorm is gegeven in onderstaande stelling.

Stelling 3.5. De Racahpolynomen voldoen aan de volgende drieterms recurrenente betrekking

$$\lambda(x)R_n(\lambda(x)) = C_n R_{n+1}(\lambda(x)) - (C_n + D_n)R_n(\lambda(x)) + D_n R_{n-1}(\lambda(x))$$

en de genormeerde Racahpolynomen voldoen aan

$$x\tilde{R}_n(\lambda(x)) = \tilde{R}_{n+1}(\lambda(x)) - (C_n + D_n)\tilde{R}_n(\lambda(x)) + C_{n-1}D_n\tilde{R}_{n-1}(\lambda(x))$$

met

$$C_n = \frac{(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(n + \beta + \delta + 1)(n + \gamma + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}$$

en

$$D_n = \frac{n(n + \alpha + \beta - \gamma)(n + \alpha - \delta)(n + \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)}.$$

De dualiteitseigenschap van de Racahpolynomen kan gebruikt worden om uit de drieterms recurrenente betrekking de volgende differentievergelijking af te leiden.

Stelling 3.6. De Racahpolynomen voldoen aan de volgende differentievergelijking

$$n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) = B(x)y(x + 1) - (B(x) + D(x))y(x) + D(x)y(x - 1),$$

met

$$y(x) = R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

$$B(x) = \frac{(x + \alpha + 1)(x + \beta + \delta + 1)(x + \gamma + 1)(x + \gamma + \delta + 1)}{(2x + \gamma + \delta + 1)(2x + \gamma + \delta + 2)}$$

en

$$D(x) = \frac{x(x - \alpha + \gamma + \delta)(x - \beta + \gamma)(x + \delta)}{(2x + \gamma + \delta)(2x + \gamma + \delta + 1)}.$$

Ten slotte geven we in de volgende stelling de orthogonaliteitsrelatie van de Racahpolynomen.

Stelling 3.7. De orthogonaliteitsrelatie van de Racahpolynomen is gegeven door

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \frac{(\alpha + 1)_k (\beta + \delta + 1)_k (\gamma + 1)_k (\gamma + \delta + 1)_k (\frac{1}{2}(\gamma + \delta + 3))_k}{(\gamma + \delta - \alpha + 1)_k (\gamma - \beta + 1)_k (\frac{1}{2}(\gamma + \delta + 1))_k (\delta + 1)_k k!} R_m(\lambda(k)) R_n(\lambda(k)) \\ &= M \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_n (\alpha + \beta - \gamma + 1)_n (\alpha - \delta + 1)_n (\beta + 1)_n n!}{(\alpha + \beta + 2)_{2n} (\alpha + 1)_n (\beta + \delta + 1)_n (\gamma + 1)_n} \delta_{mn}, \end{aligned}$$

met

$$M = \begin{cases} \frac{(-\beta)_N (\gamma + \delta + 2)_N}{(\gamma - \beta + 1)_N (\delta + 1)_N} & \text{als } \alpha + 1 = -N, \\ \frac{(-\alpha + \delta)_N (\gamma + \delta + 2)_N}{(\gamma + \delta - \alpha + 1)_N (\delta + 1)_N} & \text{als } \beta + \delta + 1 = -N, \\ \frac{(\alpha + \beta + 2)_N (-\delta)_N}{(\alpha - \delta + 1)_N (\beta + 1)_N} & \text{als } \gamma + 1 = -N. \end{cases}$$

3.2 De drieterms recurrenente betrekking

In deze paragraaf wordt de drieterms recurrenente betrekking van de Wilsonpolynomen afgeleid. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van aaneengesloten relaties voor gebalanceerde ${}_4F_3$'s. In de definitie hieronder wordt toegelicht wat er wordt bedoeld met een aaneengesloten relatie.

Definitie 3.8. Een aaneengesloten ${}_4F_3$ wordt verkregen door twee parameters voor een gebalanceerde ${}_4F_3$ te laten alternieren met de waarden ± 1 zodat de nieuwe reeks ook gebalanceerd is. Een relatie tussen aaneengesloten functies wordt een aaneengesloten relatie genoemd. \square

Voor typografische reden wordt nu gebruik gemaakt van de volgende notaties

$$F := {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a, b, c, d \\ e, f, g \end{matrix} ; 1 \right),$$

$$F_+ := {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a+1, b+1, c+1, d+1 \\ e+1, f+1, g+1 \end{matrix} ; 1 \right)$$

en

$$F(a-) := {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a-1, b, c, d \\ e, f, g \end{matrix} ; 1 \right).$$

Er worden twee aaneengesloten relaties voor F afgeleid. Hiermee kan een drieterms recurrenente relatie voor de Wilsonpolynomen worden afgeleid. De eerste aaneengesloten gesloten relatie die afgeleid wordt, is

$$F(a-, b+) - F = \frac{(a-b-1)cd}{efg} F_+(a-). \quad (3.9)$$

Dit kan als volgt worden ingezien. Er geldt

$$\begin{aligned} F(a-, b+) - F &= \frac{(a-1)_k (b+1)_k (c)_k (d)_k}{k! (e)_k (f)_k (g)_k} - \frac{(a)_k (b)_k (c)_k (d)_k}{k! (e)_k (f)_k (g)_k} \\ &= \frac{(c)_k (d)_k}{k! (e)_k (f)_k (g)_k} ((a-1)_k (b+1)_k - (a)_k (b)_k) \\ &= \frac{(a)_{k-1} (b+1)_{k-1} (c)_k (d)_k}{k! (e)_k (f)_k (g)_k} ((a-1)(b+k) - (a+k-1)b) \\ &= \frac{(a)_{k-1} (b+1)_{k-1} (c)_k (d)_k}{k! (e)_k (f)_k (g)_k} (k(a-b-1)) \\ &= (a-b-1) \frac{(a)_{k-1} (b+1)_{k-1} (c)_k (d)_k}{(k-1)! (e)_k (f)_k (g)_k} \\ &= \frac{(a-b-1)cd}{efg} \frac{(a)_{k-1} (b+1)_{k-1} (c+1)_{k-1} (d+1)_{k-1}}{(k-1)! (e+1)_{k-1} (f+1)_{k-1} (g+1)_{k-1}} \\ &= \frac{(a-b-1)cd}{efg} F_+(a-). \end{aligned}$$

In deze afleiding is gebruik gemaakt van de volgende identiteiten

$$\frac{(a-1)_k}{(a)_{k-1}} = a-1, \quad \frac{(a)_k}{(a)_{k-1}} = a+k-1 \quad \text{en} \quad \frac{(b)_k}{(b+1)_{k-1}} = b.$$

Analoog kan de volgende aaneengesloten relatie bewezen worden

$$F(a+, e+) - F = \frac{(e-a)bcd}{e(e+1)fg} F_+(e+). \quad (3.10)$$

Definieer

$$\tilde{F} := {}_4F_3 \left(\begin{matrix} A, B, C, D \\ E, F, G \end{matrix}; 1 \right)$$

met $A = a, B = b, C = e - c, D = e - d, E = e, F = a + b - f + 1$ en $G = a + b - g + 1$. Als we de formule van Whipple toepassen en $a = -n$ nemen, dan geldt

$$\frac{(f)_n(g)_n}{(f-b)_n(g-b)_n} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a, b, c, d \\ e, f, g \end{matrix}; 1 \right) = {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a, b, e-c, e-d \\ e, a+b+1-f, a+b+1-g \end{matrix}; 1 \right)$$

onder de voorwaarde dat $a+b+c+d+1 = e+f+g$. Uit deze balansvergelijking volgt dat $a+b+1-f = e+g-c-d$ en $e+f-c-d = a+b-g+1$. We zien dus dat

$$\frac{(f)_n(g)_n}{(f-b)_n(g-b)_n} F = {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a, b, e-c, e-d \\ e, e+f-c-d, e+g-c-d \end{matrix}; 1 \right) = \tilde{F} \quad (3.11)$$

Op dezelfde manier kunnen de volgende twee identiteiten worden aangetoond

$$\frac{(f+1)_n(g+1)_n}{(f-b)_n(g-b)_n} F_+(a-) = {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a, b+1, e-c, e-d \\ e+1, e+f-c-d, e+g-c-d \end{matrix}; 1 \right) = \tilde{F}(B+, E+) \quad (3.12)$$

en

$$\frac{(f+1)_{n-1}(g+1)_{n-1}}{(f-b)_{n-1}(g-b)_{n-1}} F_+(e+) = {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a+1, b+1, e-c+1, e-d+1 \\ e+2, e+f-c-d+1, e+g-c-d+1 \end{matrix}; 1 \right) = \tilde{F}_+(E+). \quad (3.13)$$

Vanwege de aaneengesloten relatie (3.10) wordt de relatie tussen \tilde{F} , $\tilde{F}(B+, E+)$ en $\tilde{F}_+(E+)$ gegeven door

$$\tilde{F}(B+, E+) - \tilde{F} = \frac{(e-b)a(e-c)(e-d)}{(e+1)e(e+f-c-d)(e+g-c-d)} \tilde{F}_+(E+). \quad (3.14)$$

Als we nu (3.11), (3.12) en (3.13) substitueren in (3.14) dan krijgen we

$$\begin{aligned} & \frac{(f+1)_n(g+1)_n}{(f-b)_n(g-b)_n} F_+(a-) - \frac{(f)_n(g)_n}{(f-b)_n(g-b)_n} F \\ &= \frac{(e-b)a(e-c)(e-d)}{(e+1)e(e+f-c-d)(e+g-c-d)} \cdot \frac{(f+1)_{n-1}(g+1)_{n-1}}{(f-b)_{n-1}(g-b)_{n-1}} F_+(e+). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Als we beide kanten van van (3.15) delen door $(f+1)_{n-1}$ en $(g+1)_{n-1}$ en gebruikmaken van $\frac{(f+1)_n}{(f+1)_{n-1}} = f+n$

en $\frac{(f)_n}{(f+1)_{n-1}} = f$ dan geldt

$$\frac{(f+n)(g+n)}{(f-b)_n(g-b)_n} F_+(a-) - \frac{fg}{(f-b)_n(g-b)_n} F = \frac{(e-b)a(e-c)(e-d)}{(e+1)e(e+f-c-d)(e+g-c-d)} \times \frac{1}{(f-b)_{n-1}(g-b)_{n-1}} F_+(e+). \quad (3.16)$$

Vermenigvuldig beide kanten van (3.16) met $(f-b)_n$ en $(g-b)_n$ dan krijgen we

$$(f+n)(g+n)F_+(a-) - fgF = \frac{(e-b)a(e-c)(e-d)}{(e+1)e(e+f-c-d)(e+g-c-d)} \cdot (f-b+n-1)(g-b+n-1)F_+(e+). \quad (3.17)$$

Als we (3.17) herschrijven, n vervangen door $-a$ en gebruik maken van de balansvoorwaarde $a+b+c+d+1 = e+f+g$ dan volgt dat

$$fgF - (f-a)(g-a)F_+(a-) + \frac{a(e-b)(e-c)(e-d)}{e(e+1)} F_+(e+) = 0. \quad (3.18)$$

Als we de parameters a en b verwisselen, krijgen we

$$fgF - (f-b)(g-b)F_+(b-) + \frac{b(e-a)(e-c)(e-d)}{e(e+1)} F_+(e+) = 0. \quad (3.19)$$

De formules (3.18) en (3.19) combineren, geeft

$$b(e-a)(f-a)(g-a)F_+(a-) - a(e-b)(f-b)(g-b)F_+(b-) + (a-b)efgF = 0. \quad (3.20)$$

Substitueer nu de waarden $F_+(a-)$ en $F_+(b-)$ van formule (3.9) in (3.20). Dan volgt dat

$$\frac{b(e-a)(f-a)(g-a)}{a-b-1} (F(a-, b+) - F) - \frac{a(e-b)(f-b)(g-b)}{b-a-1} (F(a+, b-) - F) + cd(a-b)F = 0.$$

Oftewel

$$\frac{b(e-a)(f-a)(g-a)}{(a-b-1)(a-b)} (F(a-, b+) - F) - \frac{a(e-b)(f-b)(g-b)}{(b-a-1)(a-b)} (F(a+, b-) - F) + cdF = 0. \quad (3.21)$$

De aaneengesloten relatie (3.21) geldt voor elke gebalanceerde ${}_4F_3$. We gebruiken deze relatie om de drieterms recurrente betrekking van de Wilsonpolynomen te bewijzen. Definieer nu

$$F := {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, a+b+c+d+n-1, a+ix, a-ix \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix}; 1 \right) = \tilde{W}_n.$$

Dan geldt

$$\tilde{W}_{n+1} = F(a-, b+), \tilde{W}_n = F \text{ en } \tilde{W}_{n-1} = F(a+, b-). \quad (3.22)$$

Substitueer nu de waarden van (3.22) in de vergelijking (3.21) dan volgt de drieterms recurrente betrekking

$$A_n \left(\tilde{W}_{n+1}(x^2) - \tilde{W}_n(x^2) \right) + B_n \left(\tilde{W}_{n-1}(x^2) - \tilde{W}_n(x^2) \right) + (a^2 + x^2) \tilde{W}_n(x^2) = 0, \quad (3.23)$$

met

$$A_n = \frac{(n+a+b+c+d-1)(n+a+b)(n+a+c)(n+a+d)}{(2n+a+b+c+d-1)(2n+a+b+c+d)}$$

en

$$B_n = \frac{n(n+c+d-1)(n+b+d-1)(n+b+c-1)}{(2n+a+b+c+d-2)(2n+a+b+c+d-1)}.$$

3.3 De orthogonaliteitsrelatie

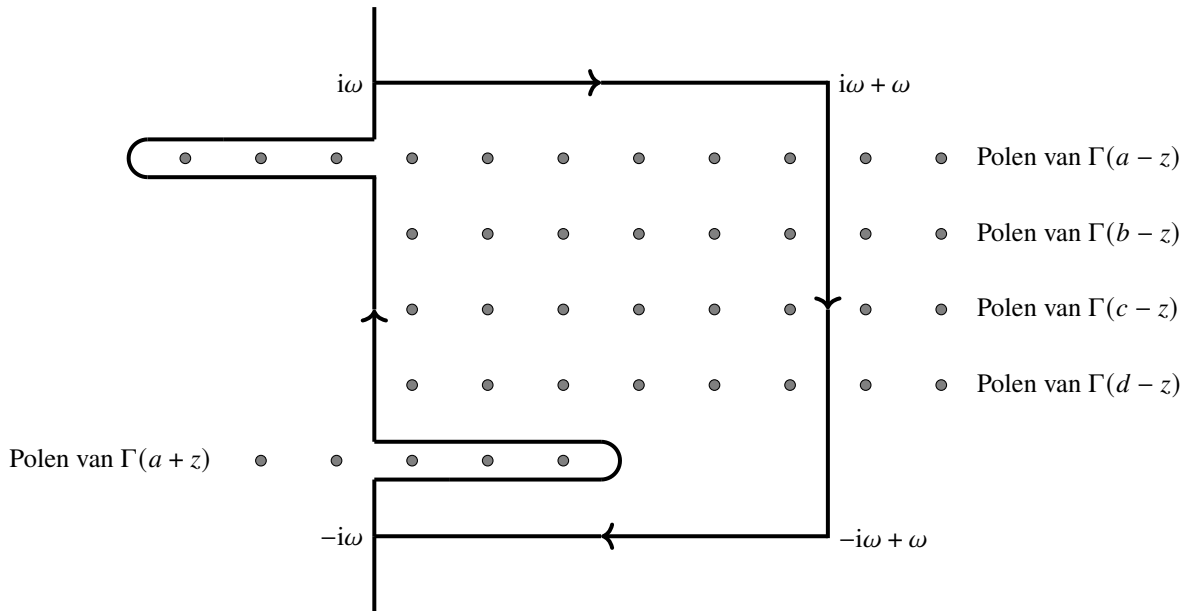
In deze paragraaf bewijzen we de orthogonaliteitsrelatie van de Wilson- en Racahpolynomen. Hiervoor moet eerst de juistheid van de volgende integraal worden aangetoond.

Lemma 3.24. Er geldt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(a+z)\Gamma(a-z)\Gamma(b+z)\Gamma(b-z)\Gamma(c+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d+z)\Gamma(d-z)}{\Gamma(2z)\Gamma(-2z)} dz \\ &= \frac{2\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

De contour C is de hele imaginaire as behalve dat er een boog is, indien nodig, zodat de dalende rij van polen van $\Gamma(a+z), \dots, \Gamma(d+z)$ links van de contour liggen en dat de stijgende rij van polen van $\Gamma(a-z), \dots, \Gamma(d-z)$ rechts van de contour liggen.

Bewijs. Om de integraal (3.25) te berekenen, wordt gebruik gemaakt van de residuenstelling van Cauchy. Bezie de contour $C_1 \cup C_2$, geïllustreerd in figuur 3.1 voor het geval dat $\operatorname{Re}(a) < 0$ en $\operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(d) > 0$.



Figuur 3.1

Hierbij is C_1 een deel van de contour C die van $-i\omega$ naar $i\omega$ loopt. De contour C_2 loopt van $i\omega$ naar $i\omega + \omega$, van $i\omega + \omega$ naar $-i\omega + \omega$ en van $-i\omega + \omega$ terug naar $-i\omega$. De contour $C_1 \cup C_2$ wordt zó gekozen dat de polen niet op de contour liggen. Merk op dat we de contour in negatieve richting doorlopen.

We laten zien dat de integraal (3.25) over de contour C_2 naar nul gaat als $\omega \rightarrow \infty$. Schrijf

$$f(z) := \frac{\Gamma(a+z)\Gamma(a-z)\Gamma(b+z)\Gamma(b-z)\Gamma(c+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d+z)\Gamma(d-z)}{\Gamma(2z)\Gamma(-2z)}. \quad (3.26)$$

Om aan te tonen dat de integraal over de contour C_2 naar nul gaat als $\omega \rightarrow \infty$, hebben we een asymptotische afschatting nodig voor $f(z)$. Door de reflectieformule van Euler en de verdubbelingsformule van Legendre toe te passen, volgt dat

$$f(z) = \frac{-2\pi^3 z \sin(2\pi z) \Gamma(a+z) \Gamma(b+z) \Gamma(c+z) \Gamma(d+z)}{\sin(\pi(a-z)) \sin(\pi(b-z)) \sin(\pi(c-z)) \sin(\pi(d-z)) \Gamma(1-a+z) \Gamma(1-b+z) \Gamma(1-c+z) \Gamma(1-d+z)}.$$

Uit de formule van Stirling volgt dat

$$f(z) = z^{2(a+b+c+d)-3} \mathcal{O}(e^{-2\pi|\operatorname{Im}(z)|}) = \mathcal{O}(|z|^{2\operatorname{Re}(a+b+c+d)-3} e^{-2\pi|\operatorname{Im}(z)|}), \text{ als } z \rightarrow \infty.$$

De ML -afschatting toepassen geeft

$$\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \leq 4\omega \max_{z \in C_2} |f(z)| = \mathcal{O}(\omega^{2\operatorname{Re}(a+b+c+d)-2}).$$

Als $\operatorname{Re}(a+b+c+d) < 1$, dan gaat deze integraal naar nul voor $\omega \rightarrow \infty$. Uit deze constatering volgt dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz.$$

De functie $f(z)$ heeft polen binnen de contour C bij $z = a+k, \dots, z = d+k$, met $k \in \mathbb{N}_0$. Wegens de residuenstelling van Cauchy geldt dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\operatorname{Res}_{z=a+k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=b+k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=c+k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=d+k} f(z) \right).$$

Het minteken aan de rechterkant geldt omdat de contour in negatieve richting wordt doorlopen.

We berekenen eerst het residu van f bij de polen $z = a+k$. Herinner dat wegens (2.7) het residu van de gammafunctie in de polen $z = -n$ gelijk is aan $(-1)^n/n!$. Vanwege de oriëntatie geldt dat het residu in deze polen gelijk is aan $(-1)^{n+1}/n!$. Er geldt dus

$$- \operatorname{Res}_{z=a+k} f(z) = \frac{\Gamma(2a+k) \Gamma(a+b+k) \Gamma(b-a-k) \Gamma(c+a+k) \Gamma(c-a-k) \Gamma(d+a+k) \Gamma(d-a-k)}{\Gamma(2a+2k) \Gamma(-2a-2k)} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

Uit de identiteiten $\Gamma(a+b+k) = \Gamma(a+b)(a+b)_k$ en $\Gamma(b-a-k) = \Gamma(b-a)(b-a)_{-k} = \frac{(-1)^k \cdot \Gamma(b-a)}{(a-b+1)_k}$ volgt dat het residu in de polen $z = a+k$ gelijk is aan

$$- \frac{\Gamma(a+b) \Gamma(a+c) \Gamma(a+d) \Gamma(b-a) \Gamma(c-a) \Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \cdot \frac{(2a)_k (a+1)_k (a+b)_k (a+c)_k (a+d)_k}{(a)_k (a-b+1)_k (a-c+1)_k (a-d+1)_k k!}.$$

De som van deze residuen is dus

$$\begin{aligned} & - \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2a)_k(a+1)_k(a+b)_k(a+c)_k(a+d)_k}{(a)_k(a-b+1)_k(a-c+1)_k(a-d+1)_k k!}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Deze sommatie kan als een ${}_5F_4$ worden geschreven. We krijgen dus

$$- \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \cdot {}_5F_4 \left(\begin{matrix} 2a, a+1, a+b, a+c, a+d \\ a, a-b+1, a-c+1, a-d+1 \end{matrix}; 1 \right).$$

Wegens stelling 2.44 is dit gelijk aan

$$\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \cdot \frac{\Gamma(a-b+1)\Gamma(a-c+1)\Gamma(a-d+1)\Gamma(1-a-b-c-d)}{\Gamma(2a+1)\Gamma(1-b-c)\Gamma(1-b-d)\Gamma(1-c-d)}.$$

De reflectieformule van Euler toepassen, geeft dat dit als volgt geschreven kan worden:

$$\frac{1}{2} \cdot R \cdot S_a,$$

met

$$R = \frac{2\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}$$

en

$$S_a = \frac{\sin(-2\pi a) \sin(\pi(b+c)) \sin(\pi(b+d)) \sin(\pi(c+d))}{\sin(\pi(b-a)) \sin(\pi(c-a)) \sin(\pi(d-a)) \sin(\pi(a+b+c+d))}.$$

Op dezelfde manier kunnen S_b , S_c en S_d gedefinieerd worden. Met behulp van goniometrische formules kan worden bewezen dat

$$S_a + S_b + S_c + S_d = 2.$$

Als we alle polen bij elkaar tellen, krijgen we dus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \frac{1}{2} \cdot R \cdot (S_a + S_b + S_c + S_d) = \frac{2\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

Dit bewijst de stelling voor het geval $\operatorname{Re}(a+b+c+d) < 1$. Het gevraagde volgt door analytische voortzetting van de parameters a, b, c en d . ■

De integraal die in lemma 3.24 is aangetoond, wordt gebruikt om orthogonaliteitseigenschap van de Wilson- en Racahpolynomen af te leiden.

Stelling 3.28. Voor $\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(d) > 0$ geldt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_m(x^2)W_n(x^2)dx \\ &= \delta_{mn} n! (n+a+b+c+d-1)_n \\ & \quad \times \frac{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+n)\Gamma(b+d+n)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+b+c+d+2n)}. \end{aligned}$$

Bewijs. Neem aan dat $\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(d) > 0$. De Wilsonpolynomen $W_m(x^2)$ zijn symmetrisch in de parameters a en b . Hieruit volgt dat $W_m(-z^2)$, met $z = ix$, als volgt geschreven kan worden

$$\sum_{j=0}^m \gamma_j (b-z)_j (b+z)_j,$$

met $\gamma_m = (-1)^m (m+a+b+c+d-1)_m$. Voor $j = 0, 1, \dots, n$ hebben we dat

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n(-z^2) (b-z)_j (b+z)_j dz = (a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n \\ & \times \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+a+b+c+d-1)_k}{(a+b)_k (a+c)_k (a+d)_k k!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) (a-z)_k (a+z)_k (b-z)_j (b+z)_j dz. \end{aligned}$$

Hierbij is C de contour zoals in lemma 3.24. Omdat we nu hebben aangenomen dat het reële deel van de parameters a, b, c en d positief is, geldt dat de contour C gelijk is aan de hele imaginaire as. De integraal binnen de som kan als volgt worden geschreven

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(a+k+z)\Gamma(a+k-z)\Gamma(b+j+z)\Gamma(b+j-z)\Gamma(c+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d+z)\Gamma(d-z)}{\Gamma(2z)\Gamma(-2z)} dz.$$

Wegens lemma 3.24 volgt dat deze integraal gelijk is aan

$$\frac{2\Gamma(a+b+k+j)\Gamma(a+c+k)\Gamma(a+d+k)\Gamma(b+c+j)\Gamma(b+d+j)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d+k+j)}$$

oftewel

$$\frac{2\Gamma(a+b+j)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c+j)\Gamma(b+d+j)\Gamma(c+d)(a+b+j)_k (a+c)_k (a+d)_k}{\Gamma(a+b+c+d+j)(a+b+c+d+j)_k}.$$

We hebben dus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n(-z^2) (b-z)_j (b+z)_j dz \\ &= \frac{2\Gamma(a+b+j)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+j)\Gamma(b+d+j)\Gamma(c+d)(a+b)_n}{\Gamma(a+b+c+d+j)} \\ & \quad \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, n+a+b+c+d-1, a+b+j \\ a+b, a+b+c+d+j \end{matrix}; 1 \right) \end{aligned}$$

Door de sommatieformule van Pfaff-Saalschütz toe te passen, krijgen we

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n(-z^2) (b-z)_j (b+z)_j dz \\ &= \frac{2\Gamma(a+b+j)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+j)\Gamma(b+d+j)\Gamma(c+d+n)(-j)_n}{\Gamma(a+b+c+d+j+n)}. \end{aligned}$$

Voor $j < n$ geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n(-z^2) (b-z)_j (b+z)_j dz = 0,$$

want dan geldt $(-j)_n = 0$. Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n(-z^2) W_m(-z^2) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n(-z^2) \sum_{j=0}^m \gamma_j (b-z)_j (b+z)_j dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^m \gamma_j \int_C f(z) W_n(-z^2) (b-z)_j (b+z)_j dz = 0 \end{aligned}$$

dus voor $m < n$ geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n(-z^2) W_m(-z^2) dz = 0$$

Voor $m = n$ geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n^2(-z^2) dz &= (-1)^n (a+b+c+d+n-1)_n \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_n(-z^2) (b-z)_n (b+z)_n dz \\ &= 2n! (n+a+b+c+d-1)_n \\ &\times \frac{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+n)\Gamma(b+d+n)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+b+c+d+2n)}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Als de parameters a, b, c en d reëel zijn dan geldt dat

$$f(z) = \left| \frac{\Gamma(a+z)\Gamma(b+z)\Gamma(c+z)\Gamma(d+z)}{\Gamma(2z)} \right|^2.$$

Laat $z = ix$. Dan kan de integraal (3.29) als volgt worden geschreven

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_m(x^2) W_n(x^2) dx \\ &= \delta_{mn} n! (n+a+b+c+d-1)_n \\ &\times \frac{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+n)\Gamma(b+d+n)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+b+c+d+2n)}. \end{aligned}$$

Dit bewijst de stelling. ■

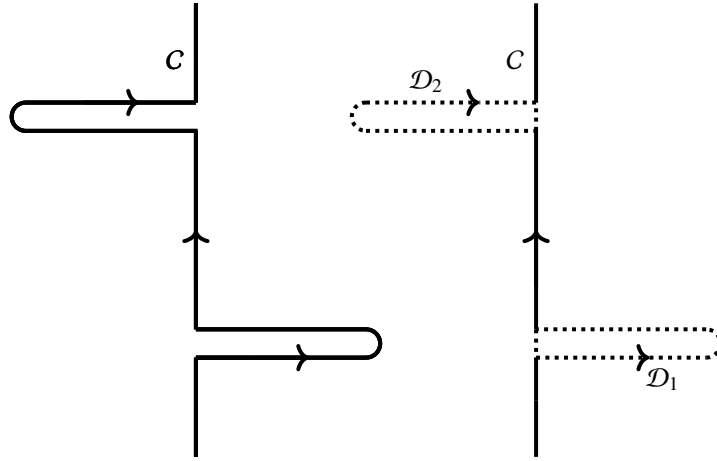
In stelling 3.28 wordt aangenomen dat $\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(d) > 0$. Het is ook mogelijk om een orthogonaliteitsrelatie te krijgen voor de Wilsonpolynomen indien $\operatorname{Re}(a) < 0$ en dat $\operatorname{Re}(a+b) > 0, \operatorname{Re}(a+c) > 0$ en

$\operatorname{Re}(a+d) > 0$.

Stelling 3.30. Indien $\operatorname{Re}(a) < 0$, $\operatorname{Re}(a+b) > 0$, $\operatorname{Re}(a+c) > 0$ en $\operatorname{Re}(a+d) > 0$ dan geldt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_m(x^2)W_n(x^2)dx \\ & + \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \\ & + \sum_{\substack{k=0,1,\dots \\ a+k < 0}} \frac{(2a)_k(a+1)_k(a+b)_k(a+c)_k(a+d)_k}{(a)_k(a-b+1)_k(a-c+1)_k(a-d+1)_k k!} W_m(-(a+k)^2)W_n(-(a+k)^2) \\ & = \delta_{mn} n! (n+a+b+c+d-1)_n \\ & \times \frac{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+n)\Gamma(b+d+n)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+b+c+d+2n)}. \end{aligned}$$

Bewijs. Opnieuw maken we gebruik van de residuenstelling van Cauchy. De contouren C , C_1 en C_2 zijn zoals in lemma 3.24. Integreer over de contour C is hetzelfde als integreren over de imaginaire as en over de gesloten contouren \mathcal{D}_1 en \mathcal{D}_2 . Zie figuur 3.2.



Figuur 3.2

Er geldt dat

$$\int_C g(z) dz = \int_{-i\infty}^{i\infty} g(z) dz + \int_{\mathcal{D}_1} g(z) dz + \int_{\mathcal{D}_2} g(z) dz, \quad (3.31)$$

met $g(z) = f(z)W_m(-z^2)W_n(-z^2)$. Merk op dat de contour \mathcal{D}_1 in positieve richting wordt doorlopen en de contour \mathcal{D}_2 wordt in negatieve richting doorlopen. De residuenstelling van Cauchy impliceert dat (3.31) gelijk is aan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} g(z) dz + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\operatorname{Res}_{\substack{z=-(a+k) \\ a \leq a+k < 0}} g(z) - \operatorname{Res}_{\substack{z=a+k \\ a \leq a+k < 0}} g(z) \right). \quad (3.32)$$

Vanwege symmetrie geldt dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} g(z) dz - 2 \sum_{\substack{k=0 \\ a \leq a+k < 0}}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=a+k} g(z). \quad (3.33)$$

Als we nu het resultaat toepassen uit (3.27), dan volgt dat

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) W_m(-z^2) W_n(-z^2) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(ix) W_m(x^2) W_n(x^2) dx \\ &+ 2 \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \\ &\times \sum_{\substack{k=0,1,\dots \\ a+k < 0}} \frac{(2a)_k (a+1)_k (a+b)_k (a+c)_k (a+d)_k}{(a)_k (a-b+1)_k (a-c+1)_k (a-d+1)_k k!} W_m(-(a+k)^2) W_n(-(a+k)^2). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Als we het resultaat uit stelling 3.28 toepassen, dan krijgen we

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_m(x^2) W_n(x^2) dx \\ &+ \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \\ &+ \sum_{\substack{k=0,1,\dots \\ a+k < 0}} \frac{(2a)_k (a+1)_k (a+b)_k (a+c)_k (a+d)_k}{(a)_k (a-b+1)_k (a-c+1)_k (a-d+1)_k k!} W_m(-(a+k)^2) W_n(-(a+k)^2) \\ &= \delta_{mn} n! (n+a+b+c+d-1)_n \\ &\times \frac{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+n)\Gamma(b+d+n)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+b+c+d+2n)}. \end{aligned}$$

Dit bewijst de stelling. ■

De bewijstechniek kan ook worden toegepast indien $W_n(-z^2)$ discreet is. Stel $a+b = -N + \varepsilon$, met $N \in \mathbb{N}$. Als we beide kanten in (3.34) delen door $\Gamma(a+b) = \Gamma(-N + \varepsilon)$ en $\varepsilon \rightarrow 0$, dan geldt dat de integraal aan de rechterkant wegvalt, want $1/\Gamma(-N + \varepsilon) \rightarrow 0$. Dus krijgen we

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \\ & \times \sum_{k=1}^N \frac{(2a)_k (a+1)_k (a+b)_k (a+c)_k (a+d)_k}{(a)_k (a-b+1)_k (a-c+1)_k (a-d+1)_k k!} W_m(-(a+k)^2) W_n(-(a+k)^2) \\ &= \delta_{mn} n! (n+a+b+c+d-1)_n \cdot \frac{(a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n (b+c)_n (b+d)_n (c+d)_n}{(a+b+c+d)_{2n}} \\ & \times \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Maak nu gebruik van de volgende drie identiteiten

$$\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)} = \frac{(-1)^N}{(1-c-d)_N},$$

$$\Gamma(b+d) = \Gamma(d+\varepsilon-a-N) = \frac{(-1)^N \Gamma(d+\varepsilon-a)}{(a-d-\varepsilon+1)_N} \rightarrow \frac{(-1)^N \Gamma(d-a)}{(a-d+1)_N} \text{ als } \varepsilon \rightarrow 0$$

en

$$\frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(-2a)} = \frac{\Gamma(-2a-N+\varepsilon)}{\Gamma(-2a)} \rightarrow \frac{1}{(2a+1)_N} \text{ als } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dan geldt dat (3.35) als volgt geschreven kan worden

$$\begin{aligned} & \frac{(a-c+1)_N (a-d+1)_N}{(2a+1)_N (1-c-d)_N} \sum_{k=0}^N \frac{(2a)_k (a+1)_k (a+b)_k (a+c)_k (a+d)_k}{(a)_k (a-b+1)_k (a-c+1)_k (a-d+1)_k k!} W_m(-(a+k)^2) W_n(-(a+k)^2) \\ &= \delta_{mn} n! (n+a+b+c+d-1)_n \cdot \frac{(a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n (b+c)_n (b+d)_n (c+d)_n}{(a+b+c+d)_{2n}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

onder de aanname dat $a+b = -N$. Substitueer nu de waarden $a = \frac{1}{2}(\gamma + \delta + 1)$, $b = \frac{1}{2}(2\alpha - \gamma - \delta + 1)$, $c = \frac{1}{2}(2\beta - \gamma + \delta + 1)$ en $d = \frac{1}{2}(\gamma - \delta + 1)$ in (3.36). Pas vervolgens de substitutie $ik \mapsto k + \frac{1}{2}(\gamma + \delta + 1)$ toe en neem $\alpha + 1 = -N$, $\beta + \delta + 1 = -N$ of $\gamma + 1 = -N$, met $N \in \mathbb{N}_0$. Dan volgt de volgende stelling

Stelling 3.37. De orthogonaliteitsrelatie van de Racahpolynomen is gegeven door

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \frac{(\alpha+1)_k (\beta+\delta+1)_k (\gamma+1)_k (\gamma+\delta+1)_k (\frac{1}{2}(\gamma+\delta+3))_k}{(\gamma+\delta-\alpha+1)_k (\gamma-\beta+1)_k (\frac{1}{2}(\gamma+\delta+1))_k (\delta+1)_k k!} R_m(\lambda(k)) R_n(\lambda(k)) \\ &= M \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n (\alpha+\beta-\gamma+1)_n (\alpha-\delta+1)_n (\beta+1)_n n!}{(\alpha+\beta+2)_{2n} (\alpha+1)_n (\beta+\delta+1)_n (\gamma+1)_n} \delta_{mn}, \end{aligned}$$

met

$$M = \begin{cases} \frac{(-\beta)_N (\gamma+\delta+2)_N}{(\gamma-\beta+1)_N (\delta+1)_N} & \text{als } \alpha+1 = -N, \\ \frac{(-\alpha+\delta)_N (\gamma+\delta+2)_N}{(\gamma+\delta-\alpha+1)_N (\delta+1)_N} & \text{als } \beta+\delta+1 = -N, \\ \frac{(\alpha+\beta+2)_N (-\delta)_N}{(\alpha-\delta+1)_N (\beta+1)_N} & \text{als } \gamma+1 = -N. \end{cases}$$

3.4 De Jacobipolynomen

De klassieke orthogonale polynomen, vernoemd naar Jacobi, Laguerre en Hermite zijn de meest voorkomende orthogonale polynomen [BMR84]. Deze orthogonale polynomen hebben veel toepassingen in de natuurkunde, benaderingstheorie en numerieke wiskunde. De Jacobipolynomen generaliseren veel orthogonale polynomen. De Laguerre- en Hermitepolynomen zijn een limietgeval van de Jacobipolynomen. Door een bepaalde keuze te maken voor de parameters van de Jacobipolynomen kunnen bijvoorbeeld de Chebyshev- en Legendrepolynomen verkregen worden. Dit motiveert om eigenschappen van de Jacobipolynomen te bestuderen. We refereren naar [KLS10] voor meer details.

De Wilsonpolynomen generaliseren de hypergeometrische orthogonale polynomen uit het Askey-schema. Dit betekent dat de Jacobipolynomen dus een speciaal geval zijn van de Wilsonpolynomen. Het is mogelijk om eigenschappen van de andere polynomen te krijgen uit de eigenschappen van de Wilsonpolynomen door een geschikte keuze maken voor de parameters en/of door een bepaalde limiet te nemen. In deze paragraaf wordt de orthogonaliteitseigenschap van de Jacobipolynomen bewezen vanuit de orthogonaliteitseigenschap van de Wilsonpolynomen.

In onderstaande definitie worden de Jacobipolynomen gedefinieerd.

Definitie 3.38. De Jacobipolynomen $P_n^{(\alpha,\beta)}$, met graad n , zijn gedefinieerd door

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \alpha+\beta+n+1 \\ \alpha+1 \end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n+\alpha+\beta+1)_k (\alpha+k+1)_{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(x-1)^k}{2^k} \end{aligned} \quad (3.39)$$

□

De Jacobipolynomen zijn orthogonaal op het interval $(-1, 1)$ ten opzichte van de gewichtsfunctie $w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Er wordt aangenomen dat $\alpha, \beta > -1$ opdat $w^{(\alpha,\beta)}(x) \in \mathcal{L}^1(-1, 1)$. In onderstaande stelling wordt de orthogonaliteitsrelatie bewezen. Een direct bewijs van deze orthogonaliteitseigenschap kan bijvoorbeeld gevonden worden in [Dom15].

Stelling 3.40. De orthogonaliteitsrelatie van de Jacobipolynomen wordt gegeven door

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) w^{(\alpha,\beta)}(x) dx = h_n^{(\alpha,\beta)} \delta_{mn},$$

met

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} (n+\alpha+\beta+1)_n \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! \Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}.$$

Bewijs. De orthogonaliteitseigenschap van de Jacobipolynomen kan verkregen worden uit de orthogonaliteitseigenschap van de Wilsonpolynomen door eerst de parameters te kiezen, vervolgens een limiet te nemen en ten slotte een substitutie toe te passen.

Laat $a = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$, $b = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$, $c = \frac{1}{2}(\beta + 1) + i\omega$, $d = \frac{1}{2}(\beta + 1) - i\omega$ en $x = \omega s$. Merk op dat

$$(a + b)_n (a + c)_n (a + d)_n = (\alpha + 1)_n \cdot \left| \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 + i\omega \right)_n \right|^2,$$

$$\frac{\Gamma(a + b + n)\Gamma(b + d + n)}{\Gamma(a + b + c + d + 2n)} = \frac{(\alpha + 1)_n (\beta + 1)_n \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)}$$

en

$$\Gamma(a + c + n)\Gamma(a + d + n)\Gamma(b + c + n)\Gamma(b + d + n) = \left| \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 + i\omega \right)_n \right|^4 \cdot \left| \Gamma \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 + i\omega \right)_n \right|^4.$$

Uit de orthogonaliteitseigenschap van de Wilsonpolynomen volgt nu dat

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2}(\alpha + 1) + i\omega s \right)^2 \Gamma \left(\frac{1}{2}(\beta + 1) + i\omega(s + 1) \right) \Gamma \left(\frac{1}{2}(\beta + 1) + i\omega(s - 1) \right)}{\Gamma(2i\omega s) \left(\Gamma \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 + i\omega \right) \right)^2} \right|^2 \\ & \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1, \frac{1}{2}(\alpha + 1) + i\omega s, \frac{1}{2}(\alpha + 1) - i\omega s \\ a + 1, \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 + i\omega, \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 - i\omega \end{matrix} ; 1 \right) \\ & \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -m, m + \alpha + \beta + 1, \frac{1}{2}(\alpha + 1) + i\omega s, \frac{1}{2}(\alpha + 1) - i\omega s \\ a + 1, \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 + i\omega, \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 - i\omega \end{matrix} ; 1 \right) \omega ds \\ & = \delta_{mn} \frac{n! (n + \alpha + \beta + 1)_n \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n)} \cdot \frac{(\beta + 1)_n}{(\alpha + 1)_n}. \end{aligned}$$

Met behulp van de formule van Stirling kan worden aangetoond dat geldt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2}(\alpha + 1) + i\omega s \right)^2 \Gamma \left(\frac{1}{2}(\beta + 1) + i\omega(s + 1) \right) \Gamma \left(\frac{1}{2}(\beta + 1) + i\omega(s - 1) \right)}{\Gamma(2i\omega s) \Gamma \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 + i\omega \right)^2} \right|^2 \\ & \sim 2s^{2\alpha+1} |1 - s^2|^\beta e^{-\pi\omega(|s-1|+|s+1|-2)}, \text{ als } \omega \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Als $s \in (0, 1)$, dan is de limiet hiervan gelijk aan $2s^{2\alpha+1}(1 - s^2)^\beta$ en als $s \in (1, \infty)$, dan is de limiet gelijk aan 0. Dit geeft

$$\begin{aligned} & \int_0^1 s^{2\alpha}(1 - s^2)^\beta {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; s^2 \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, m + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; s^2 \right) 2s ds \\ & = \delta_{mn} \frac{n!(n + \alpha + \beta + 1)_n \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)(\beta + 1)_n}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + 1)_n} \\ & = \delta_{mn} \frac{n!(n + \alpha + \beta + 1)_n \Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + 1)_n^2}. \end{aligned}$$

Gebruik nu de substitutie $s = -\sqrt{\frac{1-x}{2}}$. Dan volgt de gevraagde orthogonaliteitseigenschap van de Jacobipolynomen. ■

Deel II

De Wilson- en Racahpolynomen vanuit een algebraïsch perspectief

Hoofdstuk 4

De Racah-Wilsonalgebra

In dit hoofdstuk wordt de Racah-Wilsonalgebra bestudeerd en wordt de connectie gelegd met de Racahpolynomen. We bestuderen hiervoor hoofdstuk 2 uit [GVZ13] door gedetailleerd alle stappen uit te werken. Hiervoor wordt eerst in paragraaf 4.1 uitgelegd wat een algebra met generatoren en relaties is, worden enkele fundamentele begrippen uit de representatietheorie besproken en wordt het lemma van Schur bewezen. Met deze theorie kan in paragraaf 4.2 de Racah-Wilsonalgebra worden bestudeerd. Met behulp van deze algebra kan in paragraaf 4.3 een drieterms recurrente betrekking van de Racahpolynomen worden afgeleid en de orthogonaliteit van de Racahpolynomen worden bewezen.

4.1 Representatietheorie

We beginnen met enkele begrippen en notatie in te voeren. We refereren naar [Hal15; Gro21; Eti+11] voor meer details. Zij \mathbb{K} een algebraïsch gesloten lichaam, dat wil zeggen dat elke niet-constante polynoom in \mathbb{K} een nulpunt heeft in \mathbb{K} . Een associatieve algebra over \mathbb{K} is een vectorruimte A over \mathbb{K} tezamen met een bilineaire afbeelding $A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$ zodat $(ab)c = a(bc)$. Een eenheid in een associatieve algebra A is een element $1 \in A$ zodat $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. De eenheid, indien deze bestaat, is uniek. Om expliciet aan te geven dat deze eenheid bij de vectorruimte A hoort, noteren we ook wel 1_A . Vaak laten we de eenheid weg, e.g. in plaats van $1729 \cdot 1_A$ schrijven we 1729 . Zij U een vectorruimte. Een endomorfisme is een lineaire afbeelding $L : U \rightarrow U$. De verzameling van alle endomorfismen wordt genoteerd door $\text{End}(U)$. Zij $M : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. De kern van M is gedefinieerd door $\text{Ker}(M) = \{v \in V : M(v) = 0\}$ en het beeld van M is gedefinieerd door $\text{Im}(M) = \{M(v) : v \in V\}$.

De vrije algebra is $\mathbb{K}\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$. Een basis van deze algebra bestaat uit ‘woorden’ van de ‘letters’ X_1, X_2, \dots, X_n en vermenigvuldiging in deze basis is een aaneenschakeling van woorden. Een voorbeeld hiervan is $X_1 X_2^3 (X_1 X_2 + X_2^3 + X_1^2) = X_1 X_2^3 X_1 X_2 + X_1 X_2^6 + X_1 X_2^3 X_1^2$. We leggen nu relaties op deze algebra door te veronderstellen dat zekere polynomen in de algebra gelijk zijn aan nul,

$$p(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0.$$

Hierbij zijn $p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ elementen van de algebra die polynomen zijn in X_1, X_2, \dots, X_n . Laten we dit

toelichten met een voorbeeld. Stel we hebben dat $X_2^2 - 3X_1 = 0$. Dan geldt dat $3X_2^2 + 5X_1X_2^2$ gelijk is aan $9X_1 + 15X_1^2$.

We voeren nu de definitie van een representatie in. Zij A een associatieve algebra. Een lineaire afbeelding $\pi : A \rightarrow \text{End}(V)$ is een representatie van A op V als $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ voor alle $a, b \in A$ en $\pi(1_A) = 1_V$. Zij π een representatie en $W \subseteq V$ een deelruimte. Indien geldt dat $\pi(a)W \subseteq W$ voor alle $a \in A$, dan heet W invariant onder π . Een deelrepresentatie van de representatie V van een algebra A is een deelruimte $W \subseteq V$ die invariant is onder alle operatoren $\pi(a) : V \rightarrow V$ voor alle $a \in A$. Twee triviale deelrepresentaties zijn $W = 0$ en $W = V$. Indien dit de enige deelrepresentaties zijn, noemen we de representatie π irreducibel. Ten slotte leggen we uit wat een intertwinning operator is. Zij π een representatie die werkt op V_1 en ρ een representatie die werkt op V_2 . Een lineaire afbeelding $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ van de representaties heet een intertwinning afbeelding als

$$\phi(\pi(p)q) = \rho(p)\phi(q)$$

voor alle $p \in A$ en $q \in V_1$.

In de volgende stelling wordt Schur's lemma geformuleerd en bewezen. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van de volgende notatie: stel π is een representatie van A op V , dan zeggen we dat V een representatie is, zonder hier expliciet te verwijzen naar π .

Stelling 4.1 (Schur's lemma).

- (i) Zij V en W twee irreducibele representaties en A een algebra over een lichaam \mathbb{K} . Zij $\phi : V \rightarrow W$ een intertwinning afbeelding. Dan geldt dat ϕ gelijk is aan nul of dat ϕ bijectief is.
- (ii) Zij V een eindig dimensionale irreducibele representatie van een algebra A over \mathbb{K} en $\phi : V \rightarrow V$ een intertwinning afbeelding. Dan geldt $\phi = \lambda \cdot \text{Id}$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{K}$.

Bewijs.

- (i) Als $\phi = 0$ dan klopt de uitspraak. Neem dus aan dat $\phi \neq 0$. We laten eerst zien dat $\text{Ker}(\phi) \subseteq V$ invariant is. Laat $v \in \text{Ker}(\phi)$. Dan geldt

$$\phi(\pi(a)v) = \rho(a)\phi(v) = \rho(a) \cdot 0 = 0, \quad a \in A.$$

Hieruit volgt dat $\text{Ker}(\phi)$ invariant is. Er geldt dat π irreducibel is en dus geldt $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ of $\text{Ker}(\phi) = V$. Dit laatste kan niet het geval zijn, want $\phi \neq 0$. Dus geldt dat $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ en dus volgt dat ϕ injectief is. We laten nu zien dat $\text{Im}(\phi) \subseteq W$ invariant is. Neem $w \in \text{Im}(\phi)$. Dan bestaat er een $v \in V$ zodat $\phi(v) = w$. Dan volgt dat

$$\rho(a)w = \rho(a)\phi(v) = \phi(\pi(a)v)$$

Dus $w \in \text{Im}(\phi)$. Omdat ρ irreducibel is, geldt dat $\text{Im}(\phi) = W$ of dat $\text{Im}(\phi) = \{0\}$. Dit laatste is niet mogelijk, want we hadden aangenomen dat $\phi \neq 0$. Dus $\rho(a)w \in \text{Im}(\phi)$. Dit betekent dat ϕ surjectief is. Omdat ϕ injectief en surjectief is, volgt nu dat ϕ bijectief is.

- (ii) Zij λ een eigenwaarde van ϕ . Deze eigenwaarde bestaat, omdat \mathbb{K} een algebraïsch gesloten lichaam is. Er geldt dat $\phi - \lambda \text{Id}$ een intertwiner is. Dus wegens (i) is $\phi - \lambda \text{Id}$ bijectief of gelijk aan nul. Omdat λ een eigenwaarde van ϕ is, kan $\phi - \lambda \text{Id}$ niet bijectief zijn. Dus $\phi - \lambda \text{Id}$ is gelijk aan nul en dus geldt $\phi = \lambda \text{Id}$. ■

4.2 De laddereigenschappen van de Racah-Wilsonalgebra

In de volgende definitie wordt de Racah-Wilsonalgebra gedefinieerd. In deze definitie wordt de commutator en de anticommutator gebruikt. De commutator $[\cdot, \cdot]$ is gedefinieerd door

$$[X, Y] = XY - YX$$

en de anticommutator $\{\cdot, \cdot\}$ is gedefinieerd door

$$\{X, Y\} = XY + YX.$$

Definitie 4.2. De Racah-Wilsonalgebra $RW(3)$ wordt gegenereerd door drie generatoren K_1, K_2 en K_3 door middel van de volgende relaties:

$$[K_1, K_2] = K_3, \quad (4.3)$$

$$[K_2, K_3] = K_2^2 + \{K_1, K_2\} + dK_2 + e_1, \quad (4.4)$$

$$[K_3, K_1] = K_1^2 + \{K_1, K_2\} + dK_1 + e_2. \quad (4.5)$$

We veronderstellen dat d, e_1 en e_2 reëel zijn. □

De Casimir die bij de Racah-Wilsonalgebra hoort, is gegeven door

$$Q = \{K_1^2, K_2\} + \{K_1, K_2^2\} + K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + (d+1)\{K_1, K_2\} + (2e_1+d)K_1 + (2e_2+d)K_2. \quad (4.6)$$

De Casimir commuteert met de generatoren K_1, K_2 en K_3 , en dus met alle $X \in RW(3)$.

Opmerking 4.7. Zij $X \in RW(3)$ en $\pi : RW(3) \rightarrow \text{End}(V)$ een representatie. In het vervolg schrijven we voor het gemak X in plaats van $\pi(X)$.

De Racah-Wilsonalgebra voldoet aan een zogenaamde laddereigenschap. Met deze laddereigenschap kan een keten van eigenvectoren worden geconstrueerd. We tonen deze eigenschap aan door te beginnen met één eigenvector. Zij ω_p een eigenvector van K_1 met eigenwaarde λ_p , dan geldt

$$K_1\omega_p = \lambda_p\omega_p, \quad (4.8)$$

met p een willekeurige reële parameter. We construeren een nieuwe eigenvector $\omega_{p'}$ van K_1 die hoort bij een andere eigenwaarde $\lambda_{p'}$ door aan te nemen dat $\omega_{p'}$ van de volgende vorm is

$$\omega_{p'} = (\alpha(p)K_1 + \beta(p)K_2 + \gamma(p)K_3)\omega_p. \quad (4.9)$$

Het is a priori niet evident dat $\omega_{p'}$ op deze manier geconstrueerd kan worden. Om te laten zien dat deze constructie mogelijk is, bepalen we de waarden van coëfficiënten $\alpha(p), \beta(p)$ en $\gamma(p)$.

We weten dat $\omega_{p'}$ een eigenvector is van K_1 met eigenwaarde $\lambda_{p'}$. We hebben dus de volgende eigenwaardevergelijking

$$K_1\omega_{p'} = \lambda_{p'}\omega_{p'}. \quad (4.10)$$

De eigenwaarden λ_p en $\lambda_{p'}$ zijn gerelateerd aan elkaar.

Stelling 4.11. De eigenwaarden λ_p en $\lambda_{p'}$ voldoen aan de kwadratische vergelijking

$$(\lambda_{p'} - \lambda_p)^2 + (\lambda_{p'} + \lambda_p) = 0. \quad (4.12)$$

Bewijs. We leiden de kwadratische vergelijking (4.12) af door (4.9) te substitueren in (4.10). Vervolgens maken we gebruik van de commutatorrelaties van de Racah-Wilsonalgebra.

Uit (4.3) volgt dat

$$K_1 K_2 = K_3 + K_2 K_1 \quad (4.13)$$

en uit (4.5) volgt

$$K_1 K_3 = K_3 K_1 - K_1^2 - K_1 K_2 - K_2 K_1 - dK_1 - e_2. \quad (4.14)$$

De vergelijkingen (4.13) en (4.14) combineren, geeft

$$K_1 K_3 = K_3 K_1 - K_1^2 - K_3 - 2K_2 K_1 - dK_1 - e_2. \quad (4.15)$$

Voor de linkerkant van (4.10) geldt

$$K_1 \omega_{p'} = \alpha(p) K_1^2 \omega_p + \beta(p) K_1 K_2 \omega_p + \gamma(p) K_1 K_3 \omega_p.$$

Als we nu gebruikmaken van (4.13) en (4.15), dan krijgen we

$$\begin{aligned} K_1 \omega_{p'} &= \alpha(p) K_1^2 \omega_p + \beta(p) K_3 \omega_p + \beta(p) K_2 K_1 \omega_p \\ &\quad + \gamma(p) K_3 K_1 \omega_p - \gamma(p) K_1^2 \omega_p - \gamma(p) K_3 \omega_p - 2\gamma(p) K_2 K_1 \omega_p - \gamma(p) dK_1 \omega_p - \gamma(p) e_2 \omega_p. \end{aligned}$$

Omdat ω_p een eigenvector van K_1 met eigenwaarde λ_p is, volgt dat

$$\begin{aligned} K_1 \omega_{p'} &= \alpha(p) \lambda_p^2 \omega_p + \beta(p) K_3 \omega_p + \beta(p) \lambda_p K_2 \omega_p \\ &\quad + \gamma(p) \lambda_p K_3 \omega_p - \gamma(p) \lambda_p^2 \omega_p - \gamma(p) K_3 \omega_p - 2\gamma(p) \lambda_p K_2 \omega_p - \gamma(p) d\lambda_p \omega_p - \gamma(p) e_2 \omega_p. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Voor de rechterkant van (4.10) geldt

$$\begin{aligned} \lambda_{p'} \omega_{p'} &= \alpha(p) \lambda_{p'} K_1 \omega_p + \beta(p) \lambda_{p'} K_2 \omega_p + \gamma(p) \lambda_{p'} K_3 \omega_p \\ &= \alpha(p) \lambda_{p'} \lambda_p \omega_p + \beta(p) \lambda_{p'} K_2 \omega_p + \gamma(p) \lambda_{p'} K_3 \omega_p. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Als we de coëfficiënten van ω_p , $K_2 \omega_p$ en $K_3 \omega_p$ uit (4.16) en (4.17) met elkaar vergelijken, krijgen we het volgende stelsel van vergelijkingen

$$\begin{cases} \alpha(p) \lambda_p^2 - \gamma(p) \lambda_p^2 - \gamma(p) d\lambda_p - \gamma(p) e_2 = \alpha(p) \lambda_{p'} \lambda_p, \\ \beta(p) \lambda_p - 2\gamma(p) \lambda_p = \beta(p) \lambda_{p'}, \\ \beta(p) + \gamma(p) \lambda_p - \gamma(p) = \gamma(p) \lambda_{p'}. \end{cases} \quad (4.18)$$

We laten zien dat het stelsel (4.18) consistent is. Uit de bovenste vergelijking volgt dat

$$\left(\lambda_p^2 - \lambda_{p'}\lambda_p\right)\alpha(p) = \gamma(p)\lambda_p^2 + \gamma(p)d\lambda_p + \gamma(p)e_2$$

en dus geldt

$$\alpha(p) = \frac{\gamma(p)\lambda_p^2 + \gamma(p)d\lambda_p + \gamma(p)e_2}{\lambda_p^2 - \lambda_{p'}\lambda_p}.$$

Uit de onderste vergelijking volgt dat

$$\beta(p) = \gamma(p)\lambda_{p'} - \gamma(p)\lambda_p + \gamma(p).$$

Als we $\beta(p)$ substitueren in de tweede vergelijking, dan krijgen we

$$\gamma(p)\lambda_{p'}\lambda_p - \gamma(p)\lambda_p^2 + \gamma(p)\lambda_p - 2\gamma(p)\lambda_p = \gamma(p)\lambda_{p'}^2 - \gamma(p)\lambda_p\lambda_{p'} + \gamma(p)\lambda_{p'}.$$

Hieruit volgt

$$\gamma(p)\left[2\lambda_{p'}\lambda_p - \lambda_p^2 - \lambda_p - \lambda_{p'}^2 - \lambda_{p'}\right] = 0.$$

Als $\gamma(p) = 0$ dan geldt dat $\alpha(p) = \beta(p) = \gamma(p)$. Dan geldt $\omega_{p'} = 0$, maar dat kan niet, want $\omega_{p'}$ is een eigenvector van K_1 . Dit betekent dat we $\gamma(p)$ vrij kunnen kiezen (uiteraard ongelijk aan nul) en dat

$$2\lambda_{p'}\lambda_p - \lambda_p^2 - \lambda_p - \lambda_{p'}^2 - \lambda_{p'} = 0.$$

Hieruit volgt dat de eigenwaarden λ_p en $\lambda_{p'}$ voldoen aan de volgende kwadratische vergelijking

$$(\lambda_{p'} - \lambda_p)^2 + (\lambda_{p'} + \lambda_p) = 0.$$

Dit bewijst de stelling. ■

De eigenwaarden λ_p en $\lambda_{p'}$ voldoen dus aan een kwadratische vergelijking. Er zijn twee mogelijke waarden voor $\lambda_{p'}$. Deze oplossingen kunnen we zonder verlies van algemeenheid λ^+ en λ^- noemen. We krijgen dus

$$\lambda^+ := \lambda_{p+1} := \frac{2\lambda_p - 1 + \sqrt{1 - 8\lambda_p}}{2}$$

en

$$\lambda^- := \lambda_{p-1} := \frac{2\lambda_p - 1 - \sqrt{1 - 8\lambda_p}}{2}.$$

Merk op dat geldt $(\lambda_{p+1})^- = \lambda_p = (\lambda_{p-1})^+$. Verder nemen we aan dat de eigenwaarden λ^+ en λ^- niet ontaard zijn, i.e. $\lambda^+ \neq \lambda^-$. In opmerking 4.37 wordt toegelicht wanneer we dit kunnen aannemen.

De eigenvectoren $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$ zijn lineair onafhankelijk en vormen dus een basis. Noem deze basis \mathcal{W} , i.e. $\mathcal{W} = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$.

Stelling 4.19. De basis \mathcal{W} kan herschaald worden zodat de volgende relaties gelden:

$$K_1\omega_p = \lambda_p\omega_p, \quad (4.20)$$

$$K_2\omega_p = A_{p+1}\omega_{p+1} + B_p\omega_p + A_p\omega_{p-1}, \quad (4.21)$$

$$K_3\omega_p = g_{p+1}A_{p+1}\omega_{p+1} - g_pA_p\omega_{p-1}. \quad (4.22)$$

Hierbij geldt dat $g_p = \lambda_p - \lambda_{p-1}$, $\omega_{-1} = \omega_{N+1} = 0$ en kunnen de coëfficiënten A_p en B_p expliciet bepaald worden.

Bewijs. Neem aan dat (4.21) geldt. We laten zien dat (4.22) geldt. Om dit te laten zien, wordt gebruik gemaakt van de commutatoreigenschap $K_3 = [K_1, K_2]$. We krijgen

$$\begin{aligned} K_3\omega_p &= K_1K_2\omega_p - K_2K_1\omega_p = K_1K_2\omega_p - \lambda_pK_2\omega_p \\ &= K_1(A_p\omega_{p-1} + B_p\omega_p + A_{p+1}\omega_{p+1}) - \lambda_p(A_p\omega_{p-1} + B_p\omega_p + A_{p+1}\omega_{p+1}) \\ &= (\lambda_{p+1} - \lambda_p)A_{p+1}\omega_{p+1} - (\lambda_p - \lambda_{p-1})A_p\omega_{p-1} \\ &= g_{p+1}A_{p+1}\omega_{p+1} - g_pA_p\omega_{p-1}, \end{aligned}$$

met $g_p = \lambda_p - \lambda_{p-1}$. Dit bewijst (4.22).

We laten nu zien dat (4.21) geldt. Voor de eigenvector ω_{p+1} geldt

$$\begin{aligned} \omega_{p+1} &= (\alpha^+(p)K_1 + \beta^+(p)K_2 + \gamma^+(p)K_3)\omega_p \\ &= \alpha^+(p)\lambda_p\omega_p + \beta^+(p)K_2\omega_p + \gamma^+(p)K_3\omega_p \end{aligned} \quad (4.23)$$

en voor de eigenvector ω_{p-1} geldt

$$\begin{aligned} \omega_{p-1} &= (\alpha^-(p)K_1 + \beta^-(p)K_2 + \gamma^-(p)K_3)\omega_p \\ &= \alpha^-(p)\lambda_p\omega_p + \beta^-(p)K_2\omega_p + \gamma^-(p)K_3\omega_p. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Uit (4.23) volgt dat

$$K_3\omega_p = \frac{1}{\gamma^+(p)}\omega_{p+1} - \frac{\alpha^+(p)}{\gamma^+(p)}\lambda_p\omega_p - \frac{\beta^+(p)}{\gamma^+(p)}K_2\omega_p. \quad (4.25)$$

De formules (4.24) en (4.25) met elkaar combineren, geeft

$$\omega_{p-1} = \alpha^-(p)\lambda_p\omega_p + \beta^-(p)K_2\omega_p + \frac{\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)}\omega_{p+1} - \frac{\alpha^+(p)\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)}\lambda_p\omega_p - \frac{\beta^+(p)\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)}K_2\omega_p.$$

Dan volgt

$$\omega_{p-1} = \left(\alpha^-(p) - \frac{\alpha^+(p)\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)} \right) \lambda_p\omega_p + \left(\beta^-(p) - \frac{\beta^+(p)\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)} \right) K_2\omega_p + \frac{\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)}\omega_{p+1}.$$

Oftewel

$$\omega_{p-1} = \left(\frac{\alpha^-(p)\gamma^+(p) - \alpha^+(p)\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)} \right) \lambda_p \omega_p + \left(\frac{\beta^-(p)\gamma^+(p) - \beta^+(p)\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)} \right) K_2 \omega_p + \frac{\gamma^-(p)}{\gamma^+(p)} \omega_{p+1}.$$

Als we deze vergelijking herschrijven, dan krijgen we

$$K_2 \omega_p = A_p \omega_{p-1} + B_p \omega_p + C_p \omega_{p+1}, \quad (4.26)$$

$$\text{met } A_p = \frac{\gamma^+(p)}{\beta^-(p)\gamma^+(p) - \beta^+(p)\gamma^-(p)}, B_p = \frac{\alpha^+(p)\gamma^-(p) - \alpha^-(p)\gamma^+(p)}{\beta^-(p)\gamma^+(p) - \beta^+(p)\gamma^-(p)} \lambda_p \text{ en } C_p = -\frac{\gamma^-(p)}{\beta^-(p)\gamma^+(p) - \beta^+(p)\gamma^-(p)}.$$

We laten nu zien dat $K_2 \omega_p$ geschreven kan worden in de vorm (4.21). Schrijf $\omega_p = \alpha_p \phi_p$, met $\alpha_{p+1}^2 = \frac{A_{p+1}}{C_p} \alpha_p^2$ en $\alpha_0 = 1$. Dan krijgen we dat (4.26) te schrijven is als

$$K_2 \phi_n = A_p \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} \phi_{p-1} + B_p \phi_p + C_p \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} \phi_{p+1}.$$

Noem nu $\tilde{A}_p := A_p \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}$. Er geldt dan dat

$$\tilde{A}_{p+1} = A_{p+1} \frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}} = C_p \frac{\alpha_{p+1}^2}{\alpha_p^2} \frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}} = C_p \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}.$$

We krijgen dus

$$K_2 \phi_n = \tilde{A}_p \phi_{p-1} + B_p \phi_p + \tilde{A}_{p+1} \phi_{p+1}.$$

Hieruit volgt dat $K_2 \omega_p$ te schrijven is zoals in (4.21). Dit bewijst de stelling. ■

We zien dat we $K_2 \omega_p$ uit kunnen drukken in ω_{p+1} , ω_p en ω_{p-1} . Dit betekent dat K_2 tridiagonaal is ten opzichte van de basis \mathcal{W} . Op dezelfde manier kan worden ingezien dat K_1 diagonaal is en K_3 tweediagonaal is ten opzichte van de basis \mathcal{W} . We willen dat K_1 en K_2 zelfgeadjungeerd zijn. Hiervoor moeten we eisen dat A_n reëel is. Voor nu nemen we aan dat het mogelijk is om A_n reëel te nemen. We zullen later zien dat dit inderdaad kan worden aangenomen.

We hebben nu de existentie van de representatie aangetoond. In onderstaande stelling wordt bewezen dat deze representatie irreducibel is, i.e. $\{0\}$ en $V = \text{Span}\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$ zijn de enige invariante deelruimten.

Stelling 4.27. De representatie uit stelling 4.19 is irreducibel.

Bewijs. Zij $\{0\} \neq W \subseteq V = \text{Span}\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$. Neem aan dat W invariant is. Om aan te tonen dat de representatie irreducibel is, moet aangetoond worden dat $W = V$. Neem $w \in W$ willekeurig. Dan bestaat er een kleinste $n \in \mathbb{N}$ zodat

$$w = \sum_{k=n}^N a_k \omega_k,$$

met a_n ongelijk aan nul. Vanwege de laddereigenschap bestaat er een $X_n \in \text{RW}(3)$ zodat $X_n \omega_n = \omega_{n+1}$. Dan

geldt

$$X_n w = \sum_{k=n}^N a_k X_n \omega_k = a_n X_n \omega_n + \sum_{k=n+1}^N a_k X_n \omega_k = a_n \omega_{n+1} + \sum_{k=n}^N b_k \omega_k,$$

voor zekere coëfficiënten b_n, b_{n+1}, \dots, b_N . We zien dus dat

$$\begin{aligned} \left(X_n - \frac{b_n}{a_n}\right) w &= X_n w - \frac{b_n}{a_n} w = a_n \omega_{n+1} + \sum_{k=n}^N b_k \omega_k - \frac{b_n}{a_n} w \\ &= a_n \omega_{n+1} + \sum_{k=n+1}^N b_k \omega_k - \frac{b_n}{a_n} \sum_{k=n+1}^N a_k \omega_k = \sum_{k=n+1}^N c_k \omega_k, \end{aligned}$$

voor zekere coëfficiënten $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_N$. Op deze manier kunnen we $\omega_N \in W$ vinden. Met behulp van (4.9) kunnen we coëfficiënten $\alpha(p), \beta(p)$ en $\gamma(p)$ vinden zodat we af kunnen dalen tot en met ω_0 . Dus krijgen we $W = V = \text{Span}\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$. ■

In een eindig dimensionale representatie is het spectrum van K_1 discreet en dus kan men de eigenvectoren van K_1 noteren met ψ_n , met $n \in \mathbb{Z}$. Dit betekent dat (4.20), (4.21) en (4.22) als volgt geschreven kunnen worden

$$K_1 \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad (4.28)$$

$$K_2 \psi_n = A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1}, \quad (4.29)$$

$$K_3 \psi_n = A_{n+1} g_{n+1} \psi_{n+1} - A_n g_n \psi_{n-1}, \quad (4.30)$$

met $g_n = \lambda_n - \lambda_{n-1}$ en A_n en B_n reëel, want dan zijn K_1 en K_2 zelfgeadjungeerd. Wegens stelling 4.11 voldoen de eigenwaarden λ_n en λ_{n+1} aan de volgende recurrente betrekking:

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 + (\lambda_{n+1} + \lambda_n) = 0. \quad (4.31)$$

In de volgende stelling wordt de recurrente betrekking (4.31) opgelost.

Stelling 4.32. De oplossing van de recurrente betrekking

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 + (\lambda_{n+1} + \lambda_n) = 0$$

is

$$\lambda_n = -\frac{(n - \sigma)(n - \sigma + 1)}{2}, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

Bewijs. We willen nu de recurrente betrekking (4.31) oplossen. Definieer de functie $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door $p(x, y) = (x - y)^2 + x + y$. Uit (4.31) volgt dat $p(\lambda_{n+1}, \lambda_n) = 0$ en dat $p(\lambda_n, \lambda_{n-1}) = 0$. Uit deze constatering volgt dat λ_{n+1} en λ_{n-1} nulpunten zijn van de kwadratische functie $\lambda \mapsto p(\lambda, \lambda_n)$. Dus geldt dat

$$p(\lambda, \lambda_n) = (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_{n+1}).$$

Haakjes uitwerken, geeft

$$\lambda^2 - (\lambda_{n+1} + \lambda_{n-1})\lambda + \lambda_{n+1}\lambda_{n-1}. \quad (4.34)$$

Verder geldt dat

$$p(\lambda, \lambda_n) = (\lambda - \lambda_n)^2 + \lambda + \lambda_n = \lambda^2 - (2\lambda_n - 1)\lambda + \lambda_n^2 + \lambda_n. \quad (4.35)$$

Als we nu de coëfficiënten van (4.34) en (4.35) met elkaar vergelijken, krijgen we het volgende stelsel van vergelijkingen

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} + \lambda_{n-1} = 2\lambda_n - 1, \\ \lambda_{n+1}\lambda_{n-1} = \lambda_n^2 + \lambda_n. \end{cases}$$

We lossen de differentievergelijking $\lambda_{n+1} - 2\lambda_n + \lambda_{n-1} = -1$ op. We bepalen eerst de oplossing van de homogene differentievergelijking. Stel $\lambda_n = r^n$. Dan krijgen we als karakteristieke vergelijking $r^2 - 2r + 1 = 0$. Dus $r = 1$ is een oplossing met multipliciteit 2. Hieruit volgt dat $\lambda_n^c = A + B \cdot n$, met $A, B \in \mathbb{R}$, de complementaire oplossing is. Zoek nu een particuliere oplossing van de vorm $\lambda_n^p = C \cdot n^2$, met $C \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt $C = -\frac{1}{2}$. Dit betekent dat

$$\lambda_n = A + Bn - \frac{1}{2}n^2, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

de oplossing is van de inhomogee differentievergelijking.

Als we λ_n invullen in de tweede vergelijking, dan zien we dat

$$-2A + \frac{1}{4} - B^2 = 0$$

moet gelden. Kies $B = \sigma - \frac{1}{2}$, met $\sigma \in \mathbb{R}$. Dan volgt dat $A = \frac{1}{2}\sigma(1 - \sigma)$.

De oplossing van de differentievergelijking (4.31) is dus

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\sigma(1 - \sigma) + (\sigma - \frac{1}{2})n - \frac{1}{2}n^2 = -\frac{(n - \sigma)(n - \sigma + 1)}{2}. \quad (4.36)$$

■

Opmerking 4.37. Eerder is de eis opgelegd dat λ^+ en λ^- verschillend moeten zijn. Met (4.36) kan worden ingezien wanneer dit mogelijk is. Omdat λ^+ en λ^- verschillend moeten zijn, moet dus gelden dat

$$\lambda^+ = -\frac{(n - \sigma + 1)(n - \sigma + 2)}{2} \neq -\frac{(n - \sigma - 1)(n - \sigma)}{2} = \lambda^-.$$

Oftewel de tellers mogen niet gelijk zijn, i.e.

$$(n - \sigma + 1)(n - \sigma + 2) \neq (n - \sigma - 1)(n - \sigma).$$

Oplossen naar n geeft $n \neq \sigma - 1/2$. Dus voor deze waarden van n geldt dat de eigenwaarden λ^+ en λ^- niet ontvaard zijn.

We willen nu g_n en de coëfficiënten A_n en B_n expliciet bepalen. Uit stelling 4.32 volgt direct dat

$$g_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \sigma - n. \quad (4.38)$$

We bepalen nu B_n door ψ_n te laten werken op (4.5). Er geldt

$$[K_3, K_1]\psi_n = K_1^2\psi_n + \{K_1, K_2\}\psi_n + dK_1\psi_n + e_2\psi_n.$$

De linkerkant hiervan is gelijk aan

$$\lambda_n g_{n+1} A_{n+1} \psi_{n+1} - \lambda_n g_n A_n \psi_{n-1} - \lambda_{n+1} g_{n+1} A_{n+1} \psi_{n+1} + \lambda_{n-1} g_n A_n \psi_{n-1}$$

en de rechterkant is gelijk aan

$$\lambda_n^2 \psi_n + \lambda_{n+1} A_{n+1} \psi_{n+1} + \lambda_n B_n \psi_n + \lambda_{n-1} A_n \psi_{n+1} + \lambda_n A_{n+1} \psi_{n+1} + \lambda_n B_n \psi_n + \lambda_n A_n \psi_{n-1} + d\lambda_n \psi_n + e_2 \psi_n.$$

Als we de coëfficiënten van ψ_n van beide kanten met elkaar vergelijken, krijgen we

$$\lambda_n^2 + 2B_n \lambda_n + d\lambda_n + e_2 = 0.$$

Deze vergelijking oplossen voor B_n , geeft

$$B_n = -\frac{\lambda_n^2 + d\lambda_n + e_2}{2\lambda_n}. \quad (4.39)$$

Om de coëfficiënt A_n te bepalen, leiden we een differentievergelijking af. We laten ψ_n werken op (4.4). Dan volgt dat

$$\begin{aligned} [K_2, K_3]\psi_n &= K_2 (A_{n+1} g_{n+1} \psi_{n+1} - A_n g_n \psi_{n-1}) - K_3 (A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1}) \\ &= A_{n+1} g_{n+1} (A_{n+2} \psi_{n+2} B_{n+1} \psi_{n+1} + A_{n+1} \psi_n) - A_n g_n (A_n \psi_n + B_{n-1} \psi_{n-1} + A_{n-1} \psi_{n-2}) \\ &\quad - A_{n+1} (A_{n+2} g_{n+2} \psi_{n+2} - A_{n+1} g_{n+1} \psi_n) - B_n (A_{n+1} g_{n+1} \psi_{n+1} - A_n g_n \psi_{n-1}) \\ &\quad - A_n (A_n g_n \psi_n - A_{n-1} g_{n-1} \psi_{n-2}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \left(K_2^2 + \{K_1, K_2\} + dK_2 + e_2 \right) \psi_n &= K_2 (A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1}) + K_1 (A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1}) \\ &\quad + \lambda_n K_2 \psi_n + d (A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1}) + e_1 \psi_n \\ &= A_{n+1} (A_{n+2} \psi_{n+2} + B_{n+1} \psi_{n+1} + A_{n+1} \psi_{n+1}) \\ &\quad + B_n (A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1}) + A_n (A_n \psi_n + B_{n-1} \psi_{n-1} + A_{n-1} \psi_{n-2}) \\ &\quad + \lambda_{n+1} A_{n+1} \psi_{n+1} + \lambda_n B_n \psi_n + \lambda_{n-1} A_n \psi_{n-1} \\ &\quad + \lambda_n (A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1}) \\ &\quad + d (A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1}) + e_1 \psi_n \end{aligned}$$

Als we de coëfficiënten van ψ_n aan beide kanten met elkaar vergelijken, dan krijgen we

$$2 \left(g_{n+\frac{3}{2}} A_{n+1}^2 - g_{n-\frac{1}{2}} A_n^2 \right) = B_n^2 + (2\lambda_n + d) B_n + e_1. \quad (4.40)$$

Om A_n^2 te bepalen, leiden we nog een tweede differentievergelijking af. Hiervoor maken we gebruik van de Casimir (4.6) en het lemma van Schur. Uit stelling 4.27 volgt dat $\text{Span}\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N\}$ irreducibel is. Om Schur's lemma te gebruiken, moet worden aangetoond dat $\pi(Q)$ een intertwinning afbeelding is. Omdat de Casimir Q commuteert met alle elementen uit de Racah-Wilsonalgebra, volgt dat $\pi(Q)\pi(X) = \pi(X)\pi(Q)$, met $X \in \text{RW}(3)$. Hieruit volgt dat $\pi(Q)$ een intertwinning afbeelding is. We kunnen dus Schur's lemma voor irreducibele representaties toepassen. Hieruit volgt dat

$$Q\psi_n = q\psi_n, \quad q \in \mathbb{C}.$$

Als we nu de Casimir (4.6) in $Q\psi_n = q\psi_n$ substitueren en gebruikmaken van de werkingen (4.28), (4.29) en (4.30) en vervolgens de termen ψ_n aan beide kanten met elkaar vergelijken, dan krijgen we

$$2 \left(g_{n+1\frac{1}{2}} g_n A_{n+1}^2 + g_{n+1} g_{n-\frac{1}{2}} A_n^2 \right) = (2\lambda_n + 1) B_n^2 + \lambda_n^2 + (2e_1 + d)\lambda_n - q \\ + \left(2\lambda_n^2 + 2\lambda_n(d+1) + 2e_2 + d \right) B_n. \quad (4.41)$$

Als we de vergelijkingen (4.40) en (4.41) combineren, krijgen we

$$4g_{n+\frac{1}{2}} g_{n-\frac{1}{2}} A_n^2 = g_{n-1} g_{n+1} B_n B_{n-1} + e_1(\lambda_n + \lambda_{n-1}) - (e_2 + q)$$

oftewel

$$A_n^2 = \frac{g_{n-1} g_{n+1} B_n B_{n-1} + e_1(\lambda_n + \lambda_{n-1}) - (e_2 + q)}{4g_{n-\frac{1}{2}} g_{n+\frac{1}{2}}}.$$

Als we gebruikmaken van (4.38) en (4.39) dan kan na veel rekenwerk worden aangetoond dat

$$A_n^2 = \frac{\mathcal{P}(g_n^2)}{64g_n^2 g_{n-\frac{1}{2}} g_{n+\frac{1}{2}}},$$

met

$$\mathcal{P}(z) = z^4 - (4d+2)z^3 + (4d^2+4d+1+8e_2-16e_1)z^2 - 4(d^2+2e_2+4de_2+4q)z + 16e_2^2.$$

De polynoom $\mathcal{P}(g_n^2)$ heet de karakteristieke polynoom. Stel de nulpunten van dit polynoom zijn ξ_j^2 . Hiermee kan de karakteristieke polynoom als volgt worden ontbonden

$$A_n^2 = \frac{\prod_{j=1}^4 (g_n^2 - \xi_j^2)}{64g_n^2 g_{n-\frac{1}{2}} g_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} \frac{\prod_{j=1}^4 (n - \sigma - \xi_j)(n - \sigma + \xi_j)}{(2n - 2\sigma)^2 (2n - 2\sigma + 1)(2n - 2\sigma - 1)}. \quad (4.42)$$

Bij het tweede gelijkheidsteken is gebruikgemaakt dat $g_n = \sigma - n$. Als het product in de teller uitgeschreven wordt, kunnen de parameters d , e_1 , e_2 en q worden uitgedrukt in de nulpunten ξ_k^2 door de coëfficiënten met

elkaar te vergelijken. Zo krijgen we het volgende stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} S_1 = 4d + 2 \\ S_2 = 4d^2 + 4d + 1 + 8e_2 - 16e_1 \\ S_3 = 4d^2 + 8e_2 + 16de_2 + 16q \\ S_4 = 16e_2^2. \end{cases}$$

Hierbij zijn S_1, \dots, S_4 de symmetrische polynomen met

$$S_N = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq N} \xi_{i_1}^2 \cdots \xi_{i_N}^2.$$

Oplossen van dit stelsel geeft

$$\begin{cases} d = \frac{1}{4}(S_1 - 2) \\ e_1 = \frac{1}{64} \left(S_1^2 + 8\sqrt{S_4} - 4S_2 \right) \\ e_2 = \frac{1}{4}\sqrt{S_4} \\ q = \frac{1}{64} \left(4S_3 - S_1^2 + 4S_1 \left(1 - \sqrt{S_4} \right) - 4 \right). \end{cases} \quad (4.43)$$

Om een eindig dimensionale irreducibele representatie te krijgen van de Casimir (4.6), moeten we ervoor zorgen dat n begrensd is. Vanwege de keuzevrijheid van σ , kunnen we zonder beperking der algemeenheid stellen dat $A_0 = 0$ en $A_{N+1} = 0$. Uit (4.42) tezamen met de zojuist opgelegde eisen voor A_0 en A_{N+1} , zien we dat

$$g_0 = \pm \xi_i \text{ en } g_{N+1} = \pm \xi_j$$

voor zekere ξ_i en ξ_j . De voorwaarde $A_n^2 > 0$ legt enkele voorwaarden op over de mogelijke waarden van de nulpunten ξ_k . Uit $g_n = \sigma - n$ volgt bijvoorbeeld voor $i = 1$ en $j = 4$ dat

$$\xi_1 = \sigma \text{ en } \xi_4 = \sigma - N - 1.$$

Als we nu (4.42) gebruiken, dan zien we dat $A_n^2 > 0$ voor $n = 1, 2, \dots, N$ als aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

$$\left(\sigma < \frac{1}{2} \text{ of } \sigma > N + \frac{1}{2} \right) \quad \text{en} \quad \xi_2^2 < (\sigma - 1)^2 \quad \text{en} \quad \xi_3^2 > (\sigma - N)^2. \quad (4.44)$$

We controleren dat $A_n^2 > 0$ voor het geval $\sigma < \frac{1}{2}$. Het geval $\sigma > N + \frac{1}{2}$ gaat analoog. De noemer van van (4.42) is duidelijk positief, want $(2n - 2\sigma)^2 \geq 0$ en $(2n - 2\sigma + 1)(2n - 2\sigma - 1) = (2n - 2\sigma)^2 - 1 > (2n - 1)^2 - 1 \geq 0$ voor $n = 1, 2, \dots, N$. Voor de teller geldt dat

- (i) $(n - \sigma)^2 - \xi_1^2 = (n - \sigma)^2 - \sigma^2 > (n - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$;
- (ii) $(n - \sigma)^2 - \xi_2^2 > (n - \sigma)^2 - (1 - \sigma)^2 > (n - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$;
- (iii) $(n - \sigma)^2 - \xi_3^2 = (n - \sigma)^2 - (\sigma - N)^2 < 0$;
- (iv) $((n - \sigma)^2 - \xi_4^2) = (n - \sigma)^2 - (1 + n - \sigma)^2 < 0$.

Hieruit volgt dat de teller altijd positief is. Dus voor deze situatie is aangetoond dat $A_n^2 > 0$. Merk op dat indien we aan de voorwaarden van (4.44) voldoen, dan geldt dat eigenwaarden λ^+ en λ^- ontaard zijn, want we voldoen direct aan de voorwaarden zie zijn opgelegd bij opmerking 4.37.

4.3 De connectie tussen de Racah-Wilsonalgebra en de Racahpolynomen

Zij V een $(N + 1)$ -dimensionale vectorruimte. Neem aan dat $\{\psi_n\}_{n=0}^N$ een basis is van eigenvectoren van K_1 en $\{\phi_s\}_{s=0}^N$ een basis van eigenvectoren van K_2 . We definiëren nu een inproduct op V op de basis $\{\psi_n\}_{n=0}^N$ door

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn}.$$

Dit betekent dat K_1 en K_2 zelfgeadjungeerd zijn ten opzichte van dit inproduct. Er geldt dat de bases $\{\psi_n\}_{n=0}^N$ en $\{\phi_s\}_{s=0}^N$ beide een orthonormale basis vormen. Definieer nu de genormaliseerde overlapcoëfficiënten $P_n(\mu_s)$ door

$$P_n(\mu_s) = \frac{\langle \phi_s, \psi_n \rangle}{\langle \phi_s, \psi_0 \rangle}$$

met $P_0(\mu_s) = 1$. De $P_n(\mu_s)$ voldoen aan een drieterms recurrenente betrekking. Zie stelling 4.45.

Stelling 4.45. Er geldt dat $P_n(\mu_s)$ voldoen aan de volgende drieterms recurrenente betrekking

$$\mu_s P_s(\mu_s) = A_{n+1} P_{n+1}(\mu_s) + B_n P_n(\mu_s) + A_n P_{n-1}(\mu_s).$$

Hierbij wordt aangenomen dat $P_{-1}(\mu_s) = 0$.

Bewijs. We schrijven het inproduct uit. Hierbij wordt gebruik gemaakt dat K_2 zelfgeadjungeerd is en dat A_n en B_n reëel zijn.

$$\begin{aligned} \mu_s \langle \phi_s, \psi_n \rangle &= \langle \mu_s \phi_s, \psi_n \rangle = \langle K_2 \phi_s, \psi_n \rangle = \langle \phi_s, K_2 \psi_n \rangle \\ &= \langle \phi_s, A_{n+1} \psi_{n+1} + B_n \psi_n + A_n \psi_{n-1} \rangle \\ &= A_{n+1} \langle \phi_s, \psi_{n+1} \rangle + B_n \langle \phi_s, \psi_n \rangle + A_n \langle \phi_s, \psi_{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

Als we nu beide kanten delen door $\langle \phi_s, \psi_0 \rangle$ dan krijgen we

$$\mu_s P_n(\mu_s) = A_{n+1} P_{n+1}(\mu_s) + B_n P_n(\mu_s) + A_n P_{n-1}(\mu_s)$$

met $P_0(\mu_s) = 1$. Dit is de gevraagde drieterms recurrenente betrekking. ■

In stelling 4.45 is een drieterms recurrenente relatie afgeleid voor $P_n(\mu_s)$. Met de startcondities $P_{-1}(\mu_s) = 0$ en $P_0(\mu_s) = 1$ kunnen $P_2(\mu_s), P_3(\mu_s), \dots$ bepaald worden en kan worden ingezien dat $P_n(\mu_s)$ polynomen zijn. Het is mogelijk om deze polynomen om te zetten in een monische vorm, i.e. in polynomen met kopcoëfficiënt 1. Stel nu

$$P_n(\mu_s) = \frac{\hat{P}_n(x)}{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n}.$$

Dan krijgen we

$$x \hat{P}_n(x) = \hat{P}_{n+1}(x) + B_n \hat{P}_n(x) + A_n^2 \hat{P}_{n-1}(x), \quad (4.46)$$

met $x = \mu_s$. Als de polynomen $\hat{P}_0(x), \dots, \hat{P}_N(x)$ voldoen aan (4.44) dan geldt dat $A_n^2 > 0$ voor $n = 1, 2, \dots, N$. In dat geval vormen de polynomen $\hat{P}_0(x), \dots, \hat{P}_N(x)$ een eindig systeem van orthogonale polynomen.

We laten zien dat de polynomen in (4.46) overeenkomen met de Racahpolynomen. Dit doen we door te laten zien dat de drieterms recurrente betrekking van de overlapfuncties corresponderen met de drieterms recurrente betrekking van de genormeerde Racahpolynomen. Definieer de monische polynomen $\hat{H}_n(\tilde{x})$ in de variabele $\tilde{x} = -2(x + \tau)$ door $\hat{P}_n(x) = (-2)^{-n} \hat{H}_n(\tilde{x})$. Door gebruik te maken van de expliciete formules voor λ_n , B_n en A_n^2 volgt dat

$$\tilde{x} \hat{H}_n(\tilde{x}) = \hat{H}_{n+1}(\tilde{x}) - 2(B_n + \tau) \hat{H}_n(\tilde{x}) + 4A_n^2 \hat{H}_{n-1}(\tilde{x}).$$

Er geldt

$$\tilde{A}_n^2 := 4A_n^2 = \frac{\prod_{j=1}^4 \left((\sigma - n)^2 - \xi_j^2 \right)}{(2n - 2\sigma)^2 (2n - 2\sigma + 1) (2n - 2\sigma - 1)}$$

en

$$\tilde{B}_n := -2(B_n + \tau) = \frac{\lambda_n^2 + d\lambda_n + e_2}{\lambda_n} - 2\tau = \frac{1}{2}(\sigma - n)(n - \sigma + 1) + \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4}{2(\sigma - n)(n - \sigma + 1)} - 2\tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \xi_j^2.$$

Hieruit volgt

$$\tilde{x} \hat{H}_n(\tilde{x}) = \hat{H}_{n+1}(\tilde{x}) + \tilde{B}_n \hat{H}_n(\tilde{x}) + \tilde{A}_n^2 \hat{H}_{n-1}(\tilde{x}).$$

Neem nu aan dat $A_0 = 0$ en $A_{N+1} = 0$. Dan geldt dat $g_0 = \sigma = \xi_1$ en $g_{N+1} = \sigma - N - 1 = \xi_4$. We kunnen de volgende parametrisatie maken

$$\xi_1 = -\frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \xi_2 = \frac{\beta - \alpha}{2} + \delta, \quad \xi_3 = \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ en } \xi_4 = \gamma - \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (4.47)$$

Er geldt dus

$$\alpha = -\xi_1 - \xi_3, \quad \beta = \xi_3 - \xi_1, \quad \gamma = \xi_4 - \xi_1 \text{ en } \delta = \xi_2 - \xi_3.$$

Neem ten slotte

$$\tau = \frac{(2 + \gamma + \delta)(\gamma + \delta)}{8}.$$

Dan volgt $\tilde{A}_n^2 = C_{n-1} D_n$ en $\tilde{B}_n = -(C_n + D_n)$ met

$$C_n = \frac{(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(n + \beta + \gamma + 1)(n + \gamma + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}$$

en

$$D_n = \frac{n(n + \alpha + \beta - \gamma)(n + \alpha - \delta)(n + \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)}.$$

Omdat de drieterms recurrente betrekking nu vastligt, kan geconcludeerd wordt dat $\hat{H}_n(\tilde{x})$ overeenkomen met de drieterms recurrente betrekking van de genormeerde Racahpolynomen uit stelling 3.5. Dit betekent dat we de drieterms recurrente betrekking van de Racahpolynomen hebben afgeleid.

We laten nu zien dat de Racahpolynomen orthogonaal zijn ten opzichte van een specifieke gewichtsfunctie. De orthogonaliteit van de eigenvectoren ψ_n en ψ_s behorende bij respectievelijk de bases K_1 en K_2 , komen overeen

met de orthogonaliteit van de Racahpolynomen. Dit is als volgt in te zien. Er geldt

$$\psi_n = \sum_{s=0}^N \langle \psi_n, \phi_s \rangle \phi_s.$$

Uit de orthogonaliteit van ψ_n volgt dat

$$\begin{aligned} \delta_{kn} = \langle \psi_k, \psi_n \rangle &= \langle \psi_k, \sum_{s=0}^N \langle \psi_n, \phi_s \rangle \phi_s \rangle = \sum_{s=0}^N \langle \psi_k, \phi_s \rangle \langle \phi_s, \psi_n \rangle \\ &= \sum_{s=0}^N |\langle \phi_s, \psi_0 \rangle|^2 P_k(\mu_s) P_n(\mu_s) = \sum_{s=0}^N w(x) P_k(\mu_s) P_n(\mu_s), \end{aligned} \tag{4.48}$$

met $w(x) = |\langle \phi_s, \psi_0 \rangle|^2$. We hebben eerder laten zien dat de polynomen $P_k(\mu_s)$ overeenkomen met de Racahpolynomen. Uit (4.48) volgt nu dat de Racahpolynomen orthogonaal zijn ten opzichte van een gewichtsfunctie.

Bibliografie

- [AAR99] George E. Andrews, Richard Askey en Ranjan Roy. *Special functions*. 1999.
- [AG18] Nakhle H. Asmar en Loukas Grafakos. *Complex Analysis with Applications*. 2018.
- [Bai36] W.N. Bailey. *A new proof of Dixon's theorem on hypergeometric series*. 1936.
- [BW16] Richard Beals en Roderick Wong. *Special functions and orthogonal polynomials*. 2016.
- [BMR84] C. Brezinski, A. P. Magnus en A. Ronveaux. *Polynômes orthogonaux et applications*. 1984.
- [BF10] Richard L. Burden en J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. 2010.
- [Dom15] Brian George Spencer Doman. *The classical orthogonal polynomials*. 2015.
- [Eti+11] Pavel Etingof e.a. *Introduction to representation theory*. 2011. URL: <https://math.mit.edu/~etingof/replect.pdf>. (Geraadpleegd op: 08.06.2022).
- [Fav35] J. Favard. *Sur les polynômes de Tchebicheff*. 1935.
- [FK19] Mama Foupouagnigni en Wolfram Koepf. *Orthogonal Polynomials*. 2019.
- [GVZ13] Vincent X. Genest, Luc Vinet en Alexei Zhedanov. *Superintegrability in two dimensions and the Racah-Wilson algebra*. 2013. URL: <https://arxiv.org/pdf/1307.5539.pdf>. (Geraadpleegd op: 25.04.2022).
- [GS17] David J. Griffiths en Darrell F. Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. 2017.
- [Gro21] Wolter Groenevelt. *Special functions and representation theory*. 2021.
- [Hal15] Brian C. Hall. *Lie groups, lie algebras, and representations*. 2015.
- [KLS10] Roelof Koekoek, Peter A. Lesky en René F. Swarttouw. *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*. 2010.
- [KA02] Erik Koelink en Walter van Assche. *Orthogonal polynomials and special functions*. 2002.
- [Koo21] Tom Koornwinder. *Orthogonal polynomials, a short introduction*. 2021. URL: <https://arxiv.org/pdf/1303.2825.pdf>. (Geraadpleegd op: 21.04.2022).
- [Olv70] Frank Olver. *Introduction to asymptotics and special functions*. 1970.
- [pat89] J.M. patin. *A very short proof of Stirling's formula*. 1989. URL: https://www.researchgate.net/profile/Jean-Marc-Patin/publication/237571154_A_Very_Short_Proof_of_Stirling's_Formula/links/5627c3d108ae22b1702d9616/A-Very-Short-Proof-of-Stirlings-Formula.pdf. (Geraadpleegd op: 21.04.2022).
- [Sla66] Lucy Joan Slater. *Generalized hypergeometric functions*. 1966.
- [Wil78] James Wilson. *Hypergeometric series recurrence relations and some new orthogonal functions*. 1978.
- [Wil80] James A. Wilson. *Some hypergeometric orthogonal polynomials*. 1980.
- [Zhe91] A. S. Zhedanov. *'Hidden symmetry' of Askey-Wilson polynomials*. 1991.