



waterloopkundig laboratorium
delft hydraulics laboratory

stormvloedkering Oosterschelde

belasting op putten ten gevolge
van grondwaterstroming

wiskundig model

W 316

november 1978



stormvloedkering Oosterschelde

belasting op putten ten gevolge
van grondwaterstroming

wiskundig model

W316

november 1978

INHOUD

Lijst van symbolen

blz.

<u>1</u>	<u>Inleiding</u>	1
<u>2</u>	<u>Afleiding van de vergelijkingen</u>	2
<u>3</u>	<u>Oplossingsmethode</u>	7
<u>4</u>	<u>Testberekeningen</u>	12
<u>5</u>	<u>Resultaten van de berekening voor een verval van 7 meter</u>	14
<u>6</u>	<u>Uitbreiding tot stroming door verschillende media</u>	16

REFERENTIES

APPENDIX A: Niet-laminaire stroming

APPENDIX B: Invloedsfunctie

Lijst van symbolen

A	vlak
b_m	afmeting van het m-de element
B	vlak
BP	breedte van de geschematiseerde put
C	koëfficiënt afhankelijk van Reynoldsgetal
d	diameter van het korrelmateriaal waaruit het medium V is opgebouwd
DP	afmeting van de geschematiseerde put
f	rechterlid van de Poisson-vergelijking
\underline{F}	F_x, F_y, F_z : krachtvector
g	versnelling van de zwaartekracht
G	$G_1 + G_2 + G_3$: invloedsfunctie
h_L	afstand van zeebodem tot ondoordringbare laag in de bodem
h_{zee}	waterdiepte van de zee
h_{os}	waterdiepte van de Oosterschelde
j	teller
K, K_1, K_2	doorlatendheidscoëfficiënt
LAM	lengte van het asfaltmestiek
LP	lengte van de geschematiseerde put
m	teller
M	punt op de put
M_x	moment
$\underline{n}, \underline{n}_1, \underline{n}_2$	naar binnen gerichte normaal op de rand van respectievelijk V, V_1, V_2
$n_{x_m}, n_{y_m}, n_{z_m}$	normaalkomponent van de normaal in P_m
N	aantal elementen waarin de belegde rand van V wordt verdeeld
NP	aantal putten
O	rand van V
ΔO_j	oppervlak j-de element
P, P_1, P_2	druk
P^*, P_1^*, P_2^*	potentiaal
P_o^*	opgelegde druk
P	punt op de rand van V
P_j	zwaartepunt j-de element
\underline{r}	vector
R	functie
$Re = \frac{U d}{\nu}$	Reynoldsgetal

Lijst van symbolen (vervolg)

S_1, S_2	symmetrievlak
$\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$	vector van filtersnelheid
$U = \underline{U} $	filtersnelheid
U_n	normaal snelheid
U_r	snelheid in \underline{r} -richting
V, V_1, V_2	medium waarin het grondwater stroomt
$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$	punt binnen V
x, y, z	koördinatensysteem
X, Y, Z	koördinaten van M
α	macht van U
$\alpha(\xi)$	beleggingssterkte per oppervlakte-eenheid
$\underline{\alpha}$	vector met elementen (P_j) ($j = 1, \dots, N$)
$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$	punt op de rand van V
ρ	dichtheid van zeewater
ε	porositeit
ν	viskositeit
$\Gamma V = \Gamma V_1 + \Gamma V_2$	belegde rand van V
ΓV_1	belegde rand van V waar de druk is voorgeschreven
ΓV_2	belegde rand van V waar de normaalafgeleide is voorgeschreven

1 Inleiding

In opdracht van de Deltadienst van de Rijkswaterstaat heeft het Waterloopkundig Laboratorium in 1977 een mathematisch model ontwikkeld om de druk op een put van de toekomstige pijlerdam te berekenen, die optreedt als gevolg van de grondwaterstroming veroorzaakt door een verval van 7 meter over de kering. In overleg met de Deltadienst is de put geschematiseerd tot een rechthoekig blok, dat is ingebed in zand (zie figuur 1 en referentie 2).

Het mathematisch model is ontwikkeld door ir. F.C. Vis die ook dit rapport opstelde.

2 Afleiding van de vergelijkingen

De vergelijkingen die de stationaire stroming door een poreus medium (waarvan de afmetingen vele malen groter zijn dan die van het materiaal waaruit het medium bestaat) beschrijven, worden gegeven door Le Méhauté (zie referentie 1). Deze vergelijkingen zijn

- continuïteitsvergelijking

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0, \quad (2.1)$$

- bewegingsvergelijking

$$\text{grad}(p + \rho g z) = - R(U) \underline{U} \quad (2.2)$$

De vector $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$ in deze formules is de filtersnelheid, waarvan de richting gegeven wordt door de componenten U_1, U_2 en U_3 in respektievelijk x-, y- en z-richting (zie figuur 1), en de grootte door

$$U = |\underline{U}| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$$

De scalar p is de waterdruk in het medium ter plaatse $\underline{x} = (x, y, z)^*$. Indien nu

$$p^* = p + \rho g z \quad (2.3)$$

gesteld wordt, dan is p^* de potentiaal ter plaatse (x, y, z) . Hiermee volgt voor vergelijking (2.2)

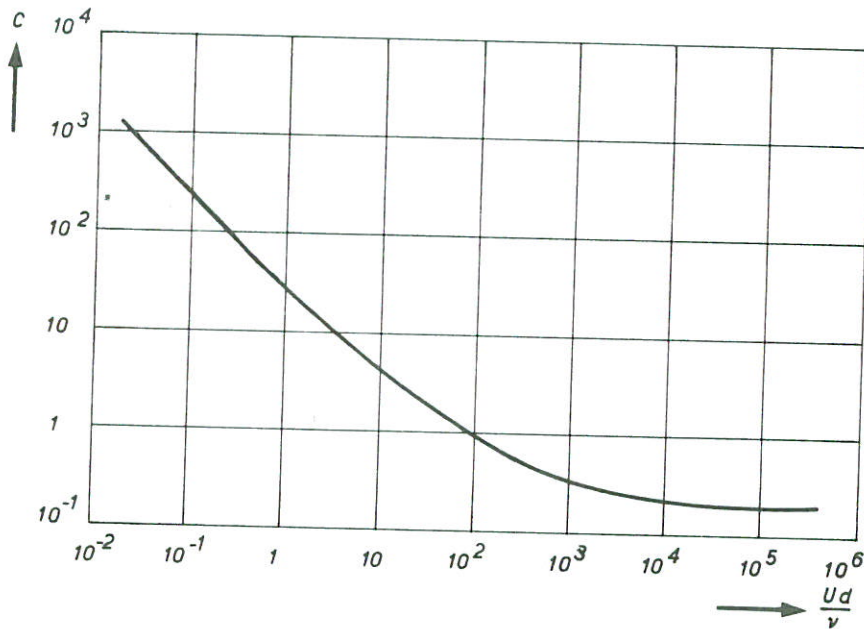
$$\text{grad } p^* = - R \underline{U} \quad (2.4)$$

Volgens Le Méhauté wordt de funktie $R(U)$ gegeven door

$$R = \left| \frac{C U}{2d^2 \epsilon^5} \right|,$$

* De betekenis van de andere symbolen wordt gegeven in de lijst van de symbolen.

waarin C een functie is afhankelijk van het Reynoldsgetal $Re = \frac{U d}{\nu}$ (zie onderstaand figuur), ϵ de porositeit van het medium is en d de diameter van de hierin voorkomende korrels.



Figuur 2.1 C als functie van $Re = \frac{U d}{\nu}$

Voor $Re > 10^4$ loopt de grafiek voor C horizontaal en is C dus konstant ($\approx 0,2$). In dit geval is R lineair met de filtersnelheid U , zodat het verband (2.4) tussen grad p^* , en de filtersnelheid kwadratisch is

$$\text{grad } p^* = - \text{konstante} \cdot U \cdot U \tag{2.5}$$

Stroming die met dit gebied van het Re -getal correspondeert noemt men turbulent.

Voor $Re < 1$ is de grafiek van C een rechte lijn.

Aangezien Re hier logaritmisch is uitgezet, is C in dit gebied evenredig met $\frac{1}{Re}$, ofwel met $\frac{1}{U}$. Dit houdt in dat de functie R konstant is voor $Re < 1$, zodat de relatie tussen grad p^* en de filtersnelheid lineair is:

$$\text{grad } p^* = - K \cdot U \quad \text{voor} \quad Re < 1 \tag{2.6}$$

Deze vergelijking wordt wel de wet van Darcy genoemd en de ermee corresponderende stroming laminair*. In media als zand en klei zal deze wet in het algemeen opgaan.

*Het algemene geval wordt uiteengezet in Appendix A.

Het gebied $1 < Re < 10^4$ wordt overgangsgebied genoemd. De relatie tussen grad p^* en de filtersnelheid is in dit geval van orde U^α met $1 < \alpha < 2$.

Experimenteel is vastgesteld dat voor het zand waarin de put wordt geplaatst inderdaad een lineair verband bestaat tussen grad p^* en de filtersnelheid, zodat als bewegingsvergelijking formule (2.6) kan worden genomen.

De konstante K die hierin voorkomt bleek ongeveer van orde $10^{-8} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}}$ te zijn.

Substitutie van vergelijking (2.6) in de continuïteitsvergelijking (2.1) geeft:

$$\nabla \cdot \left(-\frac{1}{K} \text{grad } p^* \right) = 0,$$

en aangezien K konstant is (isotroop materiaal) volgt hieruit

$$\text{div grad } p^* = 0$$

ofwel

$$\Delta p^* = \left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (2.7)$$

de bekende Laplace vergelijking.

Deze vergelijking geldt binnen de materie waarin het grondwater stroomt. Noem dit gebied V .

De randen van dit gebied worden gevormd door (zie figuur 2)

- de putten (a)
- de zeebodem (b), die gedeeltelijk voorzien is van een ondoordringbare asfaltmastiek laag (de zogenaamde vervalspreider)
- de ondoordringbare laag in de zeebodem (c)
- een cilinder (d) om de put, waarop de krachten uitgerekend worden met straal ∞ .

Op de ondoordringbare rand (en dus ook op de constructie) geldt dat de snelheid gericht volgens de normaal erop nul is, dus

$$U_n = -K \frac{\partial p^*}{\partial n} = -K (\text{grad } p^* \cdot \underline{n}) = 0 \quad (\text{op de ondoordringbare rand}) \quad (2.8)$$

\underline{n} is hierin de naar binnen gerichte normaal op de rand van V .

Op het gedeelte van de zeebodem dat niet bedekt wordt door een asfaltmastiek laag en dus doorlatend is, wordt gesteld dat de druk ter plaatse gelijk is aan de druk ten gevolge van de waterkolom die er boven staat. Verondersteld wordt dus dat er geen interactie plaatsvindt tussen grondwaterstroming en opgelegde druk. Aangezien de optredende grondwaterstromingen zeer klein zijn, is deze veronderstelling gerechtvaardigd.

Aan de zeezijde geldt dus

$$p^* = \rho g h_{zee} \quad (2.9)$$

en aan de Oosterschelde (O.S.) zijde

$$p^* = \rho g h_{os} \quad (2.10)$$

waarin h_{zee} en h_{os} respectievelijk de waterdiepten aan zeezijde ($h_{zee} = 35.5$ m) en Oosterscheldezijde ($h_{os} = 28.5$ m) zijn.

Gezien de geometrie van het gebied V kunnen er twee symmetrievlakken S_1 en S_2 aangenomen worden (zie figuur 2), waarop eveneens geeist kan worden dat de normaalsnelheid erop nul moet zijn, dus

$$U_n = -K \frac{\partial p^*}{\partial n} = 0 \quad \text{op} \quad S_1 \text{ en } S_2 \quad (2.11)$$

Om het gebied V begrensd te maken worden twee vlakken (A en B, eveneens aangegeven in figuur 2) aangenomen, waar ook geeist wordt dat de normaalsnelheid erop nul is:

$$U_n = -K \frac{\partial p^*}{\partial n} = 0 \quad \text{op vlak A en vlak B} \quad (2.12)$$

Dit impliceert dat op deze vlakken alleen tangentiële snelheden worden toegelaten, hetgeen fysisch gezien vrij redelijk lijkt, mits deze vlakken op voldoende afstand van de put zijn geplaatst. Beter zou zijn de vlakken op zeer grote afstand van de put te plaatsen en te eisen dat de invloed van het verval over de kering daar niet meer merkbaar is, ofwel dat niet alleen de normaalcomponent van de snelheid, maar ook de overige componenten daar nul zijn. In dit geval bestaat de druk p op deze vlakken alleen uit de hydrostatische druk, zodat p^* op deze vlakken gelijk is aan de druk op de zeebodem. Dit resulteert dus in de voorwaarden

$$p^* = \rho g h_{ZEE} \quad \text{op vlak A}$$

$$p^* = \rho g h_{OS} \quad \text{op vlak B}$$

Zoals reeds is gezegd moeten bij toepassing van deze kondities in plaats van die genoemd in vergelijking (2.12), de vlakken A en B op grote afstand van de konstruktie worden geplaatst. In dat geval wordt het te beleggen bovenvlak en daarmee het totaal aantal elementen waarin de rand wordt opgedeeld (zoals in het navolgende zal blijken) en dus de uiteindelijke rekentijd erg groot. Vanwege deze praktische bezwaren is gekozen voor de konditie (2.12).

Konklusie

De vergelijking die moet worden opgelost is de Laplace vergelijking voor de druk p^* , vergelijking (2.7), die geldt in gebied V, dus ook in het gebied begrensd door de put, de zeebodem, de vlakken A en B, de ondoordringbare laag in de zeebodem, en de symmetrievlakken S_1 en S_2 .

De kondities die op deze begrenzingen gelden worden gegeven door de vergelijkingen (2.8)-(2.12).

3 Oplossingsmethode

De oplossing van de Laplace-vergelijking in een inwendig punt P van V wordt gevonden door de rand van V met een continue verdeling van bronnen te beleggen.

De oplossing luidt dan:

$$p^*(P) = \iint_0 \alpha(\xi) G(\xi;P) dO_\xi \quad (3.1)$$

waarin 0 de rand is van V.

De functie $\alpha(\xi)$ is de beleggingssterkte per oppervlakte-eenheid ter plaatse van het punt $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ op de rand (dO is ook voorzien van ξ om aan te geven dat de integratie uitgevoerd moet worden met betrekking tot deze variabele). De functie $\alpha(\xi)$ is nog onbekend, maar moet zodanig bepaald worden dat aan de randvoorwaarden (2.8)-(2.12) wordt voldaan.

De functie $G(\xi;P)$ wordt invloedsfunctie genoemd. Door deze functie zodanig te kiezen dat onafhankelijk van de functie $\alpha(\xi)$ aan de randvoorwaarden op de ondoordringbare laag in de bodem en de twee symmetrievlakken wordt voldaan, behoeven deze vlakken niet met bronnen te worden belegd, en behoeft de integratie in (3.1) alleen uitgevoerd te worden over het resterend deel van de rand van V (dit is de zeebodem, de halve put en de vlakken A en B). Dit resterende deel wordt in het hiernavolgende aangeduid met ΓV . De functie $G(\xi;P)$ wordt gegeven in Appendix B.

De oplossing (3.1) van de Laplace-vergelijking voor p^* in V moet aan de randen ΓV aansluiten aan de daar geldende voorwaarden. Dit houdt in dat op de randen waar bijvoorbeeld een druk p_0^* is voorgeschreven (stel op ΓV_1) moet gelden

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow P} p^*(\underline{x}) = \lim_{\underline{x} \rightarrow P} \iint_{\Gamma V} \alpha(\xi) G(\xi; \underline{x}) dO_\xi = p_0^*(P) \quad (3.2)$$

voor P op ΓV_1

en dat op de randen waar de normaalafgeleide (= 0) is voorgeschreven (stel op ΓV_2) moet gelden

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow P} \frac{\partial p^*(\underline{x})}{\partial n_p} = \lim_{\underline{x} \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_p} \iint_{\Gamma V} \alpha(\xi) G(\xi; \underline{x}) dO_\xi = 0 \text{ voor } P \text{ op } \Gamma V_2 \quad (3.3)$$

Hierin is \underline{n}_p de normaal in P op ΓV_2 .

Uit een gedetailleerde analyse, waarbij rekening gehouden moet worden met het singuliere gedrag van de integrand, volgt dat deze voorwaarden te schrijven zijn als:

$$p^*(P) = \iint_{\Gamma V} \alpha(\xi) G(\xi; P) dO_\xi = p_o^*(P) \quad \text{voor } P \text{ op } \Gamma V_1 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial p^*(P)}{\partial n_p} = \alpha(P) + \iint_{\Gamma V} \alpha(\xi) \frac{\partial}{\partial n_p} G(\xi; P) dO_\xi = 0 \quad \text{voor } P \text{ op } \Gamma V_2 \quad (3.5)$$

Dit zijn nu de vergelijkingen waaruit de bronsterkte $\alpha(\xi)$ moet worden bepaald. Wanneer deze eenmaal bekend is, dan is met behulp van formule (3.1) de potentiaal p^* en met behulp van formule (2.3) de druk p binnen V te berekenen.

Numerieke aanpak

Om de onbekende beleggingssterkte $\alpha(\xi)$, die op een deel van de rand van V , $\Gamma V = \Gamma V_1 + \Gamma V_2$, is gedefinieerd uit de integraalvergelijkingen (3.4) en (3.5) op te lossen, wordt dat deel van de rand in elementen verdeeld. Gezien de geometrie van de rand kan hier volstaan worden met rechthoekige elementen, die onderling van grootte mogen verschillen. Aangenomen wordt nu dat de beleggingssterkte op een element konstant mag worden genomen en wel gelijk aan de beleggingssterkte in het zwaartepunt van dit element. Deze aanname is natuurlijk gerechtvaardigd als we het element maar klein genoeg nemen. Indien dus P_j het zwaartepunt is van het j -de element, dan zijn de vergelijkingen (3.4) en (3.5) respectievelijk te schrijven als

$$\sum_{j=1}^N \alpha(P_j) \iint_{O_j} G(\xi; P) dO_\xi = p_o^*(P_j) \quad \text{voor } P \text{ op } \Gamma V_1 \quad (3.6)$$

en

$$\alpha(P) + \sum_{j=1}^N \alpha(P_j) \iint_{O_j} \frac{\partial}{\partial n_p} G(\xi; P) dO_\xi = 0 \quad \text{voor } P \text{ op } \Gamma V_2 \quad (3.7)$$

Hierin is N het totaal aantal elementen waarin de te belggen rand ΓV is opgedeeld. Het symbool O_j duidt aan dat de integratie uitgevoerd moet worden over het oppervlak van het j -de element. Voor alle N zwaartepunten wordt nu, afhankelijk van de daar geldende konditie, ofwel vergelijking (3.6) dan wel vergelijking (3.7) opgesteld. (Immers P moest een punt op de rand van V zijn, zodat voor P achtereenvolgens P_1 tot en met P_N mag worden genomen.) Dit resulteert in een stelsel van N -lineaire, algebraïsche vergelijkingen met N onbekenden, namelijk $\alpha(P_1), \alpha(P_2), \dots, \alpha(P_N)$. Indien P_m het zwaartepunt is van het m -de element, wordt vergelijking (3.6)

$$\sum_{j=1}^N \alpha(P_j) \iint_{O_j} G(\xi; P_m) dO_\xi = p_o^*(P_m) \quad \text{voor } P_m \text{ op } \Gamma V_1 \quad (3.8)$$

en vergelijking (3.7)

$$\alpha(P_m) + \sum_{j=1}^N \alpha(P_j) \iint_{O_j} \frac{\partial}{\partial n_{P_m}} G(\xi; P_m) dO_\xi = 0 \quad \text{voor } P_m \text{ op } \Gamma V_2 \quad (3.9)$$

De integranden $G(\xi; P_m)$ en $\frac{\partial}{\partial n_{P_m}} G(\xi; P_m)$ worden nu per element benaderd door de waarde ervan in het zwaartepunt. (Ook deze benadering is gerechtvaardigd indien het element klein genoeg is.) Met deze benadering volgt voor de vergelijkingen (3.8) en (3.9)

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \alpha(P_j) G(P_j; P_m) \Delta O_j + \alpha(P_m) \left[G_2(P_m; P_m) + G_3(P_m, P_m) \right] \Delta O_m + \\ - \alpha(P_m) \cdot \frac{1}{\pi} \left[b_m \ln \frac{h_m + \sqrt{b_m^2 + h_m^2}}{b_m} + h_m \ln \frac{b_m + \sqrt{b_m^2 + h_m^2}}{h_m} \right] = p_o^*(P_m) \\ \text{voor } P_m \text{ op } \Gamma V_1 \quad (3.10)$$

$$\alpha(P_m) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \alpha(P_j) \frac{\partial}{\partial n_{P_m}} G(P_m; P_j) \Delta 0_j + \\ + \alpha(P_m) \frac{\partial}{\partial n_{P_m}} G_2(P_m; P_m) + G_3(P_m; P_m) = 0 \quad \text{voor } P_m \text{ op } \Gamma V_2 \quad (3.11)$$

N.B.: Opgemerkt zij dat de integratie van het singuliere deel van de integrand over het element m, waar de singulariteit optreedt (met name voor $\xi = P_m$), analytisch is uitgevoerd, terwijl de integratie over het resterende reguliere deel analoog is uitgevoerd aan de behandeling van andere reguliere termen. De analytische integratie levert de term op met de logaritmen, terwijl de termen met $[G_2(P_m; P_m) + G_3(P_m; P_m)]$ afkomstig zijn van de integratie over het m-de element van het resterende reguliere deel van de integrand.

Het symbool $\Delta 0_j$ is het oppervlak van het j-de element en b_m en h_m staan voor de afmetingen van het rechthoekige m-de element.

De vergelijkingen (3.10) en (3.11) vormen, wanneer ze opgesteld worden voor de randpunten P_m ($m = 1, \dots, N$) het stelsel van N lineaire vergelijkingen voor de N onbekenden $\alpha(P_m)$ ($m = 1, \dots, N$). In matrix-vector notatie is dit stelsel te schrijven als

$$M \underline{\alpha} = \underline{b} \quad (3.12)$$

met M een volledig gevulde niet-symmetrische $N \times N$ matrix, $\underline{\alpha}$ de te bepalen vector en \underline{b} een bekende vector. De grootte van N was voor dit probleem van orde 1000. Oplossen van dit stelsel vergt dan ook aanzienlijk veel rekentijd. Is $\underline{\alpha}$ eenmaal bekend dan kan met behulp van de van vergelijking (3.1) afgeleide relaties

$$p^*(\underline{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha(P_j) G(P_j; \underline{x}) \Delta 0_j \quad (3.13)$$

$$U_r(\underline{x}) = (\underline{U} \cdot \underline{r}) = -K(\nabla p \cdot \underline{r}) = -K \sum_{j=1}^N \alpha(P_j) (G(P_j; \underline{x}) \cdot \underline{r}) \Delta 0_j \quad (3.14)$$

de druk p^* en de filtersnelheid in \underline{r} -richting, U_r , in elk inwendig punt \underline{x} van

het medium V worden berekend. Druk en snelheid in de zwaartepunten P_m volgen uit

$$\begin{aligned}
 p^*(P_m) = & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \alpha(P_j; P_m) \Delta O_j + \alpha(P_m) [G_2(P_m; P_m) + G_3(P_m; P_m)] \Delta O_m + \\
 & - \alpha(P_m) \frac{1}{\pi} \left[b_m \ln \frac{h_m + \sqrt{b_m^2 + h_m^2}}{b_m} + h_m \ln \frac{b_m + \sqrt{b_m^2 + h_m^2}}{h_m} \right] \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_r(P_m) = & -K \alpha(P_m) - K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \alpha(P_j) (G(P_j; P_m) \cdot \underline{r}) \Delta O_j + \\
 & -K \alpha(P_m) (G_2(P_m; P_m) + G_3(P_m; P_m) \cdot \underline{r}) \Delta O_m \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

4 Testberekeningen

Om het computerprogramma te testen, dat het stelselvergelijkingen (3.12) opstelt en oplost, en vervolgens met behulp van de formules (3.13) tot en met (3.16) druk- en normaalsnelheden in de zwaartepunten van alle elementen, alsmede de druk- en snelheidscomponenten voor een aantal inwendige punten uitrekent, is een situatie doorgerekend waarbij geen waterstandsverschil over de kering stond. De oplossing van dit probleem is dat p^* konstant is zowel binnen als op de rand van V en wel gelijk aan de druk op de zeebodem, en dat als gevolg van deze uniforme drukverdeling er geen grondwaterstroming plaatsvindt ($\underline{U} = 0$).

Voor de druk op de zeebodem was een druk overeenkomende met een waterdiepte van 28,5 m gekozen. De relatieve fout waarmee deze druk werd gereproduceerd lag binnen de 0,6%. Echter, daar de druk niet voor elk punt van V gelijk was, resulteerde uit de berekening wel een grondwaterstroming, die op het bovenvlak van V, waar de druk was voorgeschreven, gebied V binnen komt en dit gebied op het symmetrievlak S_2 verlaat (terwijl op dit vlak geeist was dat de normaalsnelheid erop nul moest zijn).

Uit vergelijking met de berekeningen voor een situatie met een verval van 7 meter over de kering (zie paragraaf 5) bleek dat deze grondwaterstroming in V (die dus nul had moeten zijn) van dezelfde orde van grootte was als de in die situatie optredende stroming. Gekonkludeerd moet daarom worden dat de fout in de berekening van de snelheden in V niet te verwaarlozen is ten opzichte van de optredende stroming bij een verval van 7 meter.

Zoals reeds is vermeld verlaat de stroming in V dit gebied door het vlak S_2 . Klaarblijkelijk wordt de konditie, dat de normaalsnelheid op S_2 gelijk is aan nul, niet voldoende door de invloedsfunctie G gesimuleerd.

Deze konditie wordt door G gesimuleerd met de term G_3 . (Hierop zal in het onderstaande en in Appendix B nader worden ingegaan.) Gebleken is wel dat naarmate de bovengrens NP van de sommaties in G_3 groter wordt gekozen (dus naarmate er meer putten zowel links als rechts van de put onder beschouwing worden genomen in de berekening), er een duidelijke convergentie naar de exacte oplossing aanwezig is. Boven beschreven relatieve fout van 0,6% werd namelijk gevonden voor NP = 10, terwijl voor NP = 5 de relatieve fout 2,4% en voor NP = 2 10% bedroeg.

Deze convergentie naar de exacte oplossing is ook wel verklaarbaar daar door G_3 aan één zijde van S_2 altijd één put meer wordt gesimuleerd dan aan de

andere zijde. Door NP nu steeds groter te nemen wordt deze extra put ten opzichte van S_2 steeds verder weggelegd, waardoor zijn invloed op S_2 , aangezien die van orde één gedeeld door de afstand van deze extra put tot S_2 is, steeds geringer wordt, zodat ten opzichte van het symmetrievlak S_2 de mate van symmetrie en daarmee de mate waarmee aan de gestelde konditie op dit vlak wordt voldaan, steeds toeneemt (zie ook Appendix B).

Ten opzichte van het symmetrievlak S_1 worden door G_3 wel evenveel putten aan weerszijden van dit vlak gesimuleerd. Dit blijkt ook duidelijk uit de mate waarmee aan de gestelde konditie op S_1 wordt voldaan. De normaalsnelheden op S_1 bleken namelijk in alle gevallen zeer veel kleiner te zijn dan de overige snelheidscomponenten (orde 10^8 kleiner).

Een tweede mogelijkheid om aan de konditie op S_2 te voldoen, welke in het licht van genoemde problemen waarschijnlijk betere resultaten oplevert, is dit vlak ook met bronnen te beleggen en voorts op dezelfde wijze te behandelen als de konstruktie, het asfaltmastic etc.. Een konsekwentie hiervan is echter dat extra rekenpunten worden toegevoegd, hetgeen nadelig is voor de rekentijd. Daarentegen moet de term G_3 van de invloedsfunctie weggelaten worden waardoor winst in rekentijd wordt verkregen.

5 Resultaten van de berekening voor een verval van 7 meter

In de vorige paragraaf is gebleken dat het aantal putten (NP) aan weerszijden van de put onder beschouwing van invloed is op de grondwaterstroming en de hierdoor veroorzaakte drukken op de put. Om de gevoeligheid van de resulterende horizontale kracht in y-richting F_y , de resulterende verticale kracht F_z en het moment om de lijn door M evenwijdig aan de x-as, M_x voor het aantal meegenomen putten (NP) te bepalen, zijn de gevallen doorgerekend waarbij NP = 2 en NP = 10.

De resulterende horizontale kracht F_y op de put volgt met de formule

$$F_y = - 2 \sum_m p^*(P_m) \cdot n_{y_m} \cdot \Delta O_m$$

waarbij alleen gesommeerd moet worden over de elementen die tot de put behoren. In deze formule is $p(P_m)$ de druk op het m-de element, n_{y_m} de komponent van de normaal op dit element in y-richting en ΔO_m het oppervlak van dit element. De faktor 2 is toegevoegd aangezien in de berekening vanwege de symmetrie alleen een halve put is beschouwd.

De resulterende verticale kracht F_z volgt uit

$$F_z = - 2 \sum_m p^*(P_m) \cdot n_{z_m} \cdot \Delta O_m + \rho g \cdot DP \text{ (oppervlak onderkant put)}$$

waarin DP de diepte van de put is (zie figuur 1), en n_{z_m} de z-komponent van de normaal op element m.

Afwijkend ten opzichte van de formule voor F_x is hier de term $\rho g \cdot DP$ (oppervlak onderkant put) toegevoegd, welke afkomstig is van de hydrostatische druk $\rho g \cdot DP$ op de onderkant van de (niet-geschematiseerde) put, aangezien deze druk een resulterende kracht oplevert (zie figuur 3). De sommatie loopt weer alleen over de elementen van de put.

Vanwege de symmetrie is de resulterende horizontale kracht F_x gelijk aan nul. Het moment M_x volgt uit

$$M_x = 2 \sum_m \{-n_{y_m} \cdot (Z-z_m) + n_{z_m} \cdot (Y-y_m)\} \cdot p^*(P_m) \cdot \Delta O_m$$

waarbij weer alleen gesommeerd wordt over de elementen van de put.

De y_m en z_m zijn respectievelijk de y- en de z-koördinaat van het zwaartepunt

van het m-de element, terwijl Y en Z respectievelijk de y- en z-koördinaat van het punt M zijn.

Het resultaat van de berekening voor een situatie met een waterstand van NAP + 5,5 m van de zee (dus $h_{zee} = 35,5$ m) en een waterstand van NAP -1,7 m van de Oosterschelde (dus $h_{os} = 28,5$ m) is

voor NP = 2:

$$\begin{aligned}F_y &= -4,976 \cdot 10^6 \text{ N} \\F_z &= 9,569 \cdot 10^7 + 1,086 \cdot 10^8 = 2,043 \cdot 10^8 \text{ N} \\M_x &= 6,649 \cdot 10^7 \text{ Nm}\end{aligned}$$

voor 10 pijlers:

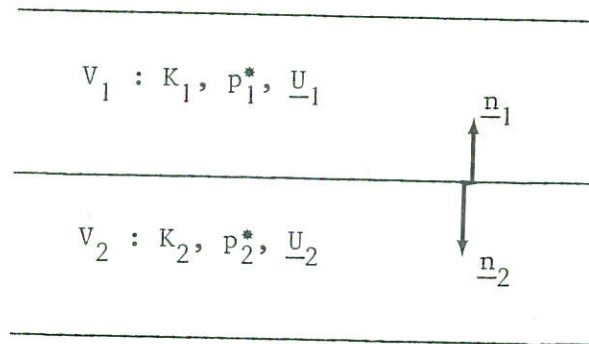
$$\begin{aligned}F_y &= -5,057 \cdot 10^6 \text{ N} \\F_z &= 1,053 \cdot 10^8 + 1,086 \cdot 10^8 = 2,139 \cdot 10^8 \text{ N} \\M_x &= 6,789 \cdot 10^7 \text{ Nm}\end{aligned}$$

Gekonkludeerd kan dus worden dat het aantal in de berekening meegenomen pijlers (NP) nauwelijks invloed heeft op bovenvermelde krachten c.q. moment.

De berekende drukken op de put die gevonden zijn in de berekening met NP = 10 staan vermeld in figuren 4 tot en met 7.

6 Uitbreiding tot stroming door verschillende media

De in het voorafgaande beschreven methode die alleen werd toegepast op stroming binnen een medium met konstante doorlatendheidscoëfficiënt K , kan eenvoudig worden toegepast op stroming door diverse media met verschillende doorlatendheidscoëfficiënten. De stroming in elk medium moet wel laminair zijn, zodat overal de wet van Darcy en daarmee de Laplace-vergelijking geldt.



Figuur 6.1 Twee media met verschillende doorlatendheidscoëfficiënt

Beschouw voor de eenvoud twee lagen V_1 en V_2 (zie figuur 6.1), met doorlatendheidscoëfficiënt respectievelijk K_1 en K_2 . Indien de stroming hierin laminair is dan geldt de wet van Darcy, zodat

$$\text{grad } p_1^* = - K_1 \cdot \underline{U}_1 \quad \text{in } V_1 \quad (6.1)$$

met p_1^* = druk potentiaal in V_1 (N/m^2)

\underline{U}_1 = filtersnelheid in V_1 (m/s)

en

$$\text{grad } p_2^* = - K_2 \underline{U}_2 \quad (6.2)$$

met p_2^* = relatieve druk in V_2 (N/m^2)

\underline{U}_2 = filtersnelheid in V_2 (m/s).

Voorts geldt in elke laag de continuïteitsvergelijking, zodat

$$\nabla \cdot \underline{U}_1 = 0 \quad \text{in } V_1 \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \underline{U}_2 = 0 \quad \text{in } V_2 \quad (6.4)$$

Uit (6.1) met (6.3) en (6.2) met (6.4) volgt dan respektievelijk

$$\Delta p_1^* = 0 \quad \text{in } V_1 \quad (6.5)$$

$$\Delta p_2^* = 0 \quad \text{in } V_2 \quad (6.6)$$

Deze twee vergelijkingen zijn op dezelfde wijze op te lossen als in geval van één medium. De randvoorwaarde wordt echter anders. Op het scheidingsvlak tussen V_1 en V_2 moet namelijk gelden dat, gezien de continuïteitsvoorwaarde,

$$U_{n_1}(P) = -U_{n_2}(P) \quad \text{voor } P \text{ op het scheidingsvlak} \quad (6.7)$$

Bovendien moet gelden dat

$$p_1^*(P) = p_2^*(P) \quad \text{voor } P \text{ op het scheidingsvlak} \quad (6.8)$$

Om aan deze beide criteria te kunnen voldoen moet het scheidingsvlak dubbel belegd worden: Een belegging α_1 die alleen invloed heeft op volume V_1 en een belegging α_2 voor volume V_2 . Met behulp van (6.7) en (6.8) kunnen deze twee beleggingen dan worden opgelost.

REFERENTIES

- 1 MEHAUTE, B. le. Perméabilité des digues en enrochements aux ondes de gravité périodiques.
La Houille Blanche, december 1957, no. 6.
- 2 Waterloopkundig Laboratorium. Driedimensionale grondwaterstroming.
Rapport W 316, januari 1977.

Appendix A: Niet-laminaire stroming

Volgens B. le Méhauté wordt de stationaire stroming door poreuze media beschreven door de bewegingsvergelijking

$$\text{grad } p^* = - \rho R(\underline{U}) \cdot \underline{U} \quad (\text{A.1})$$

waarin $R(U)$ een funktie is van onder andere de snelheid $U = |\underline{U}|$, en voorts door de continuïteitsvergelijking

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Substitutie van (A.1) in (A.2) geeft

$$\nabla \cdot \frac{1}{R} \text{grad } p^* = 0,$$

waaruit volgt

$$\Delta p^* = \frac{1}{R} (\text{grad } R \cdot \text{grad } p^*).$$

Substitutie van (A.1) hierin levert

$$\Delta p^* = - \rho R (\text{grad } R \cdot \underline{U}) \quad (\text{A.3})$$

Tezamen met (A.1) vormt deze vergelijking een stelsel van 4 vergelijkingen voor de 4 onbekenden p^* , U_1 , U_2 en U_3 . Alleen wanneer de stroming laminair is, is R onafhankelijk van U , zodat $\text{grad } R \equiv 0$, waardoor (A.3) reduceert tot de Laplace-vergelijking voor p^* en waarmee het stelsel vergelijkingen ontkoppeld is. De druk p^* kan eerst uitgerekend worden en vervolgens kunnen, met behulp van (A.1) de snelheidscomponenten worden berekend.

In geval van niet-laminaire stroming zullen de vergelijkingen (A.1) en (A.3) opgelost moeten worden. Een mogelijkheid daartoe, welke overigens nog nader bestudeerd dient te worden, lijkt de volgende aanpak.

Door de snelheidsvector \underline{U} binnen het medium te schatten, wordt een schatting van het rechterlid van (A.3) verkregen. Hiermee resulteert deze vergelijking in een Poisson-vergelijking:

$$\Delta p^* = f(x,y,z) \quad (\text{A-4})$$

Deze vergelijking is oplosbaar met bijvoorbeeld een eindige elementenmethode. Met behulp van de hieruit resulterende p^* en (A.1) is een nieuwe schatting van \underline{U} te berekenen en kan het proces opnieuw gestart worden. De vraag blijft enerzijds of het iteratieproces convergeert en anderzijds of de geschetste methode in verband met rekenkosten verantwoord is.

Ook met een bronbeleggingmethode is vergelijking (A.4) op te lossen. Aangezien (A.4) een lineaire vergelijking in p^* is, kan p^* gezien worden als superpositie van p_1^* en p_2^* , dus

$$p^* = p_1^* + p_2^*, \quad (\text{A.5})$$

waarvoor geldt dat

$$\Delta p_1^* = f(x,y,z) \quad (\text{A.6})$$

en

$$\Delta p_2^* = 0 \quad (\text{A.7})$$

De druk p_1^* is dan de particuliere oplossing van (A.4), en wordt in een punt P van het medium V gegeven door

$$p_1^*(P) = \iiint_V f(\xi) \cdot G(\xi;P) dV_\xi,$$

terwijl p_2^* , de algemene oplossing van (A.4), die aan de Laplace-vergelijking voldoet, te berekenen is met de bronbeleggingmethode. De randvoorwaarde bij deze vergelijking is dan

$$p_2^*(P_m) = p_o^*(P_m) - p_1^*(P_m) \quad \text{voor } P_m \text{ op } \Gamma V_1$$

en

$$\frac{\partial p_2^*}{\partial n_{P_m}}(P_m) = - \frac{\partial p_1^*}{\partial n_{P_m}}(P_m) \quad \text{voor } P_m \text{ op } \Gamma V_2.$$

Appendix B: Invloedsfunctie

De invloedsfunctie $G(\xi;P)$ wordt gegeven door

$$G(\xi;P) = G_1(\xi;P) + G_2(\xi;P) + G_3(\xi;P)$$

met

$$G_1(\xi;P) = -\frac{1}{2\pi R_0}$$

$$G_2(\xi;P) = -\frac{1}{2\pi SR_0} - \frac{1}{2\pi RA_0} - \frac{1}{2\pi SRA_0}$$

$$\begin{aligned} G_3(\xi;P) = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{R_i} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{D_i} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{SR_i} + \\ & -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{SD_i} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{RA_i} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{DA_i} + \\ & -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{SRA_i} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{SDA_i} \end{aligned}$$

en

$$R_i = \sqrt{[x_p - (\xi + i \cdot AP)]^2 + [y_p - \eta]^2 + [z_p - \zeta]^2}$$

$$D_i = \sqrt{[x_p - (-\xi + i \cdot AP)]^2 + [y_p - \eta]^2 + [z_p - \zeta]^2}$$

$$SR_i = \sqrt{[x_p + (\xi + i \cdot AP)]^2 + [y_p - \eta]^2 + [z_p - \zeta]^2}$$

$$SD_i = \sqrt{[x_p + (-\xi + i \cdot AP)]^2 + [y_p - \eta]^2 + [z_p - \zeta]^2}$$

$$RA_i = \sqrt{[x_p - (\xi + i \cdot AP)]^2 + [y_p - \eta]^2 + [z_p + \zeta + 2h_L]^2}$$

$$DA_i = \sqrt{[x_p - (-\xi + i \cdot AP)]^2 + [y_p - \eta]^2 + [z_p + \zeta + 2h_L]^2}$$

$$SRA_i = \sqrt{[x_p + (\xi + i.AP)]^2 + [y_p - \eta]^2 + [z_p + \zeta + 2h_L]^2}$$

$$SDA_i = \sqrt{[x_p + (-\xi + i.AP)]^2 + [y_p - \eta]^2 + [z_p + \zeta + 2h_L]^2}$$

hierin is: $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$

$P = (x_p, y_p, z_p)$

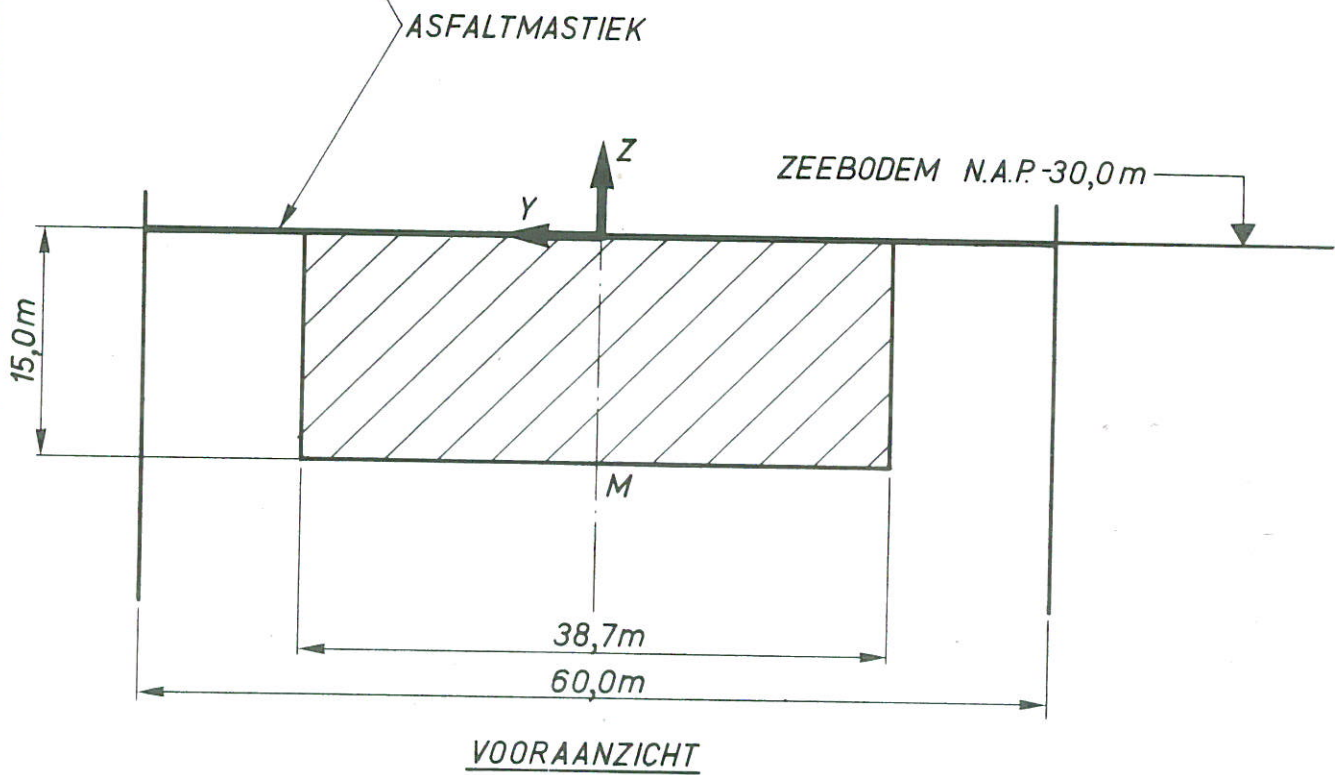
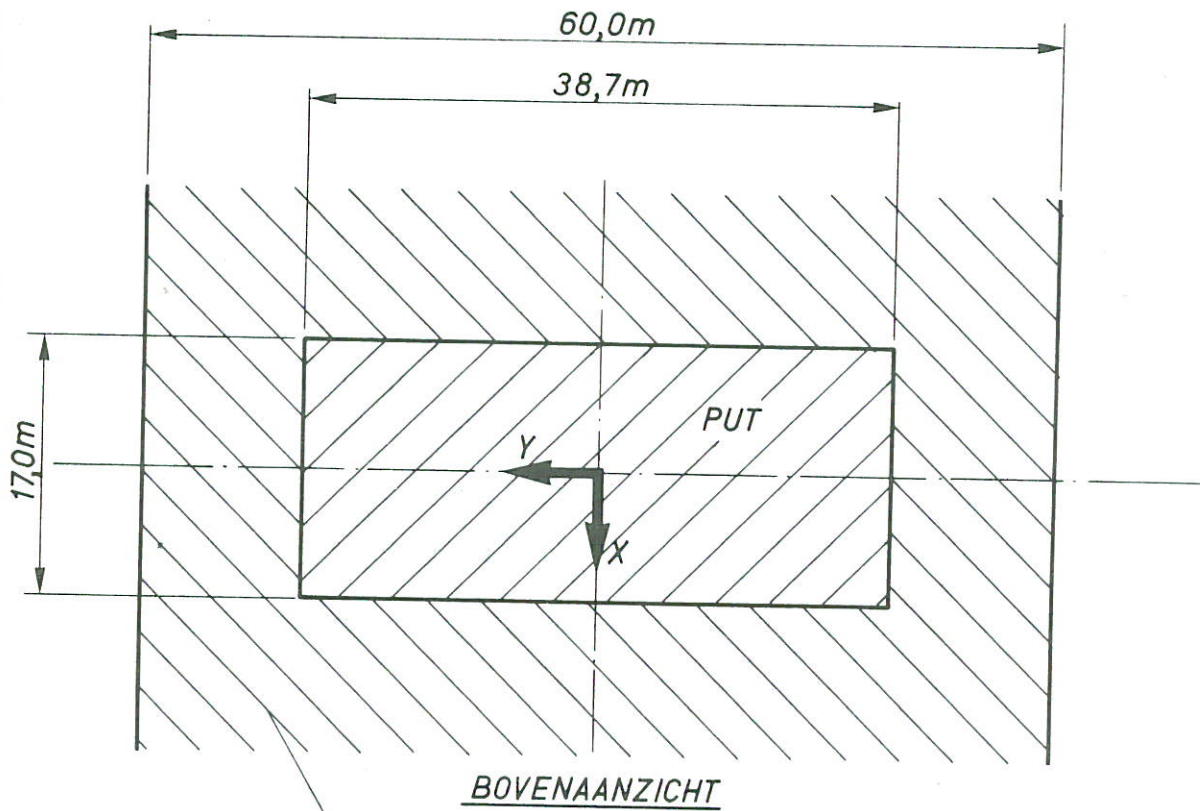
h_L = afstand van ondoordringbare laag tot zeebodem

AP = hart-op-hart afstand der putten.

$G_1(\xi; P)$ is het singuliere deel van de invloedsfunctie G . Namelijk voor $\xi = P$ is $R_0 = 0$.

G_2 simuleert het symmetrievlak S_1 en de ondoordringbare laag in de bodem. De term G_3 moet aan G worden toegevoegd indien behalve het symmetrievlak S_1 ook het symmetrievlak S_2 door middel van G wordt gesimuleerd, zodat deze vlakken niet met bronnen belegd behoeven te worden. Wanneer alleen het vlak S_1 door middel van G wordt gesimuleerd, vervalt G_3 , maar moet vlak S_2 wel met bronnen belegd worden.

Om numeriek te kunnen rekenen moet de bovengrens van de sommaties in G_3 vervangen worden door een eindig getal, NP. NP is dan het aantal punten zowel links als rechts van de put waarop de drukken worden berekend. Dit heeft tot gevolg dat ten opzichte van vlak S_1 het geheel symmetrisch blijft, maar dat aan één zijde van het vlak S_2 één put meer wordt gesimuleerd dan aan de andere zijde. Aangezien deze extra put op afstand $NP \neq AP$ ligt en zijn invloed van orde één gedeeld door deze afstand is, neemt zijn invloed dus af, en de mate van symmetrie ten opzichte van S_2 dus toe, naarmate NP groter wordt gekozen.



DEFINITIEVE SCHETS COORDINATEN SYSTEEM X,Y,Z

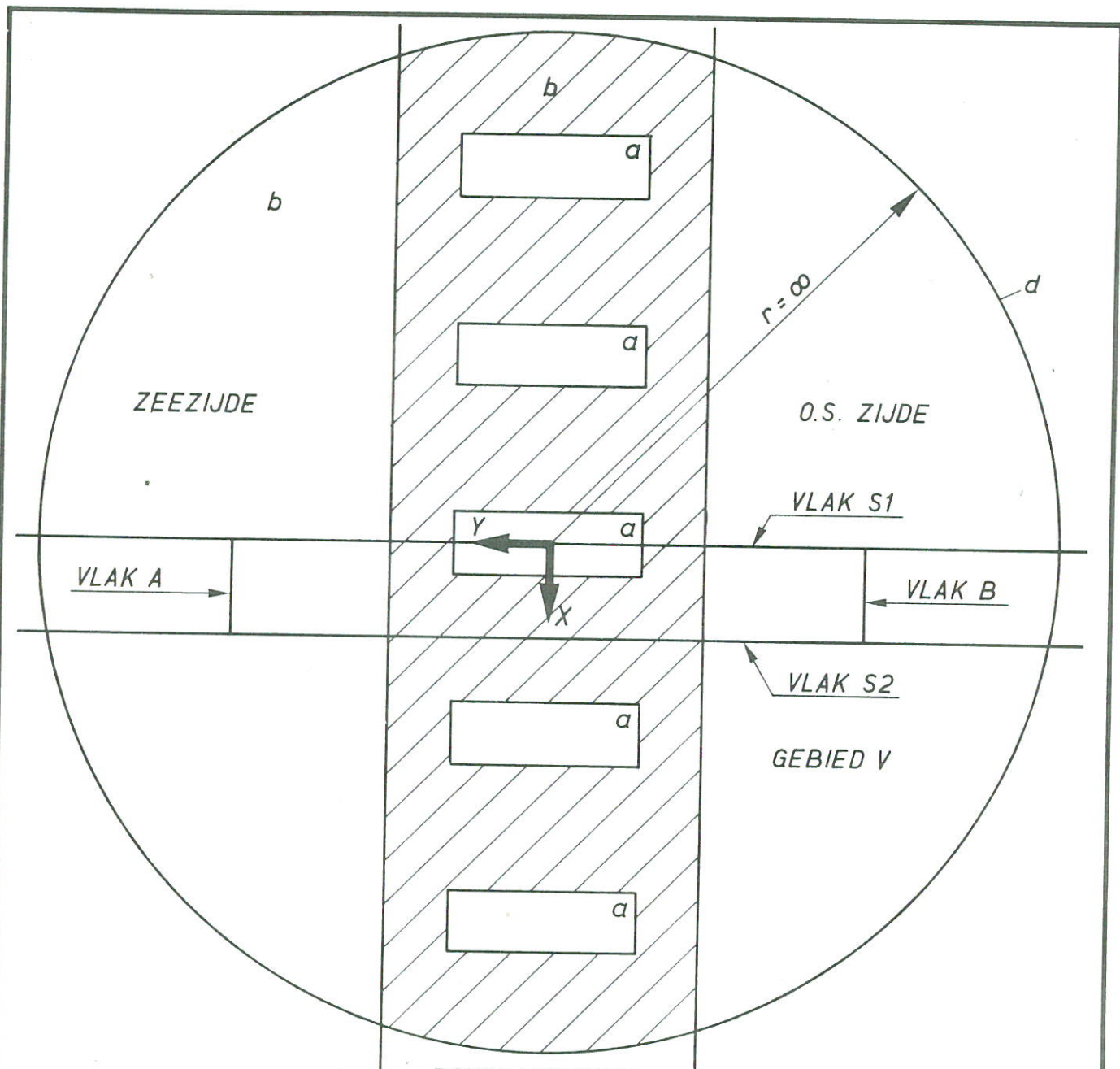
SCHAAL 1 : 500

A4

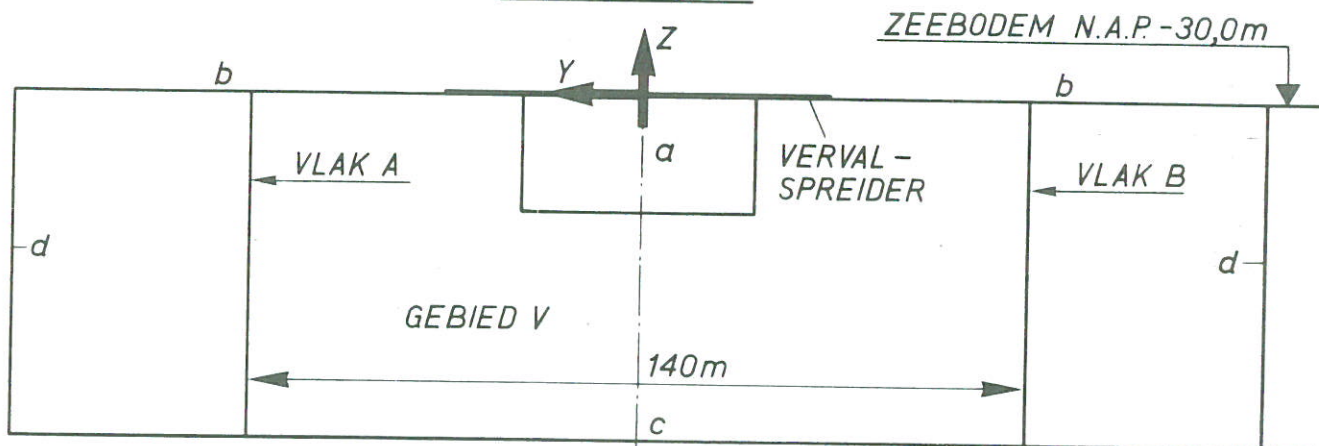
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

W. 316 - 1001

FIG. 1



BOVENAANZICHT



VOORAANZICHT

ONDOORDRINGBARE
LAAG N.A.P. - 100,0m

GEBIED V : VERKLARING LETTERS - ZIE TEKST

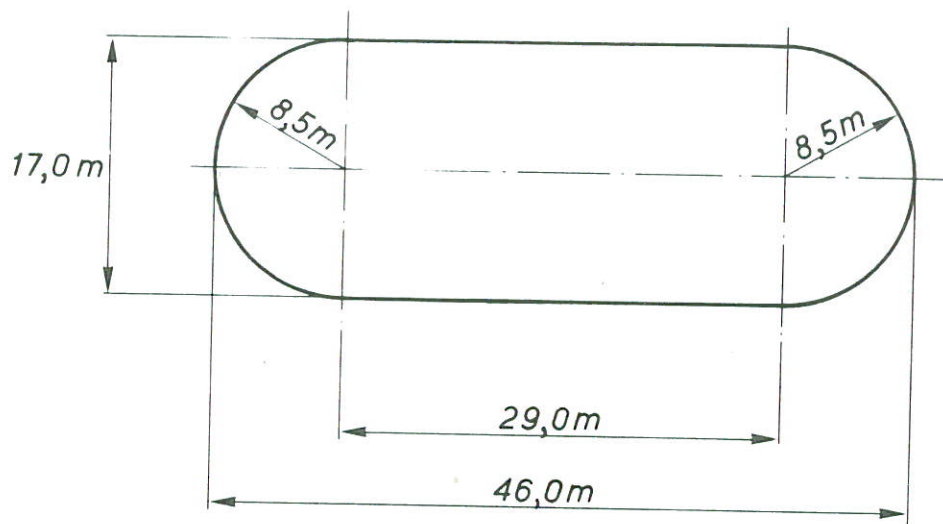
NIET OP SCHAAL

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

W. 316 - 1002

FIG. 2



ONDERKANT VAN DE NIET GESCHEMATISEERDE PUT

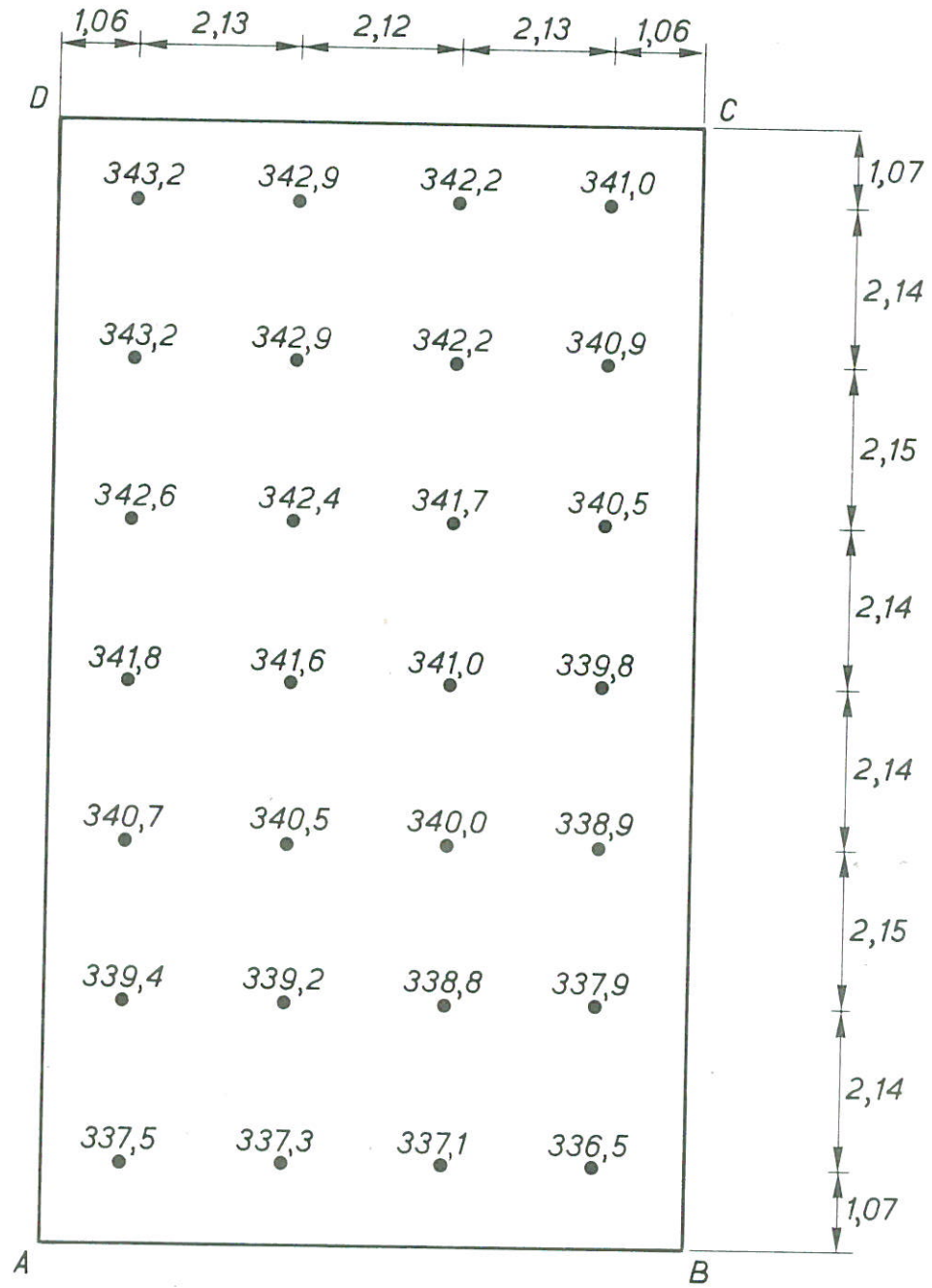
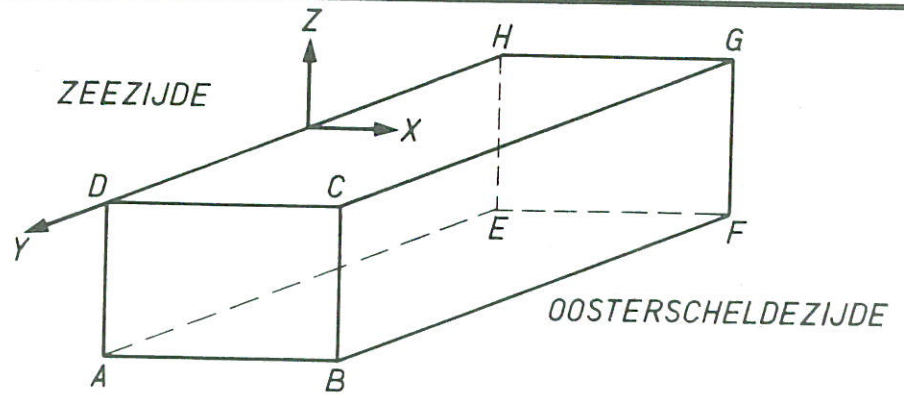
SCHAAL 1 : 500

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

W. 316 - 1003

FIG. 3



DRUK p^* t.o.v. HYDROSTATISCHE DRUK (kN/m^2)

DRUKVERDELING p^* OP HALVE PUT
NP = 10

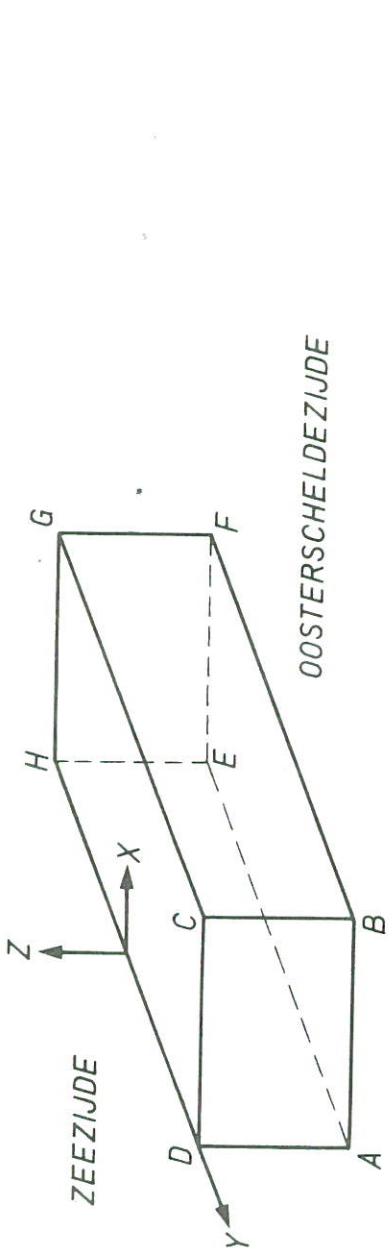
MATEN IN m

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

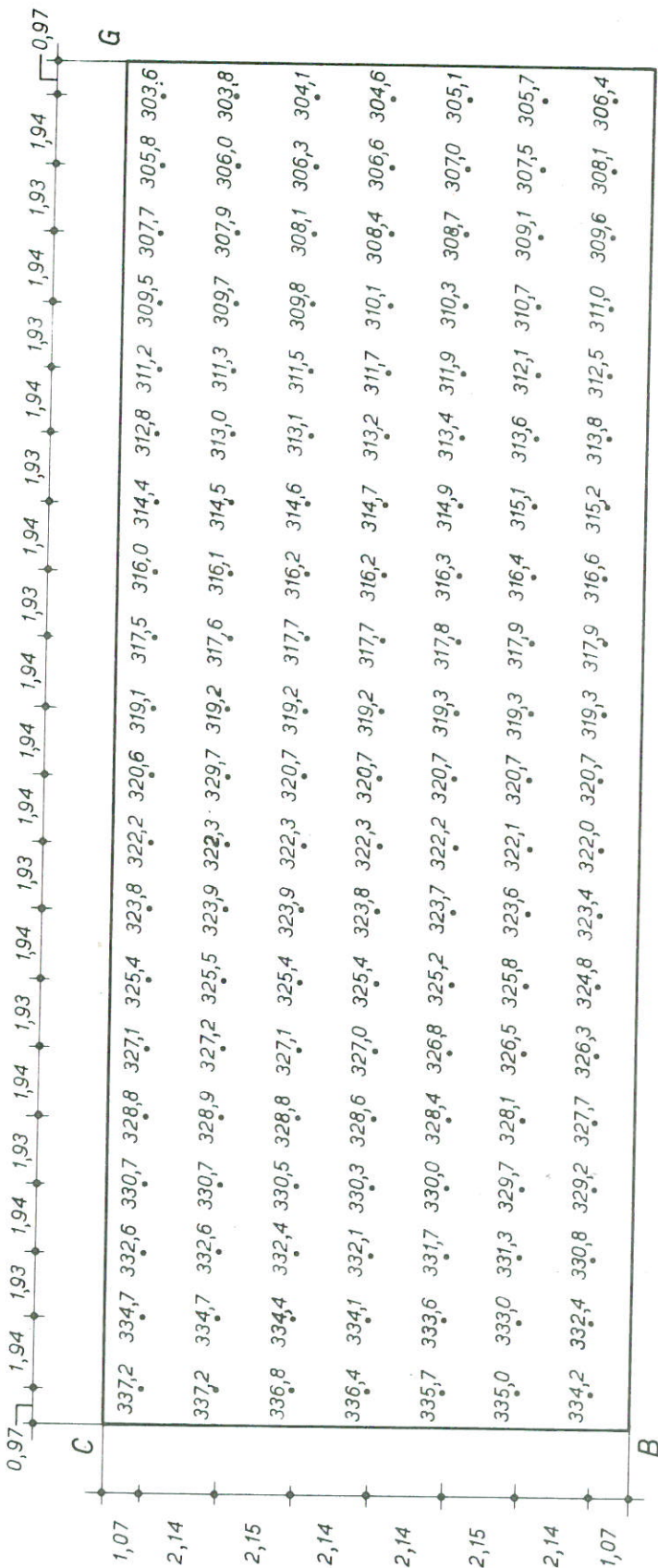
W.316 - 1004

FIG. 4



OOSTERSCHELDEZIJDE

ZEEZIJDE



DRUK p^* t.o.v. HYDROSTATISCHE DRUK (kN/m^2)

DRUKVERDELING p OP HALVE PUT
NP = 10

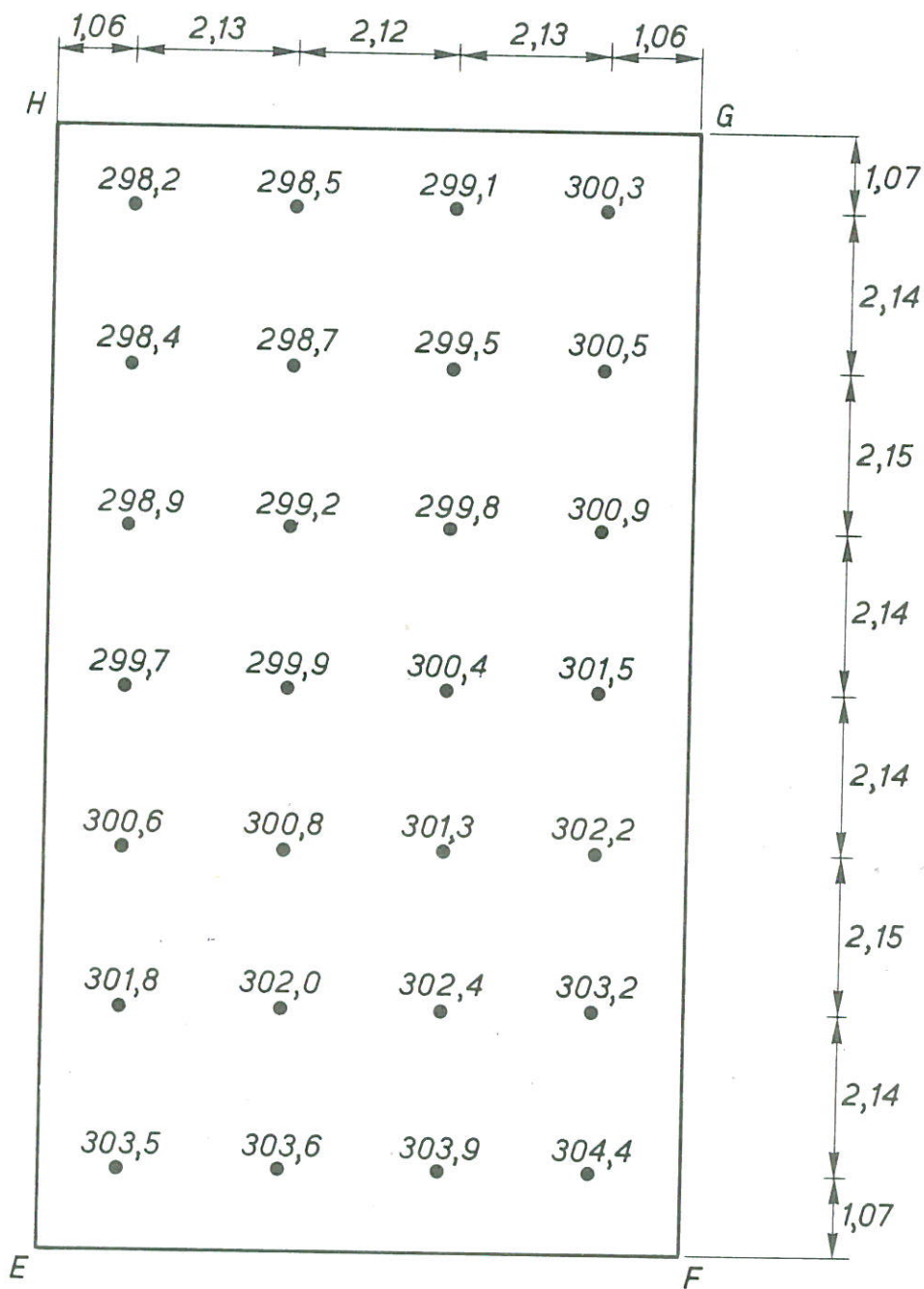
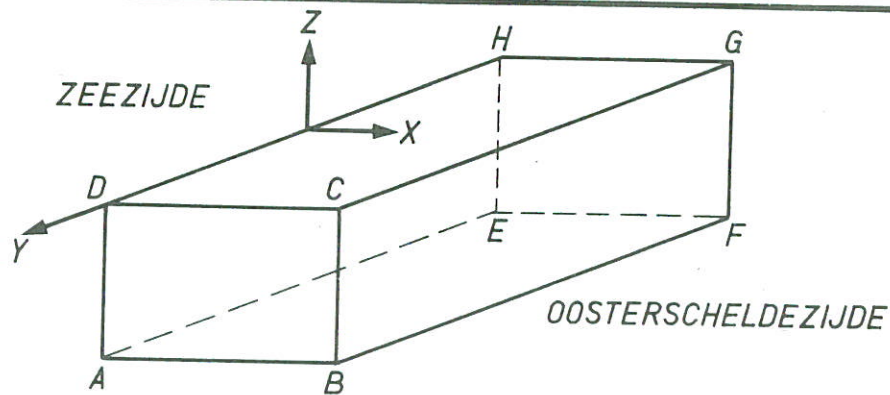
MATEN IN m

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

W. 316 - 1005

FIG. 5



DRUK p^* t.o.v. HYDROSTATISCHE DRUK (kN/m^2)

DRUKVERDELING p^* OP HALVE PUT
NP = 10

MATEN IN m

A4

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

W.316 - 1006

FIG. 6

p.o. box 177

delft

the netherlands