BSc scriptie TECHNISCHE WISKUNDE

Ultrafilters en Ultramachten

Dayo de Groot

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K. P. Hart

Overige commissieleden

Dr. E. Coplakova

Augustus, 2022 Delft

Inhoudsopgave

1 Samenvatting

In deze scriptie gaan we twee wiskundige objecten onderzoeken, het ultrafilter en de ultramacht. Zodra je in de wiskunde een nieuw object hebt bedacht zijn de eerste twee vragen die je stelt altijd 1) bestaat het? en 2) Als het bestaat, is het dan uniek, of zijn er meerdere? Nou is dat voor een ultrafilter relatief makkelijk te beantwoorden. In hoofdstuk 1 zijn we bezig om allerlei nuttige eigenschappen van het ultrafilter te onderzoeken. Voor een ultramacht echter is het wel duidelijk dat die bestaat, maar het kost nog veel werk om uit te vinden of er meerdere zijn. Bij dat antwoord speelt de Continuümhypothese een belangrijke rol. In de wiskunde is het duidelijk dat de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ en de reële getallen $\mathbb{R}$ verschillende soorten oneindig zijn. De Continuumhypothese stelt dat er geen enkele andere soort oneindigheid tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ ligt. Het blijkt dat het antwoord op de vraag "Zijn er twee verschillende ultramachten?" precies samenhangt met of de Continuümhypothese waar is. Om tot dit antwoord te komen gaan we een eigenschap van ultramachten onderzoeken genaamd "gaten". We kunnen dan bij verwerping van de Continuümhypothese twee ultramachten aanwijzen die verschillende gaten hebben en dus verschillend zijn.

2 Voorkennis en context

2.1 Veronderstelde voorkennis

Deze scriptie is geschreven voor lezers die het boek "Analysis. With an introduction to proof." geschreven door Lay, Steven R. als voorkennis hebben. Dit boek staat centraal bij het vak Wiskundige Structuren in jaar 1 van de wiskunde opleiding. Belangrijke onderdelen uit dat boek zijn;

- Bijecties
- Inductie
- Equivalentierelaties
- Aftelbaar- en overaftelbaar oneindig
- Welordening
- Compactheid

Verder nemen we wat onderdelen uit de Algebra, het idee van een product en equivalentieklassen. Ook gebruiken we de Stone-Čech compactificatie. We gaan niet al te diep in op de onderwerpen in dit hoofdstuk, want die onderwerpen op zich zijn al genoeg om een boek over te schrijven. Het doel is om in dit hoofdstuk de gereedschappen te bespreken die we later gaan gebruiken om de waarde van de ultrafilters en de stellingen eromheen uit te drukken en context te geven.

2.2 Verzamelingenleer 1: Kardinaliteit en ordinalen

Een belangrijk onderdeel van de verzamelingenleer, waar wij ons ook in deze scriptie mee bezig gaan houden is het vergelijken van het formaat van verzamelingen. Wanneer zijn twee verzamelingen even groot en wanneer is er een groter? Om twee verzamelingen te vergelijken gaan we eerst kijken naar functies die de ene verzameling op de andere afbeelden. Als we dat hebben neergezet kunnen we daarna aan elke groep verzamelingen die even groot is een quantificatie geven, het "kardinaalgetal".

Definitie 2.1. *We noemen twee verzamelingen N en M equivalent als er een bijectieve afbeelding $f : M \to N$ bestaat. We noteren $N \sim M$*

Dit is opzich een logische definitie. Als we elk element uit de ene verzameling kunnen verbinden aan precies één element uit de andere verzameling, dan moeten ze wel evenveel elementen hebben. Met dezelfde redenatie, als we elk element van verzameling N aan een element van M toekennen, maar er zijn misschien nog elementen over in M, dan vertelt de intuïtie dat M tenminste zo groot is als N. Daarom definiëren we een ordening op de kardinalen met de volgende definitie:

Definitie 2.2. $|M| \leq |N|$ *als er een injectieve afbeelding van* M *naar* N *bestaat*

Het omgekeerde valt hieruit ook af te leiden

Stelling 2.3. $|M| \geq |N|$ *dan en slechts dan als er een surjectieve afbeelding* $g : M \to N$ *bestaat*

Bewijs: Als $|M| \geq |N|$ dan is er een injectieve afbeelding $f : N \to M$. Kies een $z \in M$. We definiëren een nieuwe functie g gebaseerd op het inverse beeld van f.

$$g(x) = y \text{ als er een } y \text{ is zodat } f(y) = x$$
$$g(x) = z \text{ als er geen } y \text{ bestaat zodat } f(y) = x$$

Omdat f injectief is weten we dat N het domein van g is. Dus $g : M \to N$ is een surjectieve afbeelding. Andersom, neem aan dat $g : M \to N$ een surjectieve afbeelding is. Voor elk element $y \in N$ is er een verzameling $\{x \in M : g(x) = y\}$. Dankzij het Keuzeaxioma (dit gaan we later uitleggen) kunnen we hier een element z uit kiezen. We definiëren $f(y) = z$ zoals hiervoor gekozen. Omdat g een correct gedefinieerde functie is, weten we dat geen enkele z twee keer voor kan komen, dus f is injectief, dus $|M| \geq |N|$.

Ordinalen en Kardinalen

Er zijn twee manieren om het formaat van verzamelingen te quantificeren. Bij ordinalen gaan we elke verzameling representeren met een welgeordende verzameling met hetzelfde aantal elementen, de ordinaalgetallen genaamd. Deze welgeordende verzamelingen hebben fijne eigenschappen waardoor er makkelijk mee te werken is. De ordinaalgetallen zijn gedefinieerd als recursieve transitieve verzamelingen, het zijn verzamelingen die elk getal bevatten dat er voor komt. Het getal 0 heeft geen natuurlijke getallen die er voor komen, dus dat is de lege verzameling. 1 bestaat uit 0, dus $1 = \{\emptyset\}$. $2 = \{1, 0\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$. Zo kunnen we doorgaan en elk getal weergeven als een recursie van de lege verzameling. Om deze reden zijn ordinaalgetallen tegelijkertijd een "getal" en een verzameling. Ordinaalgetallen zijn makkelijk te vergelijken. Voor twee ordinalen a en b zijn $a \in b$, $a \subset b$ en $a < b$ equivalente uitspraken. Het **kardinaalgetal** van een verzameling A is de kleinste ordinaal die een bijectie heeft met A. Kardinalen geven dus echt verschillende "soorten" oneindigheid aan. Later gaan we ontdekken dat kardinaalgetallen ook limiet ordinalen zijn. Zolang A eindig is zijn de ordinaal en kardinaal van A gelijk, namelijk precies dat natuurlijke getal gelijk aan het aantal elementen van A. Voor oneindige verzamelingen, als we een nieuw element aan A toevoegen, dan heeft de nieuwe verzameling nog steeds hetzelfde kardinaal getal, maar een ander ordinaal getal.

Voorbeelden

In het boek van Lay [10] is van een aantal verzamelingen laten zien dat ze equivalent zijn:

- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$
- $[0,1] \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ is niet equivalent aan $\mathbb{N}$

Dit geeft ons de intuïtie dat dit twee belangrijke verschillende soorten oneindigheid zijn. Die kardinaalgetallen hebben een speciale naam en notatie gekregen.
$|\mathbb{N}| = \omega$, dit noemen we ook wel aftelbaar oneindig
$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, dit noemen we ook wel overaftelbaar oneindig

De kleinste ordinaal die alle eindige ordinalen bevat is de verzameling van de natuurlijke getallen. Daarom kunnen we zelfs zeggen $\omega = \mathbb{N}$. Nu we weten wat ω is, kunnen we nog een notatie introduceren. $[A]^{<\omega}$ is de verzameling van eindige deelverzamelingen van A. De reden dat $\mathbb{R}$ met een $\mathfrak{c}$ wordt weergeven is omdat dat staat voor het continuüm. Denk daarbij aan de continue getallenlijn waar continue functies op gedefinieerd kunnen worden.

Nu we manieren hebben gevonden om het formaat van verzamelingen te noteren is het tijd om dieper te duiken in wat we met een kardinaalgetal kunnen.

Kardinaal rekenen

Het vergelijken en vermenigvuldigen van kardinaalgetallen is een technisch proces dat te lezen is in [12]. We zetten hieronder een aantal resultaten uit dat boek op een rij om een gevoel te krijgen voor kardinaalgetallen. Neem willekeurige oneindige verzamelingen A en B met kardinaliteit a en b respectievelijk. Neem een eindige verzameling N met kardinaliteit $n \geq 2$.

- $n^\omega = 2^\omega$
- $n \cdot \omega = \omega^n = \omega$

sterker nog

- $n \cdot a = a^n = a$
- als $a \geq b$ dan $a \cdot b = a$
- $n^a = 2^a$
- maar niet $a^a = a$
- $|A| < |\mathscr{P}(A)|$

Dit laatste resultaat is ook beschreven in [10]. We kunnen zelfs preciezer zeggen hoeveel elementen $\mathscr{P}(A)$ bevat. Om intuïtie te creëren, laten we alle mogelijke deelverzamelingen van A tellen. Voor elk element van A hebben we de keuze om die wel of niet in een deelverzameling te stoppen. Zodoende hebben we $2^{|A|}$ mogelijke permutaties en deelverzamelingen. En jawel, dit is ook waar Sierpiński op uit komt: $|\mathscr{P}(A)| = 2^a$.
Het wordt in het boek ook duidelijk dat voor elke kardinaal κ, 2^κ een andere kardinaal is, dus een wezenlijk verschillende soort oneindigheid.

Cartesisch product van verzamelingen

Het Cartesisch product, ofwel het combinatorisch product van twee verzamelingen A en B is de verzameling van geordende paren (x, y) met $x \in A$ en $y \in B$, genoteerd met $A \times B$. We kunnen vervolgens ook de verzameling A meerdere keren achter elkaar in dit product zetten, waardoor de geordende paren ook langer worden. Het product A^B is dus wanneer we B keer A in dit product zetten. De elementen van dit product zijn dan geordende paren van B elementen lang en elk element is een element van A. Dit kunnen we ook interpreteren als een functie voorschrift dat voor elk element van B vertelt op welk element van A het wordt afgebeeld. A^B bestaat dus uit de afbeeldingen van B naar A. Uit deze nieuwe definitie is het ook meteen duidelijk wat de kardinaliteit daarvan is. $|A^B| = |A|^{|B|} = a^b$ Als we een reeks verschillende verzamelingen $(A_i : i \leq b)$ voor een ordinaal κ achter elkaar in het carthesisch product zetten, kunnen we dat niet zo makkelijk noteren met een machtsverheffing. In dat geval schrijven we $\prod_{i<\kappa} A_i$.

Transfiniete inductie

De bewijstechniek inductie gebruikt het feit dat we een stelling voor één getal kunnen bewijzen en zorgt ervoor dat we vervolgens voor elk groter natuurlijk getal ook weten dat de stelling waar is. Dat beperkt zich dus tot de natuurlijke getallen. Maar wat als we willen weten of iets nog klopt wanneer we een oneindig grote verzameling hebben? Daarvoor is transfiniete inductie bedacht. Het grootste verschil met inductie is het gebruik van limiet ordinalen.

Definitie 2.4 (Limiet ordinalen)**.** *Een ordinaal λ is een limiet ordinaal als voor elke ordinaal $a < \lambda$ er een ordinaal b bestaat zodat $a < b < \lambda$*

ω en $\mathfrak{c}$ zijn voorbeelden van limiet ordinalen. Immers, $\mathbb{N}$ is de verzameling die alle natuurlijke getallen bevat en heeft dus de structuur van een ordinaal. Hiermee is het ook meteen de kleinste limiet ordinaal. Alle limiet ordinalen daarna kunnen worden genummerd met ω_i. $\omega_0 = \omega$, dus als we het bijvoorbeeld over het derde limiet ordinaal hebben dan is dat ω_2. Als we voor een willekeurige limietordinaal κ op zoek zijn naar de eerstvolgende limiet ordinaal, dus de kleinste die groter is dan κ, noteren we dat met κ^+.

Nu we weten wat limiet ordinalen zijn kunnen we transfiniete inductie formuleren.

Stelling 2.5 (Transfiniete inductie)**.** *Neem een eigenschap $P(a)$ die gedefinieerd is voor alle ordinalen a. Voor transfiniete inductie zijn 3 voorwaarden:*

- *$P(b)$ is waar voor een begin geval b.*
- *Uit $P(a)$ volgt dat $P(a + 1)$ ook waar is.*
- *Voor elke limiet ordinaal λ geldt dat $P(\lambda)$ volgt uit $\{P(a)$ voor alle $a < \lambda\}$*

Als aan deze 3 voorwaarden voldaan wordt weten we dat $P(a)$ waar is voor alle ordinalen groter dan of gelijk aan b.

Inductie wordt gebruikt om voor elke stap een uitspraak te bewijzen. Er wordt ook regelmatig een soortgelijke constructie gebruikt om een enkel wiskundig object te construeren na een transfiniet aantal stappen κ. In dat geval noemen we het **transfiniete recursie**.

2.3 Verzamelingenleer 2: Axioma's

In deze scriptie gaan we onderzoeken hoe veel we kunnen zeggen over ultrafilters en ultramachten wanneer we de Continuümhypothese niet gebruiken en uiteindelijk wat er gebeurt als we die juist aannemen of verwerpen. Daarvoor moeten we eerst snappen wat de Continuümhypothese überhaupt is. Dat gaan we in dit (sub)hoofdstuk doen.

De verzamelingenleer gebruikt axioma's als grondslag om vanuit daar elk ander onderdeel van de verzamelingenleer te bewijzen. Elk van deze axioma's is nodig. Je kan geen enkel van deze axioma's bewijzen met behulp van de andere axioma's. De meest geaccepteerde en gebruikte set aan axioma's zijn acht axioma's die door de wiskundigen Frankel en Zermelo zijn bedacht, afgekort naar ZF. Later bleek er nog een ander axioma te zijn dat nuttige resultaten opleverde: het Keuzeaxioma. Onder de verwerping van dit axioma echter werden soms ook nuttige resultaten gevonden. Omdat beide opties relevant zijn, moet er in de verzamelingenleer steeds de keuze worden gemaakt of we dit negende axioma aannemen, hoewel die bijna altijd wel wordt aangenomen. De negen axioma's samen worden vaak met ZFC aangeduid. In deze gehele scriptie nemen we ZFC aan.

We kunnen 3 termen definiëren om aan te geven in hoeverre een uitspraak afhankelijk is van een set andere uitspraken zoals de axioma's.

- Een uitspraak is **consistent met** een theorie als die geen tegenspraken in de theorie veroorzaakt. Het Keuzeaxioma is consistent met ZF.
- Een uitspraak is **onafhankelijk van** een theorie als je met die theorie niet kan bewijzen of de uitspraak waar is of niet.
- Het Keuzeaxioma is **equivalent aan** Zorn's lemma en de Welordeningstelling. Dat betekent dat die stellingen waar zijn dan en slechts dan als het Keuzeaxioma waar is.

In die zin zou het Keuzeaxioma dus vervangen kunnen worden door een van de andere twee uitspraken als aanname te nemen. We gaan hier eerst een voorbeeld geven van een van die equivalente uitspraken; Zorn's lemma. Die komt later in andere bewijzen in deze scriptie nog een keer terug.

Lemma 2.6 (Zorns lemma)**.** *Als elke keten C van een (deels)geordende verzameling P een bovengrens heeft (dat wil zeggen C is een totaal geordende deelverzameling), dan heeft P een maximaal element.*

Met deze informatie kunnen we de betekenis van de Continuümhypothese begrijpen. De Continuümhypothese is onafhankelijk van en consistent met ZFC. Deze hypothese stelt:

Voor elke oneindige deelverzameling van $\mathbb{R}$ bestaat er tenminste een bijectie naar $\mathbb{N}$ of naar $\mathbb{R}$.

In andere woorden, er is geen kardinaal getal κ zodat $\omega < \kappa < \mathfrak{c}$. De term Continuümhypothese gaan we voortaan afkorten naar CH. Een stelling is "sterker" als je het kan bewijzen zonder de CH te gebruiken, want dat betekent dat die stelling waar is ongeacht of je CH accepteert. Ook in deze scriptie gaan we regelmatig op zoek naar wat we kunnen bepalen zonder aanname van de CH. Het werk van Kunen [4] dat we vanaf 3.2 gaan behandelen draagt hier veel aan bij.

Net zoals voor het Keuzeaxioma heeft CH ook een aantal uitspraken die equivalent zijn. In dit [9] boek zijn er zo veel mogelijk van die equivalente uitspraken aan CH verzameld. Aan het eind van deze scriptie gaan we nog een equivalente uitspraak formuleren.

2.4 De verbonden vakgebieden

We hebben het eerder al gehad over de verzamelingenleer, maar er zijn meer vakgebieden in het spel. We zitten op een raakvlak tussen algebra, modeltheorie en topologie, vanwege de abstracte structuren die worden bekeken. We gaan de kern van deze vakgebieden hier neerzetten en uitleggen waarom we daarmee te maken hebben. Hiervoor verwijzen we naar de definities voor ultrafilter en ultramacht, dus misschien wil je dat lezen voor je hier aan begint.

Model theorie

Je kan ultramachten omschrijven in termen van verzamelingen of in termen van modellen. Dit verschil zorgt voor net weer een andere wiskundige taal. Nou zijn modellen algemener, want een verzameling is ook een model. In deze scriptie zullen we ons toespitsen op de interpretatie van verzamelingen.

Voor meer informatie over het onderwerp, lees [1] of [2]

De voornaamste reden dat we modellen bespreken is voor de volgende eigenschap:

Definitie 2.7 (Verzadiging)**.** *Neem een kardinaal κ en een model M in een eerste-orde taal. M is **κ-verzadigd** als voor alle deelverzamelingen $A \subseteq M$ van kardinaliteit minder dan κ, het model M alle complete types realiseert van A.*

In termen van de verzamelingenleer is er voor elke uitspraak of vergelijking een öplossingsverzameling" $\{x : \phi(x, a_1, \ldots, a_k)\}$ met $a_1, \ldots, a_k \in M$ waarvoor die uitspraken gerealiseerd worden. Een model M moet elke deelverzameling A van kardinaliteit minder dan κ kunnen realiseren. Dus als we een famillie A van minder dan κ veel oplossingsverzamelingen nemen die onderling niet disjunct zijn dan impliceert verzadiging dat $\cap A$ niet-leeg is.

In deze scriptie zullen we vaak κ^+-verzadigd gebruiken om aan te geven dat we alle deelverzamelingen van kardinaliteit κ kunnen realiseren.

Topologie

Definitie 2.8. *Neem een verzameling D. Een topologie $\mathcal{T}$ op D is een verzameling van deelverzamelingen van D met de volgende eigenschappen:*

- $\emptyset, D \in \mathcal{T}$
- *Voor elke $n \in \mathbb{N}$, als $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$ dan ook $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$*
- *Als $O_i \in \mathcal{T}$ voor $i \in I$ dan ook $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$*

De verzamelingen in een topologie worden open verzamelingen genoemd. We gaan in 3.1 de ruimte van bestaande ultrafilters bekijken en daar een topologie op definiëren. Om op die ruimte bewerkingen uit te voeren en argumenten te maken, hebben we namelijk de notie van open verzamelingen nodig.

Voor meer informatie over het onderwerp, lees [13]

3 Ultrafilters

3.1 Wat is een Ultrafilter?

Zoals je straks zal zien, bevatten filters deelverzamelingen van een vaste verzameling. Dit noemen we de domein verzameling. Een willekeurige domein verzameling zullen we steeds met D aangeven. Soms is het domein een gespecificeerde verzameling, zoals ω. Aan het eind van de scriptie zullen we willekeurige kardinalen als domein nemen, wat betekent dat je met een welgeordende verzameling te maken hebt. Deze zullen we dan met α aangeven. Ultrafilters zullen we vaak aangeven met p en q. Dit hoofdstuk is grotendeels gebaseerd op [3]

Definitie 3.1. *Een **filter** $\mathscr{F}$ over een verzameling D is een deelverzameling van de machtsverzameling $\mathscr{P}(D)$ met de volgende eigenschappen:*

1. $D \in \mathscr{F}$ *en* $\emptyset \notin \mathscr{F}$
2. *als* $A, B \in \mathscr{F}$, *dan* $A \cap B \in \mathscr{F}$
3. *als* $A \in \mathscr{F}$ *en* $A \subseteq B \subseteq D$, *dan* $B \in \mathscr{F}$

Een **ultrafilter** p is een maximaal filter. Dat wil zeggen: Er is geen ander filter dat het ultrafilter p volledig bevat.

Definitie 3.2. *Een familie van verzamelingen $\mathscr{F}$ heeft de finite intersection property (FIP) als de doorsnede van een willekeurige eindige deelverzameling van $\mathscr{F}$ niet leeg is.*

Dat betekent, als voor willekeurige $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{F}$ dan geldt dat $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$. Merk op dat elk filter deze eigenschap bezit.

Stelling 3.3. *Voor elke familie p op D zijn equivalent:*

1. *p is een ultrafilter*
2. *p is een filter en voor elke deelverzameling A van D geldt $A \in p$ of $D \backslash A \in p$*
3. *p is een maximale familie met de FIP*

Bewijs:
$1 \Rightarrow 2$. Beschouw twee gevallen. Geval 1: Er is een $B \in p$ zodat $A \cap B = \emptyset$. Dan $B \subseteq D \backslash A$ en omdat p een filter is weten we $D \backslash A \in p$.
Geval 2: Voor elke $B \in p$ geldt $B \cap A \neq \emptyset$. $\{B \cap A : B \in p\}$ is dus een familie niet-lege verzamelingen, die gesloten is onder doorsneden, omdat p ook gesloten is onder doorsneden. We kunnen die vervolgens uitbreiden tot een filter. $\mathscr{F} = \{C \in D : (A \cap B) \subseteq C$ voor een $B \in p\}$. $B \cap A \subseteq A$ en $B \cap A \subseteq B$ dus $A, B \in \mathscr{F}$. Dus ook $p \in \mathscr{F}$. Omdat p een ultrafilter is, moet er wel gelden $p = \mathscr{F}$. Dus $A \in p$.
$2 \Rightarrow 3$. p is een filter, dus we weten dat het de FIP heeft. De vraag is of die maximaal is. Neem een $A \in D$ en $A \notin p$. Dan weten we $D \backslash A \in p$. Omdat

$(A \cap D \backslash A) = \emptyset$, heeft $p \cup \{A\}$ niet de FIP, dus p is maximaal. $3 \Rightarrow 1$. In de volgende stelling 3.4 leren we dat p kan worden uitgebreid tot een ultrafilter. Echter p is al maximaal, dus p is een ultrafilter.

Deze stelling heet niet **de** ultrafilter stelling, maar als het aan mij zou liggen zou dat wel zo zijn. Uitspraak 2 is een erg sterk middel en wordt in bijna elk bewijs voor stellingen over ultrafilters gebruikt. Wat wel de ultrafilter stelling is volgt nu:

Stelling 3.4 (Ultrafilter stelling)**.** *Elk filter op D kan uitgebreid worden tot een ultrafilter op D*

Bewijs: Laat $\mathscr{F}$ een filter op D zijn en $P = \{\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}(D) : \mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ en $\mathscr{G}$ is een filter op $D\}$. Voor een willekeurige keten $C \in P$, is de vereniging $\bigcup C$ een filter, dus is $\bigcup C$ een bovengrens voor C. Dusdanig volgens Zorn's lemma heeft P een maximaal element p. Duidelijk is deze p een ultrafilter.

Dit Ultrafilter p hoeft niet uniek te zijn. Neem bijvoorbeeld de verzameling $\{1,2,3\}$ en het filter $\{\{1,2,3\},\{1,2\}\}$. Deze kan worden uitgebreid door $\{1\}$ of $\{2\}$ toe te voegen, welke wanneer volledig uitgebreid resulteren in verschillende ultrafilters.

Proper en principal filters

Tijd om ons af te vragen: Wat gebeurt er als voorwaarde 1) van een filter niet geldt? Nou is $D \in \mathscr{F}$ een beetje overbodig, want dit resultaat krijgen we direct uit de derde voorwaarde. Immers $D \subseteq D$. Echter als we de lege verzameling toelaten dan hebben we ineens elke subset van D in ons ultrafilter zitten. Oftewel ons filter is dan de powerset van D. Dit noemen we een **improper filter**. Alle andere filters zijn **proper**. Soms hebben we een filter $\mathscr{F}$ waar we een stel verzamelingen G aan toevoegen, waardoor het niet meer een filter is. Door regel 2 en 3 van een filter herhaaldelijk toe te passen kunnen we hier weer een proper of improper filter van maken. Het resulterende filter noteren we met dubbele haken, dus $((\mathscr{F} \cup G))$.
Als we kijken naar de 3e voorwaarde van filters geeft dat als snel een idee hoe we ultrafilters zouden kunnen maken. Neem een element $a \in D$, dan is de familie $\{A \subseteq D : a \in A\}$ een ultrafilter. Dit noemen we **principal ultrafilters**. Deze definitie geeft ook een intuïtie waarom de naam filter gebruikt wordt. Bij principal filters wordt er geselecteerd op een bepaald element en alle verzamelingen die dat element bevatten worden uit de powerset gefilterd. Naast principal ultrafilters zijn er echter nog andere ultrafilters, **non-principal ultrafilters** of vrije ultrafilters genaamd. Daarbinnen valt direct een specifiek soort non-principal ultrafilter te definiëren.

Definitie 3.5. *Een ultrafilter U op D is* ***uniform*** *als voor elke $A \in U$ geldt $|A| = |D|$.*

Voor elke deelverzameling A van D en zijn complement $D \backslash A$ is tenminste een van de twee even groot als D, dus intuïtief zou zo'n ultrafilter best kunnen bestaan. Hieronder, bij 3.6 bewijzen we het bestaan. De verzameling van alle uniforme ultrafilters op een verzameling noteren we met $U(D)$.

Voorbeeld
De verzameling van alle deelverzamelingen van ω met een eindig complement, $\mathfrak{FR}_\omega = \{A \subseteq \omega : |\omega \backslash A| < |\omega|\}$ is het Fréchet filter op ω. Namelijk het complement van $A \cap B$ voor $A, B \in \mathfrak{FR}_\omega$ is de vereniging van twee eindige verzamelingen. Dus dat complement is eindig. Voor $A \subseteq B \subseteq \omega$ en $A \in \mathfrak{FR}_\omega$ weten we ook dat alle B een eindig complement hebben, dus het is een filter. Dit concept kunnen we vervolgens ook uitbreiden tot alle oneindige verzamelingen D, door alle verzamelingen toe te voegen van kardinaliteit kleiner dan $|D|$. Dus $\mathfrak{FR}_D = \{A \subseteq D : |D \backslash A| < |D|\}$. Dit heet ook wel het co-finiete filter, omdat het allemaal co-finiete verzamelingen bevat. Het Fréchet filter gaan we gebruiken voor het volgende bewijs.

Lemma 3.6. *Er bestaan uniforme ultrafilters op elke oneindige verzameling.*

Bewijs: Neem een oneindige verzameling D en neem het Fréchet filter $\mathfrak{FR}_D = \{A \subseteq D : |D \backslash A| < |D|\}$. Dit is een filter. Volgens de ultrafilter stelling bestaat er dan ook een ultrafilter U op D die $\mathfrak{FR}_D$ bevat. Dit uitgebreide ultrafilter U kan geen verzameling met kardinaliteit kleiner dan D bevatten vanwege 3.3, want het complement van die verzamelingen zit al in U. Daarom is U uniform.

Lemma 3.7. *Laat U een ultrafilter zijn op D, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *U is een non-principal filter*
2. *$\bigcap U = \emptyset$*
3. *Voor elke $A \in U$, $|A| \geq \omega$*

Bewijs:
$1 \Rightarrow 2$. Als er een element $a \in \bigcap U$ bestaat, dan is $U \subseteq \{A \subseteq D : a \in A\}$ en omdat U een ultrafilter is, is U daar aan gelijk, dus een principal ultrafilter.
$2 \Rightarrow 3$. Neem aan dat er een $A \in U$ eindig is. Dan kunnen we een element $a \in A$ aanwijzen waarvan $\{a\}$ of zijn complement in het ultrafilter zitten. Dus $\{a\} \cap A$ of $D \backslash \{a\} \cap A$ zit in U. Nu hebben we een kleinere eindige verzameling. Dankzij de FIP kunnen we dit eindig vaak herhalen en uiteindelijk een $a \in A$ aanwijzen zodat $U = \{A \in D : a \in A\}$. De doorsnede hiervan is niet leeg, dus dat is een tegenspraak.
$3 \Rightarrow 1$ Dit is direct duidelijk uit de definitie van principal.

Merk op dat $\bigcap U = \emptyset$ op het eerste gezicht in strijd lijkt met de definitie van een filter. Het verschil hier is dat we een oneindige doorsnede nemen. Dat verschil gaan we in de volgende definitie verder onderzoeken. Het is duidelijk dat uniforme ultrafilters alleen bestaan op oneindige verzamelingen. Hierdoor wordt de theorie voor ultrafilters ook pas echt interessant als we oneindige verzamelingen gaan aanpakken.

Definitie 3.8. *Neem een filter $\mathscr{F}$ op D en een kardinaal κ. $\mathscr{F}$ is* ***κ-volledig*** *als $\bigcap G \in \mathscr{F}$ voor elke $G \subseteq \mathscr{F}$ met $|G| < \kappa$.*

Elk filter is ω-volledig, dat betekent immers gesloten onder eindige doorsnedes; de FIP. De meest relevante compleetheid is ω^+-volledig. Dat noemen we ook wel aftelbaar volledig. Merk op dat onder aanname van CH dit dus $|\mathbb{R}|$-volledig is. Wanneer een filter niet κ-volledig is heet dat κ-onvolledig.

Ultrafilter ruimte

De ruimte βD is de verzameling van alle ultrafilters op D. $\beta_U D$ is de ruimte uniforme ultrafilters. Wanneer D aftelbaar is, is $\beta_U D$ gelijk aan $\beta D - D$ (de ruimte aan non-principal ultrafilters).
We definieren de verzamelingen $\overline{\mathrm{A}} = \{p \in \beta D : A \in p\}$. Dit zijn dus alle ultrafilters die A bevatten. We kunnen nu een topologie $\mathcal{T}$ maken met deze verzamelingen $\overline{\mathrm{A}}$ als basis voor de open verzamelingen. Nu kunnen we ook uitspraken doen over de compactheid van deze ruimte. De verzamelingen $A^* = \{p \in \beta_U D : A \in p\}$ vormen ook een topologie op $\beta_U D$.

3.2 Rudin-Keisler ordening

Ultrafilters vergelijken

De Rudin-Keisler ordening is bedacht om ultrafilters te vergelijken. Die gaan we hier definieren. Als functie $f : I \to J$ dan is f^* of βf de functie van βI naar βJ gedefinieerd door $f^*(U) = (\beta f)(U) = \{Y \in J : f^{-1}(Y) \in U\}$. Oftewel elke deelverzameling van U wordt door f^* op een verzameling Y in J afgebeeld en de verzameling van die Y's is de output van deze functie. Merk op, als ook $g : J \to K$, dan $\beta(g \circ f) = (\beta g) \circ (\beta f) : \beta I \to \beta K$.

Definitie 3.9. *De ordening $\succeq$ op ultrafilters is als volgt gedefinieerd: Als $U \in \beta I$ en $V \in \beta J$, dan $U \succeq V$ dan en slechts dan als er een functie $f : I \to J$ is zodat $f^*(U) = V$.*

Als we vervolgens $U \sim V$ definiëren alss $U \succeq V$ en $V \succeq U$, dan is $\sim$ een equivalentierelatie. Namelijk.

- Voor elke $U \in \beta I$ kunnen we de identiteitsfunctie van βI toepassen die U op zichzelf afbeeldt, dus de relatie is reflexief
- We hebben hierboven al opgemerkt als we twee functies $f : I \to J, g : J \to K$ hebben dat we die kunnen combineren, dus de relatie is transitief
- De relatie is overduidelijk symmetrisch

Stelling 3.10 (De Non-lineariteit van de Rudin-Keisler ordening)**.** *Als D oneindig is, dan zijn er twee uniforme ultrafilters $U, V \in \beta D$ zodat $U \not\succeq V$ en $V \not\succeq U$.*

Omdat er twee ultrafilters niet te vergelijken zijn met de Rudin-Keisler ordening, is deze ordening dus niet een lineaire ordening. Om dit te bewijzen, moeten we op zoek naar een U en V in $\beta_U D$ zodat voor elke functie $f : D \to D$ geldt $V \neq f^*(U)$ en $U \neq f^*(V)$. Dit resultaat was al bekend onder aanname van CH [8], maar Kunen [4] heeft laten zien dat het ook zonder kan. Daarvoor moeten we eerst een boel voorbereidingswerk doen, dus het bewijs van 3.10 laat nog even op zich wachten.

Definitie 3.11 (Onafhankelijkheid)**.** *Neem een filter $\mathscr{F}$ over A. Een familie $\mathscr{X} \subseteq P(A)$ is **onafhankelijk mod** $\mathscr{F}$ alss voor elke n en m, wanneer $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ verschillende elementen van $\mathscr{X}$ zijn, dan $Y_1 \cup \dots \cup Y_n \cup (A \backslash X_1) \cup \dots \cup (A \backslash X_m) \notin \mathscr{F}$.*

Dit kunnen we ook schrijven als $\bigcup_{j \leq n} Y_j \ \cup \ (D \backslash \bigcap_{i \leq m} X_i) \notin \mathscr{F}$. Oftewel er is geen enkele eindige of oneindige vereniging van verzamelingen en complementen te nemen uit $\mathscr{X}$ die in $\mathscr{F}$ zit. Er is ook een equivalente definitie die gebruikt wordt; Een familie $\mathscr{X}$ is onafhankelijk als voor dezelfde onderdelen als hierboven geldt: $X_1 \cap \dots \cap X_n \cap (A \backslash Y_1) \cap \dots \cap (A \backslash Y_m) \cap F \neq \emptyset$ voor alle $F \in \mathscr{F}$.

Voor het bewijs van 3.10 hebben we een onafhankelijke familie nodig die voldoende groot is. Fichtenholz en Kantorovitch [15] hebben eerst bewezen dat dit kon, met stelling 3.14 en Hausdorff [14] heeft daar later een makkelijker bewijs voor gegeven met behulp van de volgende definitie en lemma.

Definitie 3.12. *Neem een familie afbeeldingen $f : A \to B$. Een willekeurige familie E van zulke functies heet* ***wezenlijk verschillend*** *als er voor elke eindige deelverzameling functies $f_1, \ldots, f_k \in E$ een x bestaat, zo dat $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ paarsgewijs verschillend zijn.*

Dat wil zeggen dat er voor een eindig aantal functies altijd een element in A bestaat dat door elke functie op een verschillend element in B wordt afgebeeld.

De twee stellingen hieronder gaan we voor elk willekeurig kardinaalgetal voor maar één verzameling met een hele specifieke structuur bewijzen. Voor elke andere verzameling bestaat er een verzameling van de correcte structuur met dezelfde kardinaliteit. Via de onderling bestaande bijectie kunnen we de families op de nieuwe verzameling afbeelden en zo voor elke willekeurige verzameling een familie vinden die voldoet. Dat maakt ons leven een stuk makkelijker. Mooi meegenomen.

Lemma 3.13 (Hausdorff)**.** *Neem een oneindige verzameling A. Als $|A| = \kappa$ dan is er een familie met 2^κ wezenlijk verschillende functies $f : A \to A$.*

Bewijs: Neem een verzameling K met kardinaliteit κ en laat A de verzameling van eindige deelverzamelingen van K zijn. Dus $A = [K]^{<\omega}$. Dankzij 2.2 weten we dat de kardinaliteit van A gelijk is aan $1 + \kappa + \kappa^2 + \cdots = \omega \cdot \kappa = \kappa$. We definiëren de functie $f_t : A \to A$ met $f_t(x) = x \cap t$. Als t alle 2^κ deelverzamelingen van K doorloopt, zijn deze 2^κ afbeeldingen wezenlijk verschillend. Dat is zo want voor een willekeurige rij $t_1, \ldots, t_k$ kunnen we voor elk paar t_i, t_j een element kiezen uit de verzameling $(t_i \backslash t_j) \cup (t_j \backslash t_i)$. Neem voor x de verzameling van de gekozen elementen, dan zijn de $f_{t_1}(x), \ldots, f_{t_k}(x)$ paarsgewijs verschillend.

Stelling 3.14 (Fichtenholz-Kantorovitch, Hausdorff)**.** *Voor een oneindige verzameling A, als $|A| = \kappa$, dan is er een onafhankelijke familie verzamelingen $\mathscr{X}$ mod $\{A\}$ deelverzameling van $\mathscr{P}(A)$ zodat $|\mathscr{X}| = 2^\kappa$.*

Bewijs: Neem een oneindige verzameling A met kardinaliteit κ. Dankzij vorig lemma 3.13 hebben we een familie afbeeldingen $f_t(x)$ van A naar A met kardinaliteit 2^κ. Neem $B = [A]^{<\omega}$ de eindige deelverzamelingen van A en neem $C = (A, B) = A \times [A]^{<\omega}$ het combinatorische product van A en B. B en C hebben ook kardinaliteit κ. Voor elke t definiëren we een verzameling $Z(t)$ die de paren (x, y) bevat waarvoor geldt $f_t(x) \in y$. Het complement daarvan, $C \backslash Z(t)$ bevat alle overige paren. Nu is de familie $\mathscr{X}$ die de 2^κ verzamelingen $Z(t)$ bevat, onafhankelijk mod C. Dat gaan we laten zien. Neem $t_1, \ldots, t_n$ en $t'_1, \ldots, t'_m$ allemaal verschillend. Omdat deze t's bij een familie wezenlijk verschillende functies horen, weten we dat er een x bestaat zodat de waarden $x_i = f_{t_i}(x)$ en $x'_j = f_{t'_j}(x)$ voor $i = 1, \dots, n$ en $j = 1, \dots, m$ allemaal verschillend zijn. Neem dan $y = \{x_1, \dots, x_n\}$ dan is $f_{t_i}(x) \in y$ en $f_{t'_j}(x) \notin y$, dus $(x, y) \in Z(t_i)$ en $(x, y) \in C \backslash Z(t'_j)$ en dat maakt dat de doorsnede $\bigcap Z(t_i) \bigcap [C \backslash Z(t'_j)]$ niet leeg is, dus deze familie is onafhankelijk mod C.

Voor een familie $\mathscr{X}$ onafhankelijk mod $\{D\}$ kunnen we ook een familie $\mathscr{X}$ onafhankelijk mod $\mathfrak{FR}_D$ vinden: Neem een $g : D \to D$ zodat $|g^{-1}(\{i\})| = \kappa$ voor alle $i \in D$. Neem een onafhankelijke familie $|\mathscr{X}| = 2^\kappa$, dan is $\mathscr{X}' = \{g^{-1}(X) : X \in \mathscr{X}\}$. Functies kunnen elk element maar op één ander element afbeelden, dus elke $g^{-1}(X)$ is uniek, dus we weten $|\mathscr{X}'| = 2^\kappa$. Neem een $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ verschillende verzamelingen van $\mathscr{X}$. Als $x \in \bigcap_{i \leq m} X_i \bigcap D \backslash \bigcup_{j \leq n} Y_j$ dan zit $g^{-1}(x)$ in $\bigcap_{i \leq m} g^{-1}[X_i] \bigcap D \backslash \bigcup_{j \leq n} g^{-1}[Y_j]$. Het complement hiervan zit niet in $\mathfrak{FR}_D$ want $g^{-1}(x)$ snijdt elke verzameling in het Fréchet filter. Dus $\mathscr{X}'$ is onafhankelijk mod $\mathfrak{FR}_D$.
We zijn nu klaar voor de laatste stap in het voorwerk voor we 3.10 kunnen gaan bewijzen. We gaan dit uiteindelijk met behulp van transfiniete recursie bewijzen en in het volgende lemma komt de recursiestap die we gaan zetten al enigszins in beeld.

Lemma 3.15. *Neem twee filters H en K over een oneindige verzameling D. Neem een oneindige familie verzamelingen J die onafhankelijk is mod H en mod K. Neem $f : D \to D$. Dan zijn er filters $H' \supseteq H$ en $K' \supseteq K$ en een familie $J' \subseteq J$, zodat J' onafhankelijk is mod H' en mod K' en $J' \backslash J$ is eindig en er is een verzameling $B \in H'$, zodat $(D \backslash f^{-1}(B)) \in K'$.*

Bewijs: Neem een vaste verzameling $A \in J$.
Geval 1: $J \backslash \{A\}$ is onafhankelijk mod $((K \cup \{D \backslash f^{-1}(A)\}))$.
Neem $J' = J \backslash \{A\}$, $K' = ((K \cup \{D \backslash f^{-1}(A)\}))$, $H' = ((H \cup \{A\}))$ en $B = A$. Deze voldoen aan de eisen.
Geval 2: $J \backslash \{A\}$ is niet onafhankelijk mod $((K \cup \{D \backslash f^{-1}(A)\}))$
Er zijn dus verschillende $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m \in J \backslash \{A\}$ en een $k \in K$ zodat $(D \backslash X_1) \cup \dots \cup (D \backslash X_n) \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ bevat $(k \cap (D \backslash f^{-1}(A)))$. We hebben nu k opgedeeld in twee delen: $k \cap (D \backslash f^{-1}(A))$ en $k \cap f^{-1}(A)$. Als we kijken naar het complement van de reeks $D \backslash ((D \backslash X_1) \cup \dots \cup (D \backslash X_n) \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_m) = X_1 \cap \dots \cap X_n \cap (D \backslash Y_1) \cap \dots \cap (D \backslash Y_m)$ dan weten we dat dit niks van $k \cap (D \backslash f^{-1}(A))$ bevat, oftewel de doorsnede daarmee is leeg. Dus die reeks doorsneden met k is een deelverzameling van $f^{-1}(A)$. Dus als we nu $K' = ((K \cup \{X_1, \dots, X_n, D \backslash Y_1, \dots, D \backslash Y_m\}))$ nemen, dan $D \backslash f^{-1}(D \backslash A) = f^{-1}(A) \in K'$. Vervolgens kunnen we $H' = ((H \cup \{D \backslash A\}))$, $J' = J \backslash \{A, X_1, \dots, X_n, D \backslash Y_1, \dots, D \backslash Y_m\}$ en $B = D \backslash A$ nemen om te voldoen aan onze voorwaarden.

Dan nu eindelijk het bewijs wat we beloofd hebben.

Stelling 3.16. *De Rudin-Keisler ordening is niet lineair*

Bewijs: Neem een domein verzameling D met kardinaliteit κ. We gaan twee onvergelijkbare ultrafilters maken met behulp van transfiniete recursie. Neem ook een genummerde rij functies $f_\eta(\eta < 2^\kappa)$ waarin alle functies D^D voorkomen.
Recursie stap 0: Neem $\mathscr{F}_0 = \mathscr{G}_0 = \mathfrak{FR}_D$ (het Fréchet filter op D) en een familie $\mathscr{X}_0$ onafhankelijk mod $\mathfrak{FR}_D$ met $|\mathscr{X}_0| = 2^\kappa$.
Recursie stap $\eta + 1$: Gegeven twee filters $\mathscr{F}_\eta, \mathscr{G}_\eta$ en famillie $\mathscr{X}_\eta$ onafhankelijk mod $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$, pas lemma 3.15 toe met $H = \mathscr{F}_\eta, K = \mathscr{G}_\eta, J = \mathscr{X}_\eta$ en $f = f_\eta$. Doe dat vervolgens nog een keer maar verwissel de K en de H, en neem dezelfde functie f_η.
Transfiniete recursie stap η: Als η een limiet ordinaal is, neem dan $\mathscr{F}_\eta = \bigcup\{\mathscr{F}_\zeta : \zeta < \eta\}$, $\mathscr{G}_\eta = \bigcup\{\mathscr{G}_\zeta : \zeta < \eta\}$, $\mathscr{X}_\eta = \bigcap\{\mathscr{X}_\zeta : \zeta < \eta\}$
De familie $\mathscr{X}$ was alleen nodig zodat we op elke stap 3.15 konden toepassen. Voor $\zeta < \eta < 2^\kappa$ kunnen we nu een aantal uitspraken doen:

1. $\mathscr{X}_\zeta \supseteq \mathscr{X}_\eta, \mathscr{F}_\zeta \subseteq \mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\zeta \subseteq \mathscr{G}_\eta$
2. $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ zijn filters over D
3. $\mathscr{X}_\eta \backslash \mathscr{X}_{\eta+1}$ is een eindig verschil dus $|\mathscr{X}_\eta| = 2^\kappa$
4. Voor de functie f_η zijn $\mathscr{F}_{\eta+1}$ en $\mathscr{G}_{\eta+1}$ onvergelijkbaar. Dat wil zeggen $\mathscr{F}_{\eta+1} \not\geq \mathscr{G}_{\eta+1}$ want er is een $X \in \mathscr{F}_{\eta+1}$ zodat $[D\backslash f_\eta^{-1}(X)]$ in $\mathscr{G}_{\eta+1}$ zit. Zo geldt ook $\mathscr{G}_{\eta+1} \not\geq \mathscr{F}_{\eta+1}$.

We weten dat uiteindelijk dankzij deze transfiniete recursie dat de filters $\mathscr{G} = \bigcup\{\mathscr{G}_\eta : \eta < 2^\kappa\}$ en $\mathscr{F} = \bigcup\{\mathscr{F}_\eta : \eta < 2^\kappa\}$ onder elke functie $f \in D^D$ onvergelijkbaar zijn. Die kunnen we vervolgens uitbreiden tot ultrafilters, die nogsteeds onvergelijkbaar zijn onder elke functie.

Vanwege kardinaliteit kunnen we de argumenten uit bovenstaand bewijs vaker herhalen om zo nog meer ultrafilters te vinden die onderling onvergelijkbaar zijn. Sterker nog, het blijkt dat je er 2^κ veel kan vinden die paarsgewijs onvergelijkbaar zijn [4].

3.3 Goede ultrafilters

In dit stuk gaan we op zoek naar een ultrafilter met een nuttige eigenschap, een "goed" ultrafilter. Daarvoor gebruiken we een erg vergelijkbare bewijs structuur als het stuk hiervoor. Maar voor we daar aan kunnen beginnen moeten we een boel definities introduceren om vast te stellen wat we nou bedoelen met een "goed ultrafilter".
Herinner; $[D]^{<\omega}$ zijn de eindige deelverzamelingen van D

Definitie 3.17. *Een functie $f : [D]^{<\omega} \to \mathscr{P}(D)$ is **monotoon** alss voor $x \subseteq y \in [D]^{<\omega}$ geldt $f(y) \subseteq f(x)$.*

Definitie 3.18. *Een functie $f : [D]^{<\omega} \to \mathscr{P}(D)$ is **multiplicatief** alss voor $x, y \in [D]^{<\omega}$ geldt $f(x \cup y) = f(x) \cap f(y)$.*

Definitie 3.19. *Voor twee functies f en $g : [D]^{<\omega} \to \mathscr{P}(D)$ zeggen we $f \leq g$ wanneer voor alle $x \in [D]^{<\omega}$ geldt $f(x) \subseteq g(x)$.*

Merk op dat elke multiplicatieve functie ook monotoon is.

Definitie 3.20. *Een filter p op D met $|D| = \kappa$ is κ^+**-goed** alss wanneer een functie $f : [D]^{<\omega} \to p$ monotoon is, dan is er een multiplicatieve $g : [D]^{<\omega} \to p$ zodat $g \leq f$.*

Net zoals eerst gaan we een stelling introduceren, waar we een aantal andere lemma's voor nodig hebben om het te bewijzen.

Stelling 3.21. *Als D een oneindige verzameling is, dan bestaat er een goed, ω-onvolledig ultrafilter op D.*

Om dit te bewijzen gaan we eerst een nieuwe variatie op onafhankelijke families introduceren, een familie functies met grote schommeling, oftewel functies met veel verschil in de functiewaardes. Kunnen noemt dit zelf ook een onafhankelijke familie.

Definitie 3.22 (Engelking en Karlowicz)**.** *neem $\mathcal{F} \subseteq \alpha^\alpha$. Dus een verzameling aan functies. Neem p een filter op α. $\mathcal{F}$ heeft **grote schommeling** mod p als voor willekeurige eindige deelverzameling $\{f_1, \ldots, f_n\}$ van $\mathcal{F}$ en $(y_1, \ldots, y_n) \in \alpha$ en $A \in p$ een van de twee volgende uitspraken geldt. Dit zijn twee equivalente definities.*

$$\text{De verzameling } A \cap \bigcap \{j : f_1(j) = y_1 \& \ldots \& f_n(j) = y_n\} \text{ is niet leeg.} \tag{1}$$

$$\alpha \backslash \{j : f_1(j) = y_1 \& \ldots \& f_n(j) = y_n\} \text{ is niet een element van } p. \tag{2}$$

Net als bij onafhankelijke famillies gaan we nu op zoek naar een familie van grote schommeling mod $\mathfrak{F}\mathfrak{R}_\alpha$.

Lemma 3.23. *Neem een domeinverzameling α. Als een familie $\mathcal{F}$ verzamelingen van grote schommeling mod α is, dan is $\mathcal{F}$ ook van grote schommeling mod $\mathfrak{F}\mathfrak{R}_\alpha$, het Fréchet filter.*

Bewijs: Als $\mathcal{F}$ van grote schommeling mod α dan kunnen we rijen functies $(f_1, \ldots, f_k)$ en waarden $(y_1, \ldots, y_k)$ kiezen en noem de verzameling $A = \{x : f_1(x) = y_1, \ldots, f_k(x) = y_k\}$. Neem een extra functie g uit de familie $\mathcal{F}$ en neem $C_j = \{x : x \in A \text{ en } g(x) = j\}$, voor elke $j \in \alpha$. De C_j's zijn niet leeg en onderling disjunct, dus A heeft kardinaliteit α. Dat betekent dat het complement $\alpha \backslash B$ niet een deelverzameling is van $\mathfrak{F}\mathfrak{R}_\alpha$, dus is $\mathcal{F}$ van grote schommeling mod $\mathfrak{F}\mathfrak{R}_\alpha$.

De volgende stap is natuurlijk een onafhankelijke familie vinden die voldoende groot is.

Stelling 3.24 (Engelking en Karlowicz)**.** *Als $|D| = \kappa$ oneindig is, dan is er een familie $\mathcal{F} \subseteq D^D$ van grote schommeling mod $\{D\}$ zodat $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$.*

Bewijs: Neem de geordende paren $\{(s,r) : s \in [D]^{<\omega}$ en $r \in D^{P(s)}\}$. s zijn eindige deelverzamelingen van D en r zijn functies die de machtsverzameling van s afbeelden op D. Laat de rij $((s_i, r_i) : i \in D)$ al deze paren af tellen. Neem $\mathcal{F} = \{f_A : A \subseteq D\}$, waar $f_A(i) = r_i(A \cap s_i)$. De $\mathcal{F}$ is van kardinaliteit 2^κ, want voor elke deelverzameling van D is er een functie f_A en $|\mathscr{P}(D)| = 2^\kappa$. Neem een willekeurige rij functies $(f_{A_1}, \dots, f_{A_n})$ uit $\mathcal{F}$ en waarden $(y_1, \dots, y_n)$. Voor elk paar verzamelingen A_i, A_j met $1 \leq i < j \leq n$, kies een element $x \in (A_i \cup A_j) \backslash (A_i \cap A_j)$. Neem voor s de eindige verzameling van die gekozen punten x, dan zijn de doorsnedes $s \cap A_i$ allemaal verschillend voor $1 \leq i \leq n$. In de reeks geordende paren (s_j, r_j) is er dan ook een index j waarvoor r_j al die doorsnedes op de juiste elementen afbeeldt. Dus is de verzameling $\{j : f_1(j) = y_1, \dots, f_n(j) = y_n\}$ nooit leeg.

Als laatste stap hebben we nog twee lemma's nodig om 3.21 te bewijzen.

Lemma 3.25. *Als $\mathcal{F}$ van grote schommeling mod $\mathscr{F}$ is en $A \subseteq D$, dan zijn er $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ en $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ zodat $\mathcal{F}'$ van grote schommeling mod $\mathscr{F}$' is, $\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}'$ eindig en ofwel A of $D \backslash A \in \mathscr{F}'$.*

Bewijs: In het geval dat $\mathcal{F}$ van grote schommeling mod $((\mathscr{F} \cup \{A\}))$, neem $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ en $F' = ((F \cup \{A\})))$. Als dat niet het geval is, dan kunnen we $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ en $(i_1, \dots, i_n) \in D$ nemen zodat voor $C = \{j : f_1(j) = i_1, \dots, f_n(j) = i_n\}$ geldt; $D \backslash C \in ((F, A))$. Neem $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \backslash \{f_1, \dots, f_n\}$ en $F' = ((F \cup \{C\}))$. We weten dat $A \subseteq D \backslash C$ of $D \backslash C = A \cap B$ voor een $B \in F$, dus $C \subseteq D \backslash A \subseteq D$ en daarom $D \backslash A \in F'$ of $C = D \backslash A \cap B = B \backslash A \in F'$ dus ook $D \backslash A \in F'$. Om te zien dat $\mathcal{F}'$ van grote schommeling mod $\mathscr{F}'$ is, neem $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{F}'$ en waarden $i_1, \dots, i_m \in D$. Neem een $G \in \mathscr{F}'$ dan weten we $G = F \cap C$ of $G = F$ voor een $F \in \mathscr{F}$. Voor $G = F$ is het duidelijk dat die nog steeds van grote schommeling is. Voor $G = F \cap C$ dan $G \cap \{x : g_1(x) = i_1, \dots, g_m(x) = i_m\} = F \cap \{x : f_1(x) = j_1, \dots, f_n(x) = j_n, g_1(x) = i_1, \dots, g_m(x) = i_m\}$ is niet leeg omdat $F \in \mathscr{F}$ en D onafhankelijk van $\mathscr{F}$ is.

Lemma 3.26. *Als $\mathcal{F}$ van grote schommeling mod $\mathscr{F}$ en $p : [D]^{<\omega} \to \mathscr{F}$ is monotoon, dan zijn er $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ en een multiplicatieve $q : [D]^{<\omega} \to \mathscr{F}'$ zodat $\mathcal{F}'$ van grote schommeling mod $\mathscr{F}'$, $\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}'$ is eindig en $q \leq p$.*

Bewijs: Neem een $g \in \mathcal{F}$. Neem $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \backslash \{g\}$. Laat $\{t_i : i \in D\}$ de verzameling $[D]^{<\omega}$ aftellen.

Voor elke $t \in [D]^{<\omega}$ neem $q_t(s) = \begin{cases} 0 & \text{als } s \not\subseteq t \\ p(t) & \text{als } s \subseteq t \end{cases}$

Neem nu $q(s) = \bigcup\{q_{t_i}(s) \cap g^{-1}(\{i\}) : i \in D\}$. Dus $q(s)$ is opgebouwd uit disjuncte stukjes van de $g^{-1}(\{i\})$. Dus als q op die stukjes multiplcatief is, dan is geheel q multiplicatief. Neem een vaste i. In het geval dat $s_1 \not\subseteq t_i$ of $s_2 \not\subseteq t_i$ dan ook $s_1 \cup s_2 \not\subseteq t_i$. Dus dan $q(s_1 \cup s_2) = q(s_1) \cap q(s_2) = \emptyset$ op de verzameling $g^{-1}(\{i\})$. Als ze allebei wel een deelverzameling zijn van t_i, dan $q(s_1 \cup s_2) = p(t_i) \cap g^{-1}(\{i\}) = p(t_i) \cap g^{-1}(\{i\}) \cap p(t_i) \cap g^{-1}(\{i\}) = q(s_1) \cap q(s_2)$.

Dus q is multiplicatief. Verder $q(s) \subseteq \cup\{p(t) : s \subseteq t\} \subseteq p(s)$ want p is monotoon. Neem $\mathscr{F}' = ((\mathscr{F} \cup range(q)))$. $range(q) = \{q(s) : s \in [D]^{<\omega}\}$, dus voor grote schommeling hebben we te bewijzen: Voor een $A \in \mathscr{F}'$, functies $s_1, \ldots, s_m \in [D]^{<\omega}$, willekeurige $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ en waarden $i_1, \ldots, i_n \in D$ moet gelden $A \cap \bigcap_{j=1}^{m} q(s_j) \cap \{d \in D : f_1(d) = i_1, \ldots, f_n(d) = i_n\} \neq \emptyset$. Omdat q multiplicatief is, kunnen we de vereniging s van alle s_i nemen, en is die uitspraak hetzelfde als $A \cap \bigcap q(s) \cap \{d \in D : f_1(d) = i_1, \ldots, f_n(d) = i_n\}$. De $q(s)$ is opgebouwd uit disjuncte delen $q_{t_i}(s) \cap g^{-1}(i)$ met $s \subseteq t_i$, wat gelijk is aan $p(t_i) \cap g^{-1}(i)$. Nou zitten $p(t_i)$ en A in $\mathscr{F}$ en $g \in \mathcal{F}$ dus vanwege onze aanname van grote schommeling weten we dat $A \cap q_{t_i}(s) \cap g^{-1}(i) \bigcap \{d \in D : f_1(d) = i_1, \ldots, f_n(d) = i_n\} \neq \emptyset$. Dus dit geldt ook voor de gehele $q(s)$. Dus $\mathcal{F}'$ is van grote schommeling $\mathscr{F}'$.

Nu kunnen we wederom met behulp van transfiniete recursie het hoofd resultaat bewijzen.

Bewijs van 3.21: Neem een verzameling D met kardinaliteit κ. Voor $\eta < 2^\kappa$, laat A_η alle verzamelingen van $\mathscr{P}(D)$ langs gaan en laat p_η alle monotone functies van $[D]^{<\omega}$ naar $\mathscr{P}(D)$ afgaan zodat elke monotone functie 2^κ keer voorbij komt. We gaan een filter $\mathscr{F}$ en famillie van grote schommeling $\mathcal{F}$ construeren met behulp van transfiniete recursie.

Recursiestap 0: Neem een familie $\mathcal{F}$ van grote schommeling mod D van kardinaliteit 2^κ en functie $f \in \mathcal{F}$.

Neem $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \backslash \{f\}$ en neem $\mathscr{F}_0 = ((\{B_n : n < \omega\}))$ met $B_n = \{i \in I : n < f(i) < \omega\}$. Merk op: $\bigcap\{B_n : n < \omega\} = 0$.

Recursiestap $\eta + 1$: Gegeven een $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathcal{F}_\eta$, pas lemma 3.25 en vervolgens lemma 3.26 toe om tot de $\mathscr{F}_{\eta+1}$ en $\mathcal{F}_{\eta+1}$ te komen.

Transfiniete recursiestap: Als η een limiet ordinaal is, dan $\mathscr{F}_\eta = \bigcup\{\mathscr{F}_\zeta : \zeta < \eta\}$ en $\mathcal{F}_\eta = \bigcap\{\mathcal{F}_\zeta : \zeta < \eta\}$.

Nu kunnen we voor elke $\zeta < \eta < 2^\kappa$ een aantal uitspraken doen.

1. $\mathscr{F}_\zeta \subseteq \mathscr{F}_\eta$ en $\mathcal{F}_\eta \subseteq \mathcal{F}_\zeta$
2. $\mathcal{F}_\eta \backslash \mathcal{F}_{\eta+1}$ is eindig dus $|\mathcal{F}_\eta| = 2^\kappa$
3. $\mathscr{F}_0$ is aftelbaar onvolledig, dus dankzij 1 weten we dat elke $\mathscr{F}_\eta$ aftelbaar onvolledig is.
4. A_η of $D \backslash A_\eta$ zit in $\mathscr{F}_{\eta+1}$
5. Als $p_\eta : [D]^{<\omega} \to \mathscr{F}_\eta$ monotoon is, dan is er een multiplicatieve $q : [D]^{<\omega} \to \mathscr{F}_{\eta+1}$ zodat $q \leq p$.

Neem nu het filter $U = \bigcup\{\mathscr{F}_\eta : \eta < 2^\kappa\}$. Dankzij uitspraak 4 weten we dat dit een ultrafilter is. Uitspraak 3 maakt dit een aftelbaar onvolledig ultrafilter. Uit uitspraak 5 kunnen we niet direct concluderen dat elke monotone $p : [D]^{<\omega} \to U$ een multiplicatieve $q \leq p$ heeft. Wel kunnen we voor elke p een η aanwijzen waarvoor de range van p bevat is in $\mathscr{F}_\eta$. Omdat we 2^κ keer elke monotone functie p voor laten komen is die cofinaal in de reeks $\eta < 2^\kappa$ en is er dus een recursie stap $\zeta > \eta$ waar we voor $p = p_\zeta$ een multiplicatieve q vinden.

4 Ultramachten

Een groot deel van dit hoofdstuk is gebaseerd op een artikel van Alan Dow [5].

4.1 Wat is een ultramacht?

Definitie 4.1 (Ultramacht)**.**

Men neme een kardinaal α met daarop een ultrafilter p en een verzameling D van kardinaliteit κ. We nemen nu de verzameling van functies van α naar D; Het product D^α.

We definiëren de relatie $\sim$. Voor $s, t \in D^\alpha$ zeggen we $s \sim t$ wanneer $\{x : s(x) = t(x)\} \in p$. Dankzij de definitie van ons ultrafilter is dit een equivalentierelatie, namelijk.

- Voor een functie s geldt $\{x : t(x) = t(x)\} = \alpha \in p$, dus de relatie is reflexief
- Voor twee functies s en t geldt $\{x : s(x) = t(x)\} = \{x : t(x) = s(x)\}$, dus de relatie is symmetrisch
- Voor drie functies s, t, r geldt dat als $r \sim s$ en $s \sim t$ dan $\{x : s(x) = t(x)\} \cap \{x : r(x) = s(x)\} \in p$ en $\{x : s(x) = t(x)\} \cap \{x : r(x) = s(x)\} \subseteq \{x : r(x) = t(x)\}$. Dankzij de regels van het ultrafilter weten we dus $\{x : r(x) = t(x)\} \in p$, dus de relatie is transitief

Dat betekent dat we de functies kunnen opdelen in equivalentie klassen. Deze ruimte met equivalentie klassen noemen we een ultramacht en noteren we met (D^α/p). We kunnen deze ultrafilter en equivalentierelatie ook op een product met wisselend bereik toepassen, dus $(\prod_{x\in\alpha} D_x/p)$, in welk geval we te maken hebben met een ultraproduct.

Bovenstaande relatie is nodig voor de definitie van de ultramacht. We gaan nu direct nog een andere relatie definiëren die een orde aangeeft, waardoor we kunnen zeggen dat elementen "boven" of "onder" de andere liggen.

Definitie 4.2 (Notatie definitie $L(s,t)$)**.**

we definiëren een binaire relatie op een bepaald domein D die een orde aangeeft. Dat wil zeggen $L(s,t)$ is waar als t "groter" is dan s, voor $s, t \in D$. Als s en t natuurlijke getallen zijn kan dit bijvoorbeeld $<$ zijn. Dan is $s < t$. Als s en t verzamelingen zijn dan is "deelverzameling van" een voorbeeld van een binaire relatie die een orde aangeeft. Vervolgens kunnen we ook een ultrafilter p op deze relatie toepassen. De relatie $L(p)$ wordt gedefinieerd op D^α/p of gewoon D^α, en betekent $L(p,s,t)$ is waar als $\{a \in \alpha : L(s(a), t(a))\} \in p$, dus de verzameling waar de functiewaarden van s kleiner zijn dan t, zit in p. In dit geval zijn $s, t \in D^\alpha$ functies.

Met behulp van goede ultrafilters kunnen we verbanden vinden tussen de verzadiging van een ultramacht en zijn originele ultrafilter. Hieronder volgen twee stellingen om daar gevoel voor te krijgen. Keisler ontdekte bijvoorbeeld:

Stelling 4.3. *$(D^\alpha/p, L[p])$ is α^+-verzadigd als (D, L) ω-verzadigd is en als $p \in U(\alpha)$ is ω-onvolledig en α^+-goed.*

Het bewijs hiervan is te vinden in [8]

Stelling 4.4. *Als $p \in U(\alpha)$ een α^+-goed ultrafilter is en $\{D_\gamma : \gamma < \alpha\}$ zijn eindige verzamelingen zodat $\{\{\gamma : |D_\gamma| < n\} : n \in \omega\}$ een deelverzameling is van p, dan geldt $|\prod_{\gamma<\alpha} D_\gamma/p| = 2^\alpha$*

In dit bewijs zijn we voornamelijk bezig om een injectieve afbeelding te definiëren tussen X^α en $\prod_{\gamma<\alpha} D_\gamma/p$, zodat we kunnen concluderen dat $|\prod_{\gamma<\alpha} T_\gamma/p| \geq |X^\alpha|$.
Neem een afbeelding W van $[\alpha]^{<\omega}$ (oftewel de eindige deelverzamelingen van α) naar p gedefinieerd door: $W(H) = \{\gamma : |D_\gamma| > |H^H|\}$. We weten dat H eindig is en dat D_γ eindig is. Dit betekent ook dat voor $|G| < |H|$ geldt $W(G) \supseteq W(H)$, dus W is monotoon. Neem nu een multiplicatieve functie $V : [\alpha]^{<\omega} \to p$ die W verfijnt. We weten dat die bestaat omdat p α^+-goed is. Voor elke $\gamma < \alpha$, neem $H_\gamma = \{\delta \in \alpha : \gamma \in V(\{\delta\})\}$. We definiëren $T_\gamma = |H_\gamma|^{H_\gamma}$ (oftewel de verzameling van functies van H_γ naar zijn kardinaal). We weten dat $T_\gamma \subseteq D_\gamma$ want V verfijnt W, oftewel $W(H_\gamma) \supseteq V(H_\gamma)$.
Neem $X = \prod_{\gamma<\alpha} |H_\gamma|/p$ en definieer functie $e : X^\alpha \to \prod_{\gamma<\alpha} T_\gamma/p$ als volgt: Voor $y \in X^\alpha$ neem de functie waar we y op afbeelden, $e(y) \in \prod_{\gamma<\alpha} T_\gamma/p$ zodat $e(y)(\gamma) \in T_\gamma$ en zodat $e(y)(\gamma)(\delta) = y(\delta)(\gamma)$ voor elke $\delta \in H_\gamma$. Als we nu $y, z \in X^\alpha$ nemen met $y \neq z$, dan is er een $\delta \in \alpha$ zodat $L(p, y(\gamma), z(\gamma))$ niet geldt. Daaruit volgt dat $\{\gamma \in \alpha : e(y)(\gamma) \neq e(z)(\gamma)\} \supseteq \{\gamma \in \alpha : \delta \in H_\gamma \text{ en } y(\delta) \neq z(\delta)\}$ wat gelijk is aan $V(\{\delta\}) \cap \{\gamma : y(\delta)(\gamma) \neq z(\delta)(\gamma)\}$.
Aangezien de functiewaarden van e allemaal disjunct zijn, hebben we een injectieve afbeelding. We kunnen nu concluderen $|\prod_{\gamma<\alpha} T_\gamma/p| \geq |X^\alpha|$. Dus met onze eerdere conclusies hebben we $|\prod_{\gamma<\alpha} D_\gamma/p| \geq |\prod_{\gamma<\alpha} T_\gamma/p| \geq |X^\alpha| = 2^\alpha$. De omgekeerde ongelijkheid is duidelijk omdat er maar 2^α elementen in het product zitten.

4.2 Gaten

We zijn bezig met twee verschillende ultramachten vinden. Om te laten zien dat ze verschillend zijn gaan we op zoek naar een eigenschap waar ze op verschillen. Die eigenschap is de $\kappa(i, p)$ die we hier gaan uitleggen.

Definitie 4.5 (Gat)**.** *voor twee reguliere kardinalen κ en λ, vormt (C, D) een (κ, λ)-gat in de ruimte (S, L) wanneer*

1. *$L(C, D)$ (elk element van D is "groter" dan elk element van C)*

2. *C is een stijgende keten van orde κ, D is een dalende keten van orde λ.*

3. *er is geen $x \in S$ zodat $L(C, x, D)$*

Definitie 4.6 ($\kappa(i,p)$)**.** *Neem een kardinaal α, een vrij ultrafilter $p \in U(\alpha)$ en kies een $\omega_i < \alpha$. We definiëren voor alle $\gamma \in \alpha$ de functies $\underline{\gamma} \in \alpha^\alpha$ met $\underline{\gamma}(\delta) = \gamma$ voor alle $\delta \in \alpha$. Neem $I = \{\underline{\gamma} : \gamma < \omega_i\}$. We zijn opzoek naar verzamelingen X met een kardinaliteit κ zodat (I, X) een (ω_i, κ)-gat vormen met de ordening $L(p)$. De $\kappa(i,p)$ is de kleinste kardinaal κ waarvoor we zo'n verzameling X kunnen vinden.*

Merk op dat X alleen een gat kan vormen als het een dalende keten van functies is. De $\kappa(i,p)$ is gedefinieerd voor elke $\omega_i < \alpha$. In het geval dat we voor de onderste keten 0 kiezen, schrijven we $\kappa(p)$, dus dat betekent $\kappa(0,p)$.

Lemma 4.7. *Neem een vrij ultrafilter $p \in U(\alpha)$ dat ω-onvolledig en α^+-goed is en domeinverzameling S. Als de ruimte (S, L) willekeurige lange, eindige stijgende ketens heeft, dan geldt voor elke $\omega_i \leq \alpha$ dat $\kappa(i,p)$ gelijk is aan de unieke reguliere kardinaal zó dat $(S^\alpha, L(p))$ een (ω_i, κ)-gat heeft. Daarom ook $\kappa(i,p) > \alpha$.*

Bewijs: Eerst laten we zien dat $(S^\alpha, L(p))$ een stijgende keten van orde α heeft. Neem de rij $\{A_n : n \in \omega\} \in p$ zo dat $\bigcap A_n = \emptyset$. Dit kunnen we zo kiezen omdat we met behulp van de onvolledigheid een rij A_n kunnen vinden zodat de doorsnede niet in p zit. Dat betekent dankzij stelling 3.3 dat het complement daarvan wel in p zit. Als we die aan de rij toevoegen hebben we een nieuwe rij waarvan de doorsnede leeg is. Neem een multiplicatieve afbeelding $V : [\alpha]^{<\omega} \to p$ met $V(H) \subseteq A_{|H|}$ voor $H \in [\alpha]^{<\omega}$. Dus we hebben de eindige deelverzamelingen H van α. $V(H)$ wordt afgebeeld op de verzameling A_n waar n gelijk is aan de kardinaliteit van H.
Voor elk element δ van α, laat $H_\delta = \{\gamma \in \alpha : \delta \in V(\{\gamma\})\}$. Nu nemen we de keten $C_\delta = \{c(\delta, \gamma) : \gamma \in H_\delta\} \subseteq S$. Definieer voor elke $\gamma \in \alpha$ een functie $g_\gamma \in S^\alpha$ zó dat wanneer $\gamma \in H_\delta$, dan $g_\gamma(\delta) = c(\delta, \gamma)$. Neem nu voor $\beta < \gamma < \alpha$ de verzameling $\{\delta \in \alpha : L(g_\beta(\delta), g_\gamma(\delta))\}$. Omdat $L(g_\beta(\delta), g_\gamma(\delta))$ wanneer β en γ in H_δ (en een aantal andere gevallen) bevat deze $V(\{\beta\}) \cap V(\{\gamma\}) = V(\{\beta, \gamma\})$ vanwege multiplicativiteit.
Dan nu in het geval dat $\omega_i < \alpha$ regulier is. We nemen nu aan dat $\{g_\gamma : \gamma < \omega_i\} \subseteq S^\alpha$ een keten is, dan kunnen we V, g_γ's, H_δ's en C_δ's vinden zoals hierboven gedefinieerd.
Als $h \in S^\alpha$ met $L(p, g_\gamma, h)$ voor alle $\gamma < \omega_i$, dan is er een $j \in \prod_{\delta<\alpha} C_\delta$ zodat $L(p, g_\gamma, j, h)$ voor $\gamma < \omega_i$. Namelijk definieer $j(\delta) = max\{g_\gamma(\delta) : \gamma \in H_\delta$ en $L(g_\gamma(\delta), h(\delta))\}$, dan $L(p, j, h)$ en $L(p, g, j)$, oftewel in de lineaire ordening zit j tussen elke g_γ en h. Deze j zit in het product, want elke $g_\gamma(\delta)$ geeft een $c(\delta, \gamma)$.
Nu weten we voor een willekeurige kardinaal κ dat als er een verzameling $\{h_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq S^\alpha$ is zo dat $(\{g_\gamma : \gamma < \omega_i\}, \{h_\gamma : \gamma < \kappa\})$ een gat vormen dat dan $\{h_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq \prod_{\delta<\alpha} C_\delta$, want anders zouden we voor een h die daar niet aan voldoet een j eronder kunnen kiezen die wel in het product zit en is

het dus niet een gat.
Om dezelfde reden voor de structuur $(\alpha^\alpha, L(p))$, als $\{f_\gamma : \gamma < \kappa\} \in \alpha^\alpha$ zo is dat $(\{\gamma : \gamma < \omega_i\}, \{f_\gamma : \gamma < \kappa\})$ een gat vormen, dan mogen we aannemen dat $f_\gamma \in \prod_{\delta<\alpha} H_\delta$. Dit is een (ω_i, κ)-gat.
Voor elke δ kunnen we C_δ afbeelden op H_δ, dus de producten $\prod_{\delta<\alpha} C_\delta$ en $\prod_{\delta<\alpha} H_\delta$ zijn isomorf en hebben dezelfde $\kappa(i, p)$.

5 Het hoofdresultaat

Dit hoofdstuk draait om de volgende twee uitspraken:

1. Onder aanname van de continuümhypothese, neem (D, L) ω-verzadigd met $|D| = \omega$ en neem twee ω-onvolledige, ω^+-goede ultrafilters $p, q \in U(\omega)$. Dankzij 4.3 is het duidelijk dat $(D^\omega/p) \sim (D^\omega/q)$ omdat ze beide kardinaliteit 2^ω hebben en 2^ω-verzadigd zijn.

2. Onder verwerping van de continuümhypothese zijn er voor bovenstaand geval twee niet-isomorfe ultramachten te vinden.

Deze twee uitspraken geven directe tegenspraak met elkaar en dus is uitspraak 1 equivalent aan CH. Uitspraak 1 staat nu een beetje raar. De aanname van ω^+-goede ultrafilters is dubbelop (dat leggen we hieronder uit). Toch is het zo verwoord, omdat uitspraak 1 nu heel mooi uitgebreid kan worden tot elk willekeurig kardinaalgetal. Kies een $\alpha \geq \omega$ en doe de aanname $\alpha^+ = 2^\alpha$. Voor twee α^+-goede ultrafilters $p, q \in U(\alpha)$ zijn de bijbehorende ultramachten isomorf.

Voor ω grote verzamelingen is elk ultrafilter ω^+-goed. Neem namelijk $f : [\omega]^{<\omega} \to p$ en definieer $X_n = \bigcap\{f(x) : x \subseteq \{0, \dots, n\}\}$ voor elke $n \in \omega$. Neem nu $g(x) = X_{\max x}$. Dan geldt $g(x) \subseteq f(x)$ en voor x ¡ y geldt $X_x \subseteq X_y$, dus $g(x \cup y) = X_{\max x \cup y} = X_{\max x} \cap X_{\max y} = g(x) \cap g(y)$. Dus elke willekeurige functie f heeft een monotone g zodat $g \leq f$. Daarom ook bestaat 5.5 als een sterkere uitspraak dan 5.4.

Het bewijs voor 2 vereist een hele hoop werk. De gaten die we tot nu toe onderzocht hebben gaan ons daarbij helpen. Als wij namelijk 2 ultramachten p en q kunnen vinden waarvoor $\kappa(p) \neq \kappa(q)$ dan hebben we twee niet-isomorfe ultramachten te pakken. De rest van dit hoofdstuk heeft dus als doel om uitspraak 2 te bewijzen.

Definitie 5.1. *Gegeven een lineair geordende verzameling L. Een deelverzameling C van L heet **cofinaal** wanneer voor elk element $x \in L$ er een element $c \in C$ bestaat zodat $x \leq c$.*

Definitie 5.2. *De **cofinaliteit** van een lineair geordende verzameling L, $cf(L)$, is de kardinaal van de kleinste deelverzameling van L die cofinaal is.*

Herinner dat het co-eindige filter gelijk is aan het Fréchet filter
Dankzij het werk van Kunnen in sub-hoofdstuk 3.2 weten we dat er een α^+-goed, ω-onvolledig ultrafilter is. Nu gaan we het verhaal van de gaten invoegen bij de recursie stappen van 3.21 om zo een “mooi” ultrafilter te vinden met specifieke gaten.

Lemma 5.3. *Neem aan dat p een filter is op $\alpha, \mathcal{F} \subseteq \alpha^\alpha$ heeft grote schommeling mod p, $\omega_i \leq \alpha$ en $H = \{h \in \alpha^\alpha : L(p, \underline{\gamma}, h)$ voor alle $\gamma < \omega_i\}$ dan is er een filter p' en functie $f \in \mathcal{F}$ zodat $L(p', \underline{\gamma}, f, \overline{h})$ voor elke $\gamma < \omega_i$, elke $h \in H$ en de familie $\mathcal{F} \backslash \{f\}$ heeft grote schommeling mod p'.*

Oftewel elke recursiestap breiden we H uit met één extra functie f uit $\mathcal{F}$ om een keten en dus een gat te maken.
Bewijs: Neem een willekeurige $f \in \mathcal{F}$. We definiëren een famillie verzamelingen $B(\gamma, h) = \bigcup\{f^{-1}(\delta) \cup h^{-1}((\delta, \omega_i)) : \gamma < \delta < \omega_i\}$. Dit is het inverse beeld van $f(\delta)$ doorsneden met het inverse beeld van van h van het interval (δ, ω_i). Merk op dat voor $x \in B(\gamma, h)$ dat $h(x) > f(x) = \delta$. Dus we kunnen nu voor p' het filter nemen dat gegenereerd wordt door p verenigd met $\{B(\gamma, h) : \gamma < \omega_i, h \in H\}$. Dan weten we dat $L(p', \underline{\gamma}, f, h)$ voor alle $h \in H$ en $\gamma < \omega_i$. Om te ontdekken dat $\mathcal{F} \backslash \{f\}$ van grote schommeling mod p' is, neem $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F} \backslash \{f\}, (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \alpha^n, A \in p, \gamma < \omega_i$ en $h \in H$. Neem $\gamma < \delta < \omega_i$, dan is $h((\delta, \omega_i)) \in p$ want $L(p, \underline{\delta}, h)$, dus $A \cap h((\delta, \omega_i)) = A' \in p$. Vervolgens omdat we hebben aangenomen dat $\mathcal{F}$ grote schommeling mod p heeft en de $f_j \in \mathcal{F}$ voor $j = 1 \ldots n$ weten we dat A' doorsneden met de f_j's niet leeg is.

Stelling 5.4. *Er is een ω-onvolledig, α^+-goed ultrafilter p op α, zodat $k(i, p) = cf(2^\alpha)$ voor elke reguliere $\omega_i \leq \alpha$.*

Bewijs: Begin met dezelfde onderdelen als 3.25; een famillie $\mathcal{F}_0$ met grote schommeling mod p. We maken een keten van 2^α filters, $\{p_\delta : \delta < 2^\alpha\}$. We gaan de recursiestappen van Kunnen gebruiken behalve op specifieke momenten, wanneer $cf(\delta) = \omega_i$. Dan passen we 5.3 toe. Voor $\omega_i < \alpha$ gebeurt dit ω_i vaak en voor $\omega_i = \alpha$ gebeurt dit eenmalig, dus er blijven α veel recursie stappen over en we krijgen aan het eind nog steeds een ω-volledig, α^+-goed ultrafilter zoals in 3.21. We gaan eerst laten zien dat $\kappa(i, p) \geq cf(2^\alpha)$ door het tegendeel te ontkrachten. Neem een $H \in \alpha^\alpha$ zodat $|H| < cf(2^\alpha)$ en $L(p, \underline{\gamma}, h)$ voor $\gamma < \omega_i$ en $h \in H$. Dan is er een $\delta < 2^\alpha$ met $cf(\delta) = \omega_i$ zodat $L(p_\delta, \underline{\gamma}, h)$ voor alle $\gamma < \omega_i$ en $h \in H$. Dit zou een gat vormen, echter kunnen we nog een keer 5.3 toepassen en een $f \in \alpha^\alpha$ vinden zodat $L(p_{\delta+1}, \underline{\gamma}, f, h)$ voor elke $\gamma < \omega_i$ en $h \in H$. Dus het kleinste gat is voor een H met $|H| \geq cf(2^\alpha)$. Neem nu de verzameling $\Delta = \{\delta \in 2^\alpha : cf(\delta) = \omega_i\}$. Deze verzameling is co-finaal in 2^α en heeft dus ook een co-finaal deelverzameling ter grootte van $cf(2^\alpha)$. Die deelverzameling kiezen we om een $(\omega_i, |H|)$-gat maken, dus $\kappa(i, p) = cf(2^\alpha)$.

Stelling 5.5. *Voor elke reguliere kardinaliteit κ met $\omega_1 \leq \kappa \leq 2^\omega$ is er een $p \in U(\omega)$ zodat $\kappa(p) = \kappa$.*

Bewijs We hadden eerder al bepaald dat omdat $p \in U(\omega)$ dat p ω^+-goed is. Neem een verzameling functies $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$, zodat $|\mathcal{F}| = \kappa$ en $\mathcal{F}$ van grote schommeling mod $\mathfrak{FR}_\omega$ is, het co-eindige filter. Herinner de topologie βD, of $\beta\omega$ in dit geval. Dit is de Stone-Čech compactificatie van D, zoals bewezen op pagina 30 van [3]. Herinner $\overline{A}$ zijn alle ultrafilters die de verzameling A bevatten en dit zijn de verzamelingen die de basis voor de topologie vormen. Vervolgens gaan we ons beperken tot de vrije ultrafilters $U(\omega) \subseteq \beta\omega$. Neem $A^* = \overline{\mathrm{A}} \cap U(\omega)$. $\{A^* : A \in D\}$ is de basis voor de deelruimte topologie op $U(\omega)$. Definieer voor elke functie $f \in \mathcal{F}$ de afbeelding $g_f : U(\omega) \to \omega + 1$, dus van de vrije ultrafilters op ω, naar de ordinaal ruimte $\omega + 1$, gedefinieerd door: “het inverse beeld van $g_f(n)$ is $[f^{-1}(n)]^*$”. Dus als een verzameling A op de ordinaal n wordt afgebeeld door f, dan wordt A^* door g_f ook op die n afgebeeld. Daarnaast $g_f^{-1}(\omega) = \bigcup(\omega) \setminus \cup \{g_f^{-1}(n) : n \in \omega\}$. Er is geen $x \in \omega$ zodat $f(x) = \omega$, want ω als domein en ordinaal bevat niet zichzelf. Daarom hebben we die nu apart gedefiniëerd. We nemen deze functie naar $\omega+1$ omdat die compact is en ω niet, omdat ω een limiet ordinaal is. Nu kunnen we het product van alle g_f nemen, $G : U(\omega) \to (\omega + 1)^{|\mathcal{F}|}$. Deze G is surjectief want $\mathcal{F}$ is van grote schommeling. Nu met behulp van eenzelfde argument als van Zorn's lemma kunnen we zeggen er is een gesloten verzameling $K \subseteq U(\omega)$, zodat $G : K \to (\omega + 1)^{\mathcal{F}}$ nog steeds surjectief is, en er is geen gesloten verzameling $L \subset K$ zodat $G : L \to (\omega + 1)^{\mathcal{F}}$ surjectief is. Definieer $p_\emptyset = \{A \subseteq \omega : K \subseteq A^*\}$. Voor $A \in p_\emptyset$ en $A \subseteq B$ geldt $K \subseteq A^* \subseteq B^*$. Voor $A, B \in p_\emptyset$ en $q \in K$ geldt, als $q \in A^*$ en $q \in B^*$, dan $A, B \in q$, dus $A \cap B \in q$ dus $q \in (A \cap B)^*$. Dus dit is een filter. We hebben G surjectief genomen op K, dus $K \cap \bigcap\{f_i^{-1}(n_i)^* : i = 1, \ldots, n\} \neq \emptyset$. Dus er is een ultrafilter q binnen die doorsnede, dus $A, \{f_i^{-1}(n_i) : i = 1, \ldots, n\} \in q$ voor elke $A \in p_\emptyset$. Omdat het ultrafilter gesloten is onder eindige doorsnedes, weten we $A \cap \bigcap\{f_i^{-1}(n_i) : i = 1, \ldots, n\} \neq \emptyset$. Dus $\mathcal{F}$ is van grote schommeling mod $p_\emptyset$. We sorteren de familie $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ en nemen het product $X = (\omega + 1)^F$.

We gaan het idee introduceren van de “support” verzameling, $Supp(A)$. Als $A \subseteq \omega$, dan is er een aftelbare verzameling $Supp(A) \subseteq \kappa$ zodat wanneer $x \in G[A^* \cap K]$ en $x(f_\alpha) = y(f_\alpha)$ voor alle $\alpha \in Supp(A)$ dan $y \in G[A^* \cap K]$.

Lemma 5.6. *Er bestaat een minimale $Supp(A)$ met deze eigenschap, die bovendien aftelbaar is.*

Bewijs: Dit bewijs gaan we opdelen in een aantal verschillende uitspraken. Noem $H_A = G[A^* \cap K]$. A^* is clopen in ω^* en K is compact en gesloten, dus $A^* \cap K$ en $(\omega \setminus A^*) \cap K$ zijn beide niet leeg en gesloten in K. Dus H_A is gesloten in X. Als $A^* \cap K = K$ of leeg dan is $Supp(A)$ ook duidelijk leeg. Deze verzameling is dus interessant wanneer $K \supset A^* \cap K \supset \emptyset$. $G[(\omega \setminus A^*) \cap K]$ is ook gesloten en ongelijk aan X, want G is irreducibel ten opzichte van K. G is niet injectief, maar we kunnen wel zeggen dat $X \setminus G[(\omega \setminus A^*) \cap K] \subseteq H_A$. Dus H_A bevat een niet-lege open deelverzameling in X. Straks gaan we $O_A = int(H_A)$ bekijken. Dat is het inwendige, de grootst mogelijke open deelverzameling van H_A.

Maar daarvoor; de product topologie. Neem de verzamelingen $\mathscr{B} = \{\prod_{f \in F} U_f :$

Elke U_f is open in $\omega+1$ en in eindig veel gevallen $U_f \neq \omega+1\}$. Dit is de basis voor de open verzamelingen in de topologie; $\mathscr{T} = \{\bigcup \mathscr{B}' : \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}\}$. Een verzameling $\mathscr{B}$ met één enkel los product is dus ook open.

Neem $S = \bigcup\{\omega^H : H \in [F]^{<\omega}\}$. Dit zijn functies met een eindig domein. Er zijn $s \in S$ en $x \in X$ zodat $s \subseteq x$. s is immers een "korter" geordend paar, omdat het een kleiner domein heeft. We nemen $[s] = \{x \in X : s \subseteq x\}$. $[s]$ is precies een product in de basis voor de open verzamelingen, want het bevat de functies die op een eindig aantal plekken op een eindig domein liggen, namelijk de waarden van s. Dus $[s]$ is open in X.

Verder kunnen we van een willekeurige functie $x \notin [s]$ een functie f op het domein van s vinden waar $x_f \neq s_f$ en $s_f \neq \omega$. Neem $U = \{y : y_f \neq s_f\}$. Dit product heeft op een enkele coördinaat een beperkt domein, dus zit in de basis open verzamelingen. Bovendien $U \cap [s] = \emptyset$ en $x \in U$. Omdat we dit kunnen doen voor elke functie buiten s, is het complement van s open. Dus $[s]$ is clopen in X. Elke niet-lege open verzameling bevat een $[s]$ want voor elk losse product in de topologie kunnen we een s aanwijzen die op die eindig aantal $U_f \neq \omega+1$ een functiewaarde aanneemt binnen U_f.

Met de O_A nemen we $S_A = \{s : [s] \subseteq O_A\}$. We gaan opzoek naar een maximale $T_A \subseteq S_A$ met de eigenschap dat voor $t, s \in T_A$ geldt $[s] \cap [t] = \emptyset$. Deze maximale verzameling bestaat dankzij het lemma van Zorn. We definiëren meteen nog twee nieuwe verzamelingen; $V_A = \bigcup\{[s] : s \in T_A\}$. $X_A = X \backslash G[(\omega \backslash A^*) \cap K]$

Bewering 1: $V_A \subseteq X_A$
Bewijs: stel $[s] \subseteq H_A$ en $[s] \cap G[K \backslash A^*] \neq \emptyset$. Dan kunnen we een $x \in K \backslash A^*$ nemen zodat $G(x) \in [s]$. Neem een open omgeving O van x in K, zodat $A^* \cap O = \emptyset$. Dat kan want A^* is gesloten en G is continu, dus $G(O) \in [s] \subseteq H_A$. Nu hebben we $G[K \backslash O] = G[K]$ want voor $y \in K \backslash O$ is dit duidelijk en voor $y \in O$ weten we $G(y) \in [s] \subseteq H_A \subseteq G[K \backslash O]$. G is echter irreducibel op K, dus dit is een tegenspraak. Daarom valt elke $[s] \subseteq H_A$ binnen X_A.

Bewering 2: $X_A \subseteq cl(V_A)$, de afsluiting van V_A
Bewijs: Stel dat $X_A \backslash cl(V_A) \neq \emptyset$, dan is die verzameling open, dus het bevat een $[s]$. Dan hebben we een $[s] \subseteq X_A \subseteq H_A$ die disjunct is met T_A. Dus dat zou betekenen dat T_A niet maximaal is, dus een tegenspraak.

Bewering 3: $cl(V_A) = H_A$.
Bewijs: $cl(V_A) \subseteq H_A$ is duidelijk want voor elke $s \in T_A$ weten we $[s] \subseteq O_A \subseteq H_A$ en H_A is gesloten. $H_A \subseteq cl(V_A)$ kost meer moeite. $G[K \backslash A^*] \cup cl(V_A) = X$, dat was de gehele ruimte, want $X \backslash G[K \backslash A^*] \subseteq X_A \subseteq cl(V_A)$. Dus als we $cl(V_A) = G[G^{-1}[cl(V_A)]]$ schrijven dan weten we $G[K \backslash A^* \cup (G^{-1}[cl(V_A)] \cap K)] = X$. Omdat G irreducibel is en dit doorsnedes en verenigingen van allemaal gesloten verzamelingen zijn in K, weten we $K \backslash A^* \cup (G^{-1}[cl(V_A)] \cap K)$ is gesloten en dus gelijk aan K. Dus $K \cap A^* \subseteq G^{-1}[cl(V_A)]$, dus $H_A \subseteq G[G^{-1}[cl(V_A)]] = cl(V_A)$.

Bewering 4: T_A is aftelbaar
Bewijs: Neem een $m \in \omega$. Voor m nemen we $x_m = (f(m))_{f \in F}$. Dus voor alle $f \in F$ berekenen we $f(m)$. Dat is een enkel punt in $(\omega+1)^F$. Neem een willekeurige $[s]$. De functie s is op eindig veel plekken gedefinieerd met een waarde. Neem de rij van die waardes $n_1, \ldots, n_k$. Voor willekeurige functies $f_1, \ldots, f_k$ is er een m zodat $f_i(m) = n_i$ voor alle $i \leq k$ want F is van grote schommeling. Dus voor die m geldt $x_m \in [s]$. De verzameling $\{x_m : m \in \omega\}$ ligt dicht in X, want voor elke open verzameling O van X is er een $[s] \in O$ en voor elke $[s]$ kunnen we een m vinden zodat $x_m \in [s]$. Er zijn aftelbaar veel $m \in \omega$ dus er zijn ook hoogstens aftelbaar veel x_m en elke $[s] \in T_A$ bevat een x_m, dus T_A is aftelbaar.

Bewering 5: Als $[t] \subseteq G[A^* \cap K]$ voor een functie $t \in S$ dan geldt voor die functie beperkt tot de $Supp(A)$ die aan onze voorwaarden voldoet ook $[t_{Supp(A)}] \subseteq G[A^* \cap K]$.
Bewijs: Merk op dat $[t] \subseteq [t_{Supp(A)}]$ want als we de functies op minder waarden bepalen zijn er meer functies die voldoen aan de bepaalde waarden. Neem een waarde $\alpha \notin Supp(A)$. Neem $s = t \backslash \{(f_\alpha, t(f_\alpha))\}$. We weten $[s \cup (f_\alpha, t(f_\alpha))] = [t] \subseteq G[A^* \cap K]$. Stel er is een functie $g \in [s] \backslash G[A^* \cap K]$. Per de definitie zou dat betekenen dat het punt α in de support moet zitten, maar we hebben aangenomen dat dat niet zo is, dus er is niet zo'n g. Dus zit $[s]$ in $G[A^* \cap K]$. Dit argument kunnen we herhalen voor alle elementen in $t \backslash t_{Supp(A)}$, dus $t_{Supp(A)} \in G[A^* \cap K]$.

Neem $Supp(A) = \{\alpha : \exists s \in S$ en $n < \omega$ zodat $[s] \nsubseteq G[A^* \cap K]$ en $[s \cup (f_\alpha, n)] \subseteq G[A^* \cap K]\}$. Uit deze definitie is direct duidelijk dat $Supp(A)$ minimaal is. We bepalen nu de verzameling $Supp_T(A) = \{\alpha : f_\alpha \in \bigcup \{dom(t) : [t] \in T_A\}\}$. Dit zijn dus de α's waarvoor de functie f_α door de functie t op een punt in X wordt afgebeeld. Het domein van elke t is eindig en we hebben eerder al bewezen dat T_A aftelbaar is, dus $Supp_T(A)$ is aftelbaar.

Bewering 6: $Supp(A) \subseteq Supp_T(A)$.
Stel we hebben een element $y \in [s] \backslash G[A^* \cap K]$ en een $\alpha \in Supp(A) \backslash Supp_T(A)$. Neem een x met $x(f_\beta) = y(f_\beta)$ voor alle $\beta \neq \alpha$ en $x(f_\alpha) = n$ en omdat $\alpha \in Supp(A)$ kunnen we de situatie ook zo kiezen dat $x \in [s \cup (f_\alpha, n)] \subset G[A^* \cap K]$. We weten $x(f_\gamma) = y(f_\gamma)$ voor $\gamma \in Supp_T(A)$. Vanwege uitspraak 5 weten we dan $x \in G[A^* \cap K]$ impliceert $y \in G[A^* \cap K]$. Dit creëert een tegenspraak, dus er bestaat geen $\alpha \in Supp(A) \backslash Supp_T(A)$.

Een deelverzameling van een aftelbare verzameling is ook aftelbaar. Nu hebben we dus bewezen dat $Supp(A)$ aftelbaar is en minimaal genomen kan worden. Dat is het eind van lemma 5.6, door met de rest van het bewijs van 5.5.

Het doel van de support is zodat we met recursie in κ veel stappen een ultrafilter kunnen construeren met een $\kappa(p) = \kappa$. Voor $0 \leq \eta \leq \kappa$ gaan we een keten aan filters construeren.
Recursie stap 0:

We hebben al een $p_\emptyset$ en familie van grote schommeling $\mathcal{F}$ bepaald.
Recursie stap $\eta + 1$:
We vereisen dat als $Supp(A) \subseteq \eta+1$ voor een verzameling $A \in \omega$, dan voegen we A of $\omega \backslash A$ toe aan $p_{\eta+1}$. Neem $H_\eta = \{h \in \omega^\omega : L(p_\eta, \underline{n}, h)$ voor $n < \omega\}$. Pas 5.3 toe. We mogen willekeurige f kiezen, dus f_η. $p'_\eta = p_\eta \cup \{\bigcup\{f_\eta^{-1} \cap h^{-1}((n,\omega)) : n > \gamma\} : \gamma \in \omega, h \in H_\eta\}$. Dan weten we ook $\mathcal{F}_{\eta+1} = \{f_\alpha : \alpha \geq \eta+1\}$ is van grote schommeling mod p'_η. Nu breiden we p'_η uit tot een filter $p_{\eta+1}$ dat we maximaal maken met betrekking tot de eigenschap $A \in p_{\eta+1} \implies Supp(A) \subseteq \eta + 1$.
Transfiniete recursie stap η:
Als η een limiet ordinaal is, neem dan $p_\eta = \bigcup\{p_\zeta : \zeta \leq \eta\}$.

Laten we onderzoeken waarom $F_{\eta+1}$ op elke stap van grote schommeling $p_{\eta+1}$ is. Voor alle $A \in p'_\eta \backslash p_\eta$ weten we dat die er inzitten vanwege η. Vanwege de minimaliteit van $Supp(A)$ hebben we dus $Supp(A) \subseteq \eta \cup \{\eta\} = \eta+1$. Nu weten we dus voor alle $A \in p_{\eta+1}$ dat $Supp(A) \subseteq \eta + 1$ en bovendien $G[K \cap A^*] \neq \emptyset$. Namelijk neem $A \in p_\emptyset, B \in p_{\eta+1}$ dan $B^* \cap A^* \neq \emptyset$. Dan is $B^* \cap K$ niet-leeg en open in K. Omdat G irreducibel is, is $G[B^* \cap K]$ ook niet-leeg. Kies $x \in G[K \cap A^*]$ en laat $\{\delta_i : i = 1, \ldots, n\} \subseteq \kappa \backslash \eta$ en $n_i \in \omega$ voor $i = 1, \ldots, n$. Definieer $y \in X$ zo dat $y(f_{\delta_i}) = n_i$ voor $i = 1, \ldots, n$ en $y(\gamma) = x(\gamma)$ voor $\gamma < \eta + 1$. Dankzij $Supp(A)$ hebben we dan $y \in G[K \cap A^*]$ en we hebben y precies zo gekozen zodat $y \in G[K \cap \bigcap\{f_{\delta_i}^{-1}(n_i) : i = 1, \ldots, n\}]$. Verder $G^{-1}(y) \subseteq \bigcap\{f_{\delta_i}^{-1}(n_i) : i = 1, \ldots, n\}$ dus $A \cap \bigcap\{f_{\delta_i}^{-1}(n_i) : i = 1, \ldots, n\} \neq \emptyset$ want dat bevat y.

We weten dat we op stap κ voor elke verzameling $A \in \omega$ hebben bepaald of A of zijn compliment in het filter zit. Dus p_κ is een ultrafilter. Nou hebben we voor elke functie in F, dus κ veel keer 5.3 toegepast, dus we weten $\kappa(p) \leq \kappa$. Neem nu een $H \subseteq \omega^\omega$ met $|H| < \kappa$ zodat $L(p, \underline{n}, h)$ voor elke $n \in \omega, h \in H$. We kunnen een η vinden zodat $Supp(h^{-1}(n, \omega)) \subseteq \eta$. Dat is de support van de verzameling A in het filter waarvoor h boven n ligt, dus op het interval (n, ω). Maar volgens onze recursie constructie hebben we dan $H \subseteq H_\eta$ en dus $L(p, \underline{n}, f_{\eta+1}, h)$ voor elke $n \in \omega, h \in H$. Dat is een tegenspraak en daarom hebben we $\kappa(p) = \kappa$.

Nu hebben we 5.5 bewezen. We kunnen hiermee onder verwerping van CH twee ultramachten aanwijzen, (D^ω/p) met $\kappa(i, p) = \kappa$ en (D^ω/q) met $\kappa(i, q) = \mathfrak{c}$. Als we dan terug kijken naar het begin van het hoofdstuk zien we dat we ons hoofdresultaat bereikt hebben.

6 Vervolg van dit onderzoek

Nu we ons hoofdresultaat hebben bereikt, kunnen we ons afvragen: Wat is er verder met deze informatie gedaan? Roitman [16] had al bewezen dat 5.5 consistent is voordat Dow [5] diens paper had gepubliceerd. Dow gebruikt die stelling in zijn paper direct om een antwoord te geven op een nog onbeantwoorde vraag uit [11]. Dow heeft het onderzoek vervolgd met goede ultrafilters en alternatieven daarvoor in [6] en gebruikt daar zogenaamde "OK-ultrafilters". In deze scriptie hebben we niet helemaal de kans gehad om de ruimte βD te onderzoeken, terwijl daar wel veel interessante dingen over vallen te ontdekken. Daarvoor wil ik lezers verwijzen naar [17].

Referenties

[1] Hodges, W. (1993) *Model theory.* Cambridge England: Cambridge University Press (Encyclopedia of mathematics and its applications, v. 42).

[2] Mendelson, E. (2015) *Introduction to mathematical logic.* Sixth edn. Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis Group (Discrete Mathematics and Its Applications).

[3] Zelenyuk, Y. G. (2011) *Ultrafilters and topologies on groups.* Berlin: De Gruyter (De Gruyter expositions in mathematics, 50).

[4] Kenneth Kunen (1972) *Ultrafilters and Independent Sets*, Transactions of the American Mathematical Society, 172, pp. 299–306. doi: 10.1090/S0002-9947-1972-0314619-7.

[5] Alan Dow (1984) *On ultra powers of boolean algebras*, Topology Proceedings, 9, pp. 269-291. http://topology.auburn.edu/tp/

[6] Alan Dow (1985) *Good and ok ultrafilters*, Transactions of the American Mathematical Society, 290, pp. 145-160.

[7] Comfort, W. W. en Negrepontis, S. A. (1974) *The theory of ultrafilters.* Berlin: Springer-Verlag (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, 211)

[8] Chang, C.-C. en Keisler, H. J. (1990) *Model theory. 3rd edn.* Amsterdam: North-Holland (Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 73).

[9] Sierpinski, W. (1934) *Hypothése du continu.* Warszawa-Lwòw: Z subwencji Funduszu kultury narodowej (Monografje matematyczne, t. 4).

[10] Lay, S. R. (2020) *Analysis with an introduction to proof : compiled by technische wiskunde delft university of technology : tw1010 en tw 1040.* Amsterdam: Pearson.

[11] Antonovskij, M. Y. et al. (1981) *Rings of Real-Valued Continuous Functions. II*, Mathematische Zeitschrift, 176(2), pp. 151–186. doi: 10.1007/BF01261866.

[12] Sierpinski, W. (1958) *Cardinal and ordinal numbers.* Warszawa: Paǹstwowe Wydawn. Naukowe (Polska Akademia Nauk. Monografie matematyczne, t. 34).

[13] Engelen, A. J. M. en Hart, K. P. (2002) *Topologie*, dictaat

[14] Hausdorff, F. (1936) *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch.* Studia Mathematica 6, pp. 18-19

[15] G. Fichtenholz en L. Kantorovitch, (1934) *Sur les operations lineairs dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Mathematica 5, pp. 69—98.

[16] J. Roitman, (1982) *Non-isomorphic H-fields from non-isomorphic ultrapowers*, Mathematische Zeitschrift 181, pp. 93-96.

[17] J. van Mill, (1984) *An introduction to* $\beta\omega$, Handbook of set-theoretic topology, pp. 503-567