

Technische Universiteit Delft  
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica  
Delft Institute of Applied Mathematics

**Bolfuncties in  $\mathbb{R}^n$**   
**Spherical harmonics in  $\mathbb{R}^n$**

Verslag ten behoeve van het  
Delft Institute of Applied Mathematics  
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE**  
**in**  
**TECHNISCHE WISKUNDE**

door

**Anne van der Klein**

**Delft, Nederland**  
**Juli 2016**





**BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE**

**Bolfuncties in  $\mathbb{R}^n$**   
**Spherical harmonics in  $\mathbb{R}^n$**

Anne van der Klein

**Technische Universiteit Delft**

**Begeleider**

Dr.ir. W.G.M. Groenevelt

**Overige commissieleden**

Dr. D.C. Gijswijt

Drs. E.M. van Elderen

Juli, 2016

Delft



# Abstract

In de wiskunde hebben we bij het modelleren van fysische problemen vaak te maken met randwaardeproblemen. Voor een randwaardeprobleem met een cirkel als rand en een  $L_2$ -functie als randvoorwaarde, kan deze randvoorwaarde beschreven worden door een Fourierreeks. Hierdoor kan zo'n randwaardeprobleem makkelijker opgelost worden.

In dit werk wordt het uitdrukken van functies in Fourierreeksen in  $\mathbb{R}^2$  uitgebreid naar  $\mathbb{R}^n$  door bolfuncties in  $\mathbb{R}^n$  te gebruiken. Eerst wordt er een introductie gegeven in bolfuncties in  $\mathbb{R}^2$  en er wordt een aantal nuttige eigenschappen van deze functies besproken. Vervolgens worden enkele handigheden voor het werken in  $\mathbb{R}^n$  genoemd en komen de kwadratisch integreerbare functies aan bod. Tot slot zien we dat de eigenschappen van de bolfuncties in  $\mathbb{R}^2$  nog steeds gelden in  $\mathbb{R}^n$  en dat elke kwadratisch integreerbare functie op de eenheidssfeer te schrijven is als lineaire combinatie van bolfuncties.

# Inleiding

In de wiskunde hebben we bij het modelleren van fysische problemen vaak te maken met randwaardeproblemen, zie [5] voor voorbeelden van deze problemen, zoals het 2-dimensionale warmteprobleem binnen een cirkel. Een randvoorwaarde kan beschreven worden door een functie. Wanneer de rand een cirkel is, kunnen onder bepaalde voorwaarden Fourierreeksen gebruikt worden om die functie te beschrijven. Dit betekent dat de randvoorwaarde kan worden geschreven als een oneindige som van sinussen en cosinussen. De sinus en cosinus kunnen beschouwd worden als bolfuncties in het platte vlak,  $\mathbb{R}^2$ . Een aantal mooie eigenschappen van deze functies maakt het aantrekkelijk om andere functies daarin uit te drukken, zoals dat de functies harmonisch en homogeen zijn.

Het zou mooi zijn als ook voor functies gedefinieerd op de rand van de eenheidsbol in  $\mathbb{R}^n$  zo'n beschrijving bestaat. Dit blijkt ook zo te zijn, namelijk dit kan met bolfuncties in  $\mathbb{R}^n$ . Deze bolfuncties kunnen gedefinieerd worden met een aantal dezelfde eigenschappen als de sinus en cosinus in  $\mathbb{R}^2$ . In dit verslag zal daarom de beschrijving van bolfuncties in  $\mathbb{R}^n$  en zijn eigenschappen behandeld worden om uiteindelijk tot het uitdrukken van functies op de bolrand in deze bolfuncties te komen. Hierbij gebruiken we [3] als leidraad.

In hoofdstuk 1 wordt een introductie gegeven in bolfuncties in  $\mathbb{R}^2$  en er worden een aantal nuttige eigenschappen van deze functies besproken. Vervolgens worden in hoofdstuk 2 de handigheden voor het werken in  $\mathbb{R}^n$  genoemd en in hoofdstuk 3 komen de kwadratisch integreerbare functies aan bod. Tot slot zien we in hoofdstuk 4 dat de eigenschappen van de bolfuncties in  $\mathbb{R}^2$  nog steeds gelden in  $\mathbb{R}^n$  en dat elke kwadratisch integreerbare functie op de eenheidssfeer te schrijven is als lineaire combinatie van bolfuncties.

# Hoofdstuk 1

## Introductie

Ter introductie van bolfuncties zullen we eerst in  $\mathbb{R}^2$  gaan werken. Merk op dat we in  $\mathbb{R}^2$  gebruik maken van een  $x$ -as en een  $y$ -as. We beginnen met de Laplace-operator in  $\mathbb{R}^2$  te bekijken. Deze operator ziet er als volgt uit:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Vervolgens gaan we de Laplace-operator uitdrukken in poolcoördinaten. Met poolcoördinaten kunnen we  $x$  en  $y$  beschrijven door een hoek  $\phi$  en een straal  $r$  op de volgende manier:

$$x = r \cos(\phi) \text{ en } y = r \sin(\phi).$$

Dan kan de Laplace-operator als volgt geschreven worden:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

In een volgend hoofdstuk wordt in stelling 2.5 bewezen dat dit klopt. De Laplace-operator kan toegepast worden op een functie  $u$  en wanneer we dit gelijkstellen aan 0, krijgen we de Laplace vergelijking:

$$\Delta_2 u = 0. \tag{1.1}$$

In (1.1) de vergelijking de Laplace-operator in poolcoördinaten invullen geeft:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0. \tag{1.2}$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen door scheiding van variabelen toe te passen. We nemen daarvoor aan dat  $u$  te schrijven is in een functie van de straal keer een functie van de hoek, dus  $u(r, \phi) = X(r)Y(\phi)$ . Dan gaan we  $u(r, \phi) = X(r)Y(\phi)$  invullen in (1.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(r)Y(\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X(r)Y(\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X(r)Y(\phi)}{\partial \phi^2} &= 0 && \Leftrightarrow \\ Y(\phi) \frac{\partial^2 X(r)}{\partial r^2} + Y(\phi) \frac{1}{r} \frac{\partial X(r)}{\partial r} + \frac{X(r)}{r^2} \frac{\partial^2 Y(\phi)}{\partial \phi^2} &= 0 && \Leftrightarrow \\ \frac{r^2}{X(r)} \frac{\partial^2 X(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{X(r)} \frac{\partial X(r)}{\partial r} + \frac{1}{Y(\phi)} \frac{\partial^2 Y(\phi)}{\partial \phi^2} &= 0 && \Leftrightarrow \\ \frac{r^2}{X(r)} \frac{\partial^2 X(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{X(r)} \frac{\partial X(r)}{\partial r} &= -\frac{1}{Y(\phi)} \frac{\partial^2 Y(\phi)}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

De laatste vergelijking moet gelijk zijn aan een constante, die we  $\lambda$  noemen, want de vergelijking moet gelden voor alle  $r$  en  $\phi$ . Dan volgt:

$$-\frac{1}{Y(\phi)} \frac{\partial^2 Y(\phi)}{\partial \phi^2} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\partial^2 Y(\phi)}{\partial \phi^2} = -\lambda Y(\phi).$$

We zoeken de lineair onafhankelijke oplossingen van deze vergelijking. Eerst geven we alle oplossingen:

$$Y(\phi) = \begin{cases} e^{\sqrt{-\lambda}\phi}, e^{-\sqrt{-\lambda}\phi} & \text{als } \lambda < 0, \\ 1, \phi & \text{als } \lambda = 0, \\ \cos(\sqrt{\lambda}\phi), \sin(\sqrt{\lambda}\phi) & \text{als } \lambda > 0. \end{cases}$$

Een aantal oplossingen voldoen niet. We weten bijvoorbeeld dat een punt  $(r_0, \phi_0)$  gelijk moet zijn aan  $(r_0, \phi_0 + 2\pi k)$  met  $k \in \mathbb{Z}$ , dus  $Y$  moet een  $2\pi$  periodieke functie zijn. Dit betekent dat we alleen de lineair onafhankelijke functies  $1, \cos(\sqrt{\lambda}\phi), \sin(\sqrt{\lambda}\phi)$  hebben als oplossingen, waarbij  $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$ . We kunnen deze oplossingen ook schrijven als:

$$Y_{1,g}(\phi) = \cos(g\phi), \quad Y_{2,h}(\phi) = \sin(h\phi), \quad (1.3)$$

met  $g \in \mathbb{N}_0$  en  $h \in \mathbb{N}$ . Merk op dat (1.3) de eigenfuncties zijn van het gedeelte van de Laplace-operator dat afhangt van de hoek,  $\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ . De functies in (1.3) zijn de bolfuncties in  $\mathbb{R}^2$ , maar de bolfuncties zullen pas in hoofdstuk 4 gedefinieerd worden, dus zullen we ze nu gewoon aanduiden met  $Y_{i,j}$ .

We gaan een aantal eigenschappen van de functies  $Y_{i,j}$  laten zien. Hiervoor zullen we de  $Y_{i,j}$  beschouwen als functies op de eenheidscirkel. Als we namelijk kijken naar  $r^g \cos(g\phi)$  en  $r^h \sin(h\phi)$  op heel  $\mathbb{R}^2$ , dan geldt voor de beperking tot de eenheidscirkel ( $r = 1$ ) dat we de  $Y_{i,j}$  weer terug krijgen. We zullen nu  $(x + iy)^g$  en  $(x - iy)^g$  uitwerken door de formule van Euler,  $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ , te gebruiken:

$$\begin{aligned} (x + iy)^g &= (re^{i\phi})^g = r^g e^{ig\phi} = r^g (\cos(g\phi) + i \sin(g\phi)), \\ (x - iy)^g &= (re^{-i\phi})^g = r^g e^{-ig\phi} = r^g (\cos(g\phi) - i \sin(g\phi)). \end{aligned}$$

Nu kunnen  $r^g \cos(g\phi)$  en  $r^h \sin(h\phi)$  uitgedrukt worden in  $x$  en  $y$  door de vergelijkingen respectievelijk bij elkaar op te tellen en van elkaar af te trekken (en bij beide te delen door de constante):

$$\begin{aligned} r^g \cos(g\phi) &= \frac{1}{2}((x + iy)^g + (x - iy)^g) \stackrel{def}{=} H_{1,g}(x, y), \\ r^g \sin(g\phi) &= \frac{1}{2i}((x + iy)^g - (x - iy)^g) \stackrel{def}{=} H_{2,g}(x, y). \end{aligned}$$

Merk op dat de  $Y_{i,j}$  geschreven kunnen worden als polynomen beperkt tot de eenheidscirkel. De  $H_{i,j}$  zijn homogeen van graad  $g$ , zie hoofdstuk 4 voor de definitie van homogene functies. Dit zullen we voor  $H_{1,g}$  laten zien en voor  $H_{2,g}$  volgt het op dezelfde manier. We krijgen:

$$\begin{aligned} H_{1,g}(tx, ty) &= \frac{1}{2}((tx + ity)^g + (tx - ity)^g) \\ &= \frac{1}{2}(t^g(x + iy)^g + t^g(x - iy)^g) \\ &= t^g \frac{1}{2}((x + iy)^g + (x - iy)^g) \\ &= t^g H_{1,g}(x, y). \end{aligned}$$

Ook zijn de  $H_{i,j}$  harmonisch. Dit betekent dat ze voldoen aan de Laplace vergelijking. Dit laten we weer zien voor  $H_{1,g}$  en voor  $H_{2,g}$  kan het op gelijke wijze aangetoond worden. Er



volgt als we kijken naar de Laplace-operator in poolcoördinaten:

$$\begin{aligned}\Delta_2 H_{1,g} &= \frac{\partial^2 r^g \cos(g\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial r^g \cos(g\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 r^g \cos(g\phi)}{\partial \phi^2} \\ &= g(g-1)r^{g-2} \cos(g\phi) + gr^{g-2} \cos(g\phi) + r^{g-2} g^2 \cos(g\phi) \\ &= (g^2 - g)r^{g-2} \cos(g\phi) + gr^{g-2} \cos(g\phi) + g^2 r^{g-2} \cos(g\phi) \\ &= 0.\end{aligned}$$

De volgende eigenschap is de orthogonaliteit over de eenheidscirkel van de  $Y_{i,j}$  van verschillende graad. Dit houdt het volgende in:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(g\phi) \cos(h\phi) d\phi &= 0 \text{ als } g \neq h, \\ \int_0^{2\pi} \sin(g\phi) \sin(h\phi) d\phi &= 0 \text{ als } g \neq h, \\ \int_0^{2\pi} \cos(g\phi) \sin(h\phi) d\phi &= 0 \text{ voor alle } g \in \mathbb{N}_0 \text{ en } h \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Opnieuw zal alleen de eerste formule aangetoond worden, omdat de rest op gelijke wijze te laten zien is. Door de som- en verschilformules te gebruiken, komen we tot de volgende uitdrukking voor  $\cos(g\phi) \cos(h\phi)$ :

$$\cos(g\phi) \cos(h\phi) = \frac{1}{2} (\cos((g+h)\phi) + \cos((g-h)\phi)).$$

Dit passen we toe om de eerste integraal uit te rekenen:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(g\phi) \cos(h\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos((g+h)\phi) + \cos((g-h)\phi)) d\phi \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g+h} \sin((g+h)\phi) + \frac{1}{g-h} \sin((g-h)\phi) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tot slot merken we op dat een functie  $f$  gedefinieerd op de eenheidscirkel, d.w.z.  $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , ontwikkeld kan worden in een Fourierreeks als  $f \in L_2[0, 2\pi]$ . Dit betekent dat  $f$  geschreven kan worden als:

$$f(\phi) = \sum_{g=0}^{\infty} a_g \cos(g\phi) + \sum_{h=1}^{\infty} b_h \sin(h\phi) \text{ voor bijna alle } \phi,$$

met  $a_g$  en  $b_h$  constanten. Zo zien we dat de  $Y_{i,j}$  een volledige verzameling van functies op de eenheidscirkel vormen, aangezien elke "mooie" functie op  $[0, 2\pi)$  kan worden uitgedrukt in termen van  $Y_{i,j}$ . We hebben nu de volgende eigenschappen gezien van  $Y_{i,j}$ :

- (i) De  $Y_{i,j}$  zijn eigenfuncties van  $\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ .
- (ii)  $Y_{i,j}$  is gelijk aan een harmonisch homogeen polynoom dat beperkt is tot de eenheids-cirkel.
- (iii) De  $Y_{i,j}$  van verschillende graad zijn orthogonaal.
- (iv) De  $Y_{i,j}$  zijn een basis voor  $L_2[0, 2\pi]$ .

Wij zullen in de komende hoofdstukken deze resultaten veralgemeniseren naar hogere dimensies.

## Hoofdstuk 2

# Werken in $\mathbb{R}^n$

We willen bolfuncties in  $\mathbb{R}^n$  gaan bekijken. Daarvoor hebben we een aantal definities en stellingen nodig om te kunnen werken in  $\mathbb{R}^n$ . Dit zal in deze sectie besproken worden.

### 2.1 Bolcoördinaten en de sfeer in $\mathbb{R}^n$

We zullen bolcoördinaten in  $\mathbb{R}^n$  definiëren. Dit zullen we doen door een recursieve formule op te stellen, die we gaan uitleggen door naar  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  te kijken. We beginnen in  $\mathbb{R}^2$ . Hier kunnen we  $x$  en  $y$  uitdrukken in een straal  $r_2$  en een hoek  $\phi$  ofwel in poolcoördinaten. Dit geeft  $x = r_2 \sin(\phi)$  en  $y = r_2 \cos(\phi)$ , met  $r_2^2 = x^2 + y^2$ ,  $r_2 \geq 0$  en  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Merk op dat  $x$  en  $y$  meestal andersom gedefinieerd worden, wanneer er gebruik wordt gemaakt van poolcoördinaten. In dit geval is het handiger om het op deze manier te kiezen, omdat we willen uitbreiden naar bolcoördinaten in hogere dimensies. In  $\mathbb{R}^3$  kunnen we  $x, y$  en  $z$  op de volgende manier in bolcoördinaten schrijven:

$$\begin{aligned}x &= r_3 \sin(\theta) \sin(\phi) \\y &= r_3 \sin(\theta) \cos(\phi) \\z &= r_3 \cos(\theta),\end{aligned}$$

met  $r_3^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $r_3 \geq 0$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  en  $\theta \in [0, \pi]$ .

Deze coördinaten kunnen we krijgen uit de poolcoördinaten door het volgende te stellen:

$$r_2 = r_3 \sin \theta \text{ en } z = r_3 \cos \theta.$$

Op een zelfde wijze zullen we nu bolcoördinaten in  $\mathbb{R}^n$  definiëren.

**Definitie 2.1.** *Zij  $n \in \mathbb{N}_{>2}$ . Als het punt  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  de bolcoördinaat  $(r_{n-1}, \phi_2, \dots, \phi_{n-1})$  heeft, wordt de bolcoördinaat van het punt  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  gedefinieerd als  $(r_n, \phi_2, \dots, \phi_n)$ , waarvoor geldt*

$$r_{n-1} = r_n \sin(\phi_n) \text{ en } x_n = r_n \cos(\phi_n) \tag{2.1}$$

met  $r_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ,  $r_n \geq 0$  en  $\phi_n \in [0, \pi]$ .

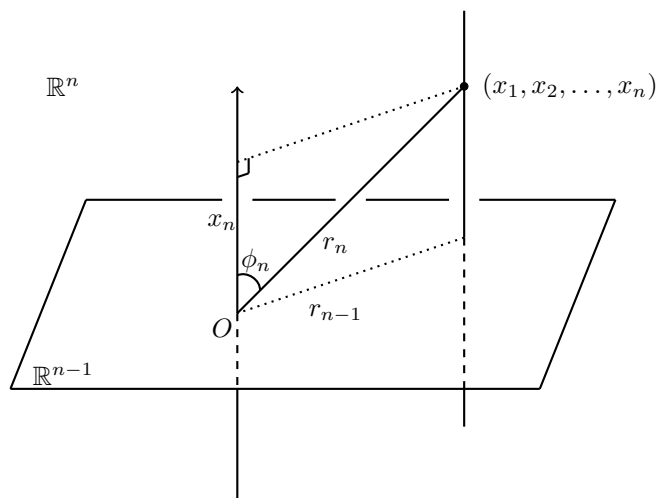
We kunnen  $r_n$  en  $\phi_n$  als functies van  $r_{n-1}$  en  $x_n$  zien, wanneer we van bolcoördinaten in  $\mathbb{R}^{n-1}$  naar bolcoördinaten in  $\mathbb{R}^n$  gaan. Dit wordt geïllustreerd in figuur 2.1.

Verder zullen we een definitie geven van de sfeer en een bol in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definitie 2.2.** *De  $(n-1)$ -sfeer met straal  $r$  en middelpunt  $\mathbf{x}_0$  is de verzameling*

$$S_r^{n-1}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r\}.$$

*De  $(n-1)$ -eenheidssfeer is de verzameling  $S^{n-1} = S_1^{n-1}(\mathbf{0})$ .*



Figuur 2.1: Om van  $\mathbb{R}^{n-1}$  naar  $\mathbb{R}^n$  te gaan, beschouwen we  $\mathbb{R}^{n-1}$  als een plat vlak en voegen we een nieuwe loodrechte richting toe.

**Definitie 2.3.** De open bol met straal  $r$  en middelpunt  $\mathbf{x}_0$  is de verzameling

$$B_r^n(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

De open eenheidsbol is de verzameling  $B^n = B_1^n(\mathbf{0})$ . De gesloten eenheidsbol is de verzameling  $\bar{B}^n(\mathbf{0}) = B^n(\mathbf{0}) \cup S^{n-1}(\mathbf{0})$ .

## 2.2 Laplace-operator in $\mathbb{R}^n$ in bolcoördinaten

We willen de Laplace-operator in bolcoördinaten uitdrukken. Hierbij maken we gebruik van [8]. We zullen eerst de Laplace-operator in  $\mathbb{R}^n$  definiëren.

**Definitie 2.4.** De Laplace-operator in  $\mathbb{R}^n$  wordt gegeven door

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

We willen de partiële afgeleiden van  $r_n$  en  $\phi_n$  vinden. We gebruiken de uitdrukkingen bij (2.1) om een functie  $T_n$  te maken:  $T_n : [0, \infty) \times [0, \pi) \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}$  met  $T_n(r_n, \phi_n) = (r_{n-1}, x_n) = (r_n \sin(\phi_n), r_n \cos(\phi_n))$ . Deze afbeelding is goed gedefinieerd en niet bijtief. Neem bijvoorbeeld  $r_n = 0$ , dan geldt voor elke  $\phi_n \in [0, \pi)$  dat het beeld het punt  $(0, 0)$  is. De afbeelding is wel continu differentieerbaar en daarom kunnen we de volgende functionaalmatrix opstellen:

$$T_n'(r_n, \phi_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{n-1}}{\partial r_n} & \frac{\partial x_n}{\partial r_n} \\ \frac{\partial r_{n-1}}{\partial \phi_n} & \frac{\partial x_n}{\partial \phi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\phi_n) & \cos(\phi_n) \\ r_n \cos(\phi_n) & -r_n \sin(\phi_n) \end{pmatrix}.$$

Nu hebben we de partiële afgeleiden van  $r_{n-1}$  en  $x_n$ . Merk op dat de determinant van deze matrix  $-r_n$  is. Neem nu een punt  $P = (r_n^{(0)}, \phi_n^{(0)})$  waarvoor geldt dat  $r_n^{(0)} \neq 0$ . Dan volgt er uit de inverse functie stelling dat er een open omgeving van  $P$  bestaat waar  $T_n$  een inverse heeft en waar bovendien geldt dat de functionaalmatrix van  $T_n^{-1}$  gelijk is aan de inverse van de functionaalmatrix van  $T_n$ . Dus we kunnen om de gewenste partiële afgeleiden

te krijgen de inverse van  $T'_n$  berekenen:

$$(T'_n)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_n}{\partial r_{n-1}} & \frac{\partial \phi_n}{\partial r_{n-1}} \\ \frac{\partial r_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{1}{-r_n} \begin{pmatrix} -r_n \sin(\phi_n) & -\cos(\phi_n) \\ -r_n \cos(\phi_n) & \sin(\phi_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\phi_n) & \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} \\ \cos(\phi_n) & -\frac{\sin(\phi_n)}{r_n} \end{pmatrix}.$$

We schrijven de partiële afgeleiden  $\frac{\partial}{\partial x}$  als  $D_x$ . Wanneer de kettingregel wordt toegepast, volgt dat

$$D_{r_{n-1}} = \frac{\partial r_n}{\partial r_{n-1}} \frac{\partial}{\partial r_n} + \frac{\partial \phi_n}{\partial r_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \phi_n} = \sin(\phi_n) D_{r_n} + \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n} \quad (2.2)$$

en

$$D_{x_n} = \frac{\partial r_n}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial r_n} + \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \phi_n} = \cos(\phi_n) D_{r_n} - \frac{\sin(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n}. \quad (2.3)$$

We gaan nu kijken naar  $D_{r_{n-1}}^2 + D_{x_n}^2$ , omdat deze vergelijking handig is om te bewijzen dat de uitdrukking van de Laplace-operator in bolcoördinaten correct is (bewijs stelling 2.5). We beginnen met  $D_{r_{n-1}}^2$  uit te schrijven. Dit doen we door de productregel van differentiatie toe te passen. We krijgen:

$$\begin{aligned} D_{r_{n-1}}^2 &= \left( \sin(\phi_n) D_{r_n} + \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n} \right) \left( \sin(\phi_n) D_{r_n} + \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n} \right) \\ &= \sin(\phi_n) \cdot 0 \cdot D_{r_n} + \sin(\phi_n) \cdot \sin(\phi_n) D_{r_n}^2 + \sin(\phi_n) \cdot -\frac{\cos(\phi_n)}{r_n^2} D_{\phi_n} \\ &\quad + \sin(\phi_n) \cdot \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} D_{r_n} D_{\phi_n} + \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} \cdot \cos(\phi_n) D_{r_n} + \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} \cdot \sin(\phi_n) D_{\phi_n} D_{r_n} \\ &\quad + \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} \cdot -\frac{\sin(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n} + \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} \cdot \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n}^2 \\ &= \sin^2(\phi_n) D_{r_n}^2 + \frac{2 \sin(\phi_n) \cos(\phi_n)}{r_n} D_{r_n} D_{\phi_n} + \frac{\cos^2(\phi_n)}{r_n} D_{r_n} \\ &\quad - \frac{2 \sin(\phi_n) \cos(\phi_n)}{r_n^2} D_{\phi_n} + \frac{\cos^2(\phi_n)}{r_n^2} D_{\phi_n}^2. \end{aligned}$$

Merk op dat  $D_{\phi_n} D_{r_n} = D_{r_n} D_{\phi_n}$ , omdat alle functies twee maal continu differentieerbaar zijn. Op deze manier kunnen we ook  $D_{x_n}^2$  uitschrijven. We vinden:

$$\begin{aligned} D_{x_n}^2 &= \left( \cos(\phi_n) D_{r_n} - \frac{\sin(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n} \right) \left( \cos(\phi_n) D_{r_n} - \frac{\sin(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n} \right) \\ &= \cos^2(\phi_n) D_{r_n}^2 - \frac{2 \cos(\phi_n) \sin(\phi_n)}{r_n} D_{r_n} D_{\phi_n} + \frac{\sin^2(\phi_n)}{r_n^2} D_{\phi_n}^2 \\ &\quad + \frac{\sin^2(\phi_n)}{r_n} D_{r_n} + \frac{\sin(\phi_n) \cos(\phi_n)}{r_n^2} D_{\phi_n}^2. \end{aligned}$$

Het optellen van deze twee uitdrukkingen geeft:

$$D_{r_{n-1}}^2 + D_{x_n}^2 = D_{r_n}^2 + \frac{1}{r_n^2} D_{\phi_n}^2 + \frac{1}{r_n} D_{r_n}. \quad (2.4)$$

Nu kunnen we de Laplace-operator uitdrukken in bolcoördinaten.

**Stelling 2.5.** (De Laplace-operator in bolcoördinaten)

$$\Delta_n = D_{r_n}^2 + \frac{n-1}{r_n} D_{r_n} + \frac{1}{r_n^2} \Delta_{S_{n-1}}, \quad (2.5)$$

waarbij  $\Delta_{S_{n-1}}$  een tweede orde differentiaaloperator is die niet afhangt van  $r_n$ , maar wel van  $\phi_2, \dots, \phi_n$  mag afhangen.

*Bewijs.* Deze formule wordt bewezen door middel van inductie. Voor  $n = 2$  geldt

$$\Delta_2 = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 \stackrel{(2.1)}{=} D_{r_1}^2 + D_{x_2}^2 \stackrel{(2.4)}{=} D_{r_2}^2 + \frac{1}{r_2} D_{r_2} + \frac{1}{r_2^2} D_{\phi_2}^2.$$

Dus voor  $n = 2$  klopt de formule.

Nu nemen we aan dat het waar is voor  $n - 1$  met  $n \in \mathbb{N}_{>2}$ . Dan volgt door gebruik te maken van vergelijking (2.2) en (2.4) en  $r_{n-1} = r_n \sin(\phi_n)$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sum_{i=1}^n D_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2 + D_{x_n}^2 = \frac{n-2}{r_{n-1}} D_{r_{n-1}} + \frac{1}{r_{n-1}^2} \Delta_{S_{n-2}} + D_{r_{n-1}}^2 + D_{x_n}^2 \\ &= \frac{n-2}{r_n \sin(\phi_n)} \left( \sin(\phi_n) D_{r_n} + \frac{\cos(\phi_n)}{r_n} D_{\phi_n} \right) + \frac{1}{r_n^2 \sin^2(\phi_n)} \Delta_{S_{n-2}} + \left( D_{r_n}^2 + \frac{1}{r_n^2} D_{\phi_n}^2 + \frac{1}{r_n} D_{r_n} \right) \\ &= \frac{n-2}{r_n} D_{r_n} + \frac{n-2}{r_n^2} \cot(\phi_n) D_{\phi_n} + \frac{1}{r_n^2 \sin^2(\phi_n)} \Delta_{S_{n-2}} + D_{r_n}^2 + \frac{1}{r_n^2} D_{\phi_n}^2 + \frac{1}{r_n} D_{r_n} \\ &= D_{r_n}^2 + \frac{n-1}{r_n} D_{r_n} + \frac{1}{r_n^2} \left( (n-2) \cot(\phi_n) D_{\phi_n} + \frac{1}{\sin^2(\phi_n)} \Delta_{S_{n-2}} + D_{\phi_n}^2 \right). \end{aligned}$$

Nu is  $\Delta_n$  van de vorm (2.5) met

$$\Delta_{S_{n-1}} = \frac{1}{r_n^2} \left( (n-2) \cot(\phi_n) D_{\phi_n} + \frac{1}{\sin^2(\phi_n)} \Delta_{S_{n-2}} + D_{\phi_n}^2 \right). \quad \square$$

### 2.3 Divergentiestelling in $\mathbb{R}^n$

We geven en bewijzen in deze sectie de divergentiestelling in  $\mathbb{R}^n$ . We maken daarvoor gebruik van [1].

Zij  $S$  een  $(n-1)$ -dimensionaal oppervlak en  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  de standaard basisvectoren in  $\mathbb{R}^n$ . Stel dat we  $S$  kunnen parametriseren met de functie  $\mathbf{f}$ , die gedefinieerd is op een  $(n-1)$ -dimensionaal vlak,  $A$ , en afhangt van  $n-1$  variabelen, ofwel  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  en  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , met  $\mathbf{f}(A) = S$ . De  $n-1$  variabelen waar  $\mathbf{f}$  van afhangt, noemen we  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ . De functie  $\mathbf{f}$  bestaat uit componenten  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , die allemaal afhangen van  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ . We kunnen nu een normaalvector op  $S$  bepalen met de vectoren  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_{n-1}}$ :

$$\mathbf{g} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

We kunnen  $\mathbf{g}$  zien als een vectorveld van normaalvectoren. Neem nu een punt  $P = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_{n-1}^{(0)}) \in A$ .  $P$  invullen in  $\mathbf{g}$  geeft een normaalvector in  $f(P)$  op  $S$ , ofwel  $\mathbf{g}(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_{n-1}^{(0)})$  is een normaalvector in  $f(P)$  op  $S$ . We duiden de normaalvector echter wel aan met  $\mathbf{n}$ . Merk op dat uit de definitie van een determinant volgt dat  $\mathbf{g}$  een normaalvector is en dat deze ongelijk is aan  $\mathbf{0}$ , omdat de vectoren  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_{n-1}}$  het raakvlak aan  $S$  opspannen (wanneer er een punt wordt ingevuld) en lineair onafhankelijk zijn. De gevonden normaalvector is geen eenheidsnormaal. We moeten delen door de lengte van de vector om deze eenheidsnormaal te vinden. We krijgen:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}.$$

Vervolgens gaan we  $d\Omega_{n-1}$  bekijken. De oppervlakte van een parallellogram dat opgespannen is door  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_{n-1}}$ , is gelijk aan de lengte van  $\mathbf{g}$ , dus gelijk aan  $\|\mathbf{g}\|$ . Nu kunnen we de oppervlakte-integraal over  $S$  definiëren.

**Definitie 2.6.** *Zij  $S$  een  $(n-1)$ -dimensionaal oppervlak in  $\mathbb{R}^n$ , dat beschreven kan worden met een functie zoals hierboven. Een oppervlakte-integraal over een functie  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en het oppervlak  $S$  wordt genoteerd met*

$$\int_S h \, d\Omega_{n-1},$$

waarbij  $d\Omega_{n-1}$  het differentiaal element op het oppervlak  $S$ , en is gelijk aan:

$$\int_S h \, d\Omega_{n-1} = \int_A h \|\mathbf{g}\| \, du_1 du_2 \dots du_{n-1} = \int_A h \|\mathbf{g}\| \, d^{n-1}u,$$

waarbij  $d^{n-1}u = du_1 du_2 \dots du_{n-1}$ .

Nu kunnen we met (2.6)  $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega_{n-1}$  uitwerken:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega_{n-1} = \int_A \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} \|\mathbf{g}\| \, d^{n-1}u = \int_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{g} \, d^{n-1}u. \quad (2.7)$$

Merk op dat  $\mathbf{g}$  niet per definitie de uitwendige normaal is, maar het kan ook de inwendige normaal zijn.

**Definitie 2.7.** *Een begrensde verzameling  $V \subset \mathbb{R}^n$  is een simple, solid region als er functies  $f_{1,i}, f_{2,i} : D_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$  bestaan zodanig dat  $V$  geschreven kan worden als*

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_i, \right. \\ \left. f_{1,i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq x_i \leq f_{2,i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right\} \text{ voor } 1 \leq i \leq n,$$

waarbij  $D_i$  de projectie van  $V$  is op het  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ -vlak is.

Een voorbeeld van een simple, solid region in  $\mathbb{R}^3$  is een kubus. Een kubus wordt namelijk in elke richting begrensd door 2 vlakken (zie figuur 2.2).

Voordat we de divergentiestelling kunnen bespreken, moeten we de nabla operator definiëren.

**Definitie 2.8.** *De nabla operator,  $\nabla$ , wordt in  $\mathbb{R}^n$  als volgt gedefinieerd:*

$$\nabla_n = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Ook geven we een definitie van de divergentie van een vectorveld.

**Definitie 2.9.** *Laat  $\mathbf{F}$  een continu differentieerbaar vectorveld zijn in  $\mathbb{R}^n$ . De divergentie van  $\mathbf{F}$  genoteerd door  $\nabla_n \cdot \mathbf{F}$  is:*

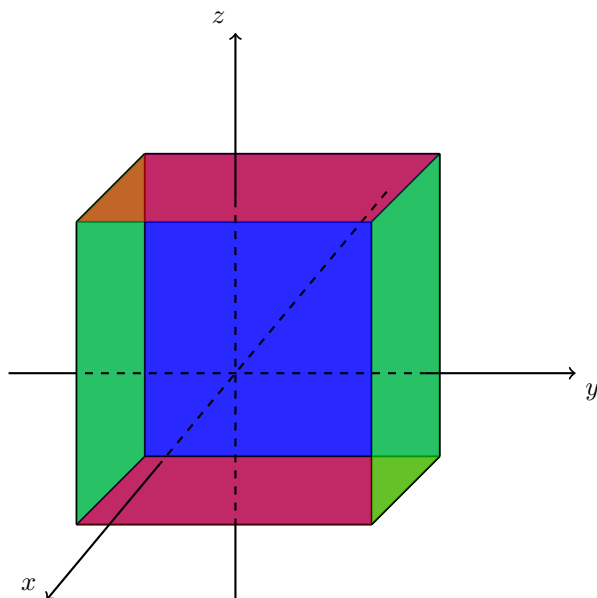
$$\nabla_n \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Nu gaan we de divergentiestelling geven en bewijzen voor een simple, solid region in  $\mathbb{R}^n$ .

**Stelling 2.10.** *(Divergentiestelling) Laat  $\mathbf{F}$  een continu differentieerbaar vectorveld zijn gedefinieerd in een omgeving van een simple, solid region  $V$  in  $\mathbb{R}^n$  met een stuksgewijs gladde rand  $\partial V$ . Dan*

$$\int_V \nabla_n \cdot \mathbf{F} \, d^n x = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega_{n-1}, \quad (2.8)$$

waar  $d^n x = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ,  $\mathbf{n}$  de uitwendige eenheidsnormaal op  $\partial V$  is en  $d\Omega_{n-1}$  het differentiaal element op het oppervlak op  $\partial V$ .



Figuur 2.2: Een kubus in  $\mathbb{R}^3$ . De vlakken van dezelfde kleur begrenzen het gebied in één richting

*Bewijs.* We kunnen  $\mathbf{F}$  schrijven als  $\mathbf{F} = P^{\{1\}}\mathbf{e}_1 + P^{\{2\}}\mathbf{e}_2 + \dots + P^{\{n\}}\mathbf{e}_n$ , waarbij  $P^{\{i\}}$  een functie van  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  is. Dan volgt

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P^{\{1\}}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + P^{\{2\}}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) + \dots + P^{\{n\}}(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n}) \quad (2.9)$$

en

$$\nabla_n \cdot \mathbf{F} = P_{x_1}^{\{1\}} + P_{x_2}^{\{2\}} + \dots + P_{x_n}^{\{n\}}. \quad (2.10)$$

Dus

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x &\stackrel{(2.10)}{=} \int_V \left( P_{x_1}^{\{1\}} + P_{x_2}^{\{2\}} + \dots + P_{x_n}^{\{n\}} \right) d^n x \\ &= \int_V P_{x_1}^{\{1\}} \, d^n x + \int_V P_{x_2}^{\{2\}} \, d^n x + \dots + \int_V P_{x_n}^{\{n\}} \, d^n x \end{aligned}$$

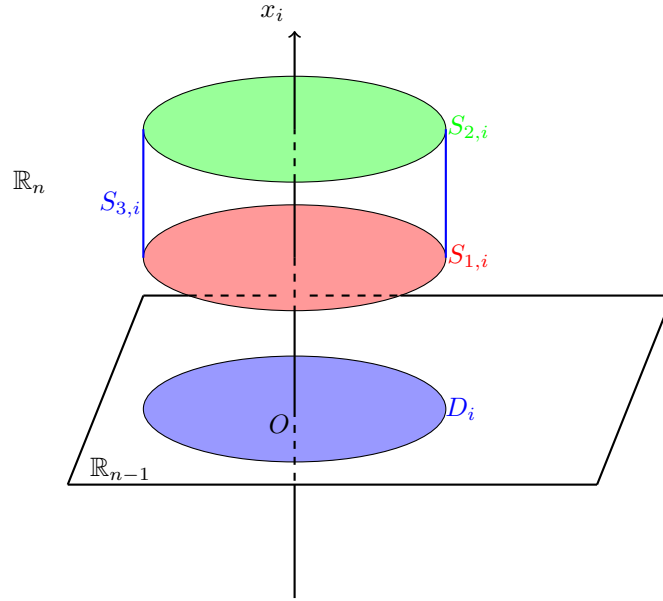
en

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega_{n-1} &\stackrel{(2.9)}{=} \int_{\partial V} \left( P^{\{1\}}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + P^{\{2\}}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) + \dots + P^{\{n\}}(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n}) \right) d\Omega_{n-1} \\ &= \int_{\partial V} P^{\{1\}}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} + \int_{\partial V} P^{\{2\}}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} + \dots + \int_{\partial V} P^{\{n\}}(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1}. \end{aligned}$$

We zien dat beide kanten van (2.8) te schrijven zijn in  $n$  stukken. Nu gaan we bewijzen dat deze stukken gelijk aan elkaar zijn ofwel

$$\int_V P_{x_i}^{\{i\}} \, d^n x = \int_{\partial V} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} \text{ voor } 1 \leq i \leq n. \quad (2.11)$$

Dit zullen we laten zien door gebruik te maken van het feit dat  $V$  een simple, solid region is. We kijken eerst naar de oppervlakte-integraal. Het oppervlak  $\partial V$  kunnen we in 3 stukken



Figuur 2.3: Een weergave van  $x_i$  begrensd door 2 functies. Er geldt  $S_{1,i} = \{x_i = f_{1,i}\}$ ,  $S_{2,i} = \{x_i = f_{2,i}\}$  en  $S_{3,i}$  een vlak evenwijdig aan de  $x_i$ -as dat  $S_{1,i}$  en  $S_{2,i}$  verbindt.

opdelen (zie figuur 2.3 ter verduidelijking):  $\partial V = S_{1,i} + S_{2,i} + S_{3,i}$ , met

$$\begin{aligned}
 S_{1,i} &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_i, x_i = f_{1,i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right\}, \\
 S_{2,i} &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_i, x_i = f_{2,i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right\}, \\
 S_{3,i} &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \partial D_i, f_{1,i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq \right. \\
 &\quad \left. x_i \leq f_{2,i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right\}.
 \end{aligned}$$

De oppervlakte-integraal kunnen we nu opsplitsen in 3 stukken:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial V} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} &= \\
 &= \int_{S_{1,i}} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} + \int_{S_{2,i}} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} + \int_{S_{3,i}} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Merk op dat

$$\int_{S_{3,i}} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} = 0,$$

want de  $i$ -de component van de normaalvector op vlak  $S_{3,i}$  is nul.

Op  $S_{1,i}$  geldt  $x_i = f_{1,i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Dit oppervlak kan geparametriseerd worden door

$$\mathbf{t}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_{i-1} \mathbf{e}_{i-1} + f_{1,i} \mathbf{e}_i + x_{i+1} \mathbf{e}_{i+1} + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$



Voor een normaal op  $S_{1,i}$  geldt volgens (2.6):

$$\mathbf{g} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_{i-1} & \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_{i+1} & \cdots & \mathbf{e}_n \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_{i-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial t_i}{\partial x_1} & \frac{\partial t_{i+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_{i-1}} & \cdots & \frac{\partial t_{i-1}}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial t_i}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial t_{i+1}}{\partial x_{i-1}} & \cdots & \frac{\partial t_n}{\partial x_{i-1}} \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial t_{i-1}}{\partial x_{i+1}} & \frac{\partial t_i}{\partial x_{i+1}} & \frac{\partial t_{i+1}}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial t_n}{\partial x_{i+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial t_{i-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial t_i}{\partial x_n} & \frac{\partial t_{i+1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial t_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_{i-1} & \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_{i+1} & \cdots & \mathbf{e}_n \\ & & & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} & & & \\ & & I_{i-1} & \vdots & & & O_{(i-1) \times (n-i)} \\ & & & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_{i-1}} & & & \\ & & & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_{i+1}} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ O_{(n-i) \times (i-1)} & & & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n} & & & I_{n-i} \end{pmatrix},$$

met  $I_i$  de  $i \times i$  eenheidsmatrix en  $O_{i \times j}$  de  $i \times j$  nulmatrix. Door te ontwikkelen naar de eerste rij en nog enkele berekeningen uit te voeren volgt dat:

$$\mathbf{g} = \begin{cases} \left( \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_{i-1}}, 1, \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n} \right) & \text{voor } i \text{ is even,} \\ - \left( \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_{i-1}}, 1, \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n} \right) & \text{voor } i \text{ is oneven.} \end{cases}$$

$S_{1,i}$  is het onderste vlak, dus voor de uitwendige normaalvector moet de  $i$ -de coördinaat negatief zijn, dus de  $i$ -de coördinaat is  $-1$ . Merk op dat als dit niet zo is voor de berekende vector, we  $\mathbf{g}$  door  $-\mathbf{g}$  kunnen vervangen om de uitwendige normaal te krijgen.

Er volgt  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g} = -1$ . Dus we krijgen:

$$\begin{aligned} \int_{S_{1,i}} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} &\stackrel{(2.7)}{=} \int_{D_i} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}) \, d^{n-1}x' \\ &= - \int_{D_i} P^{\{i\}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f_{1,i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \, d^{n-1}x', \end{aligned}$$

waarbij  $x' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Op dezelfde manier kunnen we de oppervlakte-integraal over  $S_{2,i}$  berekenen. Op  $S_{2,i}$  geldt  $x_i = f_{2,i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Dit oppervlak kan geparametriseerd worden door

$$\mathbf{u}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_{i-1} \mathbf{e}_{i-1} + f_{2,i} \mathbf{e}_i + x_{i+1} \mathbf{e}_{i+1} + \cdots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Met (2.6) kan weer een normaalvector gevonden worden:

$$\mathbf{g} = \begin{cases} \left( \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_{i-1}}, 1, \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_n} \right) & \text{voor } i \text{ is even,} \\ - \left( \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_{i-1}}, 1, \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_n} \right) & \text{voor } i \text{ is oneven.} \end{cases}$$

Bij het bovenste oppervlak is de  $i$ -de coördinaat van de uitwendige normaalvector positief. Dit geeft  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g} = 1$ . Dus er geldt

$$\int_{S_{2,i}} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} = \int_{D_i} P^{\{i\}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f_{2,i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \, d^{n-1}x'.$$

Dus er volgt:

$$\int_{\partial V} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1} = \int_{D_i} \left( P^{\{i\}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f_{2,i}, x_{i+1}, \dots, x_n) - P^{\{i\}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f_{1,i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right) \, d^{n-1}x'.$$

Voor de linkerkant van (2.11) geldt

$$\begin{aligned} \int_V P_{x_i}^{\{i\}} \, d^n x &= \int_{D_i} \int_{f_{1,i}}^{f_{2,i}} P_{x_i}^{\{i\}} \, dx_i \, d^{n-1}x' \\ &= \int_{D_i} \left( P^{\{i\}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f_{2,i}, x_{i+1}, \dots, x_n) - P^{\{i\}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f_{1,i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right) \, d^{n-1}x'. \end{aligned}$$

Dus voor elke  $i$  geldt:

$$\int_V P_{x_i}^{\{i\}} \, d^n x = \int_{\partial V} P^{\{i\}}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega_{n-1}.$$

Dus:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega_{n-1}. \quad \square$$

De divergentiestelling geldt niet alleen voor een simple, solid region, maar zelfs voor elk begrensd, gesloten en samenhangende gebied in  $\mathbb{R}^n$ .

# Hoofdstuk 3

## $L_2$ -ruimte

In dit hoofdstuk introduceren we de kwadratisch integreerbare functies.

### 3.1 Inwendig product

Eerst zal de definitie van een inwendig product gegeven worden.

**Definitie 3.1.** *Laat  $V$  een vectorruimte zijn. Een inwendig product op  $V$  is een functie  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  waarvoor geldt:*

- (i)  $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$  voor alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  en voor alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  voor alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,
- (iii)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  voor elke  $\mathbf{x} \in V$  en  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

*Een vectorruimte  $V$  samen met een inwendig product op  $V$  wordt een inwendig-productruimte genoemd.*

Het inwendig product op  $\mathbb{R}^n$  wordt genoteerd met  $\cdot$ , zoals we al in het vorige hoofdstuk hebben gezien. Merk op dat twee vectoren in een vectorruimte loodrecht op elkaar staan als hun inwendig product gelijk is aan 0. We zullen ook een norm definiëren.

**Definitie 3.2.** *Laat  $V$  een vectorruimte zijn. Een reëelwaardige functie  $\|\cdot\|$  wordt een norm op  $V$  genoemd als geldt:*

- (i)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  voor alle  $\mathbf{x} \in V$  en  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (ii)  $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$  voor alle  $\mathbf{x} \in V$  en  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- (iii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  voor alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

*Een vectorruimte  $V$  samen met een norm op  $V$  wordt een genormeerde ruimte genoemd.*

We kunnen ook een norm induceren met behulp van het inwendig product.

**Propositie 3.3.** *Laat  $V$  een inwendig-productruimte zijn. Dan definieert*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

*een norm op  $V$ . Dit wordt de door het inwendig product geïnduceerde norm genoemd.*

De volgende ongelijkheid geldt voor elke inwendig-productruimte.

**Propositie 3.4.** *(Cauchy-Schwarz ongelijkheid) Laat  $V$  een inwendig-productruimte zijn. Voor elke twee vectoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  geldt:*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \tag{3.1}$$

## 3.2 Hilbertruimte en volledigheid

We zullen beginnen met een aantal definities.

**Definitie 3.5.** In een genormeerde ruimte noemt men de rij  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  Cauchy, wanneer voor alle  $\epsilon > 0$  er een  $N \in \mathbb{N}$  bestaat zodanig dat

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon, \text{ voor alle } n, m \geq N.$$

**Definitie 3.6.** Een genormeerde ruimte  $V$  heet volledig als elke Cauchy-rij naar een punt in  $V$  convergeert.

Nu kunnen we een Hilbertruimte definiëren.

**Definitie 3.7.** Een Hilbertruimte is een inwendig-productruimte die volledig is onder de norm geïnduceerd door zijn inwendig product.

We zullen nu kijken naar de vectorruimte van kwadratisch integreerbare functies. Laat  $D$  een deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  een functie en  $\Omega$  het differentiaal element van integratie zijn. Deze functie  $f$  is kwadratisch integreerbaar als het volgende geldt:

$$\int_D f(\mathbf{x})^2 d\Omega < \infty.$$

We noteren de ruimte van kwadratisch integreerbare functies met  $L_2(D)$ . We definiëren het volgende inwendig product op de ruimte:

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\Omega \text{ voor alle } f, g \in L_2(D).$$

De norm op  $L_2(D)$  zullen we definiëren zoals in propositie 3.3, dus:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \text{ voor alle } f \in L_2(D).$$

**Stelling 3.8.** De inwendig-productruimte  $L_2(D)$ , zoals hierboven gedefinieerd, is een Hilbertruimte.

Deze stelling zullen we niet bewijzen. Voor een bewijs kan [2] geraadpleegd worden.

We maken met de volgende definitie duidelijk wat orthogonale en orthonormale verzamelingen zijn.

**Definitie 3.9.** Laat  $V$  een inwendig-productruimte zijn. Een verzameling  $S \subset V$  is orthogonaal als  $\mathbf{0} \notin S$  en elke twee verschillende vectoren in  $S$  orthogonaal zijn. Een orthogonale verzameling bestaande uit eenheidsvectoren wordt een orthonormale verzameling genoemd.

Stel we hebben een Hilbertruimte  $H$  en een orthonormale verzameling  $S \subset H$ . We willen graag weten wanneer we een  $f \in H$  uit kunnen drukken als een lineaire combinatie van de elementen in  $S$ . De volgende definitie kan hierbij helpen.

**Definitie 3.10.** Laat  $H$  een Hilbertruimte en  $S \subset H$  een orthonormale verzameling zijn.  $S$  is volledig als  $\langle f, s \rangle = 0$  voor alle  $s \in S$  impliceert dat  $f = 0$ .

## 3.3 Dichtheid

Om dichtheid te kunnen definiëren hebben we eerst een andere definitie nodig.

**Definitie 3.11.** Laat  $X$  een genormeerde ruimte zijn en  $A$  een deelverzameling van  $X$ . Een punt  $x \in X$  wordt een afsluitingspunt van  $A$  genoemd als  $U \cap A \neq \emptyset$  voor elke omgeving  $U$  van  $x$ . De verzameling van alle afsluitingspunten wordt de afsluiting van  $A$  genoemd en genoteerd als  $\bar{A}$ .

Nu geven we een definitie voor de dichtheid.

**Definitie 3.12.** *Laat  $X$  een genormeerde ruimte zijn en  $A$  een deelverzameling van  $X$ .  $A$  is dicht in  $X$  als  $\overline{A} = X$ .*

Laat nu  $S$  een compacte verzameling zijn. We zullen de vectorruimte van continue functies op  $S$  noteren als  $C(S)$ .

Tot slot geven we nog een stelling over de dichtheid van de continue functies in de kwadratisch integreerbare functies.

**Stelling 3.13.** *Laat  $S$  een compacte verzameling zijn. Dan ligt  $C(S)$  dicht in  $L_2(S)$  ten opzichte van de  $L_2$ -norm.*

# Hoofdstuk 4

## Bolfuncties

In dit hoofdstuk definiëren we bolfuncties in  $\mathbb{R}^n$  en bespreken we de stellingen en definities die daarvoor nodig zijn. Verder laten we op 2 manieren zien dat elke  $L_2(S^{n-1})$ -functie te schrijven is als een lineaire combinatie van bolfuncties.

### 4.1 Homogene en harmonische polynomen

**Definitie 4.1.** Een polynoom  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  is homogeen van graad  $g \in \mathbb{N}$  in de  $n$  variabelen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  als

$$p(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^g p(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ met } t \in \mathbb{R}.$$

Het volgende lemma zal goed van pas komen bij het bepalen van de dimensie van de ruimte van homogene polynomen.

**Lemma 4.2.** Voor  $|r| < 1$ ,

$$\frac{1}{(1-r)^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{j!(n-1)!} r^j. \quad (4.1)$$

*Bewijs.* We maken gebruik van de binomiaalstelling:

$$(1+r)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} r^j, \quad (4.2)$$

met

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j!}.$$

Er geldt:

$$\frac{1}{(1-r)^n} = (1-r)^{-n}.$$

Nu zien we dat we (4.2) kunnen toepassen door  $r$  te vervangen door  $-r$  en  $n$  door  $-n$ . Er

volgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-r)^n} &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n}{j} (-r)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-j+1)}{j!} (-1)^j r^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+j-1)}{j!} (-1)^j r^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+j-1)}{j!} r^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{j!(n-1)!} r^j. \quad \square
\end{aligned}$$

De ruimte met homogene polynomen van graad  $g$  in  $n$  variabelen zullen we  $V_{n,g}$  noemen.  $V_{n,g}$  is een vectorruimte. We willen nu de dimensie van deze vectorruimte bepalen.

**Propositie 4.3.**

$$\dim V_{n,g} = \frac{(n+g-1)!}{g!(n-1)!}.$$

*Bewijs.* In dit bewijs duiden we de dimensie van  $V_{n,g}$  aan met  $K(n,g)$ . We zullen deze propositie bewijzen door een recursieve formule op te stellen voor  $K(n,g)$ . Neem  $H_g \in V_{n,g}$ .  $H_g$  is een polynoom in  $n$  variabelen, die we aanduiden met  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . In variabele  $x_n$  is  $H_g$  een polynoom van hoogstens graad  $g$ . Stel namelijk dat  $H_g$  een macht van  $x_n$  groter dan  $g$  bevat, dan kan dit polynoom niet meer homogeen zijn van graad  $g$ , omdat  $H_g(\dots, tx_n)$  dan een macht van  $t$  groter dan  $g$  bevat. Dus we kunnen  $H_g$  op de volgende manier uitdrukken:

$$H_g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (4.3)$$

waarbij de  $h_{g-j}$  polynomen zijn in  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Er geldt zelfs dat de  $h_{g-j}$  homogeen zijn van graad  $g-j$  in hun  $n-1$  variabelen. Dit kunnen we laten zien door de homogeniteit van  $H_g$  te gebruiken:

$$t^g \sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j}(x_1, \dots, x_{n-1}) = H_g(tx_1, \dots, tx_n) = \sum_{j=0}^g (tx_n)^j h_{g-j}(tx_1, \dots, tx_{n-1}),$$

en dit geeft:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^g t^g x_n^j h_{g-j}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \sum_{j=0}^g t^j x_n^j h_{g-j}(tx_1, \dots, tx_{n-1}) && \Leftrightarrow \\
\sum_{j=0}^g x_n^j [t^g h_{g-j}(x_1, \dots, x_{n-1}) - t^j h_{g-j}(tx_1, \dots, tx_{n-1})] &= 0 && \Leftrightarrow \\
\sum_{j=0}^g x_n^j [t^{g-j} h_{g-j}(x_1, \dots, x_{n-1}) - h_{g-j}(tx_1, \dots, tx_{n-1})] &= 0.
\end{aligned}$$

We weten dat de verzameling  $\{1, x_n, x_n^2, \dots, x_n^g\}$  in de ruimte van polynomen met variabele  $x_n$  met graad  $\leq g$  lineair onafhankelijk is. Hieruit volgt nu dat

$$t^{g-j} h_{g-j}(x_1, \dots, x_{n-1}) - h_{g-j}(tx_1, \dots, tx_{n-1}) = 0,$$

ofwel

$$h_{g-j}(tx_1, \dots, tx_{n-1}) = t^{g-j} h_{g-j}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Dus  $h_{g-j} \in V_{n-1, g-j}$ . We definiëren een afbeelding

$$L_1 : V_{n-1, g} \times V_{n-1, g-1} \times \dots \times V_{n-1, 0} \rightarrow V_{n, g} : (h_g, h_{g-1}, \dots, h_0) \mapsto H_g,$$

door middel van vergelijking (4.3). Deze afbeelding is goed gedefinieerd, want het is duidelijk dat  $x_n^j$  homogeen is van graad  $j$  en we weten dat  $h_{g-j}$  is homogeen van graad  $g-j$ , dus  $x_n^j h_{g-j}$  is homogeen van graad  $g$ . Het optellen van homogene polynomen van graad  $g$  geeft weer een homogeen polynoom van graad  $g$ . Verder is  $L_1$  bijectief. Eerst laten we zien dat  $L_1$  injectief is. Neem  $H_g, H'_g \in V_{n, g}$ , waarvoor geldt:

$$H_g = \sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{j=0}^g x_n^j h'_{g-j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = H'_g.$$

We kunnen zien dat dit alleen klopt als  $h_{g-j} = h'_{g-j}$  voor  $0 \leq j \leq g$ . Dus  $L_1$  is injectief. Verder is  $L_1$  ook surjectief. Dit volgt direct uit de toelichting bij (4.3). We weten dat de dimensie van  $V_{n-1, g-j}$  gelijk is aan  $K(n-1, g-j)$  en vanwege de bijectie  $L_1$  kunnen we de dimensie van  $V_{n, g}$  als volgt uitdrukken:

$$K(n, g) = \sum_{j=0}^g K(n-1, g-j) = \sum_{j=0}^g K(n-1, j).$$

We hebben nu een recursieve formule gekregen voor  $K(n, g)$ . Laat nu  $G(n, r)$  de genererende functie voor  $K(n, g)$  met  $0 < |r| < 1$  zijn:

$$G(n, r) = \sum_{g=0}^{\infty} r^g K(n, g). \quad (4.4)$$

$G(n, r)$  kan nu anders geschreven worden door de hierboven gevonden recursieve relatie van  $K(n, g)$  te gebruiken:

$$\begin{aligned} G(n, r) &= \sum_{g=0}^{\infty} r^g K(n, g) \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} r^g \sum_{j=0}^g K(n-1, j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} K(n-1, j) \sum_{g=j}^{\infty} r^g \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} K(n-1, j) \sum_{g=0}^{\infty} r^{g+j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} K(n-1, j) r^j \sum_{g=0}^{\infty} r^g \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} K(n-1, j) r^j \frac{1}{1-r} \\ &= \frac{1}{1-r} \sum_{j=0}^{\infty} K(n-1, j) r^j, \end{aligned}$$



dus er geldt:

$$G(n, r) = \frac{G(n-1, r)}{1-r}.$$

Dit herhaaldelijk toepassen geeft:

$$G(n, r) = \frac{G(1, r)}{(1-r)^{n-1}}.$$

Merk op dat elk polynoom  $H \in V_{1,g}$  geschreven kan worden als  $H = cx_1^g$ , met  $c \in \mathbb{R}$  een constante, dus  $K(1, g) = 1$ . Daaruit volgt dat:

$$G(1, r) = \sum_{g=0}^{\infty} r^g = \frac{1}{1-r}.$$

Dus met lemma 4.2 vinden we:

$$G(n, r) = \frac{G(1, r)}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^n} = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{(n+g-1)!}{g!(n-1)!} r^g.$$

De uitdrukking voor  $G(n, r)$  vergelijken met de uitdrukking in (4.4) geeft het bewijs voor deze propositie.  $\square$

**Definitie 4.4.** Een functie  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  is harmonisch als

$$\Delta_n f = 0. \tag{4.5}$$

Merk op dat de Laplace-operator een lineaire operator is en dat de ruimte van harmonische homogene polynomen van graad  $g$  in  $n$  variabelen een vectorruimte is. Deze vectorruimte zal aangeduid worden met  $W_{n,g}$ . Vervolgens gaan we de dimensie van deze ruimte bepalen.

**Stelling 4.5.**

$$\dim W_{n,g} = \frac{2g+n-2}{n} \binom{g+n-3}{g-1}.$$

*Bewijs.* Laat  $H_g \in W_{n,g}$ . We kunnen  $H_g$  weer net als in (4.3) schrijven als:

$$H_g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

We gebruiken vervolgens dat  $H_g$  harmonisch is. Er volgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_n H_g \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \Delta_{n-1} \right) \sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j} + \Delta_{n-1} \sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j} \\ &= \sum_{j=2}^g j(j-1) x_n^{j-2} h_{g-j} + \sum_{j=0}^g x_n^j \Delta_{n-1} h_{g-j} \\ &= \sum_{j=0}^g (j+2)(j+1) x_n^j h_{g-j-2} + \sum_{j=0}^g x_n^j \Delta_{n-1} h_{g-j} \\ &= \sum_{j=0}^g x_n^j ((j+2)(j+1) h_{g-j-2} + \Delta_{n-1} h_{g-j}), \end{aligned}$$

waarbij we stellen dat  $h_{-1} = h_{-2} = 0$ . Uit de lineaire onafhankelijkheid van de verzameling  $\{1, x_n, x_n^2, \dots, x_n^g\}$  in de ruimte van polynomen met variabele  $x_n$  met graad  $\leq g$  volgt:

$$(j+2)(j+1)h_{g-j-2} + \Delta_{n-1}h_{g-j} = 0 \text{ voor } 0 \leq j \leq g,$$

ofwel,

$$h_{g-j-2} = -\frac{\Delta_{n-1}h_{g-j}}{(j+2)(j+1)} \text{ voor } 0 \leq j \leq g. \quad (4.6)$$

Dit is een recursieve relatie waar  $h_{g-j}$  aan moet voldoen. Merk op dat alle  $h_{g-j}$  vastliggen zodra  $h_g$  en  $h_{g-1}$  gekozen zijn. We maken een afbeelding

$$L_2 : V_{n-1,g} \times V_{n-1,g-1} \rightarrow W_{n,g} : (h_g, h_{g-1}) \mapsto H_g,$$

vastgelegd door (4.3) en (4.6). We weten dat  $\sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  een homogeen polynoom geeft (zie bewijs stelling 4.3) en uit (4.6) volgt dat als  $h_g$  en  $h_{g-1}$  gekozen worden, er een harmonisch polynoom ontstaat, dus de afbeelding is goed gedefinieerd.  $L_2$  is injectief. Neem  $H_g, H'_g \in W_{n,g}$ , waarvoor geldt:

$$H_g = \sum_{j=0}^g x_n^j h_{g-j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{j=0}^g x_n^j h'_{g-j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = H'_g.$$

Er volgt dat  $h_{g-j} = h'_{g-j}$  voor  $0 \leq j \leq g$ , in het bijzonder  $h_g = h'_g$  en  $h_{g-1} = h'_{g-1}$ . Surjectiviteit volgt weer uit de uitleg bij (4.3). Dus  $L_2$  is bijectief. Nu kunnen we de dimensie van  $W_{n,g}$  berekenen met propositie (4.3):

$$\begin{aligned} \dim W_{n,g} &= \dim V_{n-1,g} + \dim V_{n-1,g-1} \\ &= \frac{(n+g-2)!}{g!(n-2)!} + \frac{(n+g-3)!}{(g-1)!(n-2)!} \\ &= \frac{n+g-2}{g} \frac{(n+g-3)!}{(g-1)!(n-2)!} + \frac{(n+g-3)!}{(g-1)!(n-2)!} \\ &= \frac{2g+n-2}{g} \frac{(n+g-3)!}{(g-1)!(n-2)!} \\ &= \frac{2g+n-2}{g} \binom{n+g-3}{g-1}. \quad \square \end{aligned}$$

## 4.2 Bolfuncties en orthogonaliteit

We kunnen nu bolfuncties definiëren.

**Definitie 4.6.** Een functie  $Y_g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  is een bolfunctie van graad  $g$  als er een  $H_g \in W_{n,g}$  bestaat zodanig dat  $Y_g(\boldsymbol{\xi}) = H_g(\boldsymbol{\xi}) \forall \boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}$ . Dit kunnen we schrijven als  $Y_g = H_g|_{S^{n-1}}$ . Met andere woorden, een bolfunctie van graad  $g$  is een harmonisch en homogeen polynoom van graad  $g$  in  $n$  variabelen beperkt tot de  $(n-1)$ -eenheidsfeer.

We zullen verder in dit hoofdstuk de vector  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  noteren met  $\mathbf{x}$  en zijn Euclidische norm  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  met  $\|\mathbf{x}\|$  of met  $r_n$ .  $\boldsymbol{\xi}$  zal een eenheidsvector aanduiden, dus  $\|\boldsymbol{\xi}\| = 1$ . Dan kunnen we  $\mathbf{x}$  schrijven als  $\mathbf{x} = r_n \boldsymbol{\xi}$  met  $\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}$ .

We zullen nu laten zien dat de bolfuncties eigenfuncties zijn van  $\Delta_{S^{n-1}}$ .

**Propositie 4.7.**

$$\Delta_{S^{n-1}} Y_g = g(2-n-g) Y_g. \quad (4.7)$$

*Bewijs.* Zij  $Y_g$  een bolfunctie en  $H_g \in W_{n,g}$  zodanig dat  $Y_g(\boldsymbol{\xi}) = H_g(\boldsymbol{\xi}) \forall \boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}$ . Voor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  geldt:

$$H_g(\mathbf{x}) = H_g(r_n \boldsymbol{\xi}) = r_n^g H_g(\boldsymbol{\xi}) = r_n^g Y_g(\boldsymbol{\xi}).$$

Nu wordt de formule van stelling 2.5 toegepast en het feit dat  $H_g$  harmonisch is:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_n H_g = \Delta_n (r_n^g Y_g) = D_{r_n}^2 (r_n^g Y_g) + \frac{n-1}{r_n} D_{r_n} (r_n^g Y_g) + \frac{1}{r_n^2} \Delta_{S_{n-1}} (r_n^g Y_g) \\ &= g(g-1) r_n^{g-2} Y_g + \frac{n-1}{r_n} g r_n^{g-1} Y_g + \frac{1}{r_n^2} r_n^g \Delta_{S_{n-1}} Y_g \\ &= g(g-1) r_n^{g-2} Y_g + (n-1) g r_n^{g-2} Y_g + r_n^{g-2} \Delta_{S_{n-1}} Y_g \\ &= r_n^{g-2} [g(n+g-2) Y_g + \Delta_{S_{n-1}} Y_g]. \end{aligned}$$

Dus er geldt:

$$g(n+g-2) Y_g + \Delta_{S_{n-1}} Y_g = 0 \Leftrightarrow \Delta_{S_{n-1}} Y_g = g(2-n-g) Y_g. \quad \square$$

We zullen eerst een formule afleiden, die goed van pas komt om te bewijzen dat bolfuncties orthogonaal zijn op de sfeer.

**Lemma 4.8.** *Als  $H_g \in V_{n,g}$ , dan geldt:*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H_g(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} x_i = g H_g(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.8)$$

*Bewijs.* In definitie 4.1 kan  $tx_i$  vervangen worden door  $u_i$  voor alle  $i$  en naar  $t$  differentiëren geeft door gebruik te maken van de kettingregel:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_g(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} &= g t^{g-1} H_g(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_g(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i} x_i &= g t^{g-1} H_g(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Neem nu  $t = 1$  en we vinden:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H_g(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} x_i = g H_g(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad \square$$

Nu laten we zien dat bolfuncties van verschillende graad orthogonaal zijn over de sfeer.

**Stelling 4.9.** *Laat  $Y_g$  en  $Y_h$  twee bolfuncties zijn. Dan geldt*

$$\int_{S^{n-1}} Y_g(\boldsymbol{\xi}) Y_h(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1} = 0, \text{ als } g \neq h.$$

*Bewijs.* We kijken naar de polynomen  $H_g \in W_{n,g}$  en  $H_h \in W_{n,h}$ , waarvoor geldt dat  $Y_g = H_g|_{S^{n-1}}$  en  $Y_h = H_h|_{S^{n-1}}$ . Merk op dat voor elke  $\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}$  geldt dat  $\boldsymbol{\xi}$  zelf een normaalvector is op  $S^{n-1}$ . Vervolgens passen we de divergentiestelling toe met  $\mathbf{F} = H_g \nabla_n H_h$  en  $\mathbf{F} = H_h \nabla_n H_g$ :

$$\begin{aligned} \int_{B^n} \nabla_n \cdot (H_g(\mathbf{x}) \nabla_n H_h(\mathbf{x})) d^n x &= \int_{S^{n-1}} (H_g(\boldsymbol{\xi}) \nabla_n H_h(\boldsymbol{\xi})) \cdot \boldsymbol{\xi} d\Omega_{n-1}, \\ \int_{B^n} \nabla_n \cdot (H_h(\mathbf{x}) \nabla_n H_g(\mathbf{x})) d^n x &= \int_{S^{n-1}} (H_h(\boldsymbol{\xi}) \nabla_n H_g(\boldsymbol{\xi})) \cdot \boldsymbol{\xi} d\Omega_{n-1}. \end{aligned}$$

Deze 2 vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft:

$$\begin{aligned} & \int_{B^n} \nabla_n \cdot \left( H_g(\mathbf{x}) \nabla_n H_h(\mathbf{x}) - H_h(\mathbf{x}) \nabla_n H_g(\mathbf{x}) \right) d^n x \\ &= \int_{S^{n-1}} \left( H_g(\boldsymbol{\xi}) \nabla_n H_h(\boldsymbol{\xi}) - H_h(\boldsymbol{\xi}) \nabla_n H_g(\boldsymbol{\xi}) \right) \cdot \boldsymbol{\xi} d\Omega_{n-1} \end{aligned}$$

De linkerkant van de vergelijking uitwerken geeft, als we gebruiken dat  $\nabla_n \cdot \nabla_n = \Delta_n$  en dat  $H_g$  en  $H_h$  harmonisch zijn:

$$\begin{aligned} & \int_{B^n} \nabla_n \cdot \left( H_g(\mathbf{x}) \nabla_n H_h(\mathbf{x}) - H_h(\mathbf{x}) \nabla_n H_g(\mathbf{x}) \right) d^n x \\ &= \int_{B^n} \left( \nabla_n H_g(\mathbf{x}) \nabla_n H_h(\mathbf{x}) + H_g(\mathbf{x}) \Delta_n H_h(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. - \nabla_n H_h(\mathbf{x}) \nabla_n H_g(\mathbf{x}) - H_h(\mathbf{x}) \Delta_n H_g(\mathbf{x}) \right) d^n x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Er volgt:

$$\int_{S^{n-1}} \left( H_g(\boldsymbol{\xi}) \nabla_n H_h(\boldsymbol{\xi}) - H_h(\boldsymbol{\xi}) \nabla_n H_g(\boldsymbol{\xi}) \right) \cdot \boldsymbol{\xi} d\Omega_{n-1} = 0$$

Door  $\boldsymbol{\xi}$  in te vullen in (4.8) volgt dat:

$$\nabla_n H_g(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_g(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_i} \xi_i = g H_g(\boldsymbol{\xi}).$$

Dus:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^{n-1}} \left( H_g(\boldsymbol{\xi}) \nabla_n H_h(\boldsymbol{\xi}) - H_h(\boldsymbol{\xi}) \nabla_n H_g(\boldsymbol{\xi}) \right) \cdot \boldsymbol{\xi} d\Omega_{n-1} \\ &= \int_{S^{n-1}} \left( H_g(\boldsymbol{\xi}) (h H_h(\boldsymbol{\xi})) - H_h(\boldsymbol{\xi}) (g H_g(\boldsymbol{\xi})) \right) d\Omega_{n-1} \\ &= (h - g) \int_{S^{n-1}} \left( H_g(\boldsymbol{\xi}) H_h(\boldsymbol{\xi}) \right) d\Omega_{n-1} \\ &= (h - g) \int_{S^{n-1}} \left( Y_g(\boldsymbol{\xi}) Y_h(\boldsymbol{\xi}) \right) d\Omega_{n-1}, \end{aligned}$$

want op  $S^{n-1}$  geldt dat  $H_g(\boldsymbol{\xi}) = Y_g(\boldsymbol{\xi})$  en  $H_h(\boldsymbol{\xi}) = Y_h(\boldsymbol{\xi})$ . We hadden aangenomen dat  $g \neq h$  en nu kunnen we concluderen dat:

$$\int_{S^{n-1}} \left( Y_g(\boldsymbol{\xi}) Y_h(\boldsymbol{\xi}) \right) d\Omega_{n-1} = 0. \quad \square$$

Laten we nu kijken naar een onafhankelijke verzameling bolfuncties van graad  $g$  ter grootte van  $\dim W_{n,g}$ . Met het orthonormalisatie proces van Gram-Schmidt kan er een orthonormale verzameling gemaakt worden, dat wil zeggen:

$$\{Y_{g,i}\}_{i=1}^{\dim W_{n,g}} \text{ met } \int_{S^{n-1}} Y_{g,i}(\boldsymbol{\xi}) Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}. \quad (4.9)$$

Verder in dit hoofdstuk zal met  $\{Y_{g,i}\}_{i=0}^{\dim W_{n,g}}$  telkens een orthonormale verzameling van bolfuncties aanduiden zoals in (4.9).

### 4.3 Functies uitdrukken in bolfuncties

We laten in deze sectie zien dat de verzameling bolfuncties van alle graden met het maximale aantal onafhankelijke bolfuncties elke  $L_2(S^{n-1})$ -functie kan beschrijven. Dit kunnen we op verschillende manieren doen. We beschrijven er 2. De ene methode gebruikt dat alle polynomen uit te drukken zijn in polynomen uit  $W_{n,g}$  en de andere methode laat zien dat bolfuncties een basis vormen voor  $C(S^{n-1})$ -functies.

Bij beide methoden zullen kijken naar de verzameling

$$Y = \{Y_{g,j} | g \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq \dim W_{n,g}\} \quad (4.10)$$

met het maximale aantal orthogonale bolfuncties van alle graden. De dubbele sommatie  $\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\dim W_{n,g}}$  zal genoteerd worden als  $\sum_{g,j}$ .

#### 4.3.1 Methode 1

Er geldt dat elk homogeen polynoom in  $\mathbf{x}$  geschreven kan worden als een som van harmonische homogene polynomen keer een macht van  $\|\mathbf{x}\|$ . Stelling 4.10 zal duidelijk maken op welke manier dat kan. We maken hierbij gebruik van [6] en [4]. Eerst gaan we een inwendig product definiëren op de ruimte  $V_{n,g}$ . Hiervoor beginnen we met het invoeren van een aantal notaties. Laat  $\alpha$  een  $n$ -dimensionale multi-index zijn, i.e. een  $n$ -tuple van niet-negatieve gehele getallen genoteerd door  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Dan geldt voor een vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  dat  $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  en we hebben  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$  en  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ . Verder bedoelen we met  $\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$  dat

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Zij  $H \in V_{n,g}$ . Dan kunnen we  $H$  schrijven als  $H = \sum_{|\alpha|=g} h_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ . We definiëren bij elk polynoom  $H$  een differentiaaloperator  $H(D)$  als volgt:

$$H(D) = \sum_{|\alpha|=g} h_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha}.$$

Nu kunnen we ook het inwendig product op  $V_{n,g}$  definiëren:

$$\langle H, F \rangle = H(D)(F), \text{ voor alle } H, F \in V_{n,g}. \quad (4.11)$$

Dit inwendig product uitwerken voor  $H, F \in V_{n,g}$ , waarvoor geldt  $H = \sum_{|\alpha|=g} h_\alpha \mathbf{x}^\alpha$  en  $F = \sum_{|\beta|=g} f_\beta \mathbf{x}^\beta$ , geeft:

$$\begin{aligned} \langle H, F \rangle &= H(D)(F) \\ &= \sum_{|\alpha|=g} h_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \left( \sum_{|\beta|=g} f_\beta \mathbf{x}^\beta \right) \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta|=g} h_\alpha f_\beta \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathbf{x}^\beta \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta|=g} h_\alpha f_\beta \delta_{\alpha\beta} \alpha!, \end{aligned}$$

waarbij  $\delta_{\alpha\beta} = 1$  als  $\alpha = \beta$  en  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  als  $\alpha \neq \beta$ . Merk op dat door deze uitwerking vrij makkelijk na te gaan is dat dit daadwerkelijk een inwendig product is.

Dit gebruiken we in het bewijs van de volgende stelling.

**Stelling 4.10.** *Laat  $H \in V_{n,g}$ . Dan kan  $H$  op een unieke manier geschreven worden als*

$$H(\mathbf{x}) = H_g(\mathbf{x}) + \|\mathbf{x}\|^2 H_{g-2}(\mathbf{x}) + \dots + \|\mathbf{x}\|^{2k} H_{g-2k}(\mathbf{x}), \quad (4.12)$$

waarbij  $k = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$  en  $H_{g-2i}$  voor  $0 \leq i \leq k$  harmonische homogene polynomen zijn van graad  $g - 2i$ .

*Bewijs.* Merk op dat elk polynoom van graad 0 of 1 harmonisch is. Nu laten we zien dat elke  $H \in V_{n,g}$  voor  $g \geq 2$  uniek geschreven kan worden als

$$H = F_1 + \|\mathbf{x}\| F_2, \quad (4.13)$$

waarbij  $F_1 \in W_{n,g}$  en  $F_2 \in V_{n,g-2}$  en dan volgt de stelling door inductie toe te passen. We definiëren eerst een afbeelding  $\phi : V_{n,g} \rightarrow V_{n,g-2}$ ,  $H \mapsto \Delta H$ . Deze afbeelding is surjectief. Merk eerst op dat voor de differentiaal operator bij  $C = \|\mathbf{x}\|^2$  geldt dat die gelijk is aan:

$$C(D) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \Delta. \quad (4.14)$$

Neem aan dat  $\phi$  niet surjectief is. Dan bestaat er een polynoom  $F \in V_{n,g-2}$  ongelijk aan het nulpolynoom, waarvoor geldt dat  $F$  orthogonaal is ten opzichte van het beeld van  $\phi$ . In het bijzonder is  $F$  orthogonaal ten opzichte van  $\Delta H$  met  $H = \|\mathbf{x}\|^2 F \in V_{n,g}$ . Er volgt met behulp van (4.14):

$$0 = \langle F, \Delta H \rangle = F(D)(\Delta H) = \Delta(F(D)H) = \Delta F(D)(H) = \langle \|\mathbf{x}\|^2 F, H \rangle = \langle H, H \rangle.$$

Hieruit volgt dat  $H = 0$  ofwel  $\|\mathbf{x}\|^2 F = 0$ . Dit geeft een tegenspraak. Dus  $\phi$  is surjectief. De kern van  $\phi$  is gelijk aan  $\{\Delta H = 0 | H \in V_{n,g}\} = W_{n,g}$  en  $\phi$  is surjectief, dus er volgt dat  $\dim V_{n,g} = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{im}(\phi)) = \dim(W_{n,g}) + \dim(V_{n,g-2})$ . We laten vervolgens zien dat  $W_{n,g}$  het orthogonaal complement is van  $\|\mathbf{x}\|^2 V_{n,g-2} = \{\|\mathbf{x}\|^2 F | F \in V_{n,g-2}\} \subset V_{n,g}$ , waaruit volgt dat  $V_{n,g}$  te schrijven is als de volgende directe som:

$$V_{n,g} = W_{n,g} \oplus \|\mathbf{x}\|^2 V_{n,g-2}.$$

Hieruit kunnen we dan concluderen dat (4.13) klopt. Neem  $F_1 \in W_{n,g}$  en  $F_2 \in V_{n,g}$ , dan geldt:

$$\langle \|\mathbf{x}\|^2 F_2, F_1 \rangle = \langle F_2, \Delta F_1 \rangle = 0.$$

Dus  $W_{n,g}$  is het orthogonaal complement van  $\|\mathbf{x}\|^2 V_{n,g-2}$ .  $\square$

**Gevolg 4.11.** *Elk polynoom beperkt tot  $S^{n-1}$  is te schrijven als een eindige som van bolfuncties.*

*Bewijs.* Zij  $p$  een polynoom van graad  $g$ . Dit polynoom kan geschreven worden als een eindige som van homogene polynomen van graad  $\leq g$ . Volgens (4.12) kunnen die homogene polynomen uitgedrukt worden in harmonisch homogene polynomen keer een macht van  $\|\mathbf{x}\|$ . Voor alle  $\xi \in S^{n-1}$  geldt dat  $\|\xi\| = 1$ , dus  $p$  beperken tot  $S^{n-1}$  geeft een uitdrukking in harmonisch homogene polynomen beperkt tot  $S^{n-1}$  en dat zijn precies de bolfuncties.  $\square$

We willen laten zien dat de bolfuncties dicht liggen in de continue functie op de eenheidssfeer. Daarvoor kunnen we de stelling van Stone-Weierstrass gebruiken, maar voor deze stelling hebben we eerst een aantal definities nodig.

**Definitie 4.12.** *Laat  $X$  een niet-lege verzameling zijn. Een algebra  $A$  van functies op  $X$  is een deelverzameling van de reëelwaardige functies op  $X$  met de volgende eigenschappen:*

- (i) Als  $f, g \in A$ , dan  $f + g \in A$  en  $fg \in A$ ,
- (ii) Als  $c \in \mathbb{R}$  en  $f \in A$ , dan  $cf \in A$ .

**Definitie 4.13.** Laat  $X$  een niet-lege verzameling zijn. Dan wordt de uniforme norm voor een begrensde functie op  $X$  gedefinieerd door

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

**Definitie 4.14.** Laat  $X$  een niet-lege verzameling zijn. Een deelverzameling  $B$  van de reëelwaardige functies op  $X$  scheidt de punten van  $X$  als voor alle  $x, y \in X$  met  $x \neq y$  er een functie  $f \in B$  bestaat zodanig dat  $f(x) \neq f(y)$ .

Nu kunnen we de stelling van Stone-Weierstrass geven.

**Stelling 4.15.** Laat  $S$  een compacte verzameling zijn en laat  $A$  een algebra van reëelwaardige continue functies op  $S$  zijn. Neem aan dat  $A$  de punten van  $S$  scheidt en alle constante functies bevat. Dan is de uniforme afsluiting van  $A$  gelijk aan alle reële continue functies op  $S$  ofwel  $A$  ligt dicht in de continue functies op  $S$  ten opzichte van de uniforme norm.

Voor een bewijs van deze stelling kan [7] geraadpleegd worden. Verder vinden we in [7] ook het volgende gevolg.

**Gevolg 4.16.** Laat  $S$  een compacte verzameling zijn in  $\mathbb{R}^n$ . Elke reële continue functie op  $S$  kan uniform benaderd worden door polynomen in  $n$  variabelen.

*Bewijs.* De verzameling van polynomen in  $n$  variabelen bevat de constante functies en scheidt duidelijk de punten van  $\mathbb{R}^n$ . Nu kan de stelling toegepast worden.  $\square$

**Stelling 4.17.** De verzameling van bolfuncties  $Y$  ligt dicht in  $L_2(S^{n-1})$  ten opzichte van de  $L_2$ -norm.

*Bewijs.* We laten zien dat  $Y$  dicht ligt in  $C(S^{n-1})$  en dan volgt de stelling direct uit stelling 3.13. Gevolg 4.16 geeft dat de polynomen op  $S^{n-1}$  dicht liggen in  $C(S^{n-1})$  en omdat alle polynomen als eindige som van bolfuncties te schrijven zijn (gevolg 4.11), geldt dat  $Y$  ook dicht ligt in  $C(S^{n-1})$ .  $\square$

Uit deze stelling volgt direct dat elke  $f \in L_2(S^{n-1})$  te schrijven is als een lineaire combinatie van bolfuncties, ofwel

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{g,j} c_{g,j} Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) \text{ voor bijna alle } \boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}, \quad (4.15)$$

waarbij  $c_{g,j}$  constanten zijn.

### 4.3.2 Methode 2

We beginnen met het definiëren van ultrasferische polynomen en daarna laten we zien dat de bolfuncties een basis vormen voor  $C(S^{n-1})$ . Deze sectie begint met het bespreken van orthogonale rotaties om coördinaatassen en daarna zal een stelling gegeven worden om daaruit de definitie van ultrasferische polynomen af te leiden. We zullen eerst kijken naar orthogonale rotaties van de coördinaatassen in  $\mathbb{R}^n$ . Merk op dat zo'n rotatie de lengte van een vector onveranderd laat. Een rotatie is een lineaire afbeelding van  $\mathbb{R}^n$  naar  $\mathbb{R}^n$ , die aangeduid zal worden met  $R$ . Laat  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  zijn. De lengte van een vector kunnen we uitdrukken met het inwendig product, namelijk  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ . Vanwege het feit dat de lengte van een vector onder rotatie hetzelfde blijft, geldt dat  $R\mathbf{x} \cdot R\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ . Neem nu twee vectoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . We beschouwen het volgende inwendig product:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}.$$

Nu kan het inwendig product van  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{y}$  als volgt opgeschreven worden:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}((\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}).$$

Hieruit volgt dat een rotatie alle inwendig producten onveranderd laat.

**Stelling 4.18.** Laat  $\boldsymbol{\eta} = (1, 0, \dots, 0)$  zijn en laat  $L_g(\mathbf{x}) \in W_{n,g}$  zijn, waarvoor geldt:

(i)  $L_g(\boldsymbol{\eta}) = 1$ ,

(ii)  $L_g(R\mathbf{x}) = L_g(\mathbf{x})$  voor alle rotatie afbeeldingen  $R$  zo dat  $R\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}$ .

Dan is  $L_g(\mathbf{x})$  het enige polynoom uit  $W_{n,g}$  dat voldoet aan deze eigenschappen. In het bijzonder bepalen deze twee eigenschappen op unieke wijze de bijbehorende bolfunctie  $Y_g = L_g|_{S^{n-1}}$ . Bovendien is deze bolfunctie  $Y_g(\boldsymbol{\xi})$  met  $\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}$  een polynoom in  $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}$ .

*Bewijs.* Net zoals in het bewijs van stelling 4.5 kunnen we het polynoom  $L_g(\mathbf{x})$  schrijven als:

$$L_g(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^g x_1^j h_{g-j}(x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (4.16)$$

waarbij  $h_{n-j}$  homogene polynomen zijn van graad  $n - j$ . We beschouwen nu een rotatie matrix  $R$  zoals beschreven in eigenschap (ii) van de stelling. Deze  $R$  toepassen op  $\mathbf{x}$  geeft een vector  $\mathbf{x}'$ , waarbij  $x'_1 = x_1$ . Ofwel:

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x'_2, \dots, x'_n).$$

Uit eigenschap (ii) en (4.16) volgt:

$$0 = L_g(\mathbf{x}) - L_g(R\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^g x_1^j [h_{g-j}(x_2, x_3, \dots, x_n) - h_{g-j}(x'_2, x'_3, \dots, x'_n)].$$

Dan geeft de onafhankelijkheid van de  $x_1^j$  in de ruimte met polynomen met variabele  $x_1$  dat  $h_{g-j}(x_2, x_3, \dots, x_n) = h_{g-j}(x'_2, x'_3, \dots, x'_n)$ , dus de rotatie verandert  $h_{g-j}$  niet. Dit betekent dat  $h_{g-j}$  alleen maar afhangt van de lengte van  $(x_2, x_3, \dots, x_n)$  en  $h_{g-j}$  kan als volgt uitgedrukt worden:

$$h_{g-j}(x_2, x_3, \dots, x_n) = c_{g-j} \left( \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2} \right)^{g-j}, \quad (4.17)$$

waarbij  $c_{g-j}$  constanten zijn. Merk op dat  $c_{g-j} = 0$  voor oneven  $g - j$ , omdat de  $h_{g-j}$  polynomen zijn. Door eigenschap (i) te gebruiken kan de waarde van één van die constanten gevonden worden:

$$1 = L_g(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{j=0}^g 1^j h_{g-j}(0, 0, \dots, 0) = \sum_{j=0}^g c_{g-j} 0^{g-j} = c_0,$$

Nu kunnen met formule (4.6) de  $h_{g-j}$  bepaald worden, omdat met (4.17) de vorm van de  $h_{g-j}$  duidelijk is en  $c_0$  en  $c_{g-j}$  voor oneven  $g - j$  bekend zijn. Hieruit volgt dat  $L_g$  uniek bepaald is en daarmee ook  $L_g(\boldsymbol{\xi})$ . Nu rest ons nog om het laatste onderdeel van de stelling te laten zien. Laat  $\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}$  zijn. Er bestaat dan een  $\boldsymbol{\nu} \in S^{n-1}$  zo dat  $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$  en  $t \in [-1, 1]$  zo dat  $\boldsymbol{\xi} = t\boldsymbol{\eta} + \sqrt{1 - t^2}\boldsymbol{\nu}$ . Uit  $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$  volgt dat  $\nu_1 = 0$  en er geldt  $t\nu_i = 0$  voor  $2 \leq i \leq n$ , dus:

$$\xi_1 = t, \quad \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1 - t^2. \quad (4.18)$$

Merk op dat  $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} = t$ . Volgens (4.16), (4.17) en het feit dat  $c_{g-j} = 0$  voor oneven  $g - j$  kunnen we schrijven:

$$Y_g(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\substack{j=0 \\ g-j \text{ is even}}}^g \xi_1^j c_{g-j} \left( \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 + \dots + \xi_n^2} \right)^{g-j}.$$



Nu gebruiken we (4.18) om te krijgen:

$$Y_g(\boldsymbol{\xi}(t)) = \sum_{\substack{j=0 \\ g-j \text{ is even}}}^g t^j c_{g-j} \left( \sqrt{1-t^2} \right)^{g-j}.$$

Dit laat zien dat  $Y_g(\boldsymbol{\xi})$  een polynoom is in  $t = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}$ . □

Nu kunnen we de ultrasferische polynomen definiëren.

**Definitie 4.19.** *Het polynoom  $Y_g(\boldsymbol{\xi})$  zoals geïntroduceerd is in stelling 4.18 noemen we het ultrasferische polynoom van graad  $g$ . Wanneer we variabele  $t$  gebruiken om deze bolfunctie uit te drukken, wordt het genoteerd als  $P_g(t)$ .*

Merk op dat uit (4.3.2) volgt dat het polynoom  $P_g(t)$  van graad  $g$  is.

We willen laten zien dat  $Y$  een orthonormale basis vormt voor de continue functies. We geven daarvoor eerst de volgende stelling.

**Stelling 4.20.** *Als  $f \in C(S^{n-1})$  en  $\langle f, y \rangle = 0$  voor alle  $y \in Y$ , ofwel als*

$$\int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi}) Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1} = 0 \text{ voor alle } g, j,$$

*dan is  $f$  gelijk aan de nulfunctie, ofwel*

$$f(\boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ voor alle } \boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}.$$

*Bewijs.* We nemen aan dat  $f$  voldoet aan de voorwaarden van de stelling, maar niet gelijk is aan de nulfunctie en we leiden op die manier een tegenspraak af. Als  $f$  niet gelijk is aan de nulfunctie, dan bestaat er een  $\boldsymbol{\eta} \in S^{n-1}$  waarvoor geldt dat  $f(\boldsymbol{\eta}) > 0$ . Uit de continuïteit van  $f$  volgt nu dat er een omgeving  $U$  van  $\boldsymbol{\eta}$  is waar  $f$  positief is. Merk op dat het inwendig product  $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}$  een continue functie is voor een vaste  $\boldsymbol{\eta}$  en een  $\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}$ . Uit de Cauchy-Schwarz ongelijkheid volgt dat  $|\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}| \leq 1$ , dus  $-1 \leq \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} \leq 1$ . Omdat  $f$  positief is op  $U$ , bestaat er een  $s \in [-1, 1]$  zodanig dat  $f(\boldsymbol{\xi}) > 0$  wanneer  $s \leq \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} \leq 1$ . Vanaf nu noteren we  $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}$  met  $t$ . We definiëren de volgende functie:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{(1-t)^2}{(1-s)^2} & \text{als } s \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{als } -1 \leq t \leq s. \end{cases}$$

Merk op dat  $\phi$  continu is op  $[-1, 1]$ . Er geldt dat  $f(\boldsymbol{\xi})\phi(t) > 0$  als  $s \leq t \leq 1$  en voor de rest van de  $\boldsymbol{\xi}$  geldt dat  $f(\boldsymbol{\xi})\phi(t) = 0$ , dus

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi})\phi(t) d\Omega_{n-1} > 0.$$

Volgens de stelling van Stone-Weierstrass kunnen we voor alle  $\epsilon > 0$  een polynoom  $p(t)$  vinden zodanig dat geldt

$$|\phi(t) - p(t)| \leq \epsilon, \text{ voor } t \in [-1, 1].$$

Dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi})(\phi(t) - p(t)) d\Omega_{n-1} &\leq \left| \int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi})(\phi(t) - p(t)) d\Omega_{n-1} \right| \\ &\leq \int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} |f(\boldsymbol{\xi})| |\phi(t) - p(t)| d\Omega_{n-1} \\ &\leq \epsilon \int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} |f(\boldsymbol{\xi})| d\Omega_{n-1}. \end{aligned}$$

Omdat  $f$  continu is, geldt er dat  $|f(\boldsymbol{\xi})| \leq M$  met  $M$  een constante en het oppervlak van de eenheidssfeer is een vast getal, dat we aanduiden met  $C$ . Dus we vinden:

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi})(\phi(t) - p(t))d\Omega_{n-1} &\leq \epsilon MC && \Leftrightarrow \\ \int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi})\phi(t)d\Omega_{n-1} - \epsilon MC &\leq \int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi})p(t)d\Omega_{n-1}. \end{aligned}$$

We kunnen  $\epsilon$  willekeurig klein kiezen, dus

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi})p(t)d\Omega_{n-1} > 0. \quad (4.19)$$

Neem nu  $\epsilon$  en  $p(t)$ , waarvoor deze uitdrukking geldt, vast. Laat  $m$  de graad van  $p(t)$  noteren. Het ultrasferische polynoom  $P_g(t)$  voor  $g \in \mathbb{N}_0$  is van graad  $g$ , dus  $p(t)$  is uit te drukken als lineaire combinatie van de eerste  $m$  ultrasferische polynomen, ofwel:

$$\sum_{g=0}^m c_g P_g(t),$$

waarbij  $c_g$  een constante is. De uitdrukking (4.19) is dus te schrijven als:

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi}) \sum_{g=0}^m c_g P_g(t) d\Omega_{n-1} > 0.$$

Dit leidt tot een tegenspraak, omdat ultrasferische polynomen een speciale soort bolfuncties zijn en  $f$  per definitie loodrecht staat op alle bolfuncties. Dit betekent dat  $f = 0$ .  $\square$

**Stelling 4.21.**  $Y$  is een basis voor  $C(S^{n-1})$ .

*Bewijs.* Laat  $S = \bar{Y}$ . Dan is  $S$  een deelverzameling van  $L_2(S^{n-1})$ . Laat  $S'$  het orthogonaal complement van  $S$  zijn in  $L_2(S^{n-1})$ . Dan is  $L_2(S^{n-1})$  te schrijven als de directe som van  $S$  en  $S'$ , dus  $L_2(S^{n-1}) = S \oplus S'$ . Stel dat  $f \in C(S^{n-1})$  een functie in  $S'$  is, dan geldt volgens stelling 4.20 dat  $f = 0$ .  $C(S^{n-1}) \subset L_2(S^{n-1})$ , dus alle continue functie zitten in  $S$ . Dus  $Y$  is een basis voor  $C(S^{n-1})$ .  $\square$

Nu volgt uit stelling 3.13 dat  $Y$  ook een basis is voor  $L_2(S^{n-1})$ , dus we vinden wederom dat elke  $f \in L_2(S^{n-1})$  is te schrijven als:

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{g,j} c_{g,j} Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) \text{ voor bijna alle } \boldsymbol{\xi} \in S^{n-1},$$

waarbij  $c_{g,j}$  constanten zijn. We kunnen ook een uitdrukking van deze constanten vinden in de functie  $f$  en de bolfuncties. We vermenigvuldigen (4.15) met  $Y_{g',j'}$  en integreren over de sfeer. Als we dan de orthogonaliteit van de verzameling  $Y$  gebruiken, krijgen we:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi}) Y_{g',j'}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1} &= \int_{S^{n-1}} \sum_{g,j} c_{g,j} Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) Y_{g',j'}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1} && \Leftrightarrow \\ \int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi}) Y_{g',j'}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1} &= \sum_{g,j} \int_{S^{n-1}} c_{g,j} Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) Y_{g',j'}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1} && \Leftrightarrow \\ \int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi}) Y_{g',j'}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1} &= c_{g',j'}. \end{aligned}$$

Dus er geldt:

$$c_{g,j} = \int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{\xi}) Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{n-1}. \quad (4.20)$$

### 4.3.3 Toepassing

Het uitdrukken van een  $L_2(S^{n-1})$ -functie in bolfuncties kan toegepast worden bij het oplossen van randwaardeproblemen. In deze sectie zal een voorbeeld gegeven worden. Beschouw het volgende randwaardeprobleem: Vind  $V$  in  $\overline{B}^n$  zodanig dat

$$\Delta_n V = 0 \text{ en } V = f(\boldsymbol{\xi}) \text{ voor alle } \boldsymbol{\xi} \in S^{n-1}. \quad (4.21)$$

**Oplossing:** Merk op dat harmonische en homogene polynomen en lineaire combinaties van deze polynomen een oplossing zijn voor de Laplace vergelijking. In het bewijs van propositie 4.7 zien we dat we de harmonische en homogene polynomen kunnen schrijven als een bolfunctie keer een macht van de straal  $r$ . Dus we kunnen (4.21) oplossen door lineaire combinaties van  $r^g Y_{g,j}$  te gebruiken. We krijgen door (4.20) toe te passen om te voldoen aan de randvoorwaarde de volgende oplossing:

$$V = \sum_{g,j} r^g c_{g,j} Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{g,j} r^g Y_{g,j}(\boldsymbol{\xi}) \int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{\eta}) Y_{g,j}(\boldsymbol{\eta}) d\Omega_{n-1}. \quad (4.22)$$

# Bibliografie

- [1] Oliver Aberth. *Precise numerical methods using C++*. Deel 1. Academic Press, 1998.
- [2] Charalambos D Aliprantis en Owen Burkinshaw. *Principles of real analysis*. Gulf Professional Publishing, 1998.
- [3] Christopher Frye en Costas J Efthimiou. „Spherical Harmonics in p Dimensions”. In: *arXiv preprint arXiv:1205.3548* (2012).
- [4] Jean Gallier. „Notes on spherical harmonics and linear representations of Lie groups”. In: *Course notes* (2009).
- [5] Richard Haberman. *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Pearson Higher Ed, 2012.
- [6] Steven Krantz. *A panorama of harmonic analysis*. Deel 27. Cambridge University Press, 1999.
- [7] Serge Lang. *Real and functional analysis*, third edition, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [8] Attila Máté. „The Laplace operator in polar coordinates in several dimensions”. In: *Course notes* (2015).