

STATISTISCHE VOORSPELLING
VAN DE
BODEMLIGGING IN RIVIERBOCHTEN

H.Nijdam
Delft, mei 1973

Technische Hogeschool Delft
Afd. Weg- en Waterbouwkunde
Lab. v. Vloeistofmechanica

STATISTISCHE VOORSPELLING

VAN DE

BODEMLIGGING IN RIVIERBOCHTEN

door

H. NIJDAM

Delft, mei 1973

INHOUD

1. Overzicht
 - 1.1 Inleiding
 - 1.2 Basishypothese
 - 1.3 Conclusie

2. Invloed van de rivierbochten op de geometrie van de doorsnede
 - 2.1 Keuze assenstelsel
 - 2.2 Beschrijving van het dwarsprofiel
 - 2.3 Rivier in langsrichting
 - 2.4 Standaardafwijkingen

3. Theoretische achtergronden
 - 3.1 Orthogonale polynomen
 - 3.2 Lineaire regressie in dwarsprofielen
 - 3.3 Lineaire regressie in langsrichting

4. Toepassingen
 - 4.1 Algemeen
 - 4.2 Bestaande riviergedeelte beneden crd 9371
 - 4.3 Bestaande riviergedeelte boven crd 8787
 - 4.4 Bochtafsnijding bij St. Andries
 - 4.4.1 Algemeen
 - 4.4.2 St. Andries $R = 1900$ m
 - 4.4.3 St. Andries $R = 3000$ m

5. Suggesties voor verder onderzoek

BIJLAGEN

- 1) Omvang van het vervoer per binnenschip op de Nederlandse wateren
- 2) Dwarsprofielen van km 937 t/m km 952
- 3) a: Orthogonale polynomen van Legendre
b: Orthogonale polynomen van Laguerre
c: Orthogonale polynomen van Hermite
d: Orthogonale polynomen van Tsjebysjev
- 4) Variantieschatting met histogram
- 5) a: Algol programma voor berekening A-coëfficiënten met 6 polynomen
b: Algol programma voor berekening dwarsprofielen m.b.v. de uit
5a) gevonden matrices A e.d.
- 6) A-coëfficiënten voor 6 polynomen
- 7) A-coëfficiënten voor 7 polynomen
- 8) Plotprogramma
- 9) Dwarsprofielen bij Nijmegen km 873E t/m 874F
- 10) Kaart bochtafsnijding bij St. Andries R = 1900 m
- 11) Dwarsprofielen van de bochtafsnijding bij St. Andries R = 1900 m
- 12) Kaart bochtafsnijding bij St. Andries R = 3000 m
- 13) Dwarsprofielen van de bochtafsnijding bij St. Andries R = 3000 m
- 14) Plus-min kaart van km 937 t/m km 943

REFERENTIES

- 1) Draper, N.R. en Smith, H.,
Applied Regression Analysis;
New York, Wiley, 1967
- 2) Einstein, H.A.,
Prediction of the Shape of Improved Alluvial Channels from
existing such Channels;
Report of the University of California, Dec. 1968
- 3) Hald, A.,
Statistical Theory with Engineering Applications;
New York, Wiley, 1952
- 4) Kuipers, L. en Timman, R. e.a.,
Handboek der Wiskunde I;
Amsterdam, Scheltema en Holkema, 1966
- 5) Natrella, M.G.,
Experimental Statistics;
NBS Handbook,
Washington, U.S. Govt. Pr. Off., 1963
- 6) Radhakrishna, C.,
Lineair Statistical Interference and its Applications;
New York, Wiley, 1965
- 7) Statistiek van de Scheepvaartbeweging;
Uitgave van het C.B.S.,
's-Gravenhage, Staatsuitgeverij, 1972

Erkentelijkheid

De schrijver brengt zijn dank over aan Prof. ir. L. van Bendegom voor zijn advies en voor het mogelijk maken van dit onderzoek, voorts aan ir. A. Zanen, directeur van de Afd. Bovenrivieren van de Rijkswaterstaat, voor zijn suggesties en voor het beschikbaar stellen van de gegevens.

Hij is verder buitengewoon veel dank verschuldigd aan dr. ir. M. de Vries, coördinator voor het wetenschappelijk onderzoek aan het Waterloopkundig Laboratorium te Delft, voor zijn vriendelijke kritiek, hulp en advies.

Voorts is hij dank verschuldigd aan mej. M. Brouwers voor het omzetten van zijn moeilijke handschrift in leesbaar machineschrift en aan allen die hem op de diverse onderdelen van advies hebben gediend.

1. Overzicht

1.1 Inleiding

Bij bochtafsnijdingen in rivieren is het van belang, o.a. voor de scheepvaart, dat we de nieuwe bodemligging kunnen voorspellen zodat we niet voor onaangename verrassingen komen te staan. Er zijn diverse methoden waarmee we de bodemligging kunnen voorspellen:

- Bodemligging uitrekenen met behulp van continuïteits- en bewegingsvergelijkingen;
- Bodemligging bepalen met behulp van een fysisch model;
- Bodemligging voorspellen langs statische weg.

De eerste en tweede zijn bekende methoden terwijl de derde een nog in ontwikkeling zijnde methode is (ref. 2). Daar in rivierbochten een sterk 3-dimensionaal stroombeeld heerst, dat zich moeilijk analytisch laat beschrijven, geeft de eerstgenoemde methode geen nauwkeurige resultaten. Een beter beeld van wat er met de bodem gaat gebeuren verkrijgen we met een fysisch model, maar dit is een kostbare en tijdrovende aangelegenheid, hoewel hierbij als voordeel geldt de verkrijging van meer gedetailleerde gegevens. De statistische methode gaat uit van de gegevens van een bepaalde rivier, in dit geval de dwarsprofielpeilingen en de kromtestralen en aan de hand hiervan worden coëfficiënten bepaald. Daarmee kan de bodemligging worden voorspeld, bijv. als we de bodemligging willen weten na een bochtafsnijding. Voordeel van deze methode is dat de kosten aanzienlijk minder zullen bedragen dan met een fysisch model, maar zoals al eerder opgemerkt is, geeft het fysische model ons meer detailinformatie.

In het algemeen zullen we bij statistische methoden een grotere nauwkeurigheid mogen verwachten naarmate we meer gegevens invoeren en gebruiken.

Ondanks dit voordeel moeten we wel beseffen dat een groot aantal gegevens ons enerzijds een goede waarborg voor betrouwbare resultaten geeft, anderzijds ontstaan problemen met de verwerking van grote aantallen gegevens.

Voor de Waal zijn zeer veel gegevens beschikbaar, peilingen over meerdere jaren, maar gelet op het bovenstaande zullen we ons hier tot één jaar beperken en alleen de gegevens over 1969 gebruiken. Om een indruk te krijgen van de hoeveelheden getallen die we moeten verwerken zullen we voor de Waal dit aantal schatten over één jaar.

Gaan we uit van ca. 30 peilingen per dwarsprofiel, 8 dwarsprofielen per km en een rivierlengte van ca. 90 km dan vinden we voor één jaar: $30 \times 8 \times 90 = 21600$ dieptepeilingen. Om deze gegevens in een computer in te lezen zijn ca. 1500 ponskaarten nodig. Dit is de reden dat we hier maar van de gegevens over één jaar gebruik zullen maken. Uiteraard speelt de computer bij dergelijke statistische berekeningen een grote rol, daar het ondoenlijk is een dergelijk aantal gegevens met andere hulpmiddelen te verwerken.

De reden dat we ons onderzoek op de Waal toepassen zijn:

- het grote belang van deze rivier voor onze scheepvaart;
- de relatief geringe wandinvloed door de grote breedte;
- de aanwezigheid van bochten die voor verbetering in aanmerking komen, zodat de toepassing praktisch nut kan hebben;
- als bijkomende rede het beschikbaar zijn van veel gegevens hoewel dit niet voor de Waal alleen geldt.

Dat de Waal van groot belang is voor de scheepvaart blijkt duidelijk uit bijlage 1, waar de diverse scheepvaartroutes zijn aangegeven met de vervoerde vracht in tonnen (ref. 7).

In een zo druk bevaren scheepvaartroute is het zaak om bij bochtafsnijdingen de bodemligging nauwkeurig te bepalen daar een te laag geschatte bodemligging funest kan zijn voor de scheepvaart. Een belangrijk punt bij de Waal is tevens het internationale belang (akte van Mannheim).

Mede hierdoor zullen we bij een eventuele bochtafsnijding voorzichtig te werk dienen te gaan en het gedrag van de rivier zo nauwkeurig mogelijk moeten bepalen.

De nauwkeurigheid van deze bepaling moet ook voor anderen aanvaardbaar zijn daar anders geen toestemming voor een bochtafsnijding wordt verkregen.

Wij denken hier bijvoorbeeld aan de Duitse belangen tegenover die van ons. We zullen hier echter niet verder stilstaan bij de internationale en politieke aspecten van een bochtafsnijding in de Waal, maar alleen bij de invloed op de bodemligging.

1.2 Basishypothese

De bodemligging van een rivier wordt bepaald door:

- het regiem
- de korrelsamenstelling van het bed
- de geometrie van de rivier.

Voor redelijk lange riviergedeelten, zonder zijrivieren, is het regiem voor elke dwarsdoorsnede gelijk. Ook de korrelsamenstelling verandert niet teveel bij niet te grote afstand. Op grond van deze overweging heeft Einstein als hypothese gesteld, dat voor een bepaald riviergedeelte elk dwarsprofiel moet kunnen worden berekend uit de bovenstroomse geometrie (gekenmerkt door kromtestralen). De invloed van alle andere factoren wordt daarbij uitgedrukt in een aantal coëfficiënten, die voor het gehele riviergedeelte als constanten worden opgevat. Deze constanten worden dus afgeleid uit peilingen van de betrokken rivier.

In principe leidt dit tot een methode om de bodemligging in een rivierbocht (bochtafsnijding) te voorspellen. Hierdoor wordt immers alleen de geometrie gewijzigd; de coëfficiënten veranderen niet.

Zoals al in § 1.1 is opgemerkt, zullen we onze gegevens halen uit de dwarsprofielpeilingen van 1969, welke gegevens door de Directie Bovenrivieren van de R.W.S. beschikbaar zijn gesteld. Deze peilingen zijn uitgerekend t.o.v. een vergelijkingsvlak en wel O.L.R. 1962. Zodat dit het vergelijkingsvlak is waaraan onze resultaten zijn gekoppeld.

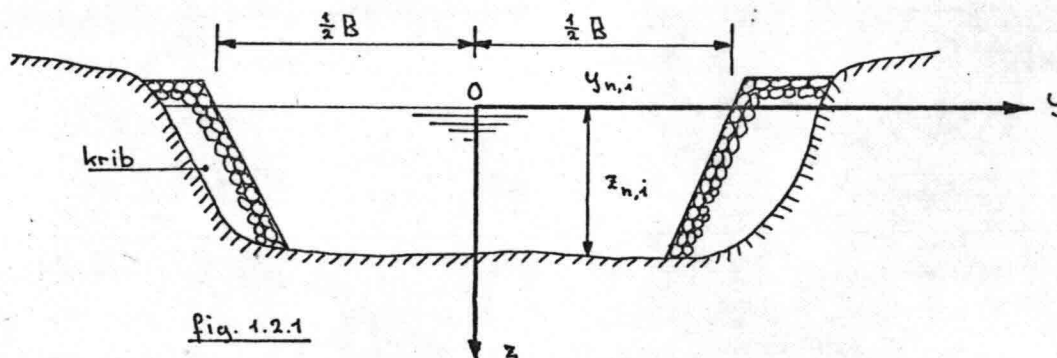
Bij de interpretatie van de gegevens moeten we nog wel het volgende opmerken:

- De waarden op de peilkaarten zijn geen absolute waarden van de diepte daar we te maken hebben met een ademende bodem door het in de tijd wisselen van het regiem. We kunnen de waarden van de peilingen dus opvatten als een soort steekproef van de bodemligging.
- Over meerdere jaren gezien kunnen we niet van een aselechte steekproef spreken, daar de peilingen wellicht steeds in ca. dezelfde periode van het jaar worden genomen.

Tot zover de algemene opmerkingen over de gegevens en de interpretatie hiervan. Gaan we nu verder met het bespreken van de hypothese.

Uit de peilingen volgen de dwarsprofielen van de rivier, op een onderlinge afstand van 125 m (8 per km).

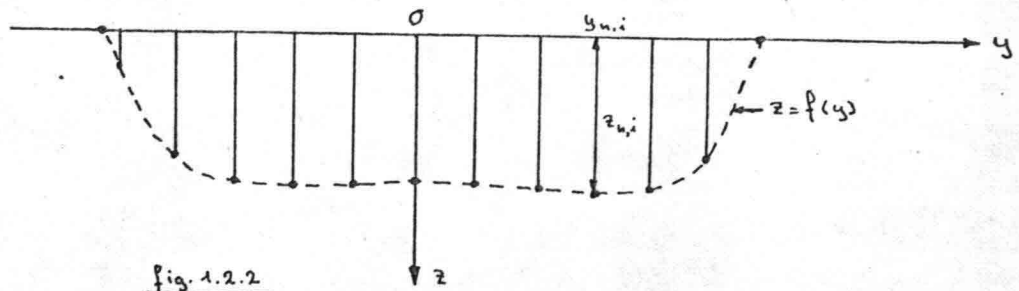
Deze dwarsprofielen zien er in het algemeen als volgt uit:



We kiezen een assenstelsel (fig. 1.2.1) en zullen voor de breedte aanhouden de afstand tussen de kribkoppen. We weten van dit dwarsprofiel dus de paren getallen $y_{n,i}$, $z_{n,i}$. Dit zijn de gegevens van de peilkaarten (fig. 1.2.2).

n is het nummer van het dwarsprofiel lopend van 1 tot s in de stroomrichting.

i is de plaats waar de peilingen in het dwarsprofiel voorkomen, $i = 1$ voor $y_{n,i} = +\frac{1}{2}B$ en $i = m$ voor $y = -\frac{1}{2}B$, als m het totaal aantal peilingen per dwarsprofiel is.



Door deze punten $(y_{n,i}, z_{n,i})$ leggen we een functie $z = f(y)$ die een zo goed mogelijk beeld geven moet van het dwarsprofiel, ook tussen de meetpunten.

Tot zover zijn er geen problemen daar we hier alleen analytisch beschrijven wat we bij het tekenen van dwarsprofielen eigenlijk doen.

Daar we echter niet zo zeer geïnteresseerd zijn in de beschrijving van één dwarsprofiel, maar wel in de koppeling tussen de dwarsprofielen, dienen we de functie $z = f(y)$ op een verstandige wijze te kiezen.

Een functie die een goede aansluiting geeft in de gemeten punten, is een polynoom bijvoorbeeld:

$$z(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \dots \quad (1.2.1)$$

(De indices zijn voor de overzichtelijkheid achterwege gelaten.)

Voor een koppeling van de dwarsprofielen in langrichting heeft deze functie echter het volgende nadeel:

- De coëfficiënten a in deze vergelijking moeten een functie zijn van de geometrie, dit zijn de enige grootheden in de vergelijking die niet aan het dwarsprofiel zijn gebonden. In deze vorm zijn de coëfficiënten echter ook afhankelijk van de graad van het polynoom.
- Wordt de graad verhoogd van bijvoorbeeld n naar $(n + 1)$ dan zullen we nieuwe a -coëfficiënten vinden, zodat we niet kunnen stellen dat deze coëfficiënten alleen een functie zijn van de geometrie (althans voor een bepaald riviergedeelte).

Elk polynoom is echter te ontwikkelen in een samenstelling van bekende van te voren vastgestelde polynomen (§ 3.1). Door deze polynomen verstandig te kiezen is het mogelijk vergelijking (1.2.1) zodanig te schrijven dat de coëfficiënten niet meer afhankelijk zijn van de graad van de vergelijking. Dit is een uitermate prettige eigenschap en de polynomen die hieraan voldoen worden orthogonale polynomen genoemd (§ 3.1).

Populair gezegd, deze polynomen beïnvloeden elkaar niet. Voor een meer theoretische uiteenzetting over deze ontwikkeling zie de hoofdstukken 2 en 3.

Bovenstaande toegepast op vergelijking (1.2.1) geeft ons de vergelijking:

$$z = c_0 P_0(y) + c_1 P_1(y) + c_2 P_2(y) + \dots + c_k P_k(y) + \dots + c_r P_r(y) \quad (1.2.2)$$

$P_k(y)$ is een orthogonaal polynoom van de k -de graad (bijlage 3).

Met indices ziet (1.2.2) er als volgt uit:

$$z_{n,i} = c_{n,0} P_0(y_{n,i}) + c_{n,1} P_1(y_{n,i}) + \dots + c_{n,k} P_k(y_{n,i}) + \dots + c_{n,r} P_r(y_{n,i}) \quad (1.2.3)$$

Vullen we in deze vergelijking de bekende waarden van $(z_{n,i}, y_{n,i})$ in, dan kunnen we de coëfficiënten $c_{n,k}$ berekenen uit de m vergelijkingen.

We vinden met behulp van deze methode, bekend als de methode der kleinste kwadraten, zogenaamde zuivere schatters voor $c_{n,k}$.

Zuivere schatters wil zeggen die coëfficiënten $c_{n,k}$ die zorgen dat de functie in de punten de optimale aansluiting aan de gemeten waarden geeft.

Voor ieder dwarsprofiel vinden we op deze manier $(r + 1)$ coëfficiënten en wel $c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,r}$.

Deze coëfficiënten zullen in principe voor ieder dwarsprofiel verschillend zijn.

Bekijken we nu de rivier in zijn geheel en stel dat we s dwarsprofielen hebben ($n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, s$).

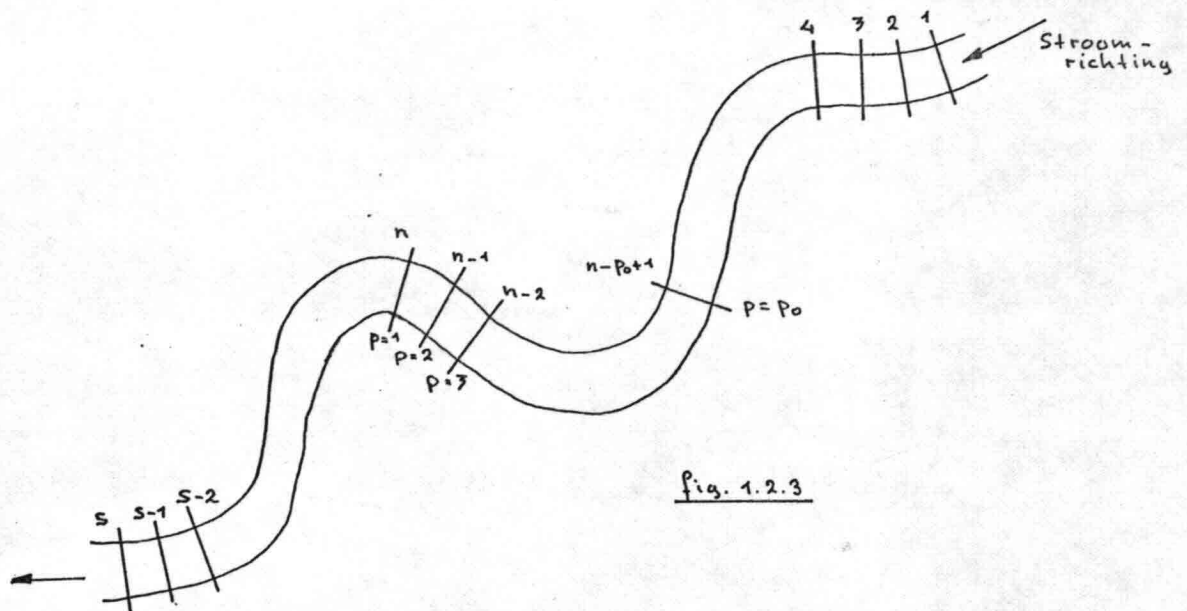


Fig. 1.2.3

We zagen al in vergelijking (1.2.3) dat alleen de coëfficiënten $c_{n,r}$ een functie kunnen zijn van de geometrie.

Stel nu dat er een lineair verband is tussen de coëfficiënten $c_{n,r}$ en de kromtestraal van de bovenstroomse bochten.

Nemen we hierin een zekere uitdemping van de invloed aan, wat een logische aanname is, daar niet alle bovenstroomse bochten van invloed zijn op een bepaald dwarsprofiel. Neem hiervoor bijvoorbeeld dat de kromtestraal in $(P_0 - 1)$ bovenstrooms van het

beschouwde dwarsprofiel gelegen dwarsprofielen nog van invloed is.

We bedoelen met de kromtestraal in een dwarsprofiel uiteraard de kromtestraal van de bocht t.p.v. het dwarsprofiel. Met bovenstaande veronderstellingen kunnen we het volgende verband aannemen:

$$c_{n,r} = A_{r,0} + \sum_{p=1}^{P_0} A_{r,p} * \rho_{n-p+1} \quad (1.2.4)$$

ρ_{n-p+1} is de kromtestraal van de rivierbocht t.p.v. het dwarsprofiel $(n-p+1)$. (Fig. 1.2.3)

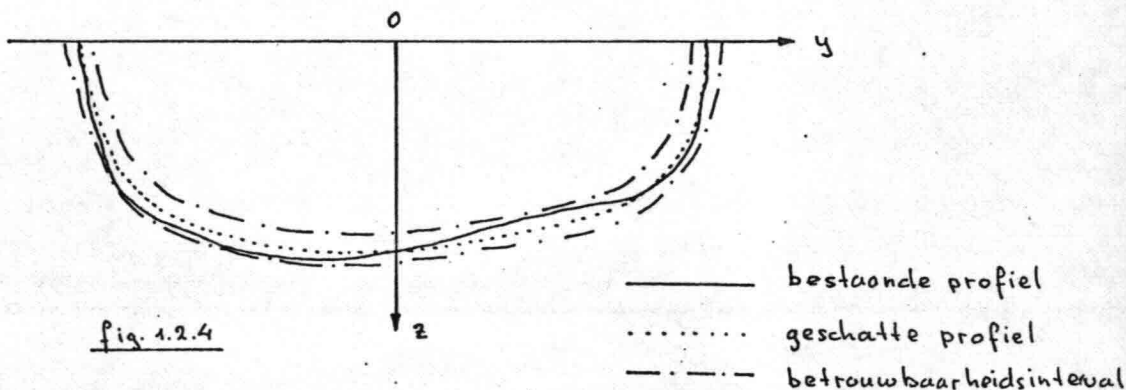
r is weer het nummer waarmee de coëfficiënt in (1.2.3) voorkomt.
 $p = 1$ voor de n^e doorsnede, $p = 2$ voor de $(n - 1)^e$ doorsnede, enz.
(Zie fig. 1.2.3)
 $p = p_0$ is de maximumwaarde in verband met de veronderstelde uitdamping.

De coëfficiënten $A_{r,p}$ zijn de constanten die de $c_{n,r}$ bepalen.
Deze coëfficiënten zijn niet meer aan de doorsnede gebonden. Voor iedere r vinden we $(p_0 + 1)$ coëfficiënt A , zodat we in totaal voor de hele rivier $(r + 1) \times (p_0 + 1)$ A -coëfficiënten vinden die dan voor de gehele rivier gelden.

We berekenen, of beter gezegd, schatten deze coëfficiënten op dezelfde manier als we $c_{n,r}$ hebben geschat. Dat wil zeggen we vullen de uit (1.2.3) gevonden coëfficiënten $c_{n,r}$ in, in vergelijking (1.2.4). We krijgen dan $(s - p_0)$ vergelijkingen in de coëfficiënten $A_{r,p}$ en met behulp van kleinste kwadratenschatters vinden we weer de zuivere schatters voor $A_{r,p}$.

Kennen we eenmaal deze coëfficiënten voor een bepaalde rivier, dan kunnen we met behulp van vergelijking (1.2.4) de coëfficiënten $c_{n,r}$ terugrekenen en daarna met behulp van (1.2.3) de waarden van $z_{n,i}$ berekenen waarmee we de gewenste schatting voor de bodemligging hebben gevonden.

Een belangrijke vraag is uiteraard: hoe nauwkeurig kunnen we de $z_{n,i}$ berekenen?



Dus:

- Is er rond het geschatte profiel een gebied aan te wijzen waarbinnen de geschatte $z_{n,i}$ in bijvoorbeeld 95% van de gevallen komt te liggen?
- Ligt het bestaande profiel binnen dit gebied?
- Is dit betrouwbaarheidsinterval niet te groot?
(Bijvoorbeeld geen afwijkingen groter dan 2 à 3 dm)

De bepaling van dit betrouwbaarheidsinterval zullen we hier niet verder uiteen zetten, zie hiervoor § 2.4.

Een zeer belangrijk punt waar we hier nog wel op moeten wijzen is dat de invloed van de breedte buiten beschouwing blijft. We veronderstellen een rivier met constante, of nagenoeg constante breedte.

Dit is een beperking van de methode daar we geen bodemligging kunnen voorspellen bij normalisatie op de breedte. We zullen de belangrijke punten, waar we bij deze methode op bedacht dienen te zijn, nog even herhalen.

- 1) Alle waarden zijn ten opzichte van een referentievlak, in ons geval O.L.R. 1962. Dit houdt in dat de gevonden coëfficiënten een schatting geven van de bodemligging t.o.v. O.L.R. 1962.
- 2) We kunnen alleen dwarsprofielen voorspellen die op regelmatige afstanden liggen in ons geval 125 m, dit komt omdat we de afstand tussen de dwarsprofielen in vergelijking (1.2.4) als aantal malen de onderlinge afstand hebben ingevoerd.
- 3) Bij normalisatie van de breedte kunnen we de dwarsprofielen niet, of althans nog niet, voorspellen daar de breedte-invloed niet in de berekening is opgenomen.

1.3 Conclusie

Als we de resultaten bekijken die we met deze methode hebben behaald (hoofdstuk 4) dan mogen we concluderen dat we een redelijke schatting kunnen maken van de bodemligging. De plaatselijke storingen t.g.v. kribkoppen en dergelijke geven echter grote afwijkingen tussen het gemeten en berekende profiel, wat ook niet te verwonderen is, daar deze plaatselijke invloeden niet in de berekening zijn opgenomen.

Uit de plus-min kaart (bijlage 14) blijkt duidelijk deze grote afwijking langs de randen ten gevolge van de lokale storingen. Ook is er de neiging om een iets minder scheef profiel te voorspellen dan in werkelijkheid aanwezig is. Dus het bochteffect wordt wat afgezwakt.

Ter plaatse van de crossings geven de geschatte profielen met 7 polynomen een onbetrouwbaar beeld, één van de punten die nog nader bestudeerd moeten worden (hoofdstukken 4 en 5).

Voorts dienen we bij de toepassing van deze methode de 3 punten genoemd aan het einde van § 1.2 in acht te nemen, daar dit principiële aannamen en beperkingen zijn.

Voor wat betreft het betrouwbaarheidsinterval van de berekende diepten is langs theoretische weg nog geen aansluiting met de werkelijk optredende afwijkingen gevonden.

Dit is enerzijds te wijten aan de al eerder genoemde plaatselijke storingen, anderzijds aan het moeilijk te beschrijven stochastische proces (§ 2.4).

Resumerend mogen we dus stellen dat deze methode, zeker als we in staat zijn de lokale storingen te elimineren, een bruikbare methode geeft om de bodemligging na een bochtafsnijding te voorspellen, mits de breedte onveranderd blijft.

2. Invloed van de rivierbochten op de geometrie van de doorsnede

Na de wat summiere beschrijving in hoofdstuk 1 zullen we hier wat verder op de detailpunten ingaan (zie ook ref. 2).

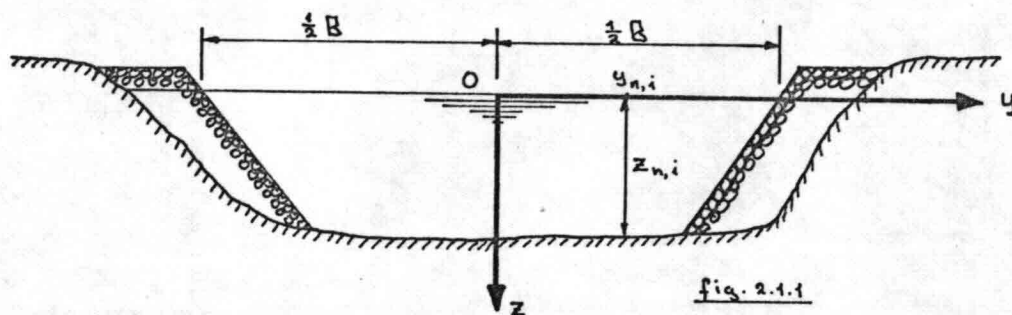
2.1 Keuze assenstelsel

x-as langs de rivieras positief olopend in de stroomrichting

z-as positief naar beneden

y-as positief naar rechts, kijkend in de stroomrichting

o in wateroppervlak



Met de waarden $y_{n,i}$ en $z_{n,i}$ ligt dus een punt van het dwarsprofiel vast ten opzichte van de waterspiegel.

Dit is een belangrijk punt, daar ook alle uitkomsten aan deze waterstand zijn gebonden en bij toepassing op bijvoorbeeld een ander jaar zal dus steeds een correctie nodig zijn op de waterstand.

We zullen hier aanhouden de O.L.W. 1962, wat dus vergelijkingsvlak is.

O.L.W.-standen 1962	Zaltbommel	0.60 m + N.A.P.
	km 937	0.50 m + N.A.P.
	km 938	0.45 m + N.A.P.
	km 939	0.40 m + N.A.P.
	km 940	0.36 m + N.A.P.
	km 941	0.31 m + N.A.P.
	km 942	0.26 m + N.A.P.
	km 943	0.22 m + N.A.P.
	km 944	0.17 m + N.A.P.
	km 945	0.12 m + N.A.P.
	Herwijnen	0.10 m + N.A.P.

Zie ook bijlagen 6 en 7.

2.2 Beschrijving van het dwarsprofiel

Voor ieder dwarsprofiel zijn bekend, uit peilingen, de paren getallen $\check{y}_{n,i}$ en $\check{z}_{n,i}$ waarbij het teken " " steeds op waarnemingen slaat.

Hierin staat n voor de plaats van dwarsprofiel in de rivier, $n = 1, 2, 3, \dots, s$, en i voor de plaats van y en z in het dwarsprofiel $i = 1, 2, 3, \dots, m$, als m het aantal peilingen in een dwarsprofiel is en s het aantal dwarsprofielen in de rivier.

Voor de breedte B zullen we aanhouden de breedte tussen de kribbappen, daar het riviergedeelte tussen de kribben niet beschreven kan worden door de grote storingen. B is dan ongeveer 300 m voor de Waal.

Door de punten $\check{y}_{n,i}$ en $\check{z}_{n,i}$ die we nu dus als gegevens hebben, leggen we een functie $z = f(y)$ die een zo goed mogelijke beschrijving moet geven van het dwarsprofiel. Voor deze functie nemen we een polynoom:

$$z_{n,i} = a_0 + a_1 y_{n,i} + a_2 y_{n,i}^2 + a_3 y_{n,i}^3 + \dots \quad (2.2.1)$$

Het nadeel van een dergelijke functie is dat als we een hogere macht erbij willen tellen, alle coëfficiënten van de lagere machten ook veranderen. Daarom zullen we dit polynoom ontwikkelen volgens een stelsel vaste polynomen en wel een stelsel orthogonale polynomen. (2.2.1) gaat dan over in:

$$z_{n,i} = c_{n,0} P_0(y_{n,i}) + c_{n,1} P_1(y_{n,i}) + c_{n,2} P_2(y_{n,i}) + \dots \\ + c_{n,r} P_r(y_{n,i}) + \dots + c_{n,k} P_k(y_{n,i}) \quad (2.2.2)$$

Voor de exacte afleiding hiervan zie (3.1)

In (2.2.2) staat $P_r(y_{n,i})$ voor een orthogonaal polynoom in $y_{n,i}$ van de r -de graad.

Uit de vele soorten (zie 3.1) orthogonale polynomen nemen wij de orthogonale polynomen van Legendre. Zie bijlage 3a.

De vergelijkingen van deze polynomen luiden:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1 \\
 P_1 &= y \\
 P_2 &= \frac{1}{2} (3 y^2 - 1) \\
 P_3 &= \frac{1}{2} (5 y^3 - 3 y) \\
 P_4 &= \frac{1}{8} (35 y^4 - 30 y^2 + 3) \\
 P_5 &= \frac{1}{8} (63 y^5 - 70 y^3 + 15 y)
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

We zullen niet meer dan 6 polynomen meenemen, daar bij meer polynomen weliswaar een betere benadering in de punten $\ddot{y}_{n,i}$ en $\ddot{z}_{n,i}$ wordt verkregen, maar een grotere afwijking tussen de punten door het slingerende karakter van de hogere polynomen.

De geldigheid van de Legendre polynomen loopt van -1 tot +1 zodat de breedte B als twee eenheden moet worden beschouwd. Voor $y_{n,i}$ moeten we dus nemen:

$$y_{n,i}^* = \frac{\ddot{y}_{n,i}}{\frac{1}{2}B} \approx 1 \quad \text{Deze waarde is dimensieloos.}$$

Ook voor $\ddot{z}_{n,i}$ zullen we een dimensieloze waarde gebruiken:

$$z_{n,i}^* = \frac{\ddot{z}_{n,i}}{B_n} \quad \text{Waarin } B_n \text{ de breedte is van het beschouwde dwarsprofiel.}$$

Om nu een goede schatting van de coëfficiënt c in (2.2.2) te verkrijgen passen we op deze vergelijkingen de methode der kleinste kwadraten toe.

Om de overzichtelijkheid niet te verliezen zullen we hier volstaan met de methode in matrixvorm te geven, voor de afleidingen verwijzen we naar (3.2).

$$(2.2.2) \text{ in matrix notatie: } z_n = P \cdot c_n \tag{2.2.3}$$

Hierin is z een vector met m componenten, P een matrix met m * (r + 1) elementen, r = 5 dus de matrix heeft m x 6 elementen, c is de coëfficiëntvector met 6 elementen.

De methode der kleinste kwadraten (zie 3.2) levert ons de z.g. normaalvergelijkingen van Gauss:

$$P'Pc_n = P'z_n \quad (2.2.4)$$

Waaruit we c_n kunnen oplossen mits we de matrix $P'P$ kunnen invertieren, dat geeft ons:

$$c_n = (P'P)^{-1} Pz_n \quad (2.2.5)$$

Dit toegepast op alle s dwarsprofielen geeft ons s maal een vector

$$c_n = \begin{pmatrix} c_{n,0} \\ c_{n,1} \\ \vdots \\ c_{n,5} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, s)$$

Schrijven we dit als de totale matrix C :

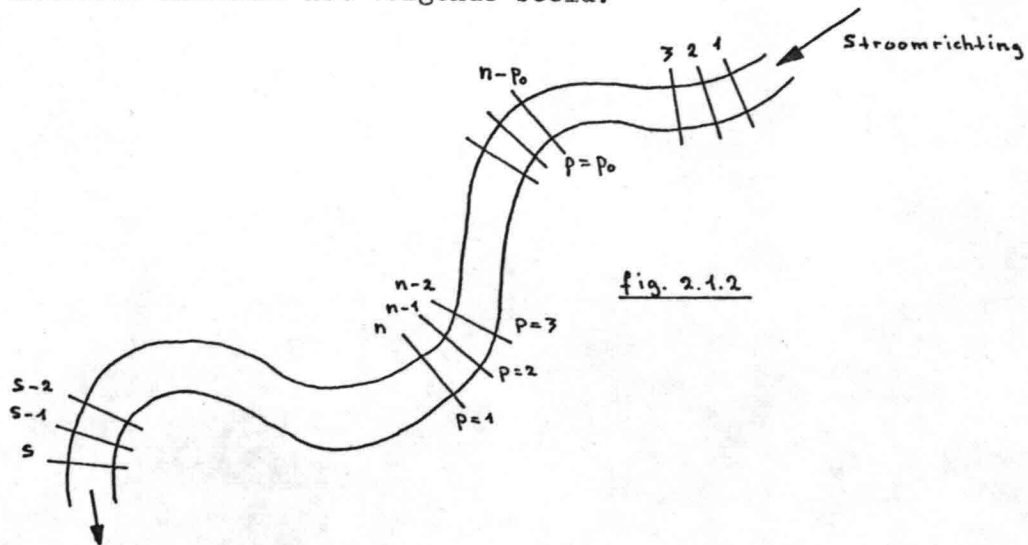
$$C = \begin{pmatrix} c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s,0} & c_{s,1} & c_{s,2} & c_{s,3} & c_{s,4} & c_{s,5} \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

2.3 Rivier in langsrichting

Beschouwen we nu niet meer de dwarsprofielen afzonderlijk maar weer aaneengekoppeld tot de rivier dan is het eerste punt dat we stellen: De onderlinge afstand van de dwarsprofielen is bij benadering gelijk, we hebben 8 dwarsprofielen per km dus de onderlinge afstand is c.a. 125 m.

We zullen de x niet verder meenemen in onze beschouwing wat al weer een beperking geeft n.l. dat we alleen maar iets van een dwarsprofiel

kunnen voorspellen als we deze tussenruimte van 125 m aanhouden. Hierdoor ontstaat het volgende beeld.



s is totaal aantal dwarsprofielen
 n is het beschouwde dwarsprofiel
 n-p₀ is het laatste dwarsprofiel dat nog van invloed is op het n-de dwarsprofiel

De nummering van de dwarsprofielen begint nu bovenstrooms. We willen iets zeggen over de invloed van de rivierbochten op de geometrie van benedenstroomse dwarsprofielen.

De geometrie van een dwarsprofiel hadden we beschreven met vergelijking (2.2.2):

$$z_{n,i} = c_{n,0} P_0(y_{n,i}) + c_{n,1} P_1(y_{n,i}) + \dots + c_{n,5} P_5(y_{n,i})$$

Hierin is $z_{n,i}$ en door $y_{n,i}$ ook de P_r aan het dwarsprofiel gebonden. Het ligt dus voor de hand om de coëfficiënt $c_{n,r}$ wat nader te beschouwen en de invloed van R in deze coëfficiënt te verwerken.

Bij de ontwikkeling van (2.2.1) in (2.2.2) zagen we dat de geometrie van een dwarsprofiel inderdaad bepaald wordt door de coëfficiënt $c_{n,r}$ immers deze coëfficiënt geeft aan in hoeverre een bepaald orthogonaal polynoom "meedoet" in de beschrijving van het profiel.

Voorts is het ook logisch de invloed van de bochten op de coëfficiënt $c_{n,r}$ afzonderlijk te beschouwen dus op alle waarden van $c_{n,0}$, $c_{n,1}$ enz.

Ook zal het voor ieder duidelijk zijn, dat niet de hele rivier bovenstrooms van een bepaald dwarsprofiel op dit dwarsprofiel van invloed zal zijn, er zal een zekere uitdemping optreden.

Daar wij de afstand kunnen uitdrukken in een zeker aantal malen de afstand tussen 2 profielen kunnen we dus stellen dat bijv. p_0 dwarsprofielen bovenstrooms van het beschouwde dwarsprofiel nog hun invloed doen gelden op dat dwarsprofiel.

Voor de uniformiteit zullen we ook de kromtestralen die we straks gaan gebruiken, dimensieloos maken door ze met de B_n te vermenigvuldigen.

We nemen nu het volgende verband aan:

$$c_{n,r} = A_{r,0} + \sum_{p=1}^{p_0} A_{r,p} R_{n-p+1} \quad (2.3.1)$$

Waarin $c_{n,r}$ de coëfficiënten zijn uit (2.2.6).

R_{n-p+1} is de kromtestraal van het $(n-p+1)$ ste dwarsprofiel dimensieloos gemaakt met behulp van de breedte $B_{(n-p+1)}$

$$\rightarrow R_{n-p+1} = \frac{B_{n-p+1}}{F_{n-p+1}} ; F_{n-p+1} \begin{cases} \text{is de straal van de bocht} \\ \text{in de } (n-p+1)\text{ste} \\ \text{doorsnede} \end{cases}$$

$A_{r,p}$ zijn coëfficiënten.

We hebben een lineair verband aangenomen.

Schrijven we (2.3.1) in matrix rotatie.

$$c_r = R \cdot a_r \quad (2.3.2)$$

Hierin is R de matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & R_{p_0} & R_{p_0 - 1} & \dots & R_1 \\ 1 & R_{p_0 + 1} & R_{p_0} & \dots & R_2 \\ 1 & R_{p_0 + 2} & R_{p_0 + 1} & \dots & R_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & R_s & R_{s - 1} & \dots & R_{s - p_0 + 1} \end{pmatrix}$$

Een matrix van $(p_0 + 1) \times (s - p_0)$ elementen.

Bij het werken met deze matrix zullen we dus voorzichtig moeten zijn door het grote aantal elementen, bij ons is $p_0 = 30$, $s = 544$ zodat de matrix $31 \times 514 = 15.934$ elementen bevat.

Uitgebreidere informatie wordt gegeven in (3.3)

c is de vector met $(s - p_0)$ elementen

a is de vector met $(p_0 + 1)$ elementen

Methode van de kleinste kwadraten toegepast op 2.3.2 geeft ons de normaalvergelijkingen:

$$R'R a_r = R'c_r \tag{2.3.2}$$

Als $R'R$ is te invertieren dan volgt hieruit de vector a

$$a_r = (R'R)^{-1} \cdot R'c_r \tag{2.3.4}$$

Waarmee de gezochte coëfficiënten zijn gevonden.

Voor iedere r vinden we een stelsel coëfficiënten a_r volgens (2.3.4).

We vinden dus de totale matrix a:

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & \dots & A_{0,p_0} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p_0} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p_0} \\ A_{3,0} & A_{3,1} & A_{3,2} & \dots & A_{3,p_0} \\ A_{4,0} & A_{4,1} & A_{4,2} & \dots & A_{4,p_0} \\ A_{5,0} & A_{5,1} & A_{5,2} & \dots & A_{5,p_0} \end{pmatrix} \tag{2.3.5}$$

Dit zijn dan de coëfficiënten die als constanten voor de gehele rivier gelden en waarmee we voor ieder dwarsprofiel de coëfficiënten $c_{n,r}$ kunnen uitrekenen met behulp van (2.2.1) waarna we de waterdiepten $z_{n,i}$ kunnen vinden in een dwarsprofiel met behulp van (2.1.2).

Hierbij gelden dus wel de al eerder genoemde beperkingen nl.

- a) Alleen dwarsprofielen op een onderlinge afstand van 125 m, of een veelvoud daarvan, kunnen worden uitgerekend.
- b) We bepalen de dwarsprofielen ten opzichte van de O.L.W. van 1962, daar dit het referentievlak is waarvan we zijn uitgegaan.

2.4. Standaardafwijkingen

We zullen een schatting maken van de variantie (kwadraat van de standaardafwijking) die ontstaat door bovenbeschreven methode geheel toe te passen, dus eerst de c's te schatten, met behulp hiervan de A's te schatten, dan de c's terugrekenen en met behulp hiervan de dwarsprofielen terug te rekenen. Voor een theoretische afleiding verwijzen we naar (3.3).

Hier zullen we enkele aannamen en verwaarlozingen toepassen om tot een verantwoorde schatting van de variantie in de teruggerekende z-waarden te komen.

We hadden (2.2.3)

$$z_n = P \cdot c_n$$

of juist(er) geschreven (zie 3.2)

$$\underline{z}_n = P \cdot c_n + \underline{\epsilon} \tag{2.4.1}$$

met verwachtingswaarde:

$$E\underline{z}_n = P \cdot c_n \tag{2.4.2}$$

Waarin ϵ de fout is in \underline{z}_n

\underline{z}_n en $\underline{\epsilon}$ zijn stochastische grootheden (zie 3.2).

Veronderstellen we dat ϵ normaal verdeeld is met variantie σ^2 .

Dus: $z: N(0, \sigma^2 I)$

Waarin I staat voor de eenheid matrix.

Vergelijking (2.2.5)

$$c_n = (P'P)^{-1} P'z_n$$

dit was de schatting voor c_n .

De cov. matrix van c_n , verder te schrijven als χ_{c_n} wordt:

$$\chi_{c_n} = (P'P)^{-1} \sigma^2 \quad (2.4.3)$$

Daar σ^2 onbekend is moeten we deze schatten uit de waarnemingen:

$$s^2 = \frac{1}{m - r} \{z'z - z'Pc_n\}$$

Dit geeft ons een schatting voor χ_{c_n} en dat zullen we steeds aangeven door er een $\hat{}$ boven te zetten.

$$\hat{\chi}_{c_n} = (P'P)^{-1} s^2 \quad (2.4.4)$$

Daar de matrix P bestaat uit orthogonale polynomen waardoor $\Sigma P_i P_j \sim 0$ wordt voor $i \neq j$, is die matrix $P'P$ een diagonaal matrix en dus is ook de matrix $(P'P)^{-1}$ een diagonaal matrix.

Hieruit volgt dus dat de co-varianties tussen de coëfficiënten $c_{n,r}$ nul zijn.

We vinden voor iedere $c_{n,r}$ een andere schatting voor de variantie, althans in principe. Nemen we voor de variantie van c_r in het algemeen het gemiddelde over n van de met (2.3.4) gevonden varianties dan vinden we:

$$\text{var } c_r = \frac{\sum_{s=1}^s \text{var } c_{n,r}}{s} = \tau_r^2 \quad (2.4.5)$$

Deze middeling is toegestaan daar alle varianties van $c_{n,r}$ maar éénmaal voorkomen.

Algemeen is het gemiddelde van bijv. 3 varianties:

$$\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2 + (n_3 - 1) s_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3}$$

Als alle n 's gelijk zijn $\rightarrow \frac{(n-1)\{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\}}{(n-1) \cdot 3} = \frac{\Sigma s^2}{3}$ (2.4.6)

Gaan we nu naar vergelijking (2.3.2) $c_r = Ra_r$

of eigenlijk $\underline{c}_r = Ra_r + \underline{\xi}$ (2.4.4)

met $E\underline{c}_r = Ra_r$ en $\underline{\xi} : N(0, \tau_r^2 I)$

Het is een logische zaak om voor de schatting van de variantie van ξ nu de gevonden, over n gemiddelde, variantie van c_r te nemen.

We vinden nu ook weer: (2.2.4)

$$a_r = (R'R)^{-1} R'c_r$$

Met $\Sigma_{a_r} = (R'R)^{-1} \tau_r^2$ (2.4.7)

We behoeven de τ^2 hier niet te schatten daar we hiervoor een aanname hebben gedaan.

Schatten we nu voor een bepaald dwarsprofiel de $c_{n,r}$ met behulp van $\hat{c}_{n,r} = R_e \cdot a_r$ waarin R_e een rijvector is en wel:

$$(1, R_n, R_{n-1}, \dots, R_{n-P_0+1})$$

Dan vinden we:

$$\text{var } \hat{c}_{n,r} = R_e (R'R)^{-1} R'_e \tau_r^2$$
 (2.4.8)

Schatten we nu de diepten terug: $\hat{z}_{n,i} = P_i \hat{c}_n$

waarin P_i is de rijvector:

$$(P_{i,0}, P_{i,1}, P_{i,2}, \dots, P_{i,5})$$

en \hat{c}_n de kolomvector:

$$(\hat{c}_{n,0}, \hat{c}_{n,1}, \hat{c}_{n,2}, \dots, \hat{c}_{n,5})$$

Nemen we aan dat de co-variantie's tussen de $c_{n,r}$'s nul is, dan vinden we als schatting van de variantie van $\hat{z}_{n,i}$

$$\widehat{\text{var}} \hat{z}_{n,i} = \sum_{r=0}^5 p_{i,r}^2 \text{var} \hat{c}_{n,r} \quad (2.4.9)$$

Volgens deze formule zullen we de variantie voor de teruggerekende z's bepalen.

3. Theoretische achtergronden

3.1 Orthogonale polynomen (ref. 4)

In (2.2) hebben we gezien hoe we door een aantal discrete punten een polynoom kunnen leggen. In dat geval om het dwarsprofiel te beschrijven, laten we de indices achterwege en vinden we:

$$z = c_0 + c_1y + c_2y^2 + c_3y^3 + \dots + c_4y^4 \quad (3.1.1)$$

Hoe hoger de macht van het polynoom, des te beter is de aansluiting in de punten. Maar tussen de punten kan de afwijking groter worden door het oscilerende karakter van de hogere machten.

We hebben in (2.2) ook al een nadeel van (3.1.1) genoemd nl. als we voor een bepaald geval een n^e graads polynoom hebben uitgerekend en we willen een $(n + 1)^e$ graads polynoom nemen door dezelfde punten, dan veranderen alle c-waarden van het n^e graads polynoom, we vinden dan nieuwe c-waarden voor het $(n + 1)^e$ polynoom.

De c-waarden zijn dus afhankelijk van de graad van het polynoom en dus niet zo erg representatief voor de z-waarden. We zullen (3.1.1) nu zo transformeren dat dit bezwaar is opgeheven en we onafhankelijke c-waarden verkrijgen.

Dit doen we door (3.1.1) in een stelsel orthogonale polynomen te ontwikkelen.

Het polynoom $z(y)$ van de n^e graad kan men zich formeel opgebouwd denken als lineaire combinatie van de functies $1, y, y^2, \dots, y^n$

$$\text{nl.:} \quad z(y) = a_0 1 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n \quad (3.1.2)$$

Wanneer men een aantal vaste polynomen $\phi_k(y)$ heeft, één voor iedere graad:

$$\phi_k(y) = b_{k0} + b_{k1}y + \dots + b_{kk}y^k$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots; b_{kk} \neq 0) \quad (3.1.3)$$

Dan kan men een bepaald polynoom $z(y)$ van de n^e graad ontbinden volgens de eerste n van deze polynomen.

$$z(y) = \sum_{j=0}^n a_j y^j \equiv \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(y) \quad (3.1.4)$$

gebruik makend van (3.1.3) vinden we dan:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n &= c_0 (b_{00}) + \\ &+ c_1 (b_{10} + b_{11} y) + \\ &+ c_2 (b_{20} + b_{21} y + b_{22} y^2) + \\ &+ c_3 (b_{30} + b_{31} y + b_{32} y^2 + b_{33} y^3) + \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &+ c_n (b_{n0} + b_{n1} y + \dots + b_{nn} y^n) \end{aligned}$$

Gelijkstelling van de coëfficiënt van y^j in de beide leden levert ons:

$$a_j = \sum_{k=j}^n c_k b_{kj} \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (3.1.5)$$

Dit stelsel van $n + 1$ vergelijkingen is steeds oplosbaar mits $b_{kk} \neq 0$.

We zien dus dat de ontwikkeling van een willekeurig polynoom naar de vaste polynomen $\phi_k(y)$ steeds mogelijk is. Over het karakter van $\phi_k(y)$ is nog niets vastgesteld, dit is nog willekeurig.

We gaan nu een stelsel polynomen zoeken die aan een bepaalde voorwaarde voldoen.

We kiezen een integratie-interval $[a, b]$ en een op $[a, b]$ niet-negatieve gewichtsfunctie $w(y)$.

Op een of andere functie $f(y)$ kunnen we dan toepassen de integraal operatie $\int_a^b w(y) \dots dy$. Deze operatie zullen we met \bar{f} aanduiden.

$$\bar{f} = \int_a^b w(y) f(y) dy, \text{ dit om onnodig schrijfwerk te voorkomen.}$$

Deze integraal operatie is lineair zodat de volgende normale distributieve en associatieve wetten gelden:

$$\overline{f_1 + f_2} = \overline{f_1} + \overline{f_2}$$

$$\overline{\alpha f} = \alpha \overline{f} \quad (\alpha = \text{constant}) \tag{3.1.6}$$

en $\overline{f(g + h)} = \overline{fg} + \overline{fh}$

Onze polynomen trachten we nu zo te bepalen dat de integraal operatie toegepast op het produkt van twee verschillende van deze polynomen nul is:

$$\overline{\phi_k \phi_j} = 0 \quad (k \neq j) \tag{3.1.7}$$

Dit noemen we de orthogonaliteitsrelatie met betrekking tot de integraal operatie.

Op grond van (3.1.6) is $\phi_k(y)$ nu met ieder polynoom $z_j(y)$ van lagere graad j :

$$\overline{\phi_k z_j} = 0 \quad (j < k) \tag{3.1.8}$$

Immers $z_j(y)$ kan volgens (3.1.4) ontwikkeld worden. Iedere term in deze ontwikkeling geeft na vermenigvuldiging met $\phi_k(y)$ en toepassing van de integraal operatie nul.

Als we aannemen dat we $\phi_0(y), \phi_1(y), \dots, \phi_{k-1}(y)$ reeds bepaald hebben dan zullen we trachten de ϕ_k te vinden.

ϕ_k zullen we nooit volledig kunnen vinden, voldoet nl. $\phi_k(y)$ aan (3.1.7) voor $j = 0, 1, \dots, (k-1)$ dan voldoet c. $\phi_k(y)$ er ook aan.

We kunnen $\phi_k(y)$ dus ten hoogste bepalen op een multiplicatieve constante na.

Daar $\phi_k(y)$ en $y\phi_{k-1}(y)$ beiden van n -de graad zijn, kunnen we altijd de 2e grootheid met een zodanige factor α vermenigvuldigen dat het verschil van lagere graad is, welk verschil in $\phi_0(y), \dots, \phi_{k-1}(y)$ ontwikkeld kan worden.

$$\begin{aligned} \phi_k(y) - \alpha y \phi_{k-1}(y) &= \beta_0 \phi_{k-1}(y) + \beta_1 \phi_{k-2}(y) + \dots + \\ &+ \beta_{k-1} \phi_0(y) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Vermenigvuldigen we beide leden met $\phi_j(y)$ en passen de integraal operatie toe, gebruik makend van de eigenschappen (3.1.6):

$$\begin{aligned} \overline{\phi_k \phi_j} - \alpha y \overline{\phi_{k-1} \phi_j} &= \beta_0 \overline{\phi_{k-j} \phi_j} + \beta_1 \overline{\phi_{k-2} \phi_j} + \dots + \\ &+ \beta_{k-1} \overline{\phi_0 \phi_j} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Allereerst nemen we $j < k - 2$

De grootheid $\overline{y \phi_{k-1} \phi_j}$ kan op de volgende wijze geschreven worden:

$$\overline{y \phi_{k-1} \phi_j} = \overline{\phi_{k-1} (y \phi_j)} = \overline{\phi_{k-1} (\text{polynoom van de graad } j + 1)}$$

Daar $j + 1 < k - 1$, is het laatste lid nul op grond van (3.1.8)

De andere term van het linkerlid van (3.1.10) is nul op grond van de orthogonaliteitsrelatie, evenals alle termen van het rechter lid met uitzondering van $\beta_{k-j-1} \overline{\phi_j \phi_j}$

$$\rightarrow \beta_{k-j-1} \overline{\phi_j^2} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, k-3)$$

Daar $w(y)$ en ook ϕ_j^2 niet negatief zijn op $[a, b]$, moet

$$\overline{\phi_j^2} = \int_a^b w(y) \phi_j^2(y) dy > 0$$

$$\text{Dus moet } \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_{k-1} = 0 \quad (3.1.11)$$

(3.1.9) wordt dus gereduceerd tot:

$$\phi_k(y) = \alpha y \phi_{k-1}(y) + \beta_0 \phi_{k-1}(y) + \beta_1 \phi_{k-2}(y) \quad (3.1.12)$$

Er dient opgemerkt te worden, dat α , β_0 en β_1 van k afhangen, deze afhankelijkheid is niet expliciet aangegeven.

Door (3.1.12) met $\phi_{k-2}(y)$ resp. $\phi_{k-1}(y)$ te vermenigvuldigen en de integraal operatie toe te passen vinden we:

$$\overline{\phi_k \phi_{k-2}} = \alpha y \overline{\phi_{k-1} \phi_{k-2}} + \beta_0 \overline{\phi_{k-1} \phi_{k-2}} + \beta_1 \overline{\phi_{k-2}^2} \quad \text{en}$$

$$\overline{\phi_k \phi_{k-1}} = \alpha y \overline{\phi_{k-1}^2} + \beta_0 \overline{\phi_{k-1}^2} + \beta_1 \overline{\phi_{k-2} \phi_{k-1}}$$

Een aantal termen zijn hierin nul op grond van de orthogonaliteitsrelatie.

Uit de resterende betrekkingen kunnen we β_1 resp β_0 bepalen uitgedrukt in α :

$$\beta_1 = - (y \overline{\phi_{k-1} \phi_{k-2}} / \overline{\phi_{k-2}^2}) \alpha ; \quad \beta_0 = - (y \overline{\phi_{k-1}^2} / \overline{\phi_{k-1}^2}) \alpha \quad (3.1.13)$$

We hebben in (3.1.12) en (3.1.13) dus een recursiebetrekking om $\phi_k(y)$ te bepalen op een factor α na indien de vorige polynomen van het orthogonale stelsel bekend zijn.

Indien $a = -b$ (bijv. $a = -1$, $b = +1$) en de gewichtsfunctie $w(y)$ een even functie is, kunnen we aantonen dat $\beta_0 = 0$. Immers volgt nu uit (3.1.7):

$$\overline{\phi_k \phi_j} = \int_{-1}^{+1} w(y) \phi_k(y) \phi_j(y) dy = \int_{-1}^{+1} w(n) \phi_k(-n) \phi_j(-n) dn$$

Dat wil zeggen dat $\phi_k(-y)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ook een orthogonaal stelsel vormt.

Daar $\phi_k(y)$ op een factor na bepaald moet zijn, moet dus gelden:

$$\phi_k(-y) = \delta'_k \phi_k(y)$$

Daar nu hieruit volgt $\phi_k(y) = \delta'_k \phi_k(-y)$ vinden we door combinatie:

$$\phi_k(y) = \delta_k^2 \phi_k(y)$$

zodat $\delta_k = \pm 1$. De waarde $+1$ betekent dat $\phi_k(y)$ een even functie is,

- 1 wil zeggen een oneven functie.

Derhalve is $\phi_k(y)$ ofwel een even ofwel een oneven functie. Het kwadraat is dan beslist een even functie en $y\phi_k^2(y)$ dus een oneven functie.

Passen we de symmetrische integraal operatie $\int_{-1}^{+1} w(y) \dots dy$

toe op een oneven functie, dan is de uitkomst nul.

Derhalve is $\beta_0 = 0$ Zie (3.1.13)

De factor α kan voor iedere $\phi_k(y)$ nog willekeurig gekozen worden.

Maar uiteraard doet men dit op een of andere geschikte manier.

Enige veel voorkomende wijzen waarop deze zogenaamde normering der orthogonale functies kan geschieden zijn de volgende:

- 1) kies α zó, dat de coëfficiënt van y^k één is; dit komt hierop neer dat we $\phi_0(y) \equiv 1$ stellen en in (3.1.12) $\alpha = 1$ nemen;
- 2) kies α zodanig, dat $\phi_k^2 = 1$;
- 3) kies α zodanig, dat $\phi_k(1) = 1$

Het zal duidelijk zijn, dat de $\phi_k(y)$, willen ze aan $\overline{\phi_k \phi_j} = 0$

voldoen, nogal een oscilerend karakter moeten bezitten op $[a,b]$

Men kan gemakkelijk aantonen, dat alle k -nulpunten van $\phi_k(y)$ reëel en verschillend zijn en bovendien in het interval $[a,b]$ liggen.

Was dit niet het geval, dan zou $\phi_k(y)$ minder dan k -malen van teken wisselen in dit interval.

(Stel in de punten $y_1, \dots, y_m; m < k$)

Vorm nu de functie:

$$g(y) = \phi_k(y) (y - y_1) \dots (y - y_m)$$

Deze functie vertoont op $[a,b]$ géén tekenwisseling meer. Derhalve moet na toepassing van de integraal operatie $\int_a^b w(y) \dots dy$

een van nul verschillende waarde ontstaan.

Anderzijds is $g(y)$ het product van $\phi_k(y)$ en een polynoom van lagere graad dan k .

Derhalve zou de integraal operatie volgens (3.1.8) nul moeten opleveren. We komen dus tot een tegenspraak. Het uitgangspunt dat $\phi_k(y)$ minder dan k tekenwisselingen op $[a,b]$ vertoont is dus onjuist.

Derhalve moet $\phi_k(y)$ k verschillende nulpunten op $[a,b]$ bezitten. We zullen nu een en ander aan de hand van een voorbeeld toelichten.

Neem als interval $[-1, +1]$, de gewichtsfunctie $w(y) = 1$, zoals boven is aangetoond is dus $\beta_0 = 0$.

We maken gebruik van de 3e normeringsregel: $\phi_k(1) = 1$.

We hebben in de eerste plaats $\phi_0(y) = 1$, wegens $\phi_0(1) = 1$.

Voorts:

$$\phi_k(y) = \alpha \left[y \phi_{k-1}(y) - \frac{(y \phi_{k-1} \phi_{k-2} / \phi_{k-1}^2) \phi_{k-2}(y)}{\phi_{k-1}^2} \right]$$

($k = 1, 2, 3, \dots$)

waarbij de term met $\phi_{k-2}(y)$ ontbreekt voor $k = 1$

Dus is:

$$\phi_1(y) = \alpha y \phi_0(y) = \alpha y; \phi_0(y) = 1$$

$$\rightarrow \alpha = 1 \quad \rightarrow \phi_1(y) = y$$

Nu volgt verder:

$$y \phi_1 \phi_0 = \int_{-1}^{+1} 1 \cdot y \cdot y \cdot 1 \, dy = 2/3;$$

$$\phi_0^2 = \int_{-1}^{+1} 1 \cdot 1^2 \cdot dy = 2;$$

Dit ingevuld in de recussiebetrekking voor $k = 2$ geeft:

$$\phi_2(y) = \alpha \left[y \cdot y - \frac{2/3}{2} \cdot 1 \right] = \alpha (y^2 - 1/3)$$

Uit $\phi_2(1) = 1$ volgt $\alpha = 3/2$ zodat $\phi_2(y) = 3/2 y^2 - 1/2$

Aldus kan men doorgaan en de verdere $\phi_k(y)$ bepalen.

We krijgen zo de zogenaamde polynomen van Legendre die we met $P_k(y)$ zullen aanduiden. De eerste ervan zijn:

$$\begin{aligned}
 P_0(y) &= 1 \\
 P_1(y) &= y \\
 P_2(y) &= \frac{1}{2} (3y^2 - 1) \\
 P_3(y) &= \frac{1}{2} (5y^3 - 3y) \\
 P_4(y) &= \frac{1}{8} (35y^4 - 30y^2 + 3) \\
 P_5(y) &= \frac{1}{8} (63y^5 - 70y^3 + 15y) \\
 P_6(y) &= \frac{1}{16} (231y^6 - 315y^4 + 105y^2 - 5) \\
 P_7(y) &= \frac{1}{16} (429y^7 - 693y^5 + 315y^3 - 35y) \\
 &\text{enz.}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.14}$$

Voor een schets zie bijlage 3a.

Een expliciete uitdrukking voor de coëfficiënt in recursiebetrekkingen:

$$P_k(y) = \frac{2k-1}{k} y P_{k-1}(y) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(y)
 \tag{3.1.15}$$

Alsook kunnen we afleiden:

$$\int_{-1}^{+1} P_k^2(y) dy = \frac{2}{(2k+1)}
 \tag{3.1.16}$$

Enkele andere veel gebruikte polynomen zijn:

Polynomen van Laguerre: $L_k(y)$; $a = 0$, $b = \infty$ $w(y) = e^{-y}$

Normering: coëfficiënt van y^k in $L_k(y)$ is $(-1)^k$

We vinden dan:

$$\begin{aligned}
 L_0(y) &= 1 \\
 L_1(y) &= 1 - y \\
 L_2(y) &= 2 - 4y + y^2 \\
 L_3(y) &= 6 - 18y + 9y^2 - y^3 \\
 L_4(y) &= 24 - 96y + 72y^2 - 16y^3 + y^4 \\
 &\text{enz.}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.17}$$

Met recursiebetrekkingen:

$$L_k(y) = (-1 + 2k - y) L_{k-1}(y) - (k-1)^2 L_{k-2}(y) \quad (3.1.18)$$

en:

$$\overline{L_k^2} = \int_0^{\infty} e^{-y} L_k^2(y) dy = (k!)^2 \quad (3.1.19)$$

Voor een schets van deze polynomen zie bijlage 3b.

Polynomen van Hermite: $H_k(y)$: $a = -$; $b = +\infty$ $w(y) = e^{-y^2}$

Normering: coëfficiënt van y^k in $H_k(y)$ is 2^k .

We vinden dan:

$$\left. \begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ H_3(y) &= 8y^3 - 12y \\ H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12 \\ \text{enz.} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.20)$$

Met recursiebetrekkingen:

$$H_k(y) = 2y H_{k-1}(y) - 2(k-1) H_{k-2}(y) \quad (3.1.21)$$

en:

$$\overline{H_k^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k^2(y) dy = 2^k k! \sqrt{\pi} \quad (3.1.22)$$

Voor een schets van deze polynomen zie bijlage 3c.

Polynomen van Tsjebysjev: $T_k(y)$: $a = -1$, $b = +1$ $w(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Normering: $T_k(1) = 1$

We vinden dan:

$$\begin{aligned}
 T_0(y) &= 1 \\
 T_1(y) &= y \\
 T_2(y) &= 2y^2 - 1 \\
 T_3(y) &= 4y^3 - 3y \\
 T_4(y) &= 8y^4 - 8y^2 + 1 \\
 &\text{enz.}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} T_0(y) \\ T_1(y) \\ T_2(y) \\ T_3(y) \\ T_4(y) \\ \text{enz.} \end{aligned}} \right\} \quad (3.1.23)$$

Met recursiebetrekkingen:

$$T_k(y) = 2y T_{k-1}(y) - T_{k-2}(y) \quad (3.1.24)$$

en:

$$\frac{1}{T_k^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{T_k^2(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \begin{cases} \pi & (k=0) \\ \frac{\pi}{2} & (k>0) \end{cases} \quad (3.1.25)$$

Voor een schets van deze polynomen zie bijlage 3d.

Alvorens iets te zeggen over de keuze die wij gedaan hebben voor wat betreft deze polynomen, zullen we eerst nog een andere manier voor het ontwikkelen van een polynoom in orthogonale polynomen bespreken, teneinde ook deze in onze vergelijking te kunnen betrekken.

Ontwikkelen we ons polynoom $z = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y^2 + \dots + a_k y^k$ volgens $z = c_0 \xi_0^1 + c_1 \xi_1^1 + \dots + c_k \xi_k^1$, waarin ξ_j^1 staat voor de orthogonale polynomen van het volgende type.

$$\begin{aligned}
 \xi_0^1 &= \xi_0 = 1 \\
 \xi_1^1 &= \lambda_1 \xi_1 = \lambda_1 \left\{ \frac{y_i - \bar{y}}{D} \right\} \\
 \xi_2^1 &= \lambda_2 \xi_2 = \lambda_2 \left\{ \left(\frac{y_i - \bar{y}}{D} \right)^2 - \frac{m^2 - 1}{12} \right\} \\
 \xi_3^1 &= \lambda_3 \xi_3 = \lambda_3 \left\{ \left(\frac{y_i - \bar{y}}{D} \right)^3 - \left(\frac{y_i - \bar{y}}{D} \right) \left(\frac{3m^2 - 7}{20} \right) \right\} \\
 \xi_4^1 &= \lambda_4 \xi_4 = \lambda_4 \left\{ \left(\frac{y_i - \bar{y}}{D} \right)^3 - \left(\frac{y_i - \bar{y}}{D} \right)^2 \left(\frac{3m^2 - 13}{14} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{560} (m^4 - 10m^2 + 9) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\xi_5^1 = \lambda_5 \xi_5 = \lambda_5 \left\{ \left(\frac{y_i - \bar{y}}{D} \right)^5 - \left(\frac{y_i - \bar{y}}{D} \right)^3 \frac{5(m^2 - 7)}{18} + \left(\frac{y_i - \bar{y}}{D} \right) \left(\frac{15m^4 - 230m^2 + 407}{1008} \right) \right\}$$

enz.

waarin λ zo wordt gekozen dat de elementen van ξ_j gehele getallen zijn.

D is de onderlinge afstand tussen de meetpunten.

We vinden dan de voorwaarde dat de y_i 's equidistant moeten zijn.

Voorts geldt:

$$\xi_{k+1} = \xi_j \xi_k - \frac{k^2(m^2 - k^2)}{4(4k^2 - 1)} \xi_{k-1} \quad (3.1.27)$$

Voor deze polynomen geldt de orthogonaliteitsrelatie:

$$\sum_n \xi_i \xi_j = 0 \quad \text{voor } (i \neq j)$$

Deze polynomen zijn getabelleerd (ref. 5) voor de diverse waarden van m. De waarden van deze polynomen zijn dus afhankelijk van het aantal waarnemingen m.

Tot zover de beschrijving van de diverse orthogonale polynomen.

Voor de door ons beschreven methode die erop neerkomt:

beschrijf de afzonderlijke dwarsprofielen met:

$$z_{n,i} = c_{n,0} P_0(y_{n,i}) + c_{n,1} P_1(y_{n,i}) + \dots + c_{n,r} P_r(y_{n,i})$$

Voor ieder dwarsprofiel vinden we dus andere coëfficiënten $c_{n,r}$,

althans in principe. Willen we nu de invloed van de bochten op de coëfficiënten $c_{n,r}$ oplossen, dan dienen we er wel

voor te zorgen dat de polynomen P_r voor gelijke $y_{n,i}$'s in de

diverse dwarsprofielen, dus voor $n = 1, 2, 3 \dots$ dezelfde

waarde hebben, zodat de coëfficiënten $c_{n,r}$ niet afhankelijk zijn

van de polynomen. Voor de polynomen van (3.1.26) vonden we dat deze afhankelijk zijn van de waarde m zijnde het aantal waarnemingen

van $z_{n,i}$ in het dwarsprofiel. Op grond van het bovenstaande vallen

deze polynomen voor ons gebruik dus weg.

Dit is jammer, omdat hiervoor de orthogonaliteitsrelatie $\sum_n \xi_i \xi_j = 0$ voor $(i \neq j)$ geldt en dit een zeer eenvoudige vorm voor onze regressie vergelijking zou opleveren (zie 3.2).

Anderzijds hadden deze polynomen ook het bezwaar van het equidistant moeten zijn van de y-waarden, en een gebondenheid aan de onderlinge afstand van de y-waarden.

We moeten dus een keuze maken uit de overige polynomen. We dienen nog wel op te merken dat voor de beschrijving van het enkele dwarsprofiel, dus zonder de tweede stap om de invloed van de bochten aan te tonen, ook met de polynomen (3.1.26) goede resultaten zijn te bereiken.

Deze polynomen worden in de lineaire regressie ook wel degelijk toegepast, maar lijken ons voor ons doel ongeschikt.

Beschouwen we nu eerst de polynomen van Hermite (bijlage 3c).

Nadeel is dat deze polynomen geldig zijn van $-\infty$ tot $+\infty$, de orthogonaliteitsrelatie is namelijk gebaseerd op $\int_{-\infty}^{+\infty}$

Een ander nadeel is dat voor grotere y-waarden de waarden van $H_3(y)$, $H_4(y)$ enz. al zeer groot worden zodat we ons dan toch meer moeten beperken tot nauwere grenzen, willen we de hogere polynomen nog kunnen gebruiken, en dat doet de orthogonaliteitsrelatie teniet.

De polynomen van Laguerre (zie bijlage 3b) geldig van 0 tot ∞ hebben hetzelfde nadeel als Hermite, nl. ook hier een sterke toename van de polynoomwaarde voor toenemende y. Dus ook voor ons doel niet bruikbaar.

Blijven over de polynomen van Legendre (zie bijlage 3a) en de polynomen van Tshebysjev (zie bijlage 3d).

Beide polynomen hebben een begrensde waarde, hoe hoog de macht ook wordt en geven dus hoop op goede resultaten. We zullen de breedte moeten normeren daar de geldigheid loopt van -1 tot $+1$, wat het voordeel geeft van een betere benadering van de orthogonaliteits-

relatie $\int_{-1}^{+1} w(y) P_i P_j = 0$ voor $i \neq j$.

Als we nu deze vervangen door:

$$\sum_{k=-1}^{+1} w(y_k) P_i(y_k) P_j(y_k) = 0 \text{ voor } i \neq j$$

Van deze beide soorten geeft Legendre de voor ons doel beste polynomen daar het dwarsprofiel er al min of meer in zit.

Bovenstaande beschouwing motiveert onze keuze van de polynomen van Legendre.

3.2. Lineaire regressie in dwarsprofielen

In 2.1 en 2.2 hebben we reeds in grote lijnen aangegeven hoe we uitgaande van bepaalde metingen, tot een functie-schatting voor een dwarsprofiel konden komen.

We zullen hier wat nader ingaan op de details en het voordeel van het gebruik van orthogonale polynomen.

We veronderstelden het volgende verband:

$$z_{n,i} = \delta_{n,0} P_0(y_{n,i}) + \delta_{n,1} P_1(y_{n,i}) + \dots + \delta_{n,5} P_5(y_{n,i}) \tag{3.2.1}$$

Waarin $P_r(y_{n,i})$ staat voor de orthogonale polynomen van Legendre.

Daar het hier om metingen van $z_{n,i}$ gaat, hoort hier nog een fout aan te worden toegevoegd en $z_{n,i}$ als stochastische variabele te worden opgevat.

Zodat we krijgen:

$$z_{n,i} = \delta_{n,0} P_{0,n,i} + \delta_{n,1} P_{1,n,i} + \dots + \delta_{n,5} P_{5,n,i} + \epsilon$$

Waarin $P_{r,n,i}$ staat voor $P_r(y_{n,i})$.

Veronderstellen we dat de ϵ verdeeld is volgens $N(0, \sigma^2 I)$, waarin I staat voor de eenheidsmatrix.

Dan vinden we in matrixnotatie:

$$\underline{z}_n = P_n \delta_n + \epsilon$$

Met verwachtingwaarde:

$$Ez_{n,i} = P_n \delta_n \quad (3.2.2)$$

Schrijven we voor δ_n de kleinste kwadratenschatters c_n dan gaat

$$(3.2.1) \text{ over in } z_n = P_n c_n \quad (3.2.3)$$

Passen we op (3.2.1) de methode der kleinste kwadraten toe:

invullen $\ddot{z}_{n,r}$ en $\ddot{y}_{n,i}$ zijnde de waarnemingen $\ddot{z}_{n,i}$ en de bijbehorende $\ddot{y}_{n,i}$ dan vinden we:

$$\text{Rest}_{n,i} = c_{n,0} P_{0,n,i} + c_{n,1} P_{1,n,i} + \dots + c_{n,5} P_{5,n,i} - \ddot{z}_{n,i} \quad (3.2.4)$$

Rest $_{n,i} \neq 0$ daar we voor $\delta_{n,r}$ de schattingen $c_{n,r}$ gebruikt hebben en er tevens nog een fout ϵ in zit.

Voor een dwarsprofiel vinden we op deze wijze in vergelijking van dit type als m het aantal waarnemingen van $\ddot{z}_{n,i}$ is.

Kwadraten van (3.2.4) en over i sommeren geeft ons:

$$\phi_k = \sum_{i=1}^m (\text{Rest}_{n,i})^2$$

Voor goede schattingen van $c_{n,r}$ moet ϕ_n minimaal worden.

Dit geeft ons:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_n}{\partial c_{n,0}} = 0 &= \sum_{i=1}^m P_{0,n,i} \text{Rest}_{n,i} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_n}{\partial c_{n,1}} = 0 &= \sum_{i=1}^m P_{1,n,i} \text{Rest}_{n,i} \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_n}{\partial c_{n,5}} = 0 &= \sum_{i=1}^m P_{5,4,i} \text{Rest}_{n,i} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

Dit levert ons 6 vergelijkingen met 6 onbekenden.

$$c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,5}$$

Dit zijn de zogenaamde normaalvergelijkingen van Gauss.

In matrixnotatie:

$$P'_{n,n} c_n = P'_{n,n} z_n \quad (3.2.6)$$

Waaruit c_n volgt als:

$$c_n = (P'_{n,n})^{-1} P'_{n,n} z_n \quad (3.2.7)$$

Uitschrijven van de vergelijking (3.2.5) geeft:

$$\sum_{i=1}^m P_{r,n,i} \{c_{n,0} P_{0,n,i} + \dots + c_{n,r} P_{r,n,i} - \ddot{z}_{n,i}\} = 0 \quad (3.2.8)$$

Door toepassing van orthogonale polynomen met als orthogonaliteits-

relatie: $\sum_{i=1}^m P_{k,i} P_{l,i} = 0$ voor $k \neq l$, blijven er in (3.2.8)

alleen de termen:

$$\sum_{i=1}^m c_{n,r} P_{r,n,i}^2 \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^m P_{r,n,i} \ddot{z}_{n,i}$$

over. Waaruit dan direct de schatting voor de coëfficiënt $c_{n,r}$ volgt:

$$c_{n,r} = \frac{\sum_{i=1}^m P_{r,n,i} \ddot{z}_{n,i}}{\sum_{i=1}^m P_{r,n,i}^2}; \quad \text{voor } r = 0, 1, \dots, 5 \quad (3.2.9)$$

In de matrixvergelijking (3.2.6) gaat de matrix $P'_{n,n}$ dus over in een diagonaalmatrix:

$$P'_{n,n} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m P_{0,n,i}^2 & & & & & \\ & \sum_{i=1}^m P_{1,n,i}^2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sum_{i=1}^m P_{5,n,i}^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

We vinden voor de variantie-covariantie van c_n in matrixnotatie:

$$\text{Var } c_n = (P_n' P_n)^{-1} * \sigma^2 \quad (3.2.11)$$

Daar de matrix $(P_n' P_n)^{-1}$ een diagonaalmatrix is bij het gebruik van orthogonale polynomen, vinden we voor de covarianties nul. De σ^2 is onbekend en we gebruiken hiervoor de geschatte waarde s^2 . Deze schatten we als het kwadraat van de afwijkingen tussen $\hat{z}_n = P_n c_n$ en \ddot{z}_n waarin $\hat{}$ staat voor de teruggeschatte waarde, dus berekend met behulp van de kleinste kwadratenschatters voor c_n . Dat geeft ons:

$$s^2 = \frac{1}{m-5} (\ddot{z}_n' \ddot{z}_n - c_n' P_n \ddot{z}_n) \quad (3.2.12)$$

Want $(\ddot{z}_n' \ddot{z}_n - c_n' P_n \ddot{z}_n)$ heeft $(m-5)$ vrijheidsgraden.

We vinden dan als schatter voor de var c_n :

$$\widehat{\text{var } c_n} = (P_n' P_n)^{-1} s^2 \quad (3.2.13)$$

Willen we een enkele z-waarde terugrekenen dus:

$$\hat{z}_{n,i} = P_{n,i} c_n$$

waarin $P_{n,i}$ is de vector: $(P_{0,n,i}, P_{1,n,i}, \dots, P_{5,n,i})$

dan vinden we voor deze $\hat{z}_{n,i}$ de variantieschatter:

$$\widehat{\text{var } \hat{z}_{n,i}} = P_{n,i}' (P_n' P_n)^{-1} P_{n,i} s^2 \quad (3.2.14)$$

Voor $n = 1, 2, 3, \dots, s$ vinden we de coëfficiënt vector c_n met behulp van (3.2.7) en de geschatte variantie met behulp van (3.2.13).

Totaal geeft dat ons de volgende matrix:

$$\begin{pmatrix} c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s,0} & c_{s,1} & c_{s,2} & c_{s,3} & c_{s,4} & c_{s,5} \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

3.3 Lineaire regressie in langsrichting

Dezelfde methode als in 3.2 besproken, passen we nu toe op de vergelijking (2.3.1)

$$c_{n,r} = \alpha_{r,0} + \sum_{p=1}^{p_0} \alpha_{r,p} R_{n-p+1} + \xi \quad (3.3.1)$$

In matrixnotatie:

$$\underline{c}_r = R\alpha_r + \underline{\xi}$$

met verwachtingswaarde:

$$E\underline{c}_r = R\alpha_r \quad (3.3.2)$$

We zoeken de kleinste kwadratenschatters voor α_r en schrijven deze als a_r .

Dit geeft ons:

$$\underline{c}_r = Ra_r \quad (3.3.3)$$

met de normaalvergelijkingen:

$$R'R a_r = R'c_r \quad (3.3.4)$$

en oplossing:

$$a_r = (R'R)^{-1} R'c_r \quad (3.3.5)$$

De waarden van $c_{n,r}$ onderling zijn ongecorreleerd, daar ze geschat zijn uit afzonderlijke waarnemingen.

Daar de $\widehat{\text{var}} c_{n,r}$ niet ver uit elkaar liggen zullen we

$$\begin{aligned} \hat{y}_{c_r} \text{ benaderen door: } \hat{y}_{c_r} &\sim \widehat{\text{var}} c_r \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \widehat{\text{var}} c_r I \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Hierin staat $\widehat{\text{var}} c_r$ voor de over n gemiddelde variantie:

$$\widehat{\text{var}} c_r = \frac{\sum_{n=p_0}^s \text{var } c_{n,r}}{n} \tag{3.3.9}$$

In (2.3.6) is al aangetoond dat deze middeling is toegestaan. Nu mag dus weer worden aangenomen dat $\xi \sim N(0, \tau^2 I)$ verdeeld is als we voor τ^2 nemen $\widehat{\text{var}} c_r$.

We mogen dus weer verder werken met vergelijking (3.3.5).

$$\rightarrow \text{var } a_r = (R'R)^{-1} \tau^2 \tag{3.3.10}$$

Voor $r = 0, 1, 2, \dots, 5$ vinden we op deze wijze de coëfficiënten a_r en hun variantie.

Dat geeft totaal:

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,p_0} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,0} & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,p_0} \end{bmatrix} \tag{3.3.11}$$

Dit zijn de gezochte coëfficiënten die onafhankelijk zijn van het dwarsprofiel en constant zijn voor de hele rivier.

Berekenen we $c_{n,r}$ uit $\hat{c}_{n,r} = R_e \cdot a_r$.

Waarin R_e is de vector $(1, R_n, R_{n-1}, \dots, R_{n-p_0+1})$

Dan vinden we als var $\hat{c}_{n,r}$:

$$\text{var } \hat{c}_{n,r} = R_e' (R'R)^{-1} R_e \tau^2$$

De verdere werkwijze is in 2.4 reeds uiteengezet. (Zie ook ref. 1)

4. Toepassingen

4.1 Algemeen

De orthogonale polynomen van Legendre zijn niet orthogonaal op diskrete punten, althans niet exact.

Een uitgevoerde berekening, waarin deze veronderstelling wel was aangenomen, gaf te grote afwijkingen zodat in het computerprogramma de volledige matrices zijn meegenomen en niet van de orthogonaliteitsrelatie gebruik is gemaakt. (Zie bijlage 5a)

Deze verandering is niet van groot belang daar het wezen van de berekening er niet door wordt aangetast.

De, met behulp van het programma op bijlage 5a, gevonden A-coëfficiënten zijn gebruikt om de dwarsprofielen uit te rekenen (zie bijlage 5b, § 2.3 en § 2.4).

We dienen er rekening mee te houden, zoals al eerder is opgemerkt, dat de dwarsprofielen zijn uitgerekend t.o.v. O.L.R. 1962 zodat ze bij gebruik voor een andere O.L.R. hierop gecorrigeerd dienen te worden.

Bij de bochten bij Nijmegen en de bochtafsnijdingen bij St. Andries (bijlagen 9 t/m 11) is gebruik gemaakt van een Plotprogramma (zie bijlage 8).

Voor deze dwarsprofielen is geen variantie voor z geschat, daar deze schatting toch niet zuiver was en geen goed beeld gaf.

4.2 Bestaande riviergedeelte beneden crd 9371 (km 937A)

De uitkomsten van het computerprogramma (bijlage 5) voor 6 en 7 polynomen zijn weergegeven op bijlage 2 voor wat betreft de diepte-schattingen. Eerst zijn de z-waarden uitgerekend behorende bij de stippellijn. Hiervoor is gebruik gemaakt van de peilingen over de volle breedte van de rivier.

Bij het tekenen van deze lijnen viel ons direct op dat vooral aan de kanten grote afwijkingen tussen het berekende en gemeten dwarsprofiel optreden, soms wel ca. 7 meter!

Dit is niet zo verwonderlijk als we beseffen dat aan de kanten vooral locale storingsen voorkomen in het bestaande dwarsprofiel, bijvoorbeeld ten gevolge van de kribkoppen, zie bijv. crd 9417. (Zie ook bijlage 14.)

Op deze bijlage zien we ook duidelijk die grote positieve afwijkingen aan de kanten van de rivier, op deze kaart vinden we nl. de waarden van Δz .

Positieve afwijking d.w.z. z-berekend is kleiner dan z-aanwezig want $\Delta z = z\text{-aanwezig} - z\text{-berekend}$.

Deze plaatselijke storingsen kunnen niet worden beschreven met de hier gevolgde methode daar ze niet worden veroorzaakt door de bovenstroomse bochten, maar door de plaatselijke condities.

Een ander nadeel van deze locale storingsen is dat ze storend werken op de kleinste kwadratenschatters, daar ze de waarnemingen zo onregelmatig maken.

Om te proberen de invloed van deze verstoringen te verminderen, zijn de dwarsprofielen voor een tweede maal berekend maar nu uitgaande van een andere breedte, $B' = (B - 80)$ m.

Waarbij we aan beide zijden van de rivier de $z = 0$ aannemen op 40 m uit de eerst aangenomen lijn over de kribkoppen.

Hiervoor zijn weer de A-coëfficiënten geschat en de laatste 121 dwarsprofielen teruggerekend, de resultaten zien we op bijlage 2, de streep-stippellijn.

Het doel van deze breedte reductie was dus om over het middengedeelte van de rivier een betere benadering van het dwarsprofiel te verkrijgen, daar de kanten toch niet zo interessant zijn, omdat deze óf diep genoeg óf veel te ondiep zijn voor de scheepvaart.

Om te controleren of de tweede methode inderdaad een betere benadering geeft over het middengedeelte, is voor beide methoden over hetzelfde deel van het dwarsprofiel een schatting gemaakt voor de variantie en het gemiddelde van Δz .

Voor de methode met B zijn hiervoor 6 waarnemingen weggelaten aan beide zijden, voor B' 2 waarnemingen aan beide zijden, dit gevoegd bij de breedtevermindering van 40 m aan beide zijden en gelet op de onderlinge afstand der waarnemingen, geeft ons voor beide methoden de waarnemingen over hetzelfde gedeelte.

We vinden dan:

voor B: $\widehat{\text{var } \Delta z_B} = 35,89 \rightarrow \hat{\sigma}_B = \sqrt{35,89} = 6$

en $\overline{\Delta z_B} = - 0,33 \text{ dm}$

voor B': $\widehat{\text{var } \Delta z_{B'}} = 57,87 \rightarrow \hat{\sigma}_{B'} = \sqrt{57,87} = 7,6$

en $\overline{\Delta z_{B'}} = - 3,31 \text{ dm}$

Op grond hiervan kunnen we al zonder meer zeggen dat de eerste methode de voorkeur verdient, daar het gemiddelde zowel als de variantie van de afwijking Δz kleiner zijn dan bij de tweede methode. Voor de eerste methode is tevens de variantie van Δz en het gemiddelde $\overline{\Delta z}$ uitgerekend als we aan beide zijden maar 2 waarnemingen buiten beschouwing laten.

We vinden dan:

$$\widehat{\text{var } \Delta z} = 65,68 \quad \text{en} \quad \overline{\Delta z} = + 0,936 \text{ dm}$$

Op bijlage 4 is de variantie geschat voor Δz uit alle waarnemingen voor de eerste methode.

We vinden daar:

$$\widehat{\text{var } \Delta z} = 85,3 \quad \text{en} \quad \overline{\Delta z} = + 1,3 \text{ dm}$$

De methode op bijlage 4 is een andere dan de vorige schattingen van de variantie, bij de eerste 2 schattingen is de $\widehat{\text{var } \Delta z}$ uitgerekend door de computer, terwijl op bijlage 7 een indeling is gemaakt in klassen en hieruit de $\widehat{\text{var } \Delta z}$ geschat, zonder gebruik te maken van de computer.

Het geheel geeft een duidelijk beeld van de invloed van de locale randstoringen in het dwarsprofiel, daar we zien dat zowel de $\overline{\Delta z}$ als de $\widehat{\text{var } \Delta z}$ toeneemt naarmate we dichterbij de wanden komen, d.w.z. meer waarnemingen meenemen die dichterbij de wand liggen. Hier zij dus nogmaals opgemerkt dat deze locale storingen van zeer groot belang zijn, willen we onze resultaten verbeteren dan moeten we in de eerste plaats hieraan iets doen.

Uit de plus-min kaart (bijlage 14) kan worden opgemerkt dat in de binnenbocht het berekende profiel dieper komt te liggen dan het oorspronkelijk profiel. Dus de berekening geeft een minder bochteffect dan er in werkelijkheid is. Dit zien we in detail terug op bijlage 2 crd 9403 t/m 9411.

Ook bij andere bochten vinden we dit zelfde verschijnsel terug (zie bijv. crd 9471 t/m 9476.)

De berekende standaardafwijking (zie 2.3) voor de afzonderlijke z-waarden varieert tussen de 0,3 en 4 dm.

Het eigenlijke profiel blijkt dan niet binnen het hiervoor uitgerekende 95% betrouwbaarheidsinterval te liggen (zie crd 9371 waar dit interval is ingetekend).

Ook blijkt hij niet overeen te komen met de uit de waarnemingen geschatte standaardafwijking die 8 à 9 dm bedraagt, zodat de aannamen die bij de afleiding van de theoretische variantie gedaan zijn een te optimistisch beeld geven.

Zoals al eerder is opgemerkt speelt ook hier de breedte een rol. Over dit gedeelte van de rivier is de breedte 300 à 320 m zodat door normering op de breedte van de z-waarden, een extra afwijking ontstaat, die weliswaar niet al te groot is maar wat toch nog wel een verdere studie vraagt.

4.3 Bestaande riviergedeelte boven crd 8747 (km 874g)

Voor dit gedeelte van de rivier zijn de A-coëfficiënten gebruikt die verkregen zijn door gebruik te maken van 7 polynomen (zie bijlage 7).

De dwarsprofielen zijn door de computer geplot met behulp van het plotprogramma (zie bijlage 8).

We zien voor dit riviergedeelte een goede aansluiting van het berekende aan het bestaande dwarsprofiel (zie bijlage 9).

Voor de profielen zonder grote plaatselijke storingen (bijv. crd 8737, 8742 en 8743) geven een goede schatting van de bodemligging, hetgeen geheel met de verwachting overeenkomt.

Bij deze goede aansluiting kunnen ook nog andere punten een rol spelen nl.:

a) Deze dwarsprofielen zijn ook gebruikt om de A-coëfficiënten

te schatten zodat ze niet helemaal onafhankelijk zijn.

- b) Over dit gedeelte is de breedte gelijk aan de meest voorkomende breedte van 260 m, zodat de storing ten gevolge van de normering op de breedte hier minimaal is.

4.4 Bochtafsnijding bij St. Andries (ca. km 926)

4.4.1 Algemeen

Eén van de knelpunten voor de scheepvaart op de Waal is de bocht bij St. Andries. Deze bocht heeft een betrekkelijk kleine straal van 1400 m en over een klein gedeelte zelfs 1200 m.

Weliswaar is het niet de scherpste bocht in de Waal, want bij Nijmegen vinden we een straal van 900 m, maar toch zou een ruimere bocht hier de scheepvaart zeer ten goede komen.

Door de R.W.S. worden dan ook plannen gemaakt om deze bocht af te snijden (zie bijlagen 10 en 12).

Als we even over alle internationale problemen, die een bochtafsnijding in de Waal nu eenmaal met zich meebrengt, heenstappen dan zien we op de bijlagen 10 en 12 twee mogelijkheden:

- a) Bochtafsnijding binnen het winterbed van de rivier (zie bijlage 10)
- b) Bochtafsnijding buiten het bestaande winterbed van de rivier (zie bijlage 12).

Het voordeel van a) is dat we minder dure grond behoeven aan te kopen, we geen nieuwe dijken behoeven aan te leggen en dat er minder belangen worden geschaad dan bij de oplossing onder b) het land buiten de bandijken is immers veel duurder en ook vaak in gebruik door industrieën e.d. zodat hier bij aankoop grote bedragen zijn gemoeid.

Tegenover dit voordeel staat het grote nadeel dat we in onze ruimte beperkt zijn en dus maar een geringe straalvergroting kunnen toepassen, hier een straal van 1900 m tegen 3000 m bij b).

De oplossing a) geeft ook een geringere verkorting dan b) zodat minder problemen bovenstrooms optreden en het misschien mogelijk

maakt om geen stuw toe te passen. Dit zou een voordeel zijn van a) ten opzichte van b), mede gelet op specifieke normen die voor de Waal gelden (akte van Mannheim).

Op de keuze, alsmede de problemen van de oplossing zal hier niet verder worden ingegaan, daar het hier alleen gaat om de voorstelling van de bodemligging als er een bochtafsnijding wordt gemaakt, welke is dus hier niet van belang.

4.4.2 St. Andries R = 1900 m

We zullen eerst de oplossing bekijken met de bochtafsnijding binnen het winterbed. Hiervan vinden we de berekende dwarsprofielen op bijlage 11.

Bovenstrooms van de bochtafsnijding zien we weer het gebruikelijke beeld dat we ook bij de andere dwarsprofielen tegenkomen.

In de bochtafsnijding zitten een paar discontinuïteiten nl. crd 9244 en 9281. De eerste valt te diep uit vergeleken met de overige profielen, terwijl de tweede te ondiep is.

Deze onregelmatigheden treden op in de omgeving van een z.g. crossing. Dit verschijnsel is ook in andere bochtberekeningen tot uitdrukking gekomen, vooral in die profielen die m.b.v. de coëfficiënt van de 7 polynomen zijn uitgerekend. Voor zes polynomen doet dit verschijnsel zich niet voor. (Zie bijlage 2 crd 9393 en 9400.) Hoewel dus over het algemeen de coëfficiënten van 7 polynomen een goede aansluiting geven aan het bestaande profiel geven ze juist bij de crossing een afwijking. Dit is jammer, daar dit in de rivier altijd een belangrijk punt is, omdat de diepte van dit punt vaak voor de scheepvaart maatgevend is.

Bij de interpretatie van de dwarsprofielen dienen we dus geen grote waarde aan de dwarsprofielen t.p.v. de crossing toe te kennen.

Dit is één van de punten die nog voor een verdere studie in aanmerking komt. Verder spreken de profielen voor zich.

De bij de dwarsprofielen aangehouden nummering vinden we aangegeven op bijlage 10.

4.4.3 St. Andries R = 3000 m

Ook hier weer hetzelfde beeld als bij R = 1900 m, crd 9243 duidelijk te diep, zit voor de crossing bij overgang van negatieve op positieve kromtestraal (althans volgens onze aanname).

Crd 9393 is te ondiep, dit profiel is voor een crossing met overgang van positieve op negatieve kromtestraal. Door de bocht-afsnijding treedt een verschuiving van de crossing op bij crd 9294 en 9295 en we zien dat de invloed van de bocht-afsnijding al na een geringe afstand benedenstrooms is uitgedempt.

(Zie crd 9301 en 9302.)

Voor de dwarsprofielen verwijzen we naar bijlage 13 waar de plot-uitvoer is verzameld.

4.4.4 Résumé

Résumerend kunnen we dus stellen dat de berekeningsmethode redelijke resultaten geeft, gezien de goede aansluiting bij de bocht bij Nijmegen (bijlage g).

Dat de voorspelling van de bodemligging in de omgeving van een crossing met de nodige voorzichtigheid dient te worden bekeken, althans voor zover het gaat om de toepassing met 7 polynomen.

Voorts mogen we zeker verwachten dat deze methode nog is te verbeteren, vooral als we een manier vinden om de plaatselijke storingen te elimineren.

5. Suggesties voor verder onderzoek

Enkele punten die duidelijk een nadere studie vragen zijn:

- Hoe moeten we de plaatselijke storingen elimineren zodat we een betere schatting kunnen maken van de regressie-coëfficiënt?

We zagen n.l. dat vooral de plaatselijke storingen de grote variaties veroorzaakten.

- Wat is er aan de hand in de omgeving van een crossing, bij toepassing van 7 polynomen en hoe kunnen we bij het overgaan van negatieve op positieve kromtestraal (en omgekeerd) de voorspelling van de bodemligging nauwkeuriger krijgen?

Het vermoeden bestaat n.l. dat door deze overgang één of meer profielen een onjuiste diepte krijgen en wel bij overgang van neg. op pos. een te diep en bij overgang van pos. op neg. een te ondiep dwarsprofiel.

- Hoe moeten we breedte-normalisatie berekenen met behulp van deze methode?

Het blijkt namelijk dat als we met behulp van deze methode een riviergedeelte zouden uitrekenen met een breedte die kleiner is dan de breedte gebruikt bij de normering van de diepte, er een veel te ondiep dwarsprofiel ontstaat door de vermenigvuldiging met de kleinere B.

Terwijl we juist verwachten dat in het geval van rivierversmalling een verdieping zal optreden.

- Als laatste punt, maar zeker niet als minst belangrijke, zouden we deze methode over meerdere jaren moeten toepassen.

Hierbij speelt vooral het probleem van de enorme hoeveelheden gegevens die verwerkt moeten worden. Maar daar staat tegenover dat we hierdoor een betere schatting van de A-coëfficiënt kunnen verwachten.

We zijn n.l. hier uitgegaan van één jaarpeiling. Deze peiling is slechts een momentopname van de zich steeds bewegende bodem.

Door nu over meerdere jaren de peilingen te nemen krijgen we als het ware een aantal steekproeven van de bodemligging. Hoe groter dit aantal zal zijn des te groter zal ook de betrouwbaarheid van de resultaten zijn.

