



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Het prijzen van opties op gas met behulp van een
regime-switching model (Engelse titel: Pricing
options on gas under a regime-switching model)**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE**

door

**Lieselotte van Tol
Delft, Nederland
17 augustus 2015**

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Het prijzen van opties op gas onder een regime-switching model”

(Engelse titel: “Pricing options on gas under a regime-switching model”

Lieselotte van Tol

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Prof.dr.ir. C.W. Oosterlee

Overige commissieleden

Prof.dr.ir. C. Vuik

Dr.ir. R.J. Fokkink

Drs. E.M. van Elderen

17 augustus 2015

Delft

Inhoudsopgave

1	Inleiding	7
2	Achtergrondinformatie aardgas	9
2.1	Samenstelling aardgas	9
2.2	Onstaan van aardgas	9
2.3	Gebruik	10
2.4	Transport en opslag	10
2.5	Nadelige effecten	10
2.6	Andere vormen: LNG en schaliegas	10
2.7	Factoren van invloed op gasprijzen	11
3	Prijzontwikkeling van gas	12
3.1	Brownse beweging	12
3.2	Geometrisch Brownse beweging	12
3.3	Mean-reverting proces	14
3.3.1	Ornstein-Uhlenbeck proces	15
3.4	Regime-switching model voor aardgasprijzen	17
4	Data-analyse	20
5	Simulatie prijspaden	24
5.1	Numeriek schema: Euler-Maruyama	24
5.2	Simulatie geometrische Brownse beweging	25
5.3	Simulatie Ornstein-Uhlenbeck proces	27
5.4	Simulatie regime-switching model	30
5.4.1	MRGBM-variatie	31
5.4.2	GBMGBM-variatie	32
5.4.3	MRMR-variatie	34
5.5	Kalibratie	35
5.5.1	Kalibratie MR	35
5.5.2	Kalibratie GBM	35
5.5.3	Kalibratie regime-switching model	36
5.6	Validatie gekalibreerde model	37
6	Waarderen van regime-switching opties	38
6.1	Economische achtergrond	38
6.2	Marktaannames	39
6.3	Regime-switching optie dynamica	39
6.4	Afleiding prijsvergelijkingen regime-switching optie	40
6.5	Feynmann-Kac stelling	43

7	Simulatie optieprijzen	44
7.1	Prijsdynamiek	44
7.2	Prijzen van Europese optie met Monte Carlo	44
7.3	Antithetische variabelen	45
7.4	Resultaten	45
7.5	Grieken: de delta	50
8	Conclusie en discussie	52

Lijst van figuren

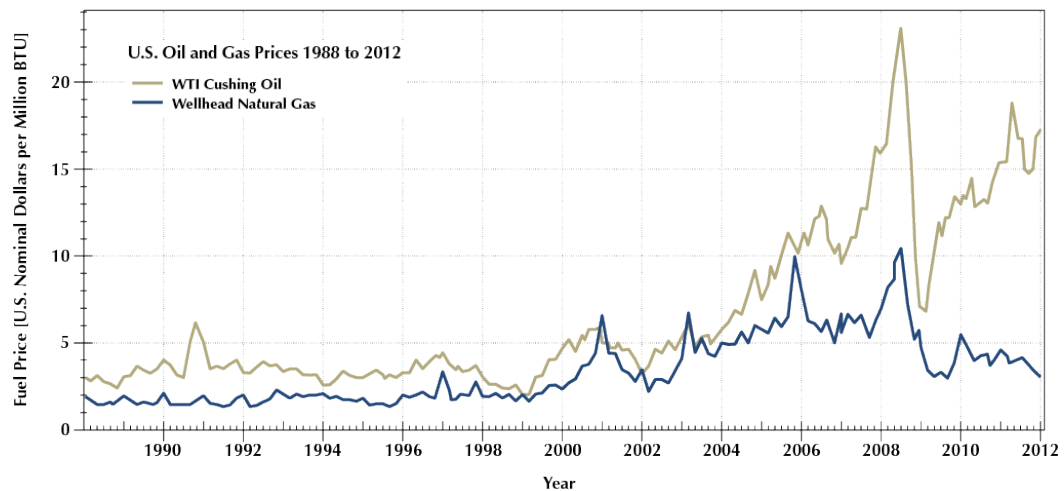
1.1	Prijzen van ‘U.S. Natural Gas Wellhead’ en olie van 1988 tot 2012.	7
4.1	‘U.S. Natural Gas Wellhead Prices’ per maand.	20
4.2	Analyse maandelijkse logreturns ‘U.S. Natural Gas Wellhead Prices’ over gehele tijdsperiode.	21
4.3	‘U.S. Natural Gas Wellhead Prices’ maandelijkse logreturns.	22
4.4	Analyse logreturns van de ‘Natural Gas Wellhead Prices’ over de periode januari 1976 tot en met november 1999.	22
4.5	Analyse logreturns van de ‘Natural Gas Wellhead Prices’ over de periode december 1999 tot en met december 2012.	23
5.1	Simulatie van paden volgens de GBM met verschillende waarden voor de volatiliteit en drift.	25
5.2	Steekproefgemiddelde en -variantie van 10^4 GBM-paden met de exacte verwachting en variantie.	26
5.3	Exacte oplossing en benadering van een GBM-pad met behulp van de Euler-Maruyama methode.	27
5.4	Simulatie van paden volgens het OU-proces met verschillende waarden van μ en α en een startwaarde van $P_0 = 1 > \mu$	28
5.5	Simulatie van paden volgens het OU-proces met verschillende waarden van μ en α en een startwaarde van $P_0 = 0 < \mu$	29
5.6	Steekproefgemiddelde en -variantie van 10^4 OU-paden met de exacte verwachting en variantie	29
5.7	Steekproefverwachting van $9 \cdot 10^3$ paden volgens het regime-switching model samen me de exacte verwachting.	31
5.8	Steekproefverwachting van $9 \cdot 10^3$ paden volgens het regime-switching model samen me de exacte verwachting.	33
5.9	Steekproefvariantie van $9 \cdot 10^3$ paden volgens het regime-switching model samen me de exacte variantie.	34
5.10	Steekproefverwachting van $9 \cdot 10^3$ paden volgens het regime-switching model.	35

Lijst van tabellen

1	Waardes van de sterke en zwakke fout van het Euler-Maruyama schema toegepast op de GBM.	27
2	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.2 = \sigma^1$ voor $\lambda_{01} = 0.35$ en $\lambda_{01} = 0.1$	46
3	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.35$	46
4	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = E = 1$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.35$	46
5	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 > E = 0.3$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.35$	46
6	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.1$	47
7	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = E = 1$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.1$	47
8	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 > E = 0.3$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.1$	47
9	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.3$, $\sigma^1 = 0.7$ en $\lambda_{01} = 0.35$	47
10	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.3$, $\sigma^1 = 0.7$ en $\lambda_{01} = 0.1$	47
11	Optiewaarden met parameters: $T = 287$, $P_0 = 0.54 > E = 0.4$, $\sigma^0 = 0.0711$, $\sigma^1 = 0.1209$ en $\lambda_{01} = 1/355$	49
12	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 > E = 0.3$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = \lambda_{10} = 0.2$	49
13	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 > E = 0.3$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$, $\lambda_{01} = 0.2$ en $\lambda_{10} = 0.6$	49
14	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$, $\lambda_{01} = 0.004$, $\lambda_{10} = 0$ en $M = 5 \cdot 10^4$ paden.	51
15	Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1$, $\sigma^0 = 0.1$, $\sigma^1 = 0.7$, $\lambda_{01} = 0.004$, $\lambda_{10} = 0$ en $M = 5 \cdot 10^4$ paden.	51

1 Inleiding

Recentelijk is er veel te horen geweest over aardgas: de discussie over wel of geen gaswinning in Groningen die veel baten kan opleveren, de zoektocht naar een alternatieve brandstof wanneer Nederland door de aardgasvoorraad heen is en niet afhankelijk wil zijn van buitenlands gas en de Russische boycot van gas naar Oekraïne en daarmee ook naar de rest van Europa. Deze boycot veroorzaakte een flinke stijging van de gasprijzen in Europa. Behalve dit soort indicidentele gebeurtenissen zijn er verscheidene andere factoren die invloed hebben op het prijsverloop van gas. Een voorbeeld hiervan is de seizoensdynamiek die de vraag naar gas beïnvloedt. Om deze reden zijn opslagplaatsen belangrijk aangezien die kunnen voorzien in de gasbehoefte wanneer de vraag hoog is in bepaalde seizoenen. Ook de prijzen van andere energiebronnen beïnvloeden het prijsverloop van gas. In Figuur 1.1 [1] is te zien dat de prijzen van ‘Wellhead Natural Gas’ en olie elkaar grofweg volgen. Wiskundig gezien is het interessant om te bekijken hoe de gasprijzen kunnen worden gemodelleerd. In dit project wordt er gekeken naar een regime-switching model. In dit model volgt de gasprijs in elk regime een verschillend stochastisch proces en kan er met enige kans gewisseld worden van regime. Vervolgens kunnen met dit model prijspaden worden gegenereerd en kunnen opties met gas als onderliggend product worden gewaardeerd. Deze waardering van opties is interessant voor het creëren van liquiditeit. Als er een goede waardering mogelijk is voor de opties, kunnen er prijzen afgegeven worden die een kleine bied-vraag spreiding tot gevolg hebben waardoor de handel in dit soort opties mogelijk is. Tevens is de optiewaardering interessant voor handelaren die door het handelen in de opties winst proberen te maken of voor het afdekken van risico's die verbonden zijn aan het bezit van een bepaalde hoeveelheid gas.



Figuur 1.1: Prijzen van ‘U.S. Natural Gas Wellhead’ en olie van 1988 tot 2012.

In dit verslag zal eerst in hoofdstuk 2 worden ingegaan op wat aardgas precies is en wat invloedrijke factoren zijn op de aardgasprijzen. Vervolgens worden in hoofdstuk 3 verscheidene prijsmodellen bestudeerd: het GBM-model, MR-model en het regime-switching model. Nadat dit is gedaan, worden in hoofdstuk 4 historische gasdata bestudeerd om te bekijken wat een passend model is om het prijsverloop te beschrijven. Vervolgens worden in hoofdstuk 5 prijspaden gesimuleerd volgens de verschillende prijs-

modellen uit hoofdstuk 3 met behulp van een numeriek schema. Het doel hiervan is om het gedrag van paden gesimuleerd onder de verschillende modellen te bestuderen. Ook worden ter validatie de numerieke benaderingen vergeleken met exacte uitdrukkingen en wordt het gevonden model uit hoofdstuk 4 gekalibreerd op de data. Vervolgens wordt er in hoofdstuk 6 een stelsel van partiële differentiaalvergelijkingen afgeleid voor de waarde van een optie onder het besproken regime-switching model. Ten slotte worden in hoofdstuk 7 optieprijsen gesimuleerd onder dit model, waarbij er wordt gekeken naar de invloed van verscheidene parameters op de optieprijs. Ook wordt er een vergelijking gemaakt met de Black-Scholes optieprijsen. In hoofdstuk 8 wordt afgesloten met een conclusie en discussiepunten met aanbevelingen voor vervolgonderzoek.

2 Achtergrondinformatie aardgas

Voordat er wordt gestart met het wiskundige gedeelte van dit project, wordt er eerst ingegaan op aardgas in het algemeen. In dit hoofdstuk zal worden behandeld wat aardgas is, hoe het ontstaat, hoe het kan worden opgeslagen en getransporteerd en op welke manieren gasprijzen worden beïnvloed.

2.1 Samenstelling aardgas

Aardgas vormt al jarenlang één van de belangrijkste energiebronnen in onze geïndustrialiseerde wereld [2]. Het is een fossiele brandstof die te vinden is in olievelden, aardgasvelden en koollagen. Omdat het één van de schoonste en veiligste brandstoffen is, wordt het in grote mate gebruikt als energiebron [2]. Het vertegenwoordigt ongeveer een kwart van de gebruikte energiebronnen in de wereld [2].

Aardgas heeft een aantal karakteristieke eigenschappen. Het is een brandbare samenstelling van verschillende soorten gas en is kleur- en geurloos. Echter, om gaslekken te kunnen detecteren worden er geurstoffen toegevoegd. Het aardgas is hoofdzakelijk opgebouwd uit methaan (CH_4) en enkele alkanen ($\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$). Tevens komen de non-waterstofcarbonaten koolstofdioxide (CO_2), zuurstof (O_2), stikstof (N_2), waterstofsulfide (H_2S) en carbonylsulfide (COS) in kleine mate voor in aardgas. Het gas dat aan de consument wordt geleverd is vaak puur methaan.

Bij de verbranding van aardgas komen grote hoeveelheden energie vrij. Als er wordt gekeken naar de brandbaarheid van de verschillende componenten van aardgas, dan zijn de waterstofcarbonaat-componenten brandbaar en de niet-waterstofcarbonaten niet. De niet-waterstofcarbonaten zorgen dan ook voor een verlaging van de hoeveelheid energie die ontstaat bij de verbranding van een bepaalde hoeveelheid aardgas. Om deze reden worden de niet-waterstofcarbonaten verwijderd uit de samenstelling wanneer de concentratie (te) hoog is. Omdat er bij de verbranding relatief weinig schadelijke bijproducten ontstaan, wordt aardgas meer gebruikt dan andere fossiele brandstoffen [2].

Er zijn verschillende eenheden die worden gebruikt om de consumptie en productie van gas te meten. Wereldwijd worden er eenheden als kilowattuur (kWh), kilocalorieën (kcal), Million British Thermal Units (MBtu) en billion cubic feet (bcf) gebruikt [3].

2.2 Ontstaan van aardgas

Aardgas is ontstaan uit de resten van dierlijk en plantaardig materiaal van miljoenen jaren geleden. Deze resten zijn bedolven onder verschillende lagen modder en zand, die vervolgens zijn versteend. Door blootstelling aan grote druk en warmte zijn de lagen organisch materiaal in kolen, olie en aardgas veranderd. Het aardgas is zich vervolgens gaan verspreiden door de sedimenten via spleten en is in een reservoir beland. Een reservoir is een gesteente dat koolwaterstoffen bevat en volledig wordt omsloten door een ondoorlaatbare laag [4]. De reservoirs zijn opgebouwd uit poreuze lagen sediment (zoals zandsteen) waar gas in kan worden opgeslagen. De meeste reservoirs bevatten naast gas ook olie en water.

2.3 Gebruik

Het gebruik van aardgas is erg uiteenlopend. Naast het traditionele gebruik van gas bij verwarmen, koken, koelen en als brandstof, wordt gas in grote mate gebruikt voor het genereren van elektriciteit. Dit gebruik van gas is het meest snelgroeiend [5]. In gasturbines wordt de warme-energie die vrijkomt bij de verbranding van gas omgezet in elektriciteit. De efficiëntie varieert hierbij van 35 tot 40 procent. Een hogere efficiëntie kan worden bereikt door het gebruik van Natural Gas Combined Cycle centrales. Hierbij wordt de energie die vrijkomt bij de verbranding van gas gebruikt voor het aandrijven van een gasturbine. Vervolgens wordt de energie van de gasturbine gebruikt om water om te zetten in stoom waarmee een stoomturbine wordt aangedreven. De efficiëntie is hierbij 50 procent of meer. Naast het gebruik van gas als energiebron, wordt gas in de industriële wereld gebruikt bij de productie van onder andere plastic en chemicaliën.

2.4 Transport en opslag

Aardgas wordt bijna overal ter wereld geproduceerd. Grote producenten zijn Rusland, de Verenigde Staten, Canada en Nederland [2]. In de meeste landen wordt het gas vooral binnen de landen zelf geconsumeerd vanwege de additionele transportkosten die optreden bij de export [2]. Om gas te transporteren worden voornamelijk pijpleidingen gebruikt [6]. De mogelijkheid om gas op te slaan vormt hierbij een belangrijke factor, omdat opslag kan beantwoorden aan pieken in de vraag naar gas die te groot zijn voor de capaciteit van de pijpleidingen [6]. De opslag gebeurt zowel ondergronds in reservoirs als bovengronds in de vorm van Liquefied Natural Gas (LNG). Dit is aardgas dat vloeibaar gemaakt is. Omdat de kosten om LNG te produceren lager zijn geworden, is LNG ook een belangrijke manier van transport geworden [7]. De verwachting is dat de vraag naar gas de komende jaren zal stijgen, vanwege de zich steeds verder ontwikkelende technologie en daarmee de ontwikkeling van de mogelijkheden om gas te transporteren [2].

2.5 Nadelige effecten

Zoals al genoemd, is aardgas een schone en veilige brandstof. Er komen relatief weinig schadelijk bijproducten vrij bij de verbranding. Echter, ook aan aardgas zijn nadelige milieu-effecten verbonden. Zo komt er bij de verbranding van gas, net als bij de verbranding van andere fossiele brandstoffen, het broeikas-effect-veroorzakende koolstofdioxide vrij. De hoeveelheid koolstofdioxide die vrij komt is echter klein vergeleken met andere fossiele brandstoffen [2]. Ook zorgt de boring naar gas voor verstoring van de leefomgeving van veel organismen en kan methaan gaan lekken uit pijpleidingen of opslagplaatsen.

2.6 Andere vormen: LNG en schaliegas

Aardgas komt in verschillende vormen voor waaronder Liquefied Natural Gas (LNG) en schaliegas. Liquefied Natural Gas is aardgas dat vloeibaar is gemaakt voor transport. Omdat het volume dat wordt ingenomen door LNG zeshonderd keer zo klein is als bij regulier aardgas, is LNG een belangrijke manier van transport en opslag [3]. In deze vloeibare vorm kunnen grote hoeveelheden aardgas over grote afstanden worden vervoerd. Er hoeft dus geen gebruik gemaakt te worden van de pijpleidingen voor het

transport. Door de lager wordende kosten die verbonden zijn aan de productie van LNG, is de verwachting dat de vraag naar LNG in de toekomst zal toenemen.

Een andere vorm van aardgas is schaliegas. Schaliegas is gas dat voorkomt in schaliegesteente. Omdat het zich bevindt in de poriën van dit gesteente, is het lastig te winnen. Voor de winning moet de bodemlaag worden gefrackt. Hierbij wordt onder grote druk een mengsel van water, chemicaliën en zand geïnjecteerd in het schaliegesteente [8]. Ten opzichte van het winnen van regulier aardgas zijn aan dit winningsproces meer milieurisico's verbonden. Er zijn wereldwijd grote voorraden aan schaliegas, maar door de milieurisico's die verbonden zijn aan de winning, wordt nog niet overal schaliegas gewonnen. Met name in de Verenigde Staten is de productie van schaliegas de laatste jaren toegenomen. Dit heeft zelfs geleid tot een overschot met bijbehorende prijsdaling [9]. Omdat de schaliegas in Amerika minder diep in de grond zit dan in Europa, gaat de winning makkelijker [10]. Ook in Nederland is een onbekende hoeveelheid schaliegas aanwezig, maar er wordt nog geen schaliegas gewonnen. Wanneer landen overgaan op de winning heeft dit een drukkend effect op de gasprijs en kan het bijdragen aan de onafhankelijkheid wat betreft energievoorziening.

2.7 Factoren van invloed op gasprijzen

Aardgas is een product dat over bijna de hele wereld wordt geproduceerd. De prijs van aardgas wordt bepaald door de marktwerking van vraag en aanbod. Als het aanbod stijgt bij een gelijkblijvende vraag, dan dalen de prijzen terwijl bij daling van het aanbod de prijzen juist stijgen.

Het aanbod aan gas wordt onder andere beïnvloed door de hoeveelheid geproduceerd gas, de hoeveelheid geïmporteerd en geëxporteerd gas en de hoeveelheid opgeslagen gas. Aangezien gasconsumptie seizoensafhankelijk is en de productie in mindere mate, worden er gasvoorraden aangelegd. De mogelijkheid om aardgas op te slaan heeft een grote invloed op het aanbod aan gas. In maanden dat de vraag naar gas laag is, kan het geproduceerde gas worden opgeslagen en in maanden dat de vraag hoog is, kan het gas uit de opslagplaatsen worden gebruikt. Ten slotte zijn er ook incidentele gebeurtenissen die van invloed zijn op het aanbod van gas. Zo kunnen transport- en productiemogelijkheden verstoord raken door bijvoorbeeld een orkaan of problemen met de infrastructuur.

De vraag naar gas wordt onder andere beïnvloed door het weer. Koudere temperaturen zorgen voor een grotere vraag naar gas, waardoor de gasprijzen stijgen. Ook hogere temperaturen hebben invloed op de prijzen. Hoewel er bij hogere temperaturen minder vraag is naar gas voor het verwarmen van huizen, is er een grotere vraag naar air-conditioning en daarmee een grotere vraag naar gas voor het genereren van de benodigde elektriciteit. Een andere invloedrijke factor op de gasprijzen is de economie. In tijden van economische voorspoed is er een grotere vraag naar goederen en daarmee ook een grotere vraag naar gas dat nodig is voor de productie. Een groeiende economie zorgt dus voor hogere gasprijzen, terwijl een krimpende economie juist voor lagere gasprijzen zorgt. Ten slotte zijn alternatieve brandstoffen van invloed op het prijsverloop van gas. Bedrijven zijn uit op zo laag mogelijke productiekosten en zoeken daarom de goedkoopste bruikbare brandstof. Veel verbruikers van gas hebben ook de mogelijkheid om een andere brandstof dan gas te gebruiken, zoals olie en kolen. Wanneer prijzen van alternatieve brandstoffen dalen bij gelijkblijvende gasprijzen, neemt de vraag naar gas af waardoor de gasprijzen worden gedrukt.

3 Prijsontwikkeling van gas

Nu er meer bekend is over aardgas, zullen in deze sectie modellen voor de prijsontwikkeling van gas worden besproken. Zoals gezien vertonen gasprijzen schommelingen ten gevolge van verscheidene factoren zoals seizoensdynamiek, verandering in vraag en aanbod en incidentele gebeurtenissen. De toekomstige gasprijzen worden dus gekenmerkt door onzekerheid. Er wordt gezocht naar een model dat zo goed mogelijk de ontwikkeling van de prijzen kan beschrijven. Hiertoe worden in deze sectie twee belangrijke modellen uit de financiële wiskunde besproken voor prijsontwikkeling van aandelen. Vervolgens wordt het regime-switching model besproken dat deze twee modellen combineert.

3.1 Brownse beweging

De Brownse beweging is een stochastisch proces dat een belangrijke rol speelt bij het modelleren van aandelprijzen in het Black-Scholes model. Een *stochastisch proces* is een collectie stochastische variabelen X_θ , waarbij θ behoort tot een index-verzameling Θ . In ons geval representeert deze index-verzameling de tijd. Er kan onderscheid gemaakt worden tussen discrete en continue tijd. In het geval van een stochastisch proces in discrete tijd, is Θ een verzameling gehele getallen en zal θ worden weergegeven door n : $X = \{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Wanneer Θ de reële rechte representeert, wordt θ vervangen door t en is $X = \{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ een stochastisch proces in continue tijd. Dit proces wordt ook wel weergegeven als $X(t)$ [13].

Een *Brownse beweging* of een *Wiener proces* is een reëel-waardig continu stochastisch proces $\{B(t), t \geq 0\}$ dat voldoet aan [14]:

- $B(0) = x$ met $x \in \mathbb{R}$.
- Het proces heeft onafhankelijke incrementen, dat wil zeggen dat voor alle tijdstippen $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$ onafhankelijk zijn.
- Voor alle $t \geq 0$ en $\Delta t > 0$ geldt dat $B(t + \Delta t) - B(t) \sim N(0, \Delta t)$.
- De functie $t \mapsto B(t)$ is continu met kans 1.

Het proces $\{B(t), t \geq 0\}$ wordt een *standaard Brownse beweging* genoemd wanneer $x = 0$. In dit geval geldt dat $B(t) \sim N(0, t)$.

3.2 Geometrisch Brownse beweging

In de financiële wiskunde is de geometrisch Brownse beweging (GBM) een model dat gebruikt wordt om aandelprijzen te simuleren. Het vormt hiermee ook een belangrijk element in de theoretische waardering van financiële producten zoals opties.

Een stochastisch proces S_t volgt een geometrisch Brownse beweging als het voldoet aan de volgende stochastische differentiaalvergelijking (SDV):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (3.1)$$

In deze stochastische differentiaalvergelijking is B_t een standaard Brownse beweging. De constante $\mu \in \mathbb{R}$ is de driftparameter en de constante $\sigma > 0$ de volatiliteitsparameter. Verder is dt een klein tijdsinterval, $dS_t = S_{t+dt} - S_t$ en $dB_t = B_{t+dt} - B_t$. Als er een proces wordt beschouwd dat voldoet aan de SDV, dan geeft $\mu S_t dt$ het deterministische deel of de trend weer en $\sigma S_t dB_t$ het stochastische deel of de ruis. Herschrijven van (3.1) geeft namelijk:

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \quad (3.2)$$

Uit (3.2) blijkt dat voor elke tijdsstap de prijs wordt gedreven met een factor μ verstoord door een stochastische ruis σdB_t .

Uit vergelijking (3.1) wordt een uitdrukking voor het aandeeleprijsproces S_t afgeleid door het oplossen van de SDV. Als aan beide kanten van (3.1) de integraal van 0 tot t wordt genomen, volgt er dat:

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_r dr + \sigma \int_0^t S_r dB_r \text{ met } t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.3)$$

Dergelijke problemen met stochastische integralen kunnen worden opgelost met het lemma van Itô [15]:

Lemma 1. *Neem aan dat X een stochastisch proces is dat voldoet aan de SDV:*

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dB_t \quad (3.4)$$

Hierbij is B_t een Brownse beweging en zijn a en b reëelwaardige functies in $\mathbb{R}^2$. Vergelijking (3.4) kan ook worden geschreven als:

$$X_t = \int_0^t a(X_s, s)ds + \int_0^t b(X_s, s)dB_s, \quad (3.5)$$

De laatste integraal is hierbij gedefinieerd als een Itô-integraal. Neem aan dat $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ een gladde functie is met continue tweede afgeleides. Dan heeft $Y_t = f(X_t, t)$ de volgende SDV representatie:

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b(X_t, t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} dB_t \quad (3.6)$$

Het toepassen van dit lemma op de SDV uit (3.1) met $f(x, t) = \ln x$ geeft:

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \mu S_t f'(S_t) dt + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(S_t) dt + \sigma S_t f'(S_t) dB_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t \end{aligned} \quad (3.7)$$

Als aan beide kanten van (3.7) de integraal van 0 tot t wordt genomen, geeft dit:

$$\begin{aligned} \ln S_t - \ln S_0 &= \int_0^t d \ln S_r \\ &= \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dB_r \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \end{aligned} \quad (3.8)$$

Voor de aandeeleprijs op tijdstip t geldt dus de volgende uitdrukking:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right) \quad (3.9)$$

Dit wordt de geometrisch Brownse beweging genoemd. De stochast S_t zoals weergegeven in (3.9) is lognormaal verdeeld. Dit wil zeggen dat de logaritme van S_t normaal verdeeld is. Uit (3.9) volgt dat:

$$\ln(S_t) \sim N\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \quad (3.10)$$

Voor het bepalen van de uitdrukkingen voor de verwachting en variantie van (3.9) wordt er gebruik gemaakt van de momentgenererende functie van een normale variabele $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = e^{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

Toepassing hiervan geeft voor de verwachting van (3.9):

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}\left[S_0 e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t)}\right] \quad (3.12)$$

$$= S_0 e^{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \mathbb{E}[e^{\sigma B_t}] \quad (3.13)$$

$$= S_0 e^{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_0 e^{\mu t} \quad (3.14)$$

Voor de variantie van (3.9) geldt dat:

$$\text{Var}[S_t] = \mathbb{E}[S_t^2] - \mathbb{E}[S_t]^2 \quad (3.15)$$

$$= \mathbb{E}\left[S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + 2\sigma B_t}\right] - S_0^2 e^{2\mu t} \quad (3.16)$$

$$= S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}[e^{2\sigma B_t}] - S_0^2 e^{2\mu t} \quad (3.17)$$

$$= S_0^2 e^{2\mu t - \sigma^2 t} e^{2\sigma^2 t} - S_0^2 e^{2\mu t} \quad (3.18)$$

$$= S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (3.19)$$

Zoals gezien veronderstelt het prijsproces volgens de geometrische Brownse beweging een constante drift en volatiliteit (de mate van fluctueren van de prijzen). Om deze reden is de verwachting dat dit model geen goede beschrijving is van het prijsverloop van gas. Aannemelijker is om te veronderstellen dat zowel de drift als de volatiliteit zullen variëren door de tijd heen ten gevolge van verscheidene factoren zoals verandering in weersomstandigheden en veranderingen in vraag en aanbod. De verwachting is dat de prijzen beter kunnen worden gemodelleerd door een proces dat een stochastische drift en volatiliteit veronderstelt. Hier zal in het vervolg verder worden op in gegaan.

3.3 Mean-reverting proces

Het mean-reverting proces is evenals de geometrisch Brownse beweging een belangrijk model in de financiële wiskunde. Het is een model dat veelal wordt gebruikt bij het modelleren van rentes en grondstofprijzen [16]. Het idee achter het mean-revertingmodel is dat prijzen die afwijken van het gemiddelde terugkeren naar de gemiddelde prijs van het instrument zelf of het marktgemiddelde. Dit kan gebeuren op korte of lange termijn. De prijzen fluctueren dus rond een deterministische term. Hoe groter de afwijking van deze term, hoe sterker de prijzen terug worden getrokken.

De reden dat het mean-reverting proces veel gebruikt wordt voor het prijzen van grondstoffen is dat wanneer de prijzen ‘te hoog’ zijn, de vraag kleiner wordt en het aanbod groter, waardoor de prijs lager wordt. Andersom geldt ook, als de prijzen ‘te laag’ zijn, wordt de vraag groter en het aanbod kleiner,

waardoor de prijs hoger wordt. De prijzen worden dus steeds naar een gemiddelde prijs teruggetrokken.

Wiskundig gezien volgt een stochast S_t een mean-reverting proces als het voldoet aan de volgende stochastische differentiaalvergelijking:

$$dS_t = \alpha(\mu - S_t)dt + \sigma S_t dB_t \text{ met } S_0 = s_0 \quad (3.20)$$

In deze vergelijking is de betekenis van de parameters als volgt:

- $\alpha > 0$: de snelheid waarmee de prijs naar het gemiddelde toe beweegt.
- $\mu \in \mathbb{R}$: langtermijns gemiddelde of evenwichtsniveau.
- $\sigma > 0$: volatiliteit.
- B_t : standaard Brownse beweging.

Er geldt dat de drift negatief is als $S_t > \mu$. In dit geval wordt de prijs naar beneden naar het evenwichtsniveau toe getrokken. Andersom, wanneer $S_t < \mu$, dan is de drift positief. Dit heeft als gevolg dat de prijs omhoog wordt gestuurd naar het evenwichtsniveau.

3.3.1 Ornstein-Uhlenbeck proces

Het Ornstein-Uhlenbeck proces is een stochastisch proces dat veelal wordt gebruikt om mean-reverting processen te simuleren [16]. Er kunnen voor dit proces exacte uitdrukkingen worden afgeleid voor de verwachting en de variantie. Dit in tegenstelling tot het algemene MR-proces uit (3.20), waarvan het vermoeden is dat er geen exacte uitdrukkingen voor kunnen worden afgeleid.

Een stochast S_t volgt een Ornstein-Uhlenbeck proces als het voldoet aan de volgende SDE:

$$dS_t = \alpha(\mu - S_t)dt + \sigma dB_t \text{ met } S_0 = s_0 \quad (3.21)$$

Uit vergelijking (3.21) wordt een vergelijking voor het prijsproces S_t afgeleid door het oplossen van de SDV. Het nemen van de integraal van 0 tot t aan beide kanten geeft:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \alpha(\mu - S_s)ds + \int_0^t \sigma dB_s \quad (3.22)$$

Opgemerkt kan worden dat (3.21) ook kan worden geschreven als:

$$dS_t = -\alpha(S_t - \mu)dt + \sigma dB_t \quad (3.23)$$

Het toepassen van Itô's lemma op de SDV uit (3.23) met $f(x, t) = xe^{\alpha t}$ geeft:

$$\begin{aligned} d(xe^{\alpha t}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (-\alpha(x - \mu)) \frac{\partial f}{\partial x} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dB_t \\ &= (x\alpha e^{\alpha t} + (-\alpha(x - \mu))e^{\alpha t} + \sigma e^{\alpha t} dB_t \\ &= \alpha e^{\alpha t} \mu t + \sigma e^{\alpha t} dB_t \end{aligned} \quad (3.24)$$

Er volgt dat:

$$\begin{aligned}
S_t e^{\alpha t} - S_0 &= \int_0^t d(S e^{\alpha r}) \\
&= \int_0^t (\alpha e^{\alpha r} \mu) dr + \int_0^t \sigma e^{\alpha r} dB_r \\
&= \mu (e^{\alpha t} - 1) + \int_0^t \sigma e^{\alpha r} dB_r
\end{aligned} \tag{3.25}$$

De oplossing van de SDE is dus als volgt:

$$S_t = S_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t \sigma e^{\alpha(r-t)} dB_r, \quad t \geq 0 \tag{3.26}$$

Deze stochastische variabele S_t volgt een normale verdeling.

Voor de verwachting van (3.26) geldt dat:

$$\mathbb{E}[S_t | S_0 = s_0] = \mu + (s_0 - \mu)e^{-\alpha t} \tag{3.27}$$

Voor het bepalen van de variantie van (3.27) wordt er gebruik gemaakt van Itô's isometrie [17]. Voor de covariantie functie geldt:

$$\text{Cov}(S_x, S_y) = \mathbb{E}[(S_x - \mathbb{E}[S_x])(S_y - \mathbb{E}[S_y])] \tag{3.28}$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^x \sigma e^{\alpha(r-x)} dW_r \int_0^y \sigma e^{\alpha(v-y)} dW_v\right] \tag{3.29}$$

$$= \sigma^2 e^{-\alpha(x+y)} \mathbb{E}\left[\int_0^x e^{\alpha r} dW_r \int_0^y e^{\alpha v} dW_v\right] \tag{3.30}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha(x+y)} (e^{2\alpha \cdot \min(x,y)} - 1) \tag{3.31}$$

Dit betekent dat er geldt $\min(s, t) = s$ wanneer $s < t$ en dus:

$$\text{Cov}(S_x, S_y) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (e^{-\alpha(t-x)} - e^{-\alpha(t+y)}) \tag{3.32}$$

Gelijkstellen van $x = y$, geeft de variantie van S_t :

$$\text{Var}[S_t | S_0 = s_0] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \tag{3.33}$$

Voor de verdeling van S_t geldt dus dat:

$$(S_t | S_0 = s_0) \sim N(\mu + (s_0 - \mu)e^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})) \tag{3.34}$$

Wanneer $t \rightarrow \infty$ geldt er voor de onconditionele verwachting en variantie:

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu \tag{3.35}$$

$$\text{Var}[S_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \tag{3.36}$$

Omdat er voor het OU-proces in tegenstelling tot het algemene MR-proces exacte uitdrukkingen bekend zijn, is dit model beter te valideren dan het algemene MR-proces.

3.4 Regime-switching model voor aardgasprijzen

Zoals genoemd is de verwachting dat de GBM niet goed de prijsontwikkeling van gas beschrijft vanwege de constante drift en volatiliteit die worden verondersteld in dit model. Dit zal verder worden onderzocht in de sectie data-analyse. Empirische data hebben aangetoond dat ook het MR-proces niet de dynamiek in de gasprijzen goed kan beschrijven [18]. Derhalve wordt er gekeken naar een regime-switching model waarvan er verscheidene soorten zijn. In deze sectie wordt het regime-switching model voor gasprijzen besproken volgens [18]. Dit model combineert de geometrisch Brownse beweging en het mean-reverting proces.

Het regime-switching model is een model dat bestaat uit meerdere regimes. In ieder regime volgen de prijzen een verschillend stochastisch proces. Het prijsproces kan willekeurig wisselen van regime. In onze analyse wordt een regime-switching model met twee regimes beschouwd. Door het aanpassen van parameterwaarden is in elk regime of een mean-reverting proces (MR) of een geometrisch Brownse beweging (GBM) van toepassing op het prijsproces. Dit heeft als gevolg dat er meerdere mogelijkheden zijn voor het prijsproces:

- MRMR: in beide regimes zijn de processen mean-reverting.
- MRGBM: in het ene regime is het proces mean-reverting en in het andere regime GBM met positieve drift.
- GBMGBM: in het ene regime is het proces GBM met positieve drift, terwijl in het andere regime het proces GBM is met negatieve drift.

De gasprijzen zullen in het vervolg worden weergegeven door $P(t)$.

Zoals al genoemd, worden er twee regimes beschouwd die overeenkomen met twee verschillende stochastische processen. Op elk tijdstip volgt de gasprijs één van de twee processen. Het prijsproces kan met eindige kans overgaan van het ene regime naar het andere regime. De verandering van regime kan worden gemodelleerd als een Markov-keten in de continue tijd met twee toestanden: $m(t) \in \{0, 1\}$. De waarde van $m(t)$ geeft weer welk regime van toepassing is op de gasprijs op tijdstip t . De kans dat het prijsproces over een klein tijdsinterval dt overgaat van regime 0 in regime 1 wordt genoteerd als $\lambda_{01}dt$. Evenzo wordt de kans om van regime 1 in regime 0 over te gaan genoteerd als $\lambda_{10}dt$. Voor $m(t)$ geldt dan:

$$dm(t) = (1 - m(t))dq_{01}(t) - m(t)dq_{10}(t) \quad (3.37)$$

Hierbij zijn $q_{01}(t)$ en $q_{10}(t)$ onafhankelijke Poissonprocessen met als intensiteiten respectievelijk $\lambda_{01}(P(t), t)$ en $\lambda_{10}(P(t), t)$.

Er geldt dus dat $dq_{ij}(t)$ met $i, j \in \{0, 1\}$, $i \neq j$ en $0 \leq \lambda_{ij}(P(t), t)dt \leq 1$ wordt weergegeven door:

$$dq_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{met kans } \lambda_{ij}(P(t), t)dt \\ 0 & \text{met kans } 1 - \lambda_{ij}(P(t), t)dt \end{cases} \quad (3.38)$$

De aardgasprijzen kunnen in het regime-switching model als volgt worden gemodelleerd:

$$dP(t) = \alpha^{m(t)}(K_0^{m(t)} - P(t))dt + \sigma^{m(t)}P(t)dB(t) + J^{m(t)}(t)P(t)dt, \quad (3.39)$$

$$J^{m(t)}(t) = \beta_A^{m(t)} \sin(2\pi(t - t_0 + C_A(t_0))) + \beta_{SA}^{m(t)} \sin(4\pi(t - t_0 + C_{SA}(t_0))) \quad (3.40)$$

In regime $k \equiv m(t)$ volgt de gasprijs dus een proces met parameters α^k , K_0^k , $J^k(t)$ en σ^k .

De betekenis van de parameters in (3.39) en (3.40) is als volgt:

- $P(t)$ de aardgasprijs op tijdstip t ,
- $\alpha > 0$ de snelheid waarmee de prijs naar het langetermijngemiddelde beweegt,
- $K_0 > 0$ het langetermijngemiddelde,
- $\sigma > 0$ de volatiliteit,
- $dB(t)$ increment van een standaard Brownse beweging,
- $J(t)$ term zodanig dat $J(t)P(t)dt$ de prijsverandering weergeeft op tijdstip t ten gevolge van een jaargetijde-effect,
- β_A jaarlijkse seizoensparameter,
- t_0 referentietijdstip ($t_0 < t$),
- $C_{SA}(t_0)$ jaarlijkse centreringsparameters voor t_0 , waarvoor geldt $C_{SA}(t_0) = SA_0 + D(t_0)$.

Een vereenvoudiging van het model treedt op wanneer $J^{m(t)} = 0$ wordt gesteld in (3.39). Dit betekent dat er geen sprake is van seizoensgebondenheid. Het bestuderen van de data uit hoofdstuk 4 geeft geen duidelijke aanleiding om te veronderstellen dat seizoenseffecten hierin aanwezig zijn. Daarom zal in het vervolg van dit project het regime-switching model met $J^{m(t)} = 0$ worden beschouwd.

Uit (3.39) en (3.40) blijkt dat wanneer $J^{m(t)} = 0$ de gasprijzen in regime $k = m(t)$ of een MR-proces of een GBM-proces volgen, afhankelijk van de parameterwaarden:

- Als $\alpha^{m(t)} > 0$ en $K_0^{m(t)} > 0$ worden gekozen, dan volgt de gasprijs een MR-proces:

$$dP(t) = \alpha^{m(t)}(K_0^{m(t)} - P(t))dt + \sigma^{m(t)}P(t)dB(t)$$

Hierbij is $K_0^{m(t)}$ het evenwichtsniveau en $\alpha^{m(t)}$ de snelheid waarmee de prijs naar het evenwichtsniveau toe beweegt.

- Als $K_0^{m(t)} = 0$ wordt gekozen, dan volgt de gasprijs een GBM-proces:

$$dP(t) = -\alpha^{m(t)}P(t)dt + \sigma^{m(t)}P(t)dB(t)$$

Hierbij is $-\alpha^{m(t)}$ de driftterm. Dit betekent dat wanneer $-\alpha^{m(t)} > 0$ de gasprijs op tijdstip t omhoog wordt gestuurd met snelheid $|\alpha^{m(t)}|$. Andersom, wanneer $-\alpha^{m(t)} < 0$, dan wordt de gasprijs omlaag gedrukt met snelheid $|\alpha^{m(t)}|$.

Zoals eerder opgemerkt zijn er meerdere variaties van het regime-switching model mogelijk door het kiezen van verschillende combinaties van de stochastische processen in de twee regimes. De variaties zijn als volgt:

- **MRMR-variatie**

In dit geval volgen de prijzen in beide regimes een MR-proces, maar met verschillende evenwichtsniveaus. Dit betekent dat er voor de parameterwaarden in SDE (3.39) geldt dat α^k en $K_0^k > 0$ met $k \in \{0, 1\}$. Het evenwichtsniveau van de aardgasprijs wisselt in deze variatie tussen de waarden K_0^0 en K_0^1 .

- **MRGBM-variatie**

In dit geval volgen de gasprijzen in het ene regime een MR-proces en in het andere regime een GBM-proces met positieve drift. Voor de parameterwaarden betekent dit dat $K_0^0 > 0$, $K_0^1 = 0$, $\alpha^0 > 0$ en $\alpha^1 < 0$ in de SDE (3.39).

- **GBMGBM-variatie**

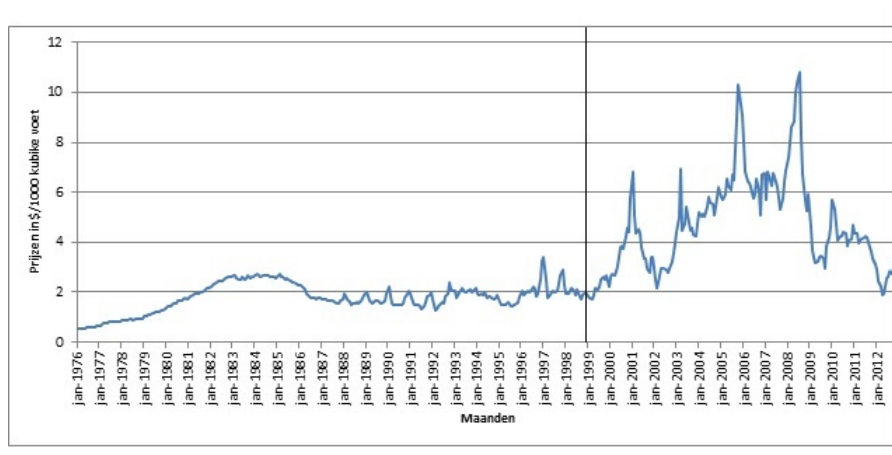
In dit geval volgen de prijzen in beide regimes een GBM-proces. Het prijsproces in het ene regime is een GBM-proces met positieve drift en in het andere regime een GBM-proces met negatieve drift. Dit wil zeggen dat er voor de parameterwaarden in SDE (3.39) geldt dat $K_0^0 = K_0^1 = 0$, $\alpha^0 < 0$ en $\alpha^1 > 0$.

Bij het gebruik van de modellen wordt er onderscheid gemaakt tussen de kansmaat die wordt gebruikt bij het genereren van prijspaden en de kansmaat die gebruikt wordt bij de waardering van opties. Bij het genereren van prijspaden volgens de verschillende modellen zijn de parameters onder de ‘real-world’ kansmaat $\mathbb{P}$. Onder deze maat zijn investeerders risicozoekend of juist risico-avers. In het geval van het prijzen van opties zijn de parameters daarentegen onder de risiconeutrale kansmaat $\mathbb{Q}$ en zijn investeerders noch risicozoekend noch risico-avers. Onder deze maat is de verwachte winst van een investering even groot als op een bankrekening. Dit betekent dat de huidige waarde van een product gelijk is aan de verwachte waarde verdisconteerd met de risiconeutrale rente r [19].

4 Data-analyse

In deze sectie worden marktdata van aardgasprijzen bestudeerd met als doel een passend model te vinden dat het prijsverloop van deze prijzen beschrijft. Er wordt gebruik gemaakt van een dataset afkomstig van de Energy Information Administration [11]. Deze dataset bevat verschillende soorten gasprijzen uit de Verenigde Staten. In dit project worden de zogenoemde ‘U.S. Natural Gas Wellhead Prices’ gebruikt. Dit zijn de prijzen van aardgas die zijn berekend door de totale waarde van het gas bij de bron te delen door de totale hoeveelheid geproduceerd door de bevoegde instanties van de afzonderlijk producerende staten en de U.S. Bureau of Ocean Energy Management, Regulation and Enforcement. De prijzen zijn inclusief alle kosten voorafgaand aan de transport, met inbegrip van productiekosten, compressiekosten, ontslagvergoedingen en soortgelijke kosten [12]. De dataset loopt van 15 januari 1976 tot en met 15 december 2012 met voor elke maand een prijs. Dit betekent dat er 444 datapunten zijn. De prijzen zijn in dollar per 1000 kubieke voet aardgas.

In Figuur 4.1 is een plot van de gasprijzen te vinden over het gehele tijdsinterval.

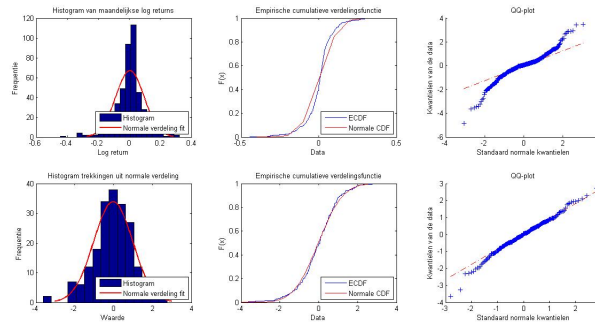


Figuur 4.1: ‘U.S. Natural Gas Wellhead Prices’ per maand.

Een methode voor het onderzoeken van prijspaden is het bestuderen van de verdeling van de logreturns. Deze zijn als volgt gedefinieerd:

$$u_{t+1}^{maand} = \ln \left(\frac{P_{t+1}}{P_t} \right), \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.1)$$

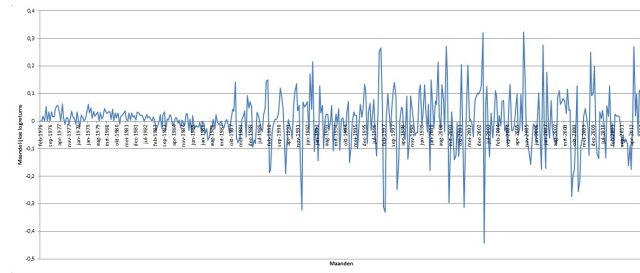
Hierbij is n het aantal prijzen en is P_t in ons geval de prijs van aardgas op tijdstip t . Logreturns die in absolute waarde relatief groot zijn, komen overeen met een relatief hoge volatiliteit in het prijspad. Evenzo komen logreturns die in absolute waarde relatief klein zijn overeen met een relatief lage volatiliteit in het prijspad. Zoals gezien volgen de logreturns een normale verdeling wanneer de geometrische Brownse beweging van toepassing is. In Figuur 4.2 zijn in de eerste rij een histogram, een cumulatieve som histogram en een QQ-plot van de logreturns te vinden over de gehele tijdsperiode. In de tweede rij zijn ter vergelijking dezelfde figuren te vinden voor 200 trekkingen uit een standaard normale verdeling.



Figuur 4.2: Analyse maandelijkse logretorns ‘U.S. Natural Gas Wellhead Prices’ over gehele tijdsperiode.

Uit Figuur 4.2 blijkt dat het onwaarschijnlijk is dat de logretorns normaal verdeeld zijn en dat het dus onwaarschijnlijk is dat de prijzen een geometrisch Brownse beweging volgen over deze tijdsperiode. Uitvoeren van de Kolmogorov-Smirnovtoets geeft aan dat de nulhypothese van standaard-normaliteit wordt verworpen bij een significantieniveau van 5%. Hieruit kan worden geconcludeerd dat de gasprijzen geen geometrisch Brownse beweging volgen over de gehele tijdsperiode.

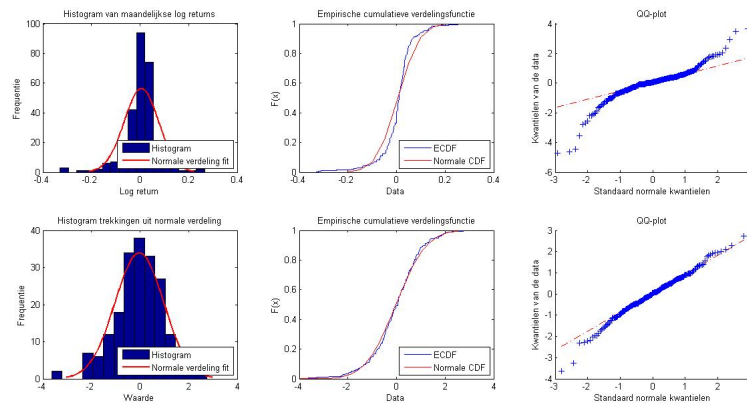
Om de data verder te analyseren wordt er gekeken naar een een plot van de logretorns tegen de tijd, zie Figuur 4.3. Hieruit kan worden opgemaakt dat er verscheidene pieken zijn in de maandelijkse logretorns. Deze pieken komen overeen met een toename in volatiliteit van de prijzen. Uit de figuur blijkt dat er een periode is met een relatief hoge volatiliteit en een periode met een relatief lage volatiliteit. Het vermoeden bestaat dat het prijsverloop kan worden opgedeeld in verschillende regimes, waarbij de gasprijzen verschillende stochastisch processen volgen in de verschillende regimes. Dit wil zeggen dat het regime-switching model zoals besproken in sectie 3.4 van toepassing is. Omdat uit de figuur blijkt dat er sprake is van één periode met een relatief lage volatiliteit en één periode met een relatief hoge volatiliteit, wordt er aangenomen dat er één keer wordt gewisseld van regime. Om te bepalen op welk tijdstip er wordt gewisseld van regime, wordt er gekeken naar de historische volatiliteit. Deze is gedefinieerd als de standaardafwijking van de logretorns over een bepaald tijdsinterval. Er is bekeken waar de opsplitsing van de data moet plaatsvinden zodanig dat het verschil in historische volatiliteit tussen de twee periodes zo groot mogelijk is. Aan de hand hiervan is bepaald dat de regimewisseling plaats vindt in december 1999. Over de periode januari 1976 tot en met november 1999 is de historische volatiliteit gelijk aan 0.024178 en over de periode december 1999 tot en met december 2012 is deze gelijk aan 0.110244. Deze waarden komen overeen met respectievelijk $\frac{0.024178}{\sqrt{30/365}} \approx 0.08$ en $\frac{0.110244}{\sqrt{30/365}} \approx 0.38$ op jaarbasis.



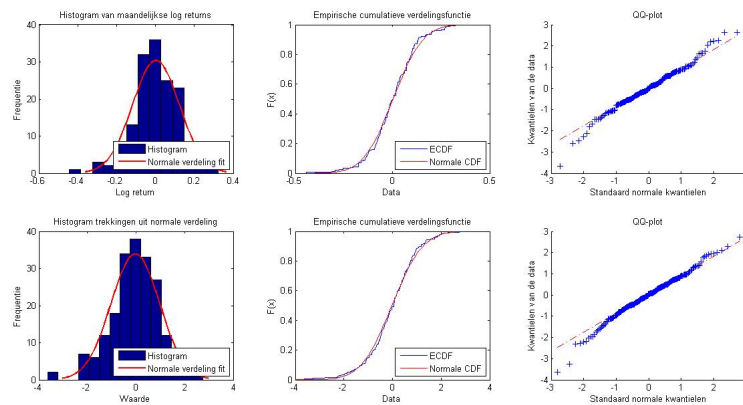
Figuur 4.3: ‘U.S. Natural Gas Wellhead Prices’ maandelijkse logreturs.

Interessant is om nu te bekijken of de geometrische Brownse beweging van toepassing is op één van deze periodes. In Figuur 4.4 zijn dezelfde plots als in Figuur 4.2 te vinden voor de eerste periode. In Figuur 4.5 zijn deze te vinden voor de tweede periode.

Uit Figuur 4.4 blijkt dat het onwaarschijnlijk is dat de geometrisch Brownse beweging van toepassing is op het verloop van de gasprijzen in de periode januari 1976 tot en met november 1999. Dit wordt bevestigd door het uitvoeren van de Kolmogorov-Smirnovtoets bij een significantieniveau van 5%. Uit Figuur 4.1 blijkt dat prijzen in deze periode op langere termijn een evenwichtsniveau bereiken. Aangezien er geen toets bekend is bij de auteur om te onderzoeken of data een MR-proces volgen, wordt de aanname gedaan dat de prijzen in deze periode een MR-proces volgen.



Figuur 4.4: Analyse logreturs van de ‘Natural Gas Wellhead Prices’ over de periode januari 1976 tot en met november 1999.



Figuur 4.5: Analyse logreturns van de ‘Natural Gas Wellhead Prices’ over de periode december 1999 tot en met december 2012.

Uit Figuur 4.5 blijkt dat het aannemelijk is om te concluderen dat de logreturns over de periode december 1999 tot en met december 2012 normaal verdeeld zijn. Het uitvoeren van de Kolmogorov-Smirnovtoets bij een significantieniveau van 5% geeft dat de nulhypothese van standaard-normaliteit niet wordt verworpen. Er kan worden geconcludeerd dat de geometrisch Brownse beweging wel van toepassing is op het verloop van de gasprijzen in de tweede periode.

Uit de uitgevoerde analyse blijkt dat de MRGBM-variant van het regime-switching model van toepassing kan zijn op de prijsontwikkeling. In sectie 5.5 zal deze variant van het regime-switching model worden gekalibreerd op de gasprijzen.

5 Simulatie prijspaden

In dit hoofdstuk zullen de modellen die in hoofdstuk 3 zijn besproken, worden gevalideerd. Eerst zal een numeriek schema worden besproken waarmee SDV's kunnen worden gesimuleerd [20]. Dit schema wordt vervolgens gebruikt om paden te simuleren volgens de SDV's behorend bij de geometrisch Brownse beweging, het Ornstein-Uhlenbeckproces en het regime-switching model voor gasprijzen. Vervolgens worden deze modellen gekalibreerd op de data.

5.1 Numeriek schema: Euler-Maruyama

In het algemeen heeft een scalaire SDE de volgende vorm:

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.1)$$

Om een numerieke schema toe te passen op deze vergelijking op het tijdsinterval $[0, T]$ wordt er gebruik gemaakt van een equidistant rooster: $\{t_i\}_{i=0}^K$ met $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$, waarbij $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. De numerieke benadering $X(\tau_i)$ waarbij $\tau_i = i\Delta t$ zal worden genoteerd als X_i .

Integreren van (5.1) geeft:

$$X(\tau_{j+1}) = X(\tau_j) + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(X(s))ds + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} g(X(s))dW(s), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.2)$$

Het gebruik van de left-point rule voor integralen [21] geeft:

$$\int_{\tau_{j+1}}^{\tau_j} f(X(s))ds \approx f(X(\tau_j)) \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} ds = f(X(\tau_j))\Delta t \quad (5.3)$$

Evenzo geldt er voor de tweede integraal:

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} g(X(s))dW(s) \approx g(X(\tau_j)) \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} dW(s) = g(X(\tau_j))\Delta W = g(X(\tau_j))\sqrt{\Delta t}Z \quad (5.4)$$

Hierbij is $Z \sim N(0, 1)$.

De Euler-Maruyama discretizatie van (5.1) is dus als volgt:

$$X_{i+1} = X_i + f(X_i)\Delta t + g(X_i)\sqrt{\Delta t}Z_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, K-1\}, \quad X_0 = x_0 \quad (5.5)$$

Elke verzameling $\{X_0, \dots, X_{K-1}\}$ is één benaderende realisatie van de oplossing X_t afhankelijk van de stochastische variabelen Z_i . Omdat W_t een stochastisch proces is, zal elke realisatie anders zijn.

Als er wordt gekeken naar de convergentie-eigenschappen van een numerieke methode voor het simuleren van SDE's, dan kan er onderscheid worden gemaakt tussen sterke en zwakke convergentie. Sterke convergentie gaat over de afname van het gemiddelde van de fouten bij een kleiner wordende stapgrootte. Zwakke convergentie gaat over de afname van de fout van de gemiddeldes of functies van X . Hieronder volgen de definities.

Definitie. Een methode heeft een orde van sterke convergentie gelijk aan γ als er een constante C bestaat zodanig dat:

$$\mathbb{E}|X_n - X(\tau)| \leq C\Delta t^\gamma \quad (5.6)$$

voor elke vaste $\tau = n\Delta t \in [0, T]$ en Δt voldoende klein.

Er zal worden gekeken naar de fout op het eindpunt:

$$error_{\Delta t}^{sterk} = \mathbb{E}|X_L - X(T)| \leq C\Delta t^\gamma \text{ met } L\Delta t = T \quad (5.7)$$

Voor de Euler-Marayama methode geldt dat de orde van sterke convergentie gelijk is aan $\gamma = \frac{1}{2}$ [20].

Definitie. Een methode heeft een orde van zwakke convergentie γ als er een constante C bestaat zodat voor bepaalde functies p :

$$|\mathbb{E}_p(X_n) - \mathbb{E}_p(X(\tau))| \leq C\Delta t^\gamma \quad (5.8)$$

voor elke vaste $\tau = n\Delta t \in [0, T]$ en Δt voldoende klein.

In ons geval wordt voor p de identiteitsfunctie gekozen en er wordt gekeken naar de eindpunten van het interval:

$$error_{\Delta t}^{zwak} = |\mathbb{E}(X_L) - \mathbb{E}(X_T)| \leq C\Delta t^\gamma \quad (5.9)$$

Voor de Euler-Marayama methode geldt dat de orde van zwakke convergentie gelijk is aan $\gamma = 1$ [20].

5.2 Simulatie geometrische Brownse beweging

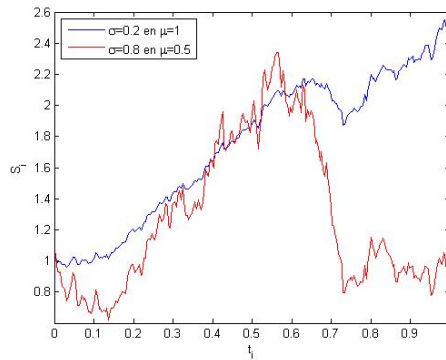
Zoals gezien volgt een stochastisch proces P_t een geometrisch Brownse beweging als het voldoet aan de volgende SDV:

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t W_t \quad (5.10)$$

De oplossing P_t is stochastisch en dus verschillend voor elke t . Om paden te simuleren die de GBM volgen, wordt er gebruikt gemaakt van het Euler-Maruyama schema. Toepassing van dit schema op vergelijking (5.10) levert de volgende discretizatie:

$$P_{i+1} = (1 + \mu\Delta t)P_i + \sigma P_i \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_i, \quad P_0 = p_0 \text{ en } Z_i \sim N(0, 1) \quad (5.11)$$

In Figuur 5.1 worden prijspaden weergegeven gesimuleerd volgens (5.11) met beginwaarde $P_0 = 1$ en 100 tijdspunten op $[0, 1]$. Er wordt gebruik gemaakt van verschillende waarden voor de drift (μ) en de volatiliteit (σ). Hieruit blijkt duidelijk dat σ de mate van fluctueren van het prijspad beïnvloedt en μ de drift van het prijspad.



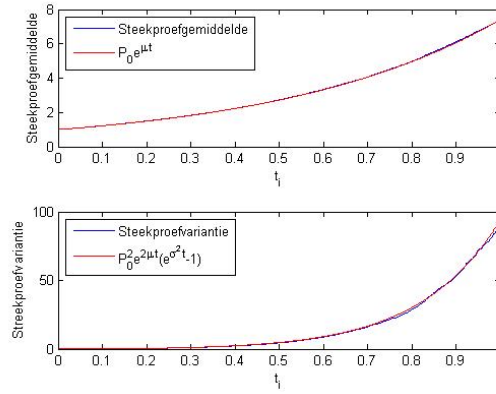
Figuur 5.1: Simulatie van paden volgens de GBM met verschillende waarden voor de volatiliteit en drift.

Herinner de exacte uitdrukkingen voor de verwachting en variantie van een GBM-proces:

$$\mathbb{E}[P_t] = P_0 e^{\mu t}$$

$$\text{Var}[P_t] = P_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

In Figuur 5.2 wordt voor elk tijdstip het steekproefgemiddelde en de steekproefvariantie van 10^4 paden weergegeven samen met de exacte verwachting en variantie. Er wordt gebruik gemaakt van de volgende parameterwaardes: $P_0 = 1$, $\mu = 2$, $\sigma = 1$ en 10^3 tijdstippen op $[0,1]$. Opgemerkt kan worden dat de grafieken samenvallen.



Figuur 5.2: Steekproefgemiddelde en -variantie van 10^4 GBM-paden met de exacte verwachting en variantie.

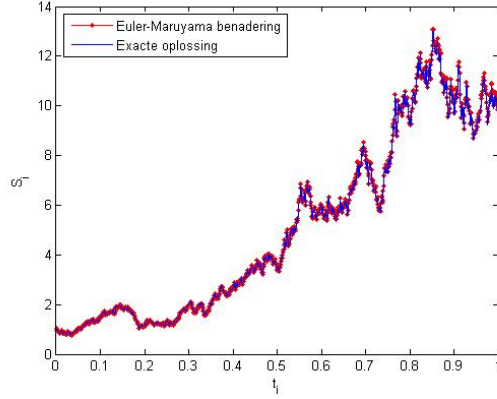
Ook is er een exacte uitdrukking bekend voor de geometrisch Brownse beweging:

$$P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)$$

Deze exacte oplossing kan als volgt worden gesimuleerd:

$$P_{i+1} = P_i e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_i} \text{ met } Z_i \sim N(0, 1) \quad (5.12)$$

In Figuur 5.3 wordt een pad gesimuleerd volgens (5.11) met dezelfde parameterwaardes als in Figuur 5.1. In de figuur wordt ook de exacte oplossing weergegeven volgens (5.12).



Figuur 5.3: Exakte oplossing en benadering van een GBM-pad met behulp van de Euler-Maruyama methode.

Om de orde van convergentie te onderzoeken van het Euler-Maruyama schema worden er 10^4 paden gesimuleerd volgens (5.11). In Tabel 1 zijn $error_{\Delta t}^{sterk}$ en $error_{\Delta t}^{zwak}$ voor verscheidene stapgroottes $\Delta t = \frac{1}{2^a}$ met $a = 5, \dots, 9$ te vinden. Hieruit blijkt dat de orde van sterke convergentie $\frac{1}{2}$ is en de orde van zwakke convergentie 1. Dit komt overeen met de theoretisch bekende waarden.

Δt	$error_{\Delta t}^{sterk}$	$error_{\Delta t}^{zwak}$
2^{-5}	0.7750	0.4129
2^{-6}	0.5257	0.2039
2^{-7}	0.3678	0.1030
2^{-8}	0.2615	0.0533
2^{-9}	0.1845	0.0317

Tabel 1: Waardes van de sterke en zwakke fout van het Euler-Maruyama schema toegepast op de GBM.

5.3 Simulatie Ornstein-Uhlenbeck proces

In deze sectie worden paden volgens het Ornstein-Uhlenbeck proces gesimuleerd. Omdat het vermoeden is dat er geen exacte uitdrukkingen kunnen worden afgeleid voor het algemene MR-proces, wordt er gekozen voor het simuleren van het OU-proces. Hiervan zijn de exacte uitdrukkingen afgeleid in sectie 3.3.1. Dit heeft tot gevolg dat het proces beter te valideren dan het algemene MR-proces. Wanneer de validatie goed gaat voor het OU-proces, wordt aangenomen dat dit ook het geval is voor het algemene MR-proces.

Herinner dat een stochastisch proces P_t een Ornstein-Uhlenbeck proces volgt als het voldoet aan de volgende SDE:

$$dP_t = \alpha(\mu - P_t)dt + \sigma dW_t$$

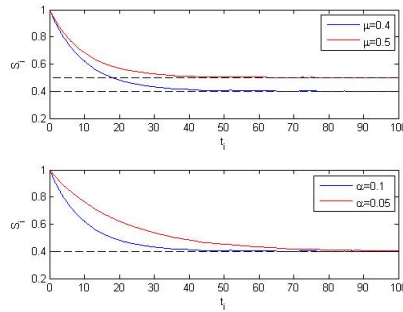
Om prijspaden te simuleren volgens de SDE van het Ornstein-Uhlenbeck proces wordt er gebruikt gemaakt van het Euler-Maruyama schema. Er wordt wederom gebruik gemaakt van een equidistant rooster: $\{t_i\}_{i=0}^K$ met $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$, waarbij $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

Voor de discretizatie van het Ornstein-Uhlenbeck proces volgens dit schema geldt:

$$P_{i+1} = P_i + \alpha(\mu - P_i)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i \text{ met } Z \sim N(0, 1) \quad (5.13)$$

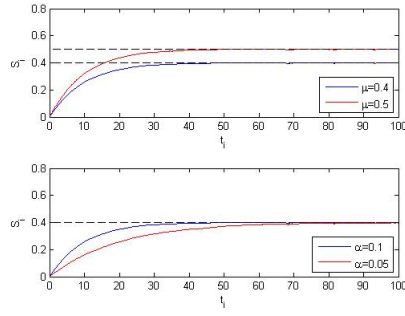
Ter bestudering van het gedrag van een pad dat een Ornstein-Uhlenbeck proces volgt zijn in Figuur 5.4 paden gesimuleerd volgens (5.13) met parameters $P_0 = 1$, $\sigma = 0.1$ en 10^3 tijdstippen op $[0, 100]$. Er worden paden gesimuleerd met verschillende waarden voor het evenwichtsniveau (μ) en de snelheid waarmee het proces naar het evenwichtsniveau terugkeert (α). Om toevallig gedrag te vermijden, is voor elke plot het gemiddelde genomen van 10^3 paden. Uit de figuur blijkt duidelijk dat op lange termijn het proces het evenwichtsniveau μ bereikt. Op het eindtijdstip is het gemiddelde van de 10^4 paden in het geval van $\mu = 0.5$ gelijk aan 0.4964 en in het geval van $\mu = 0.4$ gelijk aan 0.3964. Dit komt overeen met wat er wordt verwacht, namelijk dat voor $t \rightarrow \infty$ geldt $\mathbb{E}[P_t] = \mu$. Verder geldt er voor de variantie op het eindtijdstip dat deze gelijk is aan 0.0506. Dit komt eveneens overeen met wat verwacht wordt, namelijk dat voor $t \rightarrow \infty$ geldt dat $\text{Var}[P_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} = 0.05$.

De prijs daalt in dit geval naar μ omdat er geldt dat $P_0 > \mu$ en de drift dus negatief is. Uit de plot blijkt duidelijk dat naar mate de waarde van α hoger is het evenwichtsniveau eerder wordt bereikt.



Figuur 5.4: Simulatie van paden volgens het OU-proces met verschillende waarden van μ en α en een startwaarde van $P_0 = 1 > \mu$.

In Figuur 5.5 wordt het gemiddelde van 10^4 paden volgens het OU-proces weergegeven met dezelfde parameterwaardes als in Figuur 5.4, maar nu is er gebruik gemaakt van een startwaarde van $P_0 = 0 < \mu$. Evenals in Figuur 5.4 wordt op lange termijn het evenwichtsniveau bereikt. Op het eindstip is de gemiddelde waarde van de 10^3 paden bij $\mu = 0.5$ gelijk aan 0.4963 en bij $\mu = 0.4$ gelijk aan 0.3934. Omdat in dit geval geldt dat $P_0 < \mu$ is de drift positief en stijgt het prijspad naar μ .



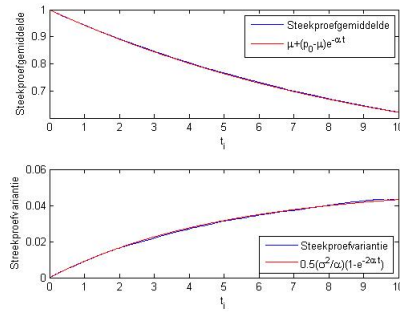
Figuur 5.5: Simulatie van paden volgens het OU-proces met verschillende waarden van μ en α en een startwaarde van $P_0 = 0 < \mu$.

Herinner uit sectie 3.3.1 de exacte uitdrukkingen voor de verwachting en variantie van een OU-proces:

$$\mathbb{E}[P_t|P_0 = p_0] = \mu + (p_0 - \mu)e^{-\alpha t}$$

$$\text{Var}[P_t|P_0 = p_0] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})$$

In Figuur 5.6 wordt voor elk tijdstip het steekproefgemiddelde en de steekproefvariantie van 10^4 paden weergegeven samen met de exacte verwachting en variantie. Er gebruikt gemaakt van de volgende parameterwaardes: $P_0 = 1$, $\mu = 0.4$, $\alpha = 0.1$ en 10^3 tijdstippen op $[0, 10]$. Opgemerkt kan worden dat de grafieken samenvallen.



Figuur 5.6: Steekproefgemiddelde en -variantie van 10^4 OU-paden met de exacte verwachting en variantie

5.4 Simulatie regime-switching model

Zoals gezien kunnen de aardgasprijzen in het regime-switching model als volgt worden gemodelleerd:

$$dP(t) = \alpha^{m(t)}(K_0^{m(t)} - P(t))dt + \sigma^{m(t)}P(t)dZ(t) + J^{m(t)}(t)P(t)dt,$$

$$J^{m(t)}(t) = \beta_A^{m(t)}\sin(2\pi(t - t_0 + C_A(t_0))) + \beta_{SA}^{m(t)}\sin(4\pi(t - t_0 + C_{SA}(t_0)))$$

In regime $k \equiv m(t)$ volgt de gasprijs een proces met parameters α^k , K_0^k , $J^k(t)$ en σ^k . Voor $m(t)$ geldt dat:

$$dm(t) = (1 - m(t))dq_{01}(t) - m(t)dq_{10}(t) \quad (5.14)$$

Hierbij zijn $q_{01}(t)$ en $q_{10}(t)$ zijn onafhankelijke Poissonprocessen met als intensiteit respectievelijk $\lambda_{01}(P, t)$ en $\lambda_{10}(P, t)$.

Toepassing van de Euler-Maruyama methode op bovenstaande vergelijkingen waarbij $J^{m(t)} = 0$ is gesteld, levert de volgende discretizaties:

$$P_{i+1} = P_i + \alpha^{m(t)}(K_0 - P_i)\Delta t + \sigma^{m(t)}P_i\sqrt{\Delta t}Z_i \text{ met } Z_i \sim N(0, 1) \quad (5.15)$$

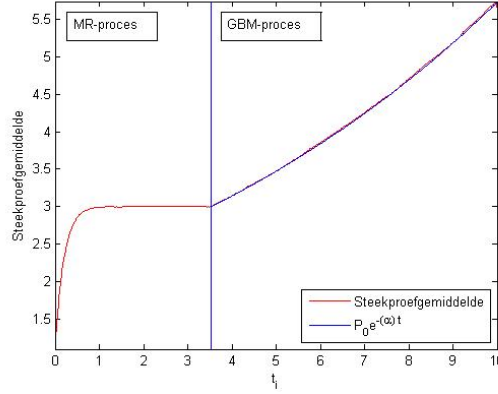
$$m_{i+1} = m_i + (1 - m_i)dq_{01_i} - m_idq_{10_i} \quad (5.16)$$

In de figuren die volgen worden paden van verscheidene variaties van het regime-switching model weer-gegeven. De paden worden gesimuleerd volgens (5.15) op het tijdsinterval $[0, T] = [0, 10]$ met $N = 10^3$ tijdsstappen. Om te voorkomen dat het prijsproces op een klein tijdsinterval vaak van regime wisselt, zijn de waardes van de intensiteiten λ_{ij} met $i, j \in \{0, 1\}$ zo gekozen dat de prijzen voor een langere tijd in een bepaald regime blijven. Dit met als doel het gedrag van de paden beter te kunnen bestuderen. In onderstaande simulaties wordt gebruik gemaakt van $\lambda_{01} = 0.35$ en $\lambda_{10} = 0.0005$. Er wordt gebruik gemaakt van één bepaalde Poisson-steekproef om de figuren te kunnen vergelijken en te kunnen reproduceren. Dit heeft namelijk tot gevolg dat de regime-wisseling voor elk pad op het zelfde moment plaats vindt. Dit is in ons geval op $t_{rs} = 3.54$. Als begintoestanden worden $m_{start} = 0$ en $P_{start} = 1$ gebruikt. Dit betekent dat de prijzen op $[0, 3.54 - \Delta t] = [0, 3.53]$ regime 0 volgen en op $[3.54; 10]$ regime 1. Afhankelijk van de parameterwaardes volgen de prijzen in de verschillende regimes ofwel een MR-proces ofwel een GBM-proces. Ter vergelijking worden ook indien bekend de exacte uitdrukkingen gesimuleerd van de verschillende regimes. Als prijswaarde op het tijdstip van de regime-switch ($t_{rs} = 3.54$) wordt hierbij de waarde genomen van het proces in regime 0 op dit tijdstip. Zo kunnen de processen in de verschillende regimes vloeiend in elkaar over gaan.

5.4.1 MRGBM-variatie

In Figuur 5.7 wordt het steekproefgemiddelde weergegeven van $9 \cdot 10^3$ gesimuleerde paden met de volgende parameters:

- Regime 0: $\alpha^0 = 5$, $K_0^0 = 3$, $\sigma^0 = 0.3$
- Regime 1: $\alpha^1 = -0.1$, $K_0^1 = 0$, $\sigma^1 = 0.3$



Figuur 5.7: Steekproefverwachting van $9 \cdot 10^3$ paden volgens het regime-switching model samen met de exacte verwachting.

In dit geval komt regime 0 overeen met een MR-proces en regime 1 met een GBM-proces. De prijzen volgen op $[0; 3.53]$ een MR-proces en op $[3.54; 10]$ een GBM-proces met positieve drift.

Wanneer er op het eindtijdstip van het MR-proces gekeken wordt naar het gemiddelde van de $2 \cdot 10^3$ paden geeft dit een waarde van 3.0099, wat ongeveer gelijk is aan het evenwichtsniveau $K_0^0 = 3$ van het MR-proces.

Herinner uit sectie 3.2 dat voor de verwachting van een GBM-proces geldt:

$$\mathbb{E}[P_t] = P_0 e^{\mu t}$$

Voor de verwachting van het GBM-proces in regime 1 geldt dus:

$$\mathbb{E}[P_t] = P_{t_{rs}} e^{-\alpha^1(t-t_{rs})} \text{ met } t_{rs} \leq t \leq T \quad (5.17)$$

In Figuur 5.7 wordt naast het steekproefgemiddelde ook de exacte verwachting van het GBM-proces in regime 1 weergegeven. Zoals genoemd wordt als waarde van $S_{t_{rs}}$ de prijswaarde van het proces in regime 0 op het tijdstip van de regime-switch genomen. Er is echter geen exacte uitdrukking bekend voor deze waarde, omdat er geen exacte uitdrukkingen bekend zijn voor het algemene MR-proces. Aangezien een MR-proces op lange termijn het evenwichtsniveau bereikt, wordt het evenwichtsniveau K_0^0 van het MR-proces in regime 0 genomen als waarde van $S_{t_{rs}}$. Het evenwichtsniveau van regime 0 is een goede benadering van de prijs op het tijdstip van de regimeswitch, omdat uit de bovengenoemde berekening

blijkt dat het proces lang genoeg in regime 0 is om dit evenwichtsniveau te bereiken. Uit de figuur is op te maken dat exacte verwachting van het GBM-proces samenvalt met de steekproefverwachting.

5.4.2 GBMGBM-variatie

In Figuur 5.8 en 5.9 worden de steekproefverwachtingen en -varianties weergegeven van paden met de volgende parameters:

- Regime 0: $\alpha^0 = -0.3$, $K_0^0 = 0$ en $\sigma^0 = 0.3$
- Regime 1: $\alpha^1 = 0.3$, $K^1 = 0$ en $\sigma^1 = 0.3$

In dit geval komt regime 0 overeen met een GBM-proces evenals regime 1. De prijzen volgen op $[0; 3.53]$ een GBM-proces met positieve drift en op $[3.54; 10]$ een GBM-proces met negatieve drift.

Wanneer er naar de verwachting van de processen wordt gekeken, dan geldt voor het GBM-proces in regime 0:

$$\mathbb{E}[P_t] = P_0 e^{-\alpha^0 t} \text{ met } 0 \leq t < t_{rs} \quad (5.18)$$

Herinner dat voor een GBM-proces geldt:

$$P_t = P_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right)$$

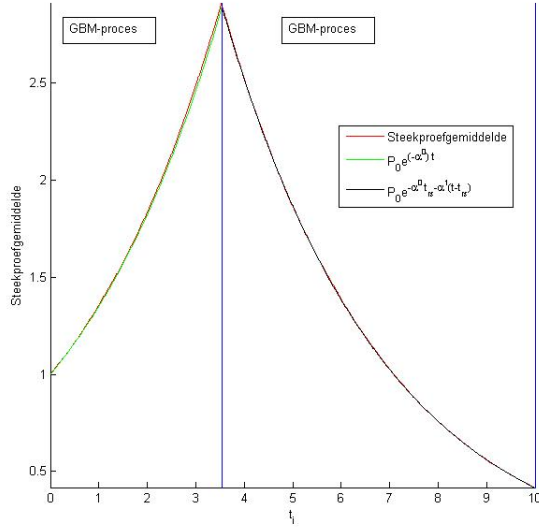
De uitdrukking voor het prijsproces in regime 1 is dus als volgt:

$$P_t = P_{t_{rs}} e^{(-\alpha^1 - \frac{1}{2}(\sigma^1)^2)(t-t_{rs}) + \sigma^1 B_{t-t_{rs}}} \text{ met } t_{rs} \leq t \leq T \quad (5.19)$$

Als waarde van $P_{t_{rs}}$ wordt de waarde van het GBM-proces in regime 0 gebruikt op het tijdstip van regimeverandering: $P_{t_{rs}} = P_0 e^{(-\alpha^0 - \frac{1}{2}(\sigma^0)^2)t_{rs} + \sigma^0 B_{t_{rs}}}$. Voor de verwachting van het GBM-proces in regime 1 geldt dan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_t] &= \mathbb{E} \left[P_{t_{rs}} e^{-\alpha^1 - \frac{1}{2}(\sigma^1)^2(t-t_{rs}) + \sigma^1 B_{t-t_{rs}}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[P_0 e^{(-\alpha^0 - \frac{1}{2}(\sigma^0)^2)t_{rs} + \sigma^0 B_{t_{rs}}} e^{-\alpha^1 - \frac{1}{2}(\sigma^1)^2(t-t_{rs}) + \sigma^1 B_{t-t_{rs}}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[P_0 e^{(-\alpha^0 - \frac{1}{2}(\sigma^0)^2)t_{rs} + \sigma^0 B_{t_{rs}}} \right] \mathbb{E} \left[e^{-\alpha^1 - \frac{1}{2}(\sigma^1)^2(t-t_{rs}) + \sigma^1 B_{t-t_{rs}}} \right] \\ &= P_0 e^{-\alpha^0 t_{rs}} e^{-\alpha^1(t-t_{rs})} \\ &= P_0 e^{-\alpha^0 t_{rs} - \alpha^1(t-t_{rs})} \text{ met } t_{rs} \leq t \leq T \end{aligned} \quad (5.20)$$

Hierbij is in de derde gelijkheid gebruik gemaakt van de onafhankelijkheid van de incrementen $B_{t_{rs}}$ en $B_{t-t_{rs}}$. In Figuur 5.8 wordt naast het steekproefgemiddelde ook de exacte verwachting van de GBM-processen weergegeven volgens (5.18) en (5.20). In de plot is te zien dat de steekproefverwachting op $[0; 3.53]$ en $[3.54; 10]$ samenvalt met de exacte verwachting van de twee GBM-processen.



Figuur 5.8: Steekproefverwachting van $9 \cdot 10^3$ paden volgens het regime-switching model samen met de exacte verwachting.

Herinner dat voor de variantie van een GBM-proces geldt:

$$\text{Var}[P_t] = P_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Wanneer de variantie van de processen in de verschillende regimes wordt bekeken, dan geldt voor het GBM-proces in regime 0 dus:

$$\begin{aligned} \text{Var}[P_t] &= \text{Var}\left[P_0 e^{(-\alpha^0 - \frac{1}{2}(\sigma^0)^2)t + \sigma^0 B_t}\right] \\ &= P_0^2 e^{-2\alpha^0 t} (e^{(\sigma^0)^2 t} - 1) \text{ voor } 0 \leq t < t_{rs} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Voor de variantie van het GBM-proces in regime 1 wordt er gebruikt dat voor de variantie van het product van twee onafhankelijke processen X en Y geldt:

$$\text{Var}[XY] = \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 \mathbb{E}[Y]^2 \quad (5.22)$$

De variantie van het GBM-proces in regime 1 kan dan geschreven worden als:

$$\begin{aligned} \text{Var}[P_t] &= \text{Var}\left[P_{t_{rs}} e^{(-\alpha^1 - \frac{1}{2}(\sigma^1)^2)(t-t_{rs}) + \sigma^1 B_{t-t_{rs}}}\right] \\ &= \text{Var}[XY] \end{aligned} \quad (5.23)$$

In dit geval wordt $X = P_{t_{rs}}$ genoemd en $Y = e^{(-\alpha^1 - \frac{1}{2}(\sigma^1)^2)(t-t_{rs}) + \sigma^1 B_{t-t_{rs}}}$ met $t_{rs} \leq t \leq T$.

Op het tijdstip van de regime-switch t_{rs} wordt weer de waarde van regime 0 op dit tijdstip genomen:

$$P_{t_{rs}} = P_0 e^{(-\alpha^0 - \frac{1}{2}(\sigma^0)^2)t_{rs} + \sigma^0 B_{t_{rs}}} \quad (5.24)$$

Uitwerken van de afzonderlijke termen in (5.22) geeft:

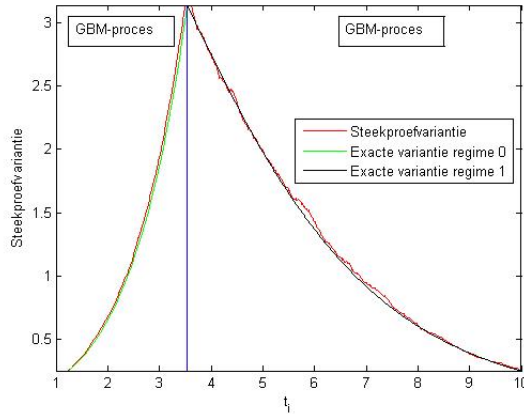
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[P_{t_{rs}}^2] = \text{Var}[P_{t_{rs}}] + \mathbb{E}[P_{t_{rs}}]^2 \\ &= P_0^2 e^{-2\alpha^0 t_{rs}} (e^{(\sigma^0)^2 t_{rs}} - 1) + S_0^2 e^{-2\alpha^0 t_{rs}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y(t)^2] &= \text{Var}[Y(t)] + \mathbb{E}[Y(t)]^2 \\ &= e^{-2\alpha^0 t_{rs}}(e^{(\sigma^0)^2(t-t_{rs})} - 1) + e^{-2\alpha^1(t-t_{rs})} \text{ met } t_{rs} \leq t \leq T\end{aligned}\quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]^2 &= \mathbb{E}[P_{t_{rs}}] \\ &= \mathbb{E}\left[P_0 e^{(-\alpha^0 - \frac{1}{2}(\sigma^0)^2)t_{rs} + \sigma^0 B_{t_{rs}}}\right] = P_0^2 e^{-2\alpha^0 t_{rs}}\end{aligned}\quad (5.27)$$

$$\mathbb{E}[Y(t)]^2 = e^{-2\alpha^1(t-t_{rs})} \text{ met } t_{rs} \leq t \leq T \quad (5.28)$$

Samennemen van deze termen zoals in (5.23) levert de uitdrukking voor de exacte variantie van GBM-proces in regime 1. In Figuur 5.9 wordt zowel de steekproefvariantie van $9 \cdot 10^3$ paden als de exacte variantie weergegeven. Op te merken is dat de grafieken samenvallen.



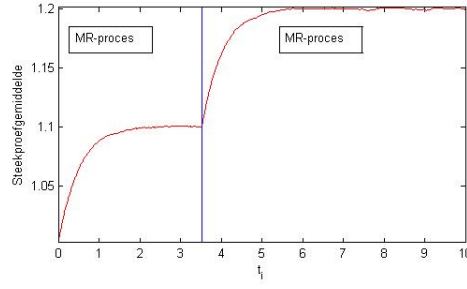
Figuur 5.9: Steekproefvariantie van $9 \cdot 10^3$ paden volgens het regime-switching model samen met de exacte variantie.

5.4.3 MRMR-variatie

In Figuur 5.10 wordt de steekproefverwachting weergegeven van 10^3 paden met de volgende parameters:

- Regime 0: $\alpha^0 = 2$, $K_0^0 = 1.1$ en $\sigma^0 = 0.1$
- Regime 1: $\alpha^1 = 2$, $K_0^1 = 1.2$ en $\sigma^1 = 0.1$

In dit geval komt regime 0 overeen met een MR-proces evenals regime 1. Zoewel op $[0; 3.53]$ als op $[3.54; 10]$ volgen de prijzen een MR-proces, maar met verschillende evenwichtsniveaus. Het evenwichtsniveau van de prijzen verandert dus van K_0^0 in K_0^1 . Wanneer er op het eindtijdstip van het eerste regime wordt gekeken naar het gemiddelde van de 10^3 paden geeft dit een waarde van 1.1010, wat ongeveer gelijk is aan het evenwichtsniveau $K_0^0 = 1.1$. Het gemiddelde van de 10^3 paden op het eindtijdstip van het



Figuur 5.10: Steekproefverwachting van $9 \cdot 10^3$ paden volgens het regime-switching model.

tweede regime is gelijk aan 1.1993, wat ongeveer gelijk is aan het evenwichtsniveau $K_0^1 = 1.2$. Omdat het vermoeden is dat er geen exacte uitdrukkingen bekend zijn voor het algemene MR-proces, kan de steekproefvariantie niet met de exacte variantie worden vergeleken. Echter, in sectie 5.3 is dit wel gedaan voor paden volgens het OU-proces, waar wel exacte uitdrukkingen van bekend zijn.

5.5 Kalibratie

Zoals gezien in de vorige sectie is het aannemelijk om te veronderstellen dat de MRGBM-variant van het regime-switching model van toepassing is op de dataset. Dit betekent dat het MR-model van toepassing lijkt te zijn op de eerste periode en het GBM-model op de tweede periode. In deze sectie zal dit model worden gefit op de data. Dit betekent dat we bezig zijn met historische kalibratie, wat resulteert in parameters onder de reële wereldmaat $\mathbb{P}$. Eerst zullen de twee periodes apart worden bekeken om zo de parameters van het MR-proces en het GBM-proces te bepalen. Na het vaststellen van deze parameters wordt de intensiteiten van het Poissonproces bepaald zodanig dat de verwachting is dat de regimewisseling plaats vindt in december 1999.

5.5.1 Kalibratie MR

Zoals gesteld wordt er aangenomen dat de gasprijzen in de periode januari 1976 tot en met november 1999 een MR-proces volgen. Dit proces heeft als discretizatie:

$$P_{i+1} = P_i + \alpha(\mu - P_i)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}P_iZ \text{ met } Z \sim N(0, 1)$$

De periode januari 1976 tot en met november 1999 omvat 287 maanden met voor elke maand een prijs. De eindtijd T wordt in maanden gemeten evenals het aantal tijdstappen L . Er geldt dus dat $L = T = 287$ en $\Delta t = \frac{T}{L} = 1$. De parameters worden met behulp van de verwachting van de returns en de standaardafwijking van de logreturns vastgesteld op $\alpha^0 = 0.009$, $\mu^0 = 1.8043$ en $\sigma^0 = 0.0711$.

5.5.2 Kalibratie GBM

In de sectie data-analyse is vastgesteld dat de gasprijzen een GBM-proces volgen over de periode december 1999 tot en met december 2012.

Herinner dat dit proces als discretizatie heeft:

$$P_{i+1} = ((1 + \mu\Delta t)P_i + \sigma P_i \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad P_0 = p_0 \text{ en } Z_i \sim N(0, 1)$$

De periode december 1999 tot en met december 2012 omvat 157 maanden met voor elke maand een prijs. De eindtijd T en het aantal tijdstappen L worden weer in maanden gemeten: $T = L = 157$ en $\Delta t = \frac{T}{L} = 1$. Om de parameters van het GBM-proces te bepalen, wordt er gekeken naar de verdeling van de logreturns:

$$\ln\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right) \sim N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t, \sigma^2\Delta t\right) \quad (5.29)$$

Hieruit volgt dat de parameters μ en σ kunnen worden bepaald uit de vector van logreturns R . De uitdrukkingen voor σ en μ zijn als volgt:

$$\sigma = \frac{\text{std}(R)}{\sqrt{\Delta t}} \quad (5.30)$$

$$\mu = \frac{\mathbb{E}(R)}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2} \quad (5.31)$$

Hieruit volgt dat $\sigma^1 = 0.1209$ en $\mu^1 = 0.0099$.

5.5.3 Kalibratie regime-switching model

Nu de parameters van de afzonderlijke processen zijn bepaald, zal de MRGBM-variant van het regime-switching model worden gefit op de gasprijzen. Het doel is om de waardes van λ_{ij} met $i, j \in \{0, 1\}$ te bepalen zodanig dat de verwachting is dat de regimeswitch plaats vindt in december 1999. Dit betekent dat de verwachting is dat regimeswitch plaats vindt na 355 maanden. Aangenomen wordt dat er over de gegeven tijdsperiode 1 keer wordt gewisseld van regime en dat er wordt gestart in regime 0.

Herinner dat er voor de regimewisseling geldt:

$$dm(t) = (1 - m(t))dq_{01}(t) - m(t)dq_{10}(t)$$

Hierbij zijn $q_{01}(t)$ en $q_{10}(t)$ onafhankelijke Poissonprocessen met als intensiteiten respectievelijk $\lambda_{01}(P(t), t)$ en $\lambda_{10}(P(t), t)$.

Voor $dq_{ij}(t)$ met $i, j \in \{0, 1\}$, $i \neq j$ en $0 \leq \lambda_{ij}(P(t), t)dt \leq 1$ geldt:

$$dq_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{met kans } \lambda_{ij}(P(t), t)dt \\ 0 & \text{met kans } 1 - \lambda_{ij}(P(t), t)dt \end{cases}$$

Er wordt aangenomen dat de intensiteiten λ_{ij} met $i, j \in \{0, 1\}$ constant zijn. Elke tijdstap neemt $dq_{ij}(t)$ met $i, j \in \{0, 1\}$ dus de waarde 0 of 1 aan met een bepaalde kans. Er geldt dus dat $dq_{ij} \sim \text{Ber}(\lambda_{ij}dt)$ voor $i, j \in \{0, 1\}$. Voor de verwachting hiervan geldt:

$$\mathbb{E}[dq_{ij}] = \lambda_{ij}dt \text{ met } i, j \in \{0, 1\} \quad (5.32)$$

Wanneer er M paden worden gesimuleerd over een lange tijdsperiode $[0, T]$ met $N = T$ tijdstappen, is het gewenst dat $m(t)$ gemiddeld 354 tijdstappen 0 is en bij de 355^{ste} tijdstap 1 is en dat daarna ook blijft. Dit betekent dat λ_{10} gelijk aan 0 is. Voor λ_{01} betekent dat deze intensiteit gelijk is aan $1/355$. Immers, de waarde 1 treedt één keer op in 355 tijdstappen.

Bij simulatie van $M = 8000$ paden met $N = 10000$ tijdstappen over $[0, T] = [0, 10000]$ vindt de regimeswitch van regime 0 naar 1 gemiddeld plaats na 355.5 keer tijdstappen met een 95%-betrouwbaarheidsinterval van $[347.87, 363.17]$.

5.6 Validatie gekalibreerde model

Nu er parameterwaardes zijn bepaald voor de MRGBM-variant van het regime-switching model voor de ‘Natural Gas Wellhead Prices’ van januari 1976 tot en met december 2012, wordt dit gekalibreerde model gevalideerd. Aangezien de ‘Natural Gas Wellhead Prices’ niet langer zijn bijgehouden dan december 2012, worden hiervoor de ‘Prices of U.S. Natural Gas Imports’ [11] gebruikt die tot januari 2015 doorlopen en die een correlatie van 0.989 hebben met de ‘Natural Gas Wellhead Prices’. Om een uitspraak te doen over het verloop en de verdeling van de ‘Natural Gas Wellhead Prices’ na december 2012 worden de logreturns van de ‘Prices of U.S. Natural Gas Imports’ gebruikt vanaf januari 2013. Om ‘Natural Gas Wellhead Prices’ vanaf januari 2013 te reconstrueren worden deze logreturns toegepast waarbij als startwaarde gebruik wordt gemaakt van de laatst bekende ‘Natural Gas Wellhead’-prijs. Wanneer er naar de logreturns van de gereconstrueerde prijzen wordt gekeken, kan er aan de hand van de KS-test bij een significantieniveau van 5% worden geconcludeerd dat deze normaal verdeeld zijn. Dit betekent dat het GBM-model van toepassing kan zijn. Om te toetsen of de ‘Natural Gas Wellhead Prices’ van december 1999 tot en met december 2012 dezelfde normale verdeling volgen als de gereconstrueerde prijzen die van januari 2013 tot en met januari 2015 lopen, wordt een two-sample t-test gebruikt [22]. Het uitvoeren van deze test geeft aan dat de nul-hypothese van een normale verdeling van de twee datasets met dezelfde verwachting en variantie niet wordt verworpen bij een significantieniveau van 5%. Dit betekent dat het GBM-model zoals gevonden in sectie 5.4 ook van toepassing is op de gereconstrueerde ‘Natural Gas Wellhead Prices’ vanaf januari 2013 tot en met januari 2015. Wanneer de waardes van σ en μ van het GBM-model worden bepaald volgens (5.30) en (5.31) geeft dit: $\sigma^2 = 0.1715$ en $\mu^2 = 0.0204$. Omdat deze waardes niet significant afwijken van de gevonden gekalibreerde waardes $\sigma^1 = 0.1209$ en $\mu^1 = 0.0099$ van het GBM-model, kan er worden geconcludeerd dat het model gevalideerd is.

6 Waarderen van regime-switching opties

In deze sectie wordt de waardering van opties met gas als onderliggend product beschouwd. Hierbij volgen de gasprijzen het regime-switching model. De waarde van dit contract hangt af van de gasprijs en de tijd, maar ook welke regime van toepassing is op de gasprijs. Eerst zal er wat economische achtergrondinformatie worden behandeld. Daarna zullen er enkele marktaannames worden besproken. Vervolgens wordt met behulp van hedge-argumenten zoals gebruikt in [23] een stelsel van gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen (PDV's) afgeleid dat de waarde van de regime-switching optie beschrijft.

6.1 Economische achtergrond

Om het probleem van het waarderen van regime-switching opties op te lossen wordt een Europese call-optie beschouwd. Voordat hiermee wordt begonnen, wordt er eerst wat economische achtergrond besproken.

- **Optie:** Contract dat de koper (de houder) het recht geeft om van de verkoper (de schrijver) een vooraf afgesproken goed te kopen of verkopen voor een vooraf afgesproken prijs (de strike) en op een vooraf afgesproken tijdstip in de toekomst (expiratedatum) [24].
- **Europese call optie:** Contract dat de houder het recht geeft (maar niet de verplichting) om het onderliggende goed te kopen voor de strike op de expiratedatum. De waarde van de Europese call op expiratie is gelijk aan $V = \max(S_T - E, 0)$. Hierbij geeft S_T de prijs op het eindtijdstip weer en E de strike. De prijs waarvoor de koper de optie koopt wordt de optie-premie genoemd [24].
- **Moneyness:** Relatie tussen de prijs van het onderliggende goed en de strike. Deze term beschrijft de intrinsieke waarde van de optie, oftewel de waarde ‘als de expiratie vandaag zou zijn’. Opties kunnen in-the-money, at-the-money of out-of-the-money zijn. Wanneer op expiratedatum geldt $S_T - E > 0$, dan is de Europese call in-the-money. Andersom, wanneer $S_T - E < 0$, dan is de optie out-of-the-money en wanneer $S_T \approx E$ dan is de optie at-the-money [23].
- **Hedgen:** Handelsstrategie met als doel het afdekken van risico's die verbonden zijn aan een investering zoals het bezit van financiële instrumenten of gas [24].
- **Short positie:** Als een investeerder een short positie heeft in een optie betekent dit dat de optie geschreven (oftewel verkocht) is. De schrijver ontvangt bij het aangaan van een short positie de optie-premie. Het tegenovergestelde van een short-positie is een long positie [24].
- **Arbitrage:** Handelsstrategie die begint zonder geld, geen kans heeft om verlies te lijden en een positieve kans heeft om winst te maken [19]. De aanname dat er geen arbitrage mogelijk is, houdt in dat er geen mogelijkheid is om een risicoloze winst te maken groter dan verkregen aan rente op een bankrekening. De risiconeutrale maat $\mathbb{Q}$ zoals kort besproken in sectie 3.4 is alleen van toepassing in een arbitrage-vrije wereld.

6.2 Marktaannames

Om vergelijkingen voor de waardering van de regime-switching opties af te leiden, moeten er eerst enkele marktaannames worden gedaan. Ten eerste wordt er aangenomen er een eindig aantal regimes is waar het prijsproces in kan overgaan. De gasprijzen volgen het regime-switching model zoals in (3.39) en (3.40). Onafhankelijke Poissonprocessen worden gebruikt om de overgangen tussen de regimes te modelleren. In elk regime volgt de gasprijs een proces met bepaalde parameters. Deze parameters zijn constant per regime. Daarnaast wordt er aangenomen dat er continu kan worden gehegged en dat elke hoeveelheid aan gas en opties kan worden gekocht en verkocht. Ten slotte wordt er verondersteld dat er geen transactiekosten en arbitragemogelijkheden zijn en dat de rente constant is. Opgemerkt kan worden dat deze aannames nagenoeg gelijk zijn aan de aannames in het Black-Scholes model voor de waardering van opties. Alleen de Black-Scholes aanname dat het onderliggende prijsproces een geometrisch Brownse beweging volgt met constante drift en volatiliteit, is in dit geval niet van toepassing.

6.3 Regime-switching optie dynamica

Om het stelsel van PDV's af te leiden dat de waarde van een optie beschrijft, wordt een Europese call-optie beschouwd met als onderliggende gas. De prijzen van gas volgen het regime-switching model zoals in (3.39) en (3.40).

De waarde van de Europese call-optie in regime k , op tijdstip t met expiratie op T wordt genoteerd als $V^k(P, t, T)$. Hierbij is P de prijs van gas op tijdstip t .

Onder de aanname dat dt erg klein is geldt het volgende voor incrementen van de standaard Brownse beweging ($dB(t)$):

$$dB(t) \approx \sqrt{dt} \Rightarrow (dB(t))^2 \approx dt, \quad (6.1)$$

$$dB(t)dt \approx 0, \quad (6.2)$$

$$(dt)^2 \approx 0 \quad (6.3)$$

Zoals besproken in sectie 3.4, kan de prijsverandering van aardgas worden beschreven door:

$$\begin{aligned} dP(t) &= \alpha^k(K_0^k - P(t))dt + \sigma^k P(t)dB(t) + J^k(t)P(t)dt \\ &= [\alpha^k(K_0^k - P(t)) + J^k(t)P(t)]dt + \sigma^k P(t)dB(t) \\ &= A dt + \sigma^k P(t)dB(t) \end{aligned}$$

Hierbij is de term $\alpha^k(K_0^k - P(t)) + J^k(t)P(t)$ voor het gemak A genoemd.

Met behulp van de vergelijkingen die volgen uit de aanname dat dt erg klein is, volgt er dat:

$$dP(t)^2 = A^2 dt^2 + 2A dt \sigma^k P(t)dB(t) + (\sigma^k)^2 P(t)^2 dB(t)^2 \approx (\sigma^k)^2 P(t)^2 dt \quad (6.4)$$

Het gebruik van de Itô-Doebelin formule voor sprongprocessen [25] geeft de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} dV^k(P, t, T) &= \frac{\partial V^k}{\partial P}(P, t, T)dP(t) + \frac{\partial V^k}{\partial t}(P, t, T)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V^k}{\partial P^2}(P, t, T)(dP(t))^2 \\ &\quad + [V^{1-k}(P, t, T) - V^k(P, t, T)] dq_{k(1-k)}(t), \end{aligned} \quad (6.5)$$

Herordening en invullen van (6.4) geeft:

$$\begin{aligned} dV^k(P, t, T) &= \left[\frac{\partial V^k}{\partial t}(P, t, T) + \frac{1}{2} (\sigma^k)^2 P(t)^2 \frac{\partial^2 V^k}{\partial P^2}(P, t, T) \right] dt + \frac{\partial V^k}{\partial P}(P, t, T)dP(t) \\ &\quad + [V^{1-k}(P, t, T) - V^k(P, t, T)] dq_{k(1-k)}(t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

De regime-switching optie wordt blootgesteld aan zowel het risico van beweging in de aardgasprijs (dP) als het risico van een regime-sprong ($dq_{k(1-k)}(t)$). Opgemerkt kan worden dat het niet uitmaakt welk type optie er wordt beschouwd voor de afleiding. Elke optie op een product dat aan (3.39) en (3.40) voldoet, wordt namelijk blootgesteld aan hetzelfde risico.

6.4 Afleiding prijsvergelijkingen regime-switching optie

Nu er een vergelijking bekend is voor de waardeverandering in de optie in regime k , worden in deze sectie de vergelijkingen voor de waarde van een optie. Het resultaat is een systeem van partiële differentiaalvergelijkingen (PDV's) met één PDV voor elk regime. Het stelsel wordt afgeleid met behulp van hedge-argumenten.

Er wordt een inversteerder beschouwd die een short positie heeft in een Europese regime switching call met gas als onderliggende: $V_1^k(P, t)$ met strike K_1 en expiratie T_1 . Zoals gezien in de vorige sectie moet er gehedged worden tegen twee soorten risico's, namelijk bewegingen in de gasprijs en de kans op een mogelijke regimesprong. Tegen bewegingen in de gasprijs kan worden gehedged door een bepaalde hoeveelheid gas te bezitten. Om te hedgen tegen een mogelijke regimesprong, is er één optie nodig. Dit betekent dus dat er een long positie is in een andere call-optie $V_2^k(P, t)$ met hetzelfde onderliggende, maar met andere strike $K_2 > K_1$ en expiratedatum $T_2 > T_1$.

Het portfolio in regime k is dan als volgt:

$$\Pi^k(P, t, T) = -V_1^k(P, t, T) + \Delta_1^k P(t) + \Delta_2^k V_2^k(P, t, T) \quad (6.7)$$

De verandering in waarde van het portfolio wordt dan weergegeven door:

$$d\Pi^k(P, t, T) = -dV_1^k(P, t, T) + \Delta_1^k dP(t) + \Delta_2^k dV_2^k(P, t, T) \quad (6.8)$$

Wanneer (6.6) wordt toegepast op $dV_1^k(P, t, T)$ en $dV_2^k(P, t, T)$ geeft dit:

$$\begin{aligned} dV_1^k(P, t, T) = & \left[\frac{\partial V_1^k}{\partial t}(P, t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P(t)^2 \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial P^2}(P, t, T) \right] dt + \frac{\partial V_1^k}{\partial P}(P, t, T) dP(t) \\ & + [V_1^{1-k}(P, t, T) - V_1^k(P, t, T)] dq_{k(1-k)}(t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} dV_2^k(P, t, T) = & \left[\frac{\partial V_2^k}{\partial t}(P, t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P(t)^2 \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial P^2}(P, t, T) \right] dt + \frac{\partial V_2^k}{\partial P}(P, t, T) dP(t) \\ & + [V_2^{1-k}(P, t, T) - V_2^k(P, t, T)] dq_{k(1-k)}(t) \end{aligned} \quad (6.10)$$

In het vervolg zullen verkorte notaties worden gebruikt: $\Pi^k(P, t, T) = \Pi^k$, $V_1^k(P, t, T) = V_1^k$, etcetera.

Uitdrukking (6.8) voor de verandering in waarde van het portfolio kan met behulp van resultaat (6.9) en (6.10) worden geschreven als:

$$\begin{aligned} d\Pi^k = & - \left(\left[\frac{\partial V_1^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial P^2} \right] dt + \frac{\partial V_1^k}{\partial P} dP + [V_1^{1-k} - V_1^k] dq_{k(1-k)}(t) \right) + \Delta_1^k dP \\ & + \Delta_2^k \left(\left[\frac{\partial V_2^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial P^2} \right] dt + \frac{\partial V_2^k}{\partial P} dP + [V_2^{1-k} - V_2^k] dq_{k(1-k)}(t) \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Herordening geeft:

$$\begin{aligned}
d\Pi^k = & \left(- \left(\frac{\partial V_1^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial P^2} \right) + \Delta_2^k \left(\frac{\partial V_2^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial P^2} \right) \right) dt \\
& + \left(\Delta_1^k - \frac{\partial V_1^k}{\partial P} + \Delta_2^k \frac{\partial V_2^k}{\partial P} \right) dP \\
& + \left(\Delta_2^k [V_2^{1-k} - V_2^k] - [V_1^{1-k} - V_1^k] \right) dq_{k(1-k)}(t) \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Omdat we willen hedge tegen de risico's van bewegingen in de gasprijs en een mogelijke regimesprong op tijdstip t , worden de hedge ratio's (Δ_1^k en Δ_2^k) zo gekozen dat deze onvoorspelbare termen worden geëlimineerd:

$$\Delta_1^k = \frac{\partial V_1^k}{\partial P} - \Delta_2^k \frac{\partial V_2^k}{\partial P} \quad (6.13)$$

$$\Delta_2^k [V_2^{1-k} - V_2^k] - [V_1^{1-k} - V_1^k] = 0 \quad (6.14)$$

Nu deze risico's zijn geëlimineerd, hangt de waarde van het portfolio alleen nog af van de deterministische verandering in tijd (dt). Om deze reden is de waardeverandering van het portfolio gelijk aan de groei van het portfolio met de risicovrije rente:

$$d\Pi^k = r\Pi^k dt, \quad (6.15)$$

Wanneer dit wordt toegepast op de uitdrukking voor ons portfolio (6.7) volgt:

$$\begin{aligned}
& \left(- \left(\frac{\partial V_1^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial P^2} \right) + \Delta_2^k \left(\frac{\partial V_2^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial P^2} \right) \right) dt \\
& = r(-V_1^k + \Delta_1^k P + \Delta_2^k V_2^k) dt \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Invullen van (6.13) en wegdelen van dt geeft:

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial V_1^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial P^2} \right) + \Delta_2^k \left(\frac{\partial V_2^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial P^2} \right) \\
& = -rV_1^k + rP \left(\frac{\partial V_1^k}{\partial P} - \Delta_2^k \frac{\partial V_2^k}{\partial P} \right) + r\Delta_2^k V_2^k, \quad (6.17)
\end{aligned}$$

Dit kan ook geschreven worden als:

$$- \left(\frac{\partial V_1^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial P^2} + rP \frac{\partial V_1^k}{\partial P} - rV_1^k \right) + \Delta_2^k \left(\frac{\partial V_2^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial P^2} + rP \frac{\partial V_2^k}{\partial P} - rV_2^k \right) = 0 \quad (6.18)$$

We definiëren de Black-Scholes operator als:

$$\mathcal{L}_{BS}(V^k) = \frac{\partial V^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V^k}{\partial P^2} + rP \frac{\partial V^k}{\partial P} - rV^k \quad (6.19)$$

Hieruit volgt dat vergelijking (6.18) geschreven kan worden als:

$$- \mathcal{L}_{BS}(V_1^k) + \Delta_2^k \mathcal{L}_{BS}(V_2^k) = 0 \quad (6.20)$$

De waarde van Δ_2^k is nu nog niet bekend, maar kan bepaald worden met de volgende vergelijkingen:

$$\Delta_2^k [V_2^{1-k} - V_2^k] - [V_1^{1-k} - V_1^k] = 0 \quad (6.21)$$

$$-\mathcal{L}_{BS}(V_1^k) + \Delta_2^k \mathcal{L}_{BS}(V_2^k) = 0 \quad (6.22)$$

We hebben dus een systeem met twee vergelijkingen voor één onbekende. Uit (6.21) volgt er dat:

$$\Delta_2^k = \frac{[V_1^{1-k} - V_1^k]}{[V_2^{1-k} - V_2^k]} \quad (6.23)$$

Invullen in (6.22) geeft:

$$-\mathcal{L}_{BS}(V_1^k) + \frac{[V_1^{1-k} - V_1^k]}{[V_2^{1-k} - V_2^k]} \mathcal{L}_{BS}(V_2^k) = 0 \quad (6.24)$$

Dit kan ook worden geschreven als:

$$\frac{\mathcal{L}_{BS}(V_1^k)}{[V_1^{1-k} - V_1^k]} = \frac{\mathcal{L}_{BS}(V_2^k)}{[V_2^{1-k} - V_2^k]} \quad (6.25)$$

De linkerkant van (6.25) is een functie van V_1^k terwijl de rechterkant een functie is van V_2^k . Dit kan alleen het geval zijn als beide kanten gelijk zijn aan een functie $f^k(t, P)$. Deze functie wordt gekozen in termen van de intensiteit van het Poissonproces:

$$f^k(t, P) = -\lambda_{k(1-k)}(P, t) [V_i^{1-k} - V_i^k] \text{ voor } i \in \{1, 2\} \quad (6.26)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial V^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V^k}{\partial P^2} + rP \frac{\partial V^k}{\partial P} - rV^k + \lambda_{k(1-k)}(P, t) [V^{1-k} - V^k] = 0 \quad (6.27)$$

Concluderend is het systeem van (gekoppelde) PDV's voor het prijzen van de regime-switching optie als volgt:

$$\frac{\partial V^k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^k)^2 P^2 \frac{\partial^2 V^k}{\partial P^2} + \frac{\partial V^k}{\partial P} - rV^k + \lambda_{k(1-k)}(P, t) [V^{1-k} - V^k] = 0, \quad (6.28)$$

onder de begin- en eindvoorwaarden:

$$V^k(P, T, T) = \max[P - K, 0], \quad (6.29)$$

$$V^k(0, T, t) = V^{1-k}(0, T, t) = 0, \quad (6.30)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\partial V^k}{\partial P} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\partial V^{1-k}}{\partial P} = 1 \quad (6.31)$$

met $k \in \{0, 1\}$

Zoals opgemerkt, wordt hetzelfde stelsel van PDV's verkregen wanneer een ander soort optie wordt beschouwd. Zolang opties worden beschouwd die worden blootgesteld aan dezelfde risico's van bewegingen in de gasprijs en een mogelijke regimesprong, wordt hetzelfde stelsel van PDV's verkregen. De verschillende soorten opties komen tot uiting in de eind- en randvoorwaarden.

6.5 Feynmann-Kac stelling

Nu een stelsel van PDV's bekend is voor de prijs van de regime-switching optie, zijn we geïnteresseerd in een oplossing hiervan. Hiervoor wordt de oplossing gebruik via de Feynman-Kac theorie, die als volgt luidt [26]:

Stelling 1. *Gegeven een bankrekening, gemodelleerd door $dM(t) = rM(t)dt$ met een constante rente r , zij $V(t, S)$ een differentieerbare functie van de tijd t en aandeelprijs $P(t)$. Stel dat $V(t, P)$ voldoet aan de volgende PDV, met drift $\bar{\mu}(t, P)$ en volatiliteit $\bar{\sigma}(t, P)$:*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu}(t, P) \frac{\partial V}{\partial P} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, P) \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} - rV = 0 \quad (6.32)$$

met eindvoorwaarde $H(T, P)$. De oplossing voor $V(t, P)$ op tijdstip $t = t_0 < T$ wordt dan gegeven door:

$$V(t_0, P) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t_0)} H(T, P) | \mathcal{F}(t_0) \right],$$

Hierbij wordt de verwachting genomen onder de $\mathbb{Q}$ -maat waarbij het proces P gedefinieerd wordt door:

$$dP(t) = \bar{\mu}(t, P)dt + \bar{\sigma}(t, P)dW(t), \text{ voor } t > t_0$$

Hoewel de PDV's en het prijsproces in het regime-switchingkader anders zijn, wordt er aangenomen dat de stelling ook in dit geval geldt. Dit betekent dat er in de volgende sectie prijspaden kunnen worden gesimuleerd met parameters onder de $\mathbb{Q}$ -maat, waarna vervolgens de pay-off op het eindtijdstip kan worden verdisconteerd naar het begintijdstip. Dit levert de optieprijs op t_0 .

7 Simulatie optieprijsen

In deze sectie zullen prijzen van call-opties onder het regime-switching model worden gesimuleerd met zowel de standaard Monte Carlo-methode als de methode van antithetische variabelen. Vervolgens zal er worden gekeken wat de invloed is van verscheidene parameters op de optieprijs. Ten slotte worden er waarden van de delta gesimuleerd en wordt er gekeken wat de invloed is van de waarden van de volatiteit in de verschillende regimes op de delta.

7.1 Prijsdynamiek

De prijzen die volgen uit het oplossen van (6.28) zijn de prijzen onder de risiconeutrale maat $\mathbb{Q}$. Onder deze maat wordt de prijsdynamiek van aardgas weergegeven door:

$$dP(t) = rP(t)dt + \sigma^{m(t)}P(t)d\tilde{B}(t) \quad (7.1)$$

$$dm(t) = (1 - m(t))dq_{01}(t) - m(t)dq_{10}(t) \quad (7.2)$$

met:

$$dq_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{met kans } \lambda_{ij}dt \\ 0 & \text{met kans } 1 - \lambda_{ij}dt \end{cases} \quad (7.3)$$

Hieruit blijkt dat de driftterm, zoals gezien bij het simuleren van historische prijspaden ((3.39)) onder de $\mathbb{P}$ -maat, niet voorkomt in het simuleren van prijspaden onder de $\mathbb{Q}$ -maat. Zoals te zien worden de Poisson-intensiteiten $\lambda_{ij}(P, t)$ met $i, j \in \{0, 1\}$ constant verondersteld. De risiconeutrale rente r wordt gelijkgenomen aan de overnight rate van 26 juni 2015: 0.124%.

7.2 Prijzen van Europese optie met Monte Carlo

Het prijzen van een optie gebeurt met de Monte Carlo methode [24]. In dit geval wordt een Europese call beschouwd. Er worden M prijspaden gesimuleerd volgens (7.1). Vervolgens wordt voor elk pad de optiewaarde bepaald en het gemiddelde genomen. Anders gezegd kan de t_0 -prijs van de optie kan worden bepaald door het berekenen van:

$$V(t_0, P) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t_0)} \max(P(T) - E, 0) \right] \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_i \quad (7.4)$$

Hierbij geeft $\max(P(T) - E, 0)$ de pay-off van een Europese call weer en V_i de optiewaarde voor pad i . Om uitspraken te doen over de nauwkeurigheid van de geschatte optieprijs met behulp van de Monte Carlo-methode, kan een betrouwbaarheidsinterval worden opgesteld.

Stel dat er een stochast X wordt beschouwd met onbekende verwachting $\mathbb{E}[X] = a$ en variantie $\text{Var}[X] = b$. Als $X_1, X_2, \dots, X_M$ onafhankelijke stochasten zijn met dezelfde verdeling als X , dan is de verwachting dat:

$$a_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \quad (7.5)$$

een goede benadering geeft van a . Uit de wet van de grote aantallen volgt dat (7.5) convergeert naar de onbekende verwachting a met kans 1 wanneer $M \rightarrow \infty$. De dit betekent dat de schatter a_M zuiver is:

$\mathbb{E}[a_M] = a$. Een schatter voor de variantie wordt gegeven door:

$$b_M^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - a_M)^2 \quad (7.6)$$

De centrale limietstelling geeft dat $\sum_{i=1}^M a_M \sim N(Ma, Mb^2)$. Hieruit volgt dat $a_M - a \sim N(0, \frac{b^2}{M})$. De fout die wordt gemaakt bij het schatten van de optiewaarde op deze manier is van grootte $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$. Een 95% betrouwbaarheidsinterval wordt dan gegeven door:

$$P\left(a - \frac{1.96b}{\sqrt{M}} \leq a_M \leq a + \frac{1.96b}{\sqrt{M}}\right) = 0.95 \quad (7.7)$$

Wanneer a_M door a wordt vervangen en b door b_M , dan valt de onbekende waarde a met 95% kans in het interval:

$$\left[a_M - \frac{1.96b_M}{\sqrt{M}}, a_M + \frac{1.96b_M}{\sqrt{M}}\right]. \quad (7.8)$$

De grootte van het betrouwbaarheidsinterval neemt af met de inverse wortel van het aantal replicaties M . Om het betrouwbaarheidsinterval 10 keer zo klein te maken, zijn er dus 100 keer zoveel replicaties nodig.

In het vervolg zullen eerst M prijspaden worden gesimuleerd volgens (7.1). Vervolgens wordt voor elk pad de optiewaarde bepaald volgens (7.4). Hiervan wordt het gemiddelde a_M berekend. Vervolgens wordt ook de variantie per prijspad berekend en het betrouwbaarheidsinterval opgesteld volgens (7.8). De halve breedte van het betrouwbaarheidsinterval wordt weergegeven door $\frac{1.96b_M}{\sqrt{M}}$.

7.3 Antithetische variabelen

Om de efficiëntie van de berekeningen te verbeteren kan er gebruik worden gemaakt van de methode van antithetische variabelen [24]. Deze methode wordt een variantie-reducerende methode genoemd. Zoals gezien wordt er bij het simuleren van de prijspaden gebruik gemaakt van een rij $N(0, 1)$ verdeelde stochastische variabelen: $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_{N+1}\}$. Vervolgens is de optiewaarde berekend door het gemiddelde over M paden te nemen van de verdisconteerde pay-offs. Bij de antithetische variabelen worden er prijspaden gesimuleerd die gebruik maken van $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_{N+1}\}$ en paden die gebruik maken van $\{-Z_0, -Z_1, \dots, -Z_{N+1}\}$. Voor beide gevallen worden de M optiewaardes bepaald: V_i en V_i^{ant} voor $i = 1, 2, \dots, M$. Vervolgens wordt het gemiddelde genomen van deze waardes: $\bar{V}_i = \frac{1}{2}(V_i + V_i^{ant})$ en wordt zo de optiewaarde berekend: $a_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{V}_i$.

7.4 Resultaten

In de sectie worden de resultaten besproken van het berekenen van de optiewaardes onder het regime-switching model. Voor zowel de standaard Monte Carlo methode als de methode van antithetische variabelen worden deze waardes berekend: V en V_{ant} . Steeds wordt ook de helft van de breedte van de betrouwbaarheidsintervallen weergegeven: hb en hb_{ant} . Er zal onderzocht worden wat de invloed is van de verscheidene parameterwaardes op de optieprijs. De optiewaardes worden steeds bepaald voor verschillende aantallen replicaties M . Het beginregime is in alle gevallen regime 0 en er wordt aangenomen dat er maar één keer wordt gewisseld van regime. Dit betekent dat $\lambda_{10} = 0$. Verder wordt er gebruik gemaakt van $N = 10^3$ tijdstappen. In alle gevallen wordt ook de Black-Scholes optieprijs ter vergelijking

weergegeven. Voor het berekenen hiervan is gebruik gemaakt is van de gemiddelde volatiliteit over 10^4 prijspaden. Er is gebruik gemaakt van dit empirische gemiddelde, omdat bij de auteur niet bekend is of uit de gekozen waarden van σ^0 , σ^1 en de Poisson-intensiteiten de gemiddelde volatiliteit kan worden berekend.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.0131	0.0177	0.0161	0.0171	0.0167
V_{anti}	0.0159	0.0172	0.0168	0.0170	
hb	0.0067	0.0036	0.0023	0.0011	
hb_{anti}	0.0060	0.0025	0.0017	0.0008	

Tabel 2: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.2 = \sigma^1$ voor $\lambda_{01} = 0.35$ en $\lambda_{01} = 0.1$.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.2816	0.3120	0.2932	0.2955	0.2923
V_{anti}	0.2642	0.2954	0.2914	0.2996	
hb	0.1107	0.0588	0.0415	0.0181	
hb_{anti}	0.0759	0.0380	0.0295	0.0132	

Tabel 3: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.35$.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.4364	0.4709	0.4515	0.4577	0.4704
V_{anti}	0.4184	0.4552	0.4515	0.4607	
hb	0.1203	0.0628	0.0441	0.0193	
hb_{anti}	0.0813	0.0404	0.0310	0.0139	

Tabel 4: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = E = 1$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.35$.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.7517	0.7735	0.7553	0.7634	0.7556
V_{anti}	0.7274	0.7553	0.7539	0.7646	
hb	0.1268	0.0655	0.0460	0.0202	
hb_{anti}	0.0828	0.0411	0.0313	0.0141	

Tabel 5: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 > E = 0.3$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.35$.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.1169	0.1517	0.1293	0.1310	0.1092
V_{anti}	0.1395	0.1452	0.1363	0.1358	
hb	0.0598	0.0396	0.0237	0.0106	
hb_{anti}	0.0578	0.0266	0.0209	0.0094	

Tabel 6: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.1$.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.2748	0.3179	0.2935	0.2972	0.3056
V_{anti}	0.2961	0.3107	0.3015	0.3005	
hb	0.0682	0.0428	0.0260	0.0116	
hb_{anti}	0.0618	0.0284	0.0220	0.0098	

Tabel 7: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = E = 1$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.1$.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.7104	0.7485	0.7227	0.7274	0.7123
V_{anti}	0.7263	0.7383	0.7305	0.7293	
hb	0.0741	0.0449	0.0277	0.0124	
hb_{anti}	0.0617	0.0283	0.0220	0.0098	

Tabel 8: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 > E = 0.3$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = 0.1$.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.2442	0.2780	0.2629	0.2701	0.2666
V_{anti}	0.2387	0.2682	0.2646	0.2709	
hb	0.0894	0.0471	0.0321	0.0143	
hb_{anti}	0.0594	0.0311	0.0226	0.0101	

Tabel 9: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.3$, $\sigma^1 = 0.7$ en $\lambda_{01} = 0.35$.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.1312	0.1656	0.1483	0.1537	0.1465
V_{anti}	0.1498	0.1608	0.1546	0.1560	
hb	0.0550	0.0327	0.0195	0.0089	
hb_{anti}	0.0454	0.0218	0.0159	0.00071	

Tabel 10: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 < E = 2$, $\sigma^0 = 0.3$, $\sigma^1 = 0.7$ en $\lambda_{01} = 0.1$.

Uit de optiewaarden in alle tabellen kan ten eerste worden opgemerkt dat naar mate het aantal replicaties m keer zo groot wordt, het betrouwbaarheidsinterval $\sqrt{m}$ zo klein wordt. Dit komt overeen met wat er wordt verwacht. Zoals te zien zijn de betrouwbaarheidsintervallen kleiner bij de methode van antithetische variabelen dan bij de standaard Monte Carlo-methode.

In Tabel 2 worden call-optiewaarden gesimuleerd waarbij de volatiliteit in beide regimes gelijk is: $\sigma^0 = \sigma^1 = 0.2$. Zoals gezien in (7.1) is bij het prijsproces onder de $\mathbb{Q}$ -maat de driftterm niet verschillend in de verschillende regimes. Wanneer de volatiliteit in beide regimes hetzelfde wordt verondersteld, wordt er dus verwacht dat de waarde van λ_{01} geen invloed heeft op de optieprijs. Immers, zowel de drift als volatiliteit verandert niet bij een regimewisseling. Dit zien we terug in de gesimuleerde waarden uit Tabel 2. Deze waarden gelden namelijk zowel voor $\lambda_{01} = 0.35$ als voor $\lambda_{01} = 0.1$. Ook is de verwachting dat de optiewaarde bij $M = 5 \cdot 10^4$ paden ongeveer overeenkomt met de Black-Scholes optieprijs, die een constante volatiliteit veronderstelt in het GBM-proces. Dit is inderdaad het geval.

In Tabel 3 wordt een call-optie beschouwd die out-of-the-money is: $P_0 < E$. Dit betekent dat de prijzen moeten stijgen richting E om er voor te zorgen dat de call-optie in-the-money wordt. In Tabel 4 wordt een call-optie beschouwd die at the money is: $P_0 = E$. Te verwachten is dat de optieprijs in dit geval hoger is dan in het geval van out-of-the-money, omdat de optie in dit geval eerder in-the-money wordt. Dit blijkt ook uit de optieprijzen die worden verkregen. In Tabel 5 wordt een call-optie beschouwd die in-the-money is: $P_0 > E$. Zoals verwacht is de berekende optiewaarde hoger dan in de vorige twee gevallen. Zoals te zien komt deze Black-Scholes prijs goed overeen met de gevonden optieprijzen bij $M = 5 \cdot 10^4$ replicaties.

In Tabel 6, 7 en 8 worden dezelfde parameters gebruikt als in Tabel 2, 3 en 4 maar nu wordt er gebruik gemaakt van $\lambda_{01} = 0.1$. De Poisson-intensiteit λ_{01} is in dit geval lager dan in Tabel 3, 4 en 5. Dit betekent dat de kans kleiner is dat het prijsproces wisselt van regime 0 naar 1. Gemiddeld gezien over een groot aantal paden zal de wissel dus later plaatsvinden. Dit betekent dat het prijsproces langer in regime 0 blijft. Dit regime heeft een lagere volatiliteit dan regime 1. Het prijsproces blijft dus een langere tijd in een regime met een lagere volatiliteit. Dit betekent voor degene die de optie verkoopt dat er minder risico wordt genomen, omdat er minder onzekerheid is over de toekomstige prijzen. Om deze reden wordt er een lagere optieprijs verwacht. Dit zien we dan ook terug in de optiewaarden; de waarden uit Tabel 6, 7 en 8 zijn lager dan die in respectievelijk Tabel 3, 4 en 5.

In Tabel 9 en 10 worden Tabel 2 en Tabel 6 gereproduceerd, maar met een kleine verschil in volatiliteit tussen de twee regimes: $\sigma^0 = 0.3$ en $\sigma^1 = 0.7$. Dit levert een kleiner verschil in de optiewaarden dan in Tabel 2 en Tabel 6 voor de verschillende waarden van λ_{01} . Ook is het verschil tussen de optiewaarde bij $M = 5 \cdot 10^4$ replicaties en de Black-Scholes prijs is kleiner in dit geval dan bij Tabel 2 en 6. Dit is ook wat er wordt verwacht, omdat dichter in de buurt komt bij een constante volatiliteit.

In Tabel 11 worden de optiewaarden behorend bij de data uit hoofdstuk 4 weergegeven. Er wordt hierbij gebruik gemaakt van de gekalibreerde parameterwaarden uit sectie 5. Dit geeft een optiewaarde van $V_{anti} = 0.3818$ bij een strike van $E = 0.4$. Bij strikewaarden van respectievelijk $E = 0.54$ (at-the-money) en $E = 0.65$ (out-of-the-money) worden optiewaarden van respectievelijk $V_{anti} = 0.3475$ en $V_{anti} = 0.3349$ gevonden.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.3980	0.3677	0.3714	0.3855	
V_{anti}	0.3948	0.3641	0.3709	0.3818	
hb	0.2341	0.0558	0.0374	0.0204	
hb_{anti}	0.1318	0.0342	0.0256	0.0115	

Tabel 11: Optiewaarden met parameters: $T = 287$, $P_0 = 0.54 > E = 0.4$, $\sigma^0 = 0.0711$, $\sigma^1 = 0.1209$ en $\lambda_{01} = 1/355$.

In Tabel 12 worden dezelfde waardes als in Tabel 7 gebruikt, maar nu geldt dat $\lambda_{01} = \lambda_{10} = 0.2$. Dit betekent dat nu wel de mogelijkheid bestaat dat het prijsproces weer teruggaat naar regime 0 en daarna eventueel weer teruggaat naar regime 1 etcetra.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.7198	0.7447	0.7321	0.7456	0.7313
V_{anti}	0.6938	0.7351	0.7265	0.7448	
hb	0.0834	0.0482	0.0329	0.0159	
hb_{anti}	0.0470	0.0311	0.0206	0.0092	

Tabel 12: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 > E = 0.3$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$ en $\lambda_{01} = \lambda_{10} = 0.2$.

Er blijkt dat de gevonden optieprijs bij $M = 5 \cdot 10^4$ in dit geval ongeveer gelijk is aan het gemiddelde van de Black-Scholesprijs over de gehele looptijd met volatiliteit $\sigma^0 = 0.2$ en de Black-Scholesprijs met volatiliteit $\sigma^1 = 0.8$. Er geldt namelijk dat de optieprijs bij $M = 5 \cdot 10^4$ gelijk is aan 0.7448 met een 95%-betrouwbaarheidsinterval van $[0.7264, 0.7632]$ en voor de Black-Scholes prijzen geldt: $\frac{V_{\sigma^1}^{bs} + V_{\sigma^2}^{bs}}{2} = \frac{0.7021 + 0.8185}{2} = 0.7603$.

In Tabel 13 wordt Tabel 12 gereproduceerd, maar met een grotere waarde van λ_{10} . Dit betekent dat de kans groter is dat het prijsproces weer teruggaat naar regime 0. Aangezien regime 0 een lagere volatiliteit heeft dan regime 1, wordt er een lagere optieprijs verwacht dan in Tabel 12. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn.

	$M = 10^3$	$M = 5 \cdot 10^3$	$M = 10^4$	$M = 5 \cdot 10^4$	Black-Scholes
V	0.7113	0.7231	0.7156	0.7253	0.7132
V_{anti}	0.6960	0.7175	0.7140	0.7230	
hb	0.0612	0.0318	0.0218	0.0101	
hb_{anti}	0.0312	0.0184	0.0124	0.0056	

Tabel 13: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1 > E = 0.3$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$, $\lambda_{01} = 0.2$ en $\lambda_{10} = 0.6$.

Er is ook onderzocht wat de invloed is op de optieprijs wanneer de Poisson-intensiteiten zeer groot worden gekozen. Wanneer in het geval van Tabel 13 de Poisson-intensiteit λ_{01} zeer groot werd gekozen, wordt de Black-Scholes optieprijs bij volatiliteit σ^1 gevonden: $V_{anti} = 0.8286$ met een 95%-

betrouwbaarheidsinterval van $[0.736, 0.9212]$ en $V_{\sigma^0}^{bs} = 0.8185$. Dit is een logisch gevolg, want een zeer grote waarde van λ_{01} betekent dat bij elke tijdsstap zal worden over gegaan naar regime 1. Evenzo wordt voor een zeer grote waarde van λ_{10} de Black-Scholes optieprijs bij volatiliteit σ^0 gevonden: $V_{anti} = 0.7026$ met een 95%-betrouwbaarheidsinterval van $[0.6944, 0.7108]$ en $V_{\sigma^1}^{bs} = 0.7021$. Wanneer beide Poisson-intensiteiten zeer groot worden gekozen is de optieprijs het gemiddelde van de Black-Scholesprijs bij volatiliteit σ^0 en de Black-Scholesprijs bij volatiliteit σ^1 : $V_{anti} = 0.7659$ met een 95%-betrouwbaarheidsinterval van $[0.7287, 0.8011]$ en $V_{\sigma^0}^{bs} = 0.7021$ en $V_{\sigma^1}^{bs} = 0.8185$. Een logische verklaring hiervoor is dat het proces zich in dit geval de helft van de tijd in regime 0 bevindt en de helft van de tijd in regime 1. Er vindt namelijk bij elke tijdsstap een regimewisseling plaats.

Ook is onderzocht wat de invloed is van het omdraaien van de volatiliteiten in de twee regimes op de optieprijs wanneer de Poisson-intensiteiten zeer groot worden gekozen. Voor het geval $\sigma^0 = 0.2$ en $\sigma^1 = 0.8$ was de optieprijs bij $M = 5 \cdot 10^4$ paden gelijk aan $V_{anti} = 0.7649$ met een 95%-betrouwbaarheidsinterval van $[0.7287, 0.8011]$ gevonden en voor het geval $\sigma^1 = 0.8$ en $\sigma^0 = 0.2$ werd een optieprijs van $V_{anti} = 0.7659$ met een 95%-betrouwbaarheidsinterval van $[0.7283, 0.8035]$ gevonden. Dit komt overeen met wat er wordt verwacht omdat bij elke tijdsstap een regimewisseling optreedt en het proces zich dus even lang in regime 0 als 1 bevindt.

Geconcludeerd kan worden dat de Poisson-intensiteit de optieprijs beïnvloedt via de volatiliteit. Wanneer λ_{01} er voor zorgt dat het prijsproces langer in een regime blijft met lage volatiliteit, zorgt dit voor een lagere optieprijs. Wanneer λ_{01} er voor zorgt dat het prijsproces langer in een regime blijft met hoge volatiliteit, zorgt dit voor een hogere optieprijs. Opgemerkt kan worden dat aangenomen is dat de Poisson-intensiteiten constant zijn. In realiteit zijn deze intensiteiten niet constant en fluctueren ten gevolge van marktveranderingen.

Zoals gezien wordt een investeerder die een long positie neemt in een regime-switching optie op gas zowel blootgesteld aan mogelijke prijsveranderingen van het gas als een mogelijke regimesprong in volatiliteit. Wat betreft de regimesprong wil de investeerder gecompenseerd worden voor het risico dat het prijsproces zal overgaan in een regime met een lage volatiliteit. Evenzo willen investeerders die een short positie innemen in de optie gecompenseerd worden voor het risico dat het prijsproces zal switchen naar een regime met hoge volatiliteit. Zowel de volatiliteit van het regime waar het proces zich in bevindt op het moment van kopen/aankopen als de toekomstige eventuele verandering van volatiliteit dragen bij aan de optieprijs. De optieprijs die volgt uit het oplossen van het stelsel van vergelijkingen is de eerlijke prijs. Vanwege het extra risico van een mogelijke regimesprong, wordt er in alle gevallen een hogere prijs dan de Black-Scholesprijs gevonden.

7.5 Grieken: de delta

Zoals gezien speelt de partiële afgeleide van de optieprijs naar de gasprijs een belangrijke rol in het hedgingproces. Dit wordt ook wel de delta genoemd: $\Delta := \frac{\partial V}{\partial P}$. De waarde van de delta weergeeft de kans dat de optie in-the-money is op expiratie [27].

Met gebruik van een Taylorontwikkeling en eindige differentie benadering voor een kleine waarde van h

kan dit worden geschreven als:

$$\frac{\partial V(P, t)}{\partial P} = \frac{V(P + h, t) - V(P, t)}{h} + (h) \approx \frac{V(P + h, t) - V(P, t)}{h} \quad (7.9)$$

Om waarden van de delta te simuleren op het begintijdstip wordt er gebruik wordt er Monte Carlo toegepast op het volgende probleem:

$$e^{-rT} \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\max(P(T) - E, 0) \text{ met } P(0) = P_0) - (\max(P(T) - E, 0) \text{ met } P(0) = P_0 + h)]}{h} \quad (7.10)$$

Toepassing van de Monte Carlo methode geeft:

$$\frac{\partial V}{\partial P} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{V_i^h - V_i}{h} \quad (7.11)$$

Hierbij weergeven V_i^h met $i = 1, 2, \dots, M$ de optieprijsen behorend bij de paden met $P(0) = P_0 + h$ en V_i met $i = 1, 2, \dots, M$ de optieprijsen behorend bij de paden met $P(0) = P_0$. Voor de optieprijs $V(P + h, t)$ worden dus dezelfde paden als voor $V(P, t)$ gebruikt, maar dan met een startwaarde die h is opgeschoven.

In onderstaande tabellen worden de resultaten weergegeven van het simuleren van waarden van de delta voor een Europese call onder het regime-switching model. Steeds wordt de optiewaarde volgens (7.11) weergegeven bij $M = 5 \cdot 10^4$ paden. Er wordt gebruik gemaakt van $\lambda_{01} = 0.004$ en $\lambda_{10} = 0$. Dit betekent dat de regimeverandering gemiddeld gezien op de helft plaats vindt. Evenals in de vorige gevallen is gecontroleerd dat de betrouwbaarheidsintervallen kleiner worden naarmate het aantal replicaties M toeneemt.

	$E = 0.4$	$E = 0.8$	$E = 1.2$	$E = 1.8$	$E = 2$	$E = 5$	$E = 10$
Δ	0.9990	0.7753	0.4439	0.1551	0.1071	0.0037	0.0011

Tabel 14: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1$, $\sigma^0 = 0.2$, $\sigma^1 = 0.8$, $\lambda_{01} = 0.004$, $\lambda_{10} = 0$ en $M = 5 \cdot 10^4$ paden.

	$E = 0.4$	$E = 0.8$	$E = 1.2$	$E = 1.8$	$E = 2$	$E = 5$	$E = 10$
Δ	0.9993	0.8763	0.2670	0.0151	0.0096	0.0020	0

Tabel 15: Optiewaarden met parameters: $T = 5$, $P_0 = 1$, $\sigma^0 = 0.1$, $\sigma^1 = 0.7$, $\lambda_{01} = 0.004$, $\lambda_{10} = 0$ en $M = 5 \cdot 10^4$ paden.

In Tabel 14 en 15 is er onderzocht wat de invloed van de strike E op de delta is. Uit Tabel 13 is op te maken dat naar mate de strike E groter wordt de waarde van Δ afneemt. Dit is logisch te verklaren, omdat de delta de kans weergeeft dat de optie in-the-money eindigt. Naar mate de strike groter wordt neemt deze kans af. In Tabel 15 wordt er gebruik gemaakt van lagere waarden van de volatiliteiten in de regimes. Ten opzichte van de waarden in Tabel 14 is voor de in-the-money gevallen ($E = 0.4$ en $E = 0.8$) de delta groter geworden, terwijl voor de out-of-the-money gevallen de delta juist kleiner geworden is. Bij een grotere volatiliteit wordt de delta dus groter voor out-of-the-money opties en de delta kleiner voor in-the-money opties. Dit komt overeen met wat er wordt verwacht, omdat voor out-of-the-money opties de kans bij een grotere volatiliteit de kans toeneemt om in-the-money te eindigen terwijl voor in-the-money opties de kans juist kleiner wordt.

8 Conclusie en discussie

Voor er met het wiskundig gedeelte van dit onderzoek is gestart, is er eerst onderzoek gedaan naar aardgas in het algemeen. Er is besproken wat de samenstelling van gas is, hoe het ontstaan is, voor welke doeleinden het wordt gebruikt, hoe het wordt getransporteerd en opgeslagen, wat andere vormen van aardgas zijn en wat invloedrijke factoren zijn op het prijsverloop van de gasprijzen. Hieruit werd geconcludeerd dat factoren als weersomstandigheden, de economie en incidentele gebeurtenissen invloedrijk zijn op het verloop van de prijzen.

Met deze achtergrondkennis is er vervolgens onderzoek gedaan naar enkele modellen die eventueel de prijsontwikkeling van gas kunnen beschrijven. Hiertoe zijn de geometrisch Brownse beweging, het mean-reverting proces en een regime-switching model onderzocht. Dit laatste model combineert het GBM-model en het MR-model. Vervolgens is een analyse uitgevoerd op een dataset met gasprijzen. Om het prijspad te bestuderen is de verdeling van de logreturns onderzocht. Met behulp van een QQ-plot en het resultaat van het uitvoeren van de KS-test, is geconcludeerd dat de logreturns niet normaal verdeeld zijn over de gehele tijdsperiode. Dit betekent dat de GBM geen goed model is om het prijsverloop te beschrijven. Uit een plot van de prijzen tegen de tijd en een plot van de logreturns tegen de tijd, bleek dat er een periode was met een relatief lage volatiliteit en een met een relatief hoge volatiliteit. Hierdoor ontstond het vermoeden dat het regime-switchingmodel met twee regimes van toepassing kan zijn op het verloop van de prijzen. Aan de hand van de historische volatiliteit is de dataset vervolgens opgedeeld in twee periodes waarin een verschillend stochastisch proces wordt gevolgd. In een vervolg zou er meer onderzoek kunnen worden gedaan naar een optimale methode om te bepalen waar de regimeverandering plaatsvindt. Immers, in het regime-switching model kan niet alleen de volatiliteit verschillen per regime, maar ook de drift. Vervolgens zijn ook voor deze afzonderlijke periodes de logreturns onderzocht. Hieruit is gebleken dat de logreturns normaal verdeeld zijn in de twee periode en dat het GBM-model dus van toepassing kan zijn. In de eerste periode zijn de logreturns niet normaal verdeeld. Uit een plot van de prijzen tegen de tijd over deze periode bleek dat de prijzen een constant niveau naderden. Omdat er geen goede test bekend is bij de auteur om te onderzoeken of data een MR-model volgen, is er aangenomen dat de prijzen in deze periode een MR-model volgen. Hieruit kon dus worden geconcludeerd dat de MRGBM-variant van het regime-switching model van toepassing kan zijn op het prijsverloop van de dataset met gasprijzen. Opgemerkt kan worden dat hoewel de logreturns in de tweede periode normaal verdeeld zijn, het logischer zou zijn wanneer ook op deze periode een MR-proces van toepassing zou zijn. Er is immers een marktmechanisme van vraag en aanbod dat niet zomaar verandert. Het zou dus logischer zijn om in de tweede periode ook een MR-proces te verwachten, maar dan met een andere drift, volatiliteit en mean-reversion rate. Echter, voor het vervolg van het onderzoek was het interessanter wanneer er twee verschillende soorten processen van toepassing zijn op het prijsverloop, dus is de MRGBM-variant van het regime-switching gebruikt.

Vervolgens zijn er prijspaden gesimuleerd volgens het GBM-model, het OU-proces en het regime-switching model. De stochastische differentiaalvergelijkingen van deze modellen zijn gesimuleerd met het Euler-Maruyama schema. Zo kon er worden bekeken wat de invloed is van de verscheidene parameters op het gedrag van de prijspaden. Ook konden simulaties van exacte uitdrukkingen van het prijsproces worden vergeleken met benaderingen volgens het Euler-Maruyama schema en konden exacte verwachtingen en

varianties worden vergeleken met steekproefverwachtingen en -varianties. Voor het regime-switching model zijn deze exacte uitdrukkingen voor de verwachting en variantie afgeleid. Zo konden de numerieke resultaten worden gevalideerd en kon er worden geconcludeerd dat de prijspaden juist werden gesimuleerd. Uit het feit dat de validatie goed ging voor het OU-proces, wordt geconcludeerd dat dit dan ook zo is voor het MR-proces. Vervolgens is de MRGBM-variant gekalibreerd op onze dataset. Dit is gedaan door naar de momenten te kijken van de (log)returns. Er is hierbij geen seizoensgebondenheid meegenomen. Het optimaliseren van de kalibraties zou een aanbeveling voor vervolgonderzoek zijn. Ook is het gekalibreerde model gevalideerd aan de hand van gereconstrueerde gasprijzen.

Nadat er uitgebreid onderzoek gedaan is naar modellen om het prijsverloop van gas te beschrijven, is er gekeken naar het prijzen van opties onder het regime-switching model. Er is een stelsel van vergelijkingen afgeleid voor het prijzen van een optie met gas als onderliggend product. Hierbij volgen de gasprijzen het besproken regime-switching model. De afleiding ging met behulp van hedge-argumenten. Er moest zowel worden gehedged tegen mogelijke gasprijzeverandering als een mogelijk regimesprong. Het stelsel van vergelijkingen is niet exact opgelost. Er is aangenomen dat de Feynmann-Kac stelling van toepassing is op de waardering van dit soort opties. In vervolgonderzoek zou kunnen worden bekeken of dit kan worden aangetoond.

Vervolgens zijn met dit resultaat optieprijsen gesimuleerd onder het regime-switching model. De prijsdynamiek is in dit geval onder de risiconeutrale maat, waardoor alleen de volatiliteit verschilt per regime. Bij de simulaties is er gebruik gemaakt van twee methodes: de standaard Monte Carlo-methode en de methode van antithetische variabelen. Deze laatste methode reduceert de variantie en heeft daardoor kleinere betrouwbaarheidsintervallen als resultaat. Ter vergelijking zijn de Black-Scholesprijzen gegeven, waarbij er gebruik is gemaakt van de gemiddelde volatiliteit over een groot aantal paden. De Poisson-intensiteiten werden constant gekozen. Uiteindelijk bleek dat de Poisson-intensiteit, die de waarschijnlijk weergeeft van een regime-switch, samenhangt met de optieprijs via de volatiliteit. Wanneer de Poisson-intensiteiten er voor zorgen dat het prijsproces zich relatief lang in een regime met lage volatiliteit bevindt, zorgt dit voor een lagere optieprijs en vice versa. Wanneer er regimes werden beschouwd met dezelfde volatiliteit, werd zoals verwacht dezelfde optieprijs gevonden als de Black-Scholes optieprijs. Het Black-Scholes model veronderstelt immers een onderliggend GBM-prijsproces met constante volatiliteit. Vervolgens is er voor verschillende strikes een waarde voor de optie behorend bij de data uit hoofdstuk 4 berekend met behulp van de gekalibreerde parameterwaardes uit hoofdstuk 5. Hierna is er onderzocht wat de invloed is van zeer grote waardes van de Poisson-intensiteiten op de optieprijs. Bij een zeer grote waarde van λ_{01} is de optieprijs gelijk aan de Black-Scholes prijs met volatiliteit σ^1 . Dit is een logisch gevolg, omdat deze grote waarde van λ_{01} er voor zorgt dat het prijsproces bij elke tijdsstap vrijwel zeker overgaat naar regime 1 of blijft in regime 1. Het prijsproces kan dus worden vergeleken met een GBM-proces met constante volatiliteit σ^1 . Evenzo werd bij een zeer grote waarde van λ_{10} gevonden dat de optieprijs gelijk is aan de Black-Scholes prijs met volatiliteit σ^0 en wanneer beide Poisson-intensiteiten zeer groot worden gekozen, is de optieprijs gelijk aan het gemiddelde van de Black-Scholesprijzen met volatiliteit σ^0 en σ^1 . In alle gevallen bleek de waarde van de regime-switchingoptie groter te zijn dan de Black-Scholeswaarde. Dit is te verklaren doordat bij het waarderen van opties onder het regime-switching model het extra risico van een mogelijke regimesprong moet worden genomen, wat resulteert in een hogere optieprijs. Het variëren

van de Poisson-intensiteiten in de tijd is een aanbeveling voor vervolgonderzoek.

Ten slotte is onderzoek gedaan naar de delta van de optie. Hieruit werd geconcludeerd dat naar mate de strike van de optie groter wordt, de waarde van de delta afneemt. Bij een groter worden volatiliteit wordt de waarde van de delta groter voor out-of-the-money opties groter en voor in-the-money opties kleiner. Dit is te verklaren doordat de delta de kans weergeeft dat een optie in-the-money eindigt op expiratie.

Referenties

- [1] Center for climate and energy solutions. *Leveraging natural gas to reduce greenhouse gas emissions*, 2013.
- [2] J. G. Speight. *Natural Gas; A basic handbook*. Gulf Publishing Company, 2007.
- [3] <http://www.iea.org/aboutus/faqs/gas/>
- [4] [https://nl.wikipedia.org/wiki/Reservoir_\(geologie\)](https://nl.wikipedia.org/wiki/Reservoir_(geologie))
- [5] http://www.ucsusa.org/clean_energy/our-energy-choices/coal-and-other-fossil-fuels/uses-of-natural-gas.html#.VVwjTZftmko
- [6] A. Chambers. *Natural Gas & Electric Power*. PennWell, 1999.
- [7] R. L. Busby. *Natural Gas in nontechnical language*. Institute of Gas Technology, 1999.
- [8] <http://nl.wikipedia.org/wiki/Fraccen>
- [9] <http://www.robeco.com/nl/professionals/visie-en-themas/artikelen/2013/wie-worden-de-winnaars-van-de-schaliegas-boom.jsp>
- [10] <https://milieudefensie.nl/schaliegas/algemeen>
- [11] http://www.eia.gov/dnav/ng/ng_pri_sum_dcu_nus_m.htm
- [12] http://www.eia.gov/dnav/ng/tbldefs/ng_prod_whv_tbldef2.asp
- [13] <https://www.kent.ac.uk/smsas/personal/lb209/files/notes1.pdf>
- [14] <http://www.stat.berkeley.edu/~peres/bmbook.pdf>
- [15] <http://www.columbia.edu/~ww2040/4701Sum07/lec0813.pdf>
- [16] <https://commoditymodels.files.wordpress.com/2010/02/estimating-the-parameters-of-a-mean-reverting-ornstein-uhlenbeck-process1.pdf>
- [17] J.M.Steele. *Stochastic Calculus and Finacial Applications* Springer, 2000.
- [18] Z. Chen, P. A. Forsyth. *Implications of a Regime-Switching Model on Natural Gas Storage Valuation and Optimal Operation*, 2007.
- [19] S.E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model* Springer, 2004.
- [20] <http://www.caam.rice.edu/~cox/stoch/dhigham.pdf>
- [21] <https://www.math.ohiou.edu/courses/math3600/lecture21.pdf>
- [22] J.A. Rice. *Mathematical Statistics and Data Analysis* Cengage Learning, 2007.
- [23] M. Mielkie. *A Options Pricing and Hedging in a Regime-Switching Volatility Model*, 2014
- [24] D.J. Higham *An introduction to Financial Option Valuation*. Cambridge University Press, 2004.

- [25] S.E. Shreve *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models* Springer, 2008.
- [26] C.W. Oosterlee, Lech A. Grezlak, Fang Fang. *Efficient Valuation and Computation in Finance*.
- [27] <http://www.macroption.com/delta-calls-puts-probability-expiring-itm/>