

THEORIE VAN HET TEKTONISCH-  
GRAVIMETRISCH ONDERZOEK.

# THEORIE VAN HET TEKTONISCH- GRAVIMETRISCH ONDERZOEK.

---

## PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR  
IN DE TECHNISCHE WETENSCHAP AAN DE TECH-  
NISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT, OP GEZAG VAN  
DEN RECTOR MAGNIFICUS, IR. N. C. KIST, HOOG-  
LEERAAR IN DE AFDEELING DER WEG- EN WATER-  
BOUWKUNDE, VOOR EENE COMMISSIE UIT DEN  
SENAAT TE VERDEDIGEN OP WOENSDAG 21 MAART  
1928, DES NAMIDDAGS TE 3 UUR

DOOR

JOHANNES ANTONIUS ALPHONSUS MEKEL,  
MIJNINGENIEUR,  
GEBOREN TE BEDUM.

---



GEDRUKT BIJ DE TECHNISCHE BOEKHANDEL EN DRUKKERIJ  
J. WALTMAN JR. — DELFT 1928.

1020. 638

*Bij de voltooiing van dit proefschrift is het mij eene aangename plicht dank te zeggen aan allen die tot mijne wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen en in het bijzonder aan U, Hoogleraren der Mijnbouwkundige Afdeeling der Technische Hoogeschool.*

*U, Hooggeleerde VAN NES en Hooggeleerde BROUWER, hooggeachte Promotoren, dank ik ten zeerste voor Uwe aanmoediging en voor de groote bereidwilligheid en hulp mij bij het samenstellen van dit proefschrift betoond. Uwe belangstelling stel ik te meer op prijs daar ik niet het voorrecht had tot Uwe leerlingen te mogen behooren.*

*Hooggeleerde MOLENGRAAFF, Uwe bezielende voordrachten hebben bij mij voor het eerst liefde gewekt tot de geologische wetenschappen en deden mij het besluit vatten mij na de voltooiing mijner studiën aan de praktische beoefening dezer wetenschappen te wijden. Voor Uwe leiding gedurende den tijd mijner studie, welke voor mij van de hoogste waarde is geweest, breng ik U mijnen hartelijken dank.*

*Ook U, Hooggeleerde GRUTTERINK, dank ik zeer voor het vele dat ik van U heb mogen leeren bij de studie der onmisbare hulpwetenschappen der geologie.*

*Bij de metingen in de omgeving van Winterswijk hebt gij, waarde VAN LITH, mij met groote toewijding bijgestaan, waarvoor ik hier mijnen hartelijken dank uitspreek.*

*Ook Dr. P. TESCH dank ik ten zeerste voor de welwillendheid, waarmede hij mij de gegevens van verschillende boringen in het gebied van Winterswijk ten dienste stelde, en voor de vele waardevolle raadgevingen die ik van hem mocht ontvangen.*

*De in dit proefschrift voorkomende teekeningen werden alle vervaardigd door den Heer J. VAN EWIJK, die tevens de berekening van de meeste der uitgewerkte voorbeelden voor mij uitvoerde. Voor de groote hulp, welke hij mij daardoor heeft bewezen, breng ik hem mijnen oprechten dank.*

# INHOUD.

---

	Bl.
INLEIDING . . . . .	I
HOOFDSTUK I.	
Beteekenis der met de torsiebalans gemeten grootheden . . . . .	3
HOOFDSTUK II.	
De invloed van in eene richting onbegrensde lichamen . . . . .	9
HOOFDSTUK III.	
De invloed van begrensde lichamen . . . . .	40
HOOFDSTUK IV.	
Gravimetrisch onderzoek van den Zuidrand van den horst van Winterswijk . . . . .	73

---

## INLEIDING.

Gravimetrische metingen in de toegepaste geologie hebben ten doel door middel van de waargenomen gradienten en krommingsfactoren te geraken tot de kennis van den geologischen bouw van een bepaald gebied. De geologische interpretatie der verkregen resultaten is slechts mogelijk indien men de reacties kent die door de meest voorkomende structuren worden uitgeoefend. Door n.l. de verkregen resultaten te vergelijken met die welke voor bepaalde, veel voorkomende gevallen theoretisch zijn afgeleid, kan men zich een beeld vormen van den waarschijnlijksten tektonischen bouw. Het is dus in de eerste plaats noodig dat een geoloog beschikt over eenige formules voor gradienten en krommingsfactoren van eenvoudige mathematische lichamen waardoor de meest voorkomende geologische structuren als verschuivingen, anticlinalen etc. kunnen worden voorgesteld. De afleiding van de belangrijkste dezer formules werd het eerst door den schrijver gegeven in eene voorloopige mededeeling <sup>1)</sup>; in dit proefschrift zullen, behalve de boven vermelde, nog andere formules worden afgeleid terwijl bovendien de toepassing aan verschillende voorbeelden nader zal worden uitgewerkt.

Een opmerking van meer algemeenen aard moge hier nog worden gemaakt. De interpretatie van gravimetrische waarnemingen is meestal slechts terug te brengen tot een onbepaald probleem. In eenige eenvoudige gevallen zijn al de elementen van het lichaam, waarvan de invloed is gemeten, te berekenen indien men beschikt over krommen welke het verloop van de gradienten zoowel als van de krommingsfactoren in de verschillende punten aan de oppervlakte weergeven. Meestal echter treft men in de praktijk een van gravimetrisch standpunt vrij gecompliceerden bouw der lagen aan, terwijl bovendien de uit de waarnemingen geconstrueerde krommen zeer dikwijls onvoldoende nauwkeurig zijn en zich slechts tot kwalitatieve interpretaties leenen. Het is dan steeds mogelijk meer dan eene combinatie van lichamen te vinden, waarvan de theoretisch berekende gradienten en krommingsfactoren met een voldoende graad van nauwkeurigheid overeenstemmen met de praktisch verkregen resultaten. Het komt er dan op aan onder de verschillende theoretische mogelijkheden die te kiezen, welke het best in overeenstemming is met den geologisch waarschijnlijksten bouw van het gebied waarin de waarnemingen zijn verricht. Zonder eenige kennis van de algemeene geologie van een terrein is dan ook de geologische interpretatie van gravimetrische waarnemingen meestal zeer moeilijk zoo niet onmogelijk, of laat ten minste ruimte voor verschillende, geophysisch gelijkwaardige oplossingen en er mag dan hier ook wel den nadruk op worden gelegd dat de bewerking der gravimetrische resultaten steeds dient te geschieden door den geophysicus in nauwste samenwerking met den geoloog.

Is, bijv. uit boorresultaten, de diepte van een zekere laag in een bepaald punt bekend en kan het soortelijk gewicht van de gesteenten aan monsters worden bepaald, dan is het

---

<sup>1)</sup> De invloed van den geologischen bouw op de torsiebalans. De Ingenieur, 1926, 29.

dikwijls mogelijk uit de gravimetrische resultaten met zekerheid quantitative conclusies te trekken omtrent den geologischen bouw.

In het eerste hoofdstuk zal een kort resumé worden gegeven van de theorie der torsiebalans waarbij voornamelijk aandacht zal worden geschonken aan de beteekenis der waargenomen grootheden. In het tweede hoofdstuk zullen formules worden afgeleid voor den invloed van lichamen welke in ééne richting onbegrensd mogen worden verondersteld, terwijl in het derde hoofdstuk meer gecompliceerde gevallen zullen worden behandeld en formules zullen worden berekend voor begrensde lichamen. In het vierde hoofdstuk zullen dan als voorbeeld de resultaten worden uitgewerkt van metingen uitgevoerd over den rand van den Trias horst in het gebied van Winterswijk.

---

## HOOFDSTUK I.

### Beteekenis der met de torsiebalans gemeten grootheden.

De torsiebalans werd reeds in 1880 door R. v. EÖTVÖS geconstrueerd en de eerste uitvoerige publicatie waarin de theorie van het instrument werd uiteengezet dateert van 1896. <sup>1)</sup> Er verliep echter geruimen tijd vóór het nut van gravimetrische onderzoekingen in de toegepaste geologie werd ingezien en het is slechts gedurende de laatste vijf jaren dat de torsiebalans algemeen ingang heeft gevonden en als onontbeerlijk hulpmiddel bij het opsporen van petroleum en ertsen wordt erkend.

De theorie van de balans is niet alleen door v. EÖTVÖS, maar ook door vele andere auteurs uitvoerig uiteengezet en wordt derhalve bekend verondersteld.

De uitdrukking voor de visueel of photographisch afgelezen uitslag is:

$$n - n_0 = \frac{DK}{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right\} + \frac{2Dmlh}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha \right)$$

waarin  $U$  de potentiaal der zwaartekracht,  $\alpha$  de hoek welke de balansarm met de noordrichting maakt en  $\frac{DK}{\tau}$  en  $\frac{2Dmlh}{\tau}$  instrument constanten zijn.

Wij dienen ons nu eerst rekenschap te geven voor welk punt de afgeleiden van de potentiaal worden gemeten.

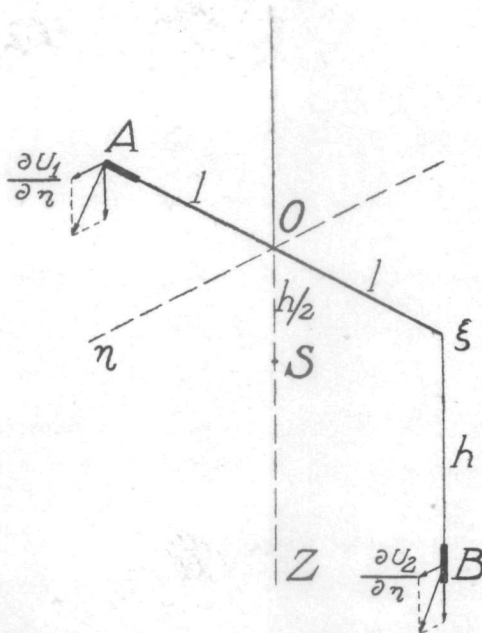


Fig. 1.

<sup>1)</sup> Annalen der Physik 59, 1896.

Indien door  $U_1$  en  $U_2$  de potentiaal in  $A$  en  $B$  (fig. 1) wordt aangeduid, en de balans, na tot rust gekomen te zijn over een hoek  $\varphi - \varphi_0$  is gedraaid, bestaat de betrekking:

$$ml \left( \frac{\partial U_2}{\partial \eta} - \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \right) = \tau (\varphi - \varphi_0)$$

welke gemakkelijk tot de algemeene formule voor de op de schaal afgelezen afwijking kan worden herleid.

Zij nu  $U$  de potentiaal in het punt  $S$  (op een afstand  $\frac{h}{2}$  onder het midden van den balk gelegen) dan is dus:

$$U_1 = f \left( \xi - l, \eta, z - \frac{h}{2} \right)$$

$$U_2 = f \left( \xi + l, \eta, z + \frac{h}{2} \right)$$

Hieruit vinden wij dus, wanneer wij de termen van de derde en hoogere orden verwaarloozen:

$$U_1 = U - l \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2!} \left[ -l \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right]^2$$

$$U_2 = U + l \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2!} \left[ l \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right]^2$$

Zij: 
$$\frac{1}{2} \left[ l \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right] = F$$

dan hebben wij dus:

$$\frac{\partial U_2}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta} + l \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial z} + \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta} - l \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial z} + \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

Hieruit volgt:

$$ml \left( \frac{\partial U_2}{\partial \eta} - \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \right) = ml \left( 2l \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + h \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial z} \right) = \tau (\varphi - \varphi_0).$$

Wij zien derhalve, dat de aldus gevonden uitdrukking nauwkeurig is tot de termen van de derde orde.

Indien wij echter, gelijk door verschillende schrijvers wordt gedaan, voor  $U$  nemen de potentiaal in  $O$ , dan is:

$$U_1 = f(\xi - l, \eta, z) \\ U_2 = f(\xi + l, \eta, z).$$

Wanneer wij thans deze functies ontwikkelen, dan vinden wij, dat de uitdrukking voor  $\tau (\varphi - \varphi_0)$  slechts nauwkeurig is tot de termen van de tweede orde, daar deze laatste reeds moeten worden verwaarloosd.

Hiermede is dus aangetoond, dat de met behulp der torsiebalans gemeten afgeleiden van  $U$  bij groote benadering gelden voor een punt  $S$  gelegen op een afstand  $\frac{h}{2}$  van  $O$ , welk punt het zwaartepunt van het instrument wordt genoemd.

Voor de berekening van den invloed van geologische structuren is het natuurlijk geheel voldoende de afgeleiden van  $U$  te berekenen voor het punt aan de oppervlakte, waar het



instrument is opgesteld. Voor de bepaling der topographische correcties echter is het niet onverschillig ten opzichte van welk punt de berekeningen worden uitgevoerd, zooals duidelijk blijkt wanneer men de formules voor een zwaartepuntshoogte van 90 cM. vergelijkt met die voor een hoogte van 140 cM. 1) Bij de nieuwere torsiebalansen, waar de gewichtjes zijn aangebracht aan de uiteinden van twee verticale armen, valt het zwaartepunt ongeveer samen met het midden van den balk.

Gelijk blijkt uit de uitdrukking voor de afwijking van den balk uit den evenwichtsstand, worden met de balans gemeten de grootheden:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Daar de positieve  $Z$ -as naar beneden gericht is, stelt  $\frac{\partial U}{\partial z}$  de zwaartekracht voor, zoodat dus  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$  en  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$  de verandering of gradient der zwaartekracht in de richting der  $X$ - en  $Y$ -as aangeven. Deze componenten bepalen zoowel grootte als richting van den totalen gradient.

Uit het feit, dat de  $Z$ -as samenvalt met de richting der zwaartekracht in  $O$ , volgt dat het  $XY$ -vlak in  $O$  raakt aan het equipotentiaalvlak, zoodat de vergelijking van dit laatste in de omgeving van het raakpunt wordt gegeven door de uitdrukking:

$$z = \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} y^2 \right)$$

waarbij de termen van hooger en dan den tweeden graad zijn verwaarloosd.

De vergelijking van het equipotentiaalvlak, die hier op den vorm  $z = \varphi(x, y)$  is gebracht, kan ook worden geschreven  $U = f(x, y, z) = C$ . Door twee keeren te differentieeren vinden wij:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

en:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

Nu is  $\frac{\partial U}{\partial z} = g$  en, daar het  $xy$ -vlak een raakvlak is,  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ .

Derhalve is:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \text{of:} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Op dezelfde wijze vinden wij:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

De vergelijking van het equipotentiaalvlak in de omgeving van  $O$  wordt derhalve:

$$z = -\frac{1}{2g} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} y^2 \right).$$

1) W. SCHWEYDAR, Die topographische Korrektion bei Schweremessungen mittels einer Torsionswaage. Zeitschrift für Geophysik 1924/25, Heft 3.



Stellen wij nu  $\frac{\partial \left( \frac{I}{\rho_\lambda} \right)}{\partial \lambda} = 0$ , dan vinden wij :

$$\operatorname{tg} 2 \lambda = - \frac{2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$$

Deze uitdrukking geeft ons twee waarden  $\lambda$  en  $\lambda + \frac{\pi}{2}$  waardoor dus de stand wordt bepaald van die twee normaalvlakken waarin de maximum en minimum kromtestraal zijn gelegen.

Zij nu  $\rho_\lambda$  de maximum en  $\rho_{\lambda + \frac{\pi}{2}}$  de minimum kromtestraal dan is dus

$$\frac{I}{\rho_{\lambda + \frac{\pi}{2}}} - \frac{I}{\rho_\lambda} \text{ positief.}$$

Uit :

$$\frac{I}{\rho_{\lambda + \frac{\pi}{2}}} = - \frac{I}{g} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos^2 \left( \lambda + \frac{\pi}{2} \right) + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \sin \left( \lambda + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( \lambda + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \sin^2 \left( \lambda + \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

$$\text{en: } \frac{I}{\rho_\lambda} = - \frac{I}{g} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos^2 \lambda + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \sin \lambda \cos \lambda + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \sin^2 \lambda \right)$$

vinden wij :

$$R = g \left( \frac{I}{\rho_{\lambda + \frac{\pi}{2}}} - \frac{I}{\rho_\lambda} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \sin \lambda \cos \lambda + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} (\sin^2 \lambda - \cos^2 \lambda).$$

$$\text{Verder is: } - \frac{\sin 2 \lambda}{\cos 2 \lambda} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Na vereenvoudiging vinden wij dan gemakkelijk :

$$R = g \left( \frac{I}{\rho_{\lambda + \frac{\pi}{2}}} - \frac{I}{\rho_\lambda} \right) = - \frac{\left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)}{\cos 2 \lambda}.$$

De beteekenis der grootheden  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  en  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  is dus thans duidelijk. Uit :

$$\operatorname{tg} 2 \lambda = - \frac{2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$$

vinden wij twee hoeken welken  $\pi$  verschillen. Kiezen wij nu steeds die waarde welke de uitdrukking :

$$R = g \left( \frac{I}{\rho_{\lambda + \frac{\pi}{2}}} - \frac{I}{\rho_\lambda} \right) = - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\cos 2 \lambda}.$$

positief maakt, dan stelt dus volgens het voorgaande  $\lambda$  de hoek voor welke het normaalvlak, waarin de maximum kromtestraal van het equipotentiaalvlak ligt, maakt met de  $X$ -as.

De kromtestralen  $\rho_\lambda$  en  $\rho_{\lambda + \frac{\pi}{2}}$  kunnen beide zoowel positief als negatief zijn. Zijn zij beide positief, of is een der kromtestralen positief en de andere negatief, dan zal  $\lambda$  dus behooren bij het normaalvlak waarin de grootste positieve kromtestraal ligt; zijn zij beide negatief, dan behoort  $\lambda$  bij het normaalvlak waarin die kromtestraal ligt waarvan de absolute waarde het kleinste is. Is de kromtestraal positief, dan is, daar de positieve  $Z$ -as verticaal naar beneden gericht is, de snijlijn van het equipotentiaalvlak met het normaalvlak waarin de kromtestraal is gelegen convex naar boven; is zij daarentegen negatief dan is de snijlijn concaaf naar boven.

Behalve de gradienten vinden wij dus met de torsiebalans ook het verschil der reciproke waarden van de maximum en minimum kromtestraal van het equipotentiaalvlak en de ligging der normaalvlakken welke deze kromtestralen bevatten. De kennis van het verloop dezer grootheden in punten boven bepaalde geologische structuren gelegen, stelt ons in staat gravimetrische metingen kwalitatief en in sommige gevallen ook kwantitatief geologisch te interpreteren zooals uit de volgende hoofdstukken zal blijken.

---



De aantrekkingskracht in  $O$  in de richting der positieve  $X$ -as kan nu worden uitgedrukt door de formule:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - G (\sigma_1 - \sigma_2) \iint_S \frac{\cos(n x)}{r} dS.$$

Hierin is  $U$  de potentiaal en  $G$  de constante der zwaartekracht,  $dS$  een element van het oppervlak dat het lichaam van het soortelijk gewicht  $\sigma_1$  omsluit,  $(n x)$  de hoek die de naar binnen gerichte normaal in elk punt van  $S$  maakt met de positieve  $X$ -as en  $r$  de afstand van  $O$  tot een punt van het vlak  $S$ . De integratie moet over dit geheele vlak worden uitgestrekt. Deze uitdrukking geldt streng genomen slechts voor een door  $S$  geheel omsloten gedeelte der ruimte. Wij kunnen haar echter ook hier toepassen wanneer wij de verschuiving en de formatiegrenzen beschouwen als gedeelten van de begrenzing van een lichaam waarvan de andere grensvlakken evenwijdig zijn aan de coördinaatvlakken en zich op zeer grooten afstand van  $O$  bevinden. Van deze laatste vlakken zullen alleen die twee, welke links en rechts van  $O$  liggen en evenwijdig zijn aan het  $YZ$ -vlak, bijdragen leveren tot de totale integraal, daar voor de andere grensvlakken (ook voor de formatiegrenzen  $AE$  en  $CD$  in de nabijheid der verschuiving)  $\cos(n x)$  in elk punt de waarde nul heeft. De bijdragen tot de totale integraal van de grensvlakken evenwijdig aan het  $YZ$ -vlak links en rechts van  $O$  gelegen zullen, daar hun afstand tot  $O$  zeer groot is en zij zich zeer ver uitstrekken in de richting der  $Z$ -as, elkaar in het punt  $O$  opheffen; de absolute waarden dezer integralen mogen voor het punt  $O$  gelijk worden gesteld, terwijl zij tegengesteld teeken bezitten. Om  $\frac{\partial U}{\partial x}$  te vinden hebben wij de integratie dus slechts uit te strekken over het verschuivingsvlak, hetwelk in fig. 3 is voorgesteld door  $AC$ , hare doorsnede met het  $XZ$ -vlak.

Zij  $\rho$  de afstand van  $O$  tot een punt van  $AC$  dan is dus  $r^2 = \rho^2 + y^2$  en  $dS = dy dz'$  (de  $Z'$ -as is evenwijdig aan  $AC$ ). Wij hebben derhalve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= - 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int dz' \int_0^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{\rho^2 + y^2}} \\ &= - 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int dz' \ln \left\{ \frac{y_2}{\rho} + \sqrt{\frac{y_2^2}{\rho^2} + 1} \right\}. \end{aligned}$$

Daar wij het verschuivingsvlak onbegrensd in de richting van de  $Y$ -as onderstellen, is dus  $y_2$  zeer groot ten opzichte van  $\rho$  zoodat 1 verwaarloosd mag worden ten opzichte van  $\frac{y_2^2}{\rho^2}$ . Er komt dus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= - 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int dz' \ln \frac{2 y_2}{\rho} \\ &= - 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \ln 2 y_2 \int dz' + 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int dz' \ln \rho. \end{aligned}$$

Hierin moet dus  $\ln 2 y_2$  worden beschouwd als eene zeer groote constante.

Door te differentieeren naar  $\rho$  valt deze factor dus weg en wij kunnen derhalve schrijven:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial \rho} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int \frac{dz'}{\rho}.$$

Zij nu  $OF = p$  dan is  $\rho \cos \theta = p$ .

Verder is:

$$dz' = \sqrt{(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2)} = d\theta \sqrt{\left\{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\right\}}.$$

En tevens is:

$$\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta = 0, \text{ waaruit volgt } \frac{d\rho}{d\theta} = \rho \operatorname{tg} \theta.$$

Dus is:

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \rho^2 (\operatorname{tg}^2 \theta + 1) = \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta}.$$

Er komt dus:

$$dz' = d\theta \sqrt{\frac{\rho^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{\rho d\theta}{\cos \theta}.$$

Wij hebben derhalve:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial \rho} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

Verder is:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x'} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x'} \text{ en uit } \rho^2 = x'^2 + z'^2 \text{ volgt } \frac{\partial \rho}{\partial x'} = \frac{x'}{\rho} = \cos \theta.$$

Wij hebben dus:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x'} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial \rho} \cos \theta = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha (\theta_2 - \theta_1).$$

Eveneens hebben wij:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial z'} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z'} \text{ en } \frac{\partial \rho}{\partial z'} = \frac{z'}{\rho} = \sin \theta.$$

Hieruit volgt dus:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial z'} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial \rho} \sin \theta = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta} = -2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \ln \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}.$$

Nu is  $\cos \theta_2 = \frac{OF}{r_A}$  en  $\cos \theta_1 = \frac{OF}{r_C}$  indien we  $OA$  en  $OC$  aanduiden door  $r_A$  en  $r_C$ .

Derhalve vinden wij:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial z'} = -2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \ln \frac{r_C}{r_A} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \ln \frac{r_A}{r_C}.$$

Verder is:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x'} \cos \alpha + \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial z'} \sin \alpha.$$

Er komt dus:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \cos \alpha (\theta_2 - \theta_1) + \sin \alpha \ln \frac{r_A}{r_C} \right\}.$$

Verder is  $\theta_2 - \theta_1 = \beta_A - \beta_C$  zoodat wij tenslotte vinden:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \cos \alpha (\beta_A - \beta_C) + \sin \alpha \ln \frac{r_A}{r_C} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Hiermede is dus thans de gradient in  $O$  voor de verschuiving  $AC$  bepaald want tengevolge van de symmetrische ligging van het lichaam ten opzichte van het  $XZ$ -vlak is  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$ .

Gelijk wij in het eerste hoofdstuk hebben gezien wordt de krommingsfactor bepaald door de grootheden  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  en  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ .

Daar de verschuiving zich aan weerszijden van het  $XZ$ -vlak oneindig ver uitstrekt, zijn  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  en  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  beide gelijk aan nul zoodat slechts  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  te berekenen overblijft.

Zoals boven reeds werd aangetoond hebben wij:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial \rho} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int \frac{dz'}{\rho} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

Nu is  $\theta = \beta + \alpha - 90^\circ$  dus komt er:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial \rho} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int \frac{d\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Verder is:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{en}$$

$$\rho^2 = x^2 + z^2 \quad \text{waaruit volgt} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \beta.$$

Er komt dus:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int_{\beta_C}^{\beta_A} \frac{\cos \beta d\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Nu is:

$$\int \frac{\cos \beta d\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \int \frac{\cos \beta d\beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \int \frac{d\beta}{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Deze integraal kan gemakkelijk worden bepaald door middel van de substitutie  $\operatorname{tg} \beta = t$  waardoor zij wordt herleid tot den vorm  $\int \frac{dt}{(\sin \alpha + t \cos \alpha)(t^2 + 1)}$ .

Wij vinden dan:

$$\int \frac{d\beta}{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta} = \beta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \ln(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + C.$$







Hierin is  $\varphi(\rho)$  eene willekeurige functie van  $\rho$  (doorlopend, éénvoudig en eindig voor alle punten op en binnen de omgrenzing van  $S$ ),  $(n\rho)$  de hoek dien de naar buiten gerichte normaal op de kromme maakt met de positieve richting van  $\rho$  en  $\psi(\rho) = \int \rho \varphi(\rho) d\rho$ , terwijl  $ds$  een boogelement is van de kromme welke  $S$  omsluit.

Passen wij deze stelling toe bij de bepaling van  $\int_{DEE'D'} \frac{dS}{\sqrt{\rho^2 + ON^2}}$ .

Nu is:  $\varphi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + ON^2}}$  dus  $\int \rho \varphi(\rho) d\rho = \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + ON^2}} = \sqrt{\rho^2 + ON^2}$ .

Wij hebben derhalve:

$$\int \frac{dS}{\sqrt{\rho^2 + ON^2}} = \int \sqrt{\rho^2 + ON^2} \cdot \frac{\cos(n\rho)}{\rho} ds.$$

Strekken wij nu de integratie uit langs de omgrenzing van  $ACED$  dan is:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -G(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int_{DEE'D'} \frac{dS}{r} = -2G(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int_{ACED} \frac{dS}{r}.$$

Derhalve is:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2G(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \int_{ACED} \sqrt{\rho^2 + ON^2} \cdot \frac{\cos(n\rho)}{\rho} ds.$$

Voor de berekening van de bijdrage van  $AD$  merken we op dat voor deze zijde  $\cos(n\rho) = \frac{NA}{\rho}$  en  $\rho^2 = NA^2 + s^2$ .

Voor de bijdrage van  $AD$  tot de totale integraal vinden wij dus de uitdrukking:

$$NA \int_{s_1}^{s_2} \frac{\sqrt{NA^2 + s^2 + ON^2}}{NA^2 + s^2} ds.$$

Stellen wij  $NA^2 + ON^2 = a^2$  en  $NA^2 = b^2$ , en passen wij toe de substitutie  $s = atg t$ , dan gaat deze integraal over in:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{b^2 + s^2} ds = a^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\cos^3 t (b^2 + a^2 tg^2 t)}.$$

Vermenigvuldigen wij teller en noemer met  $\cos t$  dan komt er:

$$a^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d \sin t}{(b^2 - a^2) \sin^4 t + (a^2 - 2b^2) \sin^2 t + b^2}$$

waardoor de integraal tot een gemakkelijk te bepalen vorm is herleid.

Bij verdere uitwerking vindt men gemakkelijk:

$$NA \int_{s_1}^{s_2} \frac{\sqrt{NA^2 + s^2 + ON^2}}{NA^2 + s^2} ds = NA \left[ \frac{s_2 + \sqrt{NA^2 + s_2^2 + ON^2}}{s_1 + \sqrt{NA^2 + s_1^2 + ON^2}} + \right. \\ \left. + ON bgtg \frac{ON \cdot s_2}{NA \sqrt{NA^2 + s_2^2 + ON^2}} - ON bgtg \frac{ON \cdot s_1}{NA \sqrt{NA^2 + s_1^2 + ON^2}} \right]$$

Nu is  $s_1 = 0$ ,  $\sqrt{NA^2 + s_2^2 + ON^2} = r_D$  en  $\sqrt{NA^2 + ON^2} = r_A$  zoodat er komt:

$$NA \int_{s_1}^{s_2} \frac{\sqrt{NA^2 + s^2 + ON^2}}{NA^2 + s^2} ds = NA \ln \frac{s_2 + r_D}{r_A} + ON \operatorname{bgtg} \frac{ON \cdot s_2}{NA \cdot r_D}.$$

Daar het verschuivingsvlak zich zeer ver uitstrekt in de richting der  $Y$ -as mogen wij stellen  $\frac{s_2}{r_D} = 1$ . Voor  $AD$  vinden wij dus:

$$NA \ln \frac{s_2 + r_D}{r_A} + ON \operatorname{bgtg} \frac{ON}{NA}.$$

Eveneens vinden wij voor  $CE$ :

$$NC \int_{s_1}^{s_2} \frac{\sqrt{NC^2 + s^2 + ON^2}}{NC^2 + s^2} ds = NC \ln \frac{s_2 + r_E}{r_C} + ON \operatorname{bgtg} \frac{ON}{NC}.$$

en voor  $DE$ :

$$NG \ln \frac{GD + r_D}{r_E - GE} + ON \operatorname{bgtg} \frac{ON \cdot DG}{NG \cdot r_D} + ON \operatorname{bgtg} \frac{ON \cdot EG}{NG \cdot r_E}.$$

Wij mogen nu stellen  $GD + r_D = r_E - GE$  terwijl  $NG \cdot r_D$  en  $NG \cdot r_E$  zeer groot zijn ten opzichte van  $ON \cdot DG$  en  $ON \cdot EG$ . De bijdrage van  $DE$  wordt dus gelijk aan nul voor een zich oneindig ver uitstrekkend verschuivingsvlak. Wij vinden derhalve:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2G(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ NA \ln (s_2 + r_D) + NC \ln (s_2 + r_E) - \right. \\ \left. - NA \ln r_A - NC \ln r_C + ON \operatorname{bgtg} \frac{ON}{NA} + ON \operatorname{bgtg} \frac{ON}{NC} \right\}$$

Om  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$  te bepalen zullen wij de in bovenstaande formule voorkomende grootheden uitdrukken in  $h$  en daarna naar  $h$  differentieëren.

Wij merken nog op dat dan  $s_2 + r_D$  en  $s_2 + r_E$  als constanten mogen worden beschouwd. Want  $s_2 + r_D = s_2 + \sqrt{ON^2 + s_2^2 + NA^2}$  waarbij  $ON$  en  $NA$  mogen worden verwaarloosd ten opzichte van  $s_2$  zoodat  $s_2 + r_D = 2s_2$  onafhankelijk van  $h$  is. Hetzelfde geldt voor  $s_2 + r_E$ . Derhalve is:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -2G(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \times \\ \times \frac{\partial \left\{ -NA \ln r_A - NC \ln r_C + ON \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{bgtg} \frac{NA}{ON} \right) + ON \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{bgtg} \frac{NC}{ON} \right) \right\}}{\partial h}.$$

$$\text{Nu is: } ON = OF \sin \alpha = \left( d + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \sin \alpha = d \sin \alpha + h \cos \alpha$$

$$\text{en: } NH = (d \sin \alpha + h \cos \alpha) \cos \alpha - h = \sin \alpha (d \cos \alpha - h \sin \alpha)$$

$$\text{dus: } NC = \frac{NH}{\sin \alpha} = d \cos \alpha - h \sin \alpha.$$

$$\text{En: } NL = c - NH = c - \sin \alpha (d \cos \alpha - h \sin \alpha)$$

$$\text{dus: } NA = \frac{NL}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha} - (d \cos \alpha - h \sin \alpha) = p - d \cos \alpha + h \sin \alpha \text{ als } AC = p.$$



waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= 3 G(\sigma_1 - \sigma_2) \iiint_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \frac{xz \, dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -G(\sigma_1 - \sigma_2) \iint_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} x \, dx \, dy \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_1^2)^{3/2}} \right] \\ &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{y_1}^{y_2} dy \left[ (x_1^2 + y^2 + z_1^2)^{-\frac{1}{2}} - (x_2^2 + y^2 + z_1^2)^{-\frac{1}{2}} + (x_2^2 + y^2 + z_2^2)^{-\frac{1}{2}} - (x_1^2 + y^2 + z_2^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \ln \frac{y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_1^2}}{y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \ln \frac{y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_1^2}}{y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}{y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_2^2}} - \ln \frac{y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_2^2}}{y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2}} \right]. \end{aligned}$$

Substitueeren wij nu hierin:

$$x_1 = +b, \quad x_2 = +a, \quad y_1 = -a \quad \text{en} \quad y_2 = +a$$

dan komt er:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \ln \frac{(a + \sqrt{b^2 + a^2 + z_1^2})^2}{b^2 + z_1^2} \cdot \frac{b^2 + z_2^2}{(a + \sqrt{b^2 + a^2 + z_2^2})^2} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{a^2 + z_1^2}{(a + \sqrt{2a^2 + z_1^2})^2} \cdot \frac{(a + \sqrt{2a^2 + z_2^2})^2}{a^2 + z_2^2} \right\}. \end{aligned}$$

Daar de verschuiving verondersteld wordt onbegrensd te zijn in de richting der  $Y$ -as, is  $a$  zeer groot ten opzichte van  $b$ ,  $z_1$  en  $z_2$ , zoodat wij mogen stellen:

$$\begin{aligned} a + \sqrt{b^2 + a^2 + z_1^2} &= a + \sqrt{b^2 + a^2 + z_2^2} \\ a + \sqrt{2a^2 + z_1^2} &= a + \sqrt{2a^2 + z_2^2} \\ a^2 + z_1^2 &= a^2 + z_2^2. \end{aligned}$$

Wij vinden derhalve:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{b^2 + z_2^2}{b^2 + z_1^2} = 2 G(\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{r_A}{r_B} \dots \dots \dots (3)$$

Wij hadden deze uitdrukking natuurlijk zonder verdere afleiding kunnen vinden door in formule (1)  $\alpha$  gelijk te stellen aan  $\frac{\pi}{2}$ .

De berekening van den krommingsfactor kan op dezelfde wijze geschieden. Uit de boven gegeven uitdrukking voor  $U$  vindt men:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 3 G(\sigma_1 - \sigma_2) \iiint_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \frac{(y^2 - x^2) \, dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \left[ \frac{y^3}{(x^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - x^2 \frac{y(3x^2 + 3z^2 + 2y^2)}{(x^2 + z^2)^2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]_{y_1}^{y_2} \end{aligned}$$

Stellen wij thans weer  $y_2 = +a$  en  $y_1 = -a$  dan komt er:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \left[ \frac{a^3}{(x^2 + z^2)(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{-a^3}{(x^2 + z^2)(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^2 a(3x^2 + 3z^2 + 2a^2)}{(x^2 + z^2)^2(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{-x^2 a(3x^2 + 3z^2 + 2a^2)}{(x^2 + z^2)^2(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$



Men ziet nu gemakkelijk in dat voor  $y_2 = +\infty$  en  $y_1 = -\infty$  deze uitdrukking overgaat in:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{x_1}^{x_2} x dx \left[ \frac{1}{x^2 + z_1^2} - \frac{1}{x^2 + z_2^2} \right].$$

Nu is:  $z_2 = h + H$  en  $z_1 = HK + KL = h + (p - x) \operatorname{tg} \alpha$   
zoodat er komt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \int_{p-a}^p \frac{x dx}{x^2 + \{h + (p-x) \operatorname{tg} \alpha\}^2} - \int_{p-a}^p \frac{x dx}{x^2 + (h+H)^2} \right].$$

Duiden wij deze integralen aan met  $I_1$  en  $I_2$  dan hebben wij:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{p-a}^p \frac{x dx}{(h + p \operatorname{tg} \alpha)^2 - x(2h \operatorname{tg} \alpha + 2p \operatorname{tg}^2 \alpha) + x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \\ &= \frac{1}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \ln \frac{p^2 + h^2}{(p-a)^2 + (h + a \operatorname{tg} \alpha)^2} \\ &\quad + \frac{h \operatorname{tg} \alpha + p \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \int_{p-a}^p \frac{dx}{(h + p \operatorname{tg} \alpha)^2 - x(2h \operatorname{tg} \alpha + 2p \operatorname{tg}^2 \alpha) + x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \\ &= \cos^2 \alpha \ln \frac{r_C}{r_A} + \sin \alpha \cos \alpha \left[ b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{p - h \operatorname{tg} \alpha}{h + p \operatorname{tg} \alpha} - b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{(p-a) - \operatorname{tg} \alpha (H+h)}{h + p \operatorname{tg} \alpha} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Nu is: } b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{p - h \operatorname{tg} \alpha}{h + p \operatorname{tg} \alpha} = b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{\frac{p}{h} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{p}{h} \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{en} \quad \frac{p}{h} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta_C \right).$$

$$\text{Dus komt er: } b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{p - h \operatorname{tg} \alpha}{h + p \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\pi}{2} - \beta_C - \alpha.$$

$$\text{Verder is: } b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{(p-a) - \operatorname{tg} \alpha (H+h)}{h + p \operatorname{tg} \alpha} = b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{\frac{p-a}{H+h} - \operatorname{tg} \alpha}{\frac{h + p \operatorname{tg} \alpha}{H+h}}.$$

$$\text{En: } \frac{h + p \operatorname{tg} \alpha}{H+h} = \frac{H+h + p \operatorname{tg} \alpha - a \operatorname{tg} \alpha}{H+h} = 1 + \frac{p-a}{H+h} \operatorname{tg} \alpha.$$

Daar  $\frac{p-a}{H+h} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta_A \right)$  komt er dus:

$$b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{(p-a) - \operatorname{tg} \alpha (H+h)}{h + p \operatorname{tg} \alpha} = b \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta_A \right) - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta_A \right) \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\pi}{2} - \beta_A - \alpha.$$

Wij vinden derhalve:

$$\begin{aligned} I_1 &= \cos^2 \alpha \ln \frac{r_C}{r_A} + \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{\pi}{2} - \beta_C - \alpha - \frac{\pi}{2} + \beta_A + \alpha \right) = \\ &= \cos^2 \alpha \ln \frac{r_C}{r_A} + \sin \alpha \cos \alpha (\beta_A - \beta_C). \end{aligned}$$

$$\text{Verder is: } I_2 = \frac{1}{2} \ln \left[ x^2 + (h+H)^2 \right]_{p-a}^p = \frac{1}{2} \ln \frac{r_B^2}{r_A^2} = \ln \frac{r_B}{r_A}.$$



Voor het prisma  $ABC$  vinden wij dus:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \cos^2 \alpha \ln \frac{r_C}{r_A} - \ln \frac{r_B}{r_A} + \sin \alpha \cos \alpha (\beta_A - \beta_C) \right\}. \quad (5)$$

Om den invloed van de hellende verschuiving te vinden moet hierbij nog worden gevoegd de werking van de massa rechts van  $BC$  waarvoor wij reeds hebben gevonden de uitdrukking  $2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{r_B}{r_C}$ . Voor den gradient eener hellende verschuiving vinden wij dus ook op deze wijze weer de formule:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \cos \alpha (\beta_A - \beta_C) + \sin \alpha \ln \frac{r_A}{r_C} \right\}.$$

Thans blijft ons nog te berekenen den krommingsfactor voor het prisma  $ABC$ .

Gelijk reeds werd aangetoond is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} dx dz \left[ \frac{1}{x^2 + z^2} - \frac{2 x^2}{(x^2 + z^2)^2} \right] \\ &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{1}{x} \operatorname{bgtg} \frac{z_2}{x} - \frac{1}{x} \operatorname{bgtg} \frac{z_1}{x} - 2 x^2 \left\{ \frac{z_2}{2 x^2 (x^2 + z_2^2)} - \frac{z_1}{2 x^2 (x^2 + z_1^2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2 x^2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{x^2 + z^2} \right\} \right] = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{z_1}{x^2 + z_1^2} - \frac{z_2}{x^2 + z_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Verder is weer:  $z_1 = h + (p-x) \operatorname{tg} \alpha$ ,  $z_2 = h + H$ ,  $x_1 = p - a$  en  $x_2 = p$ .

Er komt derhalve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{p-a}^p dx \left[ \frac{h + (p-x) \operatorname{tg} \alpha}{x^2 + \{h + (p-x) \operatorname{tg} \alpha\}^2} - \frac{h + H}{x^2 + (h + H)^2} \right] \\ &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left[ (h + p \operatorname{tg} \alpha) \int_{p-a}^p \frac{dx}{(h + p \operatorname{tg} \alpha)^2 - x(2 h \operatorname{tg} \alpha + 2 p \operatorname{tg}^2 \alpha) + x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg} \alpha \int_{p-a}^p \frac{x dx}{(h + p \operatorname{tg} \alpha)^2 - x(2 h \operatorname{tg} \alpha + 2 p \operatorname{tg}^2 \alpha) + x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} - (h + H) \int_{p-a}^p \frac{dx}{x^2 + (h + H)^2} \right] \\ &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \operatorname{bgtg} \left[ \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) x - h \operatorname{tg} \alpha - p \operatorname{tg}^2 \alpha}{h + p \operatorname{tg} \alpha} \right]_{p-a}^p - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \ln \frac{p^2 + h^2}{(p-a)^2 + (h + \operatorname{tg} \alpha)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \operatorname{bgtg} \left[ \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) x - h \operatorname{tg} \alpha - p \operatorname{tg}^2 \alpha}{h + p \operatorname{tg} \alpha} \right]_{p-a}^p - \operatorname{bgtg} \left[ \frac{x}{h + H} \right]_{p-a}^p \right\} \\ &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \left( 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \operatorname{bgtg} \left[ \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) x - h \operatorname{tg} \alpha - p \operatorname{tg}^2 \alpha}{h + p \operatorname{tg} \alpha} \right]_{p-a}^p - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \ln \frac{r_C^2}{r_A^2} \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{bgtg} \frac{p}{h + H} + \operatorname{bgtg} \frac{p-a}{h + H} \right\} \\ &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \cos^2 \alpha (\beta_A - \beta_C) - \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{r_C}{r_A} - \left( \frac{\pi}{2} - \beta_B \right) + \left( \frac{\pi}{2} - \beta_A \right) \right\} \\ &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \beta_B - \beta_C + \sin^2 \alpha (\beta_C - \beta_A) - \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{r_C}{r_A} \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Voegen wij hierbij nog den reeds bekenden invloed van de massa rechts van  $BC$ , dan vinden wij weer voor de hellende verschuiving:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \sin \alpha (\beta_C - \beta_A) + \cos \alpha \ln \frac{r_A}{r_C} \right\}.$$

Hiermede hebben wij dus aangetoond dat de gradienten en krommingsfactoren voor verschuivingen ook door directe integratie kunnen worden gevonden. De beide andere in het begin van dit hoofdstuk uitgewerkte methoden verdienen echter de voorkeur daar zij minder bewerkelijk zijn en dus sneller tot het doel voeren.

De formules werden afgeleid voor een bepaalden stand van het verschuivingsvlak ten opzichte van de  $X$ -as. De berekeningen voor de andere mogelijke standen geschieden op dezelfde wijze en wij volstaan met het geven van de resultaten.

Voor een verticale verschuiving welke ten opzichte van het assenstelsel den in fig. 8 voorgestelden stand inneemt gelden de formules:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{r_B}{r_A} \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) (\beta_A - \beta_B) \dots \dots \dots (8)$$

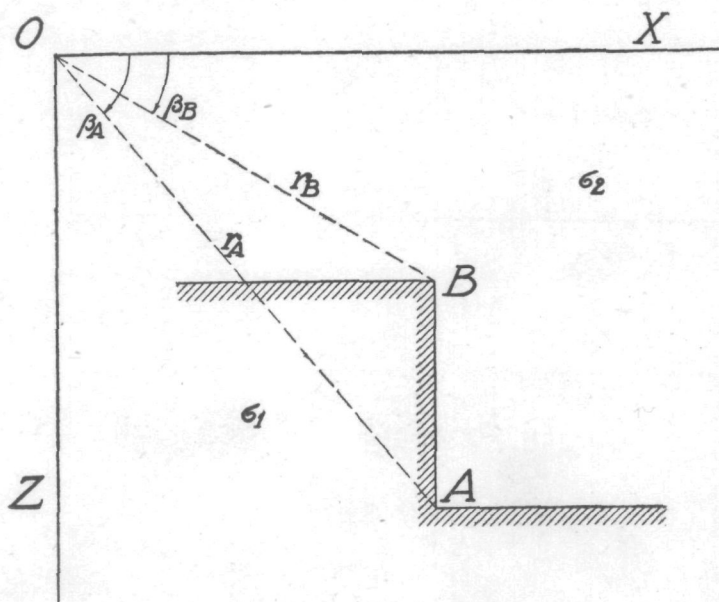


Fig. 8.

Voor het prisma  $BCE$  (fig. 9) vinden wij:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \ln \frac{r_C}{r_E} - \cos^2 \alpha \ln \frac{r_B}{r_E} + \sin \alpha \cos \alpha (\beta_E - \beta_B) \right\} \dots \dots (9)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \beta_B - \beta_C + \sin^2 \alpha (\beta_E - \beta_B) - \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{r_B}{r_E} \right\} \dots \dots (10)$$

en voor de overschuiving  $BE$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \cos \alpha (\beta_E - \beta_B) + \sin \alpha \ln \frac{r_B}{r_E} \right\} \dots (11)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \sin \alpha (\beta_E - \beta_B) - \cos \alpha \ln \frac{r_B}{r_E} \right\} \dots (12)$$

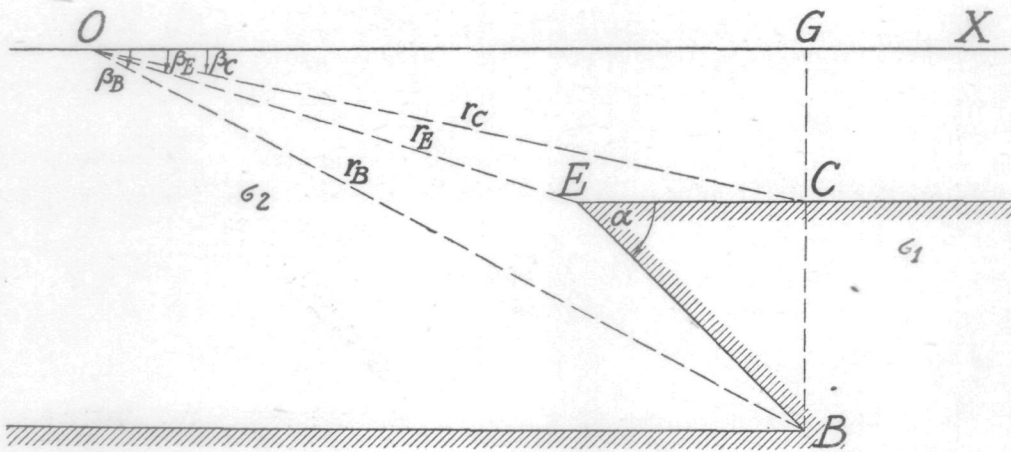


Fig. 9.

Voor het prisma  $DBC$  (fig. 10) vinden wij:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \cos^2 \alpha \ln \frac{r_D}{r_C} - \ln \frac{r_D}{r_B} - \sin \alpha \cos \alpha (\beta_C - \beta_D) \right\} \dots (13)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \beta_C - \beta_B + \sin^2 \alpha (\beta_D - \beta_C) + \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{r_D}{r_C} \right\} \dots (14)$$

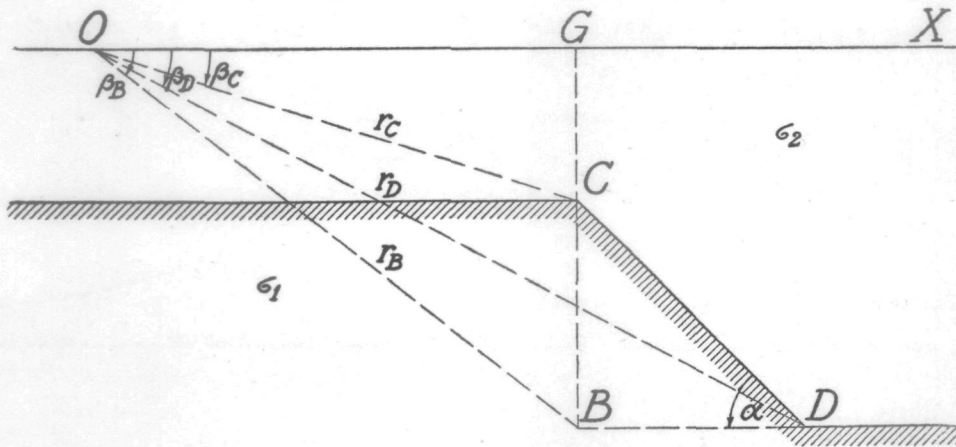


Fig. 10.

en voor de verschuiving  $CD$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \cos \alpha (\beta_D - \beta_C) + \sin \alpha \ln \frac{r_C}{r_D} \right\} \dots (15)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \sin \alpha (\beta_D - \beta_C) + \cos \alpha \ln \frac{r_D}{r_C} \right\} \dots (16)$$

Voor het prisma  $BCF$  (fig. 11) vinden wij:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \ln \frac{r_F}{r_C} - \cos^2 \alpha \ln \frac{r_F}{r_B} - \sin \alpha \cos \alpha (\beta_B - \beta_F) \right\} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \beta_C - \beta_B + \sin^2 \alpha (\beta_B - \beta_F) + \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{r_F}{r_B} \right\} \quad (18)$$

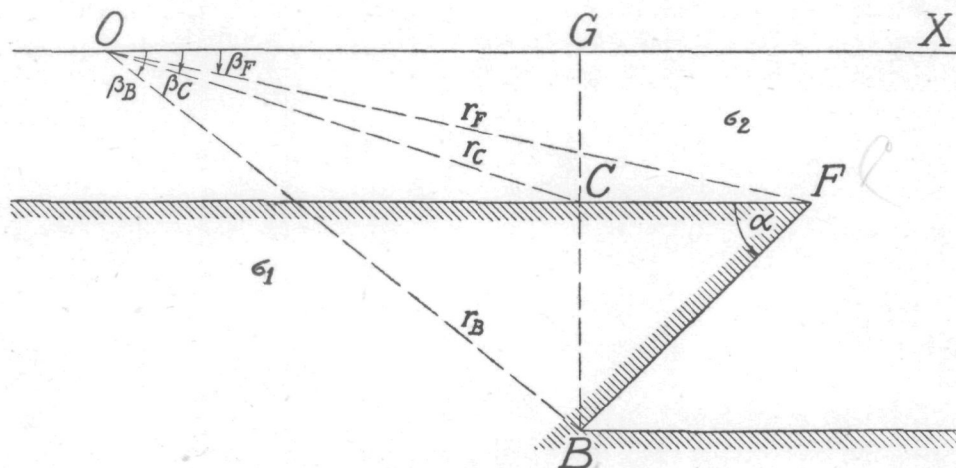


Fig. 11.

en voor de overschuiving  $BF$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \cos \alpha (\beta_F - \beta_B) + \sin \alpha \ln \frac{r_F}{r_B} \right\} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \sin \alpha (\beta_B - \beta_F) + \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{r_F}{r_B} \right\} \quad (20)$$

Na de algemeene formules voor verschuivingen te hebben afgeleid zullen wij thans overgaan tot de studie der eigenschappen welke deze structuren in gravimetrisch opzicht bezitten.

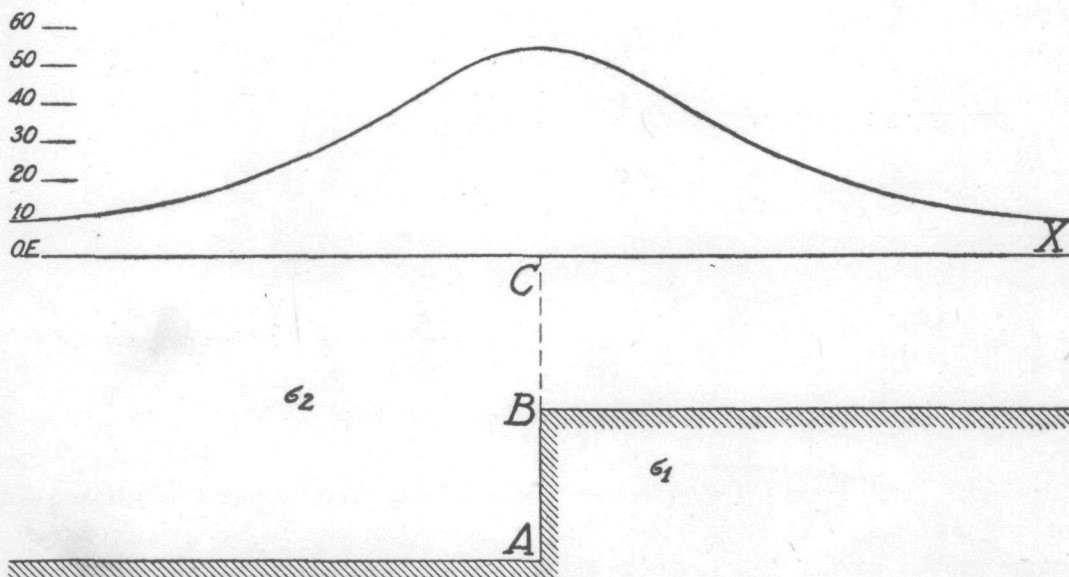


Fig. 12.

Als eerste voorbeeld berekenen wij de gradienten voor een verticale verschuiving in een gesteente van het soortelijk gewicht 2.6, bedekt door eene formatie van het soortelijk gewicht 1.8, bijv. kalksteen bedekt door alluvium. Wij veronderstellen verder dat  $AB = BC = 100$  M (fig. 12) en berekenen nu door middel van formule 3 den gradient in verschillende aan de oppervlakte gelegen punten.

Het resultaat is samengevat in eene graphische voorstelling, een gradientenkromme. De ordinaten van de punten dezer kromme zijn in grootte gelijk aan den gradient in het corresponderende punt van de oppervlakte waarbij als schaal is genomen  $\frac{1}{2}$  m.m. =  $10^{-9}$  C.G.S. eenheden.

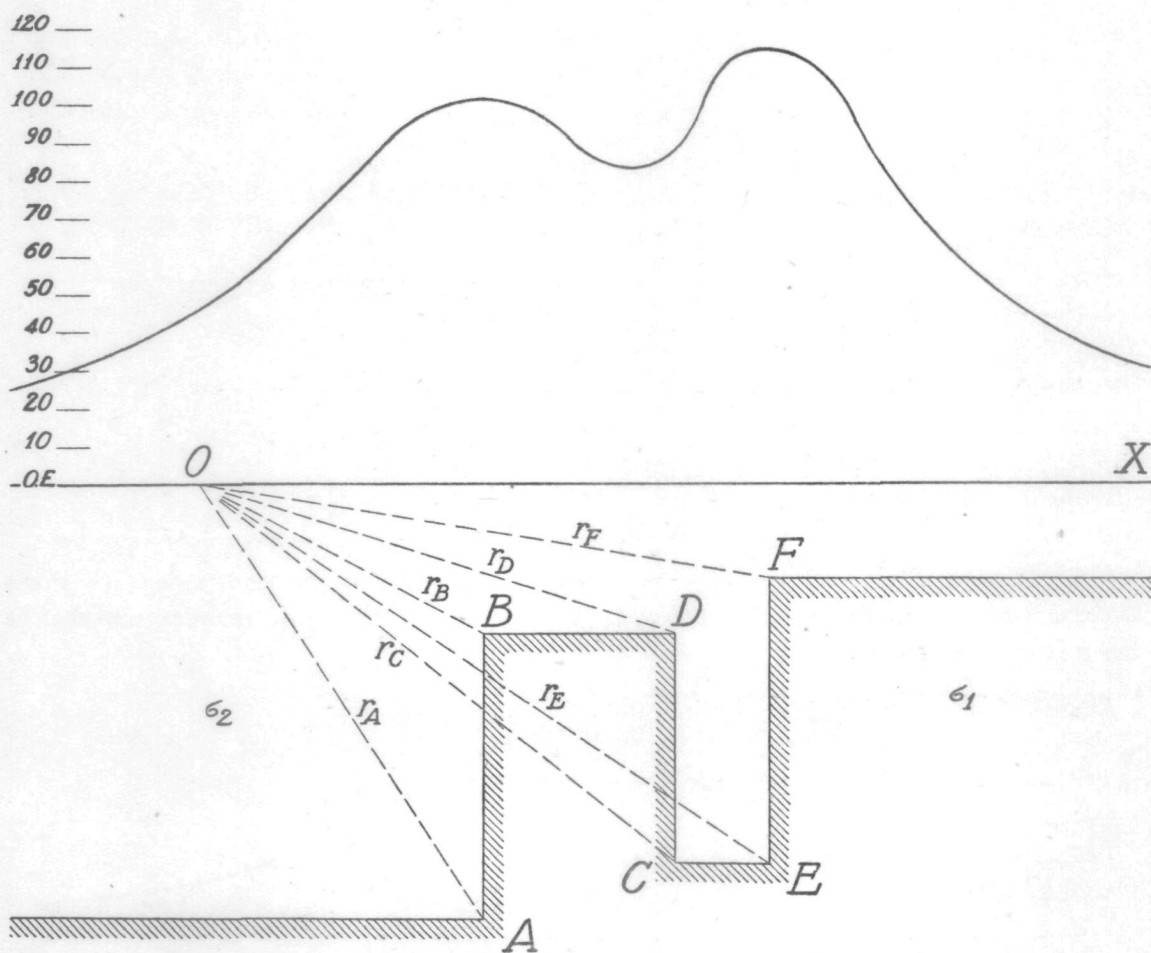


Fig. 13.

Uit de kromme zien wij dat de maximum gradient optreedt in het punt waar het verschuivingsvlak de oppervlakte snijdt, hetgeen ook onmiddellijk uit de formule volgt daar voor dit punt de verhouding  $\frac{r_A}{r_B}$  hare maximale waarde bereikt. Verder zien wij dat de kromme geheel boven de  $X$ -as ligt m. a. w. in het hier berekende geval zijn alle gradienten positief, dus gelijk gericht, terwijl verder in punten aan weerszijden en op gelijken afstand van het punt waar het verschuivingsvlak de oppervlakte snijdt de gradienten dezelfde grootte hebben zoodat de kromme symmetrisch is ten opzichte van  $AB$ . Een dergelijke symmetrische kromme met een maximum of minimum (naar gelang de gradienten positief

of negatief uitvallen, dus naar gelang men heeft  $\sigma_1 > \sigma_2$  of  $\sigma_2 > \sigma_1$ ) is karakteristiek voor eene verticale verschuiving. Het maximum zal des te geprononceerder zijn naarmate het soortelijk gewichtsverschil en de spronghoogte der verschuiving grooter zijn en deze laatste dichter onder de oppervlakte ligt.

Het zal verder duidelijk zijn dat men met behulp der gegeven formules den gradient kan berekenen voor elke combinatie welke is samengesteld uit verticale verschuivingsvlakken en horizontale formatiegrenzen. Zoo zal de gradient in  $O$  (fig. 13) worden gegeven door de formule:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{r_A}{r_B} \cdot \frac{r_D}{r_C} \cdot \frac{r_E}{r_F}.$$

Nemen wij ook thans  $\sigma_1 = 2.6$  en  $\sigma_2 = 1.8$  en zij verder de afstand van  $F$  tot de  $X$ -as 50 M,  $EF = 150$  M,  $CE = 50$  M,  $CD = 120$  M,  $BD = 100$  M en  $AB = 150$  M, dan geeft de berekening de in fig. 13 voorgestelde kromme. Deze is thans niet meer symmetrisch en vertoont twee maxima.

De krommingsfactoren voor eene verticale verschuiving zijn berekend voor het in fig. 14 voorgestelde geval, waar wij hebben genomen  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$  en  $BC = AB = 100$  M.

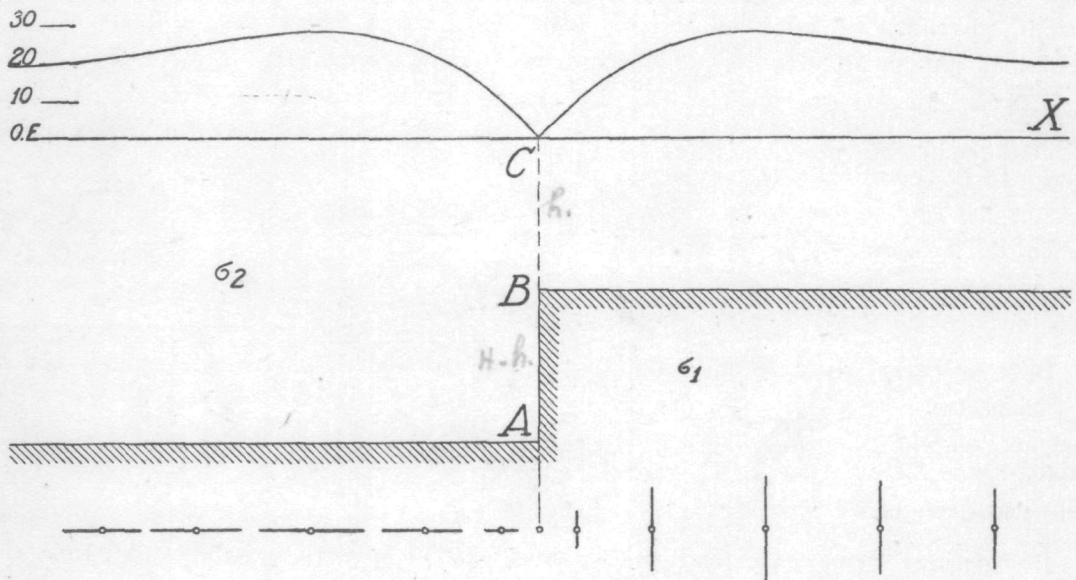


Fig. 14.

In het punt  $C$  is, zooals direct blijkt uit formule 4,  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$ , links daarvan wordt deze waarde negatief, rechts positief. In het eerste hoofdstuk hebben wij gezien, dat

$R = - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\cos^2 \lambda}$  en daarbij werd de afspraak gemaakt, dat  $R$  steeds positief zal worden genomen. Verder is  $\operatorname{tg} 2 \lambda = - \frac{2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$ , terwijl in het hier beschouwde geval

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$ . Hieruit vinden wij twee waarden voor  $\lambda$ , nl.  $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$  en  $\lambda_2 = 0$  en, opdat  $R$  steeds positief zij, behoort dus bij de punten rechts van  $C$  de waarde  $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$  en bij de

punten links van  $C$  de waarde  $\lambda_2 = 0$ . Wij hebben nu  $R$  voor verschillende punten berekend en, gelijk dit op gravimetrische kaarten gebruikelijk is, voorgesteld door een lijn waarvan de grootte gelijk is aan de waarde van  $R$  in het betreffende punt, terwijl de richting wordt gegeven door een hoek  $\lambda$  die het normaalvlak waarin de maximum kromtestraal ligt, maakt met de  $X$ -as. Rechts van  $C$  is dus de lijn die de grootte  $R$  voorstelt evenwijdig aan het verschuivingsvlak gericht, links van  $C$  echter loodrecht op dit vlak. Dit verschil in richting is een gevolg van het feit dat aan weerszijden van de snijlijn van het verschuivingsvlak met het equipotentiaalvlak dit laatste in verschillenden zin gekromd is. In het in fig. 14 voorgestelde geval is de kromming links van  $C$  negatief (concaaf naar boven), waarbij dus de maximum kromtestraal ligt in een vlak evenwijdig aan het  $XZ$ -vlak, en rechts van  $C$  positief (convex naar boven) waarbij de maximum kromtestraal ligt in een vlak evenwijdig aan het  $YZ$ -vlak. Waren wij uitgegaan van de veronderstelling dat  $\sigma_2 > \sigma_1$  dan hadden wij het omgekeerde gevonden.

Men kan het verloop van  $R$  ook voorstellen door een kromme, zooals wij dat voor de gradienten hebben gedaan; in fig. 14 is deze kromme als bestaande uit twee positieve takken geteekend. Deze wijze van voorstellen is logisch omdat volgens afspraak  $R$  steeds positief genomen zal worden. Uit een dergelijke kromme kan dan echter slechts de grootte en niet de richting van  $R$  in een bepaald punt worden afgelezen.

Uit de kromme zoowel als uit de kartographische voorstelling zien wij dat  $R$  aan weerszijden en op gelijke afstanden van  $C$  een maximum bereikt. De plaats van dit maximum is gemakkelijk te berekenen.

Stel dat de punten, waarin het maximum optreedt, liggen op een afstand  $x$  van  $C$ . Indien  $BC = h$  en  $AC = H$ , dan is dus:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2G(\sigma_1 - \sigma_2) \left( bgtg \frac{h}{x} - bgtg \frac{H}{x} \right).$$

Differentieeren wij deze uitdrukking naar  $x$  en stellen wij het resultaat gelijk aan nul, dan komt er:

$$-\frac{h}{x^2 + h^2} + \frac{H}{x^2 + H^2} = 0,$$

waaruit men vindt:

$$x = \pm \sqrt{hH} \dots \dots \dots (21)$$

De toename van  $g$  tusschen twee punten aan de oppervlakte wordt uitgedrukt door de betrekking:

$$\Delta g = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dg}{ds} ds,$$

waarin  $\frac{dg}{ds}$  de gradient is in de hier door  $s$  aangeduide richting van de verbindingslijn der twee beschouwde punten. In het geval dat deze punten liggen aan weerszijden eener verticale verschuiving kan men de waarde van  $\Delta g$  gemakkelijk met behulp van eene benaderingsformule uitdrukken, welke formule in de praktijk dikwijls wordt gebruikt om uit eene isogammenkaart bij benadering de spronghoogte van eene verschuiving te berekenen.

Zij in fig. 6  $BC = h$ ,  $AC = H$  en  $AB = d$  dan hebben wij dus:

$$\Delta g = G(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{x_1}^{x_2} \ln \frac{r_A^2}{r_B^2} dx.$$

Berekenen wij nu de toename van  $g$  tusschen twee punten  $x_2 = +a$  en  $x_1 = -a$ . Ontwikkelen wij  $\ln \frac{r_A^2}{r_B^2}$  in een reeks en verwaarloozen wij daarvan alle termen behalve de eerste dan komt er:

$$\begin{aligned} \Delta g &= G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{-a}^{+a} \frac{2 (r_A^2 - r_B^2)}{r_A^2 + r_B^2} dx = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{-a}^{+a} \frac{(H+h)(H-h)}{2x^2 + H^2 + h^2} dx \\ &= G (\sigma_1 - \sigma_2) (H+h) d \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x^2 + \frac{H^2 + h^2}{2}} \end{aligned}$$

Zij nu  $H_1$  eene waarde gelegen tusschen  $h$  en  $H$  en stellen wij  $H+h = 2H_1$  en, bij benadering,  $\frac{H^2 + h^2}{2} = \frac{2H_1^2}{2} = H_1^2$  dan komt er:

$$\Delta g = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) H_1 d \left[ \frac{1}{H_1} \operatorname{bgtg} \frac{a}{H_1} - \frac{1}{H_1} \operatorname{bgtg} \frac{-a}{H_1} \right] = 4 G (\sigma_1 - \sigma_2) d \operatorname{bgtg} \frac{a}{H_1}$$

Voor  $a = \infty$  wordt  $\operatorname{bgtg} \frac{a}{H_1} = \frac{\pi}{2}$  zoodat wij dus vinden voor de totale toename van  $g$  over eene verticale verschuiving:

$$\Delta g = 2 \pi G (\sigma_1 - \sigma_2) d \dots \dots \dots (22)$$

Deze formule wordt door v. EÖTVÖS gegeven en toegepast doch niet afgeleid. <sup>1)</sup> Uit het bovenstaande is het duidelijk dat men hier slechts met eene benaderde waarde te doen heeft. De uitkomst zal des te nauwkeuriger zijn naarmate  $d$  kleiner is ten opzichte van  $h$  en  $H$ . De formule geeft de totale toename van  $g$  daar we  $a = \infty$  gesteld hebben; praktisch is het meestal geheel voldoende indien men voor  $a$  een afstand van eenige kilometers neemt.

Het verloop der gradienten over een hellende verschuiving wordt geïllustreerd door het in fig. 15 voorgesteld geval, waar  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $CG = 100$  M en  $CD = 200$  M.

In tegenstelling met hetgeen het geval bleek te zijn bij eene verticale verschuiving, is thans de gradientenkromme niet meer symmetrisch ten opzichte van de  $Z$ -as, terwijl bovendien het maximum niet meer samenvalt met  $G$ . Een dergelijke kromme is karakteristiek voor eene hellende verschuiving.

De afstand van het punt waar het maximum optreedt tot  $G$  kan gemakkelijk worden berekend.

Zij:  $OG = x$ ,  $CG = d$ ,  $DG = D$  en  $AD = a$ .

Wij hebben nu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \cos \alpha (\beta_A - \beta_C) + \sin \alpha \ln \frac{r_A}{r_C} \right\} = \\ &= 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha \left\{ \beta_A - \beta_C + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} (\ln r_A^2 - \ln r_C^2) \right\} \end{aligned}$$

Hierin is dus:

$$\beta_A = \operatorname{bgtg} \frac{D}{x-a}, \quad \beta_C = \operatorname{bgtg} \frac{d}{x}, \quad r_A^2 = D^2 + (x-a)^2, \quad r_C^2 = d^2 + x^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{D-d}{a}$$

1) R. v. Eötvös, Bericht über die geodätischen Arbeiten in Ungarn, Verhandlungen der XV Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung, pag. 389.



Wanneer wij deze waarden substitueeren in de formule voor  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ , daarna naar  $x$  differentieeren en het resultaat gelijk aan nul stellen dan komt er:

$$\frac{-aD + (D-d)(x-a)}{D^2 + (x-a)^2} + \frac{ad - (D-d)x}{x^2 + d^2} = 0.$$

Lossen wij deze vergelijking op dan vinden wij:

$$x = \frac{ad}{d+D} \dots \dots \dots (23)$$

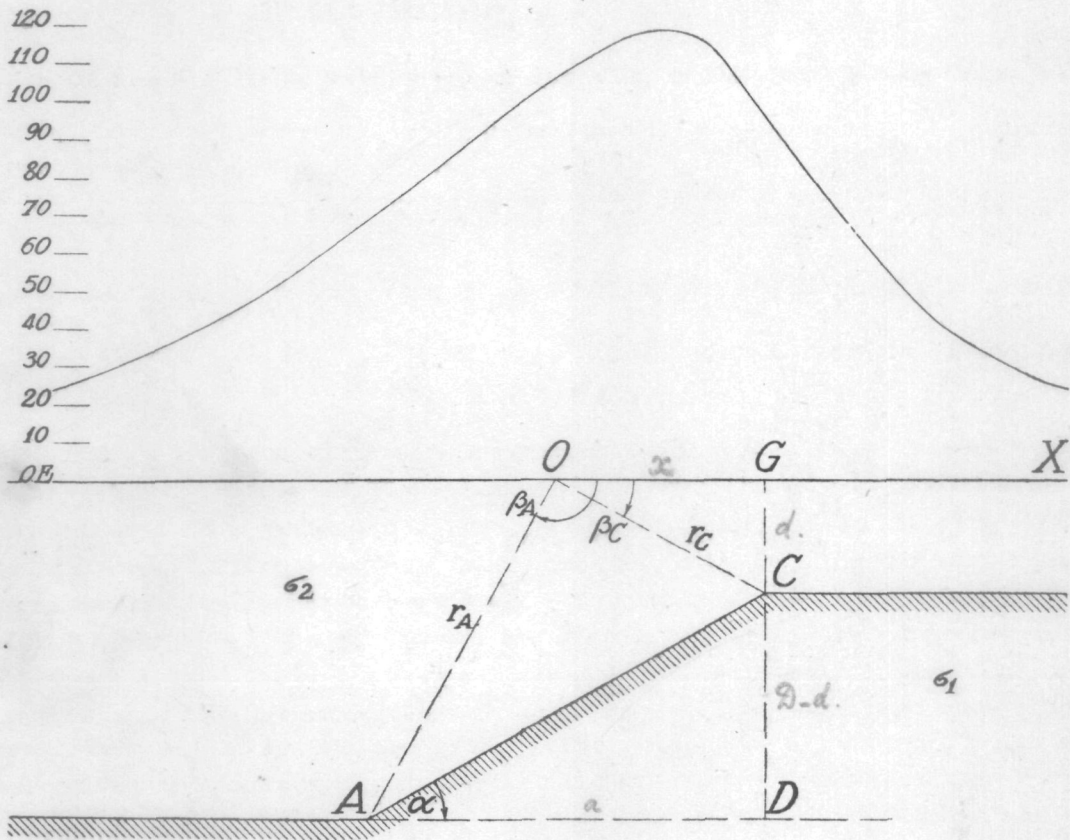


Fig. 15.

De afstand van het maximum tot  $G$  zal dus grooter zijn naarmate de verschuiving minder steil is.

Het verloop der krommingsfactoren over eene hellende verschuiving is voorgesteld in fig. 16 waar weer is genomen  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $CG = 100$  M en  $CD = 200$  M.

Ook thans vinden wij weer dat  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  zoowel positief als negatief kan zijn; het punt  $E$  waarin deze grootheid de waarde nul aanneemt valt echter nu niet meer samen met  $G$ . Indien  $\sigma_1 > \sigma_2$  zijn rechts van  $E$  de  $R$ -lijnen evenwijdig aan de  $Y$ -as en links van  $E$  evenwijdig aan de  $X$ -as gericht. De absolute waarde van  $R$  in elk punt is tevens nog aangegeven door middel van eene uit twee positieve takken bestaande kromme. Uit deze kromme en eveneens uit de kartographische voorstelling ziet men dat  $R$  links en rechts

van  $E$  eene maximum waarde bereikt. Zij  $x$  de afstand van de punten waar de extreme waarden optreden tot  $G$  dan vindt men gemakkelijk:

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + dD} \dots \dots \dots (24)$$

Ten slotte zullen wij nog aantonen dat, indien wij zoowel de gradientenkrommen als die der krommingsfactoren tot onze beschikking hebben, al de elementen eener verschuiving door berekening kunnen worden gevonden.

Voor eene verticale verschuiving kennen wij dan de waarde van den maximalen gradient n.l.  $2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{H}{h}$ . Indien  $\sigma_1 - \sigma_2$  bekend is of althans met voldoende nauwkeurigheid kan worden geschat, kan men hieruit de waarde van  $\frac{H}{h}$  berekenen. Verder kennen wij uit de waarnemingen de ligging der punten waar de maximum krommingsfactoren optreden, dus is  $\sqrt{hH}$  bekend uit formule 21. Wij hebben derhalve twee vergelijkingen met  $h$  en  $H$  als onbekenden. Door deze vergelijkingen op te lossen zijn dan de elementen der verschuiving bekend.

Het vraagstuk is ook op te lossen indien men het soortelijk gewichtsverschil der beide formaties niet kent. Daartoe merken wij op, dat de gradientenkromme twee buigpunten vertoont aan weerszijden van het punt, waar de maximum gradient voorkomt. Differentieeren wij de uitdrukking voor den gradient twee malen naar  $x$  en stellen wij het resultaat gelijk aan nul, dan vinden wij:

$$x^4 + x^2 \frac{h^2 + H^2}{3} - \frac{h^2 H^2}{3} = 0.$$

Hieruit vinden wij, daar slechts de positieve wortel voldoet:

$$x^2 = -\frac{h^2 + H^2}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{(h^2 + H^2)^2 + 12 h^2 H^2}.$$

Indien de afstand van een der buigpunten van de gradientenkromme tot het maximum kan worden afgelezen, maakt bovenstaande vergelijking in combinatie met formule 21 het mogelijk  $h$  en  $H$  op te lossen en dus de elementen der verschuiving te bepalen ook al is het soortelijk gewichtsverschil onbekend. Hierbij moet echter worden opgemerkt, dat niet alleen de boven afgeleide vergelijking niet zeer geschikt is voor praktisch gebruik, maar dat het tevens meestal moeilijk is de ligging van de buigpunten der gradientenkromme met een voldoende graad van nauwkeurigheid aan te geven. De methode, waarbij van de grootte van den maximum gradient gebruik wordt gemaakt, verdient daarom de voorkeur.

Ook eene hellende verschuiving is geheel bepaald indien beide krommen bekend zijn. Uit formule 24 zien wij, dat de halve afstand der punten  $R$  en  $S$  (fig. 16), waar de maximum krommingsfactoren optreden, gelijk is aan  $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4 dD}$ . Zij  $p$  deze afstand, welke van de opgemeten kromme kan worden afgelezen, dan is dus:

$$|MS| = p = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4 dD} \dots \dots \dots (a)$$

Verder is:

$$SG = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4 dD}.$$

Dus:

$$MG = |MS| + SG = \frac{a}{2}.$$



Een derde vergelijking geeft ons nu het feit dat in  $E$  de krommingsfactor gelijk is aan nul. Daar deze voorwaarde echter door een transcendente vergelijking wordt uitgedrukt, doen wij praktisch het best door op de volgende wijze te werk te gaan.

De ligging van  $R$ ,  $S$ ,  $M$  en  $E$  is bekend. Op een willekeurig punt  $N$  van de loodlijn  $MN$  op  $RS$  zetten wij een loodlijn  $AD$  van willekeurige lengte af, doch zóó dat  $AN = ND$ . Het punt  $C$  is nu bepaald uit:

$$\frac{CG}{GD} = \frac{AD - 2ML}{AD + 2ML}.$$

Daarna berekenen wij den krommingsfactor van  $AC$  in het bekende punt  $E$ . De gevonden waarde moet nu gelijk zijn aan nul. Is dat niet het geval, dan kiezen wij, terwijl wij  $AD$  onveranderd laten, een ander punt  $N$  en berekenen weer de ligging van  $C$  en daarna den krommingsfactor in  $E$ . In de praktijk heeft men meestal zeer snel die ligging van  $AC$  gevonden, waarvoor de krommingsfactor in  $E$  gelijk is aan nul en die dus aan al de voorwaarden voldoet. Op deze wijze kan dus de verschuiving ondubbelzinnig worden bepaald, indien de gradienten en krommingsfactoren bekend zijn. De kennis van het soortelijk gewichtsverschil der beide formaties is overbodig.

De hier gegeven oplossing is wiskundig onbevredigend, omdat zij berust op het probeeren of een zekere factor in een zeker punt al dan niet gelijk wordt aan nul. Het is nu wel mogelijk een directe oplossing te geven, waarbij al de onbekenden door middel van algebraïsche vergelijkingen zijn uitgedrukt, doch voor de praktijk is deze oplossing ongeschikt.

Indien men n.l. de grootte  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  in elk punt uitzet als ordinaat en het teeken mede in aanmerking neemt (dus de kromme niet laat bestaan alléén uit positieve takken), dan ziet men dat de kromme een buigpunt heeft in het punt waar zij door nul gaat. De plaats van dat buigpunt, en dus de lengte van  $EG$  of  $EL$  is derhalve te berekenen, waardoor wij dan een derde algebraïsche vergelijking zouden vinden in  $a$ ,  $d$  en  $D$ . Deze vergelijking blijkt echter van den zesden graad en bovendien zeer gecompliceerd te zijn, zoodat de boven uiteengezette methode voor de praktijk de eenig bruikbare is.

#### *Anticlinalen.*

Het opsporen van anticlinalen vormt een der belangrijkste toepassingen der gravimetrie. Een in de richting der as onbegrensd veronderstelde anticlinaal kan men beschouwen als een combinatie van twee oneindig lange, rechte, driezijdige prisma's. Voor deze lichamen hebben wij reeds de formules voor gradienten en krommingsfactoren afgeleid, welke formules wij dus slechts hebben te combineeren om den invloed van een anticlinaal te vinden.

Met behulp van formule 5 en 13 vinden wij dan dat voor een symmetrische anticlinaal (fig. 17) de gradient wordt gegeven door de uitdrukking:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha \left\{ \beta_A + \beta_D - 2 \beta_C + \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{r_A}{r_D} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

De gradientenkromme van fig. 17 is berekend voor  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $CG = CB = 100$  M. De kromme is symmetrisch ten opzichte van  $G$  in welk punt zij, zooals gemakkelijk te bewijzen is, een buigpunt vertoont. In dit punt verandert de gradient van teeken.

Aan weerszijden van  $G$  bereikt de gradient een maximale en een minimale waarde. Zij  $x$  de afstand van het punt waar de extreme waarde optreedt tot  $G$  en zij  $AB = BD = a$ ,  $CG = h$  en  $BC = H$ , dan is dus:

$$\beta_A = bgtg \frac{h+H}{x-a}, \quad \beta_D = bgtg \frac{h+H}{x+a}, \quad \beta_C = bgtg \frac{h}{x}$$

$$tg \alpha = \frac{H}{a}, \quad \ln \frac{r_A}{r_D} = \frac{1}{2} \ln \frac{(x-a)^2 + (h+H)^2}{(x+a)^2 + (h+H)^2}$$

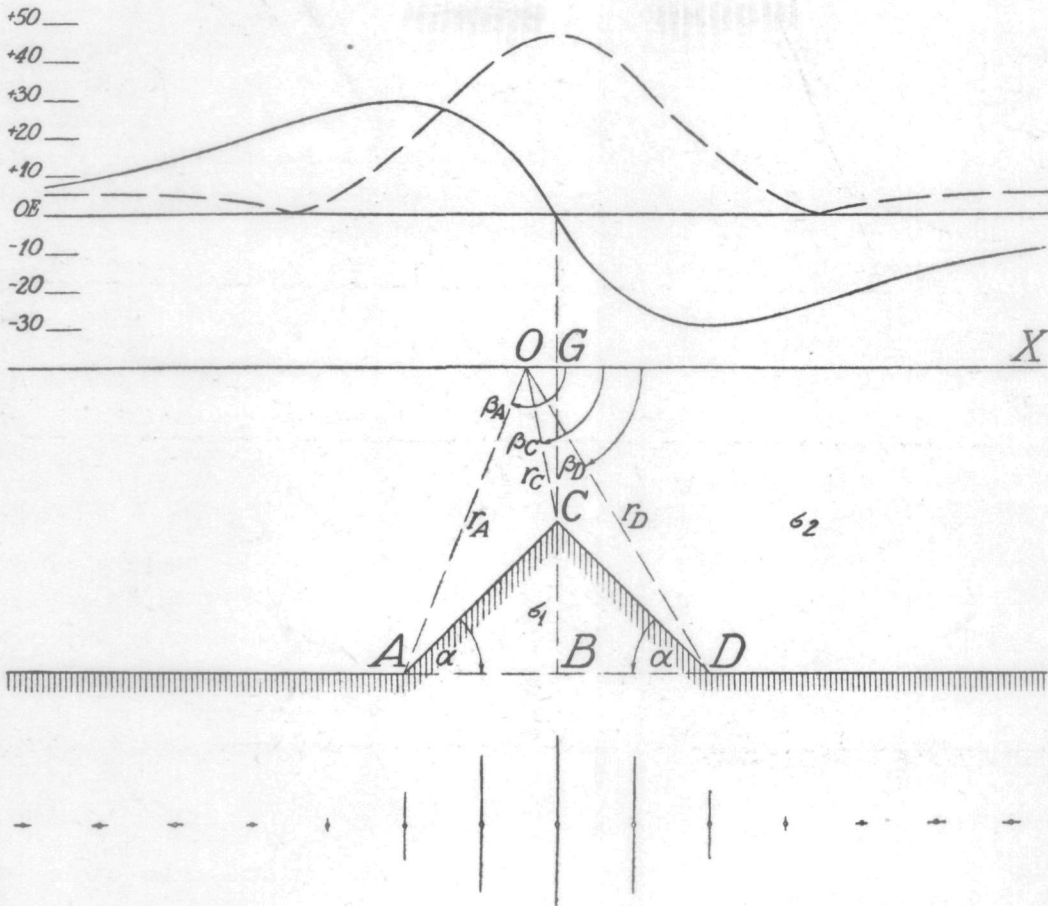


Fig. 17.

Indien wij deze waarden substitueeren in formule 25, naar  $x$  differentieeren en het resultaat gelijk aan nul stellen dan komt er:

$$\frac{-(H+h)}{(x-a)^2 + (H+h)^2} - \frac{H+h}{(x+a)^2 + (H+h)^2} + \frac{2h}{x^2+h^2} + \frac{H}{a} \left\{ \frac{x-a}{(x-a)^2 + (H+h)^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + (H+h)^2} \right\} = 0.$$

Zij verder  $AG = R$ , dan vinden wij, wanneer wij bovenstaande vergelijking oplossen:

$$x = \pm R \sqrt{\frac{h}{2H+3h}} \dots \dots \dots (26)$$



Differentieeren wij nu naar  $x$  en stellen wij het resultaat gelijk aan nul, dan vinden wij na vereenvoudiging:

$$\frac{ah - x(2h + H)}{(h + H)^2 + (x - a)^2} + \frac{bh + x(2h + H)}{(h + H)^2 + (x + b)^2} = 0.$$

Hieruit vindt men voor den afstand van de punten waar de extreme waarden van den gradient optreden tot  $G$ :

$$x = \frac{(2h + H)(a - b) \pm \sqrt{[(2h + H)^2(a - b)^2 + 4h(3h + 2H)\{(h + H)^2 + ab\}]}}{2(3h + 2H)}. \quad (28)$$

Wij merken reeds op dat het punt waar de gradient van teeken verandert thans niet meer samenvalt met de as, gelijk dat het geval was bij een symmetrische anticlinal. Bij een asymmetrische anticlinal is dit punt ten opzichte van de as verschoven in de richting van den zwakker hellenden vleugel; boven dien vleugel is ook de kromme minder steil.

Indien de top van de anticlinal zich op niet te geringe diepte onder de oppervlakte bevindt, zal in 't algemeen, vooral indien de graad van asymmetrie niet zeer groot is, het punt waarin de gradient van teeken verandert zeer dicht liggen bij het midden van de punten waarin de maximum en minimum gradienten optreden. Wij vinden dan als benaderde waarde voor de verschuiving van de gravimetrische ten opzichte van de geologische as:

$$v = \frac{b - a}{2} \left( \frac{2h + H}{3h + 2H} \right) \dots \dots \dots (29)$$

waarbij is verondersteld, dat  $b > a$  en waar met  $v$  de afstand van de geologische as tot het omkeerpunt der gradienten in de richting van den zwakker hellenden vleugel wordt aangeduid.

De waarde, welke wordt gevonden met behulp van bovenstaande formule, is te groot en de afwijking van de werkelijke waarde stijgt naarmate de anticlinal meer asymmetrisch is.

Stelt men de uitdrukking voor den gradient, na de daarin voorkomende grootheden te hebben uitgedrukt in  $x$ , gelijk aan nul, dan is de juiste waarde van de verschuiving van de gravimetrische as bepaald door middel van de aldus gevormde vergelijking, welke echter niet direct kan worden opgelost. Een algebraische vergelijking in  $x$  kan worden opgesteld door gebruik te maken van het feit, dat de gradientenkromme een buigpunt vertoont daar waar zij de  $X$ -as snijdt. De plaats van dit buigpunt, dat dus samenvalt met het punt waar de gradient van teeken verandert, kan op de gewone wijze worden berekend. Voert men deze bewerking uit, dan vindt men  $v$  als een der wortels eener ingewikkelde hoogere machtsvergelijking, welke voor praktische berekeningen geheel ongeschikt is.

Men kan ook nog op eene andere en eenvoudiger wijze eene algebraische vergelijking opstellen, waardoor de verschuiving van de gravimetrische ten opzichte van de geologische as is bepaald. Hiertoe merken wij op, dat, gelijk gemakkelijk is in te zien, de ligging van het punt waar de gradient door nul gaat, niet afhangt van de lengte der as zoolang deze door het  $XZ$ -vlak gehalveerd wordt. Wij kunnen dus den gradient berekenen voor een anticlinal, waarvan de as zich aan weerszijden van het  $XZ$ -vlak slechts uitstrekt over een afstand  $dy$  (m.a.w. voor een oneindig dunne schijf) en de aldus gevonden uitdrukking gelijk stellen aan nul. Voeren wij deze berekening uit, dan vinden wij:

$$\frac{h}{(h - x \operatorname{tg} \gamma) r_C} - \frac{h + H}{(h - x \operatorname{tg} \gamma) r_D} + \frac{1}{r_D} + \frac{h + H}{(h + x \operatorname{tg} \alpha) r_A} - \frac{h}{(h + x \operatorname{tg} \alpha) r_C} - \frac{1}{r_A} = 0. \quad (30)$$

Op deze wijze is het probleem teruggebracht tot de oplossing eener algebraische vergelijking. Daar echter  $r_A = \sqrt{(x-a)^2 + (h+H)^2}$ ,  $r_D = \sqrt{(x+b)^2 + (h+H)^2}$  en  $r_C = \sqrt{x^2 + h^2}$  blijkt ook deze vergelijking ten slotte te ingewikkeld en dus ongeschikt te zijn voor praktische berekeningen.

De uitdrukking van den krommingsfactor van een anticlinal vindt men zonder verdere afleiding door de reeds berekende waarden voor de prisma's  $ABC$  en  $DBC$  samen te voegen.

Voor de symmetrische anticlinal (fig. 14) heeft men:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \sin^2 \alpha (\beta_D - \beta_A) - \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{r_C^2}{r_A r_D} \right\} \quad (31)$$

Voor het in fig 17 voorgestelde geval zijn de krommingsfactoren weer berekend voor  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $CG = CB = 100$  M. en het resultaat is op de gebruikelijke wijze graphisch voorgesteld. Men ziet dat het maximum samenvalt met de as van de anticlinal, hetgeen men ook door berekening gemakkelijk kan bewijzen. Wij merken hierbij nog op dat, indien  $\sigma_1 > \sigma_2$ , het normaalvlak dat de maximum kromtestraal bevat, in de nabijheid der anticlinalas evenwijdig aan deze laatste gericht is; de equipotentiaalvlakken zijn dus positief (convex naar boven) gekromd. In de graphische voorstelling komt dit tot uiting in de richting der lijnen welke de grootte van den factor  $R$  in elk punt aangeven. Aan weerszijden van de as, in punten waarvan de ligging afhangt van de diepte van basis en top en van de helling der vleugels, verandert  $tg 2 \lambda$  van teeken en daarmede de  $R$ -lijnen van richting. Gaan wij uit van de veronderstelling dat  $\sigma_1 < \sigma_2$ , dan zullen de  $R$ -lijnen in de nabijheid der as loodrecht daarop gericht zijn, m. a. w. in dat geval zijn de equipotentiaalvlakken negatief (concaaf naar boven) gekromd.

Is de anticlinal asymmetrisch dan vindt men voor den krommingsfactor:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \sin^2 \alpha (\beta_C - \beta_A) + \sin^2 \gamma (\beta_D - \beta_C) - \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{r_C}{r_A} + \sin \gamma \cos \gamma \ln \frac{r_D}{r_C} \right\} \quad (32)$$

In fig. 18 zijn de volgens bovenstaande formule berekende krommingsfactoren weer op de beide gebruikelijke wijzen graphisch voorgesteld. De grootte  $R$  bereikt thans hare maximum waarde in een punt niet samenvallend met de as. In het algemeen echter bezitten de in de praktijk waargenomen krommingsfactoren niet een zoodanigen graad van nauwkeurigheid dan dat men uit deze verplaatsing van het maximum ten opzichte van de as zou kunnen concluderen tot den waarschijnlijken vorm van de anticlinal. Het heeft dan ook geen nut deze verplaatsing in een formule uit te drukken.

Ook een anticlinal is volkomen bepaald, indien de gradienten en krommingsfactoren gegeven zijn. Wij hebben, voor een symmetrische anticlinal, daartoe slechts drie vergelijkingen met  $H$ ,  $h$  en  $a$  als onbekenden op te stellen.

De eerste vergelijking vinden wij uit den afstand van den maximum gradient tot de as, nl.:

$$p = \sqrt{\frac{h \{a^2 + (h+H)^2\}}{2H + 3h}} \quad (a)$$

Is  $\sigma_1 - \sigma_2$  bekend, dan geeft de waarde van den met de as samenvallenden maximum krommingsfactor de tweede vergelijking:

$$q = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{H}{H^2 + a^2} \left\{ a \ln \frac{(h+H)^2 + a^2}{h^2} - 2 H \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{a}{H+h} \right\} \quad (b)$$



Ten slotte is het punt bekend waar de krommingsfactor gelijk is aan nul; zij  $r$  de afstand van dit punt tot de as dan geeft deze voorwaarde ons de derde vergelijking:

$$0 = bgtg \frac{H+h}{r+a} - bgtg \frac{H+h}{r-a} - \frac{a}{2H} \ln \frac{(r^2+h^2)^2}{\{(H+h)^2+r^2+a^2\}^2 - 4r^2a^2} \quad (c)$$

Theoretisch is hiermede het probleem opgelost. Praktisch echter kan men de onbekenden uit bovenstaande vergelijkingen niet direct oplossen en moet men dus ook hier, gelijk dat het geval was bij eene hellende verschuiving, de oplossing door probeeren trachten te vinden.

Ook voor een asymmetrische anticlinal laten zich dergelijke vergelijkingen opstellen. Deze zijn echter te gecompliceerd en hebben derhalve geen praktische beteekenis. Bovendien is het in de praktijk dikwijls reeds moeilijk uit de kromme te concludeeren of men al dan niet met een asymmetrische anticlinal te doen heeft, vooral indien de graad van asymmetrie niet zeer hoog is. Men moet zich dan ook veelal tevreden stellen met het constateeren dat een anticlinal aanwezig is en eene quantitative interpretatie kan in zeer vele gevallen niet of slechts bij benadering worden gegeven.

In het voorgaande hebben wij voor in ééne richting onbegrensde lichamen alle formules afgeleid welke in de praktijk worden toegepast. Vóór wij tot de behandeling der begrensde lichamen overgaan, mogen nog eenige opmerkingen worden gemaakt.

Men heeft zeer dikwijls te doen met meer dan twee formaties, alle van verschillend soortelijk gewicht, zoodat men in vele gevallen profielen te berekenen krijgt waarvoor men eene combinatie van de in dit hoofdstuk afgeleide formules heeft toe te passen. Als voorbeeld moge hier nog een zeer veelvuldig voorkomend geval worden behandeld.

In de praktijk treft men dikwijls een zwak hellende formatie aan ( $AC$  in fig. 19) welke zich over grooten afstand uitstrekt; in vele gevallen vormt een dergelijke formatie den dieperen ondergrond waarop de jongere sedimenten zijn afgezet. Indien de opmetingen plaats hebben in een betrekkelijk klein gedeelte van het boven deze formatie gelegen gebied zal haar invloed praktisch constant zijn.

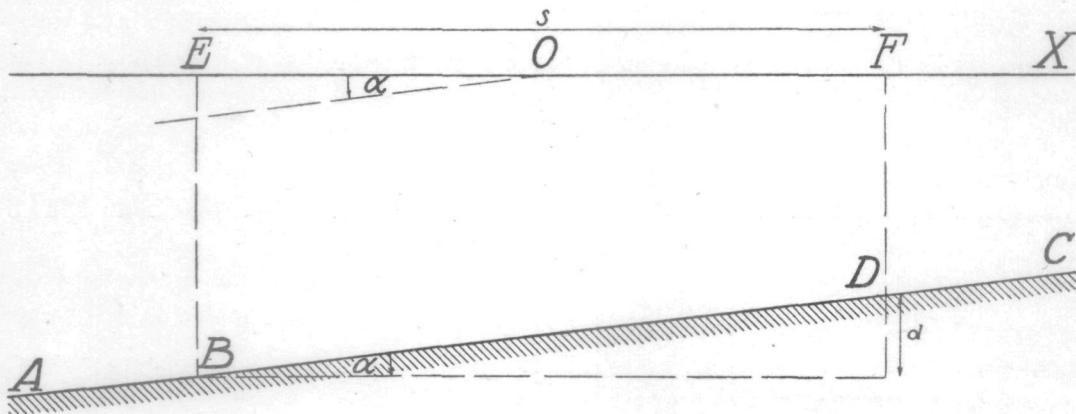


Fig. 19.

Passen wij formule 1 toe, dan mogen wij stellen:

$$r_A = r_C, \beta_A - \beta_C = \pi - \alpha$$

zoodat wij vinden voor den gradient in  $O$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = G (\sigma_1 - \sigma_2) (\pi - \alpha) \sin 2\alpha. \quad (33)$$

Hebben wij een isogammenkaart ter beschikking dan kunnen wij gemakkelijk het hoogteverschil  $d$  tusschen twee punten  $B$  en  $D$  schatten door middel van formule 22 welke formule in dit geval mag worden toegepast indien  $\alpha$  klein is.

Wij hebben n.l.:

$$\Delta g = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dg}{dx} dx = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) (\pi - \alpha) (x_2 - x_1) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Zij  $s$  de afstand van  $E$  tot  $F$  dan is dus:

$$\Delta g = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) (\pi - \alpha) s \sin \alpha \cos \alpha.$$

Nu is  $s = \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha}$  zoodat er komt:

$$\Delta g = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) (\pi - \alpha) d \cos^2 \alpha.$$

Indien  $\alpha$  klein is mogen wij hiervoor dus schrijven:

$$\Delta g = 2 \pi G (\sigma_1 - \sigma_2) d.$$

Met behulp van formule 22 kan dus uit een isogammenkaart het hoogteverschil  $d$  tusschen twee punten bij benadering worden geschat.

Eene over eenen grooten afstand zwak hellende formatie vormt dikwijls den ondergrond van geplooidde jongere sedimenten.

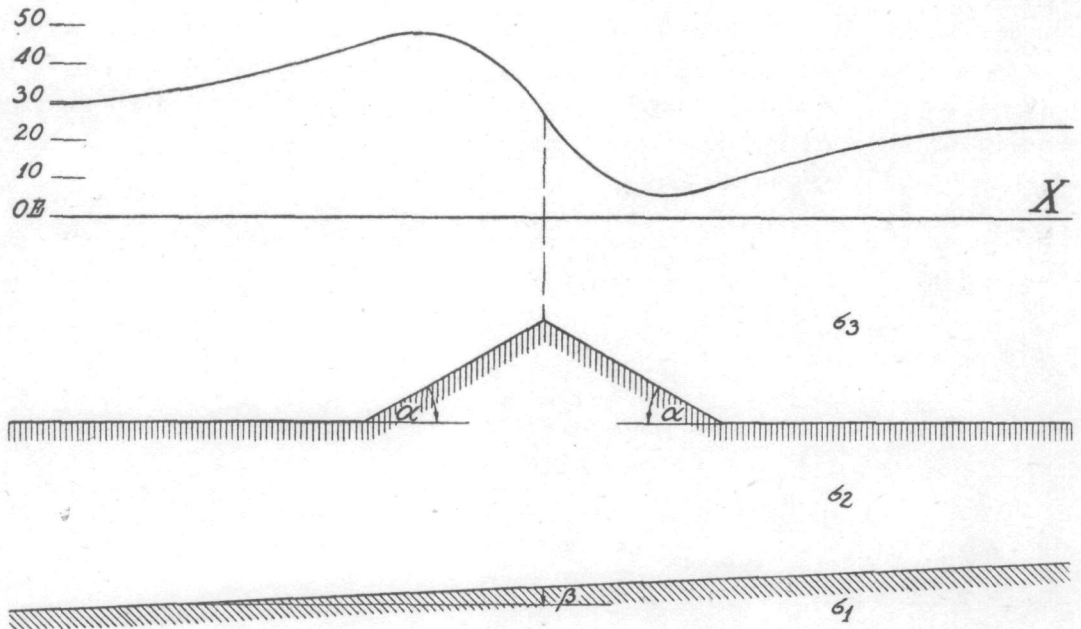


Fig. 20.

Ten gevolge van den invloed der diepere formatie zal de aanwezigheid van een anticlinal dan in vele gevallen zich slechts uiten in eene verandering in de grootte der waargenomen gradienten, terwijl het teeken onveranderd blijft. Het volgende geval is hiervan een voorbeeld (fig. 20).

De gradientenkromme is berekend voor  $\sigma_1 = 2.5$ ,  $\sigma_2 = 1.5$ ,  $\sigma_3 = 1$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 3^\circ$ . Wij zien, dat boven de as de gradient niet van teeken verandert. Indien, gelijk in het hier beschouwde geval, de invloed van de diepere formatie als constant mag worden beschouwd, is de gradientenkromme ten opzichte van de  $X$ -as slechts naar boven verschoven en de as van den anticlinaal valt dan samen met het buigpunt der kromme. Van deze eigenschap maakt men in de praktijk zeer dikwijls gebruik om gravimetrisch de ligging der plooingsassen te bepalen in geologisch ingewikkeld gebouwde gebieden.

---

### HOOFDSTUK III.

#### De invloed van begrensde lichamen.

De in de natuur voorkomende geologische structuren behooren steeds tot de begrensde lichamen en men zou derhalve kunnen meenen dat de voor onbegrensde lichamen afgeleide formules slechts zelden kunnen worden toegepast. Dit is echter niet het geval want de invloed van onderaardsche massa's blijkt, vooral wat de gradienten betreft, zeer snel af te nemen met den afstand tot de balans zoodat verschuivingen en anticlinalen praktisch in de meeste gevallen als in ééne richting onbegrensd mogen worden beschouwd. Hierbij komt nog dat de onnauwkeurigheden, welke tengevolge van onvoldoende topographische correcties en van de heterogene samenstelling der formaties zich bij metingen in het veld niet laten vermijden, eene strenge berekening met behulp van formules voor begrensde lichamen meestal illusorisch maken. Bovendien zijn de formules voor begrensde lichamen bijna steeds zeer ingewikkeld en reeds uit dien hoofde meestal ongeschikt voor praktisch gebruik.

Deze conclusies kunnen echter slechts worden bewezen door de uitdrukkingen voor begrensde lichamen op te stellen en met behulp daarvan na te gaan in hoeverre zij voor de praktijk van nut zijn en hoe groot in bepaalde gevallen de fout is welke men maakt wanneer men begrensde door in ééne richting oneindig lange lichamen vervangt.

Wij zullen daartoe in dit hoofdstuk eenige formules afleiden voor geologisch veel voor-

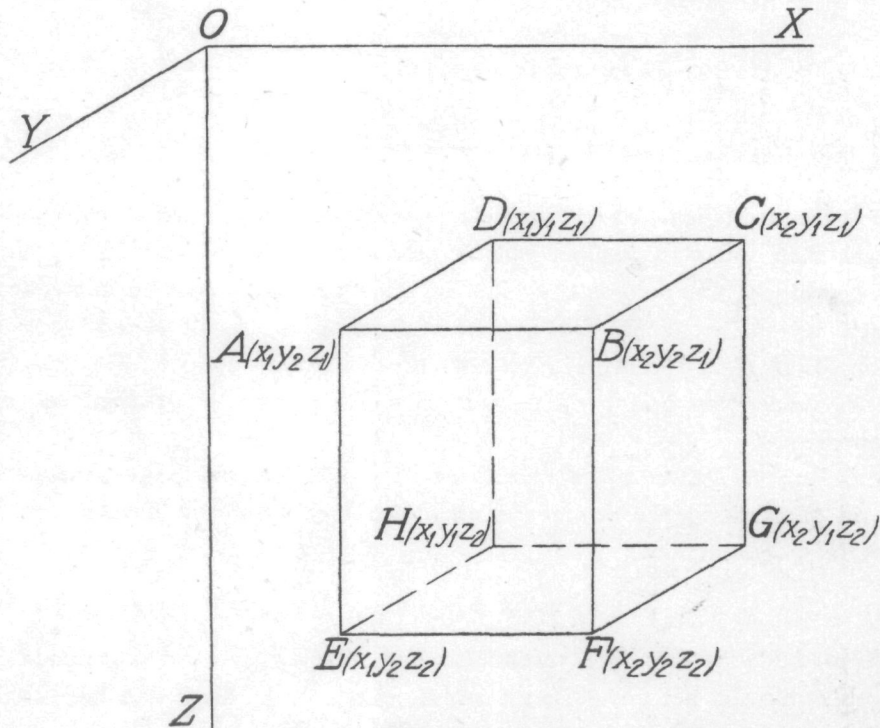


Fig. 21.

komende lichamen en als eerste voorbeeld zal een rechthoekig parallelipedum worden genomen omdat de hiervoor geldende uitdrukkingen betrekkelijk eenvoudig zijn en bovendien in de praktijk veelvuldig worden toegepast, n.l. bij de berekening van den invloed van lensvormige lichamen en van zoutkoepels van het in Texas zeer veel voorkomend type. Hierbij mag worden opgemerkt dat het voor de hand zou liggen een zoutkoepel van het Texaansche type voor te stellen door een verticalen cylinder. De berekening toont echter aan dat de gradient van een cylinder in een willekeurig punt wordt uitgedrukt door elliptische integralen zoodat op die wijze geene voor de praktijk bruikbare formule wordt gevonden.

De berekening van den gradient werd reeds uitgevoerd op pag. 18. Substitueeren wij in de aldaar gevonden algemeene uitdrukking  $\sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_1^2} = r_A$  etc., dan komt er (fig. 21):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{(y_2 + r_A) (y_1 + r_C) (y_2 + r_F) (y_1 + r_H)}{(y_1 + r_D) (y_2 + r_B) (y_1 + r_G) (y_2 + r_E)} \dots \quad (34)$$

Thans is echter  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$  niet gelijk aan nul. Men vindt hiervoor gemakkelijk:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{(x_2 + r_F) (x_1 + r_H) (x_1 + r_A) (x_2 + r_C)}{(x_1 + r_E) (x_2 + r_G) (x_2 + r_B) (x_1 + r_D)} \dots \quad (35)$$

Bij het onderzoek naar zoutkoepels worden, zoodra eenige gradienten de aanwezigheid van een koepel hebben aangetoond, meerdere profielen door het middelpunt van den koepel in verschillende richtingen opgemeten, om aldus de ligging van den rand zoo nauwkeurig mogelijk te bepalen. Denken wij ons een profiel gelegd door de middens van  $AN$  en  $BM$  (fig. 22) en zij  $AD = BC = a$ , dan vindt men door middel van formule 34 voor den gradient in  $O$  de uitdrukking:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{(a + r_F) (a + r_A) r_C r_H}{(a + r_E) (a + r_B) r_D r_G} \dots \quad (36)$$

Het is duidelijk dat in dit geval  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$ .

Wij veronderstellen dat de gemeten gradienten in de nabijheid van den koepel in hoofdzaak hun ontstaan danken aan de betrekkelijk zware „caprock”, voor een groot gedeelte bestaande uit dolomiet, welke bij vele der in Texas voorkomende koepels wordt gevonden boven het zout. De gradientenkromme is nu berekend voor  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$ ,  $a = 500$  M.,  $PQ = 300$  M.,  $AE = 100$  M. en  $AB = 1000$  M.

Het is verder van belang na te gaan in welke punten de gradient een extreme waarde zal aannemen.

Zij  $OP = x$ ,  $DC = 2b$ ,  $PQ = h$  en  $PQ + CG = H$ . Eene benaderde waarde voor  $x$  kan nu gemakkelijk worden gevonden indien men aanneemt dat  $a$ ,  $h$  en  $H$  groot genoeg zijn om te mogen stellen:

$$a + r_F = a + r_E \quad \text{en} \quad a + r_A = a + r_B.$$

Het is duidelijk dat deze veronderstelling zeker mag worden gemaakt indien ook het zout, gelijk dikwijls het geval is, als zware massa werkt, daar dan het lichaam waarvan de invloed te berekenen is, zich tot eene zeer groote diepte uitstrekt.

Wij hebben dan:

$$r_C^2 = (x + b)^2 + h^2, \quad r_H^2 = (x - b)^2 + H^2$$

$$r_D^2 = (x - b)^2 + h^2, \quad r_G^2 = (x + b)^2 + H^2$$

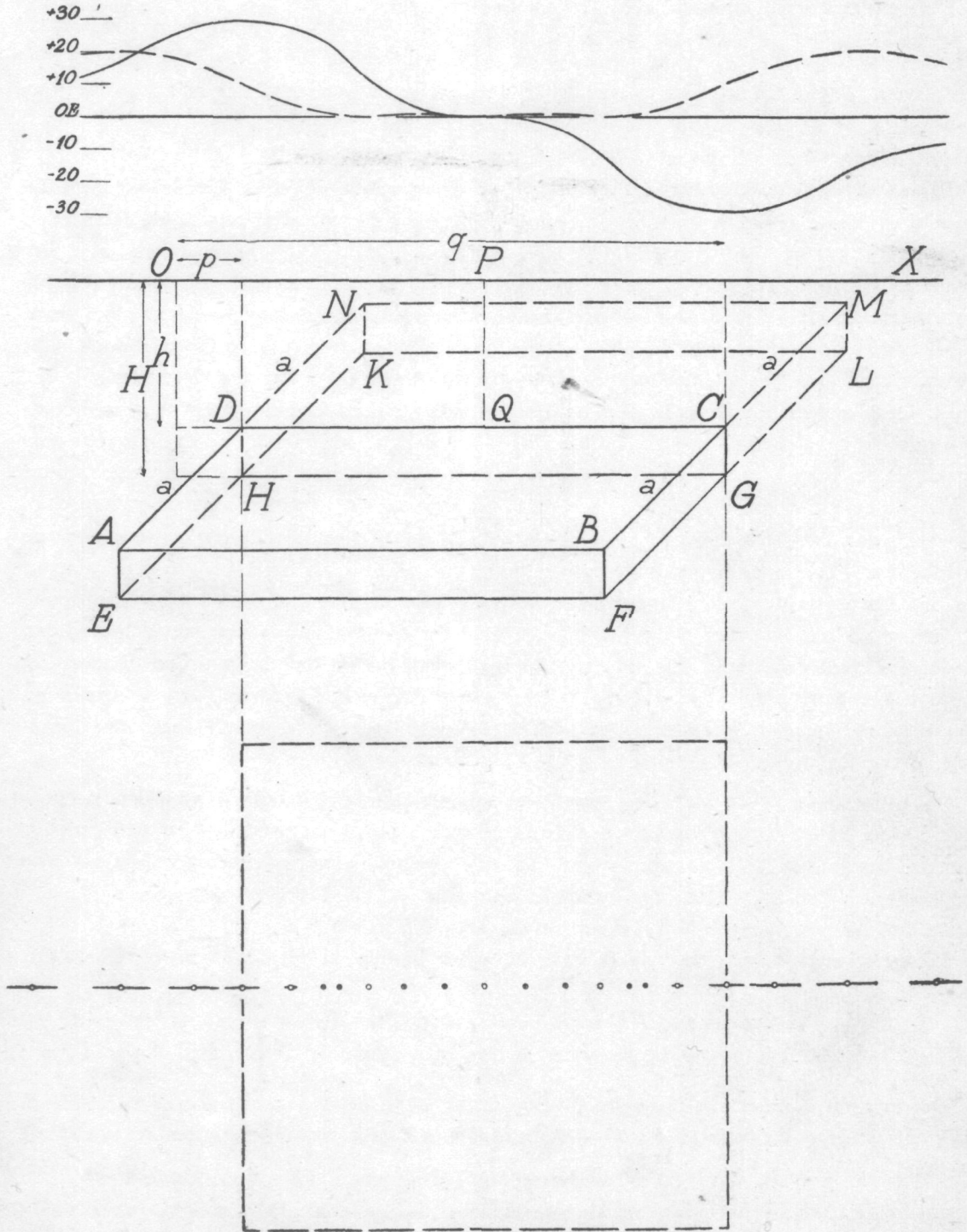


Fig. 22.

Voor den gradient vinden wij derhalve de uitdrukking:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} G (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{\{(x + b)^2 + h^2\} \{(x - b)^2 + H^2\}}{\{(x - b)^2 + h^2\} \{(x + b)^2 + H^2\}}.$$

Differentieeren wij nu naar  $x$  en stellen we het resultaat gelijk aan nul dan vinden wij de vergelijking:

$$x^4 + \frac{1}{3} x^2 (h^2 + H^2 - 2b^2) - \frac{1}{3} \{b^2(b^2 + h^2 + H^2) + h^2 H^2\} = 0 \quad (37)$$

waaruit  $x$  kan worden opgelost.

Passen wij deze formule toe op het in fig. 22 voorgestelde geval en kiezen wij dezelfde afmetingen welke zijn aangenomen bij de berekening van den gradientenkromme, dan vinden wij  $x = \pm 511$  m. Wij zien derhalve dat het maximum praktisch samenvalt met het zijvlak en van deze eigenschap maakt men gebruik bij het zoeken naar den rand van zoutkoepels. Het is duidelijk dat, indien de randen niet verticaal zijn, hetgeen dikwijls het geval is, het maximum verder naar buiten zal liggen. Uit den vorm der gradientenkromme valt gewoonlijk af te leiden of men den rand al dan niet verticaal mag veronderstellen.

In het hier behandelde voorbeeld hebben wij aangenomen dat de gradienten in hoofdzaak hun ontstaan danken aan de aanwezigheid van de zgn. „caprock”. Indien dit laatste ontbreekt en de koepel slechts uit zout bestaat, zijn de gradienten dikwijls van het middelpunt af gericht daar het zout veelal lichter is dan de omgevende sedimenten. Is echter „caprock” aanwezig, dan zal de invloed daarvan in de nabijheid van den koepel sterk overwegen; de werking van het dieper liggende zout mag daar worden verwaarloosd. Op groteren afstand van den koepel echter zal de invloed van het zout groter zijn dan dien van de „caprock” en men vindt hier van het middelpunt af gerichte gradienten indien het zout lichter is dan de omgevende sedimenten. Men kan zich hiervan gemakkelijk overtuigen door onder het eerste een tweede parallelipedum, lichter dan het omgevende medium, aan te nemen en voor dit samengestelde lichaam de berekeningen uit te voeren met behulp der boven afgeleide formules.

De grootheid  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  kan men het gemakkelijkst berekenen door middel van de formule:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \int \frac{dS}{r^2} \cdot \frac{\eta}{r}$$

Dit geeft ons:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \int_{CDHG} \frac{y_1 dx dz}{(x^2 + y_1^2 + z^2)^{3/2}} - \int_{ABFE} \frac{y_2 dx dz}{(x^2 + y_2^2 + z^2)^{3/2}} \right\}$$

De integratie moet hierbij worden uitgestrekt over de vlakken  $CDHG$  en  $ABFE$ . Voor de andere vlakken is  $\cos \alpha = 0$ , zoodat deze geen bijdrage leveren tot de totale integraal.

Wij hebben derhalve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ y_1 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(x^2 + y_1^2 + z^2)^{3/2}} - y_2 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(x^2 + y_2^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \\ &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ y_1 z_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y_1^2)(x^2 + y_1^2 + z_2^2)^{1/2}} - y_1 z_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y_1^2)(x^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - y_2 z_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y_2^2)(x^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2}} + y_2 z_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y_2^2)(x^2 + y_2^2 + z_1^2)^{1/2}} \right\} \\ &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ bgtg \frac{x_2 z_2}{y_1 \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_2^2}} - bgtg \frac{x_1 z_2}{y_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2}} \right. \\ &\quad - bgtg \frac{x_2 z_1}{y_1 \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_1^2}} + bgtg \frac{x_1 z_1}{y_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \\ &\quad - bgtg \frac{x_2 z_2}{y_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} + bgtg \frac{x_1 z_2}{y_2 \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_2^2}} \\ &\quad \left. + bgtg \frac{x_2 z_1}{y_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_1^2}} - bgtg \frac{x_1 z_1}{y_2 \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_1^2}} \right\} \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze wordt ook  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  berekend en men vindt dan, wanneer men schrijft  $OA, OB \dots = r_A, r_B \dots$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ bgtg \frac{x_2 z_2}{y_1 r_G} - bgtg \frac{x_1 z_2}{y_1 r_H} - bgtg \frac{x_2 z_1}{y_1 r_C} \right. \\ &\quad + bgtg \frac{x_1 z_1}{y_1 r_D} - bgtg \frac{x_2 z_2}{y_2 r_F} + bgtg \frac{x_1 z_2}{y_2 r_E} + bgtg \frac{x_2 z_1}{y_2 r_B} - bgtg \frac{x_1 z_1}{y_2 r_A} \\ &\quad - bgtg \frac{y_2 z_2}{x_1 r_E} + bgtg \frac{y_1 z_2}{x_1 r_H} + bgtg \frac{y_2 z_1}{x_1 r_A} - bgtg \frac{y_1 z_1}{x_1 r_D} + bgtg \frac{y_2 z_2}{x_2 r_F} \\ &\quad \left. - bgtg \frac{y_1 z_2}{x_2 r_G} - bgtg \frac{y_2 z_1}{x_2 r_B} + bgtg \frac{y_1 z_1}{x_2 r_C} \right\} \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

Hiermede is de grootheid  $R$  (de krommingsfactor) echter nog niet bepaald want thans is  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  niet gelijk aan nul.

Na het voorgaande zal het duidelijk zijn, dat wij daarvoor vinden:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{(z_2 + r_F)(z_1 + r_A)(z_1 + r_C)(z_2 + r_H)}{(z_1 + r_B)(z_2 + r_E)(z_2 + r_G)(z_1 + r_D)} \dots \dots \dots (39)$$

Voor het in fig. 22 voorgestelde geval zijn ook de krommingsfactoren berekend voor het profiel door de middens van  $AN$  en  $BM$ .

Nu is  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$  en

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2 G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ bgtg \frac{p H}{a r_E} - bgtg \frac{q H}{a r_F} + bgtg \frac{q h}{a r_B} \right. \\ &\quad \left. - bgtg \frac{p h}{a r_A} + bgtg \frac{a h}{p r_A} - bgtg \frac{a H}{p r_E} + bgtg \frac{a H}{q r_F} - bgtg \frac{a h}{q r_B} \right\} \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$



Uit symmetrieoverwegingen volgt dat de krommingsfactoren behorend bij het profiel door de middens van  $AB$  en  $NM$  door dezelfde uitdrukking worden gegeven.

Men ziet dat indien  $\sigma_1 > \sigma_2$  de  $R$ -lijnen zich buiten den omtrek loodrecht op de randen van de projectie van het vlak  $ABCD$  plaatsen, terwijl op zekeren afstand van deze randen  $R$  eene maximale waarde bereikt. Dit gedrag der  $R$ -lijnen is karakteristiek voor zoutkoepels met „caprock” en wordt bij het exploreren naar zulke koepels naast het verloop der gradienten als diagnostisch kenmerk gebezigd.

Indien de doorsnede van den koepel een uitgesproken ovalen vorm bezit kan ter benadering dienen een prisma met ruitvormige doorsnede (fig. 23). Wij zullen voor dit lichaam den gradient berekenen voor een punt gelegen in het symmetrievlak  $ACFD$ .

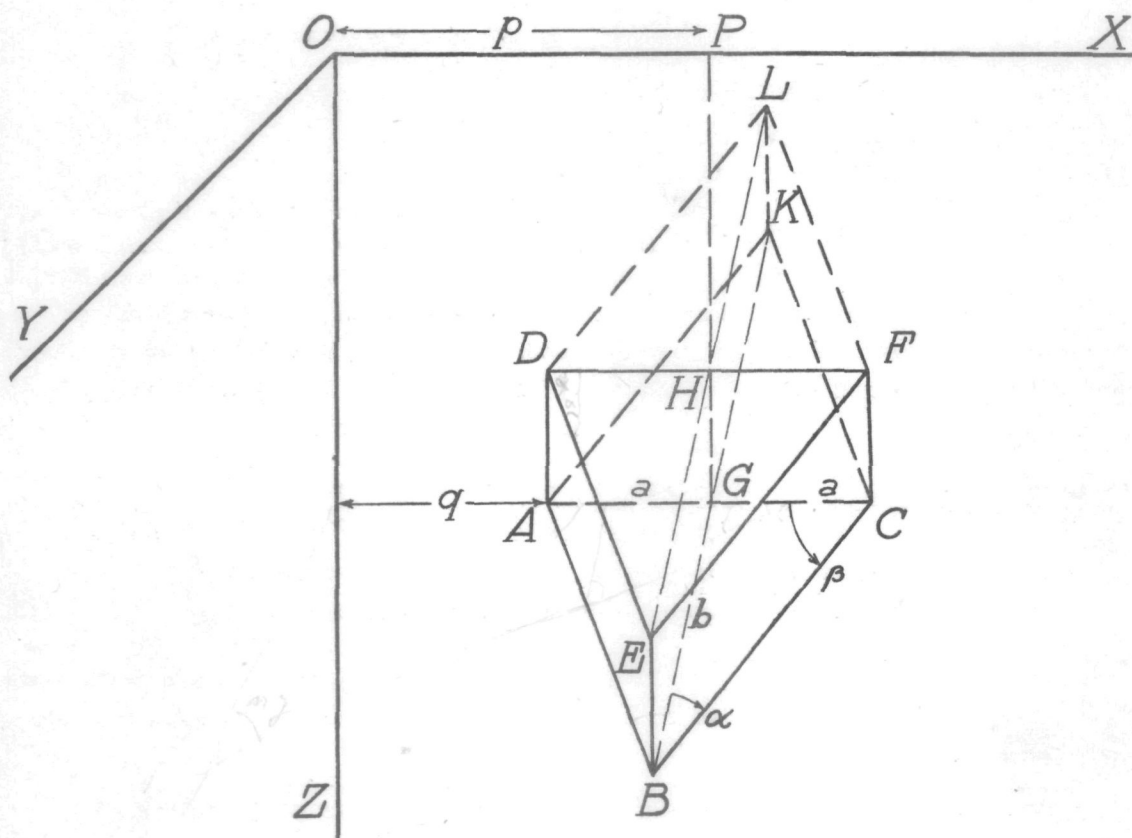


Fig. 23.

Zij  $PG = H$  en  $PH = h$  dan vinden wij gemakkelijk voor den gradient van  $ABGDEH$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^b dy \left[ \frac{1}{(p^2 + y^2 + H^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + H^2)^{3/2}} \right. \\ \left. - \frac{1}{(p^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \right].$$

Nu is  $x = q + y \operatorname{tg} \alpha$  zoodat te bepalen zijn de integralen:

$$I_1 = \int_0^b \frac{dy}{(p^2 + y^2 + H^2)^{1/2}}, \quad I_2 = \int_0^b \frac{dy}{\{(q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + H^2\}^{1/2}},$$

$$I_3 = \int_0^b \frac{dy}{(p^2 + y^2 + h^2)^{1/2}}, \quad I_4 = \int_0^b \frac{dy}{\{(q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + h^2\}^{1/2}}.$$

Wij vinden nu gemakkelijk:

$$I_1 = \ln \frac{b + r_B}{r_G}, \quad I_2 = \cos \alpha \ln \frac{r_B \cos \alpha + b + q \sin \alpha \cos \alpha}{r_A \cos \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$I_3 = \ln \frac{b + r_E}{r_H}, \quad I_4 = \cos \alpha \ln \frac{r_E \cos \alpha + b + q \sin \alpha \cos \alpha}{r_D \cos \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha}$$

De gradient van  $ABGDEH$  is derhalve:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \ln \frac{r_H (b + r_B)}{r_G (b + r_E)} \right. \\ \left. + \cos \alpha \ln \frac{(r_E \cos \alpha + b + q \sin \alpha \cos \alpha) (r_A \cos \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha)}{(r_D \cos \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha) (r_B \cos \alpha + b + q \sin \alpha \cos \alpha)} \right]$$

Voeren wij eveneens de berekening uit voor  $BCGEFH$  en bedenken wij dat de gradient van  $ABCKDEF L$  wordt verkregen door de voor  $ABCDEF$  gevonden waarde met 2 te vermenigvuldigen, dan vinden wij ten slotte voor den gradient van het volledige lichaam:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \left\{ \ln \frac{(r_E \cos \alpha + b + q \sin \alpha \cos \alpha) (r_B \cos \alpha + b - s \sin \alpha \cos \alpha)}{(r_D \cos \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha) (r_C \cos \alpha - s \sin \alpha \cos \alpha)} \right. \\ \left. + \ln \frac{(r_A \cos \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha) (r_F \cos \alpha - s \sin \alpha \cos \alpha)}{(r_B \cos \alpha + b + q \sin \alpha \cos \alpha) (r_E \cos \alpha + b - s \sin \alpha \cos \alpha)} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

waarin  $s = p + a$  en  $q = p - a$ .

Volledigheidshalve zullen wij voor dit lichaam tevens de uitdrukking voor den krommingsfactor afleiden.

Voor de berekening van  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  maken wij nu weer gebruik van de formule:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_S \frac{y \cos(ny) dS}{r^3}$$

Voor het hier gegeven geval vinden wij dan:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{tg} \alpha \left[ - \int_{ABED} \frac{y dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \int_{BCFE} \frac{y dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ \left. + \int_{AKLD} \frac{y dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \int_{CFLK} \frac{y dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

Wij hebben nu, indien  $PG = H$  en  $PH = h$ ,

$$\int_{ABED} \frac{y \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \int_0^b y \, dy \int_{\frac{h}{2}}^H \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= H \int_0^b \frac{y \, dy}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + H^2}} - h \int_0^b \frac{y \, dy}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}.$$

Nu is  $x = y \operatorname{tg} \alpha + q$  dus er komt voor de eerste dezer integralen:

$$H \int_0^b \frac{y \, dy}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + H^2}}$$

$$= H \int_0^b \frac{y \, dy}{\{y^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2 y q \operatorname{tg} \alpha + q^2\} \sqrt{\{y^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2 y q \operatorname{tg} \alpha + q^2 + H^2\}}}.$$

Passen wij thans toe de substitutie  $\frac{y}{\cos \alpha} + q \sin \alpha = t$  dan gaat deze integraal over in:

$$H \cos^2 \alpha \int_{t_1}^{t_2} \frac{t \, dt}{(t^2 + q^2 \cos^2 \alpha) \sqrt{(t^2 + q^2 \cos^2 \alpha + H^2)}} - H q \sin \alpha \cos^2 \alpha \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(t^2 + q^2 \cos^2 \alpha) \sqrt{(t^2 + q^2 \cos^2 \alpha + H^2)}}.$$

Duiden wij deze integralen aan met  $I_1$  en  $I_2$  dan vinden wij:

$$I_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{2} \ln \frac{\sqrt{(t^2 + q^2 \cos^2 \alpha + H^2)} - H}{\sqrt{(t^2 + q^2 \cos^2 \alpha + H^2)} + H} \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Drukken wij deze vorm weer uit in  $y$  en voegen wij de grenzen  $y_2 = b$ ,  $y_1 = 0$  in, dan komt er:

$$I_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{2} \ln \frac{(r_B - H)(r_A + H)}{(r_B + H)(r_A - H)}.$$

Verder vinden wij:

$$I_2 = \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{bgtg} t \frac{H}{q \cos \alpha \sqrt{t^2 + q^2 \cos^2 \alpha + H^2}} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

welke uitdrukking door invoeging der grenzen overgaat in:

$$I_2 = \sin \alpha \cos \alpha \left[ \operatorname{bgtg} \frac{H}{r_B} \left( \frac{b}{q \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) - \operatorname{bgtg} \frac{H}{r_A} \operatorname{tg} \alpha \right].$$

Derhalve is:

$$H \int_0^b \frac{y \, dy}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + H^2}} = I_1 - I_2 =$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{2} \ln \frac{(r_B - H)(r_A + H)}{(r_B + H)(r_A - H)} - \sin \alpha \cos \alpha \left[ \operatorname{bgtg} \frac{H}{r_B} \left( \frac{b}{q \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) - \operatorname{bgtg} \frac{H}{r_A} \operatorname{tg} \alpha \right].$$

Het is duidelijk dat wij verder zullen vinden:

$$h \int_0^b \frac{y dy}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2 + h^2)}} = \frac{\cos^2 \alpha}{2} \ln \frac{(r_E - h)(r_D + h)}{(r_E + h)(r_D - h)} - \sin \alpha \cos \alpha \left[ b g t g \frac{h}{r_E} \left( \frac{b}{q \cos^2 \alpha} + t g \alpha \right) - b g t g \frac{h}{r_D} t g \alpha \right].$$

Wij hebben dus:

$$\int_{ABED} \frac{y dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\cos^2 \alpha}{2} \ln \frac{(r_B - H)(r_A + H)(r_E + h)(r_D - h)}{(r_B + H)(r_A - H)(r_E - h)(r_D + h)} - \sin \alpha \cos \alpha \left[ b g t g \frac{H}{r_B} \left( \frac{b}{q \cos^2 \alpha} + t g \alpha \right) - b g t g \frac{H}{r_A} t g \alpha - b g t g \frac{h}{r_E} \left( \frac{b}{q \cos^2 \alpha} + t g \alpha \right) + b g t g \frac{h}{r_D} t g \alpha \right].$$

Wanneer wij op dezelfde wijze de bijdragen berekenen welke worden geleverd door de overige vlakken, dan vinden wij tenslotte:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{(r_B + H)^2 (r_E - h)^2 (r_A - H)(r_D + h)(r_C - H)(r_F + h)}{(r_B - H)^2 (r_E + h)^2 (r_A + H)(r_D - h)(r_C + H)(r_F - h)} + 2 \sin^2 \alpha \left\{ b g t g \frac{H}{r_B} \left( \frac{b}{q \cos^2 \alpha} + t g \alpha \right) - b g t g \frac{H}{r_A} - b g t g \frac{h}{r_E} \left( \frac{b}{q \cos^2 \alpha} + t g \alpha \right) + b g t g \frac{h}{r_B} + b g t g \frac{h}{r_E} \left( \frac{b}{s \cos^2 \alpha} - t g \alpha \right) + b g t g \frac{h}{r_F} t g \alpha - b g t g \frac{H}{r_B} \left( \frac{b}{s \cos^2 \alpha} - t g \alpha \right) - b g t g \frac{H}{r_C} t g \alpha \right\} \right]. \quad (42)$$

Verder is:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 G(\sigma_1 - \sigma_2) t g \beta \left[ \int_{ABED} \frac{x dx dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \int_{BCFE} \frac{x dx dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right].$$

$$\text{En: } \int_{ABED} \frac{x dx dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = H \int_q^{q+a} \frac{x dx}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2 + H^2)}} - h \int_q^{q+a} \frac{x dx}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2 + h^2)}}$$

Bedenken wij dat  $y = (x - q) t g \beta$  en passen wij toe de substitutie:

$$\frac{x}{\cos \beta} - q \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = t, \text{ dan gaat de eerste dezer integralen over in:}$$

$$H \cos^2 \beta \int_{t_1}^{t_2} \frac{t dt}{(t^2 - q^2 \sin^2 \beta) \sqrt{(t^2 - \sin^2 \beta + H^2)}} + H q \sin^2 \beta \cos \beta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(t^2 - q^2 \sin^2 \beta) \sqrt{(t^2 - q^2 \sin^2 \beta + H^2)}}$$

Duiden wij deze integralen aan met  $I_1$  en  $I_2$  dan is:

$$I_1 = \frac{\cos^2 \beta}{2} \ln \frac{(r_B - H)(r_A + H)}{(r_B + H)(r_A - H)} \text{ en:}$$

$$I_2 = - \frac{\sin \beta \cos \beta}{2} \ln \frac{\left\{ r_B + \frac{H(q \cos^2 \beta + a)}{q \sin \beta \cos \beta} \right\} (r_A - H t g \alpha)}{\left\{ r_A - \frac{H(q \cos^2 \beta + a)}{q \sin \beta \cos \beta} \right\} (r_A + H t g \alpha)}$$

Werken wij op dezelfde wijze de andere integralen uit, dan vinden wij tenslotte:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \times$$

$$\times \left[ \sin \alpha \cos \alpha \ln \frac{(r_B - H)(r_A + H)(r_E + h)(r_D - h)(r_C + H)(r_B - H)(r_F - h)(r_E + h)}{(r_B + H)(r_A - H)(r_E - h)(r_D + h)(r_C - H)(r_B + H)(r_F + h)(r_E - h)} \right.$$

$$+ \cos^2 \alpha \left\{ \ln \frac{(r_B - H \operatorname{tg} \gamma)(r_A + H \operatorname{tg} \alpha)(r_E + h \operatorname{tg} \gamma)(r_D - h \operatorname{tg} \alpha)}{(r_B + H \operatorname{tg} \gamma)(r_A - H \operatorname{tg} \alpha)(r_E - h \operatorname{tg} \gamma)(r_D + h \operatorname{tg} \alpha)} \right.$$

$$\left. \left. + \ln \frac{(r_C + H \operatorname{tg} \alpha)(r_B - H \operatorname{tg} \delta)(r_F - h \operatorname{tg} \alpha)(r_E + h \operatorname{tg} \delta)}{(r_C - H \operatorname{tg} \alpha)(r_B + H \operatorname{tg} \delta)(r_F + h \operatorname{tg} \alpha)(r_E - h \operatorname{tg} \delta)} \right\} \right] \quad (43)$$

waarin:

$$\frac{q \cos^2 \beta + a}{q \sin \beta \cos \beta} = \operatorname{tg} \gamma \text{ en } \frac{s \cos^2 \beta - a}{s \sin \beta \cos \beta} = \operatorname{tg} \delta.$$

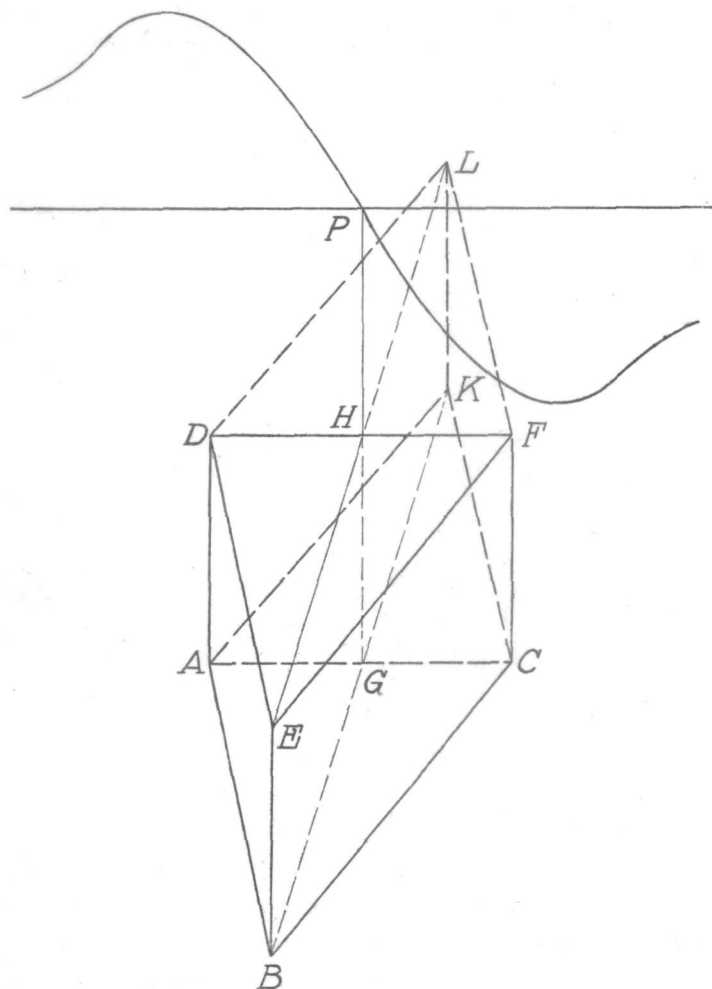


Fig. 24.

Door middel van formule 41 werd de gradientenkromme berekend voor het lichaam  $ABCKDEFL$  (fig. 24) waarbij werd genomen:

$$AG : GH : HP : GB = 2 : 3 : 3 : 4 \text{ en } \sigma_1 - \sigma_2 = 1.$$



Voor  $AKMDLN$  hebben wij nu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{p-a}^p \int_{q-b}^q x \, dx \, dy \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \right\} \\ &= G(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{p-a}^p x \, dx \left\{ \frac{q}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + q^2 + z^2}} - \frac{q-b}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + (q-b)^2 + z^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + q^2 + h^2}} + \frac{q-b}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + (q-b)^2 + h^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Verder is  $z = (p-x) \operatorname{tg} \alpha + d$  zoodat wij dus hebben te bepalen de volgende vier integralen:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{p-a}^p \frac{x \, dx}{[x^2 + \{d + (p-x) \operatorname{tg} \alpha\}^2] \sqrt{x^2 + q^2 + \{d + (p-x) \operatorname{tg} \alpha\}^2}} \\ I_2 &= \int_{p-a}^p \frac{x \, dx}{[x^2 + \{d + (p-x) \operatorname{tg} \alpha\}^2] \sqrt{x^2 + (q-b)^2 + \{d + (p-x) \operatorname{tg} \alpha\}^2}} \\ I_3 &= \int_{p-a}^p \frac{x \, dx}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + q^2 + h^2}} \\ I_4 &= \int_{p-a}^p \frac{x \, dx}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + (q-b)^2 + h^2}} \end{aligned}$$

Werken wij den noemer van  $I_1$  uit en stellen wij  $\frac{x}{\cos \alpha} - \sin \alpha (p \operatorname{tg} \alpha + d) = t$  dan komt er:

$$\begin{aligned} I_1 &= \cos^2 \alpha \int_{t_1}^{t_2} \frac{t \, dt}{\{t^2 + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 \cos^2 \alpha\} \sqrt{t^2 + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 \cos^2 \alpha + q^2}} \\ &+ \cos^2 \alpha \sin \alpha (p \operatorname{tg} \alpha + d) \int_{t_1}^{t_2} \frac{d \, dt}{\{t^2 + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 \cos^2 \alpha\} \sqrt{t^2 + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 \cos^2 \alpha + q^2}}. \end{aligned}$$

Voor de eerste dezer integralen vinden wij:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{2q} \ln \frac{\sqrt{\{x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2x \operatorname{tg} \alpha (p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2\}} - q}{\sqrt{\{x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2x \operatorname{tg} \alpha (p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2\}} + q} \Big|_{p-a}^p$$

Na invoeging der grenzen en vereenvoudiging komt er:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{2q} \ln \frac{r_M - q}{r_M + q} \cdot \frac{r_A + q}{r_A - q}$$

Voor de tweede dezer integralen vinden wij:

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{q} \operatorname{bgtg} \frac{q t}{(p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos \alpha \sqrt{t^2 + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 \cos^2 \alpha + q^2}} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

of, uitgedrukt in  $x$  en na invoeging der grenzen  $x_2 = p$ ,  $x_1 = p - a$ ,

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{q} \left\{ bgtg \frac{q(p \cos \alpha - d \sin \alpha)}{(p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos \alpha \cdot r_M} - bgtg \frac{q(p \cos^2 \alpha - d \sin \alpha \cos \alpha - a)}{(p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos^2 \alpha \cdot r_A} \right\}.$$

Deze uitdrukking laat zich vereenvoudigen. Wij hebben n.l.

$$bgtg \frac{q(p \cos \alpha - d \sin \alpha)}{(p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos \alpha \cdot r_M} = bgtg \frac{q}{r_M} \cdot \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{d}{p}}{1 + \frac{d}{p} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}.$$

Wij merken nu op dat  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \beta$  en  $\frac{d}{p} = \operatorname{tg} N'OP$  waarvoor wij schrijven  $\operatorname{tg} \gamma_{N'}$ .

Derhalve is:

$$\frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{d}{p}}{1 + \frac{d}{p} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma_{N'}}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma_{N'}} = \operatorname{tg}(\beta - \gamma_{N'}).$$

$$\begin{aligned} \text{En } \frac{p \cos^2 \alpha - d \sin \alpha \cos \alpha - a}{(p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos^2 \alpha} &= \frac{(p-a) \cos^2 \alpha - d \sin \alpha \cos \alpha - a + a \cos^2 \alpha}{p \sin \alpha \cos \alpha + d \cos^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{(p-a) \cos^2 \alpha - d \sin \alpha \cos \alpha - a \sin^2 \alpha}{(p-a) \sin \alpha \cos \alpha + d \cos^2 \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(p-a) \cos \alpha - \sin \alpha (d + a \operatorname{tg} \alpha)}{(p-a) \sin \alpha + \cos \alpha (d + a \operatorname{tg} \alpha)} \\ &= \frac{(p-a) \cos \alpha - h \sin \alpha}{(p-a) \sin \alpha + h \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Nu is  $\frac{h}{p-a} = \operatorname{tg} D'OP$  waarvoor wij schrijven  $\operatorname{tg} \gamma_{D'}$ .

Wij vinden dus  $\frac{(p-a) \cos \alpha - h \sin \alpha}{(p-a) \sin \alpha + h \cos \alpha} = \operatorname{tg}(\beta - \gamma_{D'})$ .

Voor de tweede integraal komt er dus:

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{q} \left\{ bgtg \frac{q}{r_M} \operatorname{tg}(\beta - \gamma_{N'}) - bgtg \frac{q}{r_A} \operatorname{tg}(\beta - \gamma_{D'}) \right\}$$

Wij hebben derhalve:

$$I_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{2q} \ln \frac{r_M - q}{r_M + q} \cdot \frac{r_A + q}{r_A - q} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{q} \left\{ bgtg \frac{q}{r_M} \operatorname{tg}(\beta - \gamma_{N'}) - bgtg \frac{q}{r_A} \operatorname{tg}(\beta - \gamma_{D'}) \right\}$$

Na het voorgaande zal het duidelijk zijn dat:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\cos^2 \alpha}{2(q-b)} \ln \frac{r_N - (q-b)}{r_N + (q-b)} \cdot \frac{r_D + (q-b)}{r_D - (q-b)} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{q-b} \times \\ &\quad \times \left\{ bgtg \frac{q-b}{r_N} \operatorname{tg}(\beta - \gamma_{N'}) - bgtg \frac{q-b}{r_D} \operatorname{tg}(\beta - \gamma_{D'}) \right\} \end{aligned}$$

Verder vinden wij:

$$I_3 = \int_{p-a}^p \frac{x dx}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + q^2 + h^2}} = \frac{1}{2q} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + q^2 + h^2} - q}{\sqrt{x^2 + q^2 + h^2} + q} \right| = \frac{1}{2q} \ln \frac{r_K - q}{r_K + q} \cdot \frac{r_A + q}{r_A - q}.$$

En, op dezelfde wijze:

$$I_4 = \frac{1}{2(q-b)} \ln \frac{r_L - (q-b)}{r_L + (q-b)} \cdot \frac{r_D + (q-b)}{r_D - (q-b)}.$$



Wij vinden dus, wanneer we schrijven  $q - b = s$ , voor de  $x$ -component van den gradient van  $AKMDLN$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} G (\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \cos^2 \alpha \ln \frac{r_M - q}{r_M + q} \cdot \frac{r_A + q}{r_A - q} \cdot \frac{r_N + s}{r_N - s} \cdot \frac{r_D - s}{r_D + s} + \right. \\ \left. + 2 \sin \alpha \cos \alpha \left\{ b g t g \frac{q}{r_M} t g (\beta - \gamma_{N'}) - b g t g \frac{q}{r_A} t g (\beta - \gamma_{D'}) - b g t g \frac{s}{r_N} t g (\beta - \gamma_{N'}) + b g t g \frac{s}{r_D} t g (\beta - \gamma_{D'}) \right\} \right. \\ \left. - \ln \frac{(r_K - q)(r_A + q)(r_L - s)(r_D + s)}{(r_K + q)(r_A - q)(r_L + s)(r_D - s)} \right].$$

De berekening van  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$  voor  $BKMCLN$  geschiedt op dezelfde wijze en voor het geheele lichaam vinden wij dan tenslotte na vereenvoudiging:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} G (\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \cos^2 \alpha \ln \frac{(r_A + q)(r_D - s)(r_B - q)(r_C + s)}{(r_A - q)(r_D + s)(r_B + q)(r_C - s)} + 2 \sin \alpha \cos \alpha \left\{ b g t g \frac{q r_N - s r_M}{r_M r_N \cot(\beta - \gamma_{N'}) + q s t g(\beta - \gamma_{N'})} + b g t g \frac{s r_A - q r_D}{r_D r_A \cot(\beta - \gamma_{D'}) + s q t g(\beta - \gamma_{D'})} + b g t g \frac{s r_M - q r_N}{r_M r_N \cot(\beta + \gamma_{N'}) + q s t g(\beta + \gamma_{N'})} + b g t g \frac{q r_C - s r_B}{r_B r_C \cot(\beta + \gamma_C) + q s t g(\beta + \gamma_C)} \right\} - \ln \frac{(r_A + q)(r_D + s)(r_B - q)(r_C - s)}{(r_A - q)(r_D - s)(r_B + q)(r_C + s)} \right] \dots \dots \dots (44)$$

Berekening van  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 3 G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{y z dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$ .

Integreeren wij naar  $y$  en  $z$  dan vinden wij voor  $AKMDLN$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_{p-a}^p dx \left\{ \frac{I}{(x^2 + s^2 + z_1^2)^{1/2}} - \frac{I}{(x^2 + q^2 + z_1^2)^{1/2}} + \frac{I}{(x^2 + q^2 + h^2)^{1/2}} - \frac{I}{(x^2 + s^2 + h^2)^{1/2}} \right\}$$

waarin weer  $s = q - b$ . Bedenken wij nog dat  $z = (p - x) t g \alpha + d$  dan hebben wij dus te bepalen:

$$I_1 = \int_{p-a}^p \frac{dx}{[x^2 + s^2 + \{(p-x) t g \alpha + d\}^2]^{1/2}} \cdot \\ I_2 = \int_{p-a}^p \frac{dx}{[x^2 + q^2 + \{(p-x) t g \alpha + d\}^2]^{1/2}} \cdot \\ I_3 = \int_{p-a}^p \frac{dx}{(x^2 + q^2 + h^2)^{1/2}} \cdot \\ I_4 = \int_{p-a}^p \frac{dx}{(x^2 + s^2 + h^2)^{1/2}} \cdot$$

Wij hebben dus thans:

$$I_1 = \int_{p-a}^p \frac{dx}{[x^2 (1 + t g^2 \alpha) - 2 x t g \alpha (p t g \alpha + d) + s^2 + (p t g \alpha + d)^2]^{1/2}}$$

waarvoor wij derhalve vinden :

$$\frac{I}{\sqrt{s^2(1+tg^2\alpha) + (ptg\alpha + d)^2}} bgtg \frac{(1+tg^2\alpha)x - tg\alpha(ptg\alpha + d)}{\sqrt{s^2(1+tg^2\alpha) + (ptg\alpha + d)^2}} \Big|_{p-a}$$

Zij nu  $\sqrt{s^2(1+tg^2\alpha) + (ptg\alpha + d)^2} = R$  dan is dus :

$$I_1 = \frac{I}{R} \left\{ bgtg \frac{p-dtg\alpha}{R} - bgtg \frac{p-a-htg\alpha}{R} \right\} = \frac{I}{R} bgtg \frac{R \{a + (h-d)tg\alpha\}}{R^2 + (p-dtg\alpha)(p-a-htg\alpha)}$$

$$= \frac{I}{R} bgtg \frac{2aR}{R^2 + (p-dtg\alpha)(p-a-htg\alpha)}$$

Bij verdere vereenvoudiging vindt men:

$$I_1 = \frac{I}{R} bgtg \frac{2aR \cos^2 \alpha}{s^2 + p^2 - ap + hd}$$

Zij nu  $r$  de loodlijn van  $O$  op  $D'N'$ , dan is gemakkelijk in te zien dat :

$$R = \frac{I}{\cos \alpha} \sqrt{s^2 + r^2}, \text{ dus :}$$

$$I_1 = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{s^2 + r^2}} bgtg \frac{2a \cos \alpha \sqrt{s^2 + r^2}}{s^2 + p^2 - ap + hd}$$

Op dezelfde wijze vinden wij :

$$I_2 = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{q^2 + r^2}} bgtg \frac{2a \cos \alpha \sqrt{q^2 + r^2}}{q^2 + p^2 - ap + hd}$$

Verder is :

$$I_3 = \ln \left[ x + \sqrt{x^2 + q^2 + h^2} \right]_{p-a}^p = \ln \frac{p + r_K}{p - a + r_A} \text{ en}$$

$$I_4 = \ln \left[ x + \sqrt{x^2 + s^2 + h^2} \right]_{p-a}^p = \ln \frac{p + r_L}{p - a + r_D}$$

Voeren wij dezelfde berekening uit voor  $BKMCLN$  en zij  $t$  de loodlijn neergelaten van  $O$  op het verlengde van  $C'N'$  dan vinden wij ten slotte voor de geheele anticlinala :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \cos \alpha \left\{ \frac{I}{\sqrt{s^2 + r^2}} bgtg \frac{2a \cos \alpha \sqrt{s^2 + r^2}}{s^2 + p^2 - ap + hd} - \frac{I}{\sqrt{q^2 + r^2}} bgtg \frac{2a \cos \alpha \sqrt{q^2 + r^2}}{q^2 + p^2 - ap + hd} \right. \right.$$

$$+ \left. \frac{I}{\sqrt{s^2 + t^2}} bgtg \frac{2a \cos \alpha \sqrt{s^2 + t^2}}{s^2 + p^2 + ap + hd} - \frac{I}{\sqrt{q^2 + t^2}} bgtg \frac{2a \cos \alpha \sqrt{q^2 + t^2}}{q^2 + p^2 + ap + hd} \right\} +$$

$$+ \ln \frac{(p-a+r_D)(p+a+r_B)}{(p-a+r_A)(p+a+r_C)} \Big] \dots \dots \dots (45)$$

Berekening van den krommingsfactor.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \int_{AKM} \frac{dS}{r} \cos \pi + \int_{BKM} \frac{dS}{r} \cos \pi + \int_{DLN} \frac{dS}{r} \cos 0 + \int_{CLN} \frac{dS}{r} \cos 0 \right\}$$

$$= G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \int_{AKM} \frac{dS}{r} + \int_{BKM} \frac{dS}{r} - \int_{DLN} \frac{dS}{r} - \int_{CLN} \frac{dS}{r} \right\}$$

Daar voor de andere vlakken de normalen op deze vlakken loodrecht op de  $Y$ -as staan leveren zij dus geen bijdrage tot de totale integraal.

Wij hebben dus thans:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ -q \int_{AKM} \frac{dx dz}{(x^2 + q^2 + z^2)^{3/2}} - q \int_{BKM} \frac{dx dz}{(x^2 + q^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ \left. + s \int_{DLN} \frac{dx dz}{(x^2 + s^2 + z^2)^{3/2}} + s \int_{CLN} \frac{dx dz}{(x^2 + s^2 + z^2)^{3/2}} \right\}$$

waarbij dus de integratie over de vlakken  $AKM$ ,  $BKM$  etc. moet worden uitgestrekt.

Nu is:

$$\int_{AKM} \frac{dx dz}{(x^2 + q^2 + z^2)^{3/2}} = \int_{p-a}^p \frac{dx}{(x^2 + q^2) \sqrt{x^2 + q^2 + h^2}} - \int_{p-a}^p \frac{dx}{(x^2 + q^2) \sqrt{x^2 + q^2 + \{(p-x) \operatorname{tg} \alpha + d\}^2}}$$

Noemen wij deze integralen  $I_1$  en  $I_2$  dan is:

$$I_1 = \frac{1}{q h} \operatorname{bgtg} \frac{x h}{q \sqrt{x^2 + q^2 + h^2}} \Big|_{p-a}^p = \frac{1}{q h} \left\{ \operatorname{bgtg} \frac{p h}{q r_K} - \operatorname{bgtg} \frac{(p-a) h}{q r_A} \right\}$$

Verder is:

$$I_2 = \int_{p-a}^p \frac{dx}{(x^2 + q^2) \sqrt{\{x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2 x \operatorname{tg} \alpha (p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2\}}}$$

Zij  $p \operatorname{tg} \alpha + d = k$  dan kan  $I_2$  worden bepaald door de substitutie  $x = \frac{m t + n}{t + 1}$  waarin  $m$  en  $n$  zijn bepaald door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) m n - k \operatorname{tg} \alpha (m + n) + k^2 + q^2 &= 0 \\ m n + q^2 &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit vindt men:  $m = \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha}$ ,  $n = -\frac{q^2 \operatorname{tg} \alpha}{k}$

waaruit dus volgt:  $x = \frac{\frac{k t}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{q^2 \operatorname{tg} \alpha}{k}}{t + 1}$  en  $dx = \frac{k}{(\operatorname{tg} \alpha)^2} + \frac{q^2 \operatorname{tg} \alpha}{k} dt$ .

Substitueeren wij deze waarden in  $I_2$  dan hebben wij dus te bepalen de integralen:

$$\left( \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{q \operatorname{tg}^2 \alpha}{k} \right) \times \int_{t_1}^{t_2} \frac{t dt}{\left\{ \left( \frac{k^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + q^2 \right) t^2 + \frac{q^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{k^2} + q^2 \right\} \sqrt{\left\{ \left( \frac{k^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + q^2 \right) t^2 + \frac{q^4 \operatorname{tg}^4 \alpha}{k^2} + \frac{q^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{k^2} + 2 q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + k^2 + q^2 \right\}}}$$

en

$$\left( \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{q^2 \operatorname{tg} \alpha}{k} \right) \times \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\left\{ \left( \frac{k^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + q^2 \right) t^2 + \frac{q^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{k^2} + q^2 \right\} \sqrt{\left\{ \left( \frac{k^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + q^2 \right) t^2 + \frac{q^4 \operatorname{tg}^4 \alpha}{k^2} + \frac{q^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{k^2} + 2 q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + k^2 + q^2 \right\}}}$$

Deze integralen zijn van het gemakkelijk te bepalen type:

$$\int \frac{t dt}{(A + B t^2) \sqrt{C + B t^2}} \text{ en } \int \frac{dt}{(A + B t^2) \sqrt{C + B t^2}}.$$

Voor de eerste vinden wij:

$$\frac{tg \alpha}{2(k^2 + q^2 tg^2 \alpha)} \ln \frac{\sqrt{C + Bt^2} - \frac{k^2 + q^2 tg^2 \alpha}{k}}{\sqrt{C + Bt^2} + \frac{k^2 + q^2 tg^2 \alpha}{k}} \Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

Nu is  $t = \frac{x k tg \alpha + q^2 tg^2 \alpha}{k(k - x tg \alpha)}$  terwijl de grenzen voor  $x$  zijn  $x_2 = p$ ,  $x_1 = p - a$ .

Er komt dus:

$$\sqrt{C + Bt_2^2} = \frac{r_M(k^2 + q^2 tg^2 \alpha)}{k d} \text{ en } \sqrt{C + Bt_1^2} = \frac{r_A(k^2 + q^2 tg^2 \alpha)}{k h}$$

Voor de eerste integraal vindt men derhalve:

$$\frac{tg \alpha}{2(k^2 + q^2 tg^2 \alpha)} \ln \frac{(r_M - d)(r_A + h)}{(r_M + d)(r_A - h)}$$

De tweede integraal is:

$$\frac{k}{q^2 tg^2 \alpha + k^2} bgtg \left[ t \cdot \frac{q^2 tg^2 \alpha + k^2}{q tg \alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{C + Bt^2}} \right]_{t_1}^{t_2}$$

waarvoor men dus vindt:

$$\frac{k}{q^2 tg^2 \alpha + k^2} \left\{ bgtg \frac{p k + q^2 tg \alpha}{r_M} - bgtg \frac{(p - a) k + q^2 tg \alpha}{r_A} \right\}$$

Wij hebben derhalve:

$$\int_{AKM} \frac{dx dz}{(x^2 + q^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{q h} \left\{ bgtg \frac{p h}{q r_K} - bgtg \frac{(p - a) h}{q r_A} \right\} - \frac{tg \alpha}{2(k^2 + q^2 tg^2 \alpha)} \ln \frac{(r_M - d)(r_A + h)}{(r_M + d)(r_A - h)} - \frac{k}{q^2 tg^2 \alpha + k^2} \left\{ bgtg \frac{p k + q^2 tg \alpha}{r_M} - bgtg \frac{(p - a) k + q^2 tg \alpha}{r_A} \right\}$$

Verder is:

$$\int_{BKM} \frac{dx dz}{(x^2 + q^2 + z^2)^{3/2}} = \int_p^{p+a} \frac{dx}{(x^2 + q^2) \sqrt{x^2 + q^2 + h^2}} - \int_p^{p+a} \frac{dx}{(x^2 + q^2) \sqrt{x^2 + q^2 + \{(x - p) tg \alpha + d\}^2}}$$

Voor de eerste integraal vinden wij:

$$\frac{1}{q h} \left\{ bgtg \frac{(p + a) h}{q r_B} - bgtg \frac{p h}{q r_K} \right\}$$

De tweede integraal is gelijk aan:

$$\int_p^{p+a} \frac{dx}{(x^2 + q^2) \sqrt{x^2(I + tg^2 \alpha) - 2 x l tg \alpha + l^2 + q^2}}$$

waarin  $p tg \alpha - d = l$ .

Passen wij nu toe de substitutie  $x = \frac{lt}{tg \alpha} - \frac{q^2 tg \alpha}{l}$  dan vinden wij hiervoor:

$$\frac{tg \alpha}{2(l^2 + q^2 tg^2 \alpha)} \ln \frac{(r_B - h)(r_M + d)}{(r_B + h)(r_M - d)} + \frac{l}{l + q^2 tg^2 \alpha} \left\{ bgtg \frac{(p + a) l + q^2 tg \alpha}{q r_B} - bgtg \frac{p l + q^2 tg \alpha}{q r_M} \right\}$$

De integralen die de bijdragen der vlakken  $DLN$  en  $CLN$  leveren vindt men gemakkelijk door in de boven afgeleide uitdrukkingen  $q$  te vervangen door  $s$  en  $r_A, r_B, \dots$  door  $r_D, r_C, \dots$

Er komt dan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = & G(\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \frac{1}{h} \left\{ bgtg \frac{(p-a)h}{q r_A} - bgtg \frac{(p+a)h}{q r_B} - bgtg \frac{(p-a)h}{s r_D} + bgtg \frac{(p+a)h}{s r_C} \right\} + \right. \\ & + \frac{qk}{k^2 + q^2 tg^2 \alpha} \left\{ bgtg \frac{pk + q^2 tg \alpha}{q r_M} - bgtg \frac{(p-a)k + q^2 tg^2 \alpha}{q r_A} \right\} + \\ & + \frac{ql}{l^2 + q^2 tg^2 \alpha} \left\{ bgtg \frac{(p+a)l + q^2 tg \alpha}{q r_B} - bgtg \frac{pl + q^2 tg \alpha}{q r_M} \right\} - \\ & - \frac{sk}{k^2 + s^2 tg^2 \alpha} \left\{ bgtg \frac{pk + s^2 tg \alpha}{s r_N} - bgtg \frac{(p-a)k + s^2 tg \alpha}{s r_D} \right\} - \\ & - \frac{sl}{l^2 + q^2 tg^2 \alpha} \left\{ bgtg \frac{(p+a)l + s^2 tg \alpha}{s r_C} - bgtg \frac{pl + s^2 tg \alpha}{s r_N} \right\} + \\ & + \frac{q tg \alpha}{2(k^2 + q^2 tg^2 \alpha)} \ln \frac{(r_M - d)(r_A + h)}{(r_M + d)(r_A - h)} + \frac{q tg \alpha}{2(l^2 + q^2 tg^2 \alpha)} \ln \frac{(r_B - h)(r_M + d)}{(r_B + h)(r_M - d)} - \\ & - \frac{s tg \alpha}{2(k^2 + s^2 tg^2 \alpha)} \ln \frac{(r_N - d)(r_D + h)}{(r_N + d)(r_D - h)} - \frac{s tg \alpha}{2(l^2 + s^2 tg^2 \alpha)} \ln \frac{(r_C - h)(r_N + d)}{(r_C + h)(r_N - d)} \Big]. \quad (46) \end{aligned}$$

Berekening van  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ .

Wij hebben thans:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left[ \int_{AMND} \frac{x dS}{r^3} - \int_{BCNM} \frac{x dS}{r^3} \right]$$

Nu is  $dS = \frac{dx dy}{\cos \alpha}$  zoodat er komt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = & G(\sigma_1 - \sigma_2) tg \alpha \left[ \int_{AMND} \frac{x dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \int_{BCNM} \frac{x dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \\ = & G(\sigma_1 - \sigma_2) tg \alpha \left[ \int_{p-a}^p x dx \int_s^q \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \int_p^{p+a} x dx \int_s^q \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \\ = & G(\sigma_1 - \sigma_2) tg \alpha \left[ \int_{p-a}^p x dx \left\{ \frac{q}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + q^2 + z^2}} - \frac{s}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + s^2 + z^2}} \right\} - \right. \\ & \left. - \int_p^{p+a} x dx \left\{ \frac{q}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + q^2 + z^2}} - \frac{s}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + s^2 + z^2}} \right\} \right] \end{aligned}$$

Deze integralen werden reeds bepaald bij de berekening van den gradient.

Wij vinden derhalve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = & G(\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} \ln \frac{(r_M - q)^2 (r_N + s)^2 (r_A + q) (r_B + q) (r_D - s) (r_C - s)}{(r_M + q)^2 (r_N - s)^2 (r_A - q) (r_B - q) (r_D + s) (r_C + s)} \right. \\ & + \sin^2 \alpha \left\{ bgtg \frac{q r_N - s r_N}{r_M r_N \cot(\beta - \gamma_{N'}) + q s tg(\beta - \gamma_{N'})} + bgtg \frac{s r_A - q r_D}{r_A r_D \cot(\beta - \gamma_{D'}) + q s tg(\beta - \gamma_{D'})} \right. \\ & \left. + bgtg \frac{s r_B - q r_C}{r_B r_C \cot(\beta + \gamma_{C'}) + q s tg(\beta + \gamma_{C'})} + bgtg \frac{q r_N - s r_M}{r_M r_N \cot(\beta + \gamma_{N'}) + q s tg(\beta + \gamma_{N'})} \right\} \Big] \quad (47) \end{aligned}$$

Berekening van  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ .

Uit  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 3 G (\sigma_1 - \sigma_2) \iiint \frac{xy \, dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$  vinden wij voor  $AKMDLN$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_d^h dz \left[ \int_x^p \frac{x \, dx}{(x^2 + s^2 + z^2)^{3/2}} - \int_x^p \frac{x \, dx}{(x^2 + q^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ &= G (\sigma_1 - \sigma_2) \int_d^h dz \left[ \frac{I}{(p^2 + q^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{I}{(x^2 + q^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{I}{(p^2 + s^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{I}{(x^2 + s^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$

Noemen wij deze integralen  $I_1 \dots I_4$ , dan is dus:

$$I_1 = \ln \left[ z + \sqrt{p^2 + q^2 + z^2} \right]_d^h = \ln \frac{h + \sqrt{p^2 + q^2 + h^2}}{d + \sqrt{p^2 + q^2 + d^2}} = \ln \frac{h + r_K}{d + r_M}.$$

Verder is  $z = (p - x) \operatorname{tg} \alpha + d$  waaruit  $x = \frac{p \operatorname{tg} \alpha + d - z}{\operatorname{tg} \alpha}$  zoodat:

$$\begin{aligned} I_2 &= \operatorname{tg} \alpha \int_d^h \frac{dz}{\{z^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2z(p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\}^{1/2}} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \ln \left[ \{z^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2z(p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\}^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + z \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{(p \operatorname{tg} \alpha + d)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right]_d^h \\ &= \sin \alpha \ln \frac{\{h^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2h(p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\}^{1/2} + \frac{h}{\cos \alpha} - (p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos \alpha}{\{d^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2d(p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\}^{1/2} + \frac{d}{\cos \alpha} - (p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos \alpha} \end{aligned}$$

Deze uitdrukking laat zich gemakkelijk vereenvoudigen. Wij hebben nl.:

$$\begin{aligned} \sqrt{\{h^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2h(p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\}} &= \\ \sqrt{\{(h^2 + q^2) \operatorname{tg}^2 \alpha + (h - p \operatorname{tg} \alpha - d)^2\}} &= \\ \sqrt{\{(h^2 + q^2) \operatorname{tg}^2 \alpha + (p \operatorname{tg} \alpha - a \operatorname{tg} \alpha)^2\}} &= \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\{h^2 + q^2 + (p - a)^2\}} = r_A \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Evenzoo vinden wij:

$$\sqrt{\{d^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2d(p \operatorname{tg} \alpha + d) + (p \operatorname{tg} \alpha + d)^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\}} = r_M \operatorname{tg} \alpha.$$

Wij hebben derhalve:

$$I_2 = \sin \alpha \ln \frac{r_A \sin \alpha + h - (p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos^2 \alpha}{r_M \sin \alpha + d - (p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos^2 \alpha}$$

Verder vinden wij:

$$I_3 = \ln \left[ z + \sqrt{p^2 + s^2 + z^2} \right]_d^h = \ln \frac{h + \sqrt{p^2 + s^2 + h^2}}{d + \sqrt{p^2 + s^2 + d^2}} = \ln \frac{h + r_L}{d + r_N}$$

en:

$$I_4 = \sin \alpha \ln \frac{r_D \sin \alpha + h - (p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos^2 \alpha}{r_N \sin \alpha + d - (p \operatorname{tg} \alpha + d) \cos^2 \alpha}$$

Voor  $AKMDLN$  vinden wij derhalve:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \ln \frac{(h + r_K)(d + r_N)}{(d + r_M)(h + r_L)} + \sin \alpha \ln \frac{(r_D \sin \alpha + h - k \cos^2 \alpha)(r_M \sin \alpha + d - k \cos^2 \alpha)}{(r_N \sin \alpha + d - k \cos^2 \alpha)(r_A \sin \alpha + h - k \cos^2 \alpha)} \right]$$

waarin  $k = p \operatorname{tg} \alpha + d$ .

Voeren wij eveneens de berekening uit voor  $BKMC LN$  dan vinden wij, als  $p \operatorname{tg} \alpha - d = l$  wordt gesteld:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \ln \frac{(h + r_L)(d + r_M)}{(d + r_N)(h + r_K)} + \sin \alpha \ln \frac{(r_B \sin \alpha + h + l \cos^2 \alpha)(r_M \sin \alpha + d + l \cos^2 \alpha)}{(r_N \sin \alpha + d + l \cos^2 \alpha)(r_C \sin \alpha + h + l \cos^2 \alpha)} \right]$$

Voor  $ABMDCN$  vinden wij derhalve:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \left\{ \ln \frac{(r_D \sin \alpha + h - k \cos^2 \alpha)(r_M \sin \alpha + d - k \cos^2 \alpha)}{(r_N \sin \alpha + d - k \cos^2 \alpha)(r_A \sin \alpha + h - k \cos^2 \alpha)} + \ln \frac{(r_B \sin \alpha + h + l \cos^2 \alpha)(r_N \sin \alpha + d + l \cos^2 \alpha)}{(r_M \sin \alpha + d + l \cos^2 \alpha)(r_C \sin \alpha + h + l \cos^2 \alpha)} \right\} \quad (48)$$

Ten einde de orde van grootte van de fout na te gaan welke men maakt door voor een begrensde een oneindig lange anticlinal in de plaats te stellen, hebben wij met behulp van de boven afgeleide formules den gradient en krommingsfactor berekend voor een anticlinal, symmetrisch ten opzichte van het  $XZ$ -vlak, waarvan de top 300 M. onder de oppervlakte is gelegen, de hellingshoek der vleugels  $45^\circ$ , de breedte der basis 600 M. en de lengte van de as 1000 M. is. Voor een punt aan de oppervlakte 300 M. van de as gelegen, (d. i. het punt waarin de maximum gradient zou optreden indien de as zich oneindig ver in de richting der  $Y$ -as uitstrekte) vindt men nu een gradient van  $0.35 \times G(\sigma_1 - \sigma_2)$  eenheden. Strekt de as inplaats van 1 K.M. zich echter oneindig ver uit, dan vindt men voor hetzelfde punt een gradient van  $0.44 \times G(\sigma_1 - \sigma_2)$  eenheden. Hieruit blijkt, dat ofschoon dit verschil niet onbeduidend is, toch in de meeste gevallen voor de berekening van den gradient de anticlinal als oneindig lang mag worden beschouwd. Verder werd voor beide gevallen den krommingsfactor berekend in het op de projectie der as gelegen punt. Voor den 1 K.M. langen anticlinal is  $R = 0.41 \times G(\sigma_1 - \sigma_2)$  eenheden terwijl men voor den onbegrensden anticlinal vindt  $R = 2.52 \times G(\sigma_1 - \sigma_2)$  eenheden. Uit dit voorbeeld ziet men dat de orde van grootte der krommingsfactoren in vele gevallen zelfs niet bij benadering kan worden berekend door het begrensde lichaam door een oneindig lichaam te vervangen. Daar echter de nauwkeurigheid waarmede vooral in eenigszins heuvelachtig terrein, de krommingsfactoren kunnen worden gemeten in de meeste gevallen zeer veel te wenschen overlaat, zal men voor de geologische interpretatie van deze grootheden meestal slechts een kwalitatief gebruik maken en zelden overgaan tot eene exacte berekening met behulp van ingewikkelde en daardoor voor praktisch gebruik ongeschikte formules.

Het hier behandelde voorbeeld zou geologisch kunnen worden geïnterpreteerd als dat van een anticlinal afgesneden door twee verschuivingsvlakken loodrecht op de as. Een dergelijke structuur zal echter in de praktijk slechts zeer zelden voorkomen. Men heeft echter zeer dikwijls met koepels te doen (d. i. plooiën waarvan de as van een culminatiepunt naar weerszijden helt of onderduikt). Het is daarom van belang te onderzoeken of ook voor dergelijke lichamen formules kunnen worden opgesteld en of deze een voor de praktijk bruikbaren vorm bezitten. Wij zullen daartoe den gradient berekenen van een pyramide voor een punt in een harer symmetrievlakken gelegen. In fig. 26 is slechts de vóór het

$XZ$ -vlak gelegen helft van de pyramide geteekend;  $P$  is het in het symmetrievlak gelegen punt waarvoor de gradient is berekend. Uit hetgeen volgt zal het overigens duidelijk zijn dat ook voor eene willekeurige ligging van  $P$  de berekening kan worden uitgevoerd.

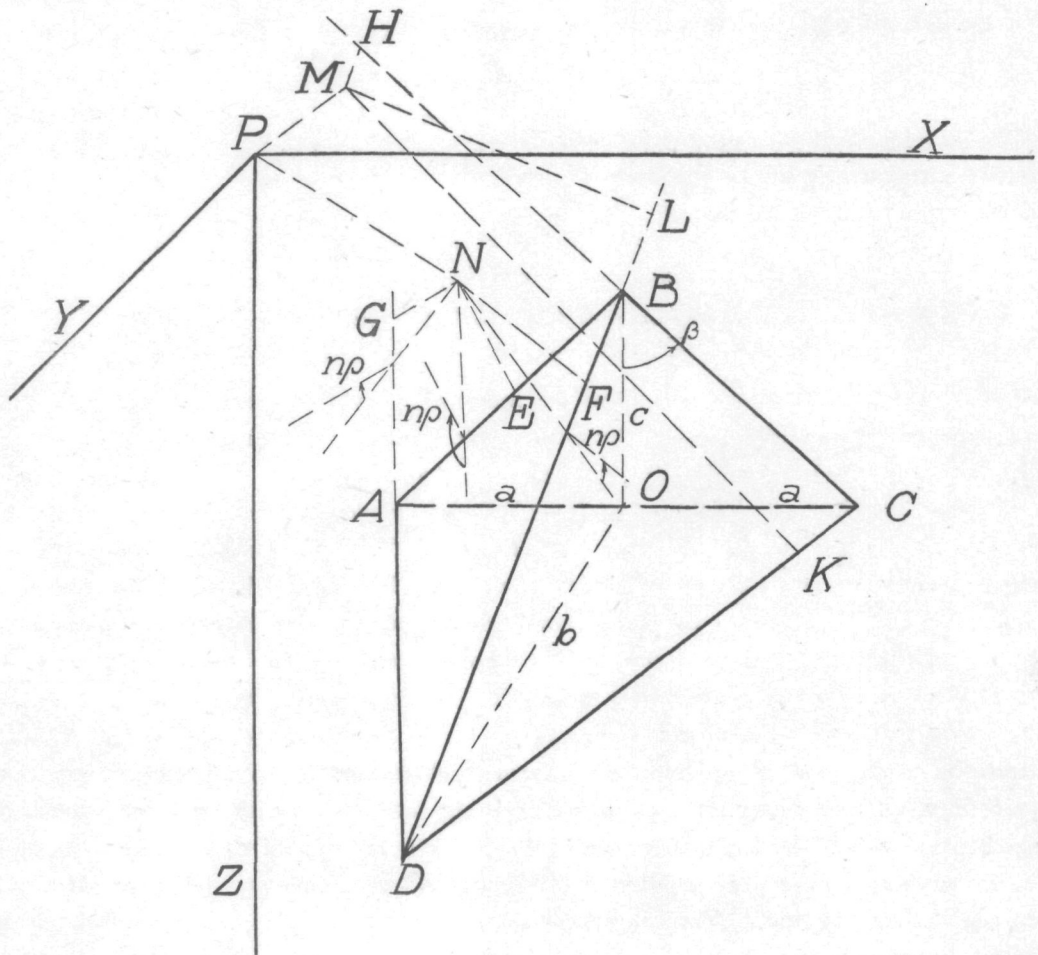


Fig. 26.

Wij passen nu de reeds in het eerste hoofdstuk uiteengezette methode toe en berekenen eerst de component van de aantrekkingskracht in de richting van de  $X$ -as met behulp der formule :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -G(\sigma_1 - \sigma_2) \int \int_s \frac{\cos \alpha \, dS}{r}$$

Nu hebben wij de waarde van  $\int \int \frac{dS}{r}$  alléén te bepalen voor de vlakken  $ABD$  en  $CBD$  daar voor de andere grensvlakken  $\cos \alpha = 0$  is.

De aantrekkingskracht is dus:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -G(\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha_1 \int_{ABD} \frac{dS}{r} - G(\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha_2 \int_{CBD} \frac{dS}{r}$$

waarin  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  bekend zijn.



Laten wij nu de loodlijn  $PN$  op  $ABD$  neer en zij  $\rho$  de afstand van  $N$  tot een element van  $ABD$ , dan is dus  $\int_{ABD} \frac{dS}{r} = \int_{ABD} \frac{dS}{\sqrt{\rho^2 + PN^2}}$ .

Wij hebben nu reeds bewezen (zie pag. 15) dat:

$$\int_{ABD} \frac{dS}{\sqrt{\rho^2 + PN^2}} = \int_{ABD} \sqrt{\rho^2 + PN^2} \cdot \frac{\cos(n\rho)}{\rho} ds$$

waarbij de integratie is uit te strekken langs de begrenzing van  $ABD$ .

Laten wij nu uit  $N$  de loodlijn  $NF$  op  $BD$  neer dan komt er dus, geijk reeds werd aangetoond op blz. 15,

$$\cos(n\rho) = \frac{NF}{\rho}, \text{ dus } \int \sqrt{\rho^2 + PN^2} \cdot \frac{\cos(n\rho)}{\rho} ds = NF \int \sqrt{\rho^2 + PN^2} \cdot \frac{ds}{\rho^2}.$$

En  $\rho^2 = NF^2 + s^2$ , zoodat wij hebben:

$$NF \int \frac{\sqrt{NF^2 + s^2 + PN^2}}{NF^2 + s^2} ds = \left[ NF \ln(s + \sqrt{NF^2 + s^2 + PN^2}) + PN \operatorname{bgtg} \frac{PN \cdot s}{NF \sqrt{NF^2 + s^2 + PN^2}} \right]_{s_1}^{s_2}$$

In het algemeen vindt men voor elke zijde:

$$q \ln \frac{s_2 + \sqrt{p^2 + q^2 + s_2^2}}{s_1 + \sqrt{p^2 + q^2 + s_1^2}} + p \operatorname{bgtg} \frac{p s_2}{q \sqrt{p^2 + q^2 + s_2^2}} - p \operatorname{bgtg} \frac{p s_1}{q \sqrt{p^2 + q^2 + s_1^2}}.$$

Hierin is  $q$  de loodlijn op het vlak waarvan de beschouwde zijde een der grenzen is,  $p$  de loodlijn uit het voetpunt van  $q$  op deze zijde en  $s_1$  en  $s_2$  de stukken waarin deze laatste door  $p$  wordt verdeeld. Omtrent de teekens dezer grootheden merken wij op dat in de uitdrukking  $\cos(n\rho)$  de loodlijn  $p$  op de betreffende zijde positief moet worden genomen indien haar voetpunt  $N$  en de overstaande hoek van  $\triangle ABD$  aan denzelfden kant der zijde liggen; liggen  $N$  en de overstaande hoek aan weerszijden van de betreffende zijde dan moet  $p$  met het negatieve teeken worden genomen. De stukken  $s_1$  en  $s_2$  waarin de zijde wordt verdeeld zijn beide positief indien het voetpunt der loodlijn  $p$  op het verlengde der zijde valt; valt dit punt tusschen de eindpunten der zijde, dan moeten  $s_1$  en  $s_2$  met tegengesteld teeken worden genomen. De loodlijn  $q$  op  $ABD$  is òf positief òf negatief naargelang  $P$  en het hoekpunt  $C$  aan weerszijden of aan dezelfde zijde van het vlak  $ABD$  liggen. De loodlijnen en de stukken waarin de zijden worden verdeeld zullen later worden uitgedrukt in de bekende elementen van de pyramide en in den verticalen afstand van den top  $B$  tot  $P$ ; de teekens van de verschillende in de formule voorkomende grootheden voor een andere dan de in de figuur voorgestelde ligging van  $P$  zullen dan automatisch in de uitdrukkingen voor die grootheden liggen opgesloten.

Zij nu  $\alpha$  de scherpe hoek welke de loodlijn uit  $O$  op  $ABD$  of  $CBD$  maakt met  $AC$  dan is dus  $\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2 = \cos \alpha$ . Het zal nu duidelijk zijn dat de volledige algemeene uitdrukking voor de aantrekkingskracht in  $P$  van  $ABCD$  in de richting der  $X$ -as wordt voorgesteld door de formule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = G(\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha & \left[ MH \ln \frac{HC + r_C}{HB + r_B} + PM \operatorname{bgtg} \frac{PM \cdot HC}{MH \cdot r_C} - PM \operatorname{bgtg} \frac{PM \cdot HB}{MH \cdot r_B} \right. \\ & + ML \ln \frac{LD + r_D}{LB + r_B} + PM \operatorname{bgtg} \frac{PM \cdot LD}{ML \cdot r_D} - PM \operatorname{bgtg} \frac{PM \cdot LB}{ML \cdot r_B} + MK \ln \frac{DK + r_D}{CK + r_C} \\ & + PM \operatorname{bgtg} \frac{PM \cdot DK}{MK \cdot r_D} - PM \operatorname{bgtg} \frac{PM \cdot CK}{MK \cdot r_C} - NE \ln \frac{EA + r_A}{EB + r_B} - PN \operatorname{bgtg} \frac{PN \cdot EA}{NE \cdot r_A} \\ & + PN \operatorname{bgtg} \frac{PN \cdot EB}{NE \cdot r_B} - NF \ln \frac{DF + r_D}{BF + r_B} - PN \operatorname{bgtg} \frac{PN \cdot DF}{NF \cdot r_D} + PN \operatorname{bgtg} \frac{PN \cdot BF}{NF \cdot r_B} \\ & \left. - NG \ln \frac{DG + r_D}{AG + r_A} - PN \operatorname{bgtg} \frac{PN \cdot DG}{NG \cdot r_D} + PN \operatorname{bgtg} \frac{PN \cdot AG}{NG \cdot r_A} \right]. \end{aligned}$$

Nu kan  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$  worden bepaald door alle in bovenstaande formule voorkomende grootheden uit te drukken in  $h$  (den afstand van  $B$  tot de  $X$ -as) en daarna naar  $h$  te differentieëren.

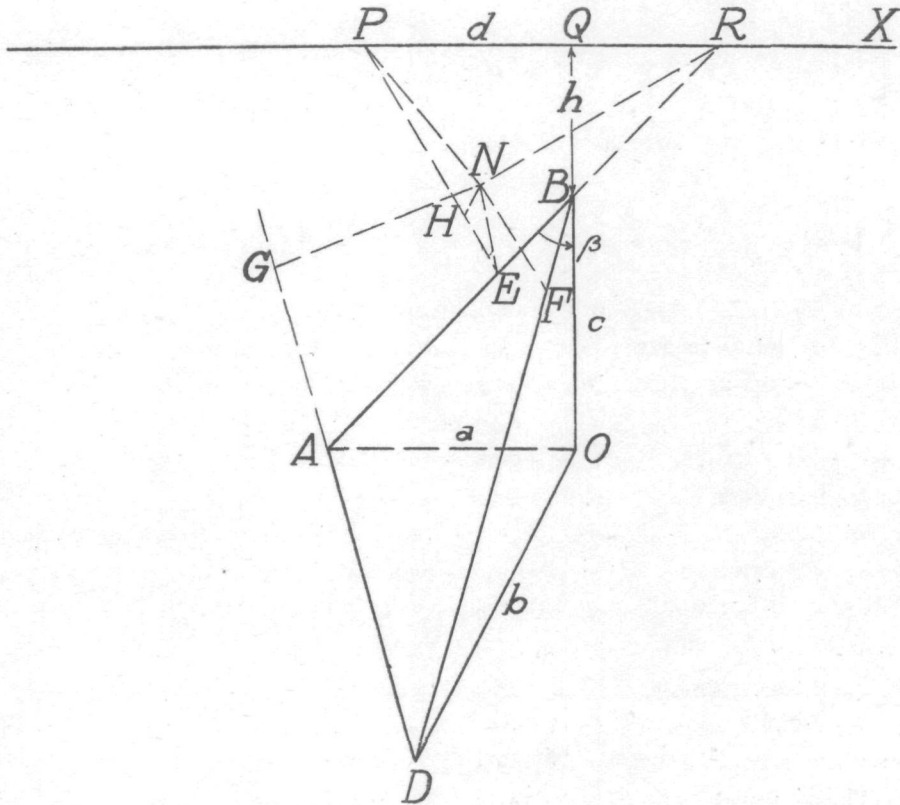


Fig. 27.

Zij  $PG = d$  (fig. 27). Verlengen wij  $AB$  tot  $R$  en verbinden wij  $R$  met  $N$  dan ligt  $RN$  in  $ABD$  en  $RN \perp PN$ . Dus  $\angle PRN$  is de scherpe hoek die de  $X$ -as maakt met  $ABD$ . Zij deze hoek, welke bekend is uit de gegeven elementen van den tetraeder, gelijk aan  $\varphi$ . Dan is dus  $PN = (d + h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi$ .

Wij merken nog op dat  $PN$  zoowel positief als negatief kan zijn. Dit laatste is het geval als  $P$  rechts van  $R$  ligt ( $d$  is dan negatief en in absoluten zin grooter dan  $h \operatorname{tg} \beta$ ). Verder is  $PN \perp AB$  en  $NE \perp AB$  dus  $AB \perp$  vlak  $PNE$ , dus  $AB \perp PE$ . Hieruit volgt:

$$AE^2 + PE^2 = AP^2 = (h + c)^2 + (d - a)^2$$

$$RE^2 + PE^2 = (d + h \operatorname{tg} \beta)^2$$

Derhalve is:  $AE^2 - RE^2 = (h + c)^2 + (d - a)^2 - (d + h \operatorname{tg} \beta)^2$

Verder is:  $AE + RE = t + \frac{h}{\cos \beta}$  (als  $AB = t$ )

Hieruit vinden wij:  $AE = h \cos \beta - d \sin \beta + t$

Laten wij nu de loodlijn  $NH$  neer op  $PE$  dan is  $NH \perp XZ$ -vlak daar  $NH \perp PE$  en  $AB \perp NH$  (want  $AB \perp$  vlak  $PNE$ ). Derhalve is  $\angle NPH$  de hoek welke  $PN$  maakt met het vlak  $AOB$ . Zij deze hoek, welke dus eveneens bekend is, gelijk aan  $\psi$  dan is dus:

$$|NE| = PN \operatorname{tg} \psi = (d + h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi.$$

Het is nu duidelijk dat  $PN$  en  $NE$  met tegengesteld teeken moeten worden genomen. Derhalve is dus:  $NE = -(d + h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi.$

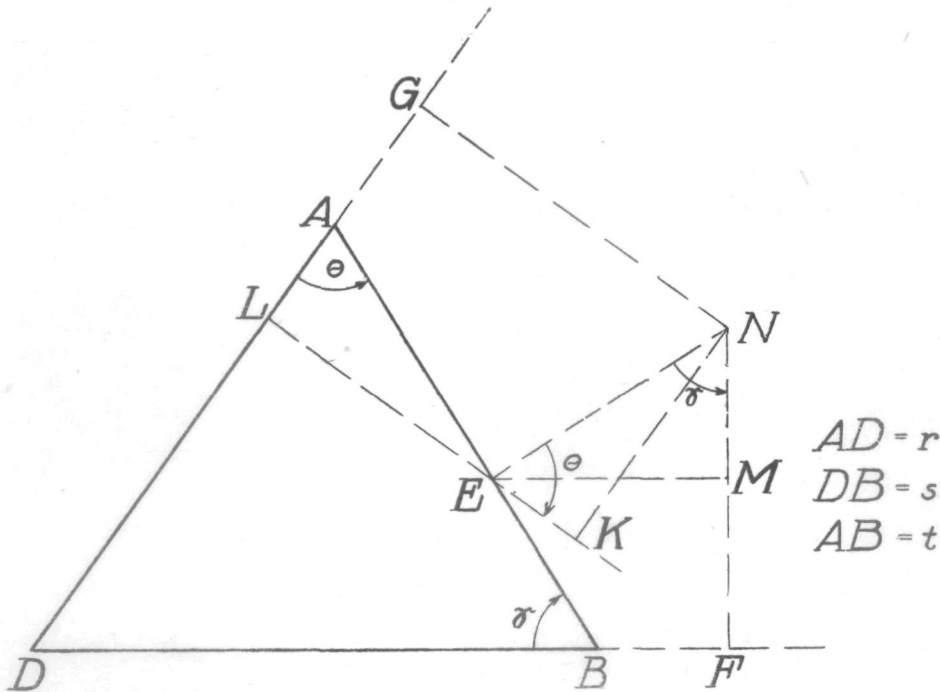


Fig. 28.

Men kan nu gemakkelijk al de grootheden uitdrukken in  $h$  en in de bekende elementen van de pyramide.

In de algemeene formule voor de aantrekkingskracht is  $AE$  positief genomen zoodat  $BE$  dus negatief is indien in  $\triangle ABD$  (fig. 28)  $E$  tusschen  $A$  en  $B$  ligt. Derhalve is  $AE - BE = t$  waaruit wij vinden:

$$BE = h \cos \beta - d \sin \beta.$$

Zoo vinden wij eveneens  $BF = BE \cos \gamma - NE \sin \gamma$ , waarin  $BE$  en  $NE$  moeten worden genomen met de aan deze grootheden toekomende teekens.

Derhalve is:

$$BF = (h \cos \beta - d \sin \beta) \cos \gamma + (d + htg \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \gamma.$$

Indien wij op dezelfde wijze alle andere op den tetraeder  $ABDO$  betrekking hebbende grootheden berekenen vinden wij ten slotte:

$$PN = (d + htg \beta) \sin \varphi$$

$$NE = - (d + htg \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi$$

$$AE = h \cos \beta - d \sin \beta + t$$

$$BE = h \cos \beta - d \sin \beta$$

$$NF = (d + htg \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \cos \gamma - (h \cos \beta - d \sin \beta) \sin \gamma$$

$$BF = (h \cos \beta - d \sin \beta) \cos \gamma + (d + htg \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \gamma$$

$$DF = s + (h \cos \beta - d \sin \beta) \cos \gamma + (d + htg \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \gamma$$

$$NG = (d + htg \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \cos \theta + (h \cos \beta - d \sin \beta + t) \sin \theta$$

$$AG = (d + htg \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \theta - (h \cos \beta - d \sin \beta + t) \cos \theta$$

$$DG = r + (d + htg \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \theta - (h \cos \beta - d \sin \beta + t) \cos \theta.$$

Dezelfde bewerking moet thans worden uitgevoerd voor  $ODCB$  (fig. 29).

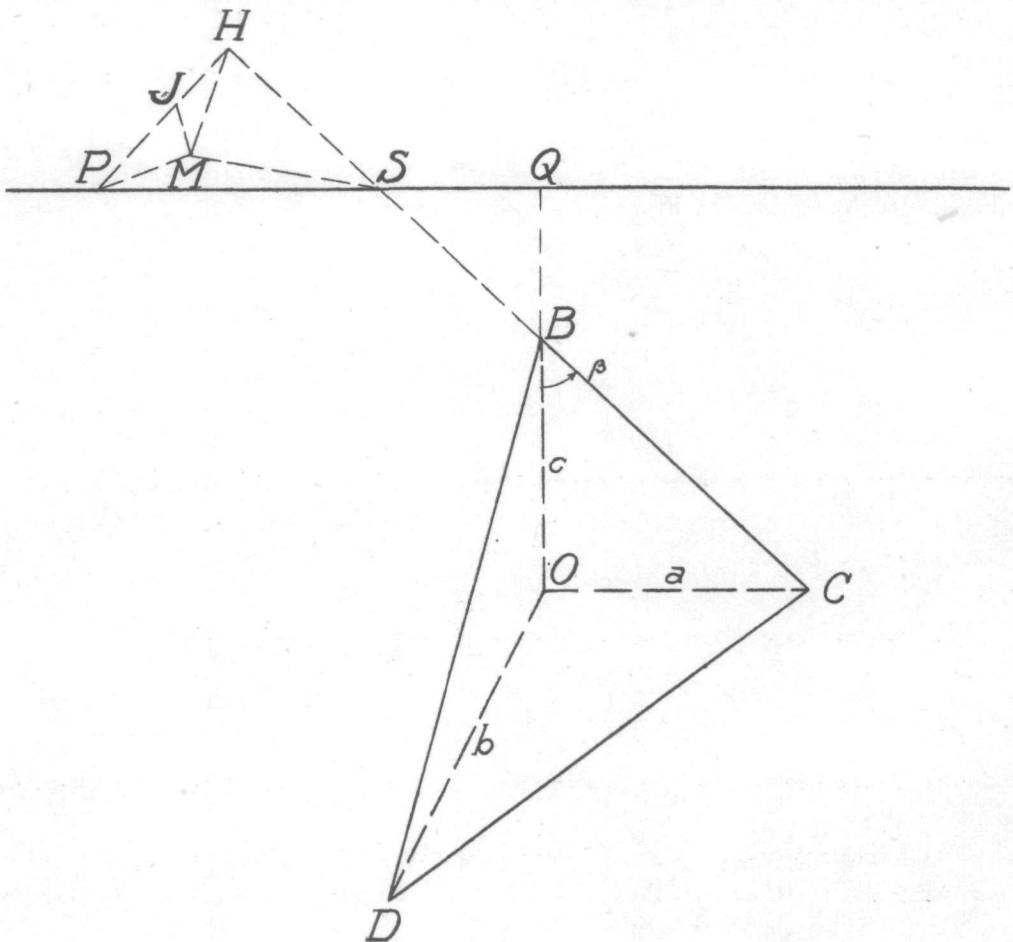


Fig. 29.

Verlengen wij weer  $BC$  tot  $S$  dan is, daar  $PM \perp BCD$ ,  $\angle PSM$  de scherpe hoek welke  $PS$  maakt met het vlak  $BCD$ . Deze hoek is dus weer gelijk aan  $\varphi$ . Derhalve is:

$$PM = PS \sin \varphi = (d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi.$$

Verder hebben wij:

$$PH^2 + HS^2 = PS^2 = (d - h \operatorname{tg} \beta)^2$$

$$PH^2 + HC^2 = PC^2 = (d + a)^2 + (h + c)^2$$

$$HC - HS = t + \frac{h}{\cos \beta}$$

Uit deze vergelijkingen vindt men:

$$HC = t + d \sin \beta + h \cos \beta.$$

Verder is:

$$HB = HC - t = h \cos \beta + d \sin \beta$$

en, daar  $PM$  en  $MH$  hetzelfde teeken hebben,

$$MH = PM \operatorname{tg} \psi = (d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi.$$

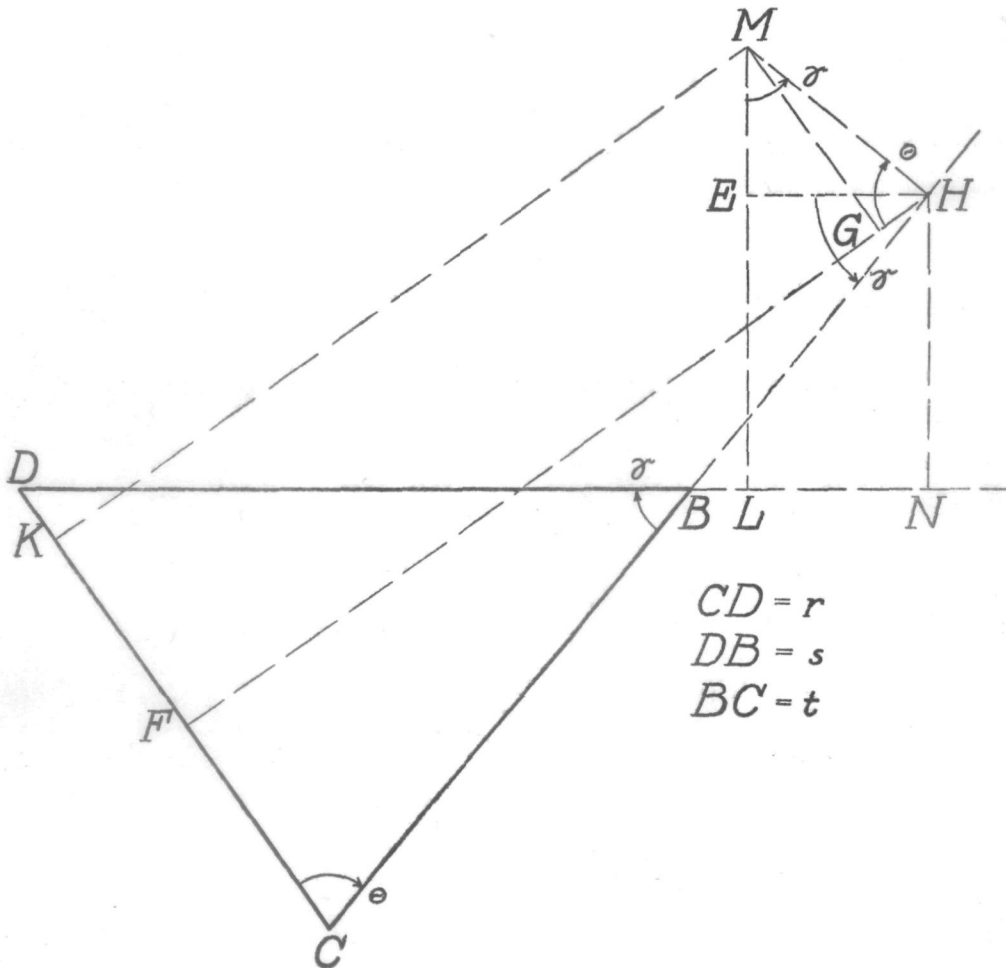


Fig. 30.

Berekenen wij thans ook de andere grootheden uit  $\Delta BCD$  (fig. 30) dan vinden wij tenslotte:

$$\begin{aligned}
 PM &= (d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi. \\
 MH &= (d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi. \\
 HC &= t + d \sin \beta + h \cos \beta. \\
 HB &= h \cos \beta + d \sin \beta. \\
 ML &= -(d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \cos \gamma - (h \cos \beta + d \sin \beta) \sin \gamma. \\
 BL &= (h \cos \beta + d \sin \beta) \cos \gamma - (d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \gamma. \\
 DL &= s + (h \cos \beta + d \sin \beta) \cos \gamma - (d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \gamma. \\
 MK &= (t + d \sin \beta + h \cos \beta) \sin \theta - (d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \cos \theta. \\
 CK &= -(d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \theta - (t + d \sin \beta + h \cos \beta) \cos \theta. \\
 DK &= r - (d - h \operatorname{tg} \beta) \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \theta - (t + d \sin \beta + h \cos \beta) \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Zij nu:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \beta \sin \varphi \operatorname{tg} \psi &= e. \\
 \operatorname{tg} \beta \sin \varphi &= f. \\
 \operatorname{tg} \beta \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma &= g. \\
 \cos \beta \cos \gamma + \operatorname{tg} \beta \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \gamma &= k. \\
 \operatorname{tg} \beta \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \cos \theta + \cos \beta \sin \theta &= m. \\
 \operatorname{tg} \beta \sin \varphi \operatorname{tg} \psi \sin \theta - \cos \beta \cos \theta &= n. \\
 c + h &= H.
 \end{aligned}$$

Wij vinden dan, na differentiatie naar  $h$  van de uitdrukking voor  $\frac{\partial U}{\partial x}$  voor den gradient van den geheelen koepel:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= 2G(\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \left[ e \ln \frac{EA + r_A}{EB + r_B} \cdot \frac{HB + r_B}{HC + r_C} + g \ln \frac{LD + r_D}{LB + r_B} \cdot \frac{FB + r_B}{FD + r_D} \right. \\
 &+ m \ln \frac{KD + r_D}{KC + r_C} \cdot \frac{GA + r_A}{GD + r_D} + f \left\{ b \operatorname{gtg} \frac{PN \cdot EB}{NE \cdot r_B} - b \operatorname{gtg} \frac{PN \cdot EA}{NE \cdot r_A} + b \operatorname{gtg} \frac{PN \cdot FB}{NF \cdot r_B} - b \operatorname{gtg} \frac{PN \cdot FD}{NF \cdot r_D} \right. \\
 &+ b \operatorname{gtg} \frac{PN \cdot GA}{NG \cdot r_A} - b \operatorname{gtg} \frac{PN \cdot GD}{NG \cdot r_D} + b \operatorname{gtg} \frac{PM \cdot HB}{MH \cdot r_B} - b \operatorname{gtg} \frac{PM \cdot HC}{MH \cdot r_C} + b \operatorname{gtg} \frac{PM \cdot LB}{ML \cdot r_B} - b \operatorname{gtg} \frac{PM \cdot LD}{ML \cdot r_D} \\
 &+ b \operatorname{gtg} \frac{PM \cdot KC}{MK \cdot r_C} - b \operatorname{gtg} \frac{PM \cdot KD}{MK \cdot r_D} \left. \right\} - NE \frac{(EB + r_B) \left( \cos \beta + \frac{H}{r_A} \right) - (EA + r_A) \left( \cos \beta + \frac{h}{r_B} \right)}{(EA + r_A)(EB + r_B)} \\
 &- NF \frac{(FB + r_B) \left( k + \frac{H}{r_D} \right) - (FD + r_D) \left( k + \frac{h}{r_B} \right)}{(FD + r_D)(FB + r_B)} - NG \frac{(GA + r_A) \left( n + \frac{H}{r_D} \right) - (GD + r_D) \left( n + \frac{H}{r_A} \right)}{(GD + r_D)(GA + r_A)} \\
 &+ MH \frac{(HB + r_B) \left( \cos \beta + \frac{H}{r_C} \right) - (HC + r_C) \left( \cos \beta + \frac{h}{r_B} \right)}{(HC + r_C)(HB + r_B)} \\
 &+ ML \frac{(LB + r_B) \left( k + \frac{H}{r_D} \right) - (LD + r_D) \left( k + \frac{h}{r_B} \right)}{(LD + r_D)(LB + r_B)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + MK \frac{(KC + r_c) \left(n + \frac{H}{r_D}\right) - (KD + r_D) \left(n + \frac{H}{r_C}\right)}{(KD + r_D)(KC + r_c)} \\
& - PN \left\{ \frac{NE \cdot r_A (f \cdot EA + PN \cos \beta) - PN \cdot EA \left(-e \cdot r_A + NE \cdot \frac{H}{r_A}\right)}{NE^2 \cdot r_A^2 + PN^2 \cdot EA^2} \right. \\
& - \frac{NE \cdot r_B (f \cdot EB + PN \cos \beta) - PN \cdot EB \left(-e \cdot r_B + NE \cdot \frac{h}{r_B}\right)}{NE^2 \cdot r_B^2 + PN^2 \cdot EB^2} \\
& + \frac{NF \cdot r_D (f \cdot FD + k \cdot PN) - PN \cdot FD \left(g \cdot r_D + NF \cdot \frac{H}{r_D}\right)}{NF^2 \cdot r_D^2 + PN^2 \cdot FD^2} \\
& - \frac{NF \cdot r_B (f \cdot FB + k \cdot PN) - PN \cdot FB \left(g \cdot r_B + NF \cdot \frac{h}{r_B}\right)}{NF^2 \cdot r_B^2 + PN^2 \cdot FB^2} \\
& + \frac{NG \cdot r_D (f \cdot GD + n \cdot PN) - PN \cdot GD \left(m \cdot r_D + NG \cdot \frac{H}{r_D}\right)}{NG^2 \cdot r_D^2 + PN^2 \cdot GD^2} \\
& - \left. \frac{NG \cdot r_A (f \cdot GA + n \cdot PN) - PN \cdot GA \left(m \cdot r_A + NG \cdot \frac{H}{r_A}\right)}{NG^2 \cdot r_A^2 + PN^2 \cdot GA^2} \right\} \\
& + PM \left\{ \frac{MH \cdot r_C (-f \cdot HC + PN \cos \beta) - PM \cdot HC \left(-e \cdot r_C + MH \cdot \frac{H}{r_C}\right)}{MH^2 \cdot r_C^2 + PM^2 \cdot HC^2} \right. \\
& - \frac{MH \cdot r_B (-f \cdot HB + PM \cos \beta) - PM \cdot HB \left(-e \cdot r_B + MH \cdot \frac{h}{r_B}\right)}{MH^2 \cdot r_B^2 + PM^2 \cdot HB^2} \\
& + \frac{ML \cdot r_D (-f \cdot LD + k \cdot PM) - PM \cdot LD \left(g \cdot r_D + ML \cdot \frac{H}{r_D}\right)}{ML^2 \cdot r_D^2 + PM^2 \cdot LD^2} \\
& - \frac{ML \cdot r_B (-f \cdot LB + k \cdot PM) - PM \cdot LB \left(g \cdot r_B + ML \cdot \frac{h}{r_B}\right)}{ML^2 \cdot r_B^2 + PM^2 \cdot LB^2} \\
& + \frac{MK \cdot r_D (-f \cdot KD + n \cdot PM) - PM \cdot KD \left(m \cdot r_D + MK \cdot \frac{H}{r_D}\right)}{MK^2 \cdot r_D^2 + PM^2 \cdot KD^2} \\
& - \left. \frac{MK \cdot r_C (-f \cdot KC + n \cdot PM) - PM \cdot KC \left(m \cdot r_C + MK \cdot \frac{H}{r_C}\right)}{MK^2 \cdot r_C^2 + PM^2 \cdot KC^2} \right\} \dots \dots \dots (49)
\end{aligned}$$

Het is duidelijk dat ook voor eene andere ligging van  $P$  dan in het symmetrievlak de gradient kan worden berekend terwijl het tevens niet moeilijk zou zijn de uitdrukking voor de krommingsfactoren op te stellen. Deze formules echter worden te zeer gecompliceerd en zijn praktisch van geen belang.

Hetzelfde kan worden gezegd van de boven afgeleide formule voor den gradient van een punt in het symmetrievlak der pyramide. Want ook deze uitdrukking is te gecompliceerd om voor berekeningen in de praktijk te kunnen dienen. Wij hebben haar dan ook slechts afgeleid om ons een denkbeeld te kunnen vormen van de fouten die worden gemaakt door aan te nemen dat de anticlinal zich oneindig ver uitstrekt in de richting der as. Te dien einde hebben wij met behulp van formule 49 de gradientenkromme III berekend voor punten gelegen in het symmetrievlak van een koepel waarvan in fig 31 de vóór het vlak van teekening gelegen helft  $ABCD$  is voorgesteld. Voor de berekening werd aangenomen dat  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$  en  $AM : MB : BH : MD = 3 : 3 : 3 : 5$ .

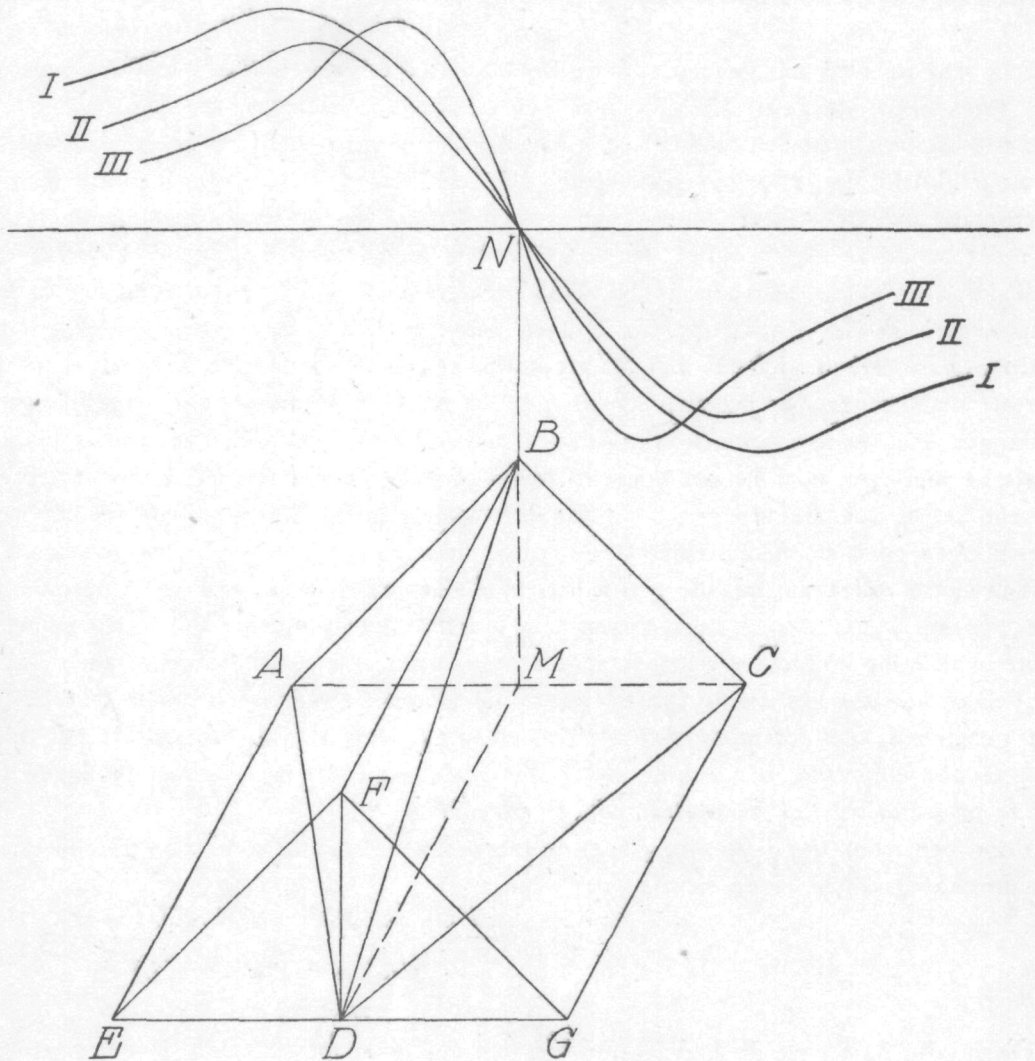


Fig. 31.

Ter vergelijking zijn tevens de krommen  $I$  en  $II$  berekend. De eerste geldt voor een anticlinal waarvan de as loodrecht staat op het vlak van teekening en welke zich oneindig ver uitstrekt aan weerszijden daarvan. Kromme  $II$  geeft de gradienten voor het lichaam  $ABCEFG$  dat kan worden beschouwd als een door twee loodrecht op de horizontale as staande vlakken afgesneden anticlinal.



Deze berekeningen toonen aan dat, indien men de as als horizontaal mag beschouwen, de fout welke men maakt door te onderstellen dat men te doen heeft met een in eene richting onbegrensde anticlinal betrekkelijk gering is. Beide krommen vertoonen, wat hun algemeen verloop betreft, geen essentiële verschillen en ook zal de verschuiving van de maxima in vele gevallen te verwaarloozen zijn. Dit geldt echter niet indien de as niet meer horizontaal verloopt en de metingen worden uitgevoerd over het culminatiepunt van een anticlinal of koepel (kromme III). De maximale gradient van den koepel heeft ongeveer dezelfde waarde als die van de onbegrensde anticlinal doch het maximum ligt in het eerste geval veel dichter bij de as en de kromme is veel steiler in de nabijheid van den top. Deze conclusie is voor de praktijk van belang.

Bij het optreden van een steile kromme waarvan de maxima dicht bij het omkeeringspunt liggen, zal men n.l. geneigd zijn te besluiten tot de aanwezigheid van een anticlinal met zeer steile vleugels. Uit het hier behandelde voorbeeld echter zien wij dat deze conclusie in vele gevallen niet gerechtvaardigd is en men eveneens heeft te denken aan de mogelijkheid dat men te doen heeft met een koepel. In vele gevallen zal men deze interpretatie aan de waarnemingen kunnen toetsen door middel van verschillende profielen loodrecht op de as, daar, indien een uitgesproken koepelvormige structuur aanwezig is, de gradienten boven de hellende as op eenigen afstand van het culminatiepunt duidelijke componenten in de richting der as moeten bezitten. Het is echter ook mogelijk dat het optreden van eene regionale component, bijv. tengevolge van den invloed eener zwak hellende oudere formatie, het gravimetrisch beeld te sterk beïnvloedt om dergelijke gevolgtrekkingen met eenige zekerheid te kunnen maken. Men moet zich dan, zooals bij gravimetrische metingen dikwijls het geval is, tevreden stellen met eene kwalitatieve interpretatie omtrent het al dan niet aanwezig zijn van een plooi, daar het uitvoeren van gecompliceerde berekeningen geen zin heeft indien deze grootendeels op veronderstellingen gebaseerd zijn.

Ten slotte zullen wij nog de gradienten berekenen voor eene driessige ellipsoïde. Door eene gepaste keuze der assen kan men vele lensvormige lichamen (bijv. ertslichamen) bij groote benadering hierdoor vervangen, zoodat deze formules in verschillende gevallen praktisch van belang kunnen zijn. In fig. 32 is slechts de doorsnede van de ellipsoïde met het  $XZ$ -vlak geteekend; de oorsprong van het coördinaten systeem valt samen met het middelpunt  $O$  der ellipsoïde, dat echter niet in het vlak van teekening behoeft te liggen ( $M$  is dus de projectie van het middelpunt op dit vlak).

Voor een punt  $P(-p, -q, -r)$  is nu, gelijk bekend mag worden verondersteld,<sup>1)</sup> de aantrekkingskracht in de richting der  $Z$ -as:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \pi a b c \cdot r \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s) \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}} \quad \dots (a)$$

Hierin zijn  $a$ ,  $b$  en  $c$  de halve assen der ellipsoïde terwijl  $\lambda$  de positieve wortel is van de vergelijking der confocale ellipsoïde door  $P$ :

$$\frac{p^2}{a^2 + \lambda} + \frac{q^2}{b^2 + \lambda} + \frac{r^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad \dots \dots \dots (b)$$

1) Zie bijv. MARCOLONGO, Theoretische Mechanik, Bnd. II, pag. 233 e. v. of TARLETON, An Introduction to the mathematical theory of attraction, Vol. I, pag. 23 e. v.

Nu is:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = - \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial z} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial z} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p}$$

En uit (b) vinden wij:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = \frac{2p}{(a^2 + \lambda) \left\{ \frac{p^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{q^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{r^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right\}}$$

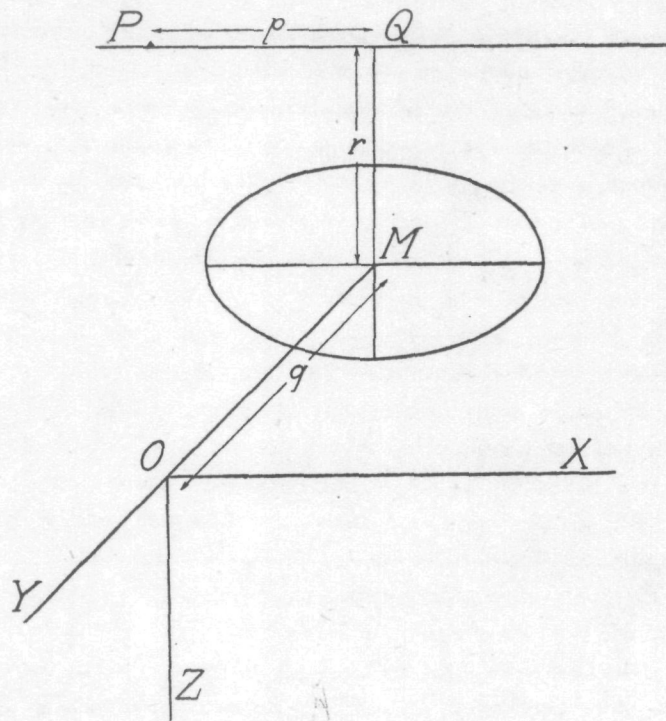


Fig. 32.

Differentieeren wij (a) dan komt er:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial z} = - 2 G (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\pi abc \cdot r}{(c^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}$$

Wij hebben derhalve:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{4 G (\sigma_1 - \sigma_2) \pi abc \cdot p r}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \left\{ \frac{p^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{q^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{r^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right\} \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (50)$$

Op dezelfde wijze vinden wij:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{4 G (\sigma_1 - \sigma_2) \pi abc \cdot q r}{(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \left\{ \frac{p^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{q^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{r^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right\} \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (51)$$

Door bijv.  $a = c$  of  $a = b = c$  te stellen, gaan bovenstaande formules over in de uitdrukkingen voor eene omwentelingsellipsoïde of een bol, terwijl men tevens door  $b$  zeer

groot te maken de formule vindt voor den gradient van een oneindig langen elliptischen cylinder. In het laatste geval is  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$  en komt er:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{4 G (\sigma_1 - \sigma_2) \pi a c \cdot p r}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \left\{ \frac{p^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{r^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right\} \sqrt{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad \dots (52)$$

Indien  $a = c = t$  gaat bovenstaande formule over in de uitdrukking voor een oneindig langen cylinder met cirkelvormige doorsnede;  $\lambda$  wordt dan gevonden uit  $P M^2 = t^2 + \lambda$ .

Door in formule (50)  $q = 0$  te stellen, vinden wij den gradient voor een punt gelegen in het vlak door  $a$  en  $c$ . In dat geval gaat (b) over in een vierkantsvergelijking waaruit  $\lambda$  gemakkelijk kan worden opgelost.

De boven afgeleide formules leenen zich zeer goed tot een onderzoek naar den invloed der variatie van de lengte der  $b$ -as op de grootte der gradienten. Daartoe werden (fig. 33) de gradientenkrommen berekend voor  $a = c = r = 200$  M. en  $b = \infty$  (I) en voor  $a = c = r = 200$  M.,  $q = 0$  en  $b = 500$  M. (II). Voor  $\sigma_1 - \sigma_2$  werd de waarde 0,5 genomen.

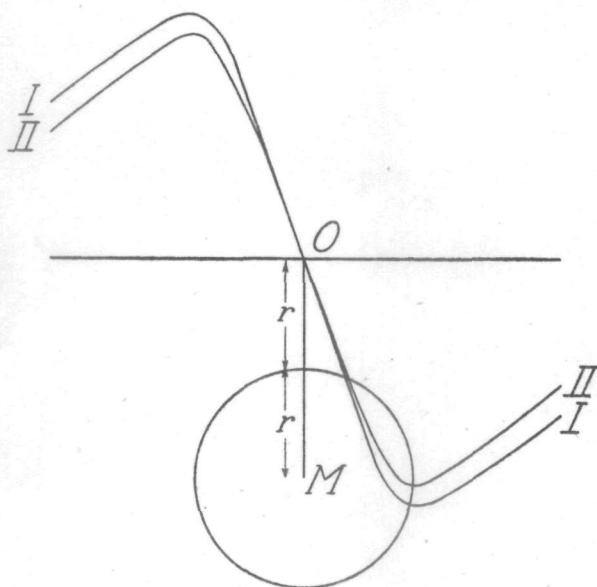


Fig. 33.

Uit deze krommen ziet men dat de fout welke wordt gemaakt door in dit geval een eindig lichaam te vervangen door een in de richting der  $Y$ -as onbegrensd lichaam, slechts gering is, zoodat in de praktijk zonder bezwaar de vereenvoudigde formules kunnen worden gebezigd indien  $b$  niet te klein is. De afwijkingen die wij hebben gevonden voor een anticlinaal door het prisma door een pyramide te vervangen, waren veel grooter en konden niet worden verwaarloosd, daar vooral door de verschuiving van het punt waar de maximale gradient optreedt het karakter van de kromme geheel wordt gewijzigd. De afwijkingen echter, ontstaan door het vervangen van een oneindig lang door een begrensd prisma, waren, evenals in het bovenstaande geval, veel geringer en in vele gevallen verwaarloosbaar. Dit moet worden toegeschreven aan het feit dat bij eene verandering van de lengte der  $b$ -as de

ellipsoïde loodrecht op het  $XZ$ -vlak blijft, gelijk dit ook het geval is met de begrenzingsvlakken van het prisma. Bij de vervanging van een prisma door een pyramide echter, blijft deze loodrechte stand der begrenzingsvlakken op het  $XZ$ -vlak niet meer behouden en wij komen dan ook tot de conclusie dat de formules voor onbegrensde lichamen in de praktijk bijna steeds zonder bezwaar mogen worden gebezigd voor begrensde lichamen zoolang de begrenzingsvlakken ten minste in de nabijheid van het  $XZ$ -vlak weinig afwijken van den loodrechten stand op dit vlak. Is deze laatste voorwaarde niet vervuld, hetgeen bijv. het geval is indien de metingen worden uitgevoerd over het culminatiegebied van een anticlinaal met sterk onderduikende assen, dan moet bij de geologische interpretatie rekening worden gehouden met het feit dat het verloop der gradientenkrommen sterk wordt gewijzigd zoodat uit het optreden van eene steile kromme, waarvan het maximum en minimum dicht bij de as zijn gelegen, niet mag worden geconcludeerd tot de aanwezigheid van een anticlinaal met zeer steile vleugels.

---

## HOOFDSTUK IV.

### Gravimetrisch onderzoek van den Zuidrand van den horst van Winterswijk.

Reeds sinds ongeveer het midden der vorige eeuw was het bekend dat in de omgeving van Winterswijk ontsluitingen voorkomen van gesteenten ouder dan het Tertiair. Deze gesteenten werden door de eerste onderzoekers voor Jura gehouden. Doch MÜLLER en later VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT vonden dat zoowel Muschelkalk als Bontzandsteen op verschillende plaatsen op Nederlandsch grondgebied aan de oppervlakte komen. Deze ontdekking was van groot belang omdat hierdoor het bewijs werd geleverd dat in de omgeving van Winterswijk het productief Carboon op betrekkelijk geringe diepte mocht worden verwacht. De Dienst der Rijksopsporing van Delfstoffen besloot dan ook genoemd gebied nader te verkennen waartoe in de periode van 1906 tot 1923 een groot aantal peilboringen en eenige diepboringen werd uitgevoerd. <sup>1)</sup>

De resultaten dezer boringen toonen duidelijk aan dat Winterswijk en Corle gelegen zijn op een horst waarvan de in Oostelijke richting verloopende Zuidrand op ongeveer 500 M. ten zuiden van genoemde plaatsen wordt gevonden. Omtrent den tektonischen bouw van dezen rand spreekt VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT <sup>2)</sup> de meening uit dat deze analoog is aan den door Stille <sup>3)</sup> beschreven bouw van den Osning (het Noordelijk gedeelte van het Teutoburger Wald). Hij neemt aan dat de zuidrand op geplooid Krijt overschoven en bovendien gestoord is zoodat een gedeelte van den Bontzandsteen is afgespleten en gescheiden van de verder Noordelijk gelegen hoofdmassa door eene hoog opgeperste wig van Dyas en Carboon. Deze interpretatie is voor het profiel door de diepboring van Plantengaarde in overeenstemming met de resultaten dezer boring en die der zuidelijk hiervan gelegen peilboring.

Het gravimetrisch onderzoek had een tweeledig doel, n.l. het aantonen der mogelijkheid de aanwezigheid van een horst als de hier beschouwde gravimetrisch vast te stellen en verder het vervolgen van den zuidrand ten einde de begrenzing van den horst, welke naar het westen nog onvoldoende bekend was, nader te bepalen.

Ter beantwoording der eerste vraag, welke hier alléén zal worden behandeld, werd een profiel opgemeten langs den weg van den Meenkmlen naar Corle. In dit profiel vallen de peilboringen 1920 III en 1920 IV waarvan de laatste het Onder-Krijt aantrof op 155 M. terwijl de eerste reeds bij 90 M. den Bontzandsteen bereikte. De zuidrand van den horst moet dus tusschen beide boringen gelegen zijn.

---

<sup>1)</sup> Eindverslag over de onderzoekingen en uitkomsten van den Dienst der Rijksopsporing van Delfstoffen in Nederland (1903—1916). 's-Gravenhage, Martinus Nijhoff 1918.

Supplement op het eindverslag der Rijksopsporing van Delfstoffen in Nederland. 's-Gravenhage, Ter Algemeene Landsdrukkerij 1924.

<sup>2)</sup> Jaarverslag Rijksopsporing van Delfstoffen 1910, blz. 85, fig. 12.

<sup>3)</sup> Jahrbuch der Kgl. Preuss. geol. Landesanstalt Bnd. XXXI, 1910, blz. 359.

De waargenomen gradienten, waarvan in fig. 34 de componenten in de richting van het profiel als ordinaten der punten 1—7 zijn aangegeven, toonen nu onmiddelijk aan dat wij hier te doen hebben met eene verschuiving. De gradienten blijven positief (d.i. naar het Noorden gericht) terwijl de gemiddelde kromme een zeer duidelijk maximum vertoont.

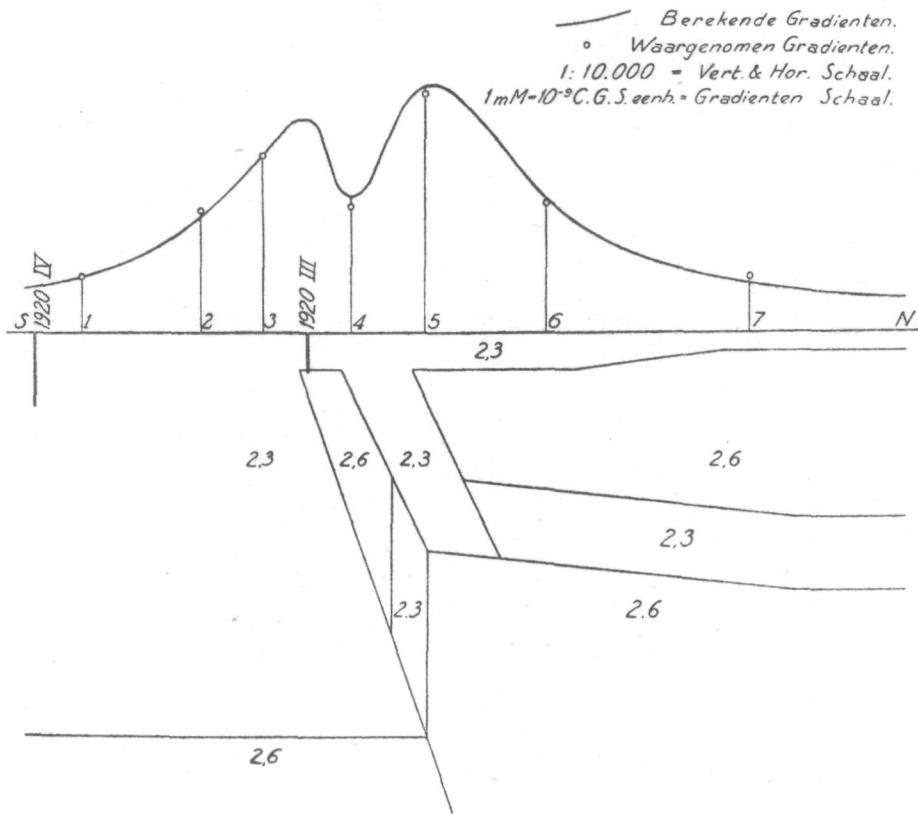


Fig. 34.

Het is echter mogelijk om uit de waargenomen gradienten tevens nadere bijzonderheden af te leiden omtrent den tektonischen bouw der verschuiving. Men ziet n.l. dat tengevolge van de afname van 3 naar 4 en de daarna weer volgende toename naar 5 de gradientenkromme in plaats van één twee maxima vertoont. Men zou geneigd kunnen zijn dit gedrag der gradienten aan toevallige storingen te wijten en aldus als invloed der verschuiving eene gemiddelde kromme kunnen beschouwen waarvan het maximum dan iets zuidelijk van 5 zou komen te liggen. Een dergelijke beschouwingswijze echter zou in dit geval onjuist zijn. Het diluvium en het tertiair zijn in dit gebied voldoende homogeen en ten gevolge der zeer geringe bodemhellingen moet worden aangenomen dat de topografische correcties voldoende nauwkeurig zijn. Bovendien echter zou de geologische interpretatie berustend op een gemiddelde gradientenkromme met één maximum reeds terstond tot eene onmogelijkheid voeren daar aan deze gemiddelde kromme slechts zou kunnen worden voldaan door eene overschuiving welke een hoek van ongeveer 20° met het horizontale vlak maakt. De rand van den horst moet tenminsten iets zuidelijk liggen van boring 1920 III zoodat in dit geval het maximum dus ongeveer 250 M. over den rand zou worden aangetroffen. Daar naar analogie met de bekende tektoniek van den Osning voor de totale

spronghoogte ongeveer een bedrag van 1000 M. mag worden aangenomen en daar uit de resultaten van boring 1920 III volgt dat  $d = 100$  M., zouden wij dus vinden volgens formule 23:

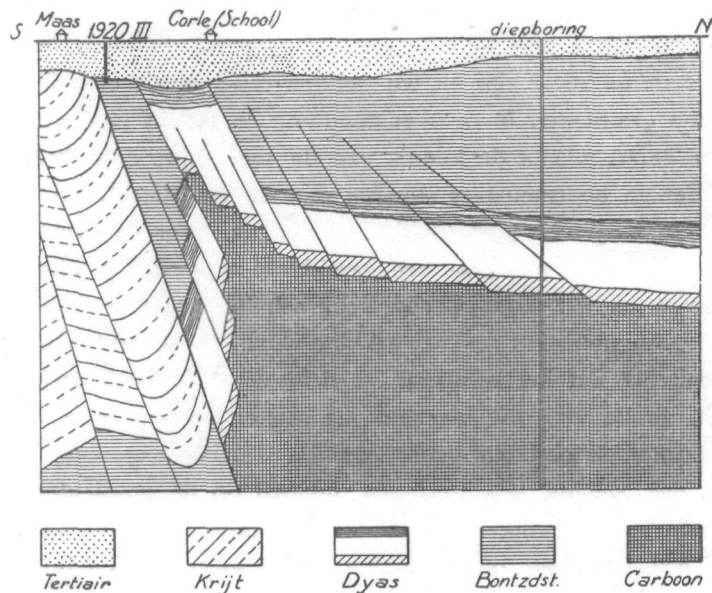
$$250 = \frac{100 a}{100 + 1000}$$

waaruit  $a = 2750$  M. Daar  $D = 1000$  M, volgt dus hieruit dat de overschuiving een hoek van ongeveer  $20^\circ$  met het horizontale vlak zou maken.

Het behoeft geen betoog dat het voorkomen van een dergelijke overschuiving geologisch niet waarschijnlijk moet worden geacht terwijl in dit geval de interpretatie tevens in strijd zou zijn met de resultaten der diepboring ten Zuiden van Corle welke dan de overschuiving op een diepte van ongeveer 550 M had moeten aantreffen. Bovendien zou eene nadere berekening aantonen dat het verloop van de gemiddelde kromme op eenigen afstand van het maximum door een dergelijke verschuiving niet kan worden verklaard. Wij moeten dus aannemen dat beide maxima reëel zijn en wij hebben eene massaverdeeling te zoeken welke met de waargenomen gradienten in overeenstemming en tevens geologisch waarschijnlijk is.

Hiertoe is in de eerste plaats de kennis van de soortelijke gewichten der verschillende formaties noodig. Eenige boormonsters stonden daartoe ten dienste en de bepaling gaf tot resultaat dat voor het Krijt een gemiddeld s. g. van 2.3, voor den Bontzandsteen een s. g. van 2.6 en voor het Carboon eveneens een gemiddeld soortelijk gewicht van 2.6 (2.5 voor Carbonische zandsteen en 2.7 voor Carbonische schalie) moet worden aangenomen. Van het Tertiair waren geen monsters ter beschikking doch, te oordeelen naar hare samenstelling, is het waarschijnlijk dat het soortelijk gewicht dezer formatie weinig zal afwijken van dat van het Krijt, zoodat wij ook hiervoor 2.3 mogen nemen. Bovendien is deze waarde van weinig belang daar de onderste grens van het Tertiair nagenoeg horizontaal verloopt en deze formatie dus slechts een geringen invloed op de gradienten uitoefent. Wat de Dyas betreft, merken wij het volgende op. Deze formatie bestaat hoofdzakelijk uit mergel en steenzout met een s. g. van ongeveer 2.2 en uit anhydriet en dolomiet met een s. g. van ongeveer 3. Te Plantengaarde bestaat volgens VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT het doorboorde gedeelte van de Dyas, ingeklemd tusschen de hoofdmassa en de zuidelijk daarvan gelegen hypothetische wig van Bontzandsteen, tot de eerste overschuivingskloof uit ongeveer 37 M. mergel, 40 M. anhydriet en 139 M. steenzout. Voor het gemiddeld soortelijk gewicht van deze massa vinden wij dus 2.3. In de diepboring van Corle werd volgens TESCH ongeveer 120 M. steenzout en 80 M. anhydriet en dolomiet aangetroffen zoodat het gemiddeld soortelijk gewicht hier ongeveer 2.5 bedraagt. Gelijk echter zal blijken, kunnen de gravimetrische resultaten slechts bevredigend worden verklaard indien wij ook voor het profiel door Corle aannemen dat de Dyas plaatselijk is opgeperst en ingeklemd tusschen Bontzandsteen en het is voornamelijk het soortelijk gewicht dezer opgeperste massa dat voor ons van belang is daar de door de diepboring noordelijk van Corle doorboorde Dyas hoogstwaarschijnlijk nagenoeg horizontaal ligt. Het is te verwachten dat de opgeperste massa naar verhouding rijker zal zijn aan het meer plastische steenzout en naar analogie met het voor Plantengaarde berekende soortelijk gewicht dezer formatie, welke daar onder dezelfde omstandigheden voorkomt, mogen wij dus aannemen de werkelijkheid te benaderen indien wij onderstellen dat het soortelijk gewicht van de Dyas, evenals dat van het Krijt, 2.3 bedraagt.

Dat slechts een profiel analoog aan dat hetwelk door VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT wordt aangenomen voor de omgeving van Plantengaarde de gravimetrische resultaten bevredigend kan verklaren, volgt onmiddellijk uit de beschouwing der waargenomen gradienten. Uit de afname van den gradient van 3 naar 4 en de daarop volgende toename naar 5 volgt dat tusschen 3 en 4 de aanwezigheid van eene lichtere massa den invloed van den zwaarderden Bontzandsteen gedeeltelijk opheft, terwijl de hoofdtrand der zwaardere massa (Bontzandsteen en Carboon) zich ongeveer onder 5 moet bevinden, het punt waar het absolute maximum wordt bereikt. Het is nu gemakkelijk eene zoodanige massaverdeeling te bedenken, dat de waargenomen gradienten vrijwel samenvallen met de berekende gradientenkromme (fig. 34). Deze massaverdeeling moet dan worden opgevat als een geschematiseerd beeld van het meest waarschijnlijke geologisch profiel zooals dat in fig. 35 is voorgesteld.



Schaal: 1:10.000.

Fig. 35.

Op deze wijze komen wij dus tot de conclusie dat de tektonische bouw van den zuidrand van den horst in de omgeving van Corle slechts kan worden verklaard door eene aanname geheel analoog aan die welke door VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT werd gemaakt voor het profiel door Plantengaarde hetwelk werd geconstrueerd uit de gegevens van slechts twee boringen. De resultaten van het gravimetrisch onderzoek blijken dus de opvatting van genoemden schrijver geheel te bevestigen.

Eene geologische interpretatie als de hier gegevene is natuurlijk slechts tot op zekere hoogte quantitatief. Het is bijna nooit mogelijk de soortelijke gewichten der verschillende formaties, welke zelden voldoende homogeen zijn, nauwkeurig te bepalen waardoor de berekeningen steeds eenigszins onzeker zijn. Bovendien kunnen praktisch niet een zóó groot aantal metingen worden uitgevoerd dat hieruit eene vrijwel ondubbelzinnig bepaalde kromme te construeeren is. Zoo ware, ter nadere bevestiging van de eindconclusie, in het hier beschouwde voorbeeld een meting tusschen 3 en 4 van belang geweest om de ligging van het eerste maximum nauwkeurig vast te leggen. Daar echter de interpretatie slechts door middel van lange



berekeningen, welke meestal niet gedurende het veldwerk kunnen worden uitgevoerd, kan worden gegeven, is het niet steeds mogelijk metingen te doen in alle punten welke later belangrijk blijken te zijn. Daartoe zou het noodig zijn in de nabijheid van elk punt waar eene anomalie wordt aangetroffen, meerdere waarnemingen te verrichten om op deze wijze de afwijking zoo nauwkeurig mogelijk te localiseeren en hare grootte vast te leggen. De in dit hoofdstuk uitgewerkte metingen, welke slechts een klein gedeelte vormen van het uitgevoerde onderzoek, hadden alleen ten doel de ligging van den rand te bepalen en de noodige tijd voor het verrichten van meer gedetailleerde waarnemingen stond den schrijver niet ten dienste. Ofschoon het dus mogelijk is, dat een nauwkeuriger kennis der soortelijke gewichten en een grooter aantal waarnemingen zouden voeren tot eene eenigszins gewijzigde massaverdeeling, zou toch blijken dat deze wijzigingen van ondergeschikt belang zijn en de interpretatie hierdoor essentieel niet wordt veranderd daar, zooals de praktijk leert, zulke wijzigingen zich zouden bepalen tot kleine veranderingen in de ligging en helling der formatiegrenzen.

Voor de berekeningen is gebruik gemaakt van de in Hoofdstuk II afgeleide formules voor zich in ééne richting oneindig ver uitstrekkende verschuivingsvlakken. Wij hebben in Hoofdstuk III aangetoond, dat deze aanname zelfs bij lichamen welke zich slechts 500 M. aan weerszijden van het vlak van het profiel uitstrekken, tot geene groote onnauwkeurigheden voert, zoodat deze formules hier zonder bezwaar mogen worden toegepast.

De waargenomen krommingsfactoren, welke kwalitatief eveneens zeer duidelijk de aanwezigheid eener verschuiving aantoonde, konden voor de vergelijking met de theoretisch berekende waarden niet worden gebezigd zoodat de quantitative interpretatie slechts op het verloop der gradienten gebaseerd is. De onderzoekingen verder westelijk toonden n.l. de aanwezigheid aan van een niet onbelangrijke dwarsbreuk welke ongeveer samen schijnt te vallen met het zuidelijk gedeelte van de westgrens van het Korenburger veen. De invloed van deze breuk op de krommingsfactoren vooral van 6 en 7 is te groot om verwaarloosd doch tevens te zeer onvoldoende bekend om in rekening gebracht te kunnen worden. Het bleek n.l. niet mogelijk op den drassigen en bewegelijken bodem van het Korenburger veen geschikte punten voor de opstelling van het instrument te vinden, zoodat een nader onderzoek van deze dwarsbreuk, waarvan echter de aanwezigheid door eenige metingen met zekerheid kon worden vastgesteld, achterwege moest blijven. De invloed van deze breuk op de gradienten echter is niet alleen veel geringer, maar kon bovendien geheel geelimineerd worden doordat van de waargenomen gradienten slechts de componenten in de profielrichting werden vergeleken met de berekende waarden. Eene correctie voor de krommingsfactoren echter kan slechts worden aangebracht door de berekening van den invloed der dwarsbreuk op deze grootheden, welke berekening ten gevolge van het gebrek aan voldoende gegevens niet kon worden uitgevoerd.

---

# STELLINGEN.

---

## I.

De door v. KÖVESLIGETHY gegeven formule voor de ligging van den maximum krommingsfactor boven een zich oneindig ver uitstrekkende hellende formatiegrens of verschuiving is onjuist.

RADÒ DE KÖVESLIGETHY, Studi Volcano-gravimetrici. In memoriam del Barone ORLANDO EÖTVÖS. Modena, società tipografica modenense, 1920.

## II.

Het is wenschelijk, dat proeven worden genomen omtrent de mogelijkheid vulkanische uitbarstingen te voorspellen met behulp van de torsiebalans.

## III.

Van de twee door SCHWEYDAR en REICH als mogelijk beschouwde verklaringen van den loop der seismische stralen tusschen schotpunt en seismograaf verdient op theoretische gronden de aanname, dat het grensvlak der twee formaties wordt getroffen onder een hoek, waarvan de sinus gelijk is aan de verhouding der snelheden in de beide formaties, de voorkeur, ofschoon deze verklaring in vele gevallen niet in overeenstemming schijnt te zijn met de resultaten der waarnemingen.

SCHWEYDAR und REICH, Künstliche elastische Bodenwellen als Hilfsmittel geologischer Forschung. GERLAND'S Beiträge, Bnd. XVII, Heft 1, 1927.

#### IV.

De in de vorige stelling vermelde schijnbare tegenspraak tusschen theorie en waarneming kan worden verklaard door aan te nemen, dat in vele gevallen de laag welke de oppervlakte vormt en waarop de seismograaf is opgesteld, als niet-elastisch moet worden beschouwd.

#### V.

Het feit, dat de uit seismische waarnemingen berekende diepte van eene door boringen of anderszins bekende laag meestal te klein is, kan op verschillende wijzen worden verklaard, o.a. door aan te nemen dat in de nabijheid van het schotpunt de trillingen zich sneller voortplanten dan op eenigen afstand daarvan.

#### VI.

Bij het toepassen der seismische methode op problemen der praktische geologie kunnen vergissingen ontstaan, indien alléén de snelheid der longitudinale trillingen in de verschillende formaties in aanmerking wordt genomen bij de berekening der diepte. In sommige gevallen dient eveneens het karakter der op het seismogram weergegeven trillingen te worden beschouwd.

#### VII.

Ten onrechte wordt door WEGENER groote beteekenis toegekend aan de "Polfluchtkraft" daar deze kracht geen bevredigende verklaring geeft van het ontstaan van het Alpine systeem van ketengebergten en van de tegenwoordige geographische ligging van deze gebergten noch van de palaeogeographische verdeeling van land en zee sinds het Laat-Carboon, zooals die door WEGENER wordt aangenomen.

#### VIII.

Een nauwkeurige analyse van de in het bovenste gedeelte der aardkorst zich voortplantende seismische trillingen, zoowel als de resultaten van de onderzoekingen omtrent het gehalte aan radio-actieve mineralen in graniet wettigen het vermoeden, dat de gemiddelde dikte van de sial niet ca. 100 K.M. is, zooals door WEGENER, of 60 K.M. zooals door MOHORVIČIĆ wordt aangenomen, doch 30—40 K.M. is, waarvan waarschijnlijk slechts de bovenste 10—20 K.M. voornamelijk uit granitisch materiaal bestaan.

## IX.

Een dikte van ongeveer 35 K.M. voor de sial is niet in tegenspraak met de leer der isostasie indien men, zich baseerend op de theorie van AIRY, regionale in plaats van locale isostatische compensatie aanneemt.

## X.

De samenstelling der eruptiefgesteenten van N. E. MEXICO in verband met den tektonischen bouw van dit gebied moet worden beschouwd als een argument voor de theorie van HARKER omtrent het ontstaan van atlantische en pacifische eruptiefgesteenten.

## XI.

Het zout, voorkomend als zgn. „Salt domes” in het kustgebied van Texas is waarschijnlijk afkomstig uit het Onder-Krijt en niet uit een pre-cretaceische formatie zooals door DE GOLYER en vele andere Amerikaansche geologen wordt aangenomen.

Geology of the Salt Dome Oilfields, edited by R. C. MOORE.

Publication of the American Association of Petroleum Geologists, 1926.

## XII.

Ten onrechte wordt door vele schrijvers, o.a. door GARFIAS en FREUDENBERG, aangenomen dat er verband bestaat tusschen de accumulatie van petroleum en de aanwezigheid van basische intrusies in het Oostelijk kustgebied van Mexico.

W. FREUDENBERG, Geologie von Mexico, 1921.

GARFIAS, Journal of Geol. vol. 20, 1912. Econ. Geol. vol. X, 1915.

## XIII.

De opvatting van FELIX en LENK, welke in de belangrijkste nieuwe publicaties niet wordt weerlegd, dat het Oostelijk kustgebied van Mexico door een groote verschuiving van het tafelland is gescheiden, is onjuist.

J. FELIX und H. LENK, Beiträge zur Geologie und Paleontologie der Republik Mexico, 1889—1899.

W. FREUDENBERG, Geologie von Mexico, 1921.

#### XIV.

Het verdient aanbeveling het begrip "differentiaal", hetwelk in vele leerboeken onvoldoende verklaard wordt, eerst in te voeren als een formeel hulpmiddel bij het integreren.

#### XV.

Formule 230 in PEIRCE'S "A short table of integrals" is onvolledig, daar zij niet geldig is voor  $a'c - ac' < 0$ ,  $c' < 0$ .

#### XVI.

De als "Ley de estranjeria" bekende Mexikaansche vreemdelingenwet van 1926, waarbij aan buitenlanders slechts onder zekere voorwaarden het recht wordt toegekend aandeelen te mogen bezitten in Mexikaansche Maatschappijen welke gronden, wateren of mijnen binnen de grenzen der republiek exploiteeren of bezitten, moet worden beschouwd als te zijn in strijd met art. 27 der Grondwet van 1917.

---