

ENIGE TOEPASSINGEN VAN FOURIERINTEGRALLEN OP ELASTISCHE PROBLEMEN

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING
VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN
DE TECHNISCHE WETENSCHAP AAN
DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE
DELFT OP GEZAG VAN DEN RECTOR
MAGNIFICUS, DR. IR. H. J. VAN DER
MAAS, HOOGLEERAAR IN DE AFDEE-
LING DER WERKTUIGBOUWKUNDE,
SCHEEPSBOUWKUNDE EN VLIEG-
TUIGBOUWKUNDE, VOOR EEN COM-
MISSIE UIT DEN SENAAAT TE VERDE-
DIGEN OP WOENSDAG, 12 DECEMBER
1945, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

ADRIAAN VAN WIJNGAARDEN

WERKTUIGKUNDIG INGENIEUR

GEBOREN TE ROTTERDAM

NAAMLooZE VENNOOTSCHAP W. D. MEINEMA — DELFT

DIT PROEFSCHRIFT IS GOEDGEKEURD DOOR DEN PROMOTOR
Prof. Dr. Ir. C. B. BIEZENO

Aan mijn Moeder,

INHOUD.

Blz.

HOOFDSTUK I.

OVER HET THEOREMA VAN DE SAINT-VENANT BIJ TWEE- EN DRIEDIMENSIONALE HALFRUIMTEN	11
1. Inleiding	11
§ 1. <i>In één richting constanté belasting van halfruimte en halfschijf</i>	12
2. Het belastingstelsel	12
3. Het spanningstelsel, behorende bij de belasting p_x en \bar{p}_y	14
4. Het spanningstelsel, behorende bij de belasting p_z	16
5. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{y1} en de puntlast P_y	17
6. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{x1} en de puntlast P_x	19
7. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{z1} en de puntlast P_z	20
8. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{y2} en de dubbelkracht met koppel M_z	20
9. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{x2} en de dubbelkracht zonder koppel met intensiteit N_x	22
10. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{z2} en de dubbelkracht met koppel M_y	23
11. Het definitieve belastingstelsel	24
12. De definitieve belasting p_{y1d}	25
13. De definitieve belasting p_{x1d}	27
14. De definitieve belasting p_{z1d}	28
15. De definitieve belasting p_{y2d}	29
16. De definitieve belasting p_{x2d}	31
17. De definitieve belasting p_{z2d}	32
18. Uitgewerkt voorbeeld	33
§ 2. <i>Rotatorisch symmetrische belasting van de halfruimte</i>	37
19. Het belastingstelsel	37
20. Het spanningstelsel, behorende bij de belasting q_r en q_y	38
21. Het spanningstelsel, behorende bij de belasting q_φ	40
22. De gelijkmatig verdeelde belasting q_y en de puntlast P_y	41
23. De gelijkmatig verdeelde belasting q_r en de krachtbron N_y	43
24. De gelijkmatig verdeelde belasting q_φ en het puntwringmoment M_y	44
25. De definitieve belasting q_{yd}	45
26. De definitieve belasting q_{rd}	46
27. De definitieve belasting $q_{\varphi d}$	48
28. Uitgewerkt voorbeeld	49
§ 3. <i>Bepaalde integralen, die een rol in het voorgaande spelen</i>	53
29. Integralen met een goniometrische en exponentiele factor in de integrand	53
30. Integralen met één Besselfunctie in de integrand	55
31. Integralen met twee Besselfuncties in de integrand	56
32. Vervolg	57
33. Vervolg	59

HOOFDSTUK II.

DE TORSIE VAN CYLINDRISCHE STAVEN	61
§ 1. <i>De torsie van een cilindrische staaf met een door twee elkander snijdende cirkelbogen begrensde doorsnede</i>	61
1. Inleiding	61
2. Probleemstelling	62
3. De spanningsfunctie	64
4. Conforme afbeelding van de doorsnede	65
5. Oplossing van het potentiaalvraagstuk	67
6. Bepaling van de maximale schuifspanning	68
7. Bepaling van het wringmoment	69
8. Sikkels, waarbij het middelpunt van een van beide begrenzende bogen ligt op de cirkel, waarvan de andere boog deel uitmaakt	71
9. Sikkels en lenzen, waarbij de begrenzende cirkelbogen elkander onder een rechte hoek snijden	72
10. Smalle sikkels en lenzen	73
11. Cirkelsegmenten	74
12. Overzicht van de resultaten	76
§ 2. <i>De torsie van een cilindrische staaf met een door twee elkander inwendig rakende cirkels begrensde doorsnede</i>	83
13. Inleiding	83
14. Conforme afbeelding van de doorsnede	83
15. Oplossing van het potentiaalvraagstuk	84
16. Bepaling van de maximale schuifspanning	85
17. Bepaling van het wringmoment	86
§ 3. <i>De torsie van een cilindrische staaf, waarvan de doorsnede begrensd is door een cirkel, voorzien van een radiale insnijding</i>	87
18. Inleiding	87
19. Conforme afbeelding van de doorsnede	88
20. Oplossing van het potentiaalvraagstuk	91
21. Bepaling van het wringmoment	91
§ 4. <i>Bepaalde integralen, die een rol in het voorgaande spelen</i>	93
22. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt \cos ct}{\sinh^2 \pi t} dt$ en hieruit afgeleide integralen	93
23. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{\sinh^2 at t dt}{\sinh^2 \pi t \cosh \pi t}$ en hieruit afgeleide integralen	96
24. De integraal $I(m, n, p) = \int_0^{\infty} \frac{\cosh^n \pi t}{\sinh^m \pi t} t^p dt$	97
25. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{\cos xt dt}{\cosh t + c}$ en hieruit afgeleide integralen	99
26. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{\cos xt dt}{c^2 + t^2}$ en hieruit afgeleide integralen	100

	Blz.
27. Eigenschappen van de Ψ -functie en haar afgeleiden	100
28. De integraal $\int_0^{\infty} e^{-xt} \coth t \, dt$ en hieruit afgeleide integralen	103
29. De integraal K_1	103
30. De integraal K_2	109
31. De integraal K_3	113
32. De integraal K_4	115
 § 5. <i>Enige praktische toepassingen van het voorgaande</i>	 118
33. De stijfheid van een as met een spiegleuf	118
34. De torsie van cilindrische staven met vleugelprofielvormige doorsnede	120

HOOFDSTUK I.

OVER HET THEOREMA VAN DE SAINT-VENANT BIJ
TWEË- EN DRIEDIMENSIONALE HALFRUIMTEN.

1. *Inleiding.* Van groot belang voor de toepassing van de resultaten van de toegepaste mechanica op de in de techniek voorkomende constructies en belastingsgevallen is het theorema van DE SAINT-VENANT. Dit theorema leert het volgende:

Wanneer op een beperkt gebied van een voldoende ondersteund elastisch lichaam beurtelings twee belastingsystemen S_1 en S_2 aangrijpen, die statisch aequivalent zijn (d.w.z. dat $S_1 - S_2$ een evenwichtssysteem vormt), dan is de spanningstoestand (en daarmee de vervormingstoestand) tengevolge van S_1 in een bepaald punt des te minder verschillend van die tengevolge van S_2 naarmate het punt verder van het belastingsgebied verwijderd is. Wat slordiger uitgedrukt luidt het theorema, dat de spanningen (en vervormingen) tengevolge van een in een beperkt gebied werkend belastingsstelsel op enige afstand van dat gebied alleen van de resultante van het stelsel en niet van de verdeling ervan afhangen.

De omschrijving van het theorema is enigszins vaag. ZANABONI¹⁾ is er in geslaagd door een vernuftige gedachtengang een bewijs van het principe te leveren met een verscherping van de formulering. Hiermede is evenwel de technicus toch niet bevredigd. Gewoonlijk is deze immers gaarne bereid het theorema ook wel zonder bewijs te aanvaarden. Daarentegen is hij echter wel geïnteresseerd in het antwoord op de vraag, hoe groot het verschil van de spanningen tengevolge van twee statisch aequivalente belastingsstelsels in de omgeving van het belastingsgebied hoogstens is.

Ook in deze richting zijn wel enige berekeningen gepubliceerd. In de handboeken der elasticiteitstheorie wordt meestal volstaan met de berekening van de spanningen in een speciaal lichaam tengevolge van twee zeer speciale statisch aequivalente belastingen. In zulk een geval kunnen uit de aard der zaak zeer concrete gegevens verstrekt worden, hetgeen inderdaad uit illustratief oogpunt voordelen heeft. Berekeningen van SUPINO²⁾ laten een grotere vrijheid in de keuze van het elastisch lichaam en de belastingen toe, maar de resultaten zijn dan ook aanmerkelijk minder scherp.

Wij zullen ons in het volgende bezig houden met een elastisch lichaam, dat onderworpen is aan een belasting S_1 over een gebied van de oppervlakte, waarvan de karakteristieke afmetingen klein zijn t.o.v. de kromtestralen ter plaatse en ook t.o.v. de andere afmetingen van het lichaam.

¹⁾ O. ZANABONI, *Atti Accad. Lincei Roma*, 25, 117—121, (1937).

²⁾ G. SUPINO, *Annali di Matematica pura ed applicata*, ser. IV, to. IX, 92—119, (1931).

De spanningen in het lichaam zullen dan volgens het theorema bestaan uit een stelsel, dat iedere statisch aequivalente belasting ook zou verwekken, en een stelsel, dat practisch beperkt is tot de omgeving van het belastingsgebied, afhankelijk van de speciale bouw van S_1 . Het evenwichtstelsel $S_1 - S_2$ verwekt alleen zulk een plaatselijk stelsel. Onder de gemaakte aannamen over de grootte van het belastingsgebied kunnen wij derhalve ter bestudering van dit plaatselijke spanningstelsel het lichaam vervangen denken door een halfruimte. Verder zullen wij de belasting onder later te vermelden beperkingen als willekeurig aannemen. Wij zullen in het volgende zeer scherpe — zelfs de scherpst mogelijke — grenzen aangeven tusschen welke het plaatselijke spanningstelsel kan variëren. Bij al onze berekeningen wordt het materiaal verondersteld isotroop te zijn en te gehoorzamen aan de wet van HOOKE.

§ 1. In één richting constante belasting van halfruimte en halfschijf.

2. *Het belastingstelsel.* Wij denken ons een lichaam, dat het gedeelte van de ruimte inneemt, waarvoor t.o.v. een rechthoekig assenstelsel (x, y, z) geldt: $y > 0$ en $-c < z < c$ (zie fig. 1). Is c eindig,

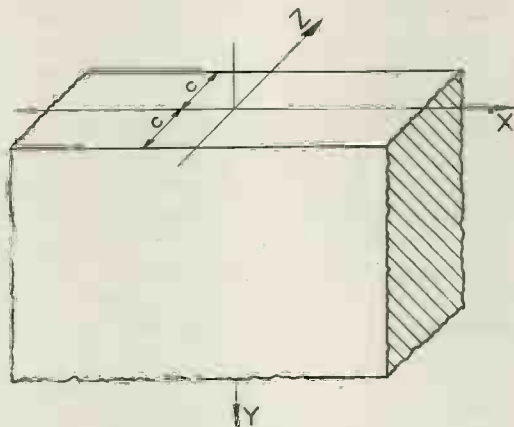


Fig. 1. De halfschijf.

dan spreken wij van een halfschijf, zo niet, dan van een halfruimte. Aan het oppervlak $y = 0$ wordt deze halfschijf of dit halfvlak gedacht onderworpen te zijn aan een belasting, die in de richting van de Z -as gelijkmatig is. In de X -richting leggen wij voorloopig geen beperkingen op.

Wij beschouwen eerst een belasting zonder component in de Z -richting. Is de dikte $2c$ klein, dan is de spanningstoestand in een punt van de halfschijf bij benadering een vlakspanningstoestand. Ook kan op de vlakken $z = c$ en $z = -c$ een zodanige normale belasting worden aangebracht, dat de vlakken $z = \text{constant}$ vlak blijven; er

treedt dan een zg. vlakke vervormingstoestand op. In het geval van de halfruimte is dit laatste altijd het geval, zoals uit symmetrieoverwegingen blijkt. Beide gevallen laten nagenoeg dezelfde wiskundige behandeling toe. Waar wij in het eerste geval dan over spanningen spreken, bedoelen wij de over $z = -c$ tot $z = c$ gemiddelde waarden ervan. Ten opzichte van deze spanningen is de wiskundige behandeling van beide gevallen hierdoor volkomen dezelfde. Bij de bepaling van de vervormingen treedt een kleine verandering van enkele constanten op, die uit wiskundig oogpunt niet belangrijk is en ons ook daarom al minder belang inboezemt, omdat wij ons hoofdzakelijk zullen bezighouden met de spanningen.

Bezit de belasting geen componenten in de X - en Y -richting, dan gelden analoge beschouwingen. Zo kan op de vlakken $z = c$ en $z = -c$ een zodanige tangentiële belasting worden aangebracht, dat er uitsluitend vervormingen in de Z -richting optreden. De spanningstoestand is in dat geval een zuivere vlakspanningstoestand. In het geval van de halfruimte is dit weer het geval. Voeren wij over de schijfdikte gemiddelde spanningen in, dan wordt de behandeling weer uit wiskundig oogpunt dezelfde.

Het is dus duidelijk, dat de spanningstoestand van de in de Z -richting gelijkmatig belaste halfruimte overeenkomt met die van een loodrecht op de Z -richting uitgesneden halfschijf, waarvan de dikte zonder aan de algemeenheid te kort te doen gelijk kan worden gesteld aan de eenheid. Wij zullen ons derhalve verder tot een dergelijke schijf beperken.

De belasting op het vlak $y = 0$ zij $p(x)$. Deze belasting ontbinden wij in componenten $p_x(x)$, $p_y(x)$ en $p_z(x)$ in de positieve ax -richtingen. De belasting $p_x(x)$ en $p_z(x)$ is dus tangentiël en $p_y(x)$ normaal. Wij zullen in het volgende zien, dat het nuttig is de belastingscomponenten in de vorm van een Fourierintegraal te schrijven. Willen wij in het algemeen een functie $f(x)$ in een Fourierintegraal ontwikkelen, dan moet voldaan zijn aan de volgende drie eisen:

$$\left. \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \text{ bestaat,} \\ f(x) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \{f(x - \delta) + f(x + \delta)\}, \\ f(x) \text{ en } f'(x) \text{ zijn intervalsgewijs continu.} \end{array} \right\} \quad (1)$$

De beide laatste voorwaarden zijn van zuiver wiskundige aard. De eerste daarentegen heeft in dit geval een fysieke betekenis. Immers hierdoor wordt bijv. een in x periodieke belasting uitgesloten. Aangezien wij ons echter speciaal willen bezighouden met belastingstelsels op een eindig gebied, houdt ook deze eis voor ons geen enkele beperking in.

Met het oog op speciale toepassingen is het verkieslijk de belastingscomponenten te splitsen in een in x even en oneven gedeelte. In formule:

$$\left. \begin{array}{l} p_x(x) = p_{x1}(x) + p_{x2}(x) \\ p_y(x) = p_{y1}(x) + p_{y2}(x) \\ p_z(x) = p_{z1}(x) + p_{z2}(x) \end{array} \right\} \quad (2)$$

Hierin voldoen de functies uit het rechter lid dan aan:

$$\left. \begin{aligned} p_{x1}(x) &= p_{x1}(-x) & p_{x2}(x) &= -p_{x2}(-x) \\ p_{y1}(x) &= p_{y1}(-x) & p_{y2}(x) &= -p_{y2}(-x) \\ p_{z1}(x) &= p_{z1}(-x) & p_{z2}(x) &= -p_{z2}(-x) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Omgekeerd volgen de nu ingevoerde functies uit:

$$\left. \begin{aligned} p_{x1}(x) &= 1/2\{p_x(x) + p_x(-x)\} & p_{x2}(x) &= 1/2\{p_x(x) - p_x(-x)\} \\ p_{y1}(x) &= 1/2\{p_y(x) + p_y(-x)\} & p_{y2}(x) &= 1/2\{p_y(x) - p_y(-x)\} \\ p_{z1}(x) &= 1/2\{p_z(x) + p_z(-x)\} & p_{z2}(x) &= 1/2\{p_z(x) - p_z(-x)\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Voeren wij nu nog ter afkorting in:

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) &= \int_0^\infty p_{x1}(u) \cos tu \, du & P_{x2}(t) &= \int_0^\infty p_{x2}(u) \sin tu \, du \\ P_{y1}(t) &= \int_0^\infty p_{y1}(u) \cos tu \, du & P_{y2}(t) &= \int_0^\infty p_{y2}(u) \sin tu \, du \\ P_{z1}(t) &= \int_0^\infty p_{z1}(u) \cos tu \, du & P_{z2}(t) &= \int_0^\infty p_{z2}(u) \sin tu \, du \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dan kunnen wij de belastingscomponenten als volgt in een Fourier-integraal ontwikkelen:

$$\left. \begin{aligned} p_x(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{P_{x1}(t) \cos xt + P_{x2}(t) \sin xt\} dt \\ p_y(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{P_{y1}(t) \cos xt + P_{y2}(t) \sin xt\} dt \\ p_z(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{P_{z1}(t) \cos xt + P_{z2}(t) \sin xt\} dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

In nr. 3 zullen wij ons bezig houden met de belasting p_x , p_y ; in nr. 4 met de belasting p_z .

3. *Het spanningstelsel, behorende bij de belasting p_x en p_y .* Zoals bekend, geldt voor de over de schijfdikte gemiddelde spanningen in het geval, dat de belasting geen component in de Z -richting bezit: $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, terwijl de spanningen σ_x , τ_{xy} en σ_y als volgt in verband kunnen worden gebracht met de spanningsfunctie $F(x, y)$ van AIRY:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (1)$$

Hierin voldoet F dan aan de vergelijking:

$$\Delta' \Delta' F \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = 0 \quad (2)$$

De randvoorwaarden van (2) hangen af van de aard van het vraagstuk. In ons geval, waar op de lijn $y = 0$ voorgeschreven spanningen heersen, moet gelden:

$$\tau_{xy}(x, 0) = -p_x(x) \quad \sigma_y(x, 0) = -p_y(x) \quad (3)$$

Over de in het oneindige optredende spanningen laten wij ons voorlopig niet uit.

Bekende oplossingen van (2) zijn o.a.:

$$F = c, x, y, \sin xt e^{-yt}, \cos xt e^{-yt}, y \sin xt e^{-yt} \text{ en } y \cos xt e^{-yt}.$$

Wij zullen nu trachten aan (2) en (3) te voldoen door de genoemde oplossingen in de vorm van een integraalvoorstelling te superponeren:

$$F = \int_0^{\infty} \{ (f_1 + ytf_2) \cos xt + (f_3 + ytf_4) \sin xt \} e^{-xt} + f_5x + f_6y + f_7 \} dt \quad (4)$$

Hierin zijn de f_i voorlopig nog onbekende functies van t . Nemen wij aan, dat wij de eerste en tweede afgeleiden van F naar x en y kunnen bepalen door onder het integraalteken naar x en y te differentieren, dan vinden wij voor de spanningen, gelet op (1):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \int_0^{\infty} \{ (f_1 - 2f_2 + ytf_2) \cos xt + (f_3 - 2f_4 + ytf_4) \sin xt \} e^{-yt} t^2 dt \\ \tau_{xy} &= \int_0^{\infty} \{ (f_3 - f_4 + ytf_4) \cos xt + (-f_1 + f_2 - ytf_2) \sin xt \} e^{-yt} t^2 dt \\ \sigma_y &= \int_0^{\infty} \{ (-f_1 - ytf_2) \cos xt + (-f_3 - ytf_4) \sin xt \} e^{-yt} t^2 dt \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Voor $y = 0$ geldt derhalve:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= \int_0^{\infty} \{ (f_3 - f_4) \cos xt + (-f_1 + f_2) \sin xt \} t^2 dt \\ \sigma_y(x, 0) &= \int_0^{\infty} \{ -f_1 \cos xt - f_3 \sin xt \} t^2 dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Vergelijken wij (6) met (2, 6) en (3), dan zien wij, dat de functies f_1 , f_2 , f_3 en f_4 bepaald kunnen worden. Wij vinden:

$$\begin{aligned} t^2 f_1 &= \frac{2}{\pi} P_{v1}(t) \\ t^2 f_2 &= \frac{2}{\pi} \{ -P_{x2}(t) + P_{v1}(t) \} \\ t^2 f_3 &= \frac{2}{\pi} P_{v2}(t) \\ t^2 f_4 &= \frac{2}{\pi} \{ P_{x1}(t) + P_{v2}(t) \} \end{aligned} \quad (7)$$

De functies f_5 , f_6 en f_7 in (4) komen niet voor in de uitdrukkingen voor de spanningen (5). Zij kunnen dan ook niet uit spanningswaarden bepaald worden. Zij bieden echter de mogelijkheid om de integralen voor F en de eerste afgeleiden naar x en y , die een rol spelen in de uitdrukkingen voor de deformaties, te laten convergeren. Omdat wij ons zullen beperken tot de spanningen, hebben zij voor ons geen betekenis.

Substitueren wij (7) in (5), dan vinden wij:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\{ (2P_{x2} - P_{y1}) - yt(P_{x2} - P_{y1}) \} \cos xt \\ &\quad - \{ (2P_{x1} + P_{y2}) - yt(P_{x1} + P_{y2}) \} \sin xt] e^{-yt} dt \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\{ -P_{x1} + yt(P_{x1} + P_{y2}) \} \cos xt \\ &\quad - \{ P_{x2} - yt(P_{x2} - P_{y1}) \} \sin xt] e^{-yt} dt \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\{ -P_{y1} + yt(P_{x2} - P_{y1}) \} \cos xt \\ &\quad - \{ P_{y2} + yt(P_{x1} + P_{y2}) \} \sin xt] e^{-yt} dt \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

De vergelijkingen (2, 4), (2, 5) en (8) geven ons het middel om, althans formeel, de spanningen tengevolge van een voorgeschreven belasting $p_x(x)$ en $p_y(x)$ te berekenen.

Het is duidelijk, dat de randvoorwaarden (3) niet voldoende zijn om de oplossing van het vraagstuk ondubbelzinnig te bepalen. Fysisch is dit bijv. direct in te zien, doordat op de gegeven oplossing een gelijkmatige trek in de X-richting kan worden gesuperponeerd. De oplossing (8) is echter een oplossing, waarbij alle spanningen voor oneindig grote waarden van x of y verdwijnen. Wij zullen aannemen, dat geen andere oplossing deze eigenschap bezit.

4. *Het spanningstelsel, behorende bij de belasting p_z .* Bezit de belasting geen component in de X- en Y-richting, dan geldt voor de over de schijfdikte gemiddelde waarden van de spanningen: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, terwijl de spanningen τ_{yz} en τ_{zx} voldoen aan:

$$\Delta' \tau_{yz} = \Delta' \tau_{zx} = 0 \quad (1)$$

Het verband tussen deze beide spanningen wordt gelegd door de evenwichtsvoorwaarde:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Vervolgens moet de spanning τ_{yz} aan het grensvlak $y = 0$ evenwicht maken met de uitwendige belasting:

$$\tau_{yz}(x, 0) = -p_z(x) \quad (3)$$

Wij nemen weer aan, dat de voorwaarde, dat de spanningen voor oneindig grote waarden van x of y verdwijnen, samen met (3) voldoende zijn om de oplossing van het vraagstuk ondubbelzinnig te bepalen.

Uit de harmonische functies: $\sin xt e^{-yt}$ en $\cos xt e^{-yt}$ vormen wij de volgende integraalvoorstelling voor τ_{yz} :

$$\tau_{yz} = \int_0^{\infty} (f_8 \cos xt + f_9 \sin xt) e^{-yt} dt \quad (4)$$

Hierin zijn f_8 en f_9 voorlopig nog onbekende functies van t . Voor $y = 0$ geldt:

$$\tau_{yz}(x, 0) = \int_0^{\infty} (f_8 \cos xt + f_9 \sin xt) dt \quad (5)$$

Met het oog op (2, 6) en (3) volgt hieruit:

$$\left. \begin{aligned} f_8 &= -\frac{2}{\pi} P_{z1}(t) \\ f_9 &= -\frac{2}{\pi} P_{z2}(t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dus is:

$$\tau_{yz} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (P_{z1} \cos xt + P_{z2} \sin xt) e^{-yt} dt \quad (7)$$

Volgens (2) levert tekenomkering, differentiatie naar y en integratie naar x de spanning τ_{zx} :

$$\tau_{zx} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (P_{z1} \sin xt - P_{z2} \cos xt) e^{-yt} dt \quad (8)$$

Dit voldoet aan (1). Door de integratie naar x zou er nog een willekeurige functie van y aan toegevoegd kunnen worden, die dus met het oog op (1) alleen een lineaire functie kan zijn. De spanning wordt echter volgens (8) nul als y tot oneindig nadert en de genoemde functie moet dus nul zijn.

5. *De gelijkmatig verdeelde belasting p_{y1} en de puntlast P_y .* Wij zullen nu eerst enige bijzondere belastinggevallen onderzoeken om deze naderhand te kunnen vergelijken met algemenere stelsels. Om te beginnen zullen wij het geval beschouwen van een gelijkmatig verdeelde normale belasting over een zekere breedte. Zij de resultante van dit systeem P_y . De breedte van het aangrijpingsgebied zij $2a$. Dan is de belasting blijkbaar $P_y/2a$. De belasting is dus gekarakteriseerd door:

$$\left. \begin{aligned} p_{x1}(x) &= p_{x2}(x) = p_{y2}(x) = p_{z1}(x) = p_{z2}(x) = 0 \\ p_{y1}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{voor } |x| > a. \\ P_y/4a & \text{voor } |x| = a. \\ P_y/2a & \text{voor } |x| < a. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hieruit volgt volgens (2, 5):

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) &= P_{x2}(t) = P_{y2}(t) = P_{z1}(t) = P_{z2}(t) = 0 \\ P_{y1}(t) &= \frac{P_y}{2a} \int_0^a \cos tu \, du = P_y \frac{\sin at}{2at} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitueren wij deze waarden in de spanningsintegralen (3, 8), dan volgt:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_y}{a} \int_0^\infty (1 - yt) \frac{\sin at}{t} \cos xt e^{-yt} dt \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{\pi} P_y \frac{y}{a} \int_0^\infty \sin at \sin xt e^{-yt} dt \\ \sigma_y &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_y}{a} \int_0^\infty (1 + yt) \frac{\sin at}{t} \cos xt e^{-yt} dt\end{aligned}\quad (3)$$

De uitkomst hiervan is met het oog op (29, 8), (29, 9) en (29, 17), waarbij wij tegelijk ter afkorting invoeren $r^2 = x^2 + y^2$, $r'^2 = (x+a)^2 + y^2$, $r''^2 = (x-a)^2 + y^2$, $\varphi = \text{arctg} \frac{x}{y}$, $\varphi' = \text{arctg} \frac{x+a}{y}$, $\varphi'' = \text{arctg} \frac{x-a}{y}$ (zie fig. 2):

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_y}{a} \left(\frac{1}{2} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi'' + ay \frac{x^2 - y^2 - a^2}{r'^2 r''^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \frac{P_y}{a} \frac{axy^2}{r'^2 r''^2} \\ \sigma_y &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_y}{a} \left(\frac{1}{2} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi'' - ay \frac{x^2 - y^2 - a^2}{r'^2 r''^2} \right)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

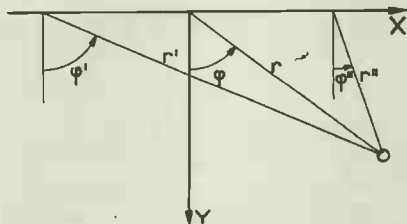


Fig. 2. De betekenis van r , r' , r'' , φ , φ' en φ'' .

Laten wij a tot nul naderen, dan gaat de gelijkmatige belasting over in een puntlast P_y . Zoals men gemakkelijk narekent, zijn de limietwaarden van de spanningen volgens (4):

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2}{\pi} P_y \frac{x^2 y}{r^4} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} P_y \frac{xy^2}{r^4} \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} P_y \frac{y^3}{r^4}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Zoals begrijpelijk, is nu het punt $(0, 0)$ een singulier punt van het veld geworden.

6. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{x1} en de puntlast P_x . Analoog aan het vorige kan het geval behandeld worden, dat over een breedte $2a$ een gelijkmatig verdeelde tangentiële belasting in de X -richting werkt. De resultante ervan zij P_x . De belastingsfuncties nemen nu de vorm aan:

$$\left. \begin{aligned} p_{x2}(x) = p_{y1}(x) = p_{y2}(x) = p_{z1}(x) = p_{z2}(x) = 0 \\ p_{x1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } |x| > a \\ P_x/4a & \text{voor } |x| = a \\ P_x/2a & \text{voor } |x| < a \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hieruit volgt volgens (2, 5):

$$\left. \begin{aligned} P_{x2}(t) = P_{y1}(t) = P_{y2}(t) = P_{z1}(t) = P_{z2}(t) = 0 \\ P_{x1}(t) = \frac{P_x}{2a} \int_0^a \cos tu \, du = P_x \frac{\sin at}{2at} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie van deze waarden in (3, 8) geeft ons:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_x}{a} \int_0^\infty (2 - yt) \frac{\sin at}{t} \sin xt e^{-yt} dt \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_x}{a} \int_0^\infty (1 - yt) \frac{\sin at}{t} \cos xt e^{-yt} dt \\ \sigma_y &= -\frac{1}{\pi} P_x \frac{y}{a} \int_0^\infty \sin at \sin xt e^{-yt} dt \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Met het oog op (29, 8), (29, 9), (29, 16) en (29, 17) volgt hieruit:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_x}{a} \left(\frac{1}{2} \ln r' - \frac{1}{2} \ln r'' - \frac{2axy^2}{r'^2 r''^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_x}{a} \left(\frac{1}{2} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi'' + ay \frac{x^2 - y^2 - a^2}{r'^2 r''^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \frac{P_x}{a} \frac{axy^2}{r'^2 r''^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ook nu kunnen wij a tot nul laten naderen. De belasting gaat dan over in een tangentiële puntlast P_x . Voeren wij de benodigde grensovergangen uit in (4), dan vinden wij:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} P_x \frac{x^3}{r^4} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} P_x \frac{x^2 y}{r^4} \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} P_x \frac{xy^2}{r^4} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ook nu vertoont de oplossing natuurlijk weer een singulariteit in de oorsprong.

7. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{z1} en de puntlast P_z . Vervolgens beschouwen wij een gelijkmatige tangentele belasting in de Z-richting op de strook $-a < x < a$. De resultante ervan zij P_z . De belastingsfuncties hebben nu de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} p_{x1}(x) = p_{x2}(x) = p_{y1}(x) = p_{y2}(x) = p_{z2}(x) = 0 \\ p_{z1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } |x| > a \\ P_z/4a & \text{voor } |x| = a \\ P_z/2a & \text{voor } |x| < a \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hieruit volgt volgens (2, 5):

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) = P_{x2}(t) = P_{y1}(t) = P_{y2}(t) = P_{z2}(t) = 0 \\ P_{z1}(t) = \frac{P_z}{2a} \int_0^a \cos tu \, du = P_z \frac{\sin at}{2at} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (4, 7) en (4, 8) levert de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_z}{a} \int_0^\infty \sin at \cos xt e^{-yt} \frac{1}{t} dt \\ \tau_{zx} &= -\frac{1}{\pi} \frac{P_z}{a} \int_0^\infty \sin at \sin xt e^{-yt} \frac{1}{t} dt \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hieruit volgt met het oog op (29, 16) en (29, 17):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{P_z}{a} (\varphi' - \varphi'') \\ \tau_{zx} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{P_z}{a} (\ln r' - \ln r'') \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Laten wij a tot nul naderen, dan gaat de gelijkmatig verdeelde belasting over in een tangentele puntlast P_z . De spanningen worden dan:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{1}{\pi} P_z \frac{y}{r^2} \\ \tau_{zx} &= -\frac{1}{\pi} P_z \frac{x}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De oorsprong is ook nu weer een singulier punt geworden.

8. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{y2} en de dubbelkracht met koppel M_z . Vervolgens beschouwen wij een belastingsgeval, waarbij over de breedte $0 < x < a$ een gelijkmatige normale belasting werkt, terwijl over de breedte $-a < x < 0$ een gelijkmatige normale belasting werkt van dezelfde grootte, maar met tegengesteld teken. De resultante van dit stelsel is geen kracht, doch een koppel. Is de grootte van dit koppel. M_z (positief, wanneer het draait van de positieve X-as naar

de positieve Y -as), dan moet blijkbaar de belasting de grootte hebben M_z/a^2 . In formule uitgedrukt krijgen wij dan:

$$p_{x1}(x) = p_{x2}(x) = p_{y1}(x) = p_{z1}(x) = p_{z2}(x) = 0 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{voor } |x| > a \text{ en } x = 0 \\ M_z/2a^2 \text{ sign } x \text{ voor } |x| = a \\ M_z/a^2 \text{ sign } x \text{ voor } |x| < a \end{array} \quad (1)$$

Hieruit volgt volgens (2, 5):

$$P_{x1}(t) = P_{x2}(t) = P_{y1}(t) = P_{z1}(t) = P_{z2}(t) = 0 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ P_{y2}(t) = \frac{M_z}{a^2} \int_0^a \sin tu \, du = \frac{M_z}{a^2} \frac{1 - \cos at}{t} \end{array} \quad (2)$$

Substitutie in (3, 8) levert ons de spanningen:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{2}{\pi} \frac{M_z}{a^2} \int_0^\infty (1 - yt) \frac{1 - \cos at}{t} \sin xt e^{-yt} dt \\ \tau_{xy} = \frac{2}{\pi} \frac{M_z}{a^2} y \int_0^\infty (1 - \cos at) \cos xt e^{-yt} dt \\ \sigma_y = -\frac{2}{\pi} \frac{M_z}{a^2} \int_0^\infty (1 + yt) \frac{1 - \cos at}{t} \sin xt e^{-yt} dt \end{array} \right\} \quad (3)$$

Hieruit volgt met het oog op (29, 1), (29, 2), (29, 7), (29, 10), (29, 11) en (29, 18):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{2}{\pi} \frac{M_z}{a^2} \left\{ \varphi - \frac{1}{2} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi'' - \frac{xy}{r^2} + \frac{xy(r^2 - a^2)}{r'^2 r'^2} \right\} \\ \tau_{xy} = \frac{2}{\pi} \frac{M_z}{a^2} \left\{ \frac{y^2}{r^2} - \frac{y^2(r^2 + a^2)}{r'^2 r'^2} \right\} \\ \sigma_y = -\frac{2}{\pi} \frac{M_z}{a^2} \left\{ \varphi - \frac{1}{2} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi'' + \frac{xy}{r^2} - \frac{xy(r^2 - a^2)}{r'^2 r'^2} \right\} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Laten wij nu a tot nul naderen, daarbij M_z constant houdend, dan gaat het systeem over in een dubbelkracht met koppel. Bij dit proces worden de beide krachten, waaruit het koppel is opgebouwd, oneindig groot. De spanningen in de buurt van de oorsprong zullen dus oneindig groot van de tweede orde worden. Vergelijking (4) gaat over in:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{4}{\pi} M_z \frac{xy(x^2 - y^2)}{r^6} \\ \tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} M_z \frac{y^2(3x^2 - y^2)}{r^6} \\ \sigma_y = -\frac{8}{\pi} M_z \frac{xy^3}{r^6} \end{array} \right\} \quad (5)$$

9. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{x2} en de dubbelkracht zonder koppel met intensiteit N_x . Nu beschouwen wij het belastingstelsel gevormd door een gelijkmatige tangentiële belasting in de X-richting op de strook $0 < x < a$ en een zelfde belasting met tegengesteld teken op de strook $-a < x < 0$. De resultante van dit systeem is noch een kracht, noch een koppel. Toch belast dit stelsel het lichaam wel degelijk. Laten wij met het oog op een later te maken limietovergang de grootheid, die wij verkrijgen door de resulterende kracht van een deelstelsel te vermenigvuldigen met de afstand der aangrijpingspunten dier beide afzonderlijke resultanten, gelijk stellen aan N_x . Dan moet blijkbaar de belasting gelijk zijn aan N_x/a^2 . De belastingsfuncties worden dus gegeven door:

$$\left. \begin{aligned} p_{x1}(x) = p_{y1}(x) = p_{y2}(x) = p_{z1}(x) = p_{z2}(x) &= 0 \\ p_{x2}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{voor } |x| > a \text{ en } x = 0 \\ N_x/2a^2 \operatorname{sign} x & \text{voor } |x| = a \\ N_x/a^2 \operatorname{sign} x & \text{voor } |x| < a \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hieruit volgt volgens (2, 5):

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) = P_{y1}(t) = P_{y2}(t) = P_{z1}(t) = P_{z2}(t) &= 0 \\ P_{x2}(t) &= \frac{N_x}{a^2} \int_0^a \sin tu \, du = \frac{N_x}{a^2} \frac{1 - \cos at}{t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (3, 8) levert ons de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\pi} \frac{N_x}{a^2} \int_0^\infty (2 - yt) \frac{1 - \cos at}{t} \cos xt e^{-yt} \, dt \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \frac{N_x}{a^2} \int_0^\infty (-1 + yt) \frac{1 - \cos at}{t} \sin xt e^{-yt} \, dt \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \frac{N_x}{a^2} y \int_0^\infty (1 - \cos at) \cos xt e^{-yt} \, dt \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Met het oog op (29, 1), (29, 2), (29, 7), (29, 10), (29, 11), (29, 18) en (29, 19) gaat dit over in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\pi} \frac{N_x}{a^2} \left\{ \ln r' + \ln r'' - 2 \ln r - \frac{y^2}{r^2} + \frac{y^2(r^2 + a^2)}{r'^2 r''^2} \right\} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \frac{N_x}{a^2} \left\{ \varphi - 1/2 \varphi' - 1/2 \varphi'' - \frac{xy}{r^2} + \frac{xy(r^2 - a^2)}{r'^2 r''^2} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \frac{N_x}{a^2} \left\{ \frac{y^2}{r^2} - \frac{y^2(r^2 + a^2)}{r'^2 r''^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Laten wij nu a tot nul naderen, daarbij N_x constant houdend, dan gaat het stelsel over in een dubbelkracht zonder koppel. Dit is een systeem, gevormd door twee zeer grote krachten van gelijke grootte, doch met verschillend teken, wier werklijn samenvalt en wier aangrijpingspunten zeer dicht bij elkaar liggen. De intensiteit ervan wordt aan-

gegeven door het product van de grootte der krachten en de afstand hunner aangrijpingspunten. In ons geval is dat dus N_x . De vergelijkingen (4) gaan over in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} N_x \frac{x^2(x^2 - 3y^2)}{r^6} \\ \tau_{xy} &= -\frac{4}{\pi} N_x \frac{xy(x^2 - y^2)}{r^6} \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} N_x \frac{y^2(3x^2 - y^2)}{r^6} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De singulariteit in de oorsprong is ook nu natuurlijk weer van de tweede orde.

10. De gelijkmatig verdeelde belasting p_{z2} en de dubbelkracht met koppel M_y . Tenslotte beschouwen wij een gelijkmatige tangentele belasting in de Z -richting op de strook $-a < x < 0$ en een gelijke doch tegengesteld gerichte belasting op de strook $0 < x < a$. De resultante van een dergelijk stelsel is een koppel, waaraan wij het positieve teken zullen toekennen, indien het draait van de positieve Z -as naar de positieve X -as. Is de resultante van ons stelsel een koppel M_y , dan heeft de belasting blijkbaar de grootte M_y/a^2 . De belastingsfuncties worden nu dus gegeven door:

$$\left. \begin{aligned} p_{x1}(x) = p_{z2}(x) = p_{y1}(x) = p_{y2}(x) = p_{z1}(x) &= 0 \\ p_{z2}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{voor } |x| > a \text{ en } x = 0 \\ -M_y/2a^2 \text{ sign } x & \text{voor } |x| = a \\ -M_y/a^2 \text{ sign } x & \text{voor } |x| < a \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hieruit volgt volgens (2, 5):

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) = P_{z2}(t) = P_{y1}(t) = P_{y2}(t) = P_{z1}(t) &= 0 \\ P_{z2}(t) &= -\frac{M_y}{a^2} \int_0^a \sin tu \, du = -\frac{M_y}{a^2} \frac{1 - \cos at}{t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (4, 7) en (4, 8) levert ons de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{2}{\pi} \frac{M_y}{a^2} \int_0^\infty \frac{1 - \cos at}{t} \sin xt e^{-yt} \, dt \\ \tau_{zx} &= -\frac{2}{\pi} \frac{M_y}{a^2} \int_0^\infty \frac{1 - \cos at}{t} \cos xt e^{-yt} \, dt \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Met het oog op (29, 7), (29, 18) en (29, 19) is dit gelijk aan:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{2}{\pi} \frac{M_y}{a^2} (\varphi - \frac{1}{2} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi'') \\ \tau_{zx} &= \frac{2}{\pi} \frac{M_y}{a^2} (\ln r - \frac{1}{2} \ln r' - \frac{1}{2} \ln r'') \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Laten wij a tot nul naderen, daarbij M_y constant houdend, dan gaat het stelsel over in een dubbelkracht met koppel M_y . De spanningen zijn:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{2}{\pi} M_y \frac{xy}{r^4} \\ \tau_{zx} &= \frac{1}{\pi} M_y \frac{x^2 - y^2}{r^4} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De singulariteit in de oorsprong is ook nu natuurlijk weer van de tweede orde.

11. *Het definitieve belastingstelsel.* In de nummers 5 tot en met 10 hebben wij zes karakteristieke belastingstelsels met hun ontandingen leren kennen. Zij zullen ons dienen als vergelijkingsmateriaal voor de algemenere gevallen, die wij hierna wensen te behandelen.

Wij onderstellen nu, dat op de lijn $y = 0$ van $x = -a$ tot $x = a$ een willekeurig stelsel belastingen is aangebracht. Dit stelsel splitsen wij volgens (2, 2) en (2, 4) in de drie even stelsels p_{x1} , p_{y1} en p_{z1} en de drie oneven stelsels p_{x2} , p_{y2} en p_{z2} . Tenslotte splitsen wij ieder dezer zes stelsels in één, dat voor positieve waarden van x niet negatief is, en één, dat voor deze waarden van x niet positief is. Overigens vertonen deze laatste deelstelsels geen principiele verschillen. Dergelijke stelsels, die voor geen waarde van $x \neq 0$ van teken wisselen, zullen wij gemakshalve definitief noemen. Wij geven dit aan met de index d .

Een stelsel p_{y1d} (normaal, even en definitief) vergelijken wij met een in $-a < x < a$ aangrijpende, statisch gelijkwaardige, gelijkmatige, even en normale belasting ofwel met een (in de oorsprong aangrijpende) statisch gelijkwaardige (normale) puntlast. Een analoge vergelijking maken wij bij de stelsels p_{x1d} en p_{z1d} . Een stelsel p_{y2d} (normaal, oneven en definitief) wordt vergeleken met een in $-a < x < a$ aangrijpende, statisch gelijkwaardige, gelijkmatige, oneven en normale belasting ofwel met een (in $x = 0$ aangrijpende) statisch gelijkwaardige dubbelkracht met koppel. Een analoge vergelijking kan worden gemaakt bij de stelsels p_{x2d} en p_{z2d} ; bij het stelsel p_{x2d} moet de eis van statische gelijkwaardigheid vervangen worden door de eis, dat de intensiteit: $\int_{-a}^a p_{x2} x dx$ voor het beschouwde stelsel en het vergelijkingstelsel gelijk zijn.

Is het te onderzoeken belastingstelsel niet definitief, dan staan ons twee wegen ter beschikking open. In de eerste plaats kunnen wij de belasting splitsen in een aantal definitieve stelsels (definitief is hier bedoeld t.o.v. een verschoven assenstelsel, waarvan de oorsprong in het midden ligt van het aangrijpingsgebied van het deelstelsel) en voor elk dezer stelsels de in het volgende te behandelen vergelijkingsmethodes toepassen. Hoe groter het aantal deelstelsels is gekozen, des te nauwkeuriger zal de vergelijking zijn. Een andere methode berust er op van het beschouwde stelsel de intensiteiten van de n^{de} orde te bepalen, gedefinieerd door $I_n = \int_{-a}^a p x^n dx$. (Intensiteit van de nulde orde \equiv resultante; intensiteit van de eerste orde \equiv moment of intensiteit). Wij

brengen nu als vergelijkingstelsel een aantal singuliere krachtenstelsels van de n^{de} orde in de oorsprong aan, welke ieder voor zich de eigenschap bezitten, dat alle intensiteiten van de k^{de} orde voor $k \neq n$ gelijk nul zijn, daarentegen voor $k = n$ gelijk aan de intensiteit van de n^{de} orde van het beschouwde stelsel. Van deze singuliere stelsels hebben wij die van de nulde en eerste orde reeds leren kennen als puntlast en dubbelkracht. Een singulariteit van de n^{de} orde is het grensgeval van het stelsel, gevormd door twee singulariteiten van de $(n - 1)^{\text{ste}}$ orde met grote I_{n-1} en kleine afstand der aangrijpingspunten, indien wij die afstand tot nul laten naderen, daarbij het product van I_{n-1} en die afstand constant $= I_n$ houdend. In fig. 3 zijn schematisch de eerste drie singulariteiten, voorzover het de normale stelsels betreft, voorgesteld.

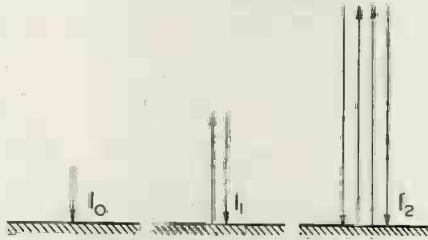


Fig. 3. Enkele singuliere krachtenstelsels.

Hoe meer singulariteiten wij aanbrengen, des te nauwkeuriger zal de vergelijking zijn. Voor de doorvoering van deze methode is het nodig eerst de spanningsystemen, behorende bij die hogere singulariteiten, te bepalen. Wij gaan hier verder niet op in en beperken ons tot definitie stelsels.

12. De definitie belasting p_{y1d} . Wij beschouwen de normale, even en definitie, doch overigens willekeurige belasting $p_{y1d}(x)$ tussen de grenzen $-a < x < a$. De resultante ervan zij P_y :

$$P_y = 2 \int_0^a p_{y1d}(x) dx \quad (1)$$

De belastingsintegralen zijn volgens (2, 5):

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) = P_{x2}(t) = P_{y2}(t) = P_{z1}(t) = P_{z2}(t) = 0 \\ P_{y1}(t) = \int_0^a p_{y1d}(u) \cos tu \, du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (3, 8) levert de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - yt) \cos xt \, e^{-yt} \, dt \int_0^a p_{y1d}(u) \cos tu \, du \\ \sigma_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} yt \sin xt \, e^{-yt} \, dt \int_0^a p_{y1d}(u) \cos tu \, du \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + yt) \cos xt \, e^{-yt} \, dt \int_0^a p_{y1d}(u) \cos tu \, du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Door verwisseling van de integratievolgorde gaat dit over in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{v1d}(u) du \int_0^\infty (1 - yt) \cos xt \cos ut e^{-yt} dt \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{v1d}(u) du \int_0^\infty yt \sin xt \cos ut e^{-yt} dt \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{v1d}(u) du \int_0^\infty (1 + yt) \cos xt \cos ut e^{-yt} dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

De tweede integralen kunnen uitgewerkt worden met behulp van (29, 11), (29, 14) en (29, 15). Wij stellen de waarde van deze integralen gelijk aan het product van hun waarde voor $u = 0$ en een functie van $u = u/r$ en $\xi = x/r$, welke functies in volgorde luiden:

$$\left. \begin{aligned} F_1(a, \xi) &= \frac{(1 + a^2)\{1 + (\alpha/\xi)^2\} - 4a^2(2 + a^2 - \xi^2)}{\{(1 + a^2)^2 - 4a^2\xi^2\}^2} = \\ &= 1 + \frac{1 - 10\xi^2 + 12\xi^4}{\xi^2} a^2 + 0(a^4) \\ F_2(a, \xi) &= \frac{(1 - a^2)^2 + 4a^2\xi^2 - 4a^4}{\{(1 + a^2)^2 - 4a^2\xi^2\}^2} = 1 - 6(1 - 2\xi^2)a^2 + 0(a^4) \\ F_3(a, \xi) &= \frac{(1 + a^2)^2 + 4a^2\xi^2}{\{(1 + a^2)^2 - 4a^2\xi^2\}^2} = 1 - 2(1 - 6\xi^2)a^2 + 0(a^4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De variabele u loopt van 0 tot a ; r en x zijn willekeurig. Uit de reeksontwikkelingen blijkt, dat de functies F_i tot 1 naderen, indien r onbeperkt toeneemt. Dit geldt niet voor F_1 , als $\xi = 0$, waarover later meer.

Uit (4) en (5) vinden wij nu voor de spanningen de volgende uitdrukkingen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{4}{\pi} \frac{x^2 y}{r^4} \int_0^a p_{v1d}(u) F_1 du \\ \tau_{xy} &= -\frac{4}{\pi} \frac{xy^2}{r^4} \int_0^a p_{v1d}(u) F_2 du \\ \sigma_y &= -\frac{4}{\pi} \frac{y^3}{r^4} \int_0^a p_{v1d}(u) F_3 du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Hierin zijn de functies F_i via a afhankelijk van u . Aangezien p_{v1d} definit is, weten wij:

$$\min F_i \int_0^a p_{v1d}(u) du \leq \int_0^a F_i p_{v1d}(u) du \leq \max F_i \int_0^a p_{v1d}(u) du \quad (7)$$

Wij voeren nieuwe functies F_i' in, die alleen bepaald zijn door de betrekkingen:

$$\min F_i \leq F_i' \leq \max F_i \quad (8)$$

en dus slechts binnen zekere grenzen bekend zijn, maar ook zeker tot 1 naderen als r onbepaald toeneemt. Verder geven wij met accenten de spanningen aan tengevolge van een normale puntlast P_y in de oorsprong. Dan gaat (6) met het oog op (5, 5) en (1) over in:

$$\sigma_x = \sigma'_x F'_1 \quad \tau_{xy} = \tau'_{xy} F'_2 \quad \sigma_y = \sigma'_y F'_3 \quad (9)$$

Dit is de scherpste schatting, die te maken is. Immers in (7) zijn de eerste en derde integraal volgens (1) gelijk aan een voorgeschreven constante. Nemen wij een bepaald punt van het veld in het oog, dan zijn x , r en a gegeven en hangt F_i alleen nog van u af. Voor een zekere waarde van u ($0 \leq u \leq a$) neemt F_i zijn minimale waarde: min F_i aan (dit kan natuurlijk zeer wel een grensminimum zijn). Bestaat de belasting uit twee puntlasten, zó dat de x van de aangrijpingspunten in absolute waarde gelijk is aan die genoemde waarde van u , dan neemt de tweede integraal uit (7) de links aangegeven minimumwaarde inderdaad aan. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de maximumwaarde. De door (5), (8) en (9) gegeven grenzen voor de spanningen zijn dus in ieder punt van het veld realiseerbaar.

Aan de hand van (5, 5) en (9) is nu ook in te zien, waarom $\lim_{a \rightarrow 0} F_1$ zich abnormaal gedraagt voor $\xi = 0$. Immers voor $\xi = 0$ is $\sigma'_x = 0$, terwijl dan i.h.a. $\sigma_x \neq 0$. Wel geldt natuurlijk: $\lim_{a \rightarrow 0} \sigma_x = 0$ ook voor $\xi = 0$, maar voor iedere $a \neq 0$ en $\xi \neq 0$ is i.h.a. $F_1' = \sigma_x / \sigma'_x = \infty$, zodat van een normale limiet geen sprake kan zijn.

13. De definitie belasting p_{x1d} . Vervolgens beschouwen wij de tangentele, even, definitie, doch overigens willekeurige belasting $p_{x1d}(x)$ tussen de grenzen $-a < x < a$. De resultante ervan zij P_x :

$$P_x = 2 \int_0^a p_{x1d}(x) dx \quad (1)$$

De belastingsintegralen zijn volgens (2, 5):

$$\left. \begin{aligned} P_{x2}(t) = P_{y1}(t) = P_{y2}(t) = P_{z1}(t) = P_{z2}(t) &= 0 \\ P_{x1}(t) &= \int_0^a p_{x1d}(u) \cos tu \, du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (3, 8) levert de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty (2 - yt) \sin xt \, e^{-yt} \, dt \int_0^a p_{x1d}(u) \cos tu \, du \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 - yt) \cos xt \, e^{-yt} \, dt \int_0^a p_{x1d}(u) \cos tu \, du \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty yt \sin xt \, e^{-yt} \, dt \int_0^a p_{x1d}(u) \cos tu \, du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Door verwisseling van de integratievolgorde gaat dit over in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{x1d}(u) du \int_0^\infty (2-yt) \sin xt \cos ut e^{-yt} dt \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{x1d}(u) du \int_0^\infty (1-yt) \cos xt \cos ut e^{-yt} dt \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{x1d}(u) du \int_0^\infty yt \sin xt \cos ut e^{-yt} dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wij stellen de tweede integralen gelijk aan hun waarde voor $u = 0$ vermenigvuldigd met een functie van a en ξ . De tweede integralen in de tweede en derde vergelijking (4) zijn dezelfde als die in de eerste en tweede vergelijking (12, 4) en geven dus de functies F_1 en F_2 . De tweede integraal van de eerste vergelijking (4) geeft aanleiding tot de functie F_4 , welke met het oog op (29, 10) en (29, 14) luidt:

$$\begin{aligned} F_4(a, \xi) &= \frac{(1 + a^2)^2 \{1 - (a/\xi)^2\} + 4(a/\xi)^2 \{1 + a^2 - 3\xi^2 + \xi^4\}}{\{(1 + a^2)^2 - 4a^2\xi^2\}^2} = \\ &= 1 + \frac{3 - 14\xi^2 + 12\xi^4}{\xi^2} a^2 + 0(a^4) \end{aligned} \quad (5)$$

Uit de reeksontwikkeling blijkt weer, dat F_4 met toenemende r tot 1 nadert (uitgezonderd weer voor de lijn $\xi = 0$). Met het oog op (12, 5) en (5) gaat (4) over in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{4}{\pi} \frac{x^3}{r^4} \int_0^a p_{x1d}(u) F_4 du \\ \tau_{xy} &= -\frac{4}{\pi} \frac{x^2 y}{r^4} \int_0^a p_{x1d}(u) F_1 du \\ \sigma_y &= -\frac{4}{\pi} \frac{xy^2}{r^4} \int_0^a p_{x1d}(u) F_2 du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Geven wij de spanningen tengevolge van een tangentele puntlast P_x in de oorsprong aan met accenten, dan volgt uit (6) met behulp van (6, 5) en (12, 8):

$$\sigma_x = \sigma_x' F_4' \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}' F_1' \quad \sigma_y = \sigma_y' F_2' \quad (7)$$

14. *De definitie belasting p_{z1d} .* Wij beschouwen de tangentele, even en definitie, doch overigens willekeurige belasting $p_{z1d}(x)$ tussen de grenzen $-a < x < a$. De resultante er van zij P_z :

$$P_z = 2 \int_0^a p_{z1d}(x) dx \quad (1)$$

De belastingsintegralen zijn volgens (2, 5):

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) &= P_{x2}(t) = P_{y1}(t) = P_{y2}(t) = P_{z2}(t) = 0 \\ P_{z1}(t) &= \int_0^a p_{z1d}(u) \cos tu du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (4, 7) en (4, 8) levert ons de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{z1d}(u) \cos tu du \\ \tau_{zx} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{z1d}(u) \cos tu du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wij verwisselen de volgorde der integraties:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{z1d}(u) du \int_0^{\infty} \cos xt \cos ut e^{-yt} dt \\ \tau_{zx} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{z1d}(u) du \int_0^{\infty} \sin xt \cos ut e^{-yt} dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wij stellen de tweede integralen weer gelijk aan hun waarde voor $u = 0$ vermenigvuldigd met een functie van a en ξ . Met behulp van (29, 10) en (29, 11) vinden wij voor deze functies:

$$\left. \begin{aligned} F_5(a, \xi) &= \frac{1 + a^2}{(1 + a^2)^2 - 4a^2\xi^2} = 1 - (1 - 4\xi^2)a^2 + 0(a^4) \\ F_6(a, \xi) &= \frac{1 - a^2}{(1 + a^2)^2 - 4a^2\xi^2} = 1 - (3 - 4\xi^2)a^2 + 0(a^4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Uit de reeksontwikkeling blijkt, dat F_5 en F_6 tot 1 naderen indien r onbepaald toeneemt. Met behulp van (5) gaat (4) over in:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{2}{\pi} \frac{y}{r^2} \int_0^a p_{z1d}(u) F_5 du \\ \tau_{zx} &= -\frac{2}{\pi} \frac{x}{r^2} \int_0^a p_{z1d}(u) F_6 du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Voeren wij volgens (12, 8) functies F_5' en F_6' in en geven wij met accenten de spanningen aan tengevolge van een puntlast P_z in de oorsprong, dan volgt met het oog op (7, 5):

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}' F_5' \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}' F_6' \quad (7)$$

15. De definitie belasting p_{y2d} . Hierna beschouwen wij een normale, oneven en definitie, doch overigens willekeurige belasting $p_{y2d}(x)$ tussen de grenzen $-a < x < a$. De resultante er van zij een koppel M_z :

$$M_z = 2 \int_0^a p_{y2d}(x) x dx \quad (1)$$

De belastingsintegralen nemen volgens (2, 5) de vorm aan:

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) &= P_{x2}(t) = P_{y1}(t) = P_{z1}(t) = P_{z2}(t) = 0 \\ P_{y2}(t) &= \int_0^a p_{y2d}(u) \sin tu du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (3, 8) levert ons de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 - yt) \sin xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{v2d}(u) \sin tu du \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty yt \cos xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{v2d}(u) \sin tu du \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 + yt) \sin xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{v2d}(u) \sin tu du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wij wijzigen de volgorde der integraties en brengen een kleine wijziging aan met het oog op een later te maken limietovergang:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{v2d}(u) u du \int_0^\infty (1 - yt) \sin xt \frac{\sin ut}{u} e^{-yt} dt \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_0^a p_{v2d}(u) u du \int_0^\infty yt \cos xt \frac{\sin ut}{u} e^{-yt} dt \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{v2d}(u) u du \int_0^\infty (1 + yt) \sin xt \frac{\sin ut}{u} e^{-yt} dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wij stellen de tweede integralen gelijk aan hun grenswaarde voor $u = 0$ vermenigvuldigd met een functie van α en ξ . Met behulp van (29, 8), (29, 12) en (29, 13) vinden wij voor deze functies:

$$\left. \begin{aligned} F_7(\alpha, \xi) &= \frac{1 - \alpha^2(\alpha^2 - 2\xi^2)/(1 - 2\xi^2)}{\{(1 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2\xi^2\}^2} = 1 - \\ &\quad - \frac{4 - 18\xi^2 + 16\xi^4}{1 - 2\xi^2} \alpha^2 + 0(\alpha^4) \\ F_8(\alpha, \xi) &= \frac{1 + \alpha^2(2 + \alpha^2)/(1 - 4\xi^2)}{\{(1 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2\xi^2\}^2} = 1 - \\ &\quad - \frac{2 - 24\xi^2 + 32\xi^4}{1 - 4\xi^2} \alpha^2 + 0(\alpha^4) \\ F_9(\alpha, \xi) &= \frac{1 + \alpha^2}{\{(1 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2\xi^2\}^2} = 1 - (3 - 8\xi^2) \alpha^2 + 0(\alpha^4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Uit de reeksontwikkelingen blijkt, dat deze functies tot 1 naderen, indien r onbepaald toeneemt, uitgezonderd voor enkele bijzondere waarden van ξ . Met behulp van (5) gaat (4) over in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{8}{\pi} \frac{xy(x^2 - y^2)}{r^6} \int_0^a F_7 p_{v2d}(u) u du \\ \tau_{xy} &= -\frac{4}{\pi} \frac{y^2(3x^2 - y^2)}{r^6} \int_0^a F_8 p_{v2d}(u) u du \\ \sigma_y &= -\frac{16}{\pi} \frac{xy^3}{r^6} \int_0^a F_9 p_{v2d}(u) u du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Voeren wij volgens (12, 8) functies F_7' , F_8' en F_9' in en geven wij met accenten de spanningen aan tengevolge van een dubbelkracht met koppel M_x in de oorsprong, dan volgt met het oog op (8, 5) en (1):

$$\sigma_x = \sigma_x' F_7' \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}' F_8' \quad \sigma_y = \sigma_y' F_9' \quad (7)$$

16. De definitie belasting p_{x2d} . Vervolgens beschouwen wij de tangentele, oneven en definitie, doch overigens willekeurige belasting $p_{x2d}(x)$ tussen de grenzen $-a < x < a$. De intensiteit van het stelsel zij N_x :

$$N_x = 2 \int_0^a p_{x2d}(x) x dx \quad (1)$$

Volgens (2, 5) zijn de belastingsintegralen:

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) = P_{y1}(t) = P_{y2}(t) = P_{z1}(t) = P_{z2}(t) = 0 \\ P_{x2}(t) = \int_0^a p_{x2d}(u) \sin tu du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (3, 8) levert ons de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (2 - yt) \cos xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{x2d}(u) \sin tu du \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 - yt) \sin xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{x2d}(u) \sin tu du \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty yt \cos xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{x2d}(u) \sin tu du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wij verwisselen de integratievolgorde en brengen een kleine wijziging aan met het oog op een later te maken limietovergang:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\pi} \int_0^a p_{x2d}(u) u du \int_0^\infty (2 - yt) \cos xt \frac{\sin ut}{u} e^{-yt} dt \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{x2d}(u) u du \int_0^\infty (1 - yt) \sin xt \frac{\sin ut}{u} e^{-yt} dt \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^a p_{x2d}(u) u du \int_0^\infty yt \cos xt \frac{\sin ut}{u} e^{-yt} dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

De tweede integralen stellen wij weer gelijk aan hun waarde voor $u = 0$ vermenigvuldigd met een functie van a en ξ . De tweede integralen in de tweede en derde vergelijking (4) zijn dezelfde als die in de eerste en tweede vergelijking (15, 4) en geven dus de functies F_7 en F_8 . Voor de tweede integraal van de eerste vergelijking (4) vinden wij de functie:

$$\begin{aligned} F_{10}(a, \xi) &= \frac{1 + a^2 \{ (1 + a^2)^2 - \xi^2 (6 + 5a^2 - 8\xi^2) \} / \{ \xi^2 (3 - 4\xi^2) \}}{\{ (1 + a^2)^2 - 4a^2 \xi^2 \}^2} = \\ &= 1 + \frac{1 - 18\xi^2 + 48\xi^4 - 32\xi^6}{\xi^2 (3 - 4\xi^2)} a^2 + 0(a^4) \quad (5) \end{aligned}$$

Uit de reeksontwikkeling volgt, dat F_{10} tot 1 nadert, indien r onbepaald toeneemt, uitgezonderd voor enkele bijzondere waarden van ξ . Met behulp van (15, 5) en (5) gaat (4) over in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{4}{\pi} \frac{x^2(x^2 - 3y^2)}{r^6} \int_0^a F_{10} p_{x2d}(u) u du \\ \tau_{xy} &= -\frac{8}{\pi} \frac{xy(x^2 - y^2)}{r^6} \int_0^a F_7 p_{x2d}(u) u du \\ \sigma_y &= -\frac{4}{\pi} \frac{y^2(3x^2 - y^2)}{r^6} \int_0^a F_8 p_{x2d}(u) u du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Voeren wij nog volgens (12, 8) een functie F_{10}' in en geven wij met accenten de spanningen aan tengevolge van een dubbelkracht zonder koppel met intensiteit N_x in de oorsprong, dan volgt met het oog op (9, 5) en (1):

$$\sigma_x = \sigma_x' F_{10}' \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}' F_7' \quad \sigma_y = \sigma_y' F_8' \quad (7)$$

17. De definitie belasting p_{x2d} . Tenslotte beschouwen wij de tangentele, oneven en definitie, doch overigens willekeurige belasting $p_{x2d}(x)$ tussen de grenzen $-a < x < a$. Het resulterend moment van deze belasting zij M_y :

$$M_y = -2 \int_0^a p_{x2d}(x) x dx \quad (1)$$

Volgens (2, 5) zijn de belastingsintegralen:

$$\left. \begin{aligned} P_{x1}(t) = P_{x2}(t) = P_{y1}(t) = P_{y2}(t) = P_{z1}(t) &= 0 \\ P_{z2}(t) &= \int_0^a p_{x2d}(u) \sin tu du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Uit (4, 7) en (4, 8) volgen de integralen voor de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{x2d}(u) \sin tu du \\ \tau_{zx} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xt e^{-yt} dt \int_0^a p_{x2d}(u) \sin tu du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wij verwisselen de integratievolgorde en brengen een kleine wijziging aan met het oog op een te maken limietovergang:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^a p_{x2d}(u) u du \int_0^\infty \sin xt \frac{\sin ut}{u} e^{-yt} dt \\ \tau_{zx} &= \frac{2}{\pi} \int_0^a p_{x2d}(u) u du \int_0^\infty \cos xt \frac{\sin ut}{u} e^{-yt} dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

De tweede integralen stellen wij weer gelijk aan hun grenswaarde voor $u = 0$ vermenigvuldigd met een functie van a en ξ . Met behulp van (29, 8) en (29, 9) vinden wij voor deze functies:

$$\left. \begin{aligned} F_{11}(a, \xi) &= \frac{1}{(1 + a^2)^2 - 4a^2\xi^2} = 1 - 2(1 - 2\xi^2)a^2 + 0(a^4) \\ F_{12}(a, \xi) &= \frac{1 + a^2/(1 - 2\xi^2)}{(1 + a^2)^2 - 4a^2\xi^2} = 1 - \frac{1 - 4\xi^2 + 2\xi^4}{1 - 2\xi^2} a^2 + 0(a^4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Uit de reeksontwikkelingen blijkt, dat F_{11} en F_{12} tot 1 naderen, indien r onbepaald toeneemt, uitgezonderd voor enige speciale waarden van ξ . Met behulp van (5) gaat (4) over in:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{4}{\pi} M_y \frac{xy}{r^4} \int_0^a F_{11} p_{z2a}(u) u du \\ \tau_{zx} &= -\frac{2}{\pi} M_y \frac{x^2 - y^2}{r^4} \int_0^a F_{12} p_{z2a}(u) u du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Voeren wij nog volgens (12, 8) functies F_{11}' en F_{12}' in en geven wij met accenten de spanningen aan tengevolge van een dubbelkracht met koppel M_y in de oorsprong, dan volgt met het oog op (10, 5) en (1):

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}' F_{11}' \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}' F_{12}' \quad (7)$$

18. *Uitgewerkt voorbeeld.* Wij kunnen uit het behandelde leren, hoe snel de spanningen tengevolge van een evenwichtstelsel met de afstand tot het aangrijpingsgebied afnemen. Aangezien het afnemen snel geschiedt, is het voor praktische doeleinden niet nodig, dat het lichaam een halfschijf of halfruimte is, als de afmetingen van het belastingsgebied maar klein zijn t.o.v. de kromtestraal van het lichaam daar ter plaatse en de andere afmetingen van het lichaam.

Ter illustratie zullen wij een speciaal geval volledig uitwerken. Wij kiezen daartoe de spanning σ_y tengevolge van een evenwichtstelsel, gevormd door een normale, even en definitie, doch overigens willekeurige belasting tussen de grenzen $-a < x < a$ met resultante P_y , en een in de oorsprong aangrijpende puntlast $-P_y$. Volgens (12, 9) geldt in dit geval:

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \frac{y^3}{r^4} (F_3' - 1) P_y \quad (1)$$

Hierin is F_3' gedefinieerd door (12, 5) en (12, 8). In fig. 4 is nu voor een aantal waarden van φ de functie F_3 uitgezet als functie van α ; hierbij is $\varphi = \arcsin \xi$, d.i. de poolhoek van een poolcoördinatenstelsel, als mede in de fig. 4 aangegeven. Voor een gegeven punt is bekend a/r en $x/r = \xi$, dus ook φ . Ter bepaling van de grenzen van F_3' moeten wij dus het maximum en het minimum van F_3 bepalen, als wij de kromme voor de gegeven waarde van φ aanhouden en α laten variëren van 0 tot a/r . Bezien wij eerst de punten, waarvoor $\varphi = 90^\circ$, d.w.z. punten van de X-as. Is $r > a$, dus $a/r < 1$, dan is het minimum van F_3 blijkbaar 1 en het maximum gelijk aan de waarde van F_3 voor $\alpha = a/r$. Nadert r tot a , dan nadert het maximum tot oneindig. Is $r < a$, dan blijft het maximum verder oneindig. Tot $a/r = 1,85$ blijft het minimum 1; voor grotere waarden van a/r is het gelijk aan de waarde van F_3 voor $\alpha = a/r$ en neemt met toenemende a/r af tot nul. De oneindig grote waarde van het maximum voor een punt, dat in het belastingsgebied ligt, is gemakkelijk te begrijpen. Immers σ_y tengevolge van een puntlast is voor dat punt nul (behalve voor de oorsprong) en zelfs een eindige belasting op die plaats geeft dus al oneindig malen die spanning nul.

Nemen wij nu voor φ een hoek van bijv. 60° , dan zien wij, dat F_3

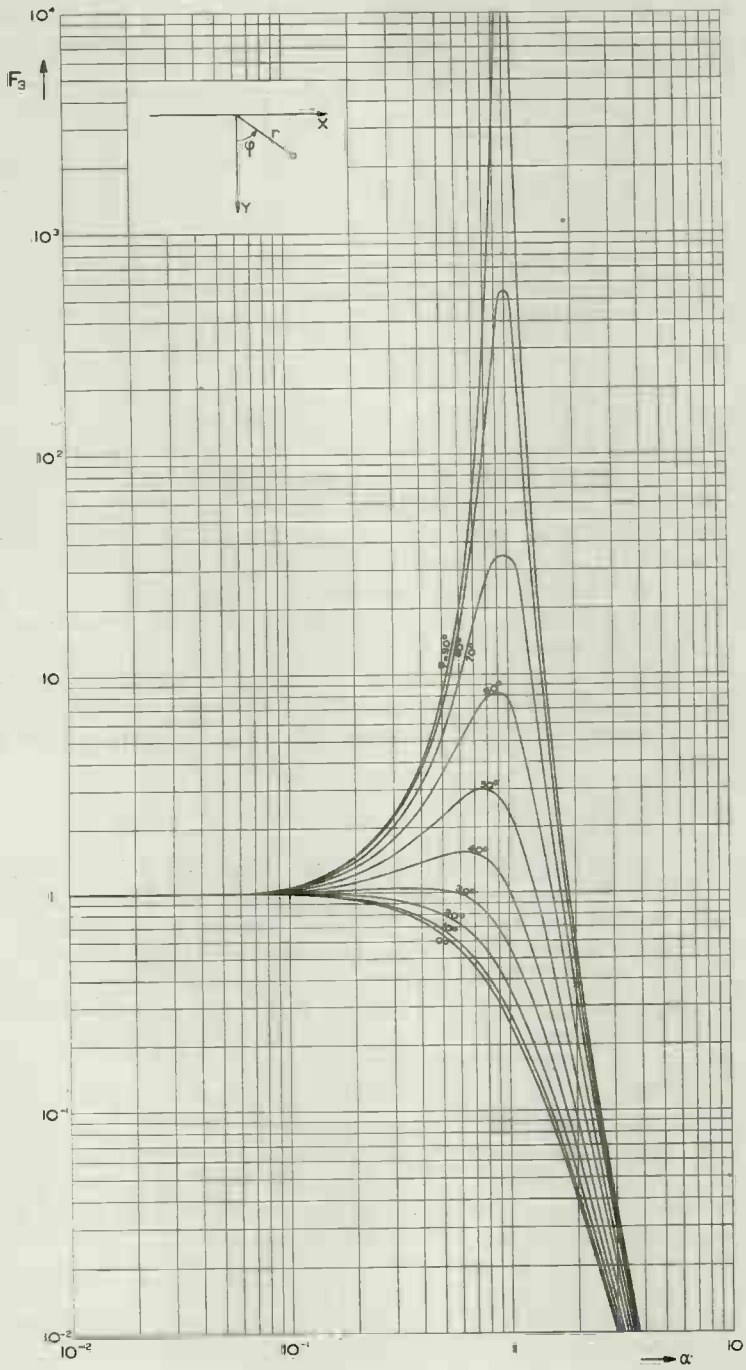


Fig. 4. De functie F_3 .

altijd eindig blijft. De waarde van α , waarvoor het maximum optreedt, is kleiner dan 1, in dit geval bijv. 0,90. Voor kleinere φ wordt de waarde van het maximum steeds kleiner, terwijl de waarde van α , waarvoor het maximum optreedt, steeds kleiner wordt. Zo komt er een waarde van $\varphi = \varphi_c$, waarvoor het maximum de waarde 1 heeft en optreedt bij $\alpha = 0$. Het maximum valt dan samen met het altijd al voor $\alpha = 0$ aanwezige minimum en uit de reeksontwikkeling voor F_3 in (12, 5) is direct te zien, dat dit verschijnsel optreedt voor de kritische waarde van

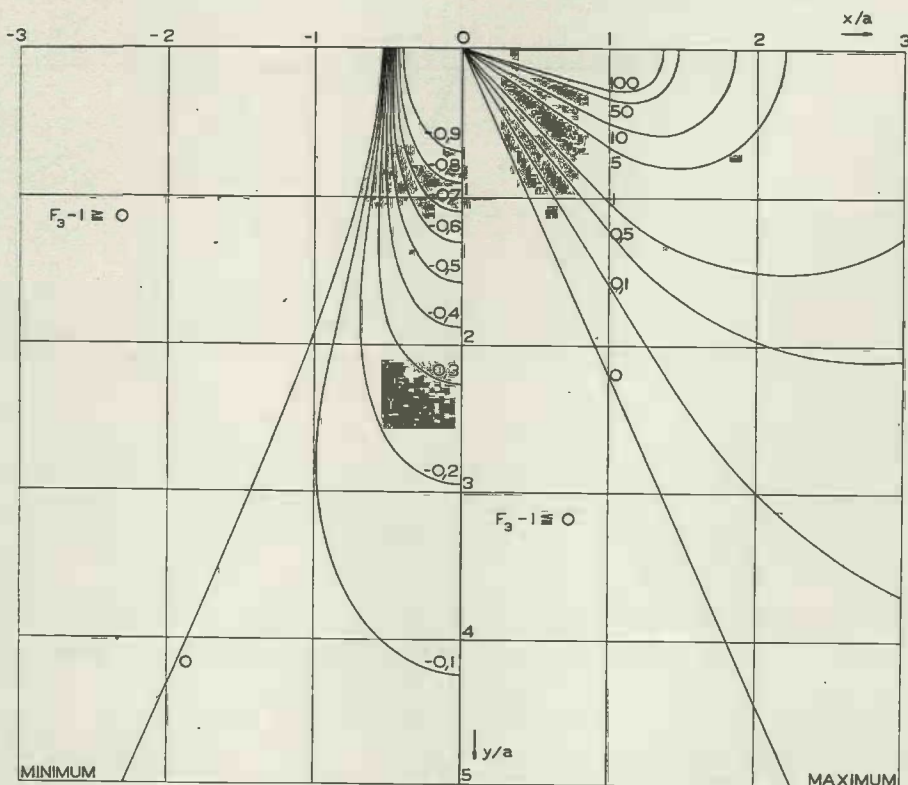


Fig. 5. De grenzen van $F_3 - 1$.

$\varphi = \varphi_c$, die gegeven wordt door: $\xi_c^2 = 1/6$. Dit komt overeen met een hoek $\varphi_c = 24^\circ 05' 43''$. Is φ kleiner dan φ_c , dan treedt in de kromme voor F_3 geen maximum voor $\alpha \neq 0$ meer op. Het maximum van F_3 is dan dus altijd 1.

Wij kunnen nu de grenswaarden van $F_3 - 1$ uitzetten als functie van x/a en y/a . In fig. 5 zijn links lijnen aangegeven, waarop de benedengrens van $F_3 - 1$ een constante, er bij aangegeven waarde heeft. Links van de lijn, waarop deze benedengrens 0 is, blijft deze grens verder 0, zodat in dat gebied geldt: $F_3 - 1 \geq 0$. Rechts in de figuur zijn de lijnen aangegeven, waar de bovengrens van $F_3 - 1$ een constante, er

bij aangegeven waarde heeft. Links van de lijn, waarop de bovengrens 0 is, blijft deze grens verder 0, zodat in dat gebied geldt: $F_3 - 1 \leq 0$. In de onmiddellijke omgeving van het belastingsgebied liggen de grenzen ver uit elkaar. Wat verder liggen de grenzen echter dicht bij 0.

Vermenigvuldigen wij tenslotte de gevonden grenzen van $F_3 - 1$

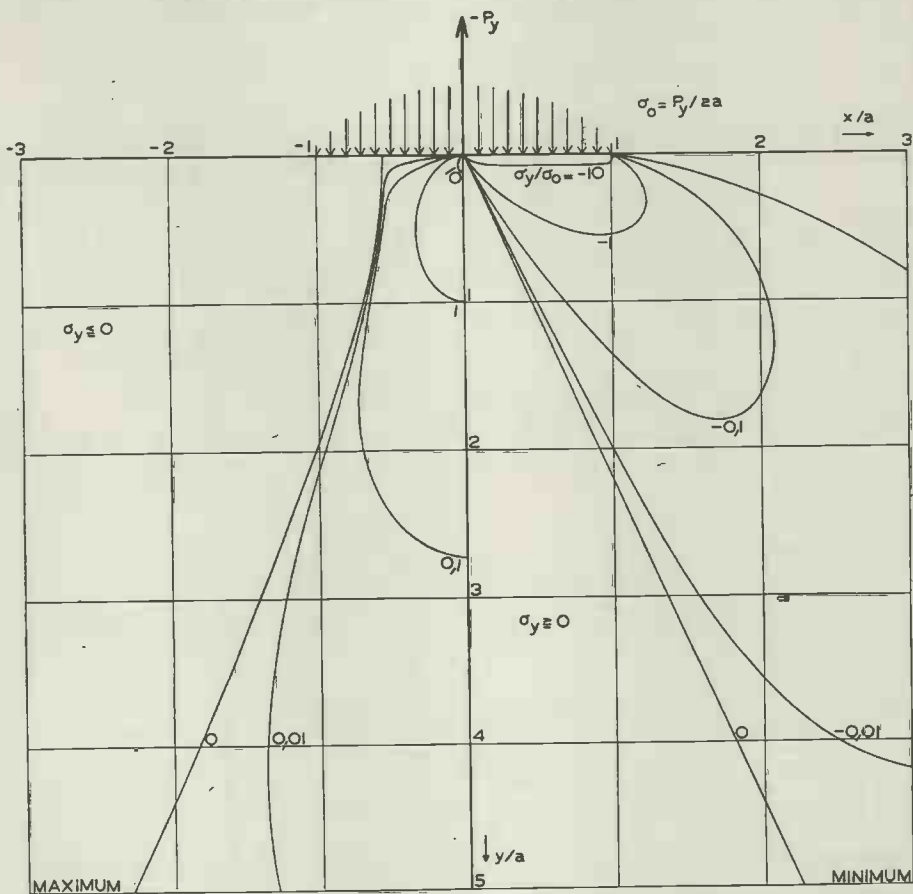


Fig. 6. De grenzen van σ_y tengevolge van een evenwichtstelsel, gevormd door een in één richting constante, normale, even en definitieve belasting en het tegengestelde van haar resultante.

met $-\frac{4}{\pi} \frac{(y/a)^3}{(r/a)^2} \sigma_0$, waarin $\sigma_0 = P_y/2a$ de spanningseenheid is, nl. de spanning ter plaatse van het belastingsgebied verwekt door een gelijkmatige belasting met resultante P_y , dan hebben wij volgens (1) de grenzen van de σ_y tengevolge van het beschouwde evenwichtstelsel gekregen. In fig. 6 zijn deze grenzen aangegeven. Met het oog op het minteken in de factor, waarmee wij vermenigvuldigd hebben, staan nu links de maximale en rechts de minimale waarden aangegeven.

Voor punten, gelegen buiten deze figuur kunnen wij gebruik maken

van een vereenvoudigde berekening, gebaseerd op de eerste twee termen van de reeksontwikkeling van F_3 in (12, 5). Wij vinden dan:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_0} = 0 \text{ à } \frac{8 \cos^3 \varphi (1 - 6 \sin^2 \varphi)}{\pi (r/a)^3} \quad (2)$$

Hieruit kunnen wij vinden, hoe groot, bij bepaalde φ , r/a moet zijn, opdat σ_y/σ_0 een bepaalde voorgeschreven (kleine) waarde niet overschrijdt. Het absolute maximum $(r/a)_m$ van deze r/a als functie van φ blijkt op te treden voor $\varphi = 0$ en te voldoen aan:

$$(r/a)_m = \sqrt[3]{\frac{8 \sigma_0}{\pi \sigma_y}} \quad (3)$$

Hieruit volgt voor $\sigma_y/\sigma_0 = 0,01$ een waarde $(r/a)_m = 6,3$; voor $\sigma_y/\sigma_0 = 0,001$ een waarde $(r/a)_m = 13,6$.

§ 2. Rotatorisch symmetrische belasting van de halfruimte.

19. *Het belastingstelsel.* Wij denken ons een elastisch medium, dat het gedeelte van de ruimte inneemt, hetwelk t.o.v. een stelsel cylindercoördinaten r , φ , y gedefinieerd is door de vergelijking $y > 0$. Deze halfruimte wordt aan haar vrije oppervlak $y = 0$ onderworpen aan een ten opzichte van de Y -as rotatorisch symmetrische belasting $q(r)$. Op een oppervlakte-element tussen de cirkels r en $r + dr$ en de lijnen φ en $\varphi + d\varphi$ werkt dus een kracht $q(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$. Deze belasting $q(r)$ kan gesplitst worden in drie loodrechte componenten in de coördinaatrichtingen: een radiale component $q_r(r)$, een tangentele component $q_\varphi(r)$ en een normale component $q_y(r)$. Het zal in het volgende blijken, dat het nuttig is, deze belastingscomponenten in Fourier-Besselintegralen te ontwikkelen. Een functie $f(r)$ kan ontwikkeld worden in een Fourier-Besselintegraal:

$$f(r) = \int_0^\infty J_n(rt) t dt \int_0^\infty f(u) J_n(tu) u du, \quad (1)$$

indien ze voldoet aan de ontwikkelingsvoorwaarden (2, 1), wat voor ons generlei beperking inhoudt. De index n in (1) kan nog vrij gekozen worden. Het zal blijken nuttig te zijn in het geval van $q_r(r)$ en $q_\varphi(r)$ te kiezen $n = 1$, daarentegen voor $q_y(r)$ te kiezen $n = 0$. Voeren wij ter afkorting de volgende belastingsintegralen in:

$$\left. \begin{aligned} Q_r(t) &= \int_0^\infty q_r(u) J_1(tu) u du \\ Q_\varphi(t) &= \int_0^\infty q_\varphi(u) J_1(tu) u du \\ Q_y(t) &= \int_0^\infty q_y(u) J_0(tu) u du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dan laten de belastingscomponenten zich schrijven als:

$$\left. \begin{aligned} q_r(r) &= \int_0^\infty Q_r(t) J_1(rt) t dt \\ q_\varphi(r) &= \int_0^\infty Q_\varphi(t) J_1(rt) t dt \\ q_y(r) &= \int_0^\infty Q_y(t) J_0(rt) t dt \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

In nr. 20 zullen wij ons bezig houden met de belasting q_r en q_y ; in nr. 21 met de belasting q_φ .

20. *Het spanningstelsel, behorende bij de belasting q_r en q_y .* Het is bekend, dat de spanningen en verplaatsingen in een rotatorisch symmetrische spanningstoestand zich laten splitsen in twee van elkander onafhankelijke groepen. De eerste groep bevat de spanningen σ_r , σ_φ , σ_y en τ_{yr} en de verplaatsingen in de r - en y -richting; de tweede groep omvat de spanningen $\tau_{r\varphi}$ en $\tau_{\varphi y}$ en de verplaatsingen in de φ -richting. De belastingscomponenten q_r en q_y behoren tot de eerste groep, q_φ daarentegen tot de tweede groep. De eerste groep representeert een torsievrije belasting, de tweede groep daarentegen een zuivere torsie. Wij zullen de beide groepen afzonderlijk behandelen.

In het geval van een rotatorisch symmetrische spanningstoestand, waarin de „torsie”spanningen $\tau_{r\varphi}$ en $\tau_{\varphi y}$ ontbreken, hetgeen het geval is, indien de belastingscomponent q_φ ontbreekt, kunnen de spanningen op de volgende wijze in verband gebracht worden met de radiale verschuivingsfunctie F' van LOVE:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta'' F' - m \frac{\partial^2 F'}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta'' F' - \frac{m}{r} \frac{\partial F'}{\partial r} \right) \\ \sigma_y &= \frac{2(2m-1)G}{m-2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta'' F' - \frac{m}{2m-1} \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} \right) \\ \tau_{yr} &= \frac{2(m-1)G}{m-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta'' F' - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hierin is m de contractiecoëfficiënt en G de glijdingsmodulus van het materiaal; verder is $\Delta'' \equiv \partial^2/\partial r^2 + \frac{1}{r} \partial/\partial r + \partial^2/\partial y^2$. F' voldoet aan de vergelijking:

$$\Delta'' \Delta'' F' = 0 \quad (2)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(r, 0) &= -q_y(r) \\ \tau_{yr}(r, 0) &= -q_r(r) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Deze randvoorwaarden zijn weer niet voldoende. Wij zullen echter een oplossing zoeken, waarvan alle spanningen in het oneindige van het veld verdwijnen, en hierbij aannemen, dat slechts één oplossing aan deze eis voldoet.

Bekende oplossingen van (2) zijn o.a.:

$$F' = c, r^2, y, y^2, J_0(rt) e^{-yt}, y J_0(rt) e^{-yt}.$$

Wij trachten aan (15, 3) te voldoen, door deze oplossingen in de vorm van een integraalvoorstelling te superponeren:

$$F' = \int_0^\infty \{ (g_1 + yt g_2) J_0(rt) e^{-yt} + g_3 r^2 + g_4 y^2 + g_5 y + g_6 \} dt \quad (4)$$

Hierin zijn de g_i voorlopig nog onbekende functies van t . Wij nemen aan, dat wij de eerste, tweede en derde afgeleiden van F' naar r en y kunnen vinden door onder het integraalteken naar r en y te differentieren. Hierbij maken wij gebruik van de voor de Besselfuncties J_0 en J_1 geldende differentiatieregels:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} J_0(rt) &= -J_1(rt) t \\ \frac{\partial}{\partial r} J_1(rt) &= \{ J_0(rt) - \frac{1}{rt} J_1(rt) \} t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Na wat rekenen vinden wij voor de spanningen uit (1), (4) en (5):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \int_0^\infty \{ -mg_1 + (m+2)g_2 - mytg_2 \} J_0(rt) + \\ &\quad + \{ mg_1 - mg_2 + mytg_2 \} \frac{1}{rt} J_1(rt) \} e^{-yt} t^3 dt \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \int_0^\infty \{ 2g_2 J_0(rt) - (mg_1 - mg_2 + mytg_2) \\ &\quad \frac{1}{rt} J_1(rt) \} e^{-yt} t^3 dt \\ \sigma_y &= \frac{2G}{m-2} \int_0^\infty \{ mg_1 + (m-2)g_2 + mytg_2 \} J_0(rt) e^{-yt} t^3 dt \\ \tau_{yr} &= \frac{2G}{m-2} \int_0^\infty (mg_1 - 2g_2 + mytg_2) J_1(rt) e^{-yt} t^3 dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Voor $y = 0$ geldt derhalve:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(r, 0) &= \frac{2G}{m-2} \int_0^\infty \{ mg_1 + (m-2)g_2 \} J_0(rt) t^3 dt \\ \tau_{yr}(r, 0) &= \frac{2G}{m-2} \int_0^\infty (mg_1 - 2g_2) J_1(rt) t^3 dt \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Vergelijken wij deze uitkomst met (19, 3) en (3), dan volgt:

$$\left. \begin{aligned} g_1 t^2 &= -\frac{m-2}{2m^2 G} \{ (m-2)Q_r(t) + 2Q_v(t) \} \\ g_2 t^2 &= \frac{m-2}{2mG} \{ Q_r(t) - Q_v(t) \} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Substitueren wij dit in (6), dan vinden wij de uiteindelijke formules voor de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \int_0^\infty \left[\{ (2Q_r - Q_v) - yt(Q_r - Q_v) \} J_0(rt) - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left(\frac{2m-2}{m} Q_r - \frac{m-2}{m} Q_v \right) - yt(Q_r - Q_v) \right\} \frac{1}{rt} J_1(rt) \right] e^{-yt} t dt \\ \sigma_\varphi &= \int_0^\infty \left[\left(\frac{2}{m} Q_r - \frac{2}{m} Q_v \right) J_0(rt) + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{2m-2}{m} Q_r - \frac{m-2}{m} Q_v \right) - yt(Q_r - Q_v) \right\} \frac{1}{rt} J_1(rt) \right] e^{-yt} t dt \\ \sigma_v &= \int_0^\infty \{ -Q_v + yt(Q_r - Q_v) \} J_0(rt) e^{-yt} t dt \\ \tau_{vr} &= \int_0^\infty \{ -Q_r + yt(Q_r - Q_v) \} J_1(rt) e^{-yt} t dt \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Hiermede kunnen wij althans formeel de spanningen uit de gegeven belasting berekenen. Doordat de goniometrische functies in de integralen, zoals wij ze ontmoet hebben met de problemen in de vorige paragraaf, hier vervangen zijn door Besselfuncties, is het uitwerken van de integralen aanzienlijk veel moeilijker.

De functies g_3 , g_4 , g_5 en g_6 , die in (4) voorkomen, treden niet meer op in de formules voor de spanningen. Uit spanningsoverwegingen kunnen zij dan ook niet bepaald worden. Zij kunnen echter dienen om de integralen voor F' en de eerste afgeleiden, die een rol spelen bij de bepaling van de verplaatsingen, te laten convergeren. Wij beperken ons tot de spanningen, zodat zij voor ons verder geen betekenis hebben.

21. *Het spanningstelsel, behorende bij de belasting q_φ .* In het vorige nummer is de torsievrije belasting besproken. Nu beschouwen wij de uitsluitend op torsie belaste halfruimte. Dit betekent dus, dat $q_r(r) = q_v(r) = 0$ is. In dit geval kunnen de spanningen op de volgende wijze afgeleid worden uit de spanningsfunctie F'' voor omwentelingsymmetrische torsieproblemen:

$$\tau_\varphi = -r^{-2} \frac{\partial F''}{\partial y}, \quad \tau_{v\varphi} = r^{-2} \frac{\partial F''}{\partial r} \quad (1)$$

Hierin is F'' een functie, die voldoet aan:

$$\Delta^\nabla F'' \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F'' = 0 \quad (2)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$\tau_{v\varphi}(r, 0) = -q_\varphi \quad (3)$$

Wij nemen weer aan, dat de voorwaarde, dat alle spanningen in het

oneindige verdwijnen, samen met (3) voldoende is, om de oplossing van het vraagstuk ondubbelzinnig te bepalen.

Een oplossing van (2) is bijv. $F'' = r^2 \int_2(rt) e^{-yt}$. Wij trachten aan (3) te voldoen door superpositie van deze oplossing in de volgende integraalvorm:

$$F'' = \int_0^{\infty} g_7 r^2 J_2(rt) e^{-yt} dt \quad (4)$$

Hierin is g_7 een voorlopig nog onbekende functie van t . Wij nemen weer aan, dat wij de eerste afgeleiden van F'' naar r en y kunnen bepalen door onder het integraalteken naar r en y te differentieren. Dan vinden wij voor de spanningen, gebruik makende van de voor de Besselfunctie J_2 geldende differentiatieregel:

$$\frac{\partial}{\partial r} J_2(rt) = -\frac{2}{r} J_2(rt) + t J_1(rt) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= \int_0^{\infty} g_7 J_2(rt) e^{-yt} t dt \\ \tau_{y\varphi} &= \int_0^{\infty} g_7 J_1(rt) e^{-yt} t dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

In het bijzonder geldt voor $y = 0$:

$$\tau_{y\varphi}(r, 0) = \int_0^{\infty} g_7 J_1(rt) t dt \quad (7)$$

Vergelijken wij dit met (19, 3) en (3), dan volgt:

$$g_7 = -Q_{\varphi}(t) \quad (8)$$

Dus worden de spanningen gegeven door:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= - \int_0^{\infty} Q_{\varphi}(t) J_2(rt) e^{-yt} t dt \\ \tau_{y\varphi} &= - \int_0^{\infty} Q_{\varphi}(t) J_1(rt) e^{-yt} t dt \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Hiermede kunnen wij althans formeel de spanningen uit de gegeven belasting berekenen.

22. *De gelijkmatig verdeelde belasting q_y en de puntlast P_y .* Zoals al gezegd, brengen de Besselfuncties onder het integraalteken veel moeilijkheden met zich mede, zodat wij onze berekeningen niet alle zo volledig kunnen doorvoeren als wij het in de vorige paragraaf hebben gedaan. Wij zullen eerst weer beginnen met gevallen te beschouwen van gelijkmatig verdeelde belasting. Wij denken ons de belasting nu beperkt binnen een cirkel met straal a . Halverwege de berekening zullen wij deze a echter al tot nul laten naderen (onder gelijkhouding van de resultante van het stelsel), op deze wijze overgaande tot de geconcentreerde belasting, uitsluitend ter vermijding van integratiemoeilijkheden.

In de eerste plaats beschouwen wij het geval van een gelijkmatig verdeelde normale belasting. De resultante er van zij P_y . De belasting is dus gedefinieerd door:

$$q_r(r) = q_\varphi(r) = 0$$

$$q_y(r) = \begin{cases} 0 & \text{voor } r > a \\ P_y/2\pi a^2 & \text{voor } r = a \\ P_y/\pi a^2 & \text{voor } r < a \end{cases} \quad (1)$$

Volgens (19, 2) zijn de belastingsintegralen:

$$Q_r(t) = Q_\varphi(t) = 0$$

$$Q_y(t) = \frac{P_y}{\pi a^2} \int_0^a J_0(tu) u du = \frac{P_y}{\pi} \frac{J_1(at)}{at} \quad (2)$$

Nu laten wij ter vermindering van ingewikkelde berekeningen a tot nul naderen, hierbij P_y constant houdend. Hierdoor gaat $Q_y(t)$ over in:

$$\lim_{a \rightarrow 0} Q_y(t) = \frac{P_y}{2\pi} \quad (3)$$

Hiermede is dus de gelijkmatige belasting overgegaan in een puntlast P_y . Volgens (20, 9) zijn de spanningen gegeven door:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P_y}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ (1-yt) J_0(rt) - \left(\frac{m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{rt} J_1(rt) \right\} e^{-yt} t dt \\ \sigma_\varphi &= -\frac{P_y}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{m} J_0(rt) + \left(\frac{m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{rt} J_1(rt) \right\} e^{-yt} t dt \\ \sigma_y &= -\frac{P_y}{2\pi} \int_0^\infty (1+yt) J_0(rt) e^{-yt} t dt \\ \tau_{yr} &= -\frac{P_y}{2\pi} y \int_0^\infty J_1(rt) e^{-yt} t^2 dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

In tegenstelling tot de integralen, die wij zouden hebben gekregen, indien wij a niet tot nul zouden hebben laten naderen, zijn de integralen uit (4) eenvoudig te berekenen. Met het oog op (30, 2), (30, 3), (30, 8), (30, 9) en (30, 10) volgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{1}{2\pi} P_y \left\{ 3 \frac{r^2 y}{R^5} - \frac{m-2}{m} \frac{1}{R(y+R)} \right\} \\ \sigma_\varphi &= -\frac{1}{2\pi} \frac{m-2}{m} P_y \left\{ -\frac{y}{R^3} + \frac{1}{R(y+R)} \right\} \\ \sigma_y &= -\frac{3}{2\pi} P_y \frac{y^3}{R^5} \\ \tau_{yr} &= -\frac{3}{2\pi} P_y \frac{ry^2}{R^5} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Hierin en in het vervolg betekent R de afstand van een punt tot de oorsprong, dus $R^2 = r^2 + y^2$.

Zowel uit technisch als uit historisch oogpunt bezien is dit geval belangrijk. Het is het eerst door BOUSSINESQ (op andere wijze) bewerkt.

23. *De gelijkmatig verdeelde belasting q_r en de krachtbron N_y .* Volgens beschouwen wij het geval van een over een cirkel met straal a gelijkmatig verdeelde radiale belasting q_r . Wij hebben hier te doen met een evenwichtstelsel analoog aan het stelsel, dat wij ontmoet hebben in 9. In het algemeen zullen wij bij willekeurige $q_r(r)$ als intensiteit N_y definiëren:

$$N_y = 2\pi \int_0^{\infty} q_r(r) r^2 dr \quad (1)$$

Is, zoals in het onderhavige geval, $q_r(r)$ binnen de cirkel met straal a constant, dan is blijkbaar bij gegeven intensiteit N_y de belasting:

$$q_r(r) = \left. \begin{array}{l} q_\varphi(r) = 0 \\ \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{voor } r > a \\ \frac{3}{4\pi} N_y/a^3 \quad \text{voor } r = a \\ \frac{3}{2\pi} N_y/a^3 \quad \text{voor } r < a \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Derhalve zijn de belastingsintegralen volgens (19, 2):

$$\left. \begin{array}{l} Q_y(t) = Q_\varphi(t) = 0 \\ Q_r(t) = \frac{3}{2\pi} \frac{N_y}{a^3} \int_0^a J_1(tu) u du \end{array} \right\} \quad (3)$$

De integraal kan niet in gesloten vorm uitgewerkt worden. Wij maken daarom op dit punt de limietovergang door a tot nul te laten naderen, daarbij de intensiteit constant $= N_y$ houdend. De geconcentreerde belasting, die in de limiet optreedt, zullen wij aanduiden met de naam „krachtbron”. In de integraal kunnen wij nu $J_1(tu)$ vervangen door $tu/2$ en hieruit volgt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} Q_r(t) = \frac{1}{4\pi} N_y t \quad (4)$$

Substitueren wij dit in (20, 9), dan vinden wij voor de spanningen:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{1}{4\pi} N_y \int_0^{\infty} \left\{ (2 - yt) J_0(rt) - \left(\frac{2m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{rt} J_1(rt) \right\} e^{-yt} t^2 dt \\ \sigma_\varphi = \frac{1}{4\pi} N_y \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{m} J_0(rt) + \left(\frac{2m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{rt} J_1(rt) \right\} e^{-yt} t^2 dt \\ \sigma_y = \frac{1}{4\pi} N_y y \int_0^{\infty} J_0(rt) e^{-yt} t^3 dt \\ \tau_{yr} = \frac{1}{4\pi} N_y \int_0^{\infty} (-1 + yt) J_1(rt) e^{-yt} t^2 dt \end{array} \right\} \quad (5)$$

Met het oog op $(30, 3)$, $(30, 4)$, $(30, 9)$, $(30, 10)$ en $(30, 11)$ volgt hieruit:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{4\pi} N_v \left(\frac{y^4 + 14y^2r^2 - 2r^4}{R^7} - \frac{2m-2}{m} \frac{1}{R^3} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{4\pi} N_v \frac{m-2}{m} \frac{2r^2 - y^2}{R^5} \\ \sigma_y &= \frac{3}{4\pi} N_v \frac{y^2(2y^2 - 3r^2)}{R^7} \\ \tau_{yr} &= \frac{3}{4\pi} N_v \frac{ry(3y^2 - 2r^2)}{R^7} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

24. De gelijkmatig verdeelde belasting q_φ en het puntwringmoment M_v' . Tenslotte beschouwen wij het geval van de over een cirkel met straal a gelijkmatig verdeelde tangentele belasting q_φ . In het algemeen geldt bij willekeurige $q_\varphi(r)$ voor het resulterend wringend moment van het stelsel:

$$M_v = 2\pi \int_0^a q_\varphi(r) r^2 dr \quad (1)$$

In ons geval is blijkbaar bij gegeven wringend moment M_v van het stelsel de belasting gegeven door:

$$q_r(r) = q_v(r) = 0 \quad \left. \begin{aligned} & \text{voor } r > a \\ q_\varphi(r) &= \begin{cases} \frac{3}{4\pi} M_v/a^3 & \text{voor } r = a \\ \frac{3}{2\pi} M_v/a^3 & \text{voor } r < a \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Derhalve zijn de belastingsintegralen volgens (19, 2):

$$\left. \begin{aligned} Q_r(t) &= Q_v(t) = 0 \\ Q_\varphi(t) &= \frac{3}{2\pi} \frac{M_v}{a^3} \int_0^a J_1(tu) u du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

De integraal is dezelfde, als voorkomt in (23, 3) en kan niet in gesloten vorm gebracht worden. Wij maken hier dus weer de limietovergang door a tot nul te laten naderen, daarbij het wringmoment van het stelsel constant $= M_v$ houdend. Het belastingstelsel gaat hierbij over in een puntwringmoment. Wij vinden:

$$\lim_{a \rightarrow 0} Q_\varphi(t) = \frac{1}{4\pi} M_v t \quad (4)$$

Door dit te substitueren in (27, 9) vinden wij voor de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= -\frac{1}{4\pi} M_y \int_0^\infty J_2(\tau t) e^{-\gamma t} t^2 dt \\ \tau_{y\varphi} &= -\frac{1}{4\pi} M_y \int_0^\infty J_1(\tau t) e^{-\gamma t} t^2 dt \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Met het oog op (30, 10) en (30, 16) gaat dit over in:

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{3}{4\pi} M_y \frac{r^2}{R^5} \quad \tau_{y\varphi} = -\frac{3}{4\pi} M_y \frac{y r}{R^5} \quad (6)$$

25. *De definitie belasting q_{va} .* Wij gaan nu over tot de bespreking van rotatorisch symmetrische, definitie (zie 11), doch overigens willekeurige belastingstelsels binnen een cirkel met straal a . Het eerste geval zal zijn dat van de normale definitie belasting met resultante P_y :

$$P_y = 2\pi \int_0^a q_{va}(r) r dr \quad (1)$$

Volgens (19, 2) geldt nu:

$$\left. \begin{aligned} Q_r(t) &= Q_\varphi(t) = 0 \\ Q_y(t) &= \int_0^a q_{va}(u) J_0(tu) u du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie in (20, 9) levert voor de spanningen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\int_0^\infty \left\{ (1 - yt) J_0(\tau t) - \left(\frac{m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{\tau t} J_1(\tau t) \right\} e^{-\gamma t} t dt \int_0^a q_{va}(u) J_0(tu) u du \\ \sigma_\varphi &= -\int_0^\infty \left\{ \frac{2}{m} J_0(\tau t) + \left(\frac{m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{\tau t} J_1(\tau t) \right\} e^{-\gamma t} t dt \int_0^a q_{va}(u) J_0(tu) u du \\ \sigma_y &= -\int_0^\infty (1 + yt) J_0(\tau t) e^{-\gamma t} t dt \int_0^a q_{va}(u) J_0(tu) u du \\ \tau_{yr} &= -\int_0^\infty yt J_1(\tau t) e^{-\gamma t} t dt \int_0^a q_{va}(u) J_0(tu) u du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Door verwisseling van de volgorde der integraties gaat dit over in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\int_0^a q_{va}(u) u du \int_0^\infty \left\{ (1 - yt) J_0(\tau t) - \left(\frac{m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{\tau t} J_1(\tau t) \right\} J_0(ut) e^{-\gamma t} t dt \\ \sigma_\varphi &= -\int_0^a q_{va}(u) u du \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{m} J_0(\tau t) + \left(\frac{m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{\tau t} J_1(\tau t) \right\} J_0(ut) e^{-\gamma t} t dt \\ \sigma_y &= -\int_0^a q_{va}(u) u du \int_0^\infty (1 + yt) J_0(\tau t) J_0(ut) e^{-\gamma t} t dt \\ \tau_{yr} &= -\int_0^a q_{va}(u) u du \int_0^\infty yt J_1(\tau t) J_0(ut) e^{-\gamma t} t dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

De tweede integralen in (4) stellen wij gelijk aan hun waarde voor $u = 0$ vermenigvuldigd met een functie van $\beta = u/R$ en $\varrho = r/R$, in volgorde genummerd F_{13} , F_{14} , F_{15} en F_{16} . Aangezien de integrand twee Besselfuncties met ongelijk argument bevat, worden de uitdrukkingen gecompliceerd en onoverzichtelijk. Wij volstaan daarom op deze plaats met een reeksontwikkeling voor kleine β , d.w.z. voor grote R . Met het oog op (33, 3), (33, 4), (33, 5), (33, 6) en (33, 7) vinden wij de volgende ontwikkelingen:

$$\left. \begin{aligned} F_{13}(\beta, \varrho) &= 1 - 3/4 \frac{(\sqrt{1 - \varrho^2} + 1 - \varrho^2) \left(\frac{3m-2}{m} - 30\varrho^2 + 35\varrho^4 \right)}{\frac{m-2}{m} - 3\varrho^2(\sqrt{1 - \varrho^2} + 1 - \varrho^2)} \beta^2 + 0(\beta^4) \\ F_{14}(\beta, \varrho) &= 1 - 3/4 \frac{(\sqrt{1 - \varrho^2} + 1 - \varrho^2) \left(\frac{3m-2}{m} - 5\varrho^2 \right)}{\sqrt{1 - \varrho^2} - \varrho^2} \beta^2 + 0(\beta^4) \\ F_{15}(\beta, \varrho) &= 1 - 5/4 (2 - 7\varrho^2) \beta^2 + 0(\beta^4) \\ F_{16}(\beta, \varrho) &= 1 - 5/4 (4 - 7\varrho^2) \beta^2 + 0(\beta^4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De functies F_i hangen via β af van u . De spanningen kunnen nu geschreven worden in de vorm:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= - \left\{ \frac{3r^2 y}{R^5} - \frac{m-2}{m} \frac{1}{R(R+y)} \right\} \int_0^a F_{13} q_{rd}(u) u du \\ \sigma_\varphi &= - \frac{m-2}{m} \left\{ \frac{-y}{R^3} + \frac{1}{R(R+y)} \right\} \int_0^a F_{14} q_{rd}(u) u du \\ \sigma_y &= - \frac{3y^3}{R^5} \int_0^a F_{15} q_{rd}(u) u du \\ \tau_{yr} &= - \frac{3ry^2}{R^5} \int_0^a F_{16} q_{rd}(u) u du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wij voeren volgens (12, 8) functies F_i' in. Duiden wij de spanningen tengevolge van een normale puntlast P_y in de oorsprong met accenten aan, dan vinden wij met het oog op (22, 5) en (1):

$$\sigma_r = \sigma_r' F_{13}' \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi' F_{14}' \quad \sigma_y = \sigma_y' F_{15}' \quad \tau_{yr} = \tau_{yr}' F_{16}' \quad (7)$$

De functies F_i en daarmee de functies F_i' naderen voor onbepaald toenemende R tot 1, uitgezonderd voor enkele bijzondere waarden van ϱ .

26. De definitie belasting q_{rd} . Vervolgens bezien wij het geval van de radiale, definitie doch overigens willekeurige belasting $q_{rd}(r)$ binnen de cirkel met straal a . De intensiteit van het stelsel zij N_y :

$$N_y = 2\pi \int_0^a q_{rd}(r) r^2 dr \quad (1)$$

Volgens (19, 2) zijn de belastingsintegralen:

$$\left. \begin{aligned} Q_\varphi(t) &= Q_v(t) = 0 \\ Q_r(t) &= \int_0^a q_{rd}(u) J_1(tu) u du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie hiervan in (20, 9) geeft ons:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \int_0^\infty \left\{ (2 - yt) J_0(rt) - \left(\frac{2m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{rt} J_1(rt) \right\} e^{-yt} t dt \int_0^a q_{rd}(u) J_1(tu) u du \\ \sigma_\varphi &= \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{m} J_0(rt) + \left(\frac{2m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{rt} J_1(rt) \right\} e^{-yt} t dt \int_0^a q_{rd}(u) J_1(tu) u du \\ \sigma_v &= \int_0^\infty yt J_0(rt) e^{-yt} t dt \int_0^a q_{rd}(u) J_1(tu) u du \\ \tau_{vr} &= \int_0^\infty (-1 + yt) J_1(rt) e^{-yt} t dt \int_0^a q_{rd}(u) J_1(tu) u du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Verwisseling van de integratievolgorde en een kleine wijziging met het oog op een later te maken limietovergang doet dit overgaan in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \int_0^a q_{rd}(u) u^2 du \int_0^\infty \left\{ (2 - yt) J_0(rt) - \left(\frac{2m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{rt} J_1(rt) \right\} \frac{J_1(ut)}{u} e^{-yt} t dt \\ \sigma_\varphi &= \int_0^a q_{rd}(u) u^2 du \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{m} J_0(rt) + \left(\frac{2m-2}{m} - yt \right) \frac{1}{rt} J_1(rt) \right\} \frac{J_1(ut)}{u} e^{-yt} t dt \\ \sigma_v &= \int_0^a q_{rd}(u) u^2 du \int_0^\infty yt J_0(rt) \frac{J_1(ut)}{u} e^{-yt} t dt \\ \tau_{vr} &= \int_0^a q_{rd}(u) u^2 du \int_0^\infty (-1 + yt) J_1(rt) \frac{J_1(ut)}{u} e^{-yt} t dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ook nu vervangen wij de tweede integralen in (4) door hun grenswaarde voor $u = 0$ vermenigvuldigd met een functie van β en ϱ . Deze functies laten met het oog op (33, 6), (33, 7), (33, 8), (33, 9) en (33, 10) de volgende ontwikkelingen toe:

$$\left. \begin{aligned} F_{17} &= 1 - \frac{3}{8} \frac{12m - 8 - (195m - 10)\varrho^2 + 490m\varrho^4 - 315m\varrho^6}{m - 2 - 12m\varrho^2 + 15m\varrho^4} \beta^2 + 0(\beta^4) \\ F_{18} &= 1 + \frac{3}{8} \frac{8m - 12 - (10m + 15)\varrho^2 + 11\varrho^4}{(m - 2)(1 - 3\varrho^2)} \beta^2 + 0(\beta^4) \\ F_{19} &= 1 - \frac{5}{8} \frac{8 - 56\varrho^2 + 63\varrho^4}{2 - 5\varrho^2} \beta^2 + 0(\beta^4) \\ F_{20} &= 1 - \frac{5}{8} \frac{20 - 77\varrho^2 + 63\varrho^4}{3 - 5\varrho^2} \beta^2 + 0(\beta^4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Met behulp van deze functies kunnen de spanningen nu geschreven worden in de volgende vorm:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{y^4 + 14y^2r^2 - 2r^4}{2R^7} - \frac{m-2}{m} \frac{1}{R^3} \right) \int_0^a F_{17} q_{rd}(u) u^2 du \\ \sigma_\varphi &= \frac{m-2}{2m} \frac{2r^2 - y^2}{R^5} \int_0^a F_{18} q_{rd}(u) u^2 du \\ \sigma_y &= \frac{3y^2(2y^2 - 3r^2)}{2R^7} \int_0^a F_{19} q_{rd}(u) u^2 du \\ \tau_{yr} &= \frac{3ry(3y^2 - 2r^2)}{2R^7} \int_0^a F_{20} q_{rd}(u) u^2 du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wij voeren volgens (12, 8) functies F_i' in. Duiden wij de spanningen tengevolge van een krachtbron in de oorsprong met intensiteit N_y met accenten aan, dan volgt voor de spanningen in het beschouwde geval:

$$\sigma_r = \sigma_r' F_{17}' \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi' F_{18}' \quad \sigma_y = \sigma_y' F_{19}' \quad \tau_{yr} = \tau_{yr}' F_{20}' \quad (7)$$

De functies F_i en daarmee de functies F_i' naderen voor onbepaald toenemende R tot 1, uitgezonderd voor enkele bijzondere waarden van ρ .

27. De definitieve belasting $q_{\varphi d}$. Tenslotte bezien wij het geval van de tangentiële, definitieve doch overigens willekeurige belasting $q_{\varphi d}(r)$ binnen de cirkel met straal a . Het moment van het stelsel zij M_y :

$$M_y = 2\pi \int_0^a q_{\varphi d}(r) r^2 dr \quad (1)$$

Volgens (19, 2) zijn de belastingsintegralen:

$$\left. \begin{aligned} Q_r(t) &= Q_y(t) = 0 \\ Q_\varphi(t) &= \int_0^a q_{\varphi d}(u) J_1(tu) u du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substitutie hiervan in (21, 9) geeft ons:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= - \int_0^\infty J_2(rt) e^{-yt} t dt \int_0^a q_{\varphi d}(u) J_1(tu) u du \\ \tau_{y\varphi} &= - \int_0^\infty J_1(rt) e^{-yt} t dt \int_0^a q_{\varphi d}(u) J_1(tu) u du \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wij verwisselen de integratievolgorde en brengen een kleine wijziging aan met het oog op een te maken limietovergang:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= - \int_0^a q_{\varphi d}(u) u^2 du \int_0^\infty J_2(rt) \frac{J_1(ut)}{u} e^{-yt} t dt \\ \tau_{y\varphi} &= - \int_0^a q_{\varphi d}(u) u^2 du \int_0^\infty J_1(rt) \frac{J_1(ut)}{u} e^{-yt} t dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wij stellen de tweede integralen gelijk aan hun grenswaarde voor $u = 0$ vermenigvuldigd met een functie van β en ρ . Met het oog op (33, 9) en (33, 11) laten deze functies de volgende ontwikkeling toe:

$$\left. \begin{aligned} F_{21} &\equiv 1 - \frac{5}{8} (6 - 7\rho^2) \beta^2 + 0(\beta^4) \\ F_{22} &\equiv 1 - \frac{5}{8} (4 - 7\rho^2) \beta^2 + 0(\beta^4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Met behulp van deze functies kunnen de spanningen als volgt gegeven worden:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= \frac{3}{2} \frac{r^2}{R^5} \int_0^a F_{21} q_{\varphi d}(u) u^2 du \\ \tau_{y\varphi} &= \frac{3}{2} \frac{ry}{R^5} \int_0^a F_{22} q_{\varphi d}(u) u^2 du \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wij voeren volgens (12, 8) functies F_i' in. De spanningen tengevolge van een puntwringmoment M_y in de oorsprong geven wij aan met accenten. Dan volgt uit (6) met het oog op (24, 6) en (1):

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}' F_{21}' \quad \tau_{y\varphi} = \tau_{y\varphi}' F_{22}' \quad (7)$$

De functies F_i en daarmee de functies F_i' naderen voor onbepaald toenemende R tot 1.

28. *Uitgewerkt voorbeeld.* Evenals wij dit voor het tweedimensionale geval gedaan hebben, zullen wij een voorbeeld volledig uitwerken. Ook nu kiezen wij het meest interessante voorbeeld, de spanning σ_y tengevolge van een evenwichtstelsel, gevormd door een normale definitie belasting met resultante P_y en een puntlast in de oorsprong ter grootte $-P_y$. Volgens (22, 5) en (25, 7) geldt voor deze belasting:

$$\sigma_y = -\frac{3}{2\pi} \frac{y^3}{R^5} (F_{15}' - 1) P_y \quad (1)$$

Hierin ligt F_{15}' tussen het minimum en het maximum van F_{15} voor $0 \leq \beta \leq a/R$. F_{15} is gedefinieerd door:

$$F_{15} = \frac{R^5}{3y^3} \int_0^\infty (1 + yt) J_0(rt) J_0(ut) e^{-yt} t dt \quad (2)$$

Wij hadden voor F_{15} al een ontwikkeling voor grote R , d.w.z. voor kleine β gevonden in (25, 5). Wat verder uitgewerkt voor numerieke doeleinden luidt deze ontwikkeling:

$$F_{15}(\beta, \varrho) = 1 - \frac{5}{4}(2 - 7\varrho^2)\beta^2 + \frac{5}{64}(56 - 40\varrho^2 + 593\varrho^4)\beta^4 + 0(\beta^6) \quad (3)$$

Verder kunnen wij eenvoudig F_{15} berekenen voor punten op de Y -as, d.w.z. voor punten, waarvoor $\varrho = 0$ is. Met behulp van (30, 2) en (30, 3) vinden wij dan:

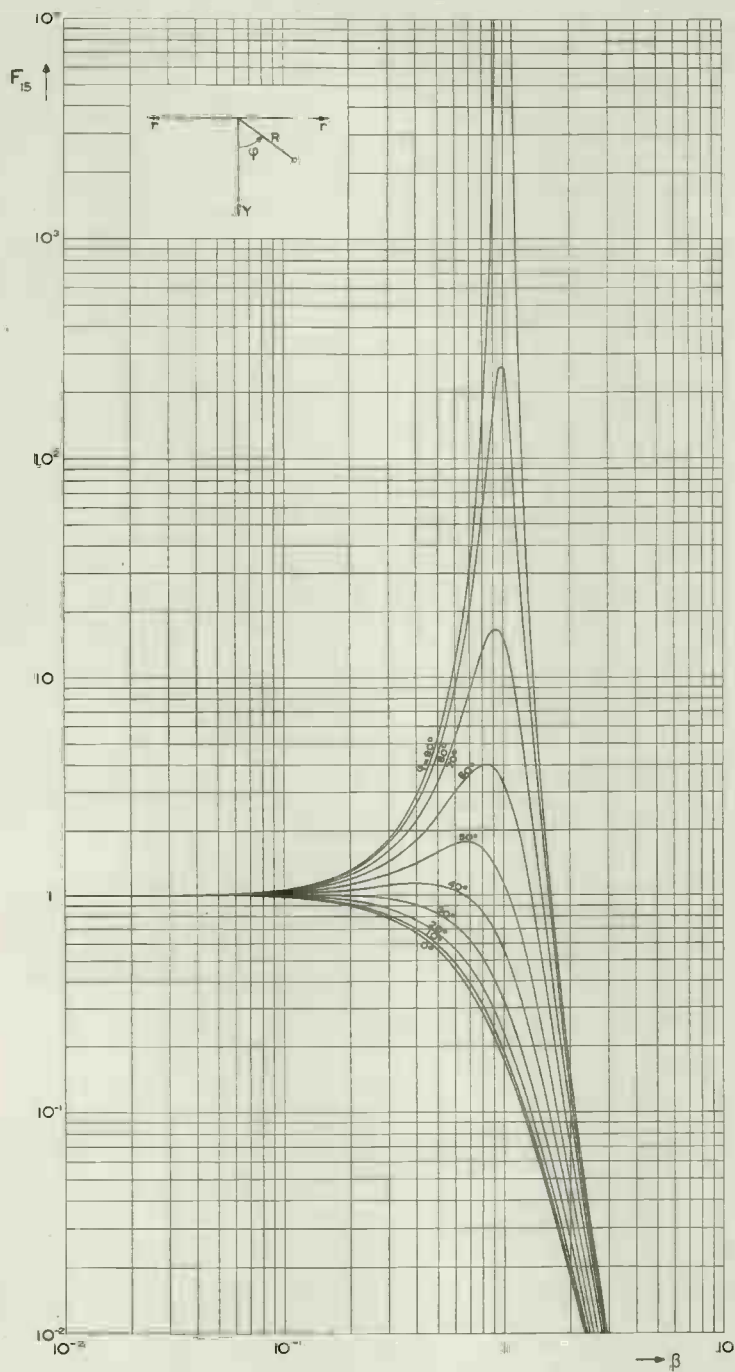
$$F_{15}(\beta, 0) = (1 + \beta^2)^{-5/2} \quad (4)$$

Voor het algemene geval is de berekening aanzienlijk ingewikkelder. Wij voeren daartoe in:

$$k = \frac{1 + \beta^2}{2\beta\varrho} - \sqrt{\left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta\varrho}\right)^2 - 1} \quad (5)$$

Verder worden gedefinieerd de volgende twee volledige elliptische integralen:

$$B(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi}{\Delta} d\varphi, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \Delta d\varphi \quad (\Delta \equiv \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}) \quad (6)$$

Fig. 7. De functie F_{15} .

Met het oog op (32,8) en (32,9) kan F_{15} dingeschreven worden in de vorm:

$$F_{15} = \frac{2}{3\pi} (\beta\varrho)^{-5/2} \frac{k^{5/2}}{(1-k^2)^4} \{ (3+5k^2)E(k) + (5+3k^2)k^2 B(k) \} \quad (7)$$

Men kan hieruit de speciale formules (3) en (4) weer terugvinden, zij het met meer rekenwerk.

Wanneer wij (7) bezien, valt het op, dat F_{15} gesplitst kan worden

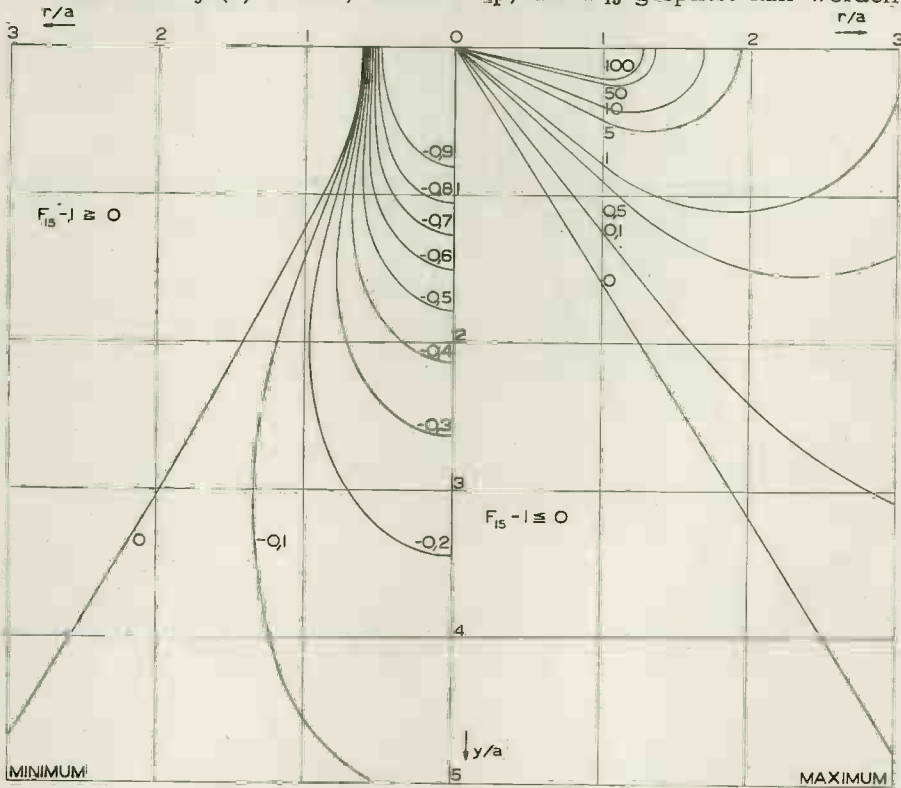


Fig. 8. De grenzen van $F_{15} - 1$.

in een factor, die afhangt van het product $\beta\varrho$ en één, die een functie van k is. Stellen wij immers:

$$\left. \begin{aligned} F_{150}(k) &= \frac{2}{3\pi} \frac{k^{5/2}}{(1-k^2)^4} \{ (3+5k^2)E(k) + (5+3k^2)k^2 B(k) \} \\ F_{151}(k) &= (\beta\varrho)^{-5/2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

dan kan $F_{15}(\beta, \varrho)$ blijkbaar geschreven worden als:

$$F_{15}(\beta, \varrho) = F_{150}(k) F_{151}(\beta\varrho) \quad (9)$$

Aangezien de elliptische integralen B en E getabelleerd zijn, kunnen de functies $F_{150}(k)$ en $F_{151}(\beta\varrho)$ berekend worden. Wij kiezen nu een aantal waarden van $\varphi = \arcsin \varrho$ en β . Hiervoor berekenen wij k en $\beta\varrho$ en kunnen dan F_{15} berekenen. F_{15} is uitgezet in fig. 7. Deze figuur

vertoont in hoofdtrekken hetzelfde karakter als fig. 4. De bespreking er van blijft ook nagenoeg ongewijzigd. Ook nu treedt er een kritische waarde van φ op : φ_c , waarbij het maximum van F_{15} samenvalt met het minimum voor $\beta = 0$. Uit de ontwikkeling (3) kunnen wij aflezen, dat dit plaats heeft voor $\rho_c^2 = 2/7$, hetgeen overeenkomt met een hoek $\varphi_c = 32^\circ 18' 40''$.

In fig. 8 zijn de grenzen van $F_{15} - 1$ uitgezet als functie van r/a

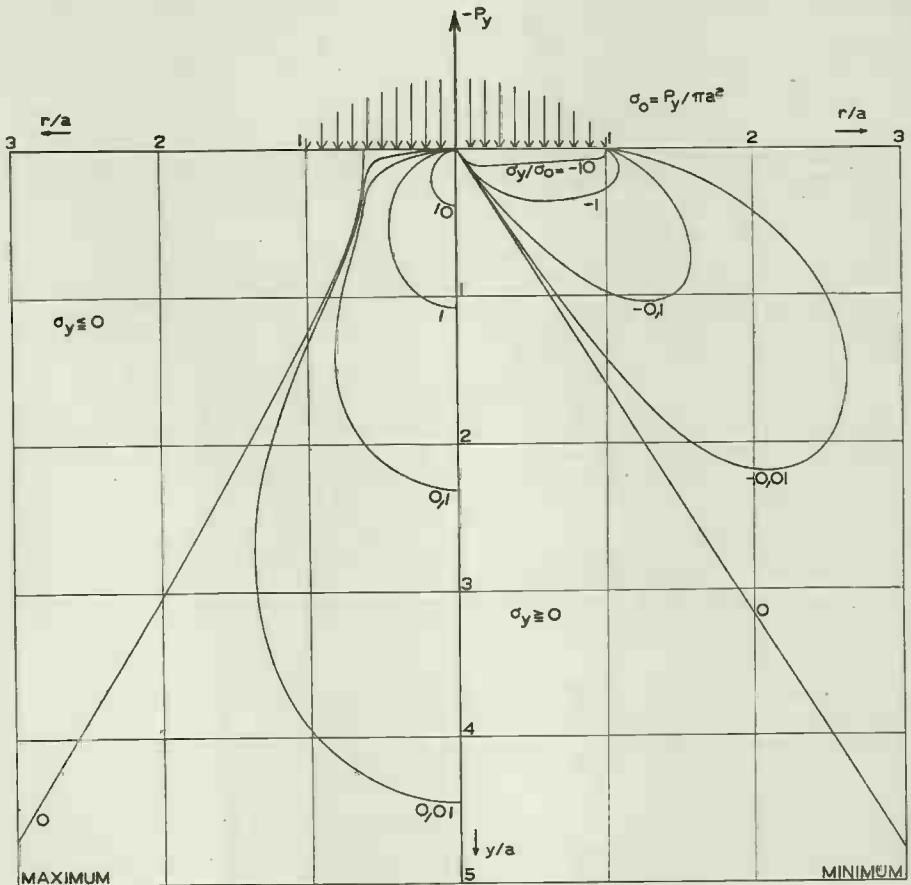


Fig. 9. De grenzen van σ_y tengevolge van een evenwichtstelsel, gevormd door een rotatorisch symmetrische, normale en definitie belasting en het tegengestelde van haar resultante.

- en y/a . Ook nu is er een gebied, waar $F_{15} - 1$ niet positief, en een gebied, waar $F_{15} - 1$ niet negatief kan zijn.

Vermenigvuldigen wij tenslotte de gevonden grenzen van $F_{15} - 1$ met $-\frac{3}{2} \frac{(y/a)^3}{(R/a)^5} \sigma_0$, waarin $\sigma_0 = P_y/\pi a^2$ de spanningseenheid is, nl. de spanning ter plaatse van het belastingsgebied verwekt door een gelijkmatige belasting met resultante P_y , dan hebben wij volgens (1) de grenzen

van de σ_y tengevolge van het beschouwde evenwichtstelsel gekregen. In fig. 9 zijn deze grenzen aangegeven.

Voor punten gelegen buiten deze figuur kunnen wij weer gebruik maken van een vereenvoudigde berekening, gebaseerd op de eerste twee termen van de reeksontwikkeling voor F_{15} in (3). Wij vinden dan:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_0} = 0 \text{ à } \frac{15 \cos^3 \varphi (2 - 7 \sin^2 \varphi)}{8 (R/a)^4} \quad (10)$$

Hieruit volgt, hoe groot R/a moet zijn, opdat σ_y/σ_0 een voorgescreven kleine waarde niet overschrijdt. Het absolute maximum $(R/a)_m$ van deze R/a als functie van φ treedt op voor $\varphi \equiv 0$ en voldoet aan:

$$(R/a)_m = \sqrt[4]{\frac{15 \sigma_0}{4 \sigma_y}} \quad (11)$$

Hieruit volgt voor $\sigma_y/\sigma_0 = 0,01$ een waarde $(R/a)_m = 4,4$; voor $\sigma_y/\sigma_0 = 0,001$ een waarde $(R/a)_m = 7,8$. Men vergelijkte deze uitkomsten met de volkomen analoge resultaten, welke gegeven zijn in nr. 18.

§ 3. Bepaalde integralen, die een rol in het voorgaande spelen.

29. *Integralen met een goniometrische en exponentiele factor in de integrand.* Integralen met een goniometrische en een exponentiele factor in de integrand kunnen direct elementair opgelost worden. Zo vinden wij dus (in het volgende is y positief; $r^2 = x^2 + y^2$):

$$\int_0^{\infty} \sin xt e^{-yt} dt = \frac{x}{r^2} \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} \cos xt e^{-yt} dt = \frac{y}{r^2} \quad (2)$$

Komt er in de integrand nog een positieve macht van t voor, dan kan de integraal het gemakkelijkst gevonden worden door differentiatie van (1) en (2) naar y onder het integraalteken. Zo vinden wij:

$$\int_0^{\infty} \sin xt e^{-yt} t dt = \frac{2xy}{r^4} \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} \cos xt e^{-yt} t dt = \frac{-x^2 + y^2}{r^4} \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} \sin xt e^{-yt} t^2 dt = \frac{2x(-x^2 + 3y^2)}{r^6} \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \cos xt e^{-yt} t^2 dt = \frac{2y(-3x^2 + y^2)}{r^6} \quad (6)$$

De integraal (1) laat ook éénmaal integratie naar y toe. Door hiervan gebruik te maken vinden wij:

$$\int_0^{\infty} \sin xt e^{-yt} \frac{1}{t} dt = \arctg \frac{x}{y} = \varphi \quad (7)$$

Komen er in de integrand meerdere goniometrische functies voor in de vorm van een product, dan kan dit product met de bekende goniometrische formules in een som van enige goniometrische functies worden omgezet en daarmee de integraal herleid worden tot de zojuist behandelde typen. Schrijven wij weer ter afkorting:

$$r'^2 = (x + a)^2 + y^2 \quad r''^2 = (x - a)^2 + y^2,$$

$$\varphi' = \arctg \frac{x + a}{y} \quad \text{en} \quad \varphi'' = \arctg \frac{x - a}{y},$$

dan vinden wij voor de voor ons in aanmerking komende integralen:

$$\int_0^{\infty} \sin at \sin xt e^{-yt} dt = \frac{2axy}{r'^2 r''^2} \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \sin at \cos xt e^{-yt} dt = \frac{a(-x^2 + y^2 + a^2)}{r'^2 r''^2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \cos at \sin xt e^{-yt} dt = \frac{x(r^2 - a^2)}{r'^2 r''^2} \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} \cos at \cos xt e^{-yt} dt = \frac{y(r^2 + a^2)}{r'^2 r''^2} \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \sin at \sin xt e^{-yt} t dt = \frac{2ax\{(r^2 + a^2)(-x^2 + 3y^2 - a^2) + 4a^2x^2\}}{r'^4 r''^4} \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \sin at \cos xt e^{-yt} t dt = \frac{2ay\{(r^2 + a^2)(-3x^2 + y^2 + a^2) + 4a^2x^2\}}{r'^4 r''^4} \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} \cos at \sin xt e^{-yt} t dt = \frac{2xy\{(r^2 + a^2)(r^2 - 3a^2) + 4a^2x^2\}}{r'^4 r''^4} \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \cos at \cos xt e^{-yt} t dt = \frac{(r^2 + a^2)^2(-x^2 + y^2 - a^2) + 4a^2x^2(x^2 + 3y^2 + a^2)}{r'^4 r''^4} \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \sin at \sin xt e^{-yt} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln r' - \frac{1}{2} \ln r'' \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \sin at \cos xt e^{-yt} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi'' \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} \cos at \sin xt e^{-yt} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \varphi' + \frac{1}{2} \varphi'' \quad (18)$$

Komt in de integrand een factor $(1 - \cos at)/t$ voor, dan kan deze factor alleen gesplitst worden, indien in de integrand een factor als bijv. $\sin xt$ voorkomt, omdat wij anders divergente integralen zouden krijgen. Door $1 - \cos at$ te vervangen door $2 \sin^2 at/2$ wordt dit verholpen. Zo vinden wij:

$$\int_0^{\infty} (1 - \cos at) \cos xt e^{-yt} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln r' + \frac{1}{2} \ln r'' - \ln r \quad (19)$$

30. *Integralen met één Besselfunctie in de integrand.* Wij behandelen nu integralen met een Besselfunctie in de integrand. Bekend is de volgende integraal, de zg. integraal van LIPSCHITZ (in het volgende is y positief of nul, indien de integraal dan nog convergeert; $R^2 = r^2 + y^2$):

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) e^{-yt} dt = \frac{1}{R} \quad (1)$$

Door naar y te differentieren onder het integraalteken leiden wij hieruit de volgende integralen af, waarin nog een macht van t voorkomt:

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) e^{-yt} t dt = \frac{y}{R^3} \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) e^{-yt} t^2 dt = \frac{2y^2 - r^2}{R^5} \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) e^{-yt} t^3 dt = \frac{3y(2y^2 - 3r^2)}{R^7} \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) e^{-yt} t^4 dt = \frac{3(8y^4 - 24y^2r^2 + 3r^4)}{R^9} \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) e^{-yt} t^5 dt = \frac{15y(8y^4 - 40y^2r^2 + 15r^4)}{R^{11}} \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) e^{-yt} t^6 dt = \frac{45(16y^6 - 120y^4r^2 + 90y^2r^4 - 5r^6)}{R^{13}} \quad (7)$$

Wij kunnen ook eerst naar r differentieren. Met het oog op (20, 5) vinden wij dan een integraal, waarin de factor $J_0(rt)$ vervangen is door $J_1(rt)$ en de macht van t met één verhoogd is. Passen wij dit toe op (1), dan vinden wij dus een integraal met een factor t in de integrand. Integratie naar y (tweemaal toelaatbaar) doet deze factor verdwijnen en differentiatie naar y geeft weer een verhoging van de macht van t . Op deze wijze vinden wij:

$$\int_0^{\infty} J_1(rt) e^{-yt} dt = \frac{R - y}{rR} \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(rt) e^{-yt} t dt = \frac{r}{R^3} \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(rt) e^{-yt} t^2 dt = \frac{3yr}{R^5} \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(rt) e^{-yt} t^3 dt = \frac{3r(4y^2 - r^2)}{R^7} \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(rt) e^{-yt} t^4 dt = \frac{15ry(4y^2 - 3r^2)}{R^9} \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(rt) e^{-yt} t^5 dt = \frac{45r(8y^4 - 12y^2r^2 + r^4)}{R^{11}} \quad (13)$$

Door gebruik te maken van de relatie:

$$J_2(rt) = \frac{2}{rt} J_1(rt) - J_0(rt) \quad (14)$$

en door naar y te integreren of te differentieren, vinden wij de volgende integralen:

$$\int_0^{\infty} J_2(rt) e^{-yt} dt = \frac{R-y}{R(R+y)} \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} J_2(rt) e^{-yt} t dt = \frac{(R-y)(2R+y)}{R^3(R+y)} \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} J_2(rt) e^{-yt} t^2 dt = \frac{3r^2}{R^5} \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} J_2(rt) e^{-yt} t^3 dt = \frac{15r^2y}{R^7} \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} J_2(rt) e^{-yt} t^4 dt = \frac{15r^2(6y^2 - r^2)}{R^9} \quad (19)$$

31. *Integralen met twee Besselfuncties in de integrand.* Vervolgens behandelen wij integralen met in de integrand het product van twee Besselfuncties. Wij zullen uitgaan van de volgende integraal:

$$I = \int_0^{\infty} J_0(at) J_0(bt) e^{-t} dt \quad (1)$$

Wij kunnen zonder ons te beperken a en b positief onderstellen. Wij maken gebruik van de volgende integraalvoorstelling van Hansen:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix \cos \alpha} d\alpha \quad (2)$$

Hierdoor gaat (1) over in:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-t} dt \int_0^{\pi} e^{iat \cos \alpha} d\alpha \int_0^{\pi} e^{ibt \cos \beta} d\beta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{\infty} e^{(-1+ia \cos \alpha + ib \cos \beta)t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta \frac{1}{1 - ia \cos \alpha - ib \cos \beta} \end{aligned} \quad (3)$$

Door de substitutie $u = \operatorname{tg} \beta/2$ is de laatste integraal zonder moeite te berekenen en wij vinden:

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(1 - ia \cos \alpha)^2 + b^2}} \quad (4)$$

Dit gaat door de substitutie $v = \cos \alpha$ over in:

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{1+b^2-2ia v - a^2 v^2}} \quad (5)$$

Wij trachten deze integraal te herleiden tot de volledige elliptische integraal van de eerste soort:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2} \sqrt{1-k^2 w^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 \leq k < 1) \quad (6)$$

Daartoe voeren wij de substitutie $v = (\gamma + \delta w)/(1 + \varepsilon w)$ uit. Zoals men gemakkelijk narekent, wordt het gestelde doel bereikt, indien gesteld wordt:

$$\gamma \delta = \varepsilon \quad \gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2 = 1 \quad \gamma \varepsilon + \delta = -2i f \varepsilon \quad (7)$$

Hierin is $f = (1 - a^2 + b^2)/2a$. Voeren wij dan nog ter afkorting in $g = -f + \sqrt{f^2 + 1}$, dan blijkt

$$\gamma = \varepsilon = i g \quad \delta = 1 \quad (8)$$

een oplossing van (7) te zijn.

De grenzen van de integraal blijven bij deze substitutie onveranderd. Wij voeren de substitutie uit en vinden, dat met

$$k = \frac{1 + a^2 + b^2}{2ab} - \sqrt{\left(\frac{1 + a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 - 1} \quad (9)$$

I geschreven kan worden in de vorm:

$$I = \int_0^\infty J_0(at) J_0(bt) e^{-t} dt = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{ab}} K(k) \quad (10)$$

Dat k werkelijk tussen 0 en 1 ligt, blijkt als volgt: Uit de relatie $2ab \leq a^2 + b^2 < a^2 + b^2 + 1$ volgt, dat de wortel reëel is en dus k reëel > 0 . Stellen wij even ter afkorting $m = (1 + a^2 + b^2)/2ab$, dan geeft quadratering van (9): $2m^2 - 1 - 2m\sqrt{m^2 - 1} = k^2$ of na omwerking: $\sqrt{m^2 - 1}(\sqrt{m^2 - 1} - m) = (k^2 - 1)/2$. Omdat $\sqrt{m^2 - 1} - m < 0$ is, is $k < 1$. Dus geldt $0 < k < 1$.

Hiermede is de integraal (1) dus herleid tot een bekende getabelde functie.

32. *Vervolg.* Wij geven aan de integraal (31, I) een kleine uitbreiding door in de exponent een (positieve) factor y toe te voegen. Verder vervangen wij om in overeenstemming met onze vroegere notaties te komen a door r en b door u . Is weer $\varrho = r/R$ en $\beta = u/R$ en is

$$k = \frac{R^2 + u^2}{2ru} - \sqrt{\left(\frac{R^2 + u^2}{2ru}\right)^2 - 1} = \frac{1 + \beta^2}{2\beta\varrho} - \sqrt{\left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta\varrho}\right)^2 - 1} \quad (1)$$

dan volgt na enige omwerking uit (31, 10):

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) J_0(ut) e^{-yt} dt = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{ru}} K(k) \quad (2)$$

Uit (1) volgt op analoge wijze als in het vorige nummer, dat $0 < k < 1$ is. Laten wij voor y ook de waarde 0 toe, dan blijft volgens (2) de integraal convergent, mits $r \neq u$. Is daarentegen $r = u$, dan wordt $k = 1$ en de integraal divergeert.

Uit (2) kunnen wij weer integralen afleiden, die in de integrand nog een positieve, gehele macht van t bevatten, en wel door naar y te differentieren. Door differentiatie naar r daarentegen kunnen wij de factor $J_0(rt)$ vervangen door $J_1(rt)$ en evenzo verandert differentiatie naar u de factor $J_0(ut)$ in $J_1(ut)$. Door dit proces wordt overigens ook een factor t in de integrand gebracht, die wij desgewenst door integratie naar y kunnen verwijderen. In het algemeen kan weer door differentiatie of integratie naar y een willekeurige macht van t in de integrand gebracht worden, natuurlijk onder de beperking, dat de integraal convergeert. Door gebruik te maken van de betrekking (30, 14) kunnen uit de nu gevonden integralen andere worden afgeleid, waarbij de Besselfuncties van de nulde en eerste orde geheel of gedeeltelijk vervangen zijn door die van de tweede orde.

Voor het differentieren naar y , r of u moeten wij eerst de afgeleiden van k naar die parameters bepalen. Het rekenwerk is in het algemeen tamelijk ingewikkeld. Wij zullen ons daarom hier beperken tot het afleiden van die integralen, welke wij nodig hadden in (28, 2). Wij moeten (2) dus twee maal naar y differentieren.

Stellen wij ter afkorting $m = (R^2 + u^2)/2ru$, dan is blijkbaar $k = m - \sqrt{m^2 - 1}$. Omgekeerd is $\sqrt{m^2 - 1} = (1 - k^2)/2k$. Derhalve is $dk/dm = -k/\sqrt{m^2 - 1} = -2k^2/(1 - k^2)$. Anderzijds is $\partial m/\partial y = y/ru$, zodat wij vinden:

$$\frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{2yk^2}{ru(1 - k^2)} \quad (3)$$

Vervolgens definiëren wij de volledige elliptische integralen:

$$B(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta} d\varphi \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta d\varphi \quad (\Delta \equiv \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}) \quad (4)$$

Tussen de integralen $K(k)$, $B(k)$ en $E(k)$ bestaat het volgende verband, dat eenvoudig nagerekend kan worden:

$$(1 - k^2) K(k) + k^2 B(k) = E(k) \quad (5)$$

Aan de theorie van de elliptische integralen ontleen wij tenslotte de volgende twee differentiaalrelaties:

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{k B(k)}{1 - k^2} \quad (6)$$

$$\frac{d\{E(k) + k^2 B(k)\}}{dk} = k B(k) \quad (7)$$

Na deze voorbereidingen kunnen wij overgaan tot het differentieren van (2). Met behulp van (3), (5) en (6) vinden wij:

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) J_0(ut) e^{-yt} t dt = \frac{2}{\pi} (ru)^{-3/2} \frac{yk^{3/2}}{(1-k^2)^2} \{E(k) + k^2 B(k)\} \quad (8)$$

Hieruit vinden wij met behulp van (3) en (7):

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) J_0(ut) e^{-yt} t^2 dt = \frac{2}{\pi} (ru)^{-3/2} \left[-\frac{k^{3/2}}{(1-k^2)^2} \{E(k) + k^2 B(k)\} + \frac{1}{ru} \frac{y^2 k^{5/2}}{(1-k^2)^4} \{(3+5k^2)E(k) + (5+3k^2)k^2 B(k)\} \right] \quad (9)$$

De integralen (8) en (9) zijn de integralen, die benodigd waren voor de berekening van F_{15} , zie (28, 2) en (28, 7).

33. *Vervolg.* De functies F_{13} tot en met F_{22} zijn alle gedefinieerd door integralen met twee Besselfuncties in de integrand. In het voorgaande nummer hebben wij aangetoond, hoe deze integralen teruggevoerd kunnen worden tot volledige elliptische integralen en dus met recht als bekend mogen worden beschouwd. De integralen, welke nodig zijn ter berekening van F_{15} hebben wij inderdaad uitgerekend. Het benodigde rekenwerk is echter groot en het loont nauwelijks de moeite voor alle functies de benodigde integralen te transformeren. Het gedrag van de functies voor grote waarden van R , d.w.z. voor kleine waarden van β boezemt ons echter wel belang in. Vandaar, dat wij voor alle functies reeksontwikkelingen naar β hebben gegeven. Wij laten nu de berekening hiervan volgen.

Wensen wij voor de genoemde integralen een ontwikkeling voor kleine β , dan ontwikkelen wij doelmatig die Besselfunctie in de integrand, welke ut tot argument heeft in een reeks:

$$\left. \begin{aligned} J_0(ut) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! k!} \left(\frac{ut}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{(ut)^2}{4} + \frac{(ut)^4}{64} - \dots \\ J_1(ut) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+1)!} \left(\frac{ut}{2}\right)^{2k+1} = \frac{ut}{2} - \frac{(ut)^3}{16} + \frac{(ut)^5}{384} - \dots \\ J_2(ut) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+2)!} \left(\frac{ut}{2}\right)^{2k+2} = \frac{(ut)^2}{8} - \frac{(ut)^4}{96} + \frac{(ut)^6}{3072} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hierdoor gaat de integraal over in een reeks van integralen van het type, waarvan wij een aantal getabelleerd hebben in nr. 30. Zo vinden wij:

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) J_0(ut) e^{-yt} dt = \frac{1}{R} \{1 - {}^{1/4}(2 - 3e^2)\beta^2 + 0(\beta^4)\} \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(rt) J_0(ut) e^{-yt} t dt = \frac{1}{R^2} \{\sqrt{1-e^2} - {}^{3/4}(2 - 5e^2)\sqrt{1-e^2}\beta^2 + 0(\beta^4)\} \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\tau t) J_0(ut) e^{-\gamma t} t^2 dt = \frac{1}{R^3} \{ (2 - 3e^2) - \frac{3}{4}(8 - 40e^2 + 35e^4)\beta^2 + 0(\beta^4) \} \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\tau t) J_1(ut) e^{-\gamma t} dt = \frac{1}{R} \{ \frac{1}{2}\sqrt{1 - e^2}\beta - \frac{3}{16}(2 - 5e^2)\sqrt{1 - e^2}\beta^3 + 0(\beta^5) \} \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\tau t) J_1(ut) e^{-\gamma t} t dt = \frac{1}{R^2} \{ \frac{1}{2}(2 - 3e^2)\beta - \frac{3}{16}(8 - 40e^2 + 35e^4)\beta^3 + 0(\beta^5) \} \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\tau t) J_1(ut) e^{-\gamma t} t^2 dt = \frac{1}{R^3} \{ \frac{3}{2}(2 - 5e^2)\sqrt{1 - e^2}\beta - \frac{45}{16}(8 - 56e^2 + 63e^4)\sqrt{1 - e^2}\beta^3 + 0(\beta^5) \} \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(\tau t) J_1(ut) e^{-\gamma t} dt = \frac{1}{R} \{ \frac{1}{2}e\beta - \frac{3}{16}(4 - 5e^2)\beta^3 + 0(\beta^5) \} \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(\tau t) J_1(ut) e^{-\gamma t} t dt = \frac{1}{R^2} \{ \frac{3}{2}e\sqrt{1 - e^2}\beta - \frac{15}{16}(4 - 7e^2)\sqrt{1 - e^2}\beta^3 + 0(\beta^5) \} \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(\tau t) J_1(ut) e^{-\gamma t} t^2 dt = \frac{1}{R^3} \{ \frac{3}{2}e(4 - 5e^2)\beta - \frac{45}{16}e(8 - 28e^2 + 21e^4)\beta^3 + 0(\beta^5) \} \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} J_2(\tau t) J_1(ut) e^{-\gamma t} t dt = \frac{1}{R^2} \{ \frac{3}{2}e^2\beta - \frac{15}{16}e^2(6 - 7e^2)\beta^3 + 0(\beta^5) \} \quad (11)$$

Wij kunnen deze ontwikkelingen ook afleiden uit de exacte uitdrukkingen van de integralen. Bezien wij bijv. de integraal in (32, 2), dat is dezelfde als in (2). Wij ontwikkelen daartoe eerst k uit (32, 1) naar β :

$$\sqrt{k} = \{ 1 - \frac{1}{2}(1 - e^2)\beta^2 \dots \} \sqrt{\beta e} \quad (12)$$

Uit (31, 6) leidt men gemakkelijk de ontwikkeling van $K(k)$ naar k af:

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \varphi \dots \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} (1 + \frac{1}{4}k^2 \dots) \quad (13) \end{aligned}$$

Uit (12) zien wij, dat k met β klein is. Substitutie van (12) en (13) in (32, 2) levert ons dan inderdaad de ontwikkeling (2). Om meerdere termen te berekenen gebruikt men echter gemakkelijker de vorige methode.

HOOFDSTUK II.

DE TORSIE VAN CYLINDRISCHĒ STAVEN.

§ 1. De torsie van een cilindrische staaf met een door twee elkander snijdende cirkelbogen begrensde doorsnede.

1. *Inleiding.* Wij willen ons bezighouden met de op wringing belaste cylinder, waarvan de doorsnede begrensd wordt door twee cirkelbogen. De vorm van de doorsnede kan, afhankelijk van de onderlinge ligging van beide cirkels, sterk uiteen lopen. In de eerste plaats kunnen de cirkels elkander al of niet in reële punten snijden. Is dit wel het geval, dan hebben wij te maken met een enkelvoudig samenhangende

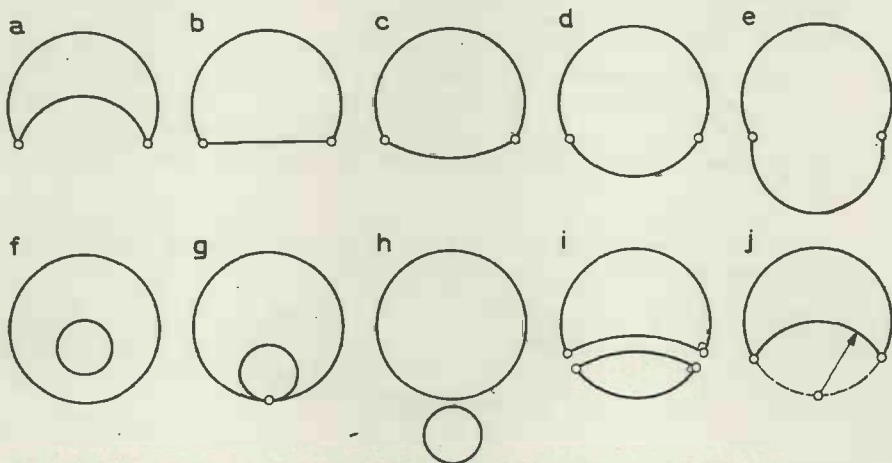


Fig. 10. Door twee cirkelbogen begrensde doorsneden.

doorsnede, waarvan wij vijf vormen zullen onderscheiden. Liggen beide cirkelbogen aan dezelfde kant van de verbindingslijn van de hoekpunten van de figuur (fig. 10, a), dan noemen wij de doorsnede een sikkel. Is een van beide bogen de verbindingslijn zelf (fig. 10, b), dan hebben wij blijkbaar te maken met een segment. Liggen de beide bogen aan verschillende zijden van de verbindingslijn, dan maken wij nog een onderscheiding naar de hoek tussen de bogen in de snijpunten. Is deze hoek kleiner dan een gestrekte hoek (fig. 10, c), dan noemen wij de doorsnede een lens. Is de hoek gelijk aan een gestrekte hoek, dan is de doorsnede blijkbaar een volledige cirkel (fig. 10, d). Is de hoek inspringend (fig. 10, e), dan spreken wij van een peer. Men ziet, dat grensgevallen van de sikkels,

resp. peren gevormd worden door inwendig, resp. uitwendig rakende cirkels. Snijden de cirkels elkander niet in reële punten, dan bestaat de doorsnede uit het gebied tussen twee cirkels, waarvan de een geheel om de ander is gelegen (fig. 10, f), zodat wij te maken hebben met een meervoudig samenhangende doorsnede, of uit het gebied binnen twee cirkels, welke geheel buiten elkander liggen (fig. 10, h), zodat de doorsnede dan bestaat uit twee zelfstandige delen. Grensgevallen zijn ook nu weer doorsneden, begrensd door twee inwendig of uitwendig rakende cirkels. Terwijl bij de uitwendig rakende cirkels geen verschil valt te verwachten (afgezien van een plaatselijke singulariteit in het raakpunt) al naar gelang wij de doorsnede benaderen van de zijde der peren uit dan wel van de zijde der twee zelfstandige cirkels uit, is zulks wel het geval bij de doorsnede, begrensd door twee inwendig rakende cirkels (fig. 10, g).

Zien wij af van de triviale gevallen van de volledige cirkel, de buiten elkander gelegen cirkels en de uitwendig rakende cirkels, dan zijn de volgende gevallen uit de litteratuur bekend:

- 1^o. Sikkels en lenzen, waarbij de begrenzende bogen elkander onder een rechte hoek snijden (fig. 10, i)¹⁾. Er worden gesloten uitdrukkingen gegeven.
- 2^o. Sikkels, waarbij het middelpunt van een van beide bogen gelegen is op de cirkel, waarvan de andere boog deel uitmaakt (fig. 10, j)²⁾. Er worden gesloten uitdrukkingen gegeven.
- 3^o. Segmenten (fig. 10, b)³⁾. De interesserende grootheden verschijnen als bepaalde integralen, welke niet in gesloten vorm gebracht worden.
- 4^o. Doorsneden, begrensd door twee cirkels, waarvan de een geheel binnen de andere is gelegen (fig. 10, f)⁴⁾. De oplossing wordt in de vorm van een reeksontwikkeling gegeven.

Blijkbaar behoeven wij ons slechts bezig te houden met het geval, dat de cirkels elkander snijden, hetgeen wij in deze paragraaf zullen doen, en het geval, dat zij elkander inwendig raken, hetgeen het onderwerp van de volgende paragraaf uitmaakt.

2. *Probleemstelling.* Wij kiezen de Z -as van een rechthoekig assenstelsel in de richting van de beschrijvende van de cylinder. Verder leggen wij de hoekpunten van de doorsnede op de X -as symmetrisch ten opzichte van de oorsprong (fig. 11). Is de afstand der hoekpunten $2c$, dan zijn de hoekpunten dus $P(c, 0)$ en $Q(-c, 0)$. De hoeken tussen de

¹⁾ T. H. GRONWALL, Trans. Amer. Math. Soc., 20, 234—244 (1919).
W. M. SHEPHERD, Proc. Roy. Soc. London, A 138, 607—634 (1932).
I. S. en E. S. SOKOLNIKOFF, Bull. Amer. Math. Soc., 44, 384—387 (1938).
L. A. WIGGLESWORTH en A. C. STEVENSON, Proc. Roy. Soc. London, A 170, 391—414 (1939).

²⁾ C. WEBER, Forsch. Arb. Ing. Wes., H 249 (1921).

³⁾ T. ISHIBASHI, Journ. Soc. Mech. Eng. Japan, 36, 188—194 (1933).

⁴⁾ H. M. MACDONALD, Camb. Phil. Soc. Proc., 8, 62—68 (1893).
E. WEINEL, Ing. Arch., 3, 67—75 (1932).

positieve X -as en de raaklijnen aan de cirkelbogen in P , gerekend in dezelfde richting als de boog, waaraan zij raken, noemen wij a en a' . De stralen der cirkels noemen wij a en a' . De doorsnede is geheel bepaald door a , a en a' , tenzij $a = a' = 0$ (inwendig rakende cirkels) of $a = 0$, $a' = 2\pi$ (uitwendig rakende cirkels), in welke gevallen wij de doorsnede definiëren door a en a' te geven.

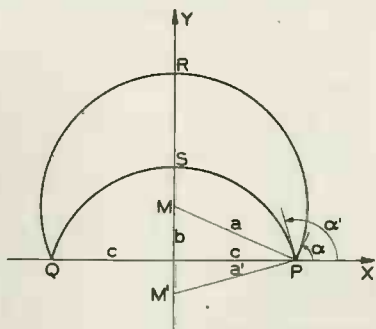


Fig. 11. De doorsnede in het xy -vlak.

Aangezien wij nog kiezen kunnen aan welke van beide bogen wij de grootheden zonder en aan welke die met accenten zullen toekennen, kunnen wij alle doorsneden beschrijven met $a < a' \leq 2\pi - a$. In fig. 12 is een overzicht gegeven van de verschillende vormen, die de doorsnede aanneemt als functie van a en a' .

De cylinder wordt gewrongen door een wringmoment M_w . Zoals

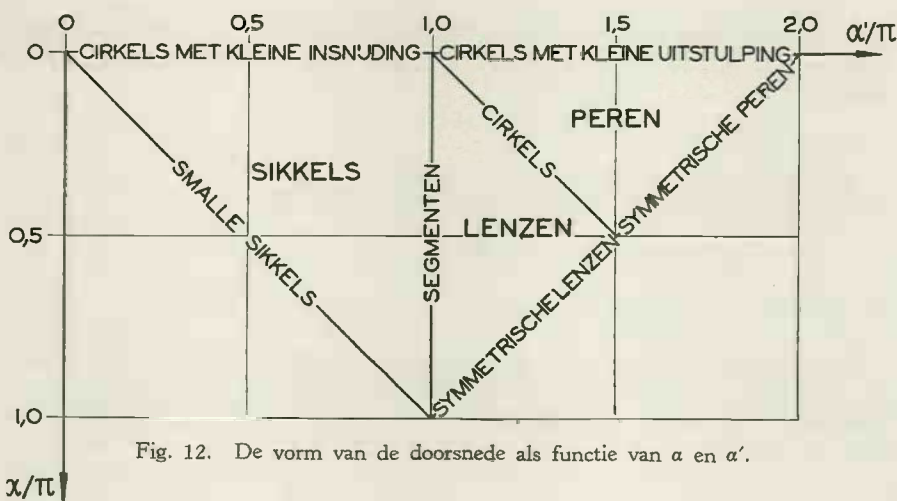


Fig. 12. De vorm van de doorsnede als functie van a en a' .

bekend, treden in de cylinder dan alleen schuifspanningen τ_{zx} en τ_{zy} op. De vervorming zij gegeven door de specifieke wringingshoek ω .

Het maximum van de schuifspanning geven wij aan met τ_{\max} . Wij definiëren als maat voor de sterkte tegen torsie het zg. weerstandsmoment W_w door de volgende vergelijking:

$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{W_w} \quad (1)$$

Verder voeren wij in het schijnbaar polair traagheidsmoment I_w , dat samen met de glijdingsmodulus G van het (isotrope en aan de wet van

HOOKE gehoorzamende) materiaal een maat is voor de stijfheid tegen torsie, door de vergelijking:

$$\omega = \frac{M_w}{GI_w} \quad (2)$$

De grootheden W_w en I_w zijn meetkundige eigenschappen van de doorsnede. In het geval van een volledige cirkel geldt: $W_w = \frac{1}{2}\pi a^3$ en $I_w = \frac{1}{2}\pi a^4 = I_p$. Voor onze doorsneden definiëren wij daarom:

$$W_w = \lambda a^3 \quad I_w = \mu a^4 \quad (3)$$

De grootheden λ en μ zijn dimensieloos en functies van a en a' (van a'/a indien $a = a' = 0$ of $a = 0$, $a' = 2\pi$). Ons doel zal zijn deze functies te bepalen. Hierbij valt op te merken, dat in het geval van de peren de schuifspanning bij de inspringende hoekpunten oneindig hoog is, tenminste bij de door ons onderstelde geldigheid van de wet van HOOKE. De sterkte van de peren is dus nul. Bij de stijfheid treedt deze kwestie niet op. Bij de bepaling van de sterkte (λ) zullen wij de peren dus uitschakelen, terwijl wij bij de bepaling van de stijfheid (μ) de peren mee zullen beschouwen.

3. *De spanningsfunctie.* Zoals bekend, kunnen in ons geval de schuifspanningen op de volgende wijze afgeleid worden van een spanningsfunctie F :

$$\tau_{zz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (1)$$

waarin F voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$\Delta' F \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = -2G\omega \quad (2)$$

en de randvoorwaarde:

$$F = 0 \text{ op de omtrek van de doorsnede.} \quad (3)$$

Geven wij met n de uitwendig gerichte normaal van de omtrek aan, en met s de positieve omtreksrichting (draaiend van de positieve X -as naar de positieve Y -as), dan geldt voor de schuifspanning in een punt aan de omtrek:

$$\tau_{zs} = -\frac{\partial F}{\partial n} \quad (4)$$

Wij splitsen de functie F in twee functies F_1 en F_2 :

$$F = F_1 + F_2, \quad (5)$$

welke voldoen aan de differentiaalvergelijkingen:

$$\Delta' F_1 = 0, \quad \Delta' F_2 = -2G\omega \quad (6)$$

Hierdoor is dus voldaan aan (2). Nu kiezen wij verder F_2 zodanig, dat (zie fig. 11):

$$F_2 = 0 \text{ op boog } PRQ \quad (7)$$

Dan moet volgens (3) dus gelden:

$$F_1 = 0 \text{ op boog } PRQ, \quad F_1 = -F_2 \text{ op boog } QSP \quad (8)$$

Omdat $\alpha < \pi$ is, is $\angle PMS = \alpha$. Met de afkortingen $b = a \cos \alpha$ en $c = a \sin \alpha$ is de vergelijking van de cirkel (M, a) :

$$x^2 + y^2 - 2by - c^2 = 0 \quad (9)$$

Derhalve is een oplossing van (6) en (7):

$$F_2 = -\frac{1}{2}G\omega(x^2 + y^2 - 2by - c^2) \quad (10)$$

De opgave bestaat er dus in, een harmonische functie F_1 te bepalen, die nul is op boog PRQ en op boog QSP de tegengestelde waarden van F_2 aanneemt:

$$F_1 = \frac{1}{2}G\omega(x^2 + y^2 - 2by - c^2) \text{ op boog } QSP \quad (11)$$

4. *Conforme afbeelding van de doorsnede.* Om de randvoorwaarden (3, 8) en (3, 11) een eenvoudiger gedaante te geven zonder de differentiaalvergelijking (3, 6) ingewikkelder te maken, beelden wij de doorsnede op geschikte wijze conform af. Zoals bekend, is nl. de potentiaalvergelijking in twee variabelen bestand tegen conforme afbeelding. Het gaat er dus slechts om een afbeeldingsfunctie te vinden, waarbij de randvoorwaarden een zo eenvoudig mogelijke gedaante aannemen. Wij passen de volgende afbeeldingsfunctie toe:

$$x + iy = c \coth \frac{1}{2}(u - iv) \quad (1)$$

De reden, waarom wij $u - iv$ kiezen i.p.v. het meer voor de hand liggende $u + iv$ (hetgeen dus overeenkomt met een spiegeling van de figuur t.o.v. de U -as), is deze, dat wij daardoor, zoals zal blijken, de afbeelding zo nauwkeurig mogelijk aansluiten aan onze definitie van a .

Na uitwerking vinden wij:

$$x = c \frac{\sinh u}{\cosh u - \cos v}, \quad y = c \frac{\sin v}{\cosh u - \cos v} \quad (2)$$

en omgekeerd voor u en v :

$$\operatorname{tgh} u = \frac{2cx}{x^2 + y^2 + c^2}, \quad \operatorname{tg} v = \frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2} \quad (3)$$

De krommen $u = \text{constant}$ resp. $v = \text{constant}$ zijn dus:

$$x^2 + y^2 - 2c \coth u x + c^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2c \cot v y - c^2 = 0 \quad (4)$$

Dit zijn cirkels, die door de punten $P(c, 0)$ en $Q(-c, 0)$ gaan. Aangezien het verder conforme afbeeldingen zijn van twee onderling loodrechte stelsels rechten, stelt (4) twee orthogonale cirkelbundels voor met P en Q tot basispunten (fig. 13). Het middelpunt van de cirkelboog, waarvoor $v = v_0$ heeft tot coördinaten $(0, c \cot v_0)$. Blijkbaar is v_0 gelijk aan de bij P aangegeven hoek. Voor ons doel is het aangewezen v te laten lopen van 0 tot 2π ; u loopt van $-\infty$ tot ∞ . Vergelijken wij deze

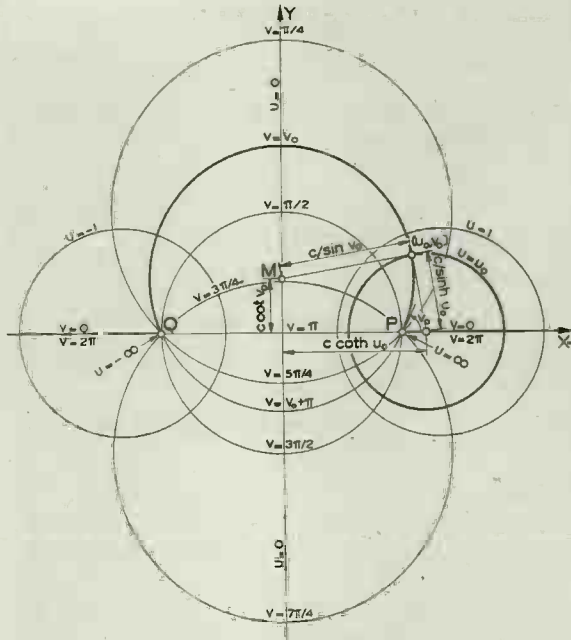


Fig. 13. De conforme afbeelding $x + iy = c \coth \frac{1}{2}(u - iv)$.

uitkomsten met fig. 11, dan zien wij, dat de bogen PRQ resp. QSP tot vergelijking hebben $v = a$ resp. $v = a'$. Wij beelden de doorsnede dus op het u, v vlak af als een strook begrensd door twee evenwijdige lijnen.

Uit (2) volgt na enig rekenen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{\partial y}{\partial v} = c \frac{1 - \cosh u \cos v}{(\cosh u - \cos v)^2} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\partial y}{\partial u} = -c \frac{\sinh u \sin v}{(\cosh u - \cos v)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Hieruit volgt voor de lengte van het lijnelement dl :

$$dl^2 = \frac{c^2}{(\cosh u - \cos v)^2} (du^2 + dv^2) \quad (6)$$

Een blik op fig. 11 en 13 leert, dat v afneemt resp. toeneemt, wanneer wij ons langs de buitenwaarts gerichte normaal van de boog PRQ resp. QSP bewegen. Derhalve is:

$$\left. \begin{aligned} v = a: \quad dn &= -\frac{c}{\cosh u - \cos a} dv \\ v = a': \quad dn &= \frac{c}{\cosh u - \cos a} dv \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Evenzo neemt u af resp. toe, als wij ons in de positieve omloopsrichting langs de boog PRQ resp. QSP bewegen. Derhalve is:

$$\left. \begin{aligned} v = a : ds &= -\frac{c}{\cosh u - \cos a} du \\ v = a' : ds &= \frac{c}{\cosh u - \cos a'} du \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Tenslotte vinden wij voor de functionaaldeterminant van de transformatie:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{c^2}{(\cosh u - \cos v)^2} \quad (9)$$

5. *Oplossing van het potentiaalvraagstuk.* Allereerst transformeren wij de functie F_2 op de nieuwe coördinaten u en v . Na enig gereken vinden wij uit (3, 10) en (4, 2):

$$F_2 = G\omega a^2 \sin a \frac{\sin(v - a)}{\cosh u - \cos v} \quad (1)$$

Daar de differentiaalvergelijking voor F_1 , zoals reeds werd vastgesteld, t.o.v. de transformatie (u, v) invariant is, geldt:

$$\Delta' F_1 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) F_1 = 0 \quad (2)$$

met de randvoorwaarden (verg. (3, 8) en (1)):

$$F_1(u, a) = 0, \quad F_1(u, a') = -G\omega a^2 \frac{\sin a \sin(a' - a)}{\cosh u - \cos a'} \quad (3)$$

Het tweede lid van de laatste vergelijking schrijven wij in de vorm van een Fourierintegraal door te stellen:

$$\frac{1}{\cosh u - \cos a'} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ut \, dt \int_0^\infty \frac{\cos ts \, ds}{\cosh s - \cos a'} \quad (4)$$

Door gebruik te maken van (25, 2), waarin wij stellen $\gamma = \pi - a'$, vinden wij dan:

$$\left. \begin{aligned} F_1(u, a) &= 0 \\ F_1(u, a') &= -G\omega a^2 \frac{2 \sin a \sin(a' - a)}{\sin a'} \int_0^\infty \frac{\sinh(\pi - a')t}{\sinh \pi t} \cos ut \, dt \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Nu is een oplossing van (2): $F_1 = \cos ut \sinh(v - v')t$, waarin t en v' van u en v onafhankelijke parameters voorstellen. Wij trachten aan (5) te voldoen door superpositie van deze oplossingen in de volgende integraalvorm:

$$F_1(u, v) = \int_0^\infty f(t) \sinh(v - a)t \cos ut \, dt \quad (6)$$

Dit voldoet dus aan (2) en aan de eerste van de randvoorwaarden (5).

De functie $f(t)$ moet zodanig gekozen worden, dat ook aan de tweede vergelijking (5) voldaan wordt. Blijkbaar moet gelden:

$$f(t) = -G\omega a^2 \frac{2 \sin a \sin(a' - a)}{\sin a'} \frac{\sinh(\pi - a')t}{\sinh \pi t \sinh(a' - a)t} \quad (7)$$

Substitueren wij dit in (6), dan volgt:

$$F_1 = -G\omega a^2 \frac{2 \sin a \sin(a' - a)}{\sin a'} \int_0^\infty \frac{\sinh(\pi - a')t \sinh(v - a)t}{\sinh \pi t \sinh(a' - a)t} \cos ut \, dt \quad (8)$$

Door (3, 5), (1) en (8) is de spanningsfunctie bepaald.

6. *Bepaling van de maximale schuifspanning.* Bij een willekeurige vorm van doorsnede zijn de schuifspanningen τ_{zx} en τ_{zy} harmonische functies met het oog op (3, 1), (3, 2) en de continuïteit. Wij kiezen de richting van de X-as in de richting van de maximale schuifspanning of, zo deze in meerdere punten optreedt, evenwijdig aan haar in een van deze punten. Dan is deze maximale schuifspanning zeker ook het maximum van τ_{zx} . Aangezien een harmonische functie volgens een bekende stelling uit de potentiaaltheorie haar extrema slechts aan de rand van het gebied kan bereiken (tenzij zij in het gehele gebied constant is, wat hier niet het geval kan zijn, omdat de resultante van alle spanningen in een bepaalde richting nul moet zijn), treedt de maximale schuifspanning op aan de rand van de doorsnede. Ter bepaling van τ_{\max} behoeven wij de schuifspanning dus slechts voor $v = a$ en $v = a'$ te onderzoeken.

Gelet op (3, 4) en (4, 7) is voor:

$$\left. \begin{aligned} v = a : \quad \tau_{zs} &= \frac{1}{c} (\operatorname{cosh} u - \cos a) \frac{\partial F}{\partial v} \\ v = a' : \quad \tau_{zs} &= -\frac{1}{c} (\cosh u - \cos a') \frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Uit (5, 1) en (5, 8) volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} &= G\omega a^2 \sin a \left\{ \frac{\cosh u \cos(v - a) - \cos a}{(\cosh u - \cos v)^2} - \right. \\ &= \frac{2 \sin(a' - a)}{\sin a'} \int_0^\infty \frac{\sinh(\pi - a')t \cosh(v - a)t}{\sinh \pi t \sinh(a' - a)t} \cos ut \, dt \left. \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

Hieruit volgt na enig omwerken:

$$\left. \begin{aligned} v = a : \quad \tau_{zs} &= G\omega a \left\{ 1 - 2 \frac{\sin(a' - a)}{\sin a'} (\cosh u - \cos a) \cdot \right. \\ &\quad \left. \int_0^\infty \frac{\sinh(\pi - a')t}{\sinh \pi t \sinh(a' - a)t} \cos ut \, dt \right\} \\ v = a' : \quad \tau_{zs} &= G\omega a \left\{ -\cos(a' - a) + \frac{\sin(a' - a) \sin a'}{\cosh u - \cos a'} + \right. \\ &= 2 \frac{\sin(a' - a)}{\sin a'} (\cosh u - \cos a') \int_0^\infty \frac{\sinh(\pi - a')t \cosh(a' - a)t}{\sinh \pi t \sinh(a' - a)t} \cos ut \, dt \left. \right\} \end{aligned} \right\}$$

Uit physische overwegingen besluiten wij, dat τ_{\max} optreedt in het punt $S(0, \alpha')$, indien wij ons tenminste beperken tot de sikkels en lenzen, en de peren buiten beschouwing laten. Wij voeren een dimensieloze grootheid κ in volgens:

$$\tau_{\max} = \kappa G\omega a \quad (4)$$

Deze κ is een functie van α en α' en hangt samen met de vroeger ingevoerde grootheden λ en μ door de betrekking (zie (2, 1), (2, 2) en (2, 3)):

$$\kappa\lambda = \mu \quad (5)$$

Ter afkorting voeren wij de volgende functie van α en α' in:

$$K_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\pi - \alpha')t \cosh(\alpha' - \alpha)t}{\sinh \pi t \sinh(\alpha' - \alpha)t} t dt \quad (6)$$

Met behulp hiervan vinden wij dan uit de tweede vergelijking (3):

$$\kappa = \frac{1}{\sin \alpha'} \{ \sin(\alpha' - \alpha) - \sin \alpha + 2 \sin(\alpha' - \alpha) (1 - \cos \alpha') K_1 \} \quad (7)$$

7. *Bepaling van het wringmoment.* Ter bepaling van het wringmoment gaan wij uit van de bekende betrekking:

$$M_w = 2 \iint F d\theta \quad (1)$$

De integratie moet hierbij uitgestrekt worden over het oppervlak van de doorsnede. Een gedeelte van deze integraal kunnen wij met behulp van het theorema van Green herleiden tot een lijnintegraal langs de omtrek. Voor twee functies U en V , die binnen en op een gesloten kromme C met hun eerste en tweede afgeleiden continu zijn, geldt nl.:

$$\iint (U \Delta' V - V \Delta' U) d\theta = \int_C \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \quad (2)$$

Nu kiezen wij hierin $U = F_1$ en $V = F$. Dan volgt met het oog op (3, 2), (3, 3), (3, 4) en (3, 6):

$$\iint F_1 d\theta = \frac{1}{2G\omega} \int_C F_1 \tau_{zs} ds \quad (3)$$

Aangezien $F_1 = 0$ is voor $v = \alpha$, behoeft de integratie slechts te geschieden langs de lijn $v = \alpha'$. Met het oog op (4, 8), (5, 3) en (6, 3) vinden wij, bedenkende dat de integratie van $u = -\infty$ naar $u = \infty$ loopt:

$$\begin{aligned} \iint F_1 d\theta = G\omega a^4 \sin^2 \alpha \sin(\alpha' - \alpha) \int_0^{\infty} du \left\{ \frac{\cos(\alpha' - \alpha)}{(\cosh u - \cos \alpha')^2} - \frac{2 \sin(\alpha' - \alpha) \sin \alpha'}{(\cosh u - \cos \alpha')^3} \right. \\ \left. - \frac{2 \sin(\alpha' - \alpha)}{\sin \alpha' (\cosh u - \cos \alpha')} \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\pi - \alpha')t \cosh(\alpha' - \alpha)t}{\sinh \pi t \sinh(\alpha' - \alpha)t} \cos ut t dt \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Ter bekorting van het hierna volgende voeren wij de volgende drie functies in:

$$\left. \begin{aligned} F_1(a) &= \frac{\sin a + (\pi - a) \cos a}{\sin^3 a} \\ F_2(a) &= \frac{\sin 2a (3 - 2 \sin^2 a) + 2(\pi - a) (3 - 4 \sin^2 a)}{4 \sin^4 a} \\ F_3(a) &= \frac{3 \sin 2a + 2(\pi - a) (3 - 2 \sin^2 a)}{2 \sin^4 a} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

en de aan de functie K_1 uit (6, 6) verwante functie van a en a' :

$$K_2 = \int_0^\infty \frac{\sinh^2(\pi - a')t \cosh(a' - a)t}{\sinh^2 \pi t \sinh(a' - a)t} t dt \quad (6)$$

Nu voeren wij in (4) de integratie naar u uit, waarbij wij de integratievolgorde naar t en u verwisselen, en vinden dan met het oog op (25, 2), (25, 3) en (25, 4):

$$2 \iint F_1 d\theta = G\omega a^4 \sin^2 a \left\{ \sin 2(a' - a) F_1(a') - \sin^2(a' - a) F_3(a') - \frac{4\pi \sin^2(a' - a)}{\sin^2 a'} K_2 \right\} \quad (7)$$

De integraal van F_2 over de doorsnede kan niet op deze wijze in een lijnintegraal getransformeerd worden. Met het oog op (4, 9) en (5, 1) vinden wij:

$$\iint F_2 d\theta = 2G\omega a^4 \sin^3 a \int_a^{a'} \sin(v - a) dv \int_0^\infty \frac{du}{(\cosh u - \cos v)^3} \quad (8)$$

Wegens (25, 4) gaat dit over in:

$$\iint F_2 d\theta = G\omega a^4 \sin^3 a \int_a^{a'} \sin(v - a) \frac{(\pi - v) (1 + 2 \cos^2 v) + 3 \sin v \cos v}{\sin^5 v} dv \quad (9)$$

Door gebruik te maken van enkele elementaire integralen, vinden wij hieruit:

$$2 \iint F_2 d\theta = G\omega a^4 \sin^2 a \left[\sin 2a \{F_1(a) - F_1(a')\} - \sin^2 a \{F_2(a) - F_2(a')\} \right] \quad (10)$$

Met inachtneming van (2, 2), (2, 3), (3, 5), (1), (7) en (10) volgt nu voor de grootheid μ :

$$\begin{aligned} \mu &= \sin^2 a \left[\sin 2a \{F_1(a) - F_1(a')\} - \sin^2 a \{F_2(a) - F_2(a')\} + \right. \\ &\quad \left. + \sin 2(a' - a) F_1(a') - \sin^2(a' - a) F_3(a') - 4\pi \frac{\sin^2(a' - a)}{\sin^2 a'} K_2 \right] \quad (11) \end{aligned}$$

In het algemeen kunnen de integralen K_1 en K_2 niet in gesloten vorm geïntegreerd worden. Alvorens over te gaan tot een diepgaander onderzoek van deze integralen, zullen wij eerst een aantal doorsneden bezien, waarbij interessante meetkundige bijzonderheden aanwezig zijn. Het zal blijken, dat in een aantal gevallen de integralen dan op tamelijk eenvoudige wijze berekend kunnen worden. Verderop zullen wij vinden, dat ook in een aantal andere gevallen, waarin de meetkundige bijzonderheden minder sprekend zijn, de integralen in gesloten vorm kunnen worden gebracht.

8. *Sikkels, waarbij het middelpunt van een van beide begrenzende cirkelbogen ligt op de cirkel, waarvan de andere boog deel uitmaakt.* Dit geval laat naast de door ons gevolgde wijze van berekening ook een uiterst elementaire behandelingswijze toe¹⁾. Zoals uit fig. 14 blijkt, geldt in dit geval met het oog op de gelijkheid van de hoeken $MM'P$ en MPM' :

$$\alpha' - \alpha = \pi - \alpha' \quad (1)$$

Substitueren wij dit in (6, 6), dan vinden wij:

$$K_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\pi - \alpha')t}{\sinh \pi t} t dt \quad (2)$$

Dit is te integreren. Volgens (22, 17) vinden wij:

$$K_1 = \frac{1}{2(1 - \cos \alpha')} \quad (3)$$

Derhalve volgt voor κ uit (6, 7):

$$\kappa = 2 - \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = 2 - \frac{a}{a'} \quad (4)$$

Evenzo geeft substitutie van (1) in (7, 6):

$$K_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sinh 2(\pi - \alpha')t}{\sinh^2 \pi t} t dt \quad (5)$$

Ook dit is in gesloten vorm te integreren. Met behulp van (22, 11) vinden wij:

$$K_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\pi - \alpha - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (6)$$

Substitueren wij dit in (7, 11), dan vinden wij na vrij wat rekenwerk:

$$\mu = \frac{9}{4} \sin 2\alpha - 4 \sin \alpha \cos 2\alpha - (\pi - \alpha) (2 - 4 \cos \alpha + \frac{3}{2} \cos 2\alpha) \quad (7)$$

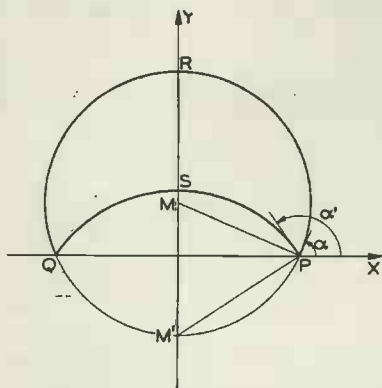


Fig. 14. Sikkels volgens nr. 8.

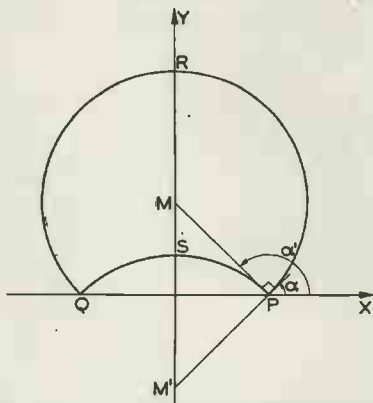


Fig. 15. Orthogonale sikkels.

¹⁾ Zie noot 2 op pag. 62.

9. *Sikkels en lenzen, waarbij de begrenzende cirkelbogen elkander onder een rechte hoek snijden.* Ook dit geval is door de betrekkelijke eenvoud enige malen het onderwerp van onderzoek geweest ¹⁾. Wij zullen laten zien, hoe de bekende resultaten ook uit onze behandelingswijze afgeleid kunnen worden.

Uit fig. 15 blijkt, dat in dit geval geldt:

$$a' - a = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Substitutie in (6, 6) levert na enige herleiding:

$$K_1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\pi - 2a)t}{\sinh^2 \pi t} t dt \quad (2)$$

Dit is in gesloten vorm te integreren. Volgens (22, 11) vinden wij:

$$K_1 = \frac{\pi - 2a - \sin 2a}{2\pi \cos^2 a} \quad (3)$$

Hieruit en uit (6, 7) volgt dan:

$$\kappa = \frac{1 - \sin a}{\cos a} + \frac{(1 + \sin a)(\pi - 2a - \sin 2a)}{\pi \cos^3 a} \quad (4)$$

Een speciaal geval vormt de halfcirkelvormige doorsnede, waarvoor $a = \pi/2$ is. De uitdrukking (4) neemt dan een onbepaalde vorm aan, maar nadert, zoals men gemakkelijk verifieert, tot de waarde $8/3\pi$.

Ter bepaling van de stijfheid substitueren wij (1) in (7, 6). Wij vinden:

$$K_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sinh^2(\pi - 2a)t}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t} t dt \quad (5)$$

Ook deze integraal is weer te integreren. Met het oog op (23, 2) vinden wij:

$$K_2 = \frac{(\pi - 2a)^2 + (\pi - 2a) \sin 4a + \sin^2 2a - \pi^2 \cos^4 a}{4\pi^2 \sin^2 2a} \quad (6)$$

Substitutie van (6) in (7, 11) geeft ons dan:

$$\mu = \frac{3}{4}\pi - \frac{a}{2} + \frac{\sin a(1 + 2\sin^2 a)}{2 \cos^3 a} - \frac{\sin^2 a(2 + \sin^2 a)(\pi - 2a)}{4 \cos^4 a} - \frac{(\pi - 2a)^2 + (\pi - 2a)\sin 4a + \sin^2 2a}{4\pi \cos^4 a} \quad (7)$$

Voor $a = \pi/2$, d.w.z. voor de halfcirkelvormige doorsnede, wordt deze uitdrukking onbepaald. Men vindt voor μ gemakkelijk de grenswaarde $\pi/2 - 4/\pi$.

¹⁾ Zie noot 1 op pag. 62.

10. *Smalle sikkels en lenzen.* Wij veronderstellen nu α' slechts weinig groter dan α . Wanneer het verschil klein is ten opzichte van de hoeken zelf, hebben wij te maken met smalle sikkels of lenzen. Wij kunnen in dat geval reeksontwikkelingen van de beide integralen K_1 en K_2 naar opklimmende machten van het verschil der hoeken opstellen. Stel:

$$\alpha' - \alpha = \delta\pi, \quad (1)$$

waarin δ een kleine grootheid is. Wij maken gebruik van de ontwikkeling ¹⁾:

$$x \coth x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \frac{2x^6}{945} - \dots \quad (2)$$

Met behulp van (6, 6) en (22, 13), (22, 14), (22, 15) en (22, 16) vinden wij dan:

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\pi - \alpha')t}{\sinh \pi t} \coth \delta\pi t \, t \, dt = \\ &= \frac{1}{\delta\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\pi - \alpha')t}{\sinh \pi t} \left(1 + \frac{\delta^2\pi^2 t^2}{3} - \frac{\delta^4\pi^4 t^4}{45} + \frac{2\delta^6\pi^6 t^6}{945} - \dots \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\delta\pi} \cot \frac{\alpha'}{2} \left(1 + \frac{1}{6 \sin^2 \alpha'/2} \delta^2\pi^2 - \frac{3 - \sin^2 \alpha'/2}{90 \sin^4 \alpha'/2} \delta^4\pi^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{45 - 30 \sin^2 \alpha'/2 + 2 \sin^4 \alpha'/2}{3780 \sin^6 \alpha'/2} \delta^6\pi^6 - \dots \right) \quad (3) \end{aligned}$$

Hieruit vindt men na enig rekenwerk volgens (6, 7):

$$\begin{aligned} x &= \cot \frac{\alpha'}{2} \delta\pi + \frac{3 + \cot^2 \alpha'/2}{6} \delta^2\pi^2 - \frac{\cot \alpha'/2}{6} \delta^3\pi^3 - \\ &\quad - \frac{5 + 5 \cot^2 \alpha'/2 + 2 \cot^4 \alpha'/2}{60} \delta^4\pi^4 + \frac{\cot \alpha'/2}{120} \delta^5\pi^5 + \\ &\quad + \frac{149 + 77 \cot^2 \alpha'/2 + 67 \cot^4 \alpha'/2 - 21 \cot^6 \alpha'/2}{15120} \delta^6\pi^6 - \\ &\quad - \frac{\cot \alpha'/2}{5040} \delta^7\pi^7 - \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze ontwikkelen wij K_2 naar $\delta\pi$. Gebruik makend van (7, 6), (1), (2), (22, 6), (22, 7) en (22, 8) vinden wij:

1) Men gebruikt in de litteratuur drie verschillende notaties voor de getallen van Bernoulli. Het door ons gebruikte stelsel is gedefinieerd door: $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$, $B_0 = 1$ of door, hetgeen op hetzelfde neer komt: $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$. De getalwaarden zijn dan: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, etc. In deze notatie geldt: $x \coth x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$, $\operatorname{tgh} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}$, $\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|$

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \int_0^{\infty} \frac{\sinh^2(\pi - a')t}{\sinh^2 \pi t} \coth \delta \pi t \, t \, dt = \\
 &= \frac{1}{\delta \pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh^2(\pi - a')t}{\sinh^2 \pi t} \left(1 + \frac{\delta^2 \pi^2 t^2}{3} - \frac{\delta^4 \pi^4 t^4}{45} + \dots \right) dt = \\
 &= \frac{1}{2\delta \pi} \left(\frac{\sin a' + (\pi - a') \cos a'}{\sin a'} - \frac{\sin^3 a' - 3 \sin a' - 3(\pi - a') \cos a'}{18 \sin^3 a'} \delta^2 \pi^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin^5 a' + 30 \sin^3 a' - 45 \sin a' - 15(\pi - a') \cos a' (3 - 2 \sin^2 a')}{1350 \sin^5 a'} \delta^4 \pi^4 + \dots \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Ontwikkeling van μ naar $\delta \pi$ uit (7, 11) vereist een dusdanig rekenwerk, dat de uitvoering ervan nauwelijks de moeite waard kan worden geacht.

11. *Cirkelsegmenten.* Wij beschouwen tenslotte het speciale geval, dat $a' = \pi$; één der begrenzende cirkelbogen is dan overgegaan in een rechte, dus de doorsnede is dan een cirkelsegment¹⁾. De integralen K_1 en K_2 zijn dan volgens (6, 6) en (7, 6) blijkbaar nul. Volgens (6, 7) en (7, 11) worden echter de uitdrukkingen voor κ en μ beide onbepaald. De benodigde grensovergangen zijn eenvoudig uit te voeren. Wij voeren daartoe in:

$$K_3 = \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\pi - a)t}{\sinh \pi t \sinh(\pi - a)t} t^2 dt \quad (1)$$

Met behulp hiervan vinden wij na enige herleidingen:

$$\kappa = \cos a + 4 \sin a K_3 \quad (2)$$

Evenzo voeren wij in:

$$K_4 = \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\pi - a)t}{\sinh^2 \pi t \sinh(\pi - a)t} t^3 dt \quad (3)$$

en vinden met behulp hiervan weer:

$$\mu = \frac{\pi - a}{2} + \frac{1}{12} \sin 2a (2 + \cos 2a) - 4\pi \sin^4 a K_4 \quad (4)$$

K_3 en K_4 zijn in het algemeen weer niet in gesloten vorm te integreren.

Een belangrijk bijzonder geval is dat van de halve cirkel, dat wij ook al ontmoet hadden als speciaal geval van de sikkels met rechte hoeken. In dit geval is $a = \pi/2$. Dan is volgens (22, 21):

$$K_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\sinh^2 \pi t} = \frac{2}{3\pi} \quad (5)$$

Hieruit volgt: $\kappa = 8/3\pi$. Evenzo vinden wij uit (23, 5):

$$K_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t} = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{16} \quad (6)$$

¹⁾ Zie noot 3 op pag. 62.

Hieruit volgt: $\mu = \pi/2 - 4/\pi$.

Verschilt het segment slechts weinig van een volledige cirkel, d.w.z. is α klein, dan kunnen wij reeksontwikkelingen naar α opstellen. Zo vinden wij:

$$\begin{aligned} K_3 &= \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\sinh \pi t} \coth(\pi - a)t = \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\sinh \pi t} \frac{1 - \operatorname{tgh} \pi t \operatorname{tgh} at}{\operatorname{tgh} \pi t - \operatorname{tgh} at} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\cosh \pi t t^2 dt}{\sinh^2 \pi t} (1 - \operatorname{tgh} \pi t \operatorname{tgh} at) \left(1 - \frac{\operatorname{tgh} at}{\operatorname{tgh} \pi t}\right)^{-1} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\cosh \pi t t^2 dt}{\sinh^2 \pi t} + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tgh} at t^2 dt}{\sinh^3 \pi t} + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tgh}^2 at \cosh \pi t t^2 dt}{\sinh^4 \pi t} + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tgh}^3 at \cosh^2 \pi t t^2 dt}{\sinh^5 \pi t} + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tgh}^4 at \cosh^3 \pi t t^2 dt}{\sinh^6 \pi t} + \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Wij ontwikkelen nu de in de integralen voorkomende hyperbolische tangenten naar a , gebruik makende van de ontwikkeling¹⁾:

$$\operatorname{tgh} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (8)$$

Gebruik makende van de notaties en gegevens van nummer 24 vinden wij dan na enig rekenen:

$$\begin{aligned} K_3 &= I(2, 1, 2) + a I(3, 0, 3) + a^2 I(4, 1, 4) + \\ &+ a^3 \{I(5, 2, 5) - \frac{1}{3} I(3, 0, 5)\} + a^4 \{I(6, 3, 6) - \frac{2}{3} I(4, 1, 6)\} \dots = \\ &= \frac{1}{2\pi} + \left(\frac{3}{4\pi^2} - \frac{1}{16}\right)a + \left(\frac{1}{\pi^3} - \frac{1}{12\pi}\right)a^2 + \left(\frac{5}{4\pi^4} - \frac{5}{24\pi^2} + \frac{1}{96}\right)a^3 + \\ &+ \left(\frac{3}{2\pi^5} - \frac{5}{12\pi^3} + \frac{7}{240\pi}\right)a^4 + \dots \quad (9) \end{aligned}$$

En hieruit volgt gemakkelijk:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{2}{\pi}a + \left(\frac{3}{\pi^2} - \frac{3}{4}\right)a^2 + \left(\frac{4}{\pi^3} - \frac{2}{3\pi}\right)a^3 + \\ &+ \left(\frac{5}{\pi^4} - \frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{8}\right)a^4 + \left(\frac{6}{\pi^5} - \frac{7}{3\pi^3} + \frac{17}{90\pi}\right)a^5 + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Op analoge wijze ontwikkelen wij K_4 naar a . Wij zien gemakkelijk, dat wij de uitkomst eenvoudig uit (9) kunnen afleiden door het eerste en derde argument van de integralen $I(m, n, p)$ met 1 te vermeerderen. Wij hebben nu overigens minder termen nodig om uiteindelijk de ontwikkeling voor μ tot a^5 voort te zetten. Wij vinden dan:

$$K_4 = I(3, 1, 3) + a I(4, 0, 4) + \dots = \frac{1}{4\pi^2} + \left(\frac{1}{3\pi^3} - \frac{1}{45\pi}\right)a + \dots \quad (11)$$

Hieruit leiden wij verder af:

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{\pi}a^4 - \left(\frac{4}{3\pi^2} - \frac{22}{45}\right)a^5 \dots \quad (12)$$

¹⁾ Zie de noot op pag. 73.

Vervolgens willen wij het geval onderzoeken, dat a weinig van π verschilt; stel:

$$a = \pi - \delta\pi \quad (13)$$

Eerst ontwikkelen wij K_3 naar $\delta\pi$, waarbij wij gebruik maken van de reeksontwikkeling (10, 2) en de integralen (22, 24):

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{\delta\pi} \int_0^\infty \frac{t dt}{\sinh \pi t} \delta\pi t \coth \delta\pi t = \frac{1}{\delta\pi} \int_0^\infty \frac{t dt}{\sinh \pi t} \sum_{k=0}^\infty \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} (\delta\pi t)^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{2^{2k}(2^{2k+2} - 1)}{(2k)! (2k+2)} B_{2k} B_{2k+2} (\delta\pi)^{2k-1} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\delta\pi} + \frac{1}{24} \delta\pi - \frac{1}{180} \delta^3 \pi^3 + \frac{17}{7560} \delta^5 \pi^5 - \frac{31}{18900} \delta^7 \pi^7 + \\ &\quad + \frac{5461}{187110} \delta^9 \pi^9 - \dots \quad (14) \end{aligned}$$

Hieruit volgt na enig rekenwerk:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2} \delta^2 \pi^2 - \frac{1}{12} \delta^4 \pi^4 + \frac{11}{720} \delta^6 \pi^6 - \frac{251}{30240} \delta^8 \pi^8 + \\ &\quad + \frac{14120693}{119750400} \delta^{10} \pi^{10} - \dots \quad (15) \end{aligned}$$

Op volkomen dezelfde wijze, nu gebruik makend van de integralen (22, 21) vinden wij voor K_4 :

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} B_{2k+2} (\delta\pi)^{2k-1} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{6} \frac{1}{\delta\pi} + \frac{1}{90} \delta\pi - \frac{1}{1890} \delta^3 \pi^3 + \frac{1}{14175} \delta^5 \pi^5 - \frac{1}{62370} \delta^7 \pi^7 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{691}{127702575} \delta^9 \pi^9 - \dots \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

Bij de berekening van μ hieruit valt een groot aantal termen tegen elkaar weg; wij vinden tenslotte:

$$\mu = \frac{4}{105} \delta^7 \pi^7 - \frac{16}{945} \delta^9 \pi^9 + \dots \quad (17)$$

Aangezien zowel κ als μ klein zijn, verdient het aanbeveling ook λ in een reeks te ontwikkelen, hetgeen het eenvoudigst geschiedt door deling van de reeksen voor κ en μ . Wij vinden dan:

$$\lambda = \frac{8}{105} \delta^5 \pi^5 - \frac{8}{945} \delta^7 \pi^7 + \dots \quad (18)$$

12. *Overzicht van de resultaten.* In het voorgaande hebben wij gezien, hoe de berekening van de integralen K_1 , K_2 , K_3 en K_4 in enige speciale gevallen eenvoudig kan geschieden. In de nummers 29, 30,

TABEL I. De grootheid κ als functie van α en α' bij twee elkander snijdende cirkelbogen.

$\frac{\alpha'}{\pi}$ $\frac{\alpha}{\pi}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0	2,4674	2,4470	2,3872	2,2901	2,1593	2,0000	1,8181	1,6202	1,4133	1,2044	1,0000					
0,1	0	0	1,1309	1,5218	1,6703	1,7007	1,6592	1,5692	1,4424	1,3061	1,1538	1,0000				
0,2		0	0	0,7120	1,0902	1,2902	1,3820	1,4009	1,3688	1,3011	1,2101	1,1065	1,0000			
0,3			0	0	0,5027	0,8254	1,0258	1,1400	1,1913	1,1967	1,1687	1,1199	1,0600	1,0000		
0,4					0	0,3730	0,6406	0,8244	0,9431	1,0114	1,0417	1,0449	1,0313	1,0122	1,0000	
0,5						0	0,2813	0,4989	0,6597	0,7733	0,8488	0,8954	0,9166	0,9400	0,9603	1,0000
0,6							0	0,2298	0,3820	0,5167	0,6191	0,6946	0,7508	0,7957	0,8402	
0,7								0	0,1506	0,2791	0,3862	0,4721	0,5415	0,6000		
0,8									0	0,0979	0,1850	0,2605	0,3250			
0,9										0	0,0486	0,0929				
1,0											0					

31 en 32 is de berekening gegeven voor het algemene geval. Met behulp van de daar gegeven tabellen IX, XI, XII en XIII kunnen nu de grootheden κ , λ en μ berekend worden als functie van a en a' . Aangezien

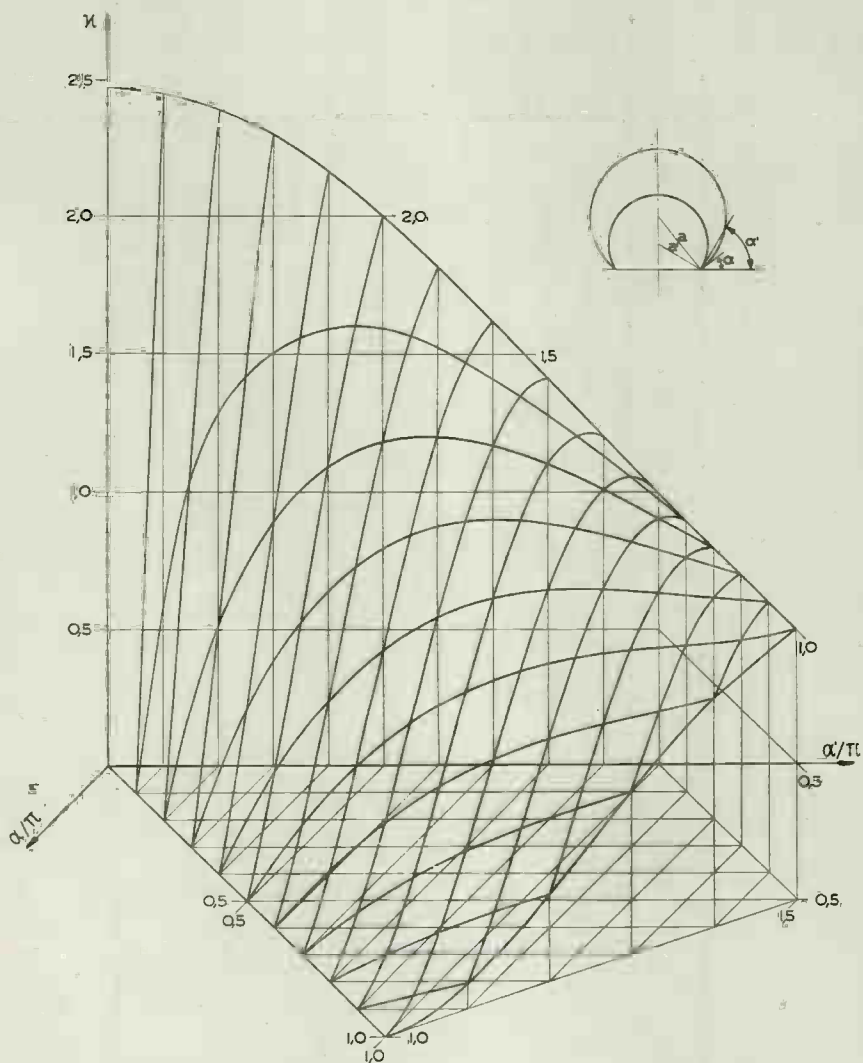


Fig. 16. De grootheid κ als functie van a en α .

voor $a = a' = 0$ de vorm van de doorsnede niet bepaald is, zijn ook κ , λ en μ daar niet bepaald. De behandeling van dit geval is gegeven in de volgende paragraaf. Wij ontleen er hier vast enkele waarden aan om te gebruiken in de figuren 16, 17 en 18, waar de resultaten

TABEL II. De grootheid λ als functie van α en α' bij twee elkander snijdende cirkelbogen.

α'/π \ / \ α/π	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0	0,6366	0,6419	0,6580	0,6859	0,7275	0,7854	0,8640	0,9695	1,1115	1,3043	1,5708					
0,1	0	0	0,4005	0,5884	0,6838	0,7567	0,8311	0,9187	1,0308	1,1646	1,3419	1,5708				
0,2		0	0	0,1980	0,3922	0,5315	0,6453	0,7533	0,8681	1,0468	1,1546	1,3385	1,5708			
0,3			0	0	0,1050	0,2503	0,3818	0,5047	0,6281	0,7617	0,9140	1,0933	1,3095	1,5708		
0,4					0	0,0566	0,1552	0,2586	0,3683	0,4885	0,6252	0,7881	0,9890	1,2423	1,5708	
0,5						0	0,0299	0,0892	0,1630	0,2483	0,3506	0,4763	0,6396	0,8464	1,1393	1,5708
0,6							0	0,0139	0,0471	0,0923	0,1504	0,2259	0,3269	0,4672	0,6720	
0,7								0	0,0053	0,0208	0,0439	0,0761	0,1228	0,1913		
0,8									0	0,0020	0,0067	0,0150	0,0277			
0,9										0	0,0002	0,0005				
1,0											0					

van de berekening in grafiekvorm zijn weergegeven. De tabellen I, II en III geven deze resultaten in getalvorm. In het punt $\alpha = \alpha' = 0$ vindt men twee waarden aangegeven. De bovenste waarde is de limiet,

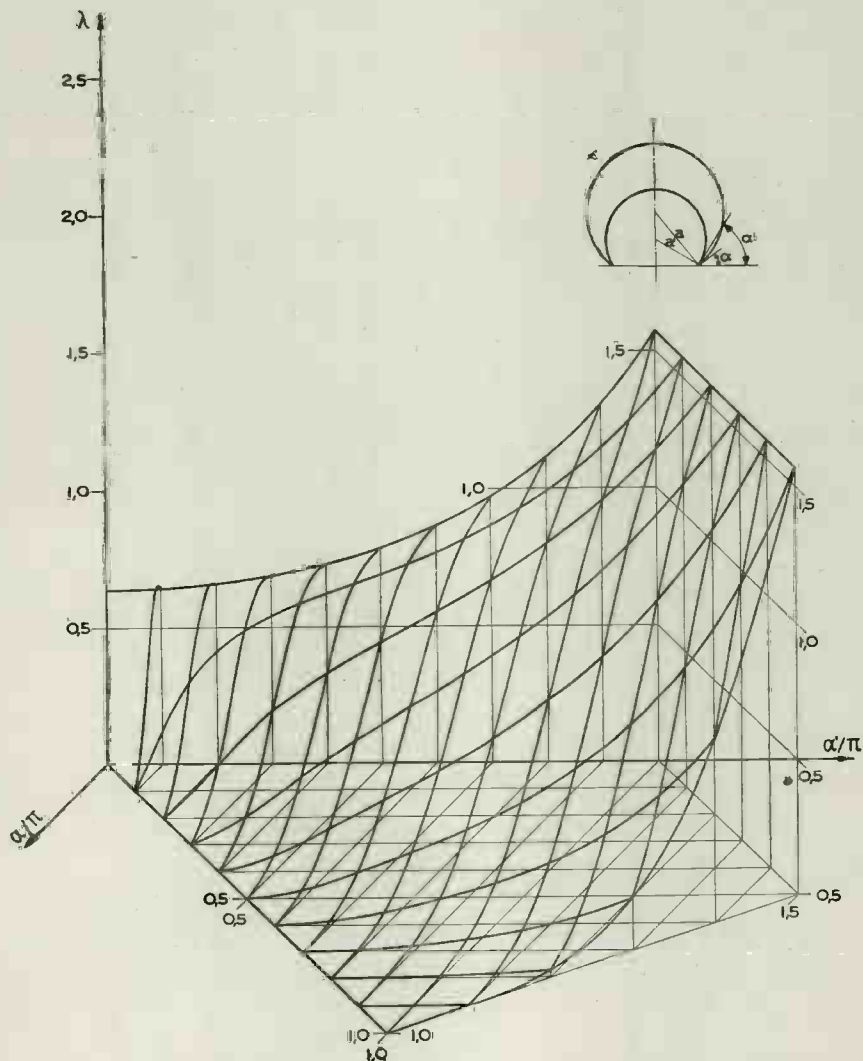


Fig. 17. De grootheid λ als functie van α en α' .

welke men verkrijgt, door $\alpha = 0$ te kiezen en α' daarna tot nul te laten naderen. De onderste waarde verkrijgt men door $\alpha = \alpha'$ te kiezen en ze daarna tot nul te laten naderen. Zoals in de volgende paragraaf aangetoond wordt, zijn dit niet de uiterste waarden in het geval van λ .

TABEL III. De grootheid μ als functie van α en α' bij twee elkander snijdende cirkelbogen.

$\frac{\alpha}{\pi}$	$\frac{\alpha'}{\pi}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0		
0	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	
0	0	0	0,4529	0,8954	1,1422	1,2869	1,3790	1,4416	1,4868	1,5211	1,5483	1,5708	1,5708	1,5904	1,6077	1,6258	1,6451	1,6694	1,7114	1,8420	3,4301	3,1416	1,5708	
0,1	0	0	0	0,1410	0,4276	0,6857	0,8918	1,0553	1,1882	1,3620	1,3971	1,4810	1,5708	1,5708	1,6578	1,7547	1,8769	2,0634	2,4556	3,9248				
0,2	0	0	0	0,0528	0,2066	0,3917	0,5754	0,7483	0,9115	1,0682	1,2244	1,3881	1,5708	1,7940	2,1045	2,6230	3,9703							
0,3	0	0	0	0,0211	0,0994	0,2132	0,3473	0,4940	0,6512	0,8235	1,0200	1,2575	1,5708	2,0412	2,8976									
0,4	0	0	0	0	0,0084	0,0445	0,1075	0,1920	0,2976	0,4265	0,5863	0,7956	1,0940	1,5708										
0,5	0	0	0	0	0,0032	0,0180	0,0477	0,0931	0,1569	0,2454	0,3718	0,5646												
0,6	0	0	0	0	0	0,0008	0,0058	0,0170	0,0359	0,0665	0,1148													
0,7	0	0	0	0	0	0	0,0002	0,0012	0,0039	0,0090														
0,8	0	0	0	0	0	0	0	0,0000	0,0000															
0,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Voor de grootheid μ treedt een dergelijke onbepaaldheid ook op in het geval $\alpha = 0$, $\alpha' = 2\pi$. Aangezien de doorsnede dan door twee elkander uitwendig rakende cirkels begrensd wordt, is de stijfheid

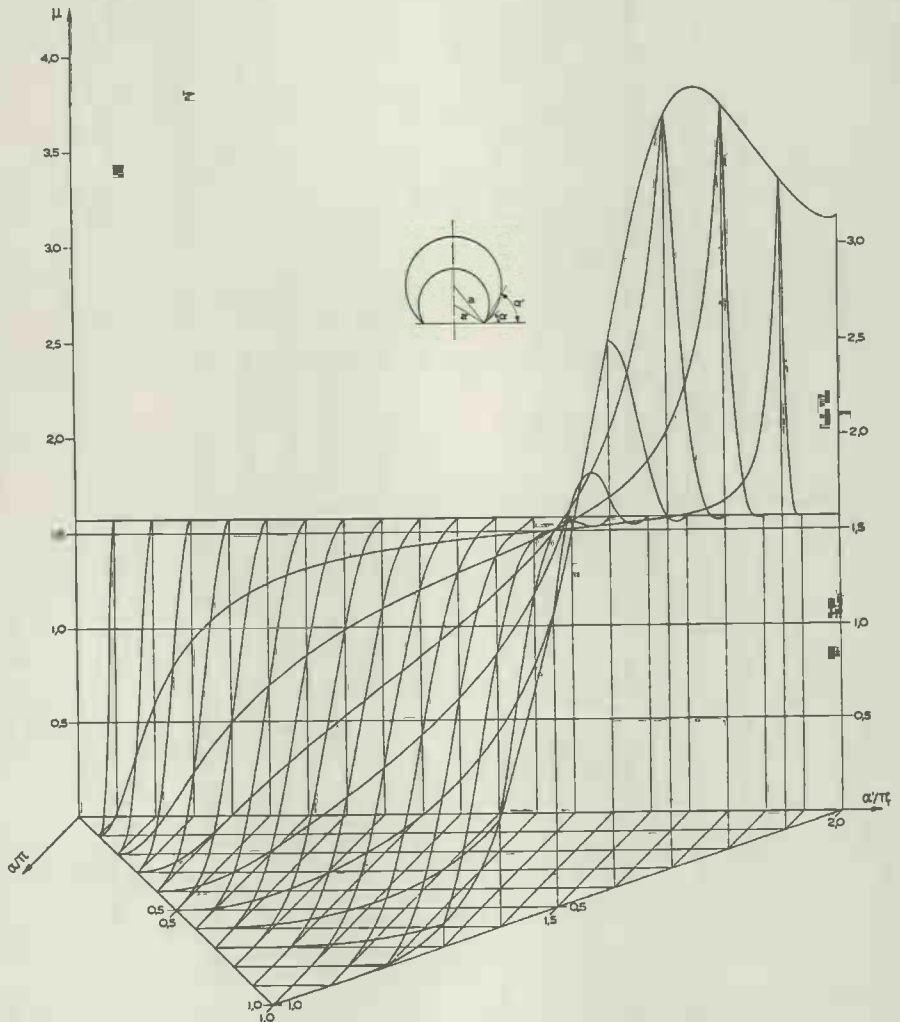


Fig. 18. De grootheid μ als functie van α en α' .

gelijk aan de som van de stijfheden der afzonderlijke cylinders. De bovenste waarde is weer de grenswaarde, verkregen door $\alpha = 0$ te stellen en daarna α' tot 2π te laten naderen. De tweede waarde verkrijgt men door te stellen $\alpha \equiv 2\pi - \alpha'$ en daarna α tot nul te laten naderen.

§ 2. De torsie van een cilindrische staaf met een door twee elkander inwendig rakende cirkels begrensde doorsnede.

13. *Inleiding.* In het volgende zullen wij het bijzonderé geval van de vorige paragraaf onderzoeken, waarbij de begrenzende cirkelbogen elkander inwendig raken. Iets onnauwkeuriger is het te spreken van twee cirkelbogen, die elkander in twee zeer dicht bijeen gelegen punten snijden, maar wij gebruiken deze zegswijze om de nadruk te leggen op het feit, dat de doorsnede als enkelvoudig samenhangend zal worden beschouwd, zulks in tegenstelling met het in de litteratuur ¹⁾ behandelde

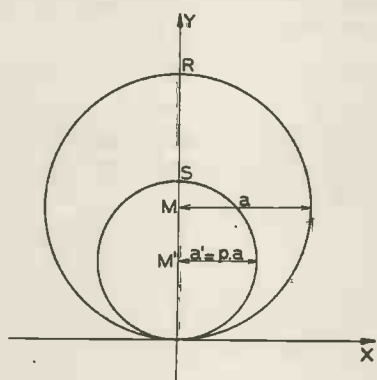


Fig. 19. De doorsnede in het xy -vlak.

nemen. Hierbij zijn dan $a = a' = 0$, $b = a$ en $c = 0$. De nieuwe situatie is weergegeven in fig. 19.

14. *Conforme afbeelding van de doorsnede.* Het is duidelijk, dat wij door een simpele inversie de beide cirkels in evenwijdige rechten kunnen transformeren. Wij stellen daartoe:

$$x + iy = \frac{2a}{u - iv} \quad (1)$$

Zoals men ziet, is de transformatie zó opgesteld, dat de macht van de inversie positief is, zodat de cirkels en hun inversen aan dezelfde zijde van de X -as liggen. De transformatieformules worden:

$$x = \frac{2au}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2av}{u^2 + v^2} \quad (2)$$

en omgekeerd:

$$u = \frac{2ax}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2ay}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

¹⁾ Zie de noot op pag. 62.

Hieruit leidt men gemakkelijk af, met het oog op een in nr. 16 te maken toepassing, dat:

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{a}{2a'^2} \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{voor } x = 0, y = 2a' \quad (4)$$

Tenslotte vinden wij voor de functionaaldeterminant van de transformatie:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{4a^2}{(u^2 + v^2)^2} \quad (5)$$

15. *Oplossing van het potentiaalvraagstuk.* Allereerst transformeren wij de functie F_2 (3, 10) op de nieuwe coördinaten u en v :

$$F_2 = 2 G\omega a^2 \frac{v - 1}{u^2 + v^2} \quad (1)$$

De cirkel met straal a gaat bij de transformatie over in de rechte $v = 1$. De andere cirkel gaat over in de lijn $v = 1/p$, waarbij $p = a'/a$. De randvoorwaarden voor F_1 zijn dus:

$$\left. \begin{aligned} F_1(u, 1) &= 0 \\ F_1\left(u, \frac{1}{p}\right) &= -2 G\omega a^2 \frac{1-p}{p} \frac{1}{(1/p)^2 + u^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

De laatste van deze vergelijkingen schrijven wij in de vorm van een Fourierintegraal:

$$\frac{1}{(1/p)^2 + u^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ut \, dt \int_0^\infty \cos ts \frac{1}{(1/p)^2 + s^2} \, ds \quad (3)$$

Wij behoeven de tweede integraal echter niet uit te werken, want vergelijking (1, 29, 2) leert ons:

$$\frac{1}{(1/p)^2 + u^2} = p \int_0^\infty \cos ut e^{-t/p} \, dt \quad (4)$$

Wij kunnen de tweede vergelijking van (2) dus in de volgende vorm schrijven:

$$F_1\left(u, \frac{1}{p}\right) = -2 G\omega a^2 (1-p) \int_0^\infty \cos ut e^{-t/p} \, dt \quad (5)$$

Wij trachten nu een oplossing te vinden door superpositie van potentiaalfuncties in de volgende integraalvorm:

$$F_1(u, v) = \int_0^\infty f(t) \sinh(v-1)t \cos ut \, dt \quad (6)$$

Dit voldoet aan de differentiaalvergelijking en de eerste der beide randvoorwaarden. Aan de tweede randvoorwaarde is blijkbaar voldaan, indien:

$$f(t) = -2 G\omega a^2 (1-p) \frac{e^{-t/p}}{\sinh \frac{1-p}{p} t} \quad (7)$$

Derhalve is de gezochte spanningsfunctie:

$$F = 2 G \omega a^2 \left\{ \frac{v-1}{u^2+v^2} - (1-p) \int_0^\infty \frac{\sinh(v-1)t}{\sinh \frac{1-p}{p} t} e^{-t/p} \cos ut dt \right\} \quad (8)$$

16. *Bepaling van de maximale schuifspanning.* Het is duidelijk, dat de maximale schuifspanning optreedt in het punt: $x = 0, y = 2a'$. De Y-as is hier de naar binnen gerichte normaal. De schuifspanning verkrijgen wij dus dóór de spanningsfunctie in dit punt naar y te differentieren (3, 4). Gelet op (6, 4 en (14, 4) vinden wij dan:

$$\kappa = 1 - 2p + \frac{1}{1-p} \int_0^\infty \coth t e^{-\frac{t}{1-p}} t dt \quad (1)$$

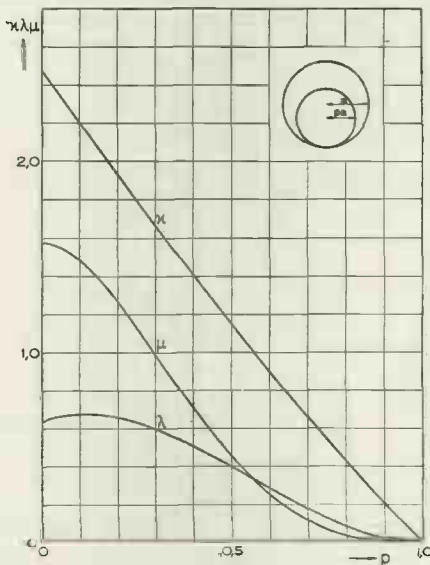


Fig. 20. De grootheden κ, λ en μ als functie van p .

De integraal kan volgens (28, 3) uitgedrukt worden door middel van de in nr. 27 ingevoerde functie Ψ' :

$$\kappa = 2 - 3p + \frac{1}{2(1-p)} \Psi' \left(\frac{1}{2(1-p)} \right) \quad (2)$$

Nadert p tot 1, d.w.z. zijn de stralen van de beide cirkels slechts weinig verschillend, dan nadert het argument van Ψ' in (2) tot ∞ . Met behulp van de asymptotische ontwikkeling van $\Psi'(x)$ volgens (27, 5) leiden wij voor dat geval de volgende ontwikkeling voor κ af:

$$\kappa = 2(1-p) + \frac{2}{3}(1-p)^2 - \frac{8}{15}(1-p)^4 + \dots \quad (3)$$

Met behulp van (2) en (3) kan κ voor een aantal waarden van p berekend worden. De resultaten van deze berekening zijn weergegeven in tabel IV en fig. 20.

TABEL IV. De grootheid κ als functie van p bij twee inwendig rakende cirkels.

p	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
κ	2,4674	2,1949	1,9258	1,6705	1,3999	1,1449	0,8966	0,6565	0,4259	0,2066	0

17. *Bepaling van het wringmoment.* De eerste drie formules van nr. 7 kunnen wij ongewijzigd overnemen. Verder vinden wij uit (7, 3), wanneer wij bedenken, dat alleen over de rand $v = 1/p$ behoeft geïntegreerd te worden en met het oog op de isometrie van de conforme afbeelding dan geldt:

$$\tau_{zs} ds = - \frac{\partial F}{\partial n} ds = \frac{\partial F}{\partial y} dx = - \frac{\partial F}{\partial v} du:$$

$$2 \iint F_1 d\Omega = G\omega a^4 8 \frac{1-p}{p} \int_0^\infty du \left[\frac{1}{\left\{u^2 + \left(\frac{1}{p}\right)^2\right\}^2} - 2 \frac{1-p}{p^2} \frac{1}{\left\{u^2 + \left(\frac{1}{p}\right)^2\right\}^3} - (1-p) \int_0^\infty \coth\left(\frac{1-p}{p}t\right) e^{-tp} \frac{\cos ut}{u^2 + \left(\frac{1}{p}\right)^2} t dt \right] \quad (1)$$

Wij verwisselen de integratievolgorde naar t en u en vinden dan, gelet op (26, 2), (26, 4) en (26, 5) na enige herleiding:

$$2 \iint F_1 d\Omega = G\omega a^4 \pi \left\{ -p^2 + 4p^3 - 3p^4 - 4p^2 \int_0^\infty \coth t e^{-2t(1-p)} t dt \right\} \quad (2)$$

De integraal kan weer worden uitgedrukt door middel van de in nr. 27 ingevoerde functie Ψ' . Volgens (28, 3) vinden wij dan:

$$2 \iint F_1 d\Omega = G\omega a^4 \pi \left\{ -2p^2 + 6p^3 - 4p^4 - 2p^2 \Psi' \left(\frac{1}{1-p} \right) \right\} \quad (3)$$

Vervolgens vinden wij met behulp van (14, 5) en (15, 1):

$$2 \iint F_2 d\Omega = G\omega a^4 32 \int_1^\infty (v-1) dv \int_0^\infty \frac{du}{(u^2+v^2)^3} \quad (4)$$

Gelet op (26, 5) gaat dit over in:

$$2 \iint F_2 d\Omega = G\omega a^4 \frac{\pi}{2} (1 - 4p^3 + 3p^4) \quad (5)$$

Uit (2, 2), (2, 3), (3, 5), (7, 1), (3) en (5) volgt:

$$\mu = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - 4p^2 + 8p^3 - 5p^4 - 4p^2 \Psi' \left(\frac{1}{1-p} \right) \right\} \quad (6)$$

Voor p dicht bij 1 is de vorm (6) weer onbruikbaar. Met behulp van de asymptotische ontwikkeling van $\Psi'(x)$ volgens (27, 5) en herleiding van de veelterm in p tot een veelterm in $1 - p$ vinden wij:

$$\mu = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{10}{3} (1-p)^3 - \frac{5}{3} (1-p)^4 - \frac{8}{15} (1-p)^5 \dots \right\} \quad (7)$$

Met behulp van (6) en (7) kan μ voor een aantal waarden van p berekend worden. De resultaten van deze berekening zijn weergegeven in tabel V en fig. 20.

Volgens (6, 5) kan de grootheid λ bepaald worden door deling van κ op μ . Ligt p in de buurt van 1, dan zijn zowel κ als μ klein. Uit (16, 3) en (7) volgt voor dat geval de volgende ontwikkeling voor λ :

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{5}{3} (1-p)^2 - \frac{25}{18} (1-p)^3 + \frac{77}{270} (1-p)^4 \dots \right\} \quad (8)$$

De berekende waarden van λ zijn eveneens in tabel V en fig. 20 weergegeven.

TABEL V. De grootheden μ en λ als functie van p bij twee inwendig rakende cirkels.

p	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
μ	1,5708	1,4819	1,2674	0,9938	0,7124	0,4595	0,2551	0,1180	0,0375	0,0050	0
λ	0,6366	0,6751	0,6581	0,5977	0,5089	0,4013	0,2845	0,1797	0,0881	0,0240	0

§ 3. Torsie van een cilindrische staaf, waarvan de doorsnede begrensd is door een cirkel, voorzien van een radiale insnijding.

18. *Inleiding.* Wij zullen nu een as beschouwen, voorzien van een radiale insnijding. Deze doorsnede is reeds door SHEPHERD¹⁾ onderzocht. De door hem gebruikte methode voert tot reeksonwikkelingen, waaruit slechts met grote moeite voor kleine diepte van de insnijding de stijfheid bepaald kan worden (de spanningen zijn natuurlijk in de bodem van de insnijding oneindig groot, zodat de bepaling daarvan niet interessant is). Verder verwijzen wij nog naar een artikel van WIGGLESWORTH²⁾.

In fig. 21 is de doorsnede weergegeven. Wij moeten verschil in behandeling van het vraagstuk maken naar gelang de insnijding kleiner of groter dan de straal van de cirkel is. Zij deze straal weer a en de diepte van de insnijding gelijk aan $p \cdot a$, dan is in het eerste geval $0 \leq p < 1$ en in het tweede geval $1 < p \leq 2$. Het geval, dat $p = 1$ is,

¹⁾ W. M. SHEPHERD, *Proc. Roy. Soc. London*, A 138, 607—634 (1932).

²⁾ L. A. WIGGLESWORTH, *Proc. Roy. Soc. London*, A 170, 365—391 (1939).

behandelen wij niet afzonderlijk, doch leiden het door limietovergang uit het eerste of het tweede geval af. In dit geval is de doorsnede trouwens een cirkelsector met openingshoek van 2π en als zodanig reeds behandeld.

In fig. 21 is de cirkel zodanig geplaatst ten opzichte van het assenkruis XY , dat $OM^2 = OB^2 + MA^2$. Wij noemen $MB = b$ en $OB = c$.

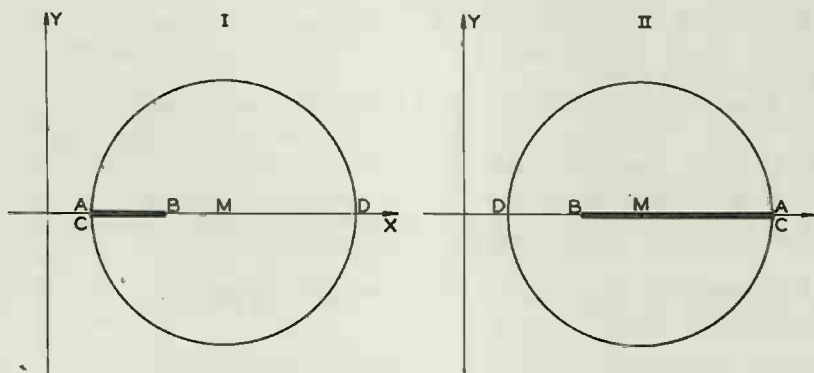


Fig. 21. De doorsnede in het xy -vlak.

Vervolgens voeren wij een positief getal u_0 in, gedefinieerd door de relatie: $c/a = \sinh u_0$. Hieruit vinden wij: $1 + b/c = \coth u_0$ en $b/a = e^{-u_0}$. Verder is $\tanh u_0/2 = (a - b)/(a + b)$. Is $p < 1$, dan is $\tanh u_0/2 = p/(2 - p)$; is daarentegen $p > 1$, dan is $\coth u_0/2 = p/(2 - p)$. Wij stellen $p/(2 - p) = \beta$. Blijkbaar is $\beta < 1$ als $p < 1$ en $\beta > 1$ als $p > 1$. Derhalve stellen wij $\beta = \cos \gamma$ als $p < 1$ en $\beta = \cosh \gamma'$ als $p > 1$. Verandert p van 0 tot 1, dan loopt γ van $\pi/2$ tot 0 en loopt p van 1 tot 2, dan loopt γ' van 0 tot ∞ . Wij zien, dat wij van het eerste op het tweede geval over kunnen gaan door γ te vervangen door $i\gamma'$. Het is echter natuurlijk niet zeker, dat dit verder in de berekening ook steeds zal opgaan. Daarom zullen wij de beide gevallen voorzichtigheidshalve gescheiden behandelen. Overigens zullen wij uiteindelijk zien, dat ook in het eindresultaat de vervanging van γ door $i\gamma'$ opgaat.

Als spanningsfunctie F_2 kiezen wij natuurlijk:

$$F_2 = -\frac{1}{2} G\omega \{(x - b - c)^2 + y^2 - a^2\} \quad (1)$$

Deze is nul op de cirkel ADC. Het vraagstuk bestaat er dus in, een harmonische functie F_1 te bepalen met de randvoorwaarden:

$$F_1(AB, BC) = \frac{1}{2} G\omega \{(x - b - c)^2 - a^2\}, \quad F_1(ADC) = 0 \quad (2)$$

19. *Conforme afbeelding van de doorsnede.* Wij zullen de conforme afbeelding, welke de omtrek van de doorsnede over doet gaan in een vorm, die geschikt is voor het werken met Fourierintegralen, in vier trappen uitvoeren. In wezen komt de afbeelding neer op enige malen toepassing van de transformatie (4, 1) en lineaire transformaties.

Eerste afbeelding:

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= c \coth^{1/2}(u_1 - iv_1) \\ x &= c \frac{\sinh u_1}{\cosh u_1 - \cos v_1}, \quad y = c \frac{\sin v_1}{\cosh u_1 - \cos v_1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

De getransformeerde figuur is weergegeven in fig. 22. De cirkel ADC

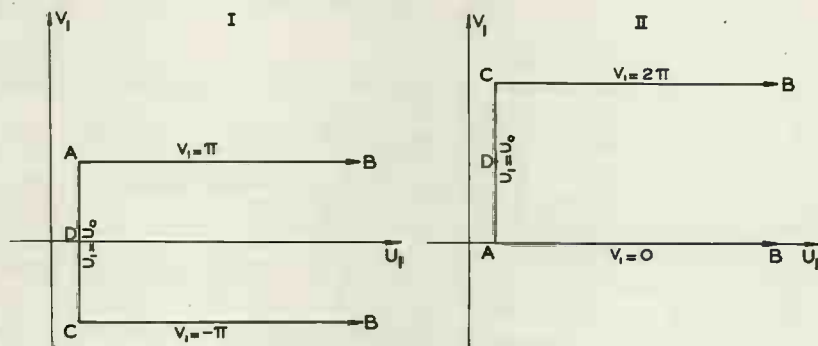


Fig. 22. De doorsnede in het u_1v_1 -vlak.

is overgegaan in de rechte $u = u_0$, waarbij $|v_1| < \pi$ als $p < 1$ en $0 < v_1 < 2$ als $p > 1$. De rechten AB en BC gaan over in de rechten $v_1 = \pi$ en $v_1 = -\pi$ als $p < 1$ en in de rechten $v_1 = 0$ en $v_1 = 2\pi$ als $p > 1$, waarbij in beide gevallen $u_1 > u_0$. (Het Riemannsche xy -vlak moet daartoe in het eerste geval opengesneden worden langs het gedeelte van de X -as tussen de punten $(-c, 0)$ en $(c, 0)$; in het tweede geval juist over het buiten deze punten gelegen gedeelte van de X -as).

Na enige herleidingen vinden wij voor de getransformeerde randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} F_1(u_1, \pm\pi) &= -\frac{1}{2} G\omega a^2 \sinh u_0 \frac{\sinh(u_1 - u_0)}{\cosh^2 u_1/2} \text{ voor } p < 1 \\ u_1 > u_0 \\ F_1(u_1, 0) &= -\frac{1}{2} G\omega a^2 \sinh u_0 \frac{\sinh(u_1 - u_0)}{\sinh^2 u_1/2} \text{ voor } p > 1 \\ u_1 > u_0 \\ F_1(u_0, v_1) &= 0 \quad |v_1| \leq \pi \text{ als } p < 1, \quad 0 \leq v_1 \leq 2\pi \text{ als } p > 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Tweede afbeelding:

$$\left. \begin{aligned} u_1 + iv_1 &= 2(u_2 + iv_2) + u_0, \quad u_1 = 2u_2 + u_0, \quad v_1 = 2v_2, \\ \text{voor } p < 1 \\ u_1 + iv_1 &= 2(u_2 - iv_2) + u_0 + i\pi, \quad u_1 = 2u_2 + u_0, \\ v_1 &= -2v_2 + \pi, \quad \text{voor } p > 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

De getransformeerde figuur is weergegeven in fig. 23. In beide gevallen hebben wij nu dezelfde afbeelding verkregen. De cirkel ADC is overgegaan in de v_2 -as voor $|v_2| < \pi/2$ en de rechten AB en BC zijn ge-

transformeerd in de rechten $v_2 = \pm\pi/2$ voor $u_2 > 0$. Daarentegen zijn de randvoorwaarden nog niet dezelfde. Zij luiden:

$$\left. \begin{aligned} F_1(u_2, \pm\pi/2) &= -^{1/2} G\omega a^2 \sinh u_0 \frac{\sinh 2u_2}{\cosh^2(u_2 + u_0/2)} \text{ voor } p < 1 \\ u_2 > 0 \\ F_1(u_2, \pm\pi/2) &= -^{1/2} G\omega a^2 \sinh u_0 \frac{\sinh 2u_2}{\sinh^2(u_2 + u_0/2)} \text{ voor } p > 1 \\ u_2 > 0 \\ F_1(0, v_2) &= 0 \quad |v_2| < \pi/2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Deze figuur is een driehoek en kan dus volgens een bekende stelling uit de functietheorie eenvoudig getransformeerd worden in een cirkel, waarbij de ligging van de punten A, B en C nog willekeurig is. Kiezen wij deze punten op een rechte, dan gaat daarmee de doorsnede over in een halfvlak en dus in een vorm, die zeer geschikt is voor het werken met Fourierintegralen. De integralen, die wij dan op te lossen krijgen, zijn echter zeer onaangenaam. Daarom kiezen wij een andere transformatie, waarbij dit bezwaar niet optreedt.

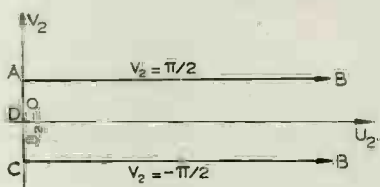


Fig. 23. De doorsnede in het u_2v_2 -vlak.

Derde afbeelding:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + iy_1 &= i \coth^{1/2} (u_2 - iv_2) \\ \operatorname{tgh} u_2 &= \frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \quad \operatorname{tg} v_2 = \frac{-2x_1}{x_1^2 + y_1^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De factor i in de afbeeldingsfunctie representeert een draaiing. De cirkel ADC is nu getransformeerd in de x_1 -as voor $|x_1| < 1$. De rechten

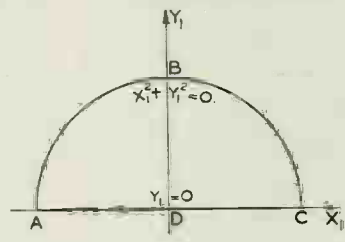


Fig. 24. De doorsnede in het x_1y_1 -vlak.

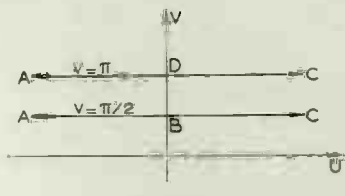


Fig. 25. De doorsnede in het uv -vlak.

AB en BC zijn getransformeerd in kwart delen van de eenheidscirkel in het eerste en tweede kwadrant (zie fig. 24). De randvoorwaarden zijn nu gelijkkluidend geworden:

$$F_1(ABC) = -2\beta G\omega a^2 \frac{y_1}{(1 + \beta y_1)^2}, \quad F_1(x_1, 0) = 0 \quad |x_1| < 1 \quad (6)$$

Hierbij valt op te merken, dat $\beta < 1$ als $p < 1$ en $\beta > 1$ als $p > 1$.

Vierde afbeelding:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + iy_1 &= \coth^{1/2}(u - iv) \\ x_1 &= \frac{\sinh u}{\cosh u - \cos v}, \quad y_1 = \frac{\sin v}{\cosh u - \cos v} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

De cirkel ADC gaat hierbij over in de rechte $v = \pi$ en de rechten AB en BC in de rechte $v = \pi/2$ (zie fig. 25). De randvoorwaarden zijn:

$$F_1(u, \pi/2) = -2\beta G\omega a^2 \frac{\cosh u}{(\cosh u + \beta)^2}, \quad F_1(u, \pi) = 0 \quad (8)$$

20. *Oplossing van het potentiaalvraagstuk.* De eerste randvoorwaarde (19, 8) schrijven wij in de vorm van een Fourierintegraal:

$$F_1(u, \pi/2) = -\frac{4}{\pi} \beta G\omega a^2 \int_0^\infty \cos ut \, dt \int_0^\infty \cos st \frac{\cosh s}{(\cosh s + \beta)^2} ds \quad (1)$$

Wij trachten nu een oplossing te vinden door superpositie van potentiaalfuncties in de volgende integraalvorm:

$$F_1(u, v) = \int_0^\infty \cos ut \sinh(\pi - v)t f(t) dt \quad (2)$$

Dit voldoet aan de differentiaalvergelijking en aan de tweede van de randvoorwaarden (19, 8). Aan de eerste randvoorwaarde in de vorm (1) is blijkbaar voldaan, indien:

$$f(t) = -\frac{4}{\pi} \beta G\omega a^2 \frac{1}{\sinh \pi t/2} \int_0^\infty \cos st \frac{\cosh s}{(\cosh s + \beta)^2} ds \quad (3)$$

Derhalve is de gezochte spanningsfunctie F_1 :

$$F_1 = -\frac{4}{\pi} \beta G\omega a^2 \int_0^\infty \cos ut \frac{\sinh(\pi - v)t}{\sinh \pi t/2} dt \int_0^\infty \cos st \frac{\cosh s}{(\cosh s + \beta)^2} ds \quad (4)$$

Wij doen geen moeite de integralen uit te werken, daar ons toch alleen de stijfheid interesseert en wij voorlopig wel zo gemakkelijk de integraalvorm aan kunnen houden.

21. *Bepaling van het wringmoment.* De eerste drie formules van nr. 7 kunnen wij weer ongewijzigd overnemen. De complementaire spanningsfunctie F_2 hebben wij niet meegetransformeerd, omdat wij haar niet nodig hebben. Immers de afgeleide van F_2 in de normaalrichting, die een rol zou spelen in de kringintegraal (7, 3)

$$(\tau_{zs} = -\partial F/\partial n = -\partial F_1/\partial n - \partial F_2/\partial n),$$

verdwijnt juist langs de rechten AB en BC , terwijl de rest van de omtrek toch niet medetelt bij de weg van de integraal, omdat daar $F_1 = 0$ is. Verder is het oppervlak, waarover de dubbelintegralen uitgestrekt moeten worden, dat van de volledige cirkel, zodat wij zonder meer weten:

$$2 \iint F_2 d\theta = G\omega a^4 \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Verder vinden wij na enige herleiding:

$$2 \iint F_1 d\theta = -G\omega a^4 \frac{16}{\pi} \beta^2 \int_0^\infty \coth \frac{\pi}{2} t t dt \left\{ \int_0^\infty \cos st \frac{\cosh s}{(\cosh s + \beta)^2} ds \right\}^2 \quad (2)$$

Dus is:

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{16}{\pi} \beta^2 \int_0^\infty \coth \frac{\pi}{2} t t dt \left\{ \int_0^\infty \cos st \frac{\cosh s}{(\cosh s + \beta)^2} ds \right\}^2 \quad (3)$$

De tweede integraal is behandeld in nr. 25. Daar zien wij, dat wij inderdaad de uitkomst voor $\beta > 1$ kunnen verkrijgen door in de uitkomst voor $\beta < 1$ de letter γ te vervangen door $i\gamma'$ (vergelijk nr. 18). Wij behoeven (3) dus slechts uit te werken voor $\beta < 1$ en behoeven dan pas in het eindresultaat γ door $i\gamma'$ te vervangen om het resultaat voor $\beta > 1$ te verkrijgen.

Met het oog op (25, 2) en (25, 3) vinden wij:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos st \frac{\cosh s}{(\cosh s + \beta)^2} ds &= \\ &= \int_0^\infty \cos st \frac{1}{\cosh s + \beta} ds - \cos \gamma \int_0^\infty \cos st \frac{1}{(\cosh s + \beta)^2} ds = \\ &= \pi \frac{\sinh \gamma t - \sin \gamma \cos \gamma t \cosh \gamma t}{\sin^2 \gamma \sinh \pi t} \end{aligned} \quad (4)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\pi}{2} - \frac{16 \cos^2 \gamma}{\pi \sin^6 \gamma} \int_0^\infty \frac{t dt}{\sinh^2 \pi t \cosh \pi t} \cdot (\sinh^2 2\gamma t - \\ &\quad - 4 \sin \gamma \cos \gamma t \sinh 2\gamma t \cosh 2\gamma t + 4 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma t^2 \cosh^2 2\gamma t) \end{aligned} \quad (5)$$

De integralen kunnen worden uitgewerkt. Volgens (23, 2), (23, 3) en (23, 4) vinden wij:

$$\begin{aligned} \mu &= \pi - \frac{1}{4\pi \sin^8 \gamma} \{ 8\gamma^2 (4 + 4 \cos 2\gamma + \cos 4\gamma) - 4\gamma (8 \sin 2\gamma + \\ &\quad + 5 \sin 4\gamma) + \sin^2 2\gamma (11 + 8 \cos 2\gamma - \cos 4\gamma) \} \quad \text{als } p < 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Vervangen wij γ door $i\gamma'$, dan volgt:

$$\begin{aligned} \mu &= \pi - \frac{1}{4\pi \sinh^8 \gamma'} \{ -8\gamma'^2 (4 + 4 \cosh 2\gamma' + \cosh 4\gamma') + 4\gamma' (8 \sinh 2\gamma' + \\ &\quad + 5 \sinh 4\gamma') - \sinh^2 2\gamma' (11 + 8 \cosh 2\gamma' - \cosh 4\gamma') \} \quad \text{als } p > 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Door in (6) of in (7) γ of γ' tot nul te laten naderen, vinden wij de waarde van μ voor $p = 1$. Wij vinden:

$$\mu = \pi - \frac{64}{9\pi} \quad \text{als } p = 1 \quad (8)$$

Laten wij p tot 2 naderen, dan vinden wij $\mu = \pi - 8/\pi$. De doorsnede bestaat dan uit twee halve cirkels, die juist nog aan het uiteinde van de middellijn met elkander verbonden zijn. Inderdaad is de ge-

vonden waarde het dubbele van die voor de halve cirkel, afgeleid in nr. 9 en 11.

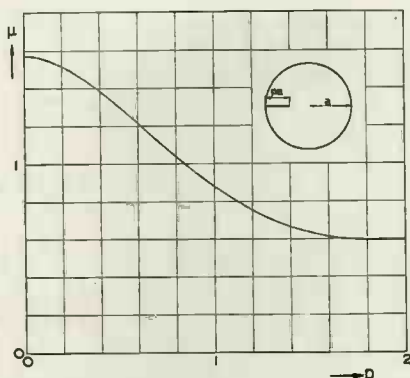


Fig. 26. De grootheid μ als functie van p .

Uit (6), (7) en (8) kan de waarde van μ voor een aantal waarden van p berekend worden. Het resultaat van deze berekening is weergegeven in tabel VI en fig. 26.

TABEL VI. De grootheid μ als functie van p bij een cirkel met radiale insnijding.

p	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
μ	1,5708	1,5163	1,3841	1,2137	1,0372	0,8781	0,7513	0,6639	0,6155	0,5964	0,5951

§ 4. Bepaalde integralen, die een rol in het voorgaande spelen.

22. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt \cos ct}{\sinh^2 \pi t} dt$ en hieruit afgeleide integralen. De bovenstaande integraal is voor ons werk belangrijk, omdat wij er zeer veel andere integralen uit af kunnen leiden, die in het vorige voorkwamen. De parameters a en b mogen complex zijn; c daarentegen wordt reëel verondersteld. Voor de convergentie is dan blijkbaar nodig en voldoende, dat $\text{Re}(a + b) < 2\pi$ is. Wij voeren voor de berekening een complexe variabele $t'' = t + it'$ in. Nu is:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt \cos ct}{\sinh^2 \pi t} dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt \cos ct}{\sinh^2 \pi t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt e^{ict}}{\sinh^2 \pi t} dt \quad (1) \end{aligned}$$

Wij integreren nu de integrand van de laatste integraal langs een

contour, gevormd door de t -as van $t = -M$ tot $t = M$, de rechte $t = M$ van $t' = 0$ tot $t' = N$, de rechte $t' = N$ van $t = M$ tot $t = -M$ en de rechte $t = -M$ van $t' = N$ tot $t' = 0$. N zij zodanig gekozen (bijv. $N = n + 1/2$, n geheel), dat de lijn $t' = N$ niet door een van de polen van de integrand gaat. Onder deze voorwaarde leidt men gemakkelijk af, dat de bijdrage van de rechten $t = M$, $t' = N$ en $t = -M$ tot nul nadert, indien wij M en N tot oneindig laten naderen, waarbij N aan de genoemde voorwaarde gebonden blijft. Derhalve is:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt \cos ct}{\sinh^2 \pi t} dt = 1/2 \int \frac{\sinh at'' \sinh bt'' e^{ict''}}{\sinh^2 \pi t''} dt'' \quad (2)$$

De binnen het contour vallende polen van de integrand zijn de punten $t'' = ki$, $k = 1, 2, 3 \dots$ ($t'' = 0$ is geen pool). Wij stellen derhalve $t'' = ki + h$ en ontwikkelen teller en noemer van de integrand naar h ter bepaling van het residu. Na wat rekenwerk volgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt \cos ct}{\sinh^2 \pi t} dt &= \pi i \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Residu } k^{\text{de}} \text{ pool}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ck} (c \sin ak \sin bk - a \cos ak \sin bk - b \sin ak \cos bk) \quad (3) \end{aligned}$$

De producten der goniometrische functies kunnen vervangen worden door goniometrische functies met als argument de som of het verschil der argumenten. Vervangen wij de goniometrische functies door (imaginaire) exponentiele functies, dan kunnen de benodigde sommaties uitgevoerd worden, aangezien de aldus ontstane reeksen meetkundige reeksen zijn. Op deze wijze vinden wij:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt \cos ct}{\sinh^2 \pi t} dt &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(a-b) \sin(a-b) - c \sinh c}{\cosh c - \cos(a-b)} - \frac{(a+b) \sin(a+b) - c \sinh c}{\cosh c - \cos(a+b)} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Door a , b en c bijzondere waarden te geven en door naar één van deze parameters te differentieren of reeksontwikkeling toe te passen, kunnen wij allerlei integralen afleiden, die wij bij de torsieproblemen nodig hadden zonder opnieuw de residue-rekening toe behoeven te passen.

Zo vinden wij door $a = b$ te kiezen:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh^2 at}{\sinh^2 \pi t} \cos ct dt = \frac{1}{4\pi} \left\{ c \coth \frac{c}{2} - \frac{c \sinh c + 2a \sin 2a}{\cosh c - \cos 2a} \right\} \quad (5)$$

Wanneer wij (5) links en rechts naar c ontwikkelen, hierbij gebruik makend van (10, 2) en de coëfficiënten der gelijknamige machten van c links en rechts gelijk stellen, volgen na wat rekenwerk de volgende integralen:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh^2 at}{\sinh^2 \pi t} dt = \frac{\sin a - a \cos a}{2\pi \sin a} \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh^2 at}{\sinh^2 \pi t} t^2 dt = \frac{-\sin^3 a + 3 \sin a - 3a \cos a}{12\pi \sin^3 a} \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh^2 at}{\sinh^2 \pi t} t^4 dt = \frac{-\sin^5 a - 30 \sin^3 a + 45 \sin a - 15a \cos a (3 - \sin^2 a)}{60\pi \sin^5 a} \quad (8)$$

Enige andere benodigde integralen vinden wij door in (4) $c = 0$ te substitueren:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at \sinh bt}{\sinh^2 \pi t} dt = \frac{1}{4\pi} \left\{ (a-b) \cot \frac{a-b}{2} - (a+b) \cot \frac{a+b}{2} \right\} \quad (9)$$

Door naar b te differentieren, volgt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at \cosh bt}{\sinh^2 \pi t} t dt = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{a-b}{2 \sin^2 \frac{a-b}{2}} + \frac{a+b}{2 \sin^2 \frac{a+b}{2}} - \cot \frac{a-b}{2} - \cot \frac{a+b}{2} \right\} \quad (10)$$

Stellen wij hierin $b = 0$, dan vinden wij:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at}{\sinh^2 \pi t} t dt = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{a}{\sin^2 \frac{a}{2}} - 2 \cot \frac{a}{2} \right\} \quad (11)$$

Integralen met in de noemer van de integrand $\sinh \pi t$ verkrijgen wij door in (4) $b = \pi$ te substitueren. Zo vinden wij:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at}{\sinh \pi t} \cos ct dt = \frac{\sin a}{2(\cosh c + \cos a)} \quad (12)$$

Ontwikkelen wij deze uitdrukking links en rechts naar c en stellen wij de coëfficiënten der gelijknamige machten van c links en rechts gelijk, dan volgen na wat rekenwerk de volgende integralen:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at}{\sinh \pi t} dt = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at}{\sinh \pi t} t^2 dt = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{a}{2}} \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at}{\sinh \pi t} t^4 dt = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{3 - \cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^4 \frac{a}{2}} \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at}{\sinh \pi t} t^6 dt = \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{45 - 30 \cos^2 \frac{a}{2} + 2 \cos^4 \frac{a}{2}}{\cos^6 \frac{a}{2}} \quad (16)$$

Differentieren wij (13) naar a , dan vinden wij:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh at}{\sinh \pi t} t dt = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{a}{2}} \quad (17)$$

Tenslotte zullen wij nog twee groepen integralen afleiden, waarbij de teller van de integrand geen hyperbolische functie bevat. Daartoe ontwikkelen wij (11) links en rechts naar a . Uit (10, 2) volgt ¹⁾:

$$\cot \frac{a}{2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} a^{2k-1} \quad \text{voor } 0 < |a| < 2\pi \quad (18)$$

en hieruit door differentiatie naar a :

$$\sin^{-2} \frac{a}{2} = -4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1) B_{2k}}{(2k)!} a^{2k-2} \quad \text{voor } 0 < |a| < 2\pi \quad (19)$$

Anderzijds is:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at}{\sinh^2 \pi t} t dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k-1}}{(2k-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{2k} dt}{\sinh^2 \pi t} \quad \text{voor } |a| < 2\pi \quad (20)$$

Met inachtnahme van de tekenwisselingen der Bernoullische getallen ¹⁾ volgt hier dus uit:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2k} dt}{\sinh^2 \pi t} = \frac{1}{\pi} |B_{2k}| \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (21)$$

Een analoge formule vinden wij door (13) links en rechts naar a te ontwikkelen. Uit (11, 8) volgt ¹⁾:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}-1}{(2k)!} B_{2k} a^{2k-1} \quad \text{voor } |a| < \pi \quad (22)$$

Anderzijds is:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh at}{\sinh \pi t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k-1}}{(2k-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{2k-1} dt}{\sinh \pi t} \quad \text{voor } |a| < \pi \quad (23)$$

Met inachtnahme van de tekenwisselingen der Bernoullische getallen ¹⁾ volgt hier dus uit:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2k-1} dt}{\sinh \pi t} = \frac{2^{2k}-1}{2k} |B_{2k}| \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (24)$$

23. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{\sinh^2 at t dt}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t}$ en hieruit afgeleide integralen. De parameter a zij reëel. Voor de convergentie van bovenstaande integraal is blijkbaar nodig en voldoende, dat $|a| < 2\pi$. Hoewel de integraal niets bijzonders vertoont voor $a = \pi$, zullen wij met het oog op de afleiding stellen $a = \pi + b$. Aangezien het teken van a niet ter zake doet, kunnen wij ons beperken tot $a > 0$ en derhalve tot $-\pi < b < \pi$. Het geval

¹⁾ Zie de noot op pag. 73.

$a = 0$, waardoor $b = -\pi$ zou zijn wordt met het oog op de volgende afleiding uitgesloten. Door de substitutie voor a en de daarbij gegeven grenzen van b kan nu door ontwikkeling van de teller de integraal omgezet worden in een som van enige convergente integralen van het type der in het vorige nummer behandelde.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 at t dt}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t} &= \int_0^\infty \frac{\sinh^2(\pi + b)t t dt}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t} = \\ &= \int_0^\infty \frac{\cosh^2 bt t dt}{\sinh \pi t \cosh \pi t} + \int_0^\infty \frac{\sinh 2bt}{\sinh^2 \pi t} t dt + \int_0^\infty \frac{\cosh \pi t \sinh^2 bt}{\sinh^3 \pi t} t dt \quad (1) \end{aligned}$$

De eerste integraal is direct te herleiden tot (22, 17) en (22, 24). De tweede valt onder (22, 11). De derde integraal is door partiële integratie te herleiden tot integralen van het type (22, 6) en (22, 11). Het uitgeintegreerde gedeelte valt weg. Na enige herleidingen vinden wij:

$$\int_0^\infty \frac{\sinh^2 at t dt}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t} = \frac{a^2 - a \sin 2a + \sin^2 a}{4\pi^2 \sin^2 a} - \frac{1}{16} \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} \quad (2)$$

Daar het antwoord even in a is en gelijk nul is voor $a = 0$, kunnen achteraf de beperkingen, die wij aan a hadden opgelegd met het oog op de afleiding, weer vervallen.

Differentieren wij (2) naar a , dan vinden wij:

$$\int_0^\infty \frac{\sinh at \cosh at}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t} t^2 dt = \frac{-a^2 \cos a + 2a \sin a - \cos a \sin^2 a}{4\pi^2 \sin^2 a} - \frac{1}{32} \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos^3 \frac{a}{2}} \quad (3)$$

Door nogmaals naar a te differentieren en gebruik te maken van de integraal, die men verkrijgt door in de uitkomst te substitueren $a = 0$, vinden wij nog de volgende integraal:

$$\int_0^\infty \frac{\cosh^2 at t^3 dt}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t} = \frac{3a^2 - 3a \sin 2a - 2a^2 \sin^2 a + 3 \sin^2 a + \sin^4 a}{8\pi^2 \sin^4 a} - \frac{2 + \sin^4 \frac{a}{2}}{128 \cos^4 \frac{a}{2}} \quad (4)$$

De genoemde hulpintegraal, die wij trouwens ook verkrijgen door in (4) weer te substitueren $a = 0$, luidt:

$$\int_0^\infty \frac{t^3 dt}{\sinh^3 \pi t \cosh \pi t} = \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{64} \quad (5)$$

24. De integraal $I(m, n, p) = \int_0^\infty \frac{\cosh^n \pi t}{\sinh^m \pi t} t^p dt$. Voor de convergentie van bovenstaande integraal is nodig en voldoende, dat $p + 1 > m > n$. Voor ons doel is het voldoende de berekening aan te geven voor gehele, niet negatieve waarden van n en voor gehele positieve waarden van m en p . (De enige integraal van deze familie, waarbij niet aan deze voorwaarden voldaan is en welke voor ons nodig was, is (23, 5)).

Indien $n > 1$ is, reduceren wij n door een factor $\cosh^2 \pi t$ uit de teller

TABEL VII. De integraal $I(m, n, p) = \int_0^\infty \frac{\cosh^p \pi t}{\sinh^m \pi t} t^p dt$ als functie van m, n en p .

n	m \ p	1	2	3	4	5	6
0	1	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$	
	2		$\frac{1}{6\pi}$		$\frac{1}{30\pi}$		$\frac{1}{42\pi}$
	3			$\frac{3}{4\pi^2} - \frac{1}{16}$		$\frac{5}{4\pi^2} - \frac{1}{8}$	
	4				$\frac{1}{3\pi^3} - \frac{1}{45\pi}$		$\frac{1}{6\pi^3} - \frac{1}{63\pi}$
	5					$\frac{5}{4\pi^4} - \frac{25}{24\pi^2} + \frac{3}{32}$	
	6						$\frac{1}{2\pi^5} - \frac{1}{6\pi^3} + \frac{4}{315\pi}$
1	2		$\frac{1}{2\pi}$		$\frac{1}{2\pi}$		$\frac{3}{2\pi}$
	3			$\frac{1}{4\pi^2}$		$\frac{1}{12\pi^2}$	
	4				$\frac{1}{\pi^3} - \frac{1}{12\pi}$		$\frac{5}{2\pi^3} - \frac{1}{4\pi}$
	5					$\frac{5}{12\pi^4} - \frac{1}{36\pi^2}$	
	6						$\frac{3}{2\pi^5} - \frac{5}{4\pi^3} + \frac{9}{80\pi}$
	2	3			$\frac{3}{4\pi^2} + \frac{1}{16}$		$\frac{5}{4\pi^2} + \frac{1}{8}$
4					$\frac{1}{3\pi^3} + \frac{1}{90\pi}$		$\frac{1}{6\pi^3} + \frac{1}{126\pi}$
5						$\frac{5}{4\pi^4} + \frac{5}{24\pi^2} - \frac{1}{32}$	
6							$\frac{1}{2\pi^5} - \frac{1}{315\pi}$
3	4				$\frac{1}{\pi^3} + \frac{5}{12\pi}$		$\frac{5}{2\pi^3} + \frac{5}{4\pi}$
	5					$\frac{5}{12\pi^4} + \frac{1}{18\pi^2}$	
	6						$\frac{3}{2\pi^5} + \frac{5}{4\pi^3} - \frac{11}{80\pi}$

te vervangen door $1 + \sinh^2 \pi t$. Op deze wijze vinden wij de volgende recursievergelijking:

$$I(m, n, p) = I(m, n-2, p) + I(m-2, n-2, p) \quad (1)$$

Door dit proces te herhalen, komen wij tot integralen met $n = 0$ of $n = 1$, al naar gelang n even of oneven was. Een integraal, waarvoor $n = 1$ is, kunnen wij reduceren door partiele integratie, waarbij het uitgeintegreerde gedeelte wegvalt.

$$I(m, 1, p) = \frac{p}{m-1} \frac{1}{\pi} I(m-1, 0, p-1) \quad (2)$$

Op deze wijze hebben wij dus altijd een integraal met $n = 0$ verkregen. Hierin kunnen wij, zo $m > 2$ is, nu m reduceren door de teller te voorzien van een factor $1 = \cosh^2 \pi t - \sinh^2 \pi t$. Door vervolgens twee maal partieel te integreren, waarbij de uitgeintegreerde gedeelten wegvallen, vinden wij:

$$I(m, 0, p) = \frac{p(p-1)}{(m-1)(m-2)\pi^2} I(m-2, 0, p-2) - \frac{m-2}{m-1} I(m-2, 0, p) \quad (3)$$

Door dit proces te herhalen komen wij tot integralen van het type $I(1, 0, p)$ of $I(2, 0, p)$. Deze integralen zijn bekend, want wij hebben ze al afgeleid in (22, 21) en (22, 24) althans voor even waarden van $m + p$. Het is met het oog op ons beperkte doel niet nodig algemenere gegevens te bezitten, want de integralen, die wij nodig hebben voldoen alle aan de gestelde conditie. In andere omstandigheden is het trouwens niet moeilijk (22, 21) en (22, 24) door middel van de ζ -functie van RIEMANN uit te breiden, waardoor deze conditie vervalft.

Met het geschetste herleidingsproces is het mogelijk $I(m, n, p)$ voor een aantal waarden van de parameters te berekenen. De resultaten zijn neergelegd in tabel VII.

Wij wijzen er nog op, dat voor andere waarden van m , n en p , die aan de convergentievoorwaarde voldoen, de herleidingen analoog kunnen geschieden.

25. De integraal $\int_0^\infty \frac{\cos xt \, dt}{\cosh t + c}$ en hieruit afgeleide integralen. Zij γ een complex getal, waarvoor geldt: $|\operatorname{Re} \gamma| < \pi$. Dan kan de functie $\sinh \gamma x / \sinh \pi x$ in een Fourierintegraal ontwikkeld worden. Met behulp van (22, 12) vinden wij:

$$\frac{\sinh \gamma x}{\sinh \pi x} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xt \, dt \int_0^\infty \frac{\sinh \gamma s}{\sinh \pi s} \cos ts \, ds = \frac{\sin \gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos xt \, dt}{\cosh t + \cos \gamma} \quad (1)$$

Wij stellen $\cos \gamma = c$. Voor imaginaire waarden van γ is $c > 1$, voor reële γ ($0 \leq \gamma < \pi$) is $-1 < c \leq 1$. Andere waarden van γ en c komen voor ons niet in aanmerking. Uit (1) volgt dan:

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt \, dt}{\cosh t + c} = \frac{\pi}{\sin \gamma} \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \pi x} \quad (2)$$

Door links en rechts twee maal naar γ te differentieren, vinden wij de integralen:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xt \, dt}{(\cosh t + c)^2} = \frac{\pi(x \sin \gamma \cosh \gamma x - \cos \gamma \sinh \gamma x)}{\sinh \pi x \sin^2 \gamma} \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xt \, dt}{(\cosh t + c)^3} = \frac{\pi\{(x^2 \sin^2 \gamma + 2 \cos^2 \gamma + 1) \sinh \gamma x - 3x \sin \gamma \cos \gamma \cosh \gamma x\}}{2 \sinh \pi x \sin^3 \gamma} \quad (4)$$

26. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{\cos xt \, dt}{c^2 + t^2}$ en hieruit afgeleide integralen. Zij c een reëel getal, waarvoor geldt $c \neq 0$. Dan kan de functie $e^{-|cx|}$ in een Fourierintegraal ontwikkeld worden. Met behulp van (I, 29, 2) vinden wij:

$$e^{-|cx|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xt \, dt \int_0^{\infty} \cos st \, e^{-|cs|} \, ds = \frac{2c}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xt \, dt}{c^2 + t^2} \quad (1)$$

Hieruit volgt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xt \, dt}{c^2 + t^2} = \frac{\pi}{2c} e^{-|cx|} \quad (2)$$

Door hierin $x = 0$ te stellen en twee maal naar c te differentieren, vinden wij de, overigens elementaire integralen:

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{c^2 + t^2} = \frac{\pi}{2c}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{(c^2 + t^2)^2} = \frac{\pi}{4c^3}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{(c^2 + t^2)^3} = \frac{3\pi}{16c^5} \quad (3, 4, 5)$$

27. Eigenschappen van de Ψ -functie en haar afgeleiden. In de volgende nummers zullen wij herhaaldelijk te maken krijgen met een aantal eigenschappen van de zg. Ψ -functie en haar afgeleiden. Deze hangt samen met de zg. faculteitfunctie $x!$, waaronder wij de volgende functie verstaan:

$$x! = e^{-Cx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \prod_{k=1}^n \frac{k}{x + k}$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,577216 \dots \quad (1)$$

Zoals men gemakkelijk verifieert, zijn de beide productvoorstellungen identiek. Uit de tweede leidt men de volgende differentievergelijking af:

$$x! = x(x-1)! \quad (2)$$

Voorts ziet men uit (1), dat $0! = 1$, zodat het door (1) gedefinieerde begrip faculteit voor gehele positieve waarden van x overeenstemt met het elementaire begrip faculteit.

De logarithmische afgeleide van $x!$ naar x geven wij aan met $\Psi(x)$ ¹⁾.

1) Vaak wordt $\frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{d \ln(x-1)!}{dx} = \Psi(x)$ gesteld. Wij gebruiken onze schrijfwijze in overeenstemming met E. JAHNKE und F. EMDE, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 3 Aufl. Leipzig 1938 Teubner, waar men ook litteratuur vindt opgegeven.

Aangezien de eigenschappen van deze functie en haar afgeleiden wellicht niet algemeen bekend zijn, geven wij er in dit nummer een overzicht van, voorzover wij ze nodig hebben. Wij maken daarbij behalve van (2) ook nog van enige andere eigenschappen van de faculteit gebruik, welke niet zo eenvoudig uit (1) volgen en voor welke afleiding naar de betreffende litteratuur verwezen wordt. Wij geven met accenten differentiaties naar het argument aan. Uit (1) volgt dan:

$$\left. \begin{aligned} \ln x! &= -Cx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln \frac{k+x}{k} \right) \\ \Psi(x) &= \frac{d \ln x!}{dx} = -C + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right), & \Psi'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+x)^{-2} \\ \Psi''(x) &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} (k+x)^{-3}, & \Psi'''(x) &= 6 \sum_{k=1}^{\infty} (k+x)^{-4} \end{aligned} \right\} (3)$$

Naast deze convergente ontwikkelingen bestaan de volgende asymptotische ontwikkelingen²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \ln x! &\sim \ln \sqrt{2\pi} + (x + 1/2) \ln x - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} x^{-2k+1} \\ \Psi(x) &\sim \ln x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k} x^{-k}, & \Psi'(x) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{-k-1} \\ \Psi''(x) &\sim - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) B_k x^{-k-2}, & \Psi'''(x) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) B_k x^{-k-3} \end{aligned} \right\} (4)$$

Uitgeschreven luiden deze reeksen:

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x) &\sim \ln x + \frac{1}{2} x^{-1} - \frac{1}{12} x^{-2} + \frac{1}{120} x^{-4} - \frac{1}{252} x^{-6} + \frac{1}{240} x^{-8} - \dots \\ \Psi'(x) &\sim x^{-1} - \frac{1}{2} x^{-2} + \frac{1}{6} x^{-3} - \frac{1}{30} x^{-5} + \frac{1}{42} x^{-7} - \frac{1}{30} x^{-9} + \dots \\ \Psi''(x) &\sim -x^{-2} + x^{-3} - \frac{1}{2} x^{-4} + \frac{1}{6} x^{-6} - \frac{1}{6} x^{-8} + \frac{3}{10} x^{-10} - \dots \\ \Psi'''(x) &\sim 2x^{-3} - 3x^{-4} + 2x^{-5} - x^{-7} + \frac{4}{3} x^{-9} - 3x^{-11} + \dots \end{aligned} \right\} (5)$$

Uit (2) volgen de differentievergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \ln x! - \ln (x-1)! &= \ln x \\ \Psi(x) - \Psi(x-1) &= \frac{1}{x}, & \Psi'(x) - \Psi'(x-1) &= -\frac{1}{x^2} \\ \Psi''(x) - \Psi''(x-1) &= \frac{2}{x^3}, & \Psi'''(x) - \Psi'''(x-1) &= -\frac{6}{x^4} \end{aligned} \right\} (6)$$

²⁾ Zie de noot op pag. 73.

Door herhaalde gebruikmaking hiervan volgt:

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x+n) &= \Psi(x) + \sum_{i=1}^n (x+i)^{-1}, & \Psi(x-n) &= \Psi(x) - \sum_{i=0}^{n-1} (x-i)^{-1} \\ \Psi'(x+n) &= \Psi'(x) - \sum_{i=1}^n (x+i)^{-2}, & \Psi'(x-n) &= \Psi'(x) + \sum_{i=0}^{n-1} (x-i)^{-2} \\ \Psi''(x+n) &= \Psi''(x) + 2 \sum_{i=1}^n (x+i)^{-3}, & \Psi''(x-n) &= \Psi''(x) - 2 \sum_{i=0}^{n-1} (x-i)^{-3} \\ \Psi'''(x+n) &= \Psi'''(x) - 6 \sum_{i=1}^n (x+i)^{-4}, & \Psi'''(x-n) &= \Psi'''(x) + 6 \sum_{i=0}^{n-1} (x-i)^{-4} \end{aligned} \right\} (7)$$

Vervolgens bestaat er het volgende verband tussen de functiewaarde in twee punten, welke symmetrisch liggen t.o.v. $x = -1/2$:

$$\left. \begin{aligned} \ln(-x)! + \ln(x-1)! &= \ln \pi - \ln \sin \pi x \\ \Psi(-x) - \Psi(x-1) &= \pi \cot \pi x, & \Psi'(-x) + \Psi'(x-1) &= \left(\frac{\pi}{\sin \pi x} \right)^2 \\ \Psi''(-x) - \Psi''(x-1) &= \frac{2\pi^3 \cos \pi x}{\sin^3 \pi x}, & \Psi'''(-x) + \Psi'''(x-1) &= \left. \begin{aligned} &= \frac{2\pi^4(3 - 2 \sin^2 \pi x)}{\sin^4 \pi x} \end{aligned} \right\} (8) \end{aligned} \right\}$$

Combinatie van (7) en (8) stelt ons in staat het verband te leggen tussen de waarden van de functies in twee punten welke symmetrisch gelegen zijn t.o.v. $x = k$ of $x = k + 1/2$ (k geheel).

Tenslotte bestaat er een verband tussen de waarden van de functie in een aantal punten, dat een interval ter grootte van de eenheid in gelijke delen verdeelt:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(x - \frac{i}{n} \right)! &= \ln \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}} - \ln(nx)! - nx \ln n \\ \sum_{i=0}^{n-1} \Psi \left(x - \frac{i}{n} \right) &= n \Psi(nx) - n \ln n, & \sum_{i=0}^{n-1} \Psi' \left(x - \frac{i}{n} \right) &= n^2 \Psi'(nx) \\ \sum_{i=0}^{n-1} \Psi'' \left(x - \frac{i}{n} \right) &= n^3 \Psi''(nx), & \sum_{i=0}^{n-1} \Psi''' \left(x - \frac{i}{n} \right) &= n^4 \Psi'''(nx) \end{aligned} \right\} (9)$$

Voor $x = -1/2$ en $x = 0$ volgen uit (3) de volgende waarden:

$$\left. \begin{aligned} \Psi(-1/2) &= -C - \ln 4 = -1,963510, & \Psi(0) &= -C = -0,577216 \\ \Psi'(-1/2) &= \frac{1}{2} \pi^2 = 4,934802, & \Psi'(0) &= \frac{1}{6} \pi^2 = 1,644934 \\ \Psi''(-1/2) &= -14 \zeta(3) = -16,828797, & \Psi''(0) &= -2 \zeta(3) = -2,404114 \\ \Psi'''(-1/2) &= \pi^4 = 97,409091, & \Psi'''(0) &= \frac{1}{15} \pi^4 = 6,493939 \end{aligned} \right\} (10)$$

Voor uitgebreidere numerieke gegevens zij verwezen naar de tafels van deze functies ¹⁾.

28. De integraal $\int_0^{\infty} e^{-xt} \coth t t dt$ en hieruit afgeleide integralen.

Voor de convergentie van bovenstaande integraal is nodig en voldoende, dat $x > 0$ is. Voor de berekening ontwikkelen wij $\coth t$ in de voor alle $t > 0$ convergente reeks:

$$\coth t = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2kt} \quad (1)$$

Derhalve volgt na verwisseling van de volgorde van de integratie en sommatie:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-xt} \coth t t dt &= \int_0^{\infty} e^{-xt} t dt + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(2k+x)t} t dt = \\ &= \frac{1}{x^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k+x)^{-2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{x}{2}\right)^{-2} \end{aligned} \quad (2)$$

Met het oog op (27, 3) kan dit geschreven worden als:

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} \coth t t dt = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \Psi' \left(\frac{x}{2} \right) \quad (3)$$

Door twee maal naar x te differentieren, vinden wij nog de volgende twee integralen:

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} \coth t t^2 dt = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{4} \Psi'' \left(\frac{x}{2} \right) \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} \coth t t^3 dt = \frac{6}{x^4} + \frac{1}{8} \Psi''' \left(\frac{x}{2} \right) \quad (5)$$

29. De integraal K_1 . In (6, 6) is de integraal K_1 gedefinieerd. Indien wij ter vereenvoudiging invoeren:

$$p = 1 - \frac{a'}{\pi}, \quad q = \frac{a'}{\pi} - \frac{a}{\pi} \quad (1)$$

gaat (6, 6) over in:

$$\pi^2 K_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sinh pt}{\sinh t} \coth qt t dt \quad (2)$$

Voor de convergentie is nodig en voldoende, dat $|p| < 1$ en $q \neq 0$ is. Aangezien de integraal een oneven functie van p en q is, is het geen beperking zich te bepalen tot $p > 0$ en $q > 0$.

¹⁾ Brit. Ass. Adv. Sc., Math. tables, vol. I (London 1931).

H. T. DAVIS, Tables of higher math. functions, vol. I, II (Bloomington 1934, 1935, Principia Press). Aangezien wij door de oorlogstoestand over geen van beide werken beschikten, hebben wij de benodigde waarden zelf berekend.

Voor de berekening maken wij gebruik van de voor alle $t > 0$ convergente ontwikkeling:

$$\frac{\sinh pt}{\sinh t} = \sum_{k=0}^{\infty} \{e^{-(2k+1-p)t} - e^{-(2k+1+p)t}\} \quad (3)$$

Derhalve is met gebruikmaking van (28, 3) en (3):

$$\begin{aligned} \pi^2 K_1 &= \frac{1}{q^2} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \{e^{-(2k+1-p)t/q} - e^{-(2k+1+p)t/q}\} \coth t \, t \, dt = \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{q^2}{(2k+1-p)^2} - \frac{q^2}{(2k+1+p)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right) - \frac{1}{2} \Psi' \left(\frac{2k+1+p}{2q} \right) \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Door een kleine herleiding en gebruik van (27, 3) en (27, 6) volgt:

$$\begin{aligned} \pi^2 K_1 &= \frac{1}{4} \left\{ \Psi' \left(\frac{-1-p}{2} \right) - \Psi' \left(\frac{-1+p}{2} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right) - \Psi' \left(\frac{2k+1+p}{2q} \right) \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

Wij wijzen erop, dat de in het tweede lid voorkomende oneindige som van verschillen van telkens twee Ψ' -functies niet gesplitst mag worden in het verschil van de sommen dier functies, omdat de deelsommen divergent zijn. Immers $\Psi'(x) \sim 1/x$ voor grote x . De termen van deze som zijn van de orde k^{-2} en de som is dus convergent. Zij is echter te zwak convergent om in deze vorm numeriek berekend te kunnen worden. Uitgezonderd in de later te behandelen gevallen, waarin de sommatie in gesloten vorm verricht kan worden, moeten wij dus een transformatie aangeven, waardoor de som practisch berekend kan worden. Dit kan — en buitengewoon doeltreffend — door tot een zodanige waarde van k te sommeren, dat de onder het somteken optredende Ψ' -functies met de vereiste nauwkeurigheid door hun asymptotische ontwikkelingen vervangen kunnen worden. Dit is practisch altijd al bij de tweede of derde term het geval. De rest van de som kan in een sterk convergente reeks ontwikkeld worden. Stel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right) - \Psi' \left(\frac{2k+1+p}{2q} \right) \right\} = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right) - \Psi' \left(\frac{2k+1+p}{2q} \right) \right\} + R_N \quad (6) \end{aligned}$$

Nu volgt met het oog op (27, 5):

$$\begin{aligned} R_N &= \sum_{k=N}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right) - \Psi' \left(\frac{2k+1+p}{2q} \right) \right\} = \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2q}{2k+1-p} - \frac{2q}{2k+1+p} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{4q^2}{(2k+1-p)^2} - \frac{4q^2}{(2k+1+p)^2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left\{ \frac{8q^3}{(2k+1-p)^3} - \frac{8q^3}{(2k+1+p)^3} \right\} - \frac{1}{30} \left\{ \frac{32q^5}{(2k+1-p)^5} - \frac{32q^5}{(2k+1+p)^5} \right\} + \dots \right] \quad (7) \end{aligned}$$

De termen tusschen accolades ontwikkelen wij met behulp van de binomiaalreeks:

$$\frac{1}{(2k+1-p)^m} - \frac{1}{(2k+1+p)^m} = \frac{-2}{(2k+1)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{2n+1} \left(\frac{p}{2k+1}\right)^{2n+1} \quad (8)$$

Substitueren wij dit in (7) en verwisselen wij de sommatievolgorde, dan vinden wij na enig rekenen:

$$R_N = 4pq \sum_{k=N}^{\infty} (2k+1)^{-2} - 8pq^2 \sum_{k=N}^{\infty} (2k+1)^{-3} + (4p^3q + 8pq^3) \sum_{k=N}^{\infty} (2k+1)^{-4} - \\ - 16p^3q^2 \sum_{k=N}^{\infty} (2k+1)^{-5} + \left(4p^5q + \frac{80}{3}p^3q^3 - \frac{32}{3}pq^5\right) \sum_{k=N}^{\infty} (2k+1)^{-6} \dots \quad (9)$$

Voor een bepaalde waarde van N zijn de in deze formule voorkomende reeksen bekende coëfficiënten, daar ze berekend kunnen worden met behulp van de formule:

$$\sum_{k=N}^{\infty} (2k+1)^{-n} = (1 - 2^{-n}) \zeta(n) - \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)^{-n}, \quad (10)$$

waarin $\zeta(z)$ de zêta-functie van RIEMANN voorstelt.

De reeksen zijn in tabel VIII getabelleerd. Slechts voor zeer nauwkeurig werk is het echter nodig zulke hoge waarden voor N toe te passen

TABEL VIII. De som $\sum_{k=N}^{\infty} (2k+1)^{-n}$ als functie van n en N .

N	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
0	1,23370	1,05180	1,01467	1,00452	1,00145
1	0,23370	0,05180	0,01467	0,00452	0,00145
2	0,12259	0,01476	0,00232	0,00041	0,00008
3	0,08259	0,00676	0,00072	0,00009	0,00001
4	0,06218	0,00385	0,00030	0,00003	0,00000
5	0,04984	0,00247	0,00015	0,00001	0,00000
6	0,04157	0,00172	0,00008	0,00001	0,00000
7	0,03566	0,00127	0,00005	0,00000	0,00000
8	0,03121	0,00097	0,00003	0,00000	0,00000
9	0,02775	0,00077	0,00002	0,00000	0,00000
10	0,02498	0,00062	0,00001	0,00000	0,00000

als hierin mede zijn opgenomen. Wij zien, dat speciaal voor de grotere waarden van n de reeksen sterk met toenemende N afnemen. Het is

daarom voor de toepassing van het rekenproces vaak aanbevelenswaardig de waarde van N iets hoger te kiezen dan strikt noodzakelijk is. Hierdoor wordt de restterm R_N aanzienlijk eenvoudiger te berekenen.

Wij zullen nu aantonen, dat de in (5) voorkomende reeks onder de conditie

$$p + mq = n \quad (m \text{ en } n \text{ geheel}) \quad (11)$$

in gesloten vorm gesommeerd kan worden. Deze voorwaarde is gelijkwaardig met:

$$\frac{2k+1-p}{2q} - \frac{2(k-n)+1+p}{2q} = m \quad (m \text{ en } n \text{ geheel}) \quad (12)$$

Noemt men van de bij de index k behorende term $\Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right) - \Psi' \left(\frac{2k+1+p}{2q} \right)$ van de reeks in (5) $\Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right)$ het aftrektal en $\Psi' \left(\frac{2k+1+p}{2q} \right)$ de aftrekker, dan betekent (12), dat voor iedere twee termen, wier indices een bedrag n verschillen, het argument van het aftrektal van de eerste term m groter is dan het argument van de aftrekker van de tweede term. Bij de behandeling moeten wij onderscheid maken tussen $n \leq 0$ en $n > 0$. Voor $n \leq 0$ (dan is dus ook $m < 0$) vinden wij met inachtnaam van (27, 7):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right) - \Psi' \left(\frac{2k+1+p}{2q} \right) \right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(\frac{2k+1-p}{2q} \right) - \right. \\ &- \left. \Psi' \left(\frac{2(k-n)+1+p}{2q} \right) \right\} - \sum_{j=0}^{-n-1} \Psi' \left(\frac{2j+1+p}{2q} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{-m} \left(\frac{2k+1-p}{2q} + i \right)^{-2} - \sum_{j=0}^{-n-1} \Psi' \left(\frac{2j+1+p}{2q} \right) = \\ &= q^2 \sum_{i=1}^{-m} \Psi' \left(\frac{2iq-1-p}{2} \right) - \sum_{j=0}^{-n-1} \Psi' \left(\frac{2j+1+p}{2q} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

Hier en in het vervolg betekent het symbool $\sum_{j=0}^{-1}$, dat optreedt, als $n = 0$, dat in het geheel geen term van de som genomen moet worden. Substitutie van (13) in (5) geeft:

$$\begin{aligned} \pi^2 K_1 &= \frac{1}{4} \left\{ \Psi' \left(\frac{-1-p}{2} \right) - \Psi' \left(\frac{-1+p}{2} \right) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{-m} \Psi' \left(\frac{2iq-1-p}{2} \right) - \\ &- \frac{1}{2q^2} \sum_{j=0}^{-n-1} \Psi' \left(\frac{2j+1+p}{2q} \right) = -\frac{1}{4} \left\{ \Psi' \left(\frac{-1-p}{2} \right) + \Psi' \left(\frac{-1+p}{2} \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{-m} \Psi' \left(\frac{2iq-1-p}{2} \right) - \frac{1}{2q^2} \sum_{j=0}^{-n-1} \Psi' \left(\frac{2j+1+p}{2q} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

Door hierop (27, 8) toe te passen, vindt men:

$$\pi^2 K_1 = \frac{-\pi^2}{4 \cos^2 p \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \Psi' \left(\frac{2iq - 1 - p}{2} \right) - \frac{1}{2q^2} \sum_{j=0}^{n-1} \Psi' \left(\frac{2j + 1 + p}{2q} \right) \\ p + mq = n \leq 0 \quad (15)$$

Op analoge wijze kunnen wij een soortgelijke formule opstellen voor het geval $n > 0$ is (dan is ook $m > 0$):

$$\pi^2 K_1 = \frac{\pi^2}{4 \cos^2 p \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \Psi' \left(\frac{2iq - 1 + p}{2} \right) + \frac{1}{2q^2} \sum_{j=0}^{n-1} \Psi' \left(\frac{2j + 1 - p}{2q} \right) \\ p + mq = n > 0 \quad (16)$$

De Ψ' -functies, die in (15) en (16) voorkomen, kunnen nog met behoud van het gesloten zijn der uitdrukking weggewerkt worden. Immers beschouwing van de sommen leert ons, dat telkens twee argumenten der voorkomende Ψ' -functies symmetrisch gelegen zijn ten opzichte van een punt k of $k + \frac{1}{2}$ (k geheel), zodat wij met behulp van (27, 7) en (27, 8) de Ψ' -functies door elementaire functies kunnen vervangen. Het verdient echter niet veel aanbeveling dergelijke uitdrukkingen op te stellen. De formules worden aanmerkelijk ingewikkelder (uitgezonderd voor $n = 0$) en wij moeten behalve met de reeds gemaakte onderscheiding $n \leq 0$ of $n > 0$ ook nog rekening houden met het feit of m en n even of oneven zijn, zodat wij acht verschillende formules krijgen. Verder zijn de Ψ' -functies uitstekend te berekenen en getabelleerd en er is dus geen enkele reden ze achter te stellen bij de goniometrische functies.

Is $q = \frac{1}{2}$ of $q = 1$, dan is het, behalve in het geval $p = \frac{1}{2}$, niet mogelijk waarden van m en n te vinden, die aan (11) voldoen. Het is ons niet gelukt voor deze twee gevallen de som uit (5) direct te sommeren. Daarentegen is het wel mogelijk voor deze waarden van q de integraal uit te werken met behulp van de hulpintegralen van de vorige nummers en voor $q = \frac{1}{2}$ hebben wij dit reeds gedaan in (9, 3). In onze nieuwe notatie vinden wij:

$$\pi^2 K_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \frac{2p\pi - \sin 2p\pi}{\sin^2 p\pi} \quad q = \frac{1}{2} \quad (17)$$

Evenzo vinden wij voor $q = 1$ met behulp van (22, 10):

$$\pi^2 K_1 = \frac{\pi}{4} \frac{p\pi + \sin p\pi}{\cos^2 p \frac{\pi}{2}} \quad q = 1 \quad (18)$$

Door dit te vergelijken met (5) kunnen wij omgekeerd de som op indirecte wijze bepalen. Wij vinden dan de volgende twee sommeringseigenschappen van de Ψ' -functies:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ \Psi'(2k + 1 - p) - \Psi'(2k + 1 + p) \} = \\ = -\frac{1}{8} \left\{ \Psi' \left(\frac{-1 - p}{2} \right) - \Psi' \left(\frac{-1 + p}{2} \right) \right\} + \frac{\pi}{4} \frac{2p\pi - \sin 2p\pi}{\sin^2 p\pi} \quad (19)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(k + \frac{1-p}{2} \right) \right\} - \Psi' \left(k + \frac{1+p}{2} \right) \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \Psi' \left(\frac{-1-p}{2} \right) - \Psi' \left(\frac{-1+p}{2} \right) \right\} + \frac{\pi p\pi + \sin p\pi}{2 \cos^2 p \frac{\pi}{2}} \quad (20)$$

Met behulp van de thans ter beschikking staande middelen is voor een aantal waarden van p en q de berekening van K_1 uitgevoerd en in tabel IX weergegeven. Van de 55 waarden, die berekend zijn, konden er 44 met behulp van de formules in gesloten vorm berekend worden. De overige zijn berekend met behulp van (5) en (9). In een vroeger

TABEL IX. De integraal $\pi^2 K_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sinh pt}{\sinh t} \coth qt \, t \, dt$ als functie van p en q .

$\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0	2,5293	5,1953	8,3272	11,6930	16,2094	22,6045	33,115	55,585	145,91
0,2	0	1,3231	2,7279	4,3138	6,2372	8,7869	12,5974	19,397	35,846	
0,3	0	0,9433	1,9515	3,1080	4,5462	6,5206	9,6091	15,445		
0,4	0	0,7657	1,5900	2,5498	3,7698	5,4931	8,2796			
0,5	0	0,6667	1,3893	2,2413	3,3438	4,9348				
0,6	0	0,6057	1,2658	2,0506	3,0841					
0,7	0	0,5654	1,1728	1,9275	2,9138					
0,8	0	0,5372	1,1274	1,8413	2,7951					
0,9	0	0,5169	1,0865	1,7790	2,7118					
1,0	0	0,5017	1,0560	1,7328	2,6492					

stadium van het werk was K_1 reeds numeriek met de methode van SIMPSON geïntegreerd. De fout ontstaan door het afbreken van de integratie bij een eindige waarde van t was zorgvuldig gecorrigeerd met behulp van asymptotische ontwikkelingen. De overeenkomst met de exacte ontwikkelingen volgens dit nummer is goed. In het algemeen bedroeg de fout aanmerkelijk minder dan 0,1%. Deze gegevens vormden een waardevolle controle op het cijferwerk.

Tenslotte wijzen wij erop, dat naast de door ons gevolgde methode ter bepaling van K_1 nog een tweede, volkomen gelijkberechtigde handelwijze mogelijk is. Wij hebben immers de in de integrand voorkomende factor $1/\sinh t$ in een reeks van exponentiele functies ontwikkeld (3) en K_1 zodoende herleid tot een reeks van integralen van het type (28, 3), dat op zijn beurt verkregen was door ontwikkeling in exponentiele functies van de eveneens in de integrand voorkomende hyperbolische

cotangens. Wij kunnen de volgorde van deze beide ontwikkelingen omkeren en verkrijgen dan een volkomen analoog stelsel formules als in dit nummer gevonden. De uitkomsten zijn echter in het algemeen niet zonder meer gelijkloidend. Zij onthullen integendeel allerlei interessante sommeringseigenschappen van de Ψ' -functies. Wij gaan hier niet verder op in, maar vermelden slechts, dat deze opmerkingen eveneens gelden voor de in de volgende drie nummers gegeven berekeningen.

30. *De integraal K_2 .* In (7, 6) is de integraal K_2 gedefinieerd. Met behulp van de notaties (29, 1) geldt:

$$\pi^2 K_2 = \int_0^\infty \frac{\sinh^2 pt}{\sinh^2 t} \coth qt \, t \, dt \quad (1)$$

Over de toe te laten waarden voor p en q geldt hetzelfde als in het vorige nummer is gezegd. Voor de berekening maken wij gebruik van de voor alle $t > 0$ convergente ontwikkeling:

$$\frac{\sinh^2 pt}{\sinh^2 t} = \sum_{k=1}^{\infty} k \{ e^{-2(k-p)t} - 2e^{-2kt} + e^{-2(k+p)t} \} \quad (2)$$

Met behulp van (28, 3) en (2) volgt:

$$\begin{aligned} \pi^2 K_2 &= \frac{1}{q^2} \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} k \{ e^{-2(k-p)t/q} - 2e^{-2kt/q} + e^{-2(k+p)t/q} \} \coth t \, t \, dt = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{k}{(k-p)^2} - \frac{2}{k} + \frac{k}{(k+p)^2} \right\} + \frac{1}{2q^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \Psi' \left(\frac{k-p}{q} \right) - 2\Psi' \left(\frac{k}{q} \right) + \Psi' \left(\frac{k+p}{q} \right) \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{k}{(k-p)^2} - \frac{2}{k} + \frac{k}{(k+p)^2} \right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{p}{(k-p)^2} - \frac{p}{(k+p)^2} + \frac{1}{k-p} + \frac{1}{k+p} - \frac{2}{k} \right\} = \\ &= p \Psi'(-p) - p \Psi'(p) - \Psi(-p) - \Psi(p) - 2C \quad (4) \end{aligned}$$

Dus vinden wij:

$$\begin{aligned} \pi^2 K_2 &= \frac{p}{4} \{ \Psi'(-p) - \Psi'(p) \} - \frac{1}{4} \{ \Psi(-p) + \Psi(p) \} - \frac{C}{2} + \\ &+ \frac{1}{2q^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \Psi' \left(\frac{k-p}{q} \right) - 2\Psi' \left(\frac{k}{q} \right) + \Psi' \left(\frac{k+p}{q} \right) \right\} \quad (5) \\ &\qquad \qquad \qquad \frac{C}{2} = 0,288608 \end{aligned}$$

Over de convergentie van de reeks geldt hetzelfde als in het vorige nummer over de analoge reeks gezegd is. Op volkomen analoge wijze kunnen wij voorts sommeren tot een bepaalde waarde van k en de rest-term met behulp van asymptotische ontwikkelingen in een snel convergerende reeks transformeren. Stel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \Psi' \left(\frac{k-p}{q} \right) - 2\Psi' \left(\frac{k}{q} \right) + \Psi' \left(\frac{k+p}{q} \right) \right\} &= \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} k \left\{ \Psi' \left(\frac{k-p}{q} \right) - 2\Psi' \left(\frac{k}{q} \right) + \Psi' \left(\frac{k+p}{q} \right) \right\} + R_N' \quad (6) \end{aligned}$$

Dan volgt na wat rekenen:

$$R_N' = 2p^2q \sum_{k=N}^{\infty} k^{-2} - 3p^2q^2 \sum_{k=N}^{\infty} k^{-3} + (2p^4q + 2p^2q^3) \sum_{k=N}^{\infty} k^{-4} - 5p^4q^2 \sum_{k=N}^{\infty} k^{-5} + (2p^6q + 5p^4q^3 - p^2q^5) \sum_{k=N}^{\infty} k^{-6} \dots \quad (7)$$

De hierin voorkomende reeksen kunnen direct gevonden worden uit:

$$\sum_{k=N}^{\infty} k^{-n} = \zeta(n) - \sum_{k=1}^N k^{-n} \quad (8)$$

In tabel X zijn deze reeksen getabelleerd.

Voldoen p en q aan de voorwaarde (29, 11), dan kan de sommatie van

TABEL X. De som $\sum_{k=N}^{\infty} k^{-n}$ als functie van n en N .

N	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
1	1,64493	1,20206	1,08232	1,03693	1,01734
2	0,64493	0,20206	0,08232	0,03693	0,01734
3	0,39493	0,07706	0,01982	0,00568	0,00172
4	0,28382	0,04002	0,00748	0,00156	0,00035
5	0,22132	0,02440	0,00357	0,00059	0,0001
6	0,18132	0,01640	0,00197	0,00027	0,00004
7	0,15355	0,01177	0,00120	0,00014	0,00002
8	0,13314	0,00885	0,00078	0,00008	0,00001
9	0,11751	0,00690	0,00054	0,00004	0,00000
10	0,10517	0,00553	0,00039	0,00002	0,00000

de reeks in (5) weer in gesloten vorm worden uitgevoerd. Wij schetsen weer de werkwijze voor $n \leq 0$ (dus $m < 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \Psi' \left(\frac{k-p}{q} \right) - 2\Psi' \left(\frac{k}{q} \right) + \Psi' \left(\frac{k+p}{q} \right) \right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \Psi' \left(\frac{k-p}{q} \right) - 2\Psi' \left(\frac{k-n}{q} \right) + \Psi' \left(\frac{k-2n+p}{q} \right) \right\} \\ &+ 2n \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(\frac{k-n}{q} \right) - \Psi' \left(\frac{k-2n+p}{q} \right) \right\} - \\ &- 2 \sum_{j=1}^{-n} j \Psi' \left(\frac{j}{q} \right) + \sum_{j=1}^{-2n} j \Psi' \left(\frac{j+p}{q} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

Nu is:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \Psi' \left(\frac{k-p}{q} \right) - 2 \Psi' \left(\frac{k-n}{q} \right) + \Psi' \left(\frac{k-2n+p}{q} \right) \right\} = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \Psi' \left(\frac{k-n}{q} + m \right) - 2 \Psi' \left(\frac{k-n}{q} \right) + \Psi' \left(\frac{k-n}{q} - m \right) \right\} = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{-m-1} \left\{ \frac{k}{(k-n-qi)^2} - \frac{1}{k} \right\} - \sum_{i=1}^{-m} \left\{ \frac{k}{(k-n+qi)^2} + \frac{1}{k} \right\} \right] = \\ & \sum_{i=0}^{-m-1} \left\{ (n+qi) \Psi'(-n-qi) - \Psi(-n-qi) \right\} - \\ & \quad - \sum_{i=1}^{-m} \left\{ (n-qi) \Psi'(-n+qi) - \Psi(-n+qi) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Verder is:

$$\begin{aligned} & 2n \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(\frac{k-n}{q} \right) - \Psi' \left(\frac{k-2n+p}{q} \right) \right\} = 2n \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Psi' \left(\frac{k-n}{q} \right) - \Psi' \left(\frac{k-n}{q} - m \right) \right\} = \\ & = 2n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{-m} \left(\frac{k-n}{q} + i \right)^{-2} = 2nq^2 \sum_{i=1}^{-m} \Psi'(-n+qi) = 2nq^2 \Psi'(-2n+p) + \\ & \quad + 2nq^2 \sum_{i=1}^{-m-1} \Psi'(-n+qi) \quad (11) \end{aligned}$$

Uit (5), (9), (10) en (11) volgt tenslotte na enige herleidingen:

$$\begin{aligned} & \tau^2 K_2 = \frac{p}{4} \{ \Psi'(-p) - \Psi'(p) \}^{-1/4} \{ \Psi(-p) + \Psi(p) \} - \frac{C}{2} + 1/2 \{ n \Psi'(-n) - p \Psi'(-2n+p) \} - \\ & - 1/2 \{ \Psi(-n) - \Psi(-2n+p) \} + 1/2 \sum_{j=1}^{-m-1} (n+qi) \{ \Psi'(-n-qi) + \Psi'(-n+qi) \} - \\ & - 1/2 \sum_{i=1}^{-m-1} \{ \Psi(-n-qi) - \Psi(-n+qi) \} - \frac{1}{q^2} \sum_{j=1}^{-n} j \Psi' \left(\frac{j}{q} \right) + \frac{1}{2q^2} \sum_{j=1}^{-2n} j \Psi' \left(\frac{j+p}{q} \right) \quad (12) \\ & \quad p + mq = n \leq 0 \end{aligned}$$

Voor $n > 0$ (dus $m > 0$) kan op analoge wijze de volgende formule afgeleid worden:

$$\begin{aligned} & \tau^2 K_2 = \frac{p}{4} \{ \Psi'(-p) - \Psi'(p) \}^{-1/4} \{ \Psi(-p) + \Psi(p) \} - \frac{C}{2} - 1/2 \{ n \Psi'(n) + p \Psi'(2n-p) \} - \\ & - 1/2 \{ \Psi(n) - \Psi(2n-p) \} - 1/2 \sum_{i=1}^{m-1} (n-qi) \{ \Psi'(n+qi) + \Psi'(n-qi) \} + \\ & + 1/2 \sum_{i=1}^{m-1} \{ \Psi(n+qi) - \Psi(n-qi) \} - \frac{1}{q^2} \sum_{j=1}^n j \Psi' \left(\frac{j}{2} \right) + \frac{1}{2q^2} \sum_{j=1}^{2n} j \Psi' \left(\frac{j-p}{q} \right) \quad (13) \\ & \quad p + mq = n > 0 \end{aligned}$$

Ook nu zullen wij er van afzien door gebruik te maken van de symmetrische bouw der reeksen de Ψ' -functies door elementaire functies te vervangen.

Voor $q = 1/2$ en $q = 1$ lukt het weer niet de som in gesloten vorm te brengen, hoewel het in die gevallen wel mogelijk is met onze hulpinte-

gralen de integraal zelf te berekenen. Voor $q = 1/2$ hebben wij deze integratie reeds uitgevoerd in (9, 6). In onze nieuwe notatie vinden wij:

$$\pi^2 K_2 = \frac{(2p\pi)^2 + \sin^2 2p\pi - 2p\pi \sin 4p\pi - \pi^2 \sin^4 p\pi}{4 \sin^2 2p\pi} \quad q = 1/2 \quad (14)$$

Is $q = 1$, dan vinden wij door partiele integratie integralen van het type (22, 6) en (22, 11). Er volgt:

$$\pi^2 K_2 = \frac{(p\pi)^2 + \sin^2 p\pi - p\pi \sin 2p\pi}{4 \sin^2 p\pi} \quad q = 1 \quad (15)$$

Omgekeerd volgen hier natuurlijk weer sommeringseigenschappen voor de Ψ' -functies uit. Zij zijn echter te gecompliceerd om interessant te zijn, zodat wij ze niet uit zullen schrijven.

De berekende waarden van K_2 zijn weergegeven in tabel XI. Met het

TABEL XI. De integraal $\pi^2 K_2 = \int_0^\infty \frac{\sinh^2 pt}{\sinh^2 t} \coth qt \, t \, dt$ als functie van p en q .

$\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0	0,16669	0,6809	1,5870	2,9849	5,0546	8,1802	13,2817	23,2855	55,7521
0,2	0	0,08502	0,3473	0,8120	1,5291	2,6061	4,2586	7,0495	12,9452	
0,3	0	0,05840	0,2390	0,5603	1,0611	1,8201	3,0126	5,1066		
0,4	0	0,04556	0,1868	0,4392	0,8360	1,4459	2,4261			
0,5	0	0,03814	0,1567	0,3697	0,7072	1,2337				
0,6	0	0,03343	0,1376	0,3256	0,6262					
0,7	0	0,03023	0,1246	0,2957	0,5714					
0,8	0	0,02793	0,1153	0,2745	0,5325					
0,9	0	0,02624	0,1087	0,2589	0,5040					
1,0	0	0,02496	0,1033	0,2469	0,4823	0,8669				
1,1	0	0,02392	0,0991	0,2377	0,4656	0,8399				
1,2	0		0,0960	0,2304	0,4524	0,8189	1,4669			
1,3	0			0,2246	0,4418	0,8018	1,4419			
1,4	0				0,4331	0,7871	1,4214	2,7308		
1,5	0					0,7768	1,4047	2,7074		
1,6	0						1,3908	2,6885	6,2667	
1,7	0							2,6718	6,2443	
1,8	0								6,2257	25,0932

oog op de te maken toepassingen moesten hier meer waarden dan bij K_1 berekend worden. Ook voor K_2 beschikten wij over waarden verkregen door numerieke integratie, welke als controle gebruikt werden.

31. De integraal K_3 . In (11, 1) is de integraal K_3 gedefinieerd. Met gebruik van de notatie:

$$r = 1 - \frac{\alpha}{\pi} \quad (1)$$

gaat (11, 1) over in:

$$\pi^3 K_3 = \int_0^\infty \frac{1}{\sinh t} \coth rt \, t^2 dt \quad (2)$$

Voor de convergentie is nodig en voldoende, dat $r \neq 0$ is. In de toepassingen was $0 < r \leq 1$, maar hiervan behoeven wij geen gebruik te maken. Wel zullen wij ons bepalen tot $r > 0$, hetgeen natuurlijk geen enkele beperking betekent.

Voor de berekening maken wij gebruik van de voor alle $t > 0$ convergente ontwikkeling:

$$\frac{1}{\sinh t} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)t} \quad (3)$$

Met behulp van (28, 4) vinden wij:

$$\pi^3 K_3 = \frac{2}{r^3} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-(2k+1)t/r} \coth t \, t^2 dt = \frac{2}{r^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{2r^3}{(2k+1)^3} - {}^{1/4} \Psi'' \left(\frac{2k+1}{2r} \right) \right\} \quad (4)$$

Met het oog op (27, 3) en (27, 6) kunnen wij dus schrijven:

$$\pi^3 K_3 = - {}^{1/4} \Psi'''(-1/2) - \frac{1}{2r^3} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi'' \left(\frac{2k+1}{2r} \right) \quad (5)$$

$- {}^{1/4} \Psi'''(-1/2) = 4,207199$

Voor grote k zijn volgens (27, 5) de termen van de reeks $O(k^{-2})$; de reeks is dus convergent. Wij herleiden op de in de vorige nummers ook toegepaste wijze wederom de restterm R_N'' tot een sterk convergerende reeks. Stel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Psi'' \left(\frac{2k+1}{2r} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi'' \left(\frac{2k+1}{2r} \right) + R_N'' \quad (6)$$

Dan volgt na wat rekenen:

$$R_N'' = -r^2 \sum_{k=N}^{\infty} k^{-2} + (r^2 + r^3) \sum_{k=N}^{\infty} k^{-3} - \left(\frac{3}{4}r^2 + \frac{3}{2}r^3 + \frac{1}{2}r^4 \right) \sum_{k=N}^{\infty} k^{-4} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{2}r^3 + r^4 \right) \sum_{k=N}^{\infty} k^{-5} - \left(\frac{5}{16}r^2 + \frac{5}{4}r^3 + \frac{5}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6 \right) \sum_{k=N}^{\infty} k^{-6} \dots \quad (7)$$

De hier optredende reeksen hebben wij in het vorige nummer ook ontmoet. Zij zijn getabelleerd in tabel X.

De in (5) optredende reeks kan in eindige vorm gesommeerd worden, indien voldaan is aan de voorwaarde:

$$r = \frac{m}{n} \quad (m \text{ en } n \text{ geheel}) \quad (8)$$

Dit betekent dus, dat r een rationaal getal is. Door vergelijking van (29, 1) met (1) zien wij, dat de voorwaarde (8) een logische voortzetting is van voorwaarde (29, 11). De methode, die wij toepassen om de sommatie te verrichten, is echter anders. Wij beginnen met de termen van de reeks in groepen van m stuks samen te voegen en daarna deze groepen te sommeren:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi''\left(\frac{2k+1}{2r}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Psi''\left(\frac{kn}{m} + \frac{n}{2m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \Psi''\left(\frac{in}{m} + kn + \frac{n}{2m}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi''\left(\frac{in}{m} + kn + \frac{n}{2m}\right) \quad (9) \end{aligned}$$

Wij voeren nu onder het laatste somteken een factor $1 = 1 + k - k in$, hetgeen geen bezwaar oplevert, indien wij de aldus ontstane termen bij elkander houden. De termen, die met k vermenigvuldigd zijn, kunnen evengoed van 1 af gesommeerd worden, zodat wij ook de k door $1 + k$ kunnen vervangen, daarbij weer sommerend van 0 tot ∞ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi''\left(\frac{2k+1}{2r}\right) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (1+k) \Psi''\left(kn + \frac{in}{m} + \frac{n}{2m}\right) - k \Psi''\left(kn + \frac{in}{m} + \frac{n}{2m}\right) \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (1+k) \Psi''\left(kn + \frac{in}{m} + \frac{n}{2m}\right) - (1+k) \Psi''\left(kn + \frac{in}{m} + \frac{n}{2m} + n\right) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Wegens (27, 7) vinden wij hieruit:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi''\left(\frac{2k+1}{2r}\right) &= -2 \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \sum_{j=1}^n \left(kn + \frac{in}{m} + \frac{n}{2m} + j\right)^{-3} = \\ &= -\frac{2}{n^3} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \left(k + \frac{1}{2m} + \frac{i}{m} + \frac{j}{n}\right)^{-3} \quad (11) \end{aligned}$$

Door gebruik te maken van de identiteit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k) (k+x)^{-3} = \frac{1}{x^3} + \sum_{k=1}^{\infty} (1+k) (k+x)^{-3} = \frac{1}{x^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+x)^2} + \frac{1-x}{(k+x)^3} \right\} \quad (12)$$

en van (27, 3) gaat (11) over in:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi''\left(\frac{2k+1}{2r}\right) &= -\frac{2}{n^3} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{8 m^3 n^3}{(n + 2in + 2jm)^3} + \Psi'\left(\frac{i}{2m} + \frac{i}{m} + \frac{j}{n}\right) - \right. \\ &= \left. -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2m} - \frac{i}{m} - \frac{j}{n}\right) \Psi''\left(\frac{1}{2m} + \frac{i}{m} + \frac{j}{n}\right) \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

Hiermede hebben wij de aangekondigde sommatie volbracht, want de overblijvende sommen hebben een eindig aantal termen. De in deze uitdrukking voorkomende dubbelsommen van Ψ' - en Ψ'' -functies kunnen nog met behulp van de eigenschappen (27, 9) in enkelvoudige sommen omgezet worden. Immers, als a een van de sommatievariabele i onaf-

hankelijke grootheid voorstelt, blijkt door omkering van de volgorde der termen en daarna toepassing van (27, 9):

$$\sum_{i=1}^m \Psi^{(k)}\left(a + \frac{i}{m}\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \Psi^{(k)}\left(a + 1 - \frac{i}{m}\right) = m^{k+1} \Psi^{(k)}(ma + m\theta) \quad (14)$$

Bij de dubbelsommen hebben wij de keuze naar welke van beide sommatievariabelen wij deze transformatie uitvoeren. Wij zien, dat in de factor, waarmee de Ψ' -functies zijn vermenigvuldigd, nog i en j voorkomen. Deze factor kunnen wij splitsen in een term, die i niet bevat, en een term, die j niet bevat. Op de eerste kan de transformatie naar i toegepast worden en op de tweede die naar j . Op deze wijze blijft dus van de dubbelsommen alleen die van de rationale functies over.

Ook met deze transformaties is het totale aantal termen, dat wij zouden moeten berekenen, in het algemeen zeer groot. In tegenstelling met de situatie bij K_1 en in mindere mate ook bij K_2 is de besproken sommatiemethode dus hoofdzakelijk van theoretisch belang. Bij het berekenen van een aantal waarden voor een tabellarisch overzicht, waarbij wij uit de aard der zaak slechts rationale waarden van r gebruiken, is er dan ook geen gebruik van gemaakt, maar hebben wij (5), (6) en (7) toegepast, uitgezonderd voor $r = 1/2$ en $r = 1$, welke reeds exact waren berekend in (11, 5) en (11, 9). De resultaten van de berekening zijn weergegeven in tabel XII. Ook nu weer beschikten wij reeds over numeriek verkregen resultaten, welke ter controle gebruikt konden worden.

TABEL XII. De integraal $\pi^3 K_3 = \int_0^\infty \frac{1}{\sinh t} \coth rt^2 dt$ als functie van r .

r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\pi^3 K_3$	25,0758	13,1082	9,3322	7,5648	6,5797	5,9715	5,5661	5,2888	5,0860	4,9348

32. De integraal K_4 . In (11, 3) is de integraal K_4 gedefinieerd. Met gebruikmaking van de notatie (31, 1) geldt:

$$\pi^4 K_4 = \int_0^\infty \frac{1}{\sinh^2 t} \coth rt^3 dt \quad (1)$$

Voor de convergentie is nodig en voldoende, dat $r \neq 0$ is. Wij kunnen ons weer zonder beperking bepalen tot $r > 0$. Voor de berekening maken wij gebruik van de voor alle $t > 0$ convergente ontwikkeling:

$$\frac{1}{\sinh^2 t} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-2kt} \quad (2)$$

Met behulp van (28, 5) en (2) vinden wij:

$$\pi^4 K_4 = \frac{4}{r^4} \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^\infty e^{-2kt/r} \coth t^3 dt = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} + \frac{1}{2r^4} \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi''''\left(\frac{k}{r}\right) \quad (3)$$

Met het oog op (27, 3) kunnen wij dus schrijven:

$$\pi^4 K_4 = -\frac{3}{4} \Psi'''(0) + \frac{1}{2r^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi''''\left(\frac{k}{r}\right) \quad -\frac{3}{4} \Psi'''(0) = 1,803085 \quad (4)$$

Voor grote k zijn volgens (27, 5) de termen van de reeks $O(k^{-2})$; de reeks is dus convergent. Wij passen weer de nu reeds meerdere malen gebruikte transformatie toe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \Psi''''\left(\frac{k}{r}\right) = \sum_{k=1}^{N-1} k \Psi''''\left(\frac{k}{r}\right) + R_N''' \quad (5)$$

Wij behoeven nu niet meer een ontwikkeling met de binomiaalreeks toe te passen, want wij vinden direct uit de asymptotische ontwikkeling (27, 5):

$$R_N''' = 2r^3 \sum_{k=N}^{\infty} k^{-2} - 3r^4 \sum_{k=N}^{\infty} k^{-3} + 2r^5 \sum_{k=N}^{\infty} k^{-4} - \frac{2}{3} r^7 \sum_{k=N}^{\infty} k^{-6} \dots \quad (6)$$

Wij ontmoeten hier dus weer de in tabel X getabelleerde reeksen. Wanneer r voldoet aan de voorwaarde (37, 8), dan kan de sommatie weer in gesloten vorm verricht worden. De gebruikte methode is analoog aan die in het vorige nummer:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi''''\left(\frac{k}{r}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi''''\left(k \frac{n}{m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m (mk + i) \Psi''''\left(kn + i \frac{n}{m}\right) - \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} (mk + i) \Psi''''\left(kn + i \frac{n}{m}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Zoals men gemakkelijk narekent, geldt voor een in voldoende mate met k afnemende functie $G(k)$ de sommeringseigenschap:

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(k) \{G(k) - G(k + 1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (mk + i) G(k) \quad (8)$$

indien $F(k)$ voldoet aan

$$F(k) - F(k - 1) = mk + i, \quad F(0) = i \quad (9)$$

De oplossing van (9) is:

$$F(k) = i + \left(i + \frac{m}{2}\right) k + \frac{m}{2} k^2 \quad (10)$$

Door (8) en (10) toe te passen, kunnen wij (7) herleiden tot:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi''''\left(\frac{k}{r}\right) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ i + \left(i + \frac{m}{2}\right) k + \frac{m}{2} k^2 \right\} \left\{ \Psi''''\left(kn + i \frac{n}{m}\right) - \Psi''''\left(kn + i \frac{n}{m} + n\right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Door gebruik te maken van (27, 7) vinden wij hieruit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \Psi'''' \left(\frac{k}{r} \right) = 6 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\{ i + \left(i + \frac{m}{2} \right) k + \frac{m}{2} k^2 \right\}}{\left(kn + i \frac{n}{m} + j \right)^4} =$$

$$= \frac{3m}{n^4} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + \left(1 + 2 \frac{i}{m} \right) k + 2 \frac{i}{m}}{\left(k + \frac{i}{m} + \frac{j}{n} \right)^4} \quad (12)$$

Maken wij tenslotte nog gebruik van de identiteit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + ak + b}{(k+x)^4} = \frac{b}{x^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+x)^2} + \frac{a-2x}{(k+x)^3} + \frac{b-ax+x^2}{(k+x)^4} \right\} \quad (13)$$

en van (27, 3), dan gaat (12) over in:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \Psi'''' \left(\frac{k}{r} \right) = \frac{3m}{n^4} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{2i}{m} \left(\frac{i}{m} + \frac{j}{n} \right)^{-4} + \Psi'' \left(\frac{i}{m} + \frac{j}{n} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{n} \right) \Psi'' \left(\frac{i}{m} + \frac{j}{n} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{i}{m} - \frac{j}{n} - \frac{i^2}{m^2} + \frac{j^2}{n^2} \right) \Psi'''' \left(\frac{i}{m} + \frac{j}{n} \right) \right\} \quad (14)$$

Hiermede is de sommatie volbracht. De nu nog in de uitdrukking resterende dubbelsommen van Ψ'' - en Ψ'''' -functies kunnen met behulp van onze relatie (37, 14) in enkelvoudige sommen worden getransformeerd, uitgezonderd diegene, die voorzien is van de factor ij . Ook nu blijft de uitdrukking gecompliceerd en vele termen zouden nodig zijn om werkelijk resultaten te verkrijgen. De transformatie is dus evenals in het vorige nummer hoofdzakelijk van theoretisch belang.

TABEL XIII. De integraal $\pi^4 K_4 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sinh^2 t} \coth rt t^3 dt$ als functie van r .

r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\pi^4 K_4$	16,5565	8,4371	5,7952	4,5179	3,7815	3,3122	2,9926	2,7638	2,5941	2,4674

De waarden, welke door ons berekend zijn, zijn dan ook gevonden met behulp van (4), (5) en (6), behalve natuurlijk voor $r = 1/2$ en $r = 1$, welke door ons reeds exact waren bepaald in (77, 6) en (77, 11). De resultaten zijn weergegeven in tabel XIII. Tenslotte beschikten wij ook nu weer over langs numerieke weg verkregen resultaten, welke ter controle gebruikt werden.

§ 5. Enige praktische toepassingen van het voorafgaande.

33. *De stijfheid van een as met een spiegleuf.* Wanneer wij vragen de torsiestijfheid te bepalen van een cilindrische as, welke voorzien is van een spiegleuf (zie fig. 27), dan is het alleen met buitensporig grote moeite mogelijk om hierop langs theoretische weg een antwoord te geven. Practisch gesproken zijn wij hier op het experiment aangewezen. Nu zijn er inderdaad experimentele methoden om het potentiaalvraagstuk van de torsie op te lossen, speciaal de elektrische methode en de zeepvliesmethode. Het meten aan doorsneden als de hier geschetste, waarbij grote spanningsconcentraties optreden, is echter niet eenvoudig en het geheel is kostbaar. Hoewel deze vorm van doorsnede voor de techniek van groot belang is, **zijn er** dan ook slechts enkele experimentele resultaten

omtrent bekend ¹⁾. Ons doel zal zijn, door combinatie van deze experimentele gegevens met de theoretische gegevens, die wij kunnen verkrijgen voor diverse extreme gevallen, een overzicht te geven, dat wel niet bogen kan op theoretische exactheid, maar allicht voor alle praktische eisen voldoende nauwkeurig is.

Allereerst merken wij op, dat de grootte van de afrondingstraal in de bodem van de spiegleuf, mits deze binnen redelijke grenzen **blijft**, practisch geen invloed op de stijfheid van de as heeft (wel natuurlijk op de optredende spanningen!). Er blijven dus maar twee variabelen over, nl. de diepte en de breedte van de gleuf. De straal van de cirkel noemen

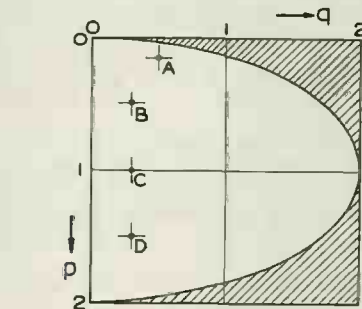


Fig. 28. Waarden van p en q , waarvoor de stijfheid bekend is.

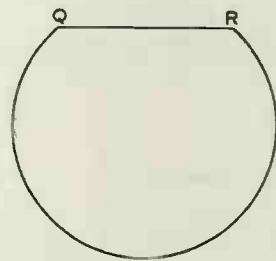


Fig. 29. Ontaarding van de doorsnede, als $p \leq 1$ is.

wij weer a , de diepte pa en de breedte qa (zie fig. 27). Blijkbaar variëren zowel p als q van 0 tot 2.

Is $q = 0$, dan hebben wij te maken met het in paragraaf 3 behandelde

¹⁾ H. QUEST, Ing. Arch. 4, 510—520 (1933).

R. BOITEN & C. B. BIEZENO, De Ingenieur, 57, O 1—5 (1945).

geval van de smalle radiale insnijding. Voor dit geval is de stijfheid dus theoretisch bekend.

Vervolgens beschouwen wij het geval, dat de hoekpunten van de spiegleuf op de cirkelomtrek liggen. Voor een bepaalde waarde van p treedt dit op voor een speciale waarde van q , welke wij aan zullen geven met q' . Men vindt gemakkelijk, dat:

$$(1 - p)^2 + \frac{1}{4} q'^2 = 1 \quad (1)$$

Dit stelt blijkbaar de in fig. 28 in het pq -diagram getekende ellips voor. De vorm, die de doorsnede vertoont in dit speciale geval hangt af van de grootte van p . Is nl. $p \leq 1$ (fig. 29), dan is de doorsnede een cirkelsegment. Hiervoor hebben wij de stijfheid in nummer 11 berekend. Vergroten wij bij gelijkblijvende diepte de breedte, dan verandert er niets aan de doorsnede en de stijfheid blijft dus constant:

$$\mu(p, q) = \mu(p, q') \quad p \leq 1, \quad q \geq q' \quad (2)$$

Is daarentegen $p > 1$, dan is voor $q = q'$ de doorsnede samengesteld uit drie cirkelsegmenten (fig. 30). Ook hiervoor is de stijfheid dus bekend. Vergroten wij nu bij gelijkblijvende diepte de breedte van de gleuf, dan verandert de vorm van de doorsnede en wel in die zin, dat de twee zijdelingse segmenten smaller worden om voor $q = 2$ geheel te verdwijnen, terwijl het derde segment ongewijzigd blijft. Vergroten wij daarentegen bij gelijkblijvende breedte de diepte van de gleuf, dan blijven de zijdelingse segmenten ongewijzigd, terwijl het derde segment smaller wordt om voor $p = 2$ geheel te verdwijnen. Dus bestaat de relatie:

$$\mu(p, q) = \mu(p, 2) + \mu(2, q) \quad p > 1, \quad q \geq q' \quad (3)$$

Op deze wijze kennen wij het verloop van μ langs de p -as en in het gebied, hetwelk in fig. 28 gearceerd is.

Verder staan ons de volgende experimentele gegevens ter beschikking:

QUEST:	$p = 0,15$	$q = 0,50$	$\mu = 1,49$
BOITEN:	$p = 0,50$	$q = 0,30$	$\mu = 1,13$
	$p = 1,00$	$q = 0,30$	$\mu = 0,72$
	$p = 1,50$	$q = 0,30$	$\mu = 0,41$

De ligging van deze punten is in fig. 28 aangegeven.

Op grond van deze experimentele en theoretische gegevens is door interpolatie een grafiek bepaald van μ voor alle p en q . Wanneer men de figuur 31 bestudeert, zal men tot de overtuiging komen, dat de afwijkingen van de werkelijkheid onmogelijk groot kunnen zijn.

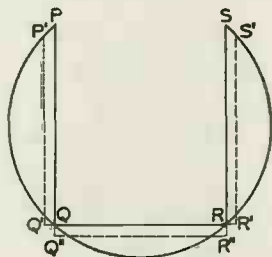


Fig. 30. Ontaarding van de doorsnede, als $p > 1$ is.

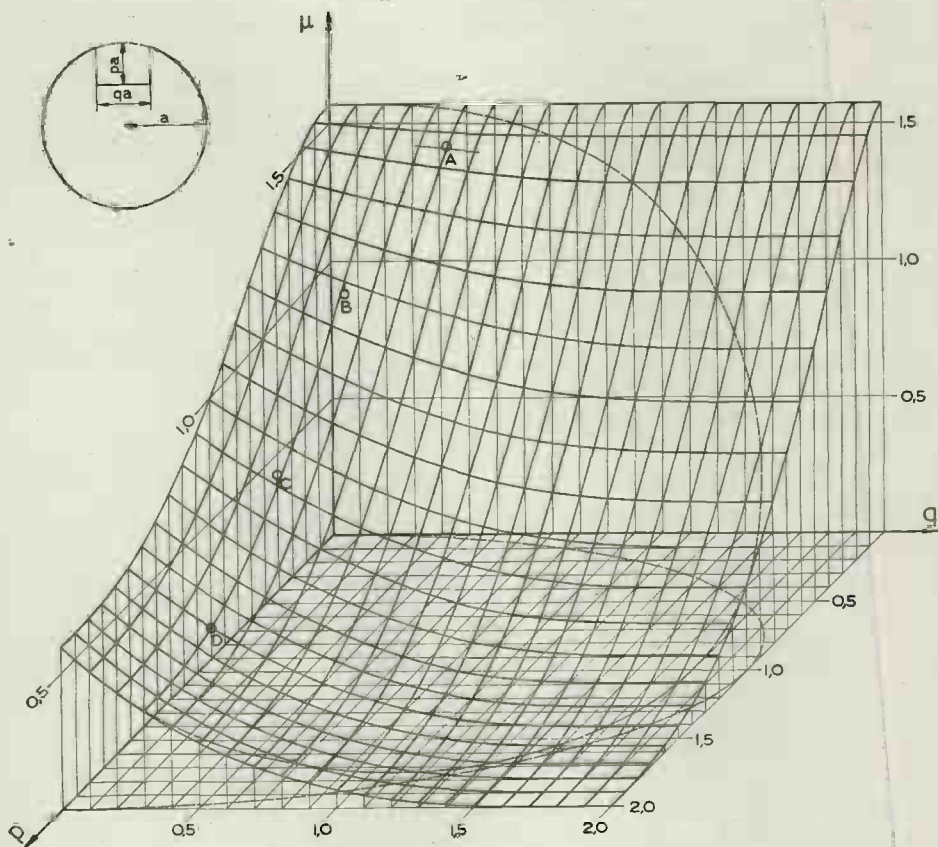


Fig. 31. De grootheid μ als functie van p en q .

34. *De torsie van cilindrische staven met vleugelprofielvormige doorsnede.* Ook in dit geval hebben wij te maken met een vorm van doorsnede, welke slechts ten koste van grote inspanning theoretisch door-gerekend kan worden. Bekend is een benaderde theoretische behandel-ing¹⁾, maar ook deze methode vergt toch nog een aanzienlijk rekenwerk. Er is ook een vereenvoudiging van de berekening aangegeven, die echter ook tot minder nauwkeurige resultaten leidt. Wij zullen hier een benaderingsmethode ontwikkelen, die grote nauwkeurigheid paart aan uiterste eenvoud.

De grondgedachte van onze methode is de volgende: Bij de door ons in § 1 onderzochte sikkels en lenzen is steeds de omgeving van de hoek-punten spanningsloos. Ronden wij dus bijv. een hoekpunt af, dan kan dit onmogelijk een grote invloed op de spanningsverdeling hebben en zeker niet op de spanningsverdeling in het van het hoekpunt ver ver-wijderde gebied, waar de maximale spanning optreedt. Ook andere

¹⁾ A. VAN DER NEUT en F. J. PLANTEMA, *De Ingenieur*, 54, A 335—345 (1939).

wijzigingen in de omgeving van de hoekpunten zullen slechts geringe invloed op het spanningsverloop hebben. De stijfheid zal wat gevoeliger zijn voor dergelijke veranderingen, omdat deze van de omgeving der hoekpunten toch een, zij het kleine, bijdrage ondervindt en bovendien ook de hoogte van de „spanningsheuvel” in de omgeving van de aangebrachte afronding kleiner wordt.

Is nu een bepaald vleugelprofiel gegeven, dan vervangen wij dit door een sikkel-, segment- of lensvormig gebied, dat zich zo goed mogelijk aan het profiel aansluit. Hier ligt een element van willekeur, maar praktisch is er toch niet veel verschil van mening mogelijk over de keuze. In de omgeving van het dikste gedeelte van het profiel kiezen wij eenvoudig de kromtecirkel van de bovenkant en de onderkant. Is er links en rechts een groot verschil in karakter van de profielbegrenzing, dan nemen wij het gemiddelde van links en rechts.

Om een indruk te krijgen van de nauwkeurigheid van het geschetste proces, zullen wij eerst de invloed van het afronden der hoeken nagaan door het proces toe te passen op een ellips. Wij vervangen de ellips dus door de twee kromtecirkels in de uiteinden der korte as (zie fig. 32). Zijn de halve assen van de ellips a en b , dan is de kromtestraal in deze punten gelijk aan a^2/b . Kiezen wij deze als representatieve lengte, dan geldt zoals bekend voor de ellips:

$$\kappa = \frac{\tau_{\max}}{G\omega a^2/b} = \frac{2(b/a)^2}{1 + (b/a)^2} \quad (1)$$

De beide hoeken α en α' van de lens berekenen wij gemakkelijk als functie van b/a en hierna kunnen wij in fig. 16 of uit tabel I (nr. 12) de κ aflezen. In fig. 32 zijn de resultaten voor de ellips en de vervangende lens als functie van b/a uitgezet. Zoals men ziet is de overeenstemming van beide krommen zeer goed. Voor een vleugelprofiel is een dikte-lengteverhouding van 0,3 al zeer hoog en wij zien, dat zelfs het afronden van de hoekpunten aan beide zijden geen invloed heeft.

Vervolgens passen wij de methode toe op een echt vleugelprofiel. Wij kiezen daartoe de in het genoemde artikel van v. d. NEUT & PLANTEMA behandelde schroefbladdoorsnede, welke door hen met hun methode doorgerekend is en in het Laboratorium voor Toegepaste Mechanica der Technische Hoogeschool te Delft met behulp van de elektrische meetmethode experimenteel onderzocht is. De doorsnede is in fig. 33 weergegeven. Zij was reeds door enige cirkelbogen en een stukje rechte lijn benaderd. De rugzijde wordt dus door de cirkel 2 vervangen. Dit is dan de cirkel met straal a in onze notatie ($a = 5,84$ cm). De holle

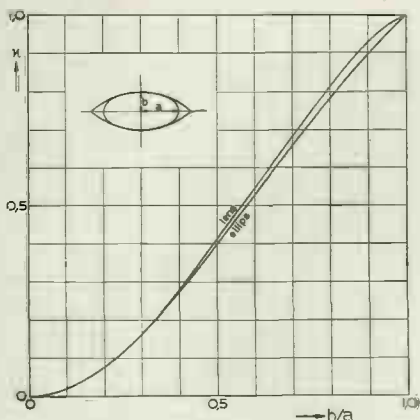


Fig. 32. De grootte κ voor een ellips en een vervangingslens.

zijde van het profiel bestaat uit de cirkel 6 en de rechte lijn 5. Deze zijde vervangen wij derhalve door een cirkel, waarvan de kromming het gemiddelde is van die van de cirkel en van die van de rechte, dus door een cirkel met een straal gelijk aan het dubbele van de straal van de cirkel 6. Dit is dus de cirkel met straal a' in onze notatie ($a' = 24,12$ cm). Hieruit vinden wij de hoeken $\alpha = 0,590\pi$ en $\alpha' = 0,928\pi$. In fig. 16 lezen wij bij deze waarden van α en α' af: $\kappa = 0,572$. De experimentele waarde is $\kappa = 0,574$ en de door v. D. NEUT & PLANTEMA berekende waarde is $\kappa = 0,565$. Ook nu is het resultaat dus zeer goed.

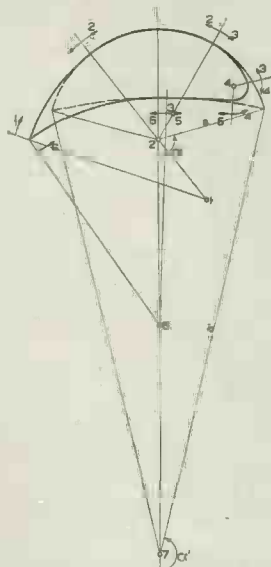


Fig. 33. De gedaante van het vleugelprofiel.

$$I_w \sim \frac{F^4}{4\pi^2 I_p} \quad (2)$$

Deze formule geeft voor de bovenbehandelde doorsnede $I_w = 84,4$ cm⁴ tegen een experimentele waarde van 80,9 cm⁴ en een volgens de benaderingsmethode van v. D. NEUT & PLANTEMA berekende waarde van 82,2 cm⁴. Eventueel zou in (2) een correctiefactor aangebracht kunnen worden, die speciaal aangepast is aan een bepaalde groep doorsneden, hier dus aan de vleugelprofielen. Voor de meeste doeleinden zal echter de bereikte nauwkeurigheid al voldoende zijn.

Uit (2) volgt μ en hieruit met behulp van κ de grootte λ .

Wij wijzen er nog op, dat onder bepaalde omstandigheden ook vleugelprofielen met aan weerszijden scherpe hoeken toegepast worden. Zij worden gebruikt bij scheepsschroeven in het gedeelte van de schroef, waar cavitatie vermeden moet worden, en daar waar zeer grote snelheden optreden, speciaal snelheden groter dan de geluidssnelheid, dus bijv. bij turbineschoepen en vliegtuigpropellers aan de top van het blad. Voorzover deze profielen al geen sikkels of lenzen in de door ons gebruikte betekenis zijn, verschillen zij er toch weinig van, zodat in deze gevallen onze methode zeer nauwkeurig zal zijn.

Ter vermindering van misverstanden zij nog vermeld, dat de door v. D. NEUT & PLANTEMA ontwikkelde methode geldt voor alle tamelijk gestrekte doorsneden, dus bijv. ook voor rechthoeken, terwijl wij ons uitsluitend bezighouden met vleugelprofielen.

STELLINGEN.

1.

Het vraagstuk van de bepaling van een harmonische functie, welke in de punten van een vlakke gesloten kromme voorgeschreven waarden aanneemt (vraagstuk van DIRICHLET), kan benaderd worden opgelost met behulp van een numeriek proces, dat in vele gevallen zowel wat betreft tijd als nauwkeurigheid kan wedijveren met de bestaande experimentele methodes.

2.

Bij het modelonderzoek van tweedimensionale potentiaalvelden kan men veelal door middel van conforme afbeelding zonder veel moeite interessante gedeelten van het veld sterk vergroten en een voor het onderzoek gunstiger vorm geven.

3.

Bij het modelonderzoek van op wringing belaste cilindrische staven door middel van een zeepvlies resp. van een electrisch model, kan men zich althans in theorie beperken tot het meten van de helling van het vlies resp. de veldsterkte langs de rand van de doorsnede en in vele gevallen ook daarvan nog een gedeelte uitschakelen.

4.

Het torsievraagstuk van op wringing belaste cilindrische staven kan beschreven worden door een integraalvergelijking, waaruit onder omstandigheden praktische resultaten afgeleid kunnen worden.

5.

Het is mogelijk bij een door een axiale kracht belaste schroefveer door speciale keuze van de draaddoorsnede ook bij grote vervormingen praktisch evenredigheid te verkrijgen tussen uitrekking en belasting.

6.

Allerlei vraagstukken met betrekking tot slappe veren en ringen, welke door een belasting in hun vlak grote vervormingen ondergaan, kunnen op doelmatige wijze exact worden opgelost door als coördinaten in te voeren de booglengete en de hoek tussen de normaal en een vaste richting.

7.

De numerieke gegevens, welke WEINEL verstrekt over de spanningen in en de stijfheid van een gewrongen cilindrische staaf, waarvan de doorsnede begrensd wordt door twee elkander niet snijdende cirkels, zijn ten dele onjuist.

E. WEINEL, Ing. Arch., 3, 67—75 (1932).

8.

Het gunstigste draagvlakprofiel voor snelheden, groter dan die van het geluid, is, gelet op minimum golfweerstand enerzijds en overwegingen van sterkte anderzijds, symmetrisch lensvormig.

9.

Het verschil tussen rotatievrije en niet rotatievrije permanente golven op diep water is bij de in de natuur voorkomende verhoudingen tussen golfhoogte en golflengte uitermate klein.

10.

De invloed van het getal van REYNOLDS op de golfweerstand van scheepsmodellen uit zich bij kleine modellen ($\log Re < 6$) in een merkbare vermindering van de humps en hollows in de weerstandskrommen, zelfs bij aanbrenging van turbulentie verwekkende middelen.

11.

Wanneer men bij de integratiemethode van TCHEBYCHEFF het gebruik van de beide eindordinaten voorschrijft, leidt dit tot complexe wortels van de hogeregraadsvergelijking, welke de abscissen bepaalt. Ook in dit opzicht staat de genoemde methode in theoretisch opzicht achter bij de methode van GAUSS.

12.

Het verdient aanbeveling den studenten voor werktuigkundig ingenieur gelegenheid te bieden tot het afstuderen in theoretische richting.