

23/2'50  
HANDLEIDINGEN BIJ HET ONDERWIJS AAN DE TECHNISCHE  
HOGESCHOOL TE DELFT — ONDER REDACTIE VAN DE  
CENTRALE COMMISSIE VOOR STUDIEBELANGEN

# Vraagstukken Theoretische Mechanica

met uitvoerige aanwijzingen voor de oplossing

II

BEWEGING VAN VASTE LICHAMEN

EN

STELSELS VAN VASTE LICHAMEN

DOOR

Prof. Dr FRED. SCHUH

EN

Ir W. J. VOLLEWENS

0920 3825



Men zoek zijn kracht niet in het  
opperlakkig bekijken van veel vraagstukken,  
maar in het  
diep doordringen in betrekkelijk weinig vraagstukken.

## WOORD VOORAF.

Aan het Woord vooraf bij het eerste deel hebben we slechts weinig toe te voegen. Wil men met het grondig oplossen van weinig vraagstukken volstaan, dan komen daarvoor in aanmerking de 33 vraagstukken die links van het rangnummer met een sterretje gemerkt zijn. De 86 vraagstukken, waar rechts van het rangnummer een sterretje staat, zijn wat moeilijker of bewerkelijker of om een andere reden minder nuttig te achten. De 68 opgaven zonder sterretje staan tussen beide categorieën in.

Verder zijn in dit deeltje opgenomen de vraagstukken van 9 examens aan de Technische Hogeschool uit de laatste paar jaar. Hieronder komen 3 theorie-vragen voor; deze zijn volledig beantwoord. Ook de eigenlijke vraagstukken zijn uitvoerig besproken. Aan het toestel, waarop het examenvraagstuk betrekking heeft, kunnen dikwijls voor de hand liggende vragen worden vastgeknoopt, die op het examen niet gesteld zijn. Waar wij dit nuttig achten, zijn deze vragen in de vorm van genummerde opmerkingen behandeld. Daar deze vragen uiteraard in de lijn van het examen liggen, kan het bestuderen der opmerkingen worden aanbevolen.

We hebben slechts weinig figuren opgenomen. Echter kan gerust worden gezegd, dat het maken van een duidelijke figuur voor het behoorlijk oplossen van een mechanica-vraagstuk onontbeerlijk is. Daarmede beginne men dus steeds. Waar dit nodig is, brenge men in de figuur de krachten aan. Het is voordelig de tekenafspraken in overeenstemming met de figuur te brengen, d.w.z. er voor te zorgen, dat de in de figuur aangegeven grootheden (noodzakelijke coördinaten en krachten) positief uitvallen.

Het spreekt wel vanzelf, dat men bij het maken van een vraagstuk niet beginnen moet met nawerken van de gegeven oplossing. Maar ook al zou men daarmede beginnen, dan is er toch nog heel wat inspanning nodig om alles nauwkeurig na te werken en zich van alles goed rekenschap te geven. In een korte bespreking van het eerste deeltje in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs van 4 Aug. 1948 lezen we: „Wel zullen sommigen zich met enige bezorgdheid afvragen, of er voor de studenten zelf nog wel veel te doen over blijft.” Het wil ons voorkomen, dat er voor

die bezorgdheid geen reden is, hetgeen aan de recensent wel gebleken zou zijn, als hij de (overigens niet geringe) moeite genomen zou hebben de oplossingen na te werken.

De figuren, zowel van dit deeltje als van het eerste, zijn zeer nauwkeurig getekend door mej. D. A. BUENO, assistente van de eerste ondergetekende. Voor de grote zorg, die zij daaraan besteed heeft, brengen wij haar onze hartelijke dank. Ook komt een woord van dank toe aan de heer A. P. L. DE COCQ, die de drukproeven van beide deeltjes mee gelezen heeft.

Den Haag

Rijswijk Z.H.

FRED. SCHUH.

W. J. VOLLEWENS.

## INHOUD.

	Blz.
A. Slingerlengte en slingerpunt van een samengestelde slinger. 1—33 . . . . .	7
B. Verbindingskrachten bij een samengestelde slinger. 34—49 . . . . .	12
C. Katrollen-vraagstukken. 50—71 . . . . .	15
D. Beweging van een bol of een blok over een horizontaal of een hellend vlak. 72—87 . . . . .	20
E. Meer lichamen op een hellend vlak. 88—121 . . . . .	23
F. Bewegingen, die niet eenparig versneld zijn. 122—163.	28
G. Aanvankelijke beweging. 164—166. . . . .	35
H. Stoot- en botsingsvraagstukken. 167—176 . . . . .	36
J. Gedwongen beweging. 177—187. . . . .	39
A. Slingerlengte en slingerpunt van een samengestelde slinger. Oplossingen . . . . .	41
B. Verbindingskrachten bij een samengestelde slinger. Oplossingen . . . . .	57
C. Katrollen-vraagstukken. Oplossingen . . . . .	68
D. Beweging van een bol of een blok over een horizontaal of een hellend vlak. Oplossingen . . . . .	81
E. Meer lichamen op een hellend vlak. Oplossingen . . . . .	93
F. Bewegingen, die niet eenparig versneld zijn. Oplossingen.	113
G. Aanvankelijke beweging. Oplossingen. . . . .	147
H. Stoot- en botsingsvraagstukken. Oplossingen . . . . .	149
J. Gedwongen beweging. Oplossingen . . . . .	155

### Examenopgaven van de Technische Hoogeschool.

Juni 1946 . . . . .	160
October 1946. C. . . . .	160
October 1946. M. T. . . . .	161

	Blz.
December 1946. C <sub>3</sub> . . . . .	162
Mei 1947. C <sub>3</sub> . . . . .	163
Juni 1947. W.S.V. . . . . .	164
September 1947. C <sub>3</sub> . . . . .	164
October 1947. C <sub>3</sub> . . . . .	165
December 1947. W.V.S. . . . . .	166
Juni 1946. Oplossingen . . . . .	168
October 1946. C. Oplossingen . . . . .	172
October 1946. M. T. Oplossingen . . . . .	176
December 1946. C <sub>3</sub> . Oplossingen . . . . .	180
Mei 1947. C <sub>3</sub> . Oplossingen . . . . .	183
Juni 1947. W.S.V. Oplossingen . . . . .	186
September 1947. C <sub>3</sub> . Oplossingen . . . . .	197
October 1947. C <sub>3</sub> . Oplossingen . . . . .	202
December 1947. W.S.V. Oplossingen . . . . .	207

---

## A. SLINGERLENGTE EN SLINGERPUNT VAN EEN SAMENGESTELDE SLINGER.

Traagheidsmomenten van een lichaam met massa  $m$ :

$I_A = \frac{1}{3} m l^2$  homogene staaf  $AB$  (lengte  $l$ ) om een as door een uiteinde loodrecht op  $AB$ ;  $\frac{1}{12} m l^2$  t.o.v. as door  $Z$

$I_2 = \frac{1}{2} m r^2$  homogene omwentelingscylander (straal  $r$ ) om zijn as; dan ook een bol

$I_2 = \frac{2}{5} m r^2$  homogene bol om een middellijn.

$I_z = I_{xz} + I_{yz}$ , als  $I_{xz}$  en  $I_{yz}$  de planaire traagheidsmomenten zijn ten opzichte van het  $xz$ -vlak en het  $yz$ -vlak van een rechthoekig assenstelsel.  $I_z$  is het traagheidsmoment om de  $z$ -as.

$I_x + I_y + I_z = 2 I_O$ , als  $I_O$  het polaire traagheidsmoment ten opzichte van de oorsprong  $O$  van een rechthoekig assenkruis is.

Bij een plaat in het  $xy$ -vlak geldt  $I_z = I_x + I_y$ .

$I = I' + m a^2$ , waarin  $I'$  het traagheidsmoment is om een as  $l'$  door het zwaartepunt  $Z$  en  $I$  het traagheidsmoment om een aan  $l'$  evenwijdige as  $l$  op een afstand  $a$  van  $l'$  (dus van  $Z$ ).

$I = m \varrho^2$ , waarin  $\varrho$  de traagheidsstraal (gyratiestraal) is. Met traagheidsstralen gaat de formule met de evenwijdige assen over in  $\varrho^2 = \varrho'^2 + a^2$ .

Heeft men een rechthoekig coördinatenstelsel  $(xyz)$  en evenwijdige assen  $(x' y' z')$  door het zwaartepunt  $(a, b, c)$ , dan geldt voor de traagheidsproducten (centrifugaalmomenten):

$$P_{xy} = P_{x' y'} + m a b \text{ enz.}$$

Traagheidsmoment  $I$  om een as door de oorsprong met richtingshoeken  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$ :

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2 P_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 P_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2 P_{yz} \cos \beta \cos \gamma.$$

Slingerlengte:

$$\lambda = \frac{I_O}{m l} = \frac{I + m l^2}{m l} = \frac{\sigma^2}{l} = l + \frac{\varrho^2}{l},$$

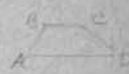
waarin  $I_O$  het traagheidsmoment is om de (horizontale) ophangas en  $I$  het traagheidsmoment om de daaraan evenwijdige as door  $Z$  (op een afstand  $l$ );  $\sigma$  en  $\varrho$  zijn de overeenkomstige traagheidsstralen.

Wordt gesproken van een staaf, stang, draad of plaat, dan is de dikte te verwaarlozen.

## A. SLINGERLENGTE EN SLINGERPUNT.

1. Een homogene ijzerdraad is omgebogen in de vorm van een rechthoek  $ABCD$  ( $AB = a$ ,  $BC = b$ ). Men laat de ijzerdraad slingeren om de horizontale rechte  $AB$ . Bepaal de slingerlengte.
2. Men laat de ijzerdraad van 1 slingeren om een horizontale as  $l$  door  $A$  loodrecht op het vlak van de rechthoek. Bepaal de slingerlengte. Vervolgens laat men de ijzerdraad slingeren om een horizontale as  $n$  door het midden van  $AB$  loodrecht op het vlak van de rechthoek; bepaal de verhouding  $a : b$  zo, dat het slingerpunt in het midden van  $CD$  valt.
3. Men laat een homogene rechthoekige plaat  $ABCD$  ( $AB = a$ ,  $BC = b$ ) slingeren om de horizontale as  $AB$ . Bepaal de slingerlengte.
4. Dezelfde vragen als 2, maar de rechthoek  $ABCD$  ( $AB = a$ ,  $BC = b$ ) als een homogene rechthoekige plaat beschouwd.
- 5.\* Een homogene ijzerdraad is omgebogen tot een gelijkzijdige driehoek  $ABC$  ( $AB = a$ ). Bepaal de slingerlengte bij slingeren om de horizontale rechte  $AB$ , bij slingeren om een horizontale as  $l$  door  $C$  loodrecht op het vlak van de driehoek, bij slingeren om een horizontale as  $n$  door het midden van  $AB$  loodrecht op het vlak van de driehoek en bij slingeren om een horizontale as  $p$  door  $C$  evenwijdig aan  $AB$ .
6. Bepaal van de homogene driehoekige plaat  $ABC$  ( $BC = a$ , de hoogte uit  $A$  is  $h$ ) de slingerlengte bij slingeren om de horizontale rechte  $BC$  en bij slingeren om de horizontale as  $p$  door  $A$  evenwijdig aan  $BC$ .
7. De plaat van 6 is gelijkbenig (top  $A$ ). Bepaal de slingerlengte bij slingeren om de horizontale as  $l$  door  $A$  loodrecht op het vlak van de driehoek en bij slingeren om de horizontale as  $n$  door het midden  $N$  van  $BC$  loodrecht op het vlak van de driehoek. Welke vorm moet de gelijkbenige driehoek hebben, willen  $C$  en  $N$  als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar behoren?
- 8.\* Van de homogene driehoekige plaat  $ABC$  zijn de zijden  $BC = a$ ,  $CA = b$  en  $AB = c$ . Bepaal de slingerlengte bij slingeren om een horizontale as  $l$  door  $A$  loodrecht op het vlak van de plaat en bij slingeren om een horizontale as  $n$  door het midden  $N$  van  $BC$  loodrecht op het vlak van de plaat. Aan welke voorwaarde moet driehoek  $ABC$  voldoen, opdat  $C$  en  $N$  als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar behoren?





9. Een homogene plaat heeft de vorm van een trapezium  $ABCD$  met  $AD = a$  en  $BC = b$  als evenwijdige zijden; de hoogte is  $h$ . Bepaal de slingerlengte bij slingeren om de horizontale rechte  $AD$  en bij slingeren om de horizontale rechte  $BC$ .

10.\* Het trapezium  $ABCD$  van 9 is rechthoekig in  $A$  en  $B$ . Bepaal de slingerlengte bij slingeren om  $AB$ .

11. Van een cirkelvormige plaat (straal  $r$ ) is de vlaktedichtheid evenredig aan de  $n$ de macht ( $n \geq 0$ ) van de afstand  $x$  tot het middelpunt  $M$ . Bepaal de slingerlengte bij slingeren om een horizontale as  $l$ , die het vlak van de plaat in een punt van de omtrek loodrecht snijdt, en bij slingeren om een horizontale raaklijn  $p$  aan de omtrek. Leid uit de resultaten de slingerlengte af van een homogene plaat en die van een homogene cirkelomtrek (hoepel).

12. Van een bol (straal  $r$ ) is de ruimtedichtheid evenredig aan de  $n$ de macht ( $n \geq 0$ ) van de afstand  $x$  tot het middelpunt  $M$ . Bepaal de slingerlengte  $\lambda$  bij slingeren om een horizontale raaklijn  $p$ . Beschouw ook de gevallen  $n = 0$  en  $n \rightarrow \infty$ .

13. Een homogene halve bol (straal  $r$ ) slingert om een horizontale middellijn  $l$  van het vlakke grensvlak. Bepaal de slingerlengte.

14. Een homogene holle bol (straal  $r$ , wanddikte te verwaarlozen) wordt door een middelvlak in twee gelijke stukken verdeeld. Een dier stukken laat men slingeren om een horizontale middellijn  $l$  van de begrenzende cirkel. Bepaal de slingerlengte.

15. De halve holle bol van 14 is afgesloten door een cirkelvormige vlakke plaat, waarvan de vlaktedichtheid dezelfde is als die van de bolvormige plaat. Bepaal de slingerlengte bij slingeren om een horizontale middellijn van de vlakke plaat.

16.\* Dezelfde vraag als 13 met dit verschil, dat de ruimtedichtheid  $kx^n$  ( $n \geq 0$ ) is, waarin  $x$  de afstand tot het middelpunt is.

17. Een samengestelde slinger bestaat uit een homogene staaf  $AB$  (lengte  $l$ , massa  $m$ ) en een aan  $B$  bevestigde homogene bol (straal  $r$ , massa  $M$ ); het middelpunt van de bol ligt op het verlengde van  $AB$ . Het lichaam slingert om een horizontale as  $a$  door  $A$  loodrecht op  $AB$ . Bepaal de slingerlengte.

18. Men vervangt de bol van 17 door een homogene cylinder (straal  $r$ , hoogte  $h$ , massa  $M$ ). Het verlengde van  $AB$  snijdt de as van de cylinder in het midden loodrecht. Bepaal de slingerlengte bij slingeren om de horizontale as  $p$  door  $A$  evenwijdig aan de as

van de cylinder en bij slingeren om de horizontale as  $q$  door  $A$  loodrecht op de as van de cylinder.

19.\* Van een cirkelvormige plaat (straal  $r$ ) is de vlaktedichtheid evenredig aan het kwadraat van de afstand  $x$  tot de middellijn  $AB$ . Bepaal de slingerlengte bij slingeren om een horizontale raaklijn  $l$  evenwijdig aan  $AB$ .

20.\* Bepaal bij de plaat van 19 de slingerlengte bij slingeren om de horizontale raaklijn  $p$  in  $A$ , bij slingeren om een horizontale as  $a$  door  $A$  loodrecht op de plaat en bij slingeren om een horizontale as  $c$  door  $C$  loodrecht op de plaat, als  $CD$  een loodrecht op  $AB$  staande middellijn is.

21. Een homogeen lichaam is begrensd door een omwentelingsparaboloïde en een loodrecht op de as staand plat vlak. De straal van de cirkel, volgens welke dit vlak de paraboloïde snijdt, is  $r$ . De hoogte van het paraboloïde-segment (afstand van de top  $T$  der paraboloïde tot het grondvlak) is  $h$ . Bepaal de slingerlengte bij slingeren om een horizontale as  $p$  door  $T$  evenwijdig aan het grondvlak en bij slingeren om een horizontale middellijn  $l$  van het grondvlak. In welk geval behoren  $T$  en het middelpunt  $N$  van het grondvlak als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar?

22.\* Van het lichaam van 21 is de ruimtedichtheid evenredig aan de afstand tot de omwentelingsas. Dezelfde vragen als in 21.

23. Bepaal van een homogene omwentelingskegel (hoogte  $h$ , straal van het grondvlak  $r$ ) de slingerlengte bij slingeren om een horizontale as  $p$  door de top  $T$  evenwijdig aan het grondvlak en bij slingeren om een horizontale middellijn  $l$  van het grondvlak. In welk geval behoren  $T$  en het middelpunt  $N$  van het grondvlak als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar?

24. Bepaal voor de kegel van 23 de slingerlengte bij slingeren om een horizontale beschrijvende  $b$ .

25.\* Dezelfde vragen als in 23 en 24, maar voor het geval, dat de ruimtedichtheid evenredig is aan de afstand tot het vlak  $V$  door de top  $T$  evenwijdig aan het grondvlak.

26. Men laat het lichaam van 21 slingeren om een horizontale as, die de top  $T$  met een punt  $A$  van de omtrek van het grondvlak verbindt. Bepaal de slingerlengte.

27.\* Dezelfde vraag als 26, maar voor het geval, dat de ruimte-

dichtheid evenredig is aan de afstand tot de omwentelingsas (als in 22).

28. Van een homogeen rechthoekig parallelepipedum is  $ABCD$  het grondvlak en zijn  $AE$ ,  $BF$ ,  $CG$  en  $DH$  de opstaande ribben ( $DA = a$ ,  $DC = c$ ,  $DH = h$ ). Bepaal de slingerlengte bij slingeren om de horizontale as  $AB$  en bij slingeren om de horizontale verbindingslijn van het midden  $P$  van  $AB$  met het midden  $Q$  van  $CD$ .

29. Bepaal van het lichaam van 28 de slingerlengte bij slingeren om de horizontale vlakdiagonaal  $AC$ .

30.\* Bepaal voor het lichaam van 28 de slingerlengte bij slingeren om de horizontale rechte, die  $A$  verbindt met het punt  $J$ , dat zodanig op  $BF$  ligt, dat  $BJ = j$  is;  $j$  wordt positief gerekend, als  $J$  en  $F$  aan dezelfde kant van  $B$  liggen.

31.\* Bepaal de slingerlengte van het homogene regelmatige viervlak  $ABCD$  om de horizontale ribbe  $AB$  (lengte der ribben  $a$ ).

32. Zij  $r$  een rechte door het zwaartepunt  $Z$  van een lichaam en  $\varrho$  de traagheidsstraal voor een as  $z$ , die  $r$  in  $Z$  loodrecht snijdt. Zij  $P$  een punt van  $r$  en  $p$  de rechte door  $P$  evenwijdig aan  $z$ . Bepaal  $P$  zo, dat de slingerlengte bij slingeren om de horizontale as  $p$  een gegeven waarde  $\lambda$  heeft. Hoeveel oplossingen zijn er?

33.\* De punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  liggen op een rechte  $r$  door het zwaartepunt  $Z$  van een lichaam en wel zodanig, dat  $B$  tussen  $A$  en  $C$  ligt. De evenwijdige rechten  $a$ ,  $b$  en  $c$  staan resp. in  $A$ ,  $B$  en  $C$  loodrecht op  $r$ . De periode der kleine slingeren om de horizontale as  $a$  is dezelfde als om  $b$  en om  $c$ . De punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  zijn gegeven ( $AB = p$ ,  $BC = q$ ,  $p > q$ ). Bepaal de ligging van  $Z$  op de rechte  $ABC$  en de traagheidsstraal  $\varrho$  om de as  $z$  door  $Z$  evenwijdig aan  $a$ ,  $b$  en  $c$ . Op  $r$  ligt een vijfde punt  $D$  zodanig, dat de periode der kleine slingeren om een horizontale as  $d$  door  $D$  evenwijdig aan  $a$  dezelfde is als bij slingeren om  $a$ ; bepaal de ligging van  $D$ . Men vindt drie mogelijke waarden van  $\varrho$ . Hoe moet de verhouding  $p : q$  zijn, opdat twee der drie waarden van  $\varrho$  gelijk zijn?

## B. VERBINDINGSKRACHTEN BIJ EEN SAMEN- GESTELDE SLINGER.

\*34. Een lichaam (massa  $m$ ) is onder de invloed van de zwaartekracht draaibaar om een horizontale as  $a$ . Zij  $O$  het voetpunt der loodlijn uit het zwaartepunt  $Z$  op  $a$  neergelaten (ophangpunt). We bepalen de stand van het lichaam door de hoek  $\varphi$ , die  $OZ$  maakt met de naar beneden gekeerde verticaal door  $O$ . Het stelsel der verbindingskrachten door de ophangas op het lichaam uitgeoefend is gelijkwaardig met een kracht  $K$  in  $O$  loodrecht op de ophangas. De component daarvan loodrecht op  $OZ$  noemen we  $Q$ , positief gerekend in de zin van de snelheid van  $Z$  als  $\dot{\varphi} > 0$  is. De component van  $K$  in de richting  $ZO$  (positief gerekend van  $Z$  naar  $O$ ) noemen we  $S$ . Zij  $OZ = l$  en  $\lambda$  de slingerlengte. Voor  $\varphi = 0$  is  $\dot{\varphi} = \omega$ . Bereken  $Q$  en  $S$ .

35. Het lichaam van 34 voert slingeren uit met een amplitudo  $\alpha$ . Bereken  $Q$  en  $S$ .

\*36. Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) voert slingeren uit om een horizontale as door  $A$  loodrecht op  $AB$ . De amplitudo is  $90^\circ$ . Bereken de componenten  $Q$  en  $S$  van de verbindingskracht in  $O$  (zie 34). *vgl. handl. 128, III*

37. Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) is onderworpen aan de zwaartekracht en draaibaar om een horizontale as door  $A$ , die loodrecht op  $AB$  staat. In de stand, waarbij  $B$  zich verticaal onder  $A$  bevindt, geeft men aan de staaf een zodanige hoeksnelheid, dat  $B$  asymptotisch tot een verticaal boven  $A$  gelegen punt nadert. In welke stand is de verbindingskracht  $K$  in  $A$  het kleinst?

38. Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) is met het uiteinde  $A$  verschuifbaar langs een cirkel (middelpunt  $M$ , straal  $r$ ), gelegen in een verticaal vlak. De verbinding bij  $A$  is zodanig, dat  $AB$  in het verlengde van een straal van de cirkel moet blijven. De staaf voert onder de invloed van de zwaartekracht slingeren uit (om de stand, waarbij  $A$  zich verticaal onder  $M$ , dus  $B$  zich verticaal onder  $A$  bevindt). Bepaal de periode dier slingeren als de ampli-

tudo klein is; bepaal ook de slingerlengte. Schrijf de periode der slingeringen als bepaalde integraal, als de amplitudo een willekeurige waarde  $a$  heeft. Bepaal bij laatstgenoemde slingeringen verbindingskracht en -koppel in  $A$  op de staaf uitgeoefend.

39.\* De staaf  $AB$  van 38 is met de punten  $C$  en  $D$  aan de daar genoemde cirkel verbonden zodanig, dat die punten langs de cirkel kunnen glijden. De punten  $C$  en  $D$  zijn door een beugel (waarvan de massa verwaarloosd wordt) vast aan de staaf verbonden zodanig, dat  $ACD$  een gelijkbenige driehoek is ( $AC = AD$ ) en  $AB$  langs het verlengde van de bissectrice door  $A$  van genoemde driehoek valt. De straal van de omgeschreven cirkel van driehoek  $ACD$  is gelijk aan de straal  $r$  van de cirkel, waarlangs de punten  $C$  en  $D$  glijden. Bevindt  $A$  zich in het vlak van de cirkel, dan valt  $A$  dus juist op die cirkel. Men make zich door een figuur een voorstelling van de beugel, die  $A$  dwingt om op de cirkel te blijven en de staaf  $AB$  dwingt om in het verlengde van  $MA$  te vallen. De gelijke hoeken  $AMC$  en  $AMD$  worden  $\beta$  genoemd. Bepaal de verbindingskrachten in  $C$  en  $D$  op de staaf uitgeoefend, als deze slingeringen met een amplitudo  $a$  uitvoert.

\*40. Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) slingert met een amplitudo  $\frac{1}{2}\pi$  om een loodrecht op  $AB$  staande horizontale as. Zij  $C$  een punt van de staaf op een afstand  $x$  van  $A$  ( $0 < x < 2l$ ). Het deel  $AC$  van de staaf oefent op het deel  $CB$  daarvan een kracht en een koppel uit. Bepaal deze.

41.\* Onderzoek voor welke waarden van  $x$  de in 40 gevonden krachtcomponenten  $Q_x$  en  $S_x$  en het moment  $\mu_x$  extreem zijn.

42. Een samengestelde slinger bestaat uit een homogene stang  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ). In  $B$  is aan de stang  $AB$  een tweede stang  $CD$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) bevestigd;  $AB$  staat in het midden van  $CD$  loodrecht op  $CD$ . Men laat dit T-vormige lichaam slingeren om een horizontale as  $a$  door  $A$  loodrecht op  $AB$  en op  $CD$  en wel met een amplitudo  $\frac{1}{2}\pi$ . Bepaal de verbindingskracht in  $A$  op het lichaam uitgeoefend en de kracht en het koppel in  $B$  door  $CD$  op  $AB$  uitgeoefend.

43. Een homogene ijzerdraad (massa  $3m$ , lengte  $6l$ ) is in twee punten  $B$  en  $C$  rechthoekig omgebogen. De delen  $BA$  en  $CD$  van de ijzerdraad zijn na het ombuigen evenwijdig en lopen in dezelfde zin ( $AB = BC = CD = 2l$ ). Men laat dit U-vormige lichaam slingeren om een horizontale as  $a$  door het midden  $O$  van  $BC$  lood-



recht op het vlak  $ABCD$  en wel met een amplitudo  $\frac{1}{2} \pi$ . Bereken de componenten  $P_1$  en  $Q_1$  (langs  $AB$  en  $BC$ ) van de kracht in  $B$  op de staaf  $AB$  uitgeoefend en het moment  $\mu_1$  van het in  $B$  op  $AB$  uitgeoefende koppel. Bereken ook de componenten  $P_2$  en  $Q_2$  (langs  $DC$  en  $BC$ ) van de kracht in  $C$  op  $CD$  uitgeoefend en het moment  $\mu_2$  van het in  $C$  op  $CD$  uitgeoefende koppel.  $P_1, Q_1, P_2$  en  $Q_2$  worden positief gerekend resp. in de zin  $AB, BC, DC, BC$ . De momenten  $\mu_1$  en  $\mu_2$  worden positief gerekend in de zin der draaiing van  $OA$  naar  $OD$  door de kleinste hoek.

44. Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) kan zich met de uiteinden  $A$  en  $B$  bewegen langs een in een verticaal vlak gelegen cirkel (straal  $r$ ,  $r > l$ ). In een stand, waarin  $AB$  verticaal is ( $A$  lager dan  $B$ ), wordt de staaf zonder beginsnelheid losgelaten. Bereken voor een willekeurige stand van de staaf de verbindingskrachten  $N_1$  en  $N_2$  in  $A$  resp.  $B$  door de cirkel op de staaf uitgeoefend, positief gerekend naar het middelpunt  $M$  van de cirkel toe.

45. Onderzoek, waar de krachten  $N_1$  en  $N_2$  van 44 naar  $M$  toe en waar van  $M$  afgericht zijn. Onderzoek, waar  $N_1$  en  $N_2$  extreem zijn.

46. Hetzelfde geval als 44 maar nu wordt de staaf losgelaten in een stand, waarbij  $MZ$  (waarin  $Z$  het zwaartepunt van  $AB$  is) de scherpe hoek  $\beta$  met de naar beneden gekeerde verticaal maakt. Beneden welk bedrag moet  $\beta$  liggen, opdat de krachten  $N_1$  en  $N_2$  in  $A$  resp.  $B$  op de staaf uitgeoefend, steeds naar  $M$  gericht zijn?

47. De staaf van 44 ondervindt in de eindpunten  $A$  en  $B$  wrijving. Zowel bij  $A$  als bij  $B$  is de wrijvingscoëfficiënt  $f$ ; de wrijvingshoek  $\alpha$  is kleiner dan de hoek  $\theta$ , die  $AB$  met  $MA$  en  $MB$  maakt. De staaf bevindt zich eerst in de stand, waarbij zijn zwaartepunt  $Z$  zo laag mogelijk ligt. Nu wordt de staaf langs de cirkel verschoven, waardoor de hoek  $\varphi$ , die  $MZ$  met de naar beneden gekeerde verticaal maakt, toeneemt, met  $0$  beginnend. Laat men de staaf bij een kleine waarde van  $\varphi$  los (zonder beginsnelheid), dan blijft deze in rust (evenwicht), terwijl de in 44 genoemde krachten naar  $M$  toe gericht zijn. Beneden welk bedrag moet  $\varphi$  daartoe liggen?

48. Bepaal constructief de in 47 gevraagde bovengrens van de hoek  $\varphi$  in geval van evenwicht.

49.\* Leid uit de constructie van 48 de in 47 gevonden waarde van  $\text{tg } \varphi$  af.

### C. KATROLLEN-VRAAGSTUKKEN.

Bij vraagstukken met geen andere gegeven krachten dan zwaartekracht (dus geen luchtweerstand), waarbij de zwaartepunten der afzonderlijke lichamen zich niet anders dan rechtlijnig kunnen bewegen (of zich op grond van symmetrie rechtlijnig bewegen) en waarbij de richtingen der verbindingskrachten gedurende de beweging niet veranderen, veranderen ook de grootten der verbindingskrachten gedurende de beweging niet en zijn de bewegingen der zwaartepunten (evenals de draaiende bewegingen) eenparig versneld. Dit geval doet zich o.a. voor bij vraagstukken met katrollen, waarbij de richtingen van de koorden niet veranderen; een ander voorbeeld is een homogene bol, die zonder beginsnelheid op een hellend vlak geplaatst wordt en al of niet zuiver rolt.

\*50. Een vaste katrol heeft een straal  $R$  en een traagheidsmoment  $I$  om de draaiingsas. Over de katrol is een koord geslagen. Aan de naar beneden hangende einden van het koord zijn lichamen met massa's  $m$  en  $M$  bevestigd ( $m < M$ ). Het koord kan niet over de katrol glijden. Bepaal de versnellingen van beide lichamen, als ze met beginsnelheden  $0$  (en gestrekte koorden) worden losgelaten in een stand, waarbij de beide delen van het koord verticaal zijn. Bepaal ook de spanningen in het koord. De lichamen kunnen als materiële punten worden behandeld (ook bij de volgende vraagstukken).

51. In 50 neemt men voor de katrol een homogene cirkelvormige schijf met een massa  $m'$ . Gegeven is, dat de spanning in het ene deel van het koord 2-maal zo groot is als in het andere deel en dat de lichamen een versnelling  $\frac{1}{2}g$  krijgen. Bepaal de verhoudingen der massa's  $m$ ,  $M$  en  $m'$ .

\*52. Over een vaste katrol (straal  $R$ , traagheidsmoment  $I$ ) is een koord geslagen, waarvan de beide delen verticaal naar beneden lopen. Aan het ene uiteinde hangt een lichaam met een massa  $M$ . Aan het andere einde hangt een katrol (straal  $R$ , massa  $m$ , traagheidsmoment  $i$ , terwijl de massa van de beugel, waaraan de tweede

katrol hangt, verwaarloosd wordt). Over deze katrol is een tweede koord geslagen eveneens met verticaal naar beneden hangende delen. Aan de uiteinden daarvan zijn lichamen met massa's  $p$  en  $q$  ( $p > q$ ) bevestigd. De koorden kunnen niet over de katrollen glijden. Men laat de lichamen los met beginsnelheden 0 en gestrekte koorden. Bepaal  $M$  zo, dat het lichaam met massa  $M$  in rust blijft.

53. Hetzelfde geval als 52, maar nu is van de massa  $M$  niets gegeven. Beide katrollen zijn homogene cirkelvormige schijven, ieder met een massa  $m$ . Bepaal de versnellingen der lichamen.

54.\* Hetzelfde geval als 52, maar nu wordt de massa van de vaste katrol verwaarloosd; de tweede (bewegende) katrol is een homogene cirkelvormige schijf met een massa  $m$ . Verder is gegeven, dat  $M = p + q + m$  is, zodat er evenwicht zijn zou, als de tweede katrol door een pal belet werd om te draaien. Bepaal de versnellingen der lichamen. Leid uit de resultaten af, dat de lichamen  $M$  en  $p$  naar beneden gaan,  $p$  het snelst, en dat het lichaam  $q$  nog sneller naar boven gaat.

55.\* Bereken bij 54 de versnelling van het gemeenschappelijke zwaartepunt der lichamen met massa's  $p$ ,  $q$  en  $m$  en leid daaruit af, dat die versnelling gelijk is aan de versnelling van het lichaam met massa  $p + q + m$ . Bewijs ook door redenering (zonder berekening) de gelijkheid van beide versnellingen. Leid daaruit, eveneens door redenering, af dat de lichamen  $p + q + m$  en  $p$  naar beneden gaan,  $p$  het snelst.

56. Over een vaste katrol (straal  $R$ , traagheidsmoment  $I$ ) is een koord geslagen. Het ene deel van het koord loopt verticaal naar beneden; aan het uiteinde daarvan is een lichaam met massa  $m$  bevestigd. Het andere deel van het koord loopt eerst verticaal naar beneden, dan over de onderkant van een losse katrol (straal  $R$ , traagheidsmoment  $i$ ) en vervolgens verticaal naar boven; het uiteinde van dit koord is bevestigd aan de balk, waaraan de vaste katrol is opgehangen (zodat de afstand van het bevestigingspunt tot het punt van de balk, waar de vaste katrol is opgehangen, gelijk is aan  $3R$ ). De losse katrol draagt een lichaam, waarvan de massa tezamen met die van de losse katrol gelijk aan  $M$  is. De lichamen worden met beginsnelheden 0 en gestrekte koorden losgelaten. Bepaal de versnellingen.

57. Over een vaste katrol (straal  $R$ , traagheidsmoment  $I$ ) is een koord geslagen, waarvan de beide delen verticaal naar beneden



lopen. Aan het ene uiteinde hangt een lichaam met een massa  $M$ , aan het andere uiteinde een aap met een massa  $m$ . Met welke versnelling moet de aap naar beneden klimmen om te maken, dat het lichaam  $M$  op zijn plaats blijft; een naar boven gerichte versnelling wordt als negatief beschouwd. De aap wordt beschouwd als een materieel punt.

58.\* De aap van 57 klimt naar beneden met een gegeven versnelling  $a$  ten opzichte van het koord ( $a < 0$ , als de aap naar boven klimt). Bepaal de versnelling van  $M$  en de spanning in de beide delen van het koord.

59.\* De aap van 58 heeft dezelfde massa  $M$  als het lichaam aan het andere deel van het koord. De aap en het lichaam bevinden zich op dezelfde hoogte zonder beginsnelheid. De aap beweegt zich niet, zodat er evenwicht is. Nu gaat de aap naar beneden of naar boven klimmen. Het traagheidsmoment van de katrol wordt verwaarloosd. Bewijs, dat de aap op dezelfde hoogte blijft als het lichaam. Beredeneer dit ook zonder berekening.

60.\* Over een vaste katrol, waarvan het traagheidsmoment te verwaarlozen is, loopt een koord, waarvan de beide delen verticaal naar beneden lopen. Aan het ene einde hangt een lichaam met een massa  $2m + \mu$ . Aan het andere einde hangt een katrol (straal  $R$ , massa  $\mu$ , traagheidsmoment  $i$ ). Over deze katrol is een tweede koord geslagen; de beide delen hiervan lopen weer verticaal naar beneden. Aan het ene einde van het tweede koord hangt een lichaam met een massa  $m$  en aan het andere einde een aap eveneens met een massa  $m$ , zodat er evenwicht is, als de aap zich niet beweegt. Nu gaat de aap langs het koord klimmen (versnelling  $a$  ten opzichte van het koord, positief gerekend naar beneden). Bepaal de versnellingen.

61.\* Bewijs in het geval van 60, dat het lichaam  $2m + \mu$  dezelfde versnelling (in dezelfde zin) heeft als het gemeenschappelijke zwaartepunt van het lichaam  $m$ , de aap en de losse katrol. Bewijs de gelijkheid van beide versnellingen ook door redenering (dus zonder berekening).

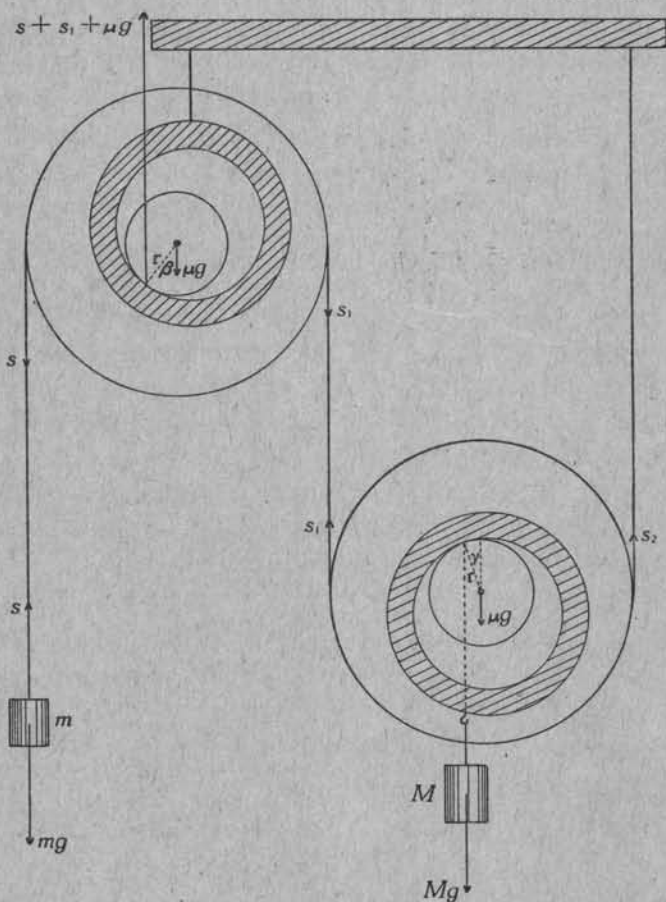
### Katrollen-vraagstukken met glijdende wrijving.

Het verschil tussen statische en dynamische wrijvingscoëfficiënt wordt (ook in het volgende) steeds verwaarloosd. In geval van uitglijden is  $W = fN$ , waarin  $W$  de wrijving,  $N$  de normale druk en

$f$  de wrijvingscoëfficiënt is,  $\alpha$  de wrijvingshoek (grootste hoek tussen normale druk en totale druk) dan is  $f = \operatorname{tg} \alpha$ .

62. Een vaste katrol heeft een massa  $\mu$ , een straal  $R$  en een traagheidsmoment  $I$  (om een as door het zwaartepunt loodrecht op het vlak van de katrol). De ophanging geschiedt doordat de beide einden (tappen) van de cilindrische as (straal  $r$ ) van de katrol rusten in cirkelvormige tappannen. Er is glijdende wrijving (tapwrijving). Over de katrol is een koord geslagen, dat niet over de katrol kan glijden. De beide einden van het koord lopen verticaal naar beneden en dragen lichamen met massa's  $M$  en  $m$  ( $M > m$ ). Waaraan hebben  $M$  en  $m$  te voldoen, opdat er evenwicht is?

63. Bij de vaste katrol (met tapwrijving) van 62 is  $M$  zo groot, dat er geen evenwicht is, maar het lichaam  $M$  eenparig versneld



naar beneden gaat. Bepaal de versnelling daarvan. Bereken ook de spanningen in beide delen van het koord.

64.\* Bereken in het geval 63 de arbeid, die de tapwrijving verricht heeft, als het lichaam  $M$  een weg  $x$  heeft afgelegd.

65.\* We nemen hetzelfde geval als in 56, maar nu met tapwrijving. Beide katrollen zijn gelijk (straal  $R$ , traagheidsmoment  $I$ , straal van de as  $r$ , massa  $\mu$ ); bij beide katrollen is de wrijvingshoek  $\alpha$ . Om de as van de losse katrol is een ring gelegd, waaraan een lichaam is opgehangen; de massa van dit lichaam tezamen met die van de ring is  $M$ . Tussen welke grenzen moet  $m$  liggen, wil er evenwicht zijn?

66.\* We nemen het geval 65, zonder beginsnelheden, maar nu gaat het lichaam  $m$  naar beneden. Bereken de versnellingen. Boven welk bedrag moet  $m$  liggen?

67.\* Dezelfde vraag als 66, maar nu voor het geval, dat het lichaam  $m$  naar boven gaat. Beneden welk bedrag moet  $m$  liggen?

68.\* Bereken in het geval 66 of 67 de arbeid, die de tapwrijvingen verricht hebben, als de losse katrol zich over een afstand  $x$  naar boven resp. beneden verplaatst heeft.

#### Katrollen-vraagstukken met luchtweerstand.

69. In het geval 50 (geen tapwrijving) ondervinden de lichamen  $m$  en  $M$  een luchtweerstand evenredig aan het kwadraat van de snelheid; bij een snelheid 1 zijn die weerstanden  $k$  resp.  $K$ . De katrol is een homogene cirkelvormige schijf (massa  $\mu$ ). Bereken de snelheid van het lichaam  $M$ , als dit een stuk  $x$  gedaald is.

70.\* Bereken de arbeid, die de luchtweerstand op het lichaam  $M$  verricht heeft, en de arbeid verricht door de luchtweerstand op het lichaam  $m$ , als het lichaam  $M$  een stuk  $x$  gedaald is.

71.\* Hetzelfde geval als 69, maar nu is er bovendien de tapwrijving van 62. Bereken de snelheid van het lichaam  $M$ , als dit een stuk  $x$  gedaald is. De katrol moet worden beschouwd als een homogene schijf (massa  $\mu$ , straal  $R$ ), terwijl de massa van de buiten de schijf stekende delen van de as verwaarloosd wordt.

## D. BEWEGING VAN EEN BOL OF EEN BLOK OVER EEN HORIZONTALAAL OF EEN HELLEND VLAK.

De bol of het blok is onderworpen aan de zwaartekracht en aan wrijving.

De rollende (of elastische) wrijving wordt verwaarloosd.

Het verschil tussen statische en dynamische wrijvingscoëfficiënt wordt verwaarloosd. De wrijvingscoëfficiënt is  $f$ .

Men tekene de doorsnede met een verticaal vlak door het zwaartepunt van het bewegende lichaam loodrecht op het hellend vlak.

x \*72. Een homogene bol (straal  $r$ ) wordt op een horizontaal vlak geplaatst. De beginsnelheid van het zwaartepunt  $Z$  is  $v_0$  (horizontaal), terwijl er aanvankelijk geen hoeksnelheid is. Op welk tijdstip en waar begint de bol zuiver te rollen? Hoe groot is daarna de snelheid van  $Z$ ? Bepaal ook de arbeid, die de wrijving verricht.

x \*73. Een homogene bol (straal  $r$ ) wordt op een horizontaal vlak geplaatst. De beginsnelheid van het zwaartepunt  $Z$  is 0, terwijl de bol een beginhoeksnelheid  $\omega_0$  heeft om een horizontale as door  $Z$ . Op welk tijdstip en waar begint de bol zuiver te rollen en hoe groot is dan de snelheid van  $Z$ ? Bepaal de wrijvingsarbeid.

x 74. Een holle bol met constante vlaktedichtheid (straal  $r$ ) wordt op een horizontaal vlak geplaatst. Het zwaartepunt  $Z$  heeft een horizontale beginsnelheid  $v_0$ . Verder heeft de bol een beginhoeksnelheid  $\omega_0$  om een horizontale as door  $Z$  loodrecht op  $v_0$ ; de zin van  $\omega_0$  is zodanig, dat het raakpunt daardoor een snelheid krijgt tegen  $v_0$  in. Op welk tijdstip en waar begint de bol zuiver te rollen en hoe groot is dan de snelheid van  $Z$ ?

x 75.\* Dezelfde vraag als 74, maar nu is de zin van  $\omega_0$  zodanig, dat het raakpunt daardoor een snelheid krijgt in dezelfde zin als  $v_0$ . Op welk tijdstip is het zwaartepunt  $Z$  van de bol weer in zijn beginstand terug en welke snelheid heeft  $Z$  dan? Is op het bedoelde tijdstip het zuiver rollen reeds ingetreden?

76.\* Maak in het geval 75 een grafiek van  $x$  als functie van  $t$  en wel voor de volgende waarden van  $r\omega_0$ :

$$v_0, \quad 1,5 v_0, \quad 2 v_0, \quad 2,5 v_0, \quad 4 v_0, \quad 5 v_0.$$

\*77. Op een hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ ) plaatst men een bol (straal  $r$ ). Deze wordt zonder beginsnelheid losgelaten. Het zwaartepunt  $Z$  van de bol ligt in het middelpunt. Het verticale vlak  $V$  door  $Z_0$  (de beginstand van  $Z$ ) loodrecht op het hellend vlak is een symmetrievlak van de bol. De traagheidsstraal voor een as door  $Z_0$  loodrecht op  $V$  is  $\rho$ . Onderzoek de beweging van de bol. Bepaal ook de poolbaan en de poolkromme voor de doorsnede van de bol met het vlak  $V$ .

Het vraagstuk wordt niet wezenlijk anders, als men de bol vervangt door een omwentelingscylinder (waarvan de beschrijvende horizontaal zijn en evenwijdig aan het hellend vlak) en ook niet als men de bol b.v. door een omwentelingsellipsoïde vervangt.

78.\* In 77 maakt men de onderstelling van uitglijden naar beneden. Bereken de arbeid, die de wrijving na een tijd  $t$  verricht heeft.

79. Een homogene bol (straal  $r$ ) wordt op een hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ ) geplaatst. Men geeft aan de bol een beginsnelheid  $v_0$  (van het zwaartepunt  $Z$ ), schuin naar boven in de richting van de snijlijn van het hellend vlak met een loodrecht daarop staand verticaal vlak. Er is geen beginhoeksnelheid. Gegeven is, dat op het tijdstip  $t_1$ , waarop het uitglijden tot staan gekomen is, de snelheid van  $Z$  tot de helft gedaald is. Bepaal het tijdstip, waarop  $Z$  zijn hoogste punt bereikt heeft, en het tijdstip, waarop  $Z$  in zijn beginstand terug is. Bepaal ook de ligging van het hoogste punt van  $Z$  en de snelheid van het punt  $Z$  als dit in zijn beginstand terug is.

80.\* Bereken bij 79 de arbeid  $A$ , die de wrijving verricht heeft tot het tijdstip, waarop zuiver rollen intreedt, en verifieer daarmee de snelheid, waarmee  $Z$  in  $Z_0$  terugkomt.

81. Een homogene bol (straal  $r$ ) wordt op een hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ ) geplaatst. Men geeft aan het zwaartepunt  $Z$  van de bol schuin naar beneden een beginsnelheid  $v_0$  in de richting van de snijlijn van het hellend vlak met een loodrecht daarop staand verticaal vlak  $V$ . Verder is er een beginhoeksnelheid  $\omega_0$  om een as door  $Z$  loodrecht op  $V$  in zodanige zin, dat het punt van de bol, dat raakpunt is, er daardoor een snelheid in de zin van  $v_0$  bij krijgt (dus in de zin van naar boven rollen). Onderzoek de beweging. Ga in het bijzonder na of (en wanneer en waar) zuiver rollen gaat intreden.

82.\* Bij 81 nemen we het geval, dat  $Z$ , zolang nog geen zuiver rollen is ingetreden, een bovenwaarts gerichte versnelling krijgt, die

D. BEWEGING OVER EEN HORIZONTALAAL OF HELLEND VLAK.

in grootte gelijk is aan de benedenwaarts gerichte versnelling, die  $Z$  zou krijgen als er geen wrijving was. Verder is gegeven, dat het zuiver rollen bovenwaarts begint en dat  $Z$  daarbij juist stijgt tot zijn beginstand  $Z_0$ , om vervolgens weer te dalen. Bereken  $\omega_0$ , als  $v_0$  gegeven is.

\*83. Op een hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ ) staat een homogeen rechthoekig blok. Twee der ribben van het grondvlak zijn horizontaal, zodat de opstaande zijvlakken door de beide andere ribben van het grondvlak verticaal zijn. De afstand van het zwaartepunt  $Z$  tot het grondvlak is  $h$ , terwijl de afstand van  $Z$  tot de niet verticale opstaande zijvlakken van het blok gelijk is aan  $a$ . Het blok wordt zonder beginsnelheid losgelaten. Ga na in welk geval het blok in rust blijft (dus in evenwicht is).

Het vraagstuk verandert niet wezenlijk, als men het blok vervangt door een omwentelingskegel (straal van het grondvlak  $a$ ) of door een omwentelingscylinder (straal  $a$ ).


\*84. Geef van 83 een constructieve oplossing.

\*85. Ga na in welk geval het blok van 83 gaat glijden zonder te kantelen.

\*86. Geef van 85 een constructieve oplossing.

87.\* Maak een grafiek van de resultaten van 83—86 door  $f$  en  $\gamma$  veranderlijk te denken. Beschouw daartoe  $f$  en  $u = \operatorname{tg} \gamma$  als de rechthoekige coördinaten van een punt van een beeldvlak. Teken het veld, waarin het beeldpunt moet liggen wil er evenwicht zijn, en het veld, dat betrekking heeft op uitglijden zonder kantelen.

## E. MEER LICHAMEN OP EEN HELLEND VLAK.

88.\* Op een hellend vlak plaatst men twee bollen, beide met een straal  $r$  en in de middelpunten  $M_1$  en  $M_2$  gelegen zwaartepunten; de massa's der bollen zijn  $m_1$  resp.  $m_2$ . De bollen raken elkaar, terwijl  $M_1 M_2$  loodrecht staat op de horizontale rechten van het hellend vlak ( $M_2$  hoger dan  $M_1$ ). Gegeven is, dat de hellingshoek  $\gamma$  van het vlak tussen  $0$  en  $45^\circ$  ligt. De wrijvingscoëfficiënt is bij de drie raakpunten gelijk aan  $f$ . Waaraan hebben  $m_1$ ,  $m_2$  en  $f$  te voldoen, wil er evenwicht zijn? 

89.\* De bol  $M_2$  van 88 is homogeen (massief), terwijl de bol  $M_1$  van 88 hol is met constante vlaktedichtheid. Verder is  $f = 1$ , terwijl we het gegeven, dat  $\gamma$  tussen  $0$  en  $45^\circ$  ligt, laten vervallen. Ga na of het mogelijk is, dat beide bollen zuiver rollend naar beneden gaan.

90.\* De bol  $M_1$  van 89 heeft een massa  $3m$ , de bol  $M_2$  een massa  $5m$ . De wrijvingscoëfficiënt  $f$  (bij de drie aanrakingspunten dezelfde) is niet gegeven. Ga na of een beweging mogelijk is, waarbij beide bollen met elkaar in aanraking blijven, over elkaar rollend, en over het hellend vlak naar beneden uitglijden (d.w.z. dat de punten der bollen, die ogenblikkelijk met het hellend vlak in aanraking zijn, een schuin naar beneden gerichte snelheid krijgen).

91.\* Bij 90 is de versnelling van de zwaartepunten van beide bollen dezelfde als die van het zwaartepunt van één enkele bol, die naar beneden uitglijdt. Beredeneer (dus zonder berekening), dat dit steeds het geval is, als beide bollen naar beneden uitglijden, ook als de massa's en de traagheidsmomenten willekeurig zijn en ook als de bollen verschillende stralen hebben.

92.\* Ga bij de bollen van 90 na of een beweging mogelijk is, waarbij beide bollen met elkaar in aanraking blijven, over elkaar rollend, terwijl de bol  $M_1$  over het hellend vlak rolt en de bol  $M_2$  naar beneden uitglijdt.

X 93. Op een hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ ) staat een homogene bol (straal  $r$ , massa  $m_1$ ). Op dit vlak wordt ook een homogene kubus (ribbe  $2r$ , massa  $m_2$ ) geplaatst; twee ribben van het grond-

vlak zijn horizontaal. De bol raakt het onderste niet-verticale opstaande zijvlak van de kubus in het middelpunt van dit zijvlak aan. Tussen bol en kubus is er geen wrijving. Tussen het hellend vlak en de kubus is er wrijving met een wrijvingscoëfficiënt  $f$ , tussen hellend vlak en bol is de wrijvingscoëfficiënt 2. Men laat bol en kubus zonder beginsnelheid los. Ga na in welk geval er een beweging kan ontstaan, waarbij bol en kubus met elkaar in aanraking blijven, zonder dat de kubus gaat kantelen, terwijl de bol zuiver gaat rollen.

94.\* Ga na of er in het geval 93 een beweging kan ontstaan, waarbij bol en kubus met elkaar in aanraking blijven, zonder dat de kubus gaat kantelen, terwijl de bol naar beneden uitglijdt (dus niet zuiver rolt).

95.\* Ga na in welk geval de bol en de kubus van 93 elkaar loslaten en de kubus niet gaat kantelen.

96.\* Maak een grafiek van de resultaten van 93—95, door  $f$  en  $u = \text{tg } \gamma$  als rechthoekige coördinaten van een punt van een beeldvlak te beschouwen (vergelijk 87). Teken de velden, die bij de verschillende bewegingsmogelijkheden behoren. In de tekening nemen  $m_1 = m_2$ .

97.\* Men laat de bol en de kubus van 93 van plaats verwisselen, zodat nu de bol het bovenste niet-verticale opstaande zijvlak van de kubus in het middelpunt van dit zijvlak aanraakt. Tussen hellend vlak en bol is nu echter de wrijvingscoëfficiënt niet 2, maar  $\frac{1}{2}f$ . Ga na in welk geval er evenwicht is.

98.\* Hetzelfde geval als 97, maar nu gaat de bol zuiver rollen en blijft in aanraking met de kubus, die niet gaat kantelen (geen beginsnelheden). In welk geval treedt deze beweging in?

99.\* Dezelfde vraag als 98, maar nu voor het geval, dat de bol (d.w.z. het punt daarvan, dat raakpunt is) naar beneden uitglijdt en in aanraking blijft met de kubus, die niet gaat kantelen.

100.\* Ga na in welk geval de bol en de kubus van 97 elkaar loslaten en de kubus niet gaat kantelen (geen beginsnelheden).

101.\* Maak een grafiek van de resultaten van 97—99 door  $f$  en  $u = \text{tg } \gamma$  als rechthoekige coördinaten van een punt van een beeldvlak te beschouwen (vergelijk 87 en 96). In de tekening nemen  $m_1 = m_2$ .

102. Op een hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ ) ligt een plank (massa  $m_1$ ) en op die plank een tweede plank (massa  $m_2$ ). De planken



zijn zo dun, dat kantelen is uitgesloten. Tussen hellend vlak en de eerste plank is de wrijvingscoëfficiënt  $f_1$ , tussen beide planken is de wrijvingscoëfficiënt  $f_2$ . Er zijn geen beginsnelheden. Bewijs, dat er geen beweging kan ontstaan, waarbij beide planken uitglijden, de onderste plank het snelst. Laat zien, dat voor dit bewijs nagenoeg geen berekening nodig is.

103. Geef de voorwaarde aan, waaronder de planken van 102 beide gaan uitglijden, de bovenste het snelst.

104.\* Geef voor de beide planken van 102 de voorwaarden voor de drie andere bewegingsmogelijkheden aan.

105.\* Maak een grafiek van de resultaten van 103 en 104 door  $f_1$  en  $f_2$  als rechthoekige coördinaten van een punt van een beeldvlak te beschouwen. Neem  $m_1 = m_2$ .

106.\* Op een hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ ) liggen op elkaar gestapeld  $N$  planken, die zo dun zijn dat geen kantelen intreedt. Er zijn geen beginsnelheden. Beredeneer, dat er geen beweging kan ontstaan, waarbij een plank zich ten opzichte van de daaronder liggende plank schuin naar boven beweegt. Bij de plank, die met het hellend vlak in aanraking is, is dit vlak als de daaronder liggende plank (met snelheid 0) te beschouwen. *vgl. nr. 102*

107.\* Laat zien, dat er bij de  $N$  planken van 106 in het geheel  $2^N$  bewegingsmogelijkheden zijn.


× 108. Op een hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ ) ligt een dunne plank (massa  $m_1$ , wrijvingscoëfficiënt  $f_1$ ). Op die plank plaatst men een homogene bol (straal  $r$ , massa  $m_2$ ). De wrijvingscoëfficiënt tussen plank en bol is  $f_2$ . Er zijn geen beginsnelheden. Geef de voorwaarde aan, waaronder de plank in rust blijft.

\*109. Geef de voorwaarde aan, waaronder de plank van 108 naar beneden gaat uitglijden en de bol over de plank zuiver gaat rollen.

110. Geef de voorwaarde aan, waaronder de plank van 108 naar beneden uitglijdt en de bol over de plank naar beneden gaat uitglijden.

111.\* Maak een grafiek van de resultaten van 108—110 door  $f_1$  en  $f_2$  als rechthoekige coördinaten van een punt van een beeldvlak te beschouwen. Neem  $m_1 = m_2$ .

× 112. Twee hellende vlakken (hellingshoeken  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$ , wrij-



vingscoëfficiënten  $f_1$  resp.  $f_2$ ) snijden elkaar volgens een horizontale rechte  $l$ . Van  $l$  af hellen beide vlakken naar beneden naar verschillende kant. Op het eerste vlak rust een homogene bol met straal  $r_1$  en massa  $m_1$ , op het tweede vlak een homogene bol met straal  $r_2$  en massa  $m_2$ . De middelpunten der bollen zijn verbonden door een koord gelegen in een vlak loodrecht op  $l$ . Dit koord loopt over een gladde pen, die evenwijdig is aan  $l$ . De pen is zodanig geplaatst, dat de beide delen van het koord evenwijdig zijn aan de hellende vlakken. Door middel van beugels (waarvan de massa's verwaarloosd worden) zijn de uiteinden van het koord verbonden aan horizontale (massaloze) assen, die volgens middellijnen door de bollen steken; de bollen kunnen zonder wrijving om die assen draaien. Geef aan in welk geval er evenwicht is.

113. Bij het toestel van 112 nemen we het geval, dat de bol  $m_1$  rollend naar beneden en de bol  $m_2$  rollend naar boven gaat (geen beginsnelheden). Geef de voorwaarde daarvoor aan.

114. Bij het toestel van 112 nemen we het geval, dat (zonder beginsnelheden) de bol  $m_1$  schuin naar beneden gaat, uitglijdend naar beneden, en de bol  $m_2$  schuin naar boven, uitglijdend naar boven. Geef de voorwaarde daarvoor aan.

115.\* Bij het toestel van 112 nemen we het geval, dat (zonder beginsnelheden) de bol  $m_1$  schuin naar beneden gaat, uitglijdend naar beneden, en de bol  $m_2$  schuin naar boven, zuiver rollend. Geef de voorwaarde daarvoor aan.

116.\* Dezelfde vraag als 115, maar nu voor het geval, dat de bol  $m_1$  schuin naar beneden rolt en de bol  $m_2$  schuin naar boven uitglijdt.

117.\* Maak een grafiek van de resultaten van 113—116 door  $f_1$  en  $f_2$  als rechthoekige coördinaten van een punt van een beeldvlak te beschouwen. Men neme:

$$m_1 = m_2, \quad \sin \gamma_1 = \frac{4}{5}, \quad \sin \gamma_2 = \frac{3}{5}.$$

118. Een homogeen wigvormig lichaam (massa  $M$ ) heeft de vorm van een recht driezijdig prisma, waarvan het grondvlak  $ABC$  en het bovenvlak  $GHJ$  driehoeken zijn, die rechthoekig zijn in  $C$  resp.  $J$ ; de opstaande ribben van het prisma zijn  $AG$ ,  $BH$  en  $CJ$ . Het lichaam wordt met het opstaande zijvlak  $BCJH$  op een horizontaal vlak (wrijvingscoëfficiënt  $f_1$ ) geplaatst. Hierdoor ontstaat een verschuifbaar hellend vlak (hellingshoek  $\gamma$ , zodat  $\angle CBA = \gamma$  is). Op dit hellende vlak plaatst men een homogene bol (massa  $m$ ),

waarvan de straal  $r$  klein is ten opzichte van  $BC = a$ . De plaatsing geschiedt zodanig, dat het raakpunt met het hellend vlak gelegen is in het vlak door het zwaartepunt van de wig loodrecht op  $AG$  op een te verwaarlozen afstand van  $AG$ . In die stand worden wig en bol zonder beginsnelheden losgelaten. Tussen het hellend vlak  $ABHG$  en de bol is de wrijvingscoëfficiënt  $f$ . Men beschouwt de beweging tot het tijdstip, waarop de bol het horizontale vlak bereikt. Onder welke voorwaarde blijft de wig in rust en rolt de bol zuiver?

119.\* Geef bij 118 de voorwaarde aan, waaronder de wig in rust blijft en de bol uitglijdt.

120.\* In 118 neemt men  $f_1 = 0$  (geen wrijving tussen horizontaal vlak en wig). Geef aan in welk geval de bol zuiver gaat rollen en de wig niet gaat kantelen.

121.\* In 118 neemt men weer  $f_1 = 0$ . Geef aan in welk geval de bol gaat uitglijden en de wig niet gaat kantelen.

## F. BEWEGINGEN, DIE NIET EENPARIG VERSNELD ZIJN.

*Hand 72 - § 141. I* \*122. Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) wordt zonder beginsnelheid met het uiteinde  $A$  op een glad horizontaal vlak geplaatst onder een hoek  $\alpha$  met dit vlak. Bewijs, dat de staaf het horizontale vlak niet loslaat tot het tijdstip  $t_1$ , waarop  $B$  dit vlak bereikt. Bepaal de snelheid, die  $B$  dan heeft, en schrijf  $t_1$  als bepaalde integraal. *geen wijziging dus*

123.\* Men breidt 122 uit door de staaf niet homogeen te nemen. Zij  $g$  de traagheidsstraal ten opzichte van een as door het zwaartepunt  $Z$  loodrecht op  $AB$  en zij  $AZ = l$ . Laat zien, dat ook nu de staaf  $AB$  het vlak niet loslaat tot het tijdstip  $t_1$ , waarop  $B$  het horizontale vlak treft.

124. De homogene staaf  $AB$  van 122 ligt in de beginstand op het horizontale vlak. Het uiteinde  $B$  heeft een verticaal naar boven gerichte beginsnelheid  $v_0$ ; het uiteinde  $A$  heeft een beginsnelheid 0. Geef aan in welk geval de staaf het horizontale vlak niet loslaat. Wordt dan de stand bereikt, waarin de staaf verticaal is?

125.\* Beschrijf bij 124 voor het geval, dat de staaf het horizontale vlak loslaat, de beweging, die de staaf na dit loslaten uitvoert. Bepaal de grootste hoogte, die het zwaartepunt van de staaf bereikt; daarbij kan men aannemen, dat de staaf niet vóór die tijd tegen het horizontale vlak botst.

*vergeet*  
*Hand 72 - § 141. II* \*126. Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) is door middel van een bij  $A$  aangebracht ringetje met het uiteinde  $A$  verschuifbaar langs een gladde horizontale ijzerdraad. De staaf wordt zonder beginsnelheid losgelaten in een stand  $A_0B_0$ , die gelegen is in het verticale vlak door de ijzerdraad, onder een hoek  $\beta$  daarmee ( $B_0$  onder de ijzerdraad,  $0 \leq \beta < 90^\circ$ ). Bepaal het maximum en het minimum van de druk  $N$  door de ijzerdraad op de staaf uitgeoefend.

127.\* Bij de staaf van 126 is de verbinding bij  $A$  zodanig, dat  $B$  de horizontale rechte ongehinderd passeren kan. Men laat nu de staaf los in een stand, waarbij  $B_0$  zich boven de horizontale rechte bevindt; de hoek  $\beta$  van 126 ligt dan tussen  $-90^\circ$  en 0. Bepaal de

stand, waarin de druk  $N$  het grootst is. Bewijs, dat  $N$  het kleinst is in een zekere stand van  $AB$ , waarbij  $B$  boven de horizontale rechte ligt, en stel een vergelijking op, waaruit deze stand kan worden gevonden.

128. Bepaal bij 126 de periode van de kleine slingeren om de stabiele evenwichtsstand (waarbij  $B$  verticaal onder  $A$  ligt).

129. De staaf  $AB$  van 126 heeft een beginstand, waarbij  $B$  verticaal onder  $A$  ligt. In die stand hebben  $A$  en  $B$  horizontale snelheden  $v_0$  in verschillende zin. De staaf kan de ijzerdraad ongehinderd passeren. Geef aan in welk geval de staaf gaat slingeren en in welk geval gaat rondlopen. Bepaal de poolbaan en de poolkromme.

\*130. Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) wordt zonder beginsnelheden met het uiteinde  $A$  op een glad horizontaal vlak en met het uiteinde  $B$  tegen een gladde verticale muur geplaatst; de beginstand  $A_0B_0$  staat loodrecht op de snijlijn  $r$  van beide vlakken en maakt een hoek  $\alpha$  met het horizontale vlak. Bepaal de stand, waarin de staaf de muur loslaat en de snelheden, die de punten  $A$  en  $B$  dan hebben. Bepaal ook de snelheden van  $A$  en  $B$  op het tijdstip  $t_2$ , waarop  $B$  het horizontale vlak bereikt. handl. 72-814

131.\* Van een staaf  $AB$  (massa  $m$ ) ligt het zwaartepunt  $Z$  zodanig, dat  $AZ = a$  en  $ZB = b$  is; de traagheidsstraal om een as door  $Z$  loodrecht op  $AB$  is  $\rho$ . De staaf wordt zonder beginsnelheid met het uiteinde  $A$  op een glad horizontaal vlak en met het uiteinde  $B$  tegen een gladde verticale muur geplaatst; de beginstand  $A_0B_0$  staat loodrecht op de snijlijn  $r$  van beide vlakken en maakt een hoek  $\alpha$  met het horizontale vlak. Stel een vergelijking op, die de stand bepaalt, waarin de staaf de muur loslaat.

132.\* Men vervangt de verticale muur van 130 door een opstaand zijvlak van een rechthoekig blok (massa  $M$ ), dat op het horizontale vlak staat;  $AB$  is gelegen in het vlak door het zwaartepunt van het blok loodrecht op de horizontale ribben van het opstaande zijvlak, tegen welk  $AB$  steunt. De wrijvingscoëfficiënt tussen blok en horizontaal vlak is  $f$ . Tussen de staaf en de vlakken, tegen welke deze steunt, is er geen wrijving. Het blok is zo breed, dat het niet gaat kantelen. Staaf en blok worden zonder beginsnelheid losgelaten in een stand, waarin  $AB$  een hoek  $\alpha$  met het horizontale vlak maakt; gegeven is, dat  $\alpha \leq 60^\circ$  is. Hoe groot moet  $f$  minstens zijn, wil het blok gedurende de gehele beweging in rust blijven? handl. 72, 8163

133.\* We nemen het geval 132, maar geheel zonder wrijving, terwijl we het gegeven  $\alpha \leq 60^\circ$  weglaten. Geef een vergelijking aan, waardoor de stand van staaf en blok bepaald wordt op het tijdstip, waarop de staaf het blok loslaat.

134. We wijzigen 130 zo, dat de uiteinden  $A$  en  $B$  van de homogene staaf  $AB$  zonder wrijving lopen langs een horizontale resp. verticale rechte, die elkaar in een punt  $O$  snijden. De staaf wordt ondersteld beide rechten (die niet losgelaten kunnen worden) ongehinderd te kunnen passeren. In de stand, waarbij  $A$  zich in  $O$  bevindt en  $B$  lager ligt dan  $O$ , geeft men aan  $A$  een beginsnelheid  $v_0$  (die dus horizontaal is). Geef aan in welk geval de staaf om de beginstand gaat slingeren en in welk geval de staaf gaat rondlopen. Beschrijf de beweging der punten  $A$  en  $B$ . Bereken voor het overgangsgeval het tijdstip, waarop en de snelheid, waarmee  $B$  het punt  $O$  passeert.

135. Bepaal in het geval van 134 de periode der kleine slingeren om de stabiele evenwichtsstand ( $B$  verticaal onder  $A$ ).

136. De homogene stangen  $AC$  en  $A'C$  (ieder met een lengte  $2p$  en een massa  $m$ ) zijn in  $C$  vast aan elkaar verbonden, loodrecht op elkaar. De stangen  $AC$  en  $A'C$  lopen door gladde ringetjes  $E$  resp.  $E'$ , die op een onderlinge afstand  $2l$  ( $l < p$ ) op gelijke hoogte vast zijn aangebracht; het punt  $C$  moet blijven in het verticale vlak door  $EE'$ , lager dan  $EE'$ . De verbindingen zijn zodanig, dat de beweging gestuit wordt, als  $C$  in  $E$  of in  $E'$  gekomen is. Bepaal de evenwichtsstanden en onderzoek deze op stabiliteit of labiliteit.

137. Het lichaam  $ACA'$  van 136 laat men zonder beginsnelheid los in de stand, waarbij  $C$  zich in  $E$  bevindt. Geef aan in welk geval de stand bereikt wordt, waarin  $C$  zich verticaal onder het midden  $M$  van  $EE'$  bevindt. Bereken ook de snelheid van  $C$  bij het passeren van genoemde stand.

138.\* Het punt  $C$  van het lichaam van 136 bevindt zich in de beginstand verticaal onder het midden  $M$  van  $EE'$ . Men geeft aan  $C$  een beginsnelheid  $v_0$  evenwijdig aan  $E'E$  (in de zin  $E'E$ ). Aan welke ongelijkheid moet  $v_0$  voldoen, wil de stand bereikt worden, waarbij  $C$  in  $E$  valt? Welke snelheid heeft  $C$ , als dit punt in  $E$  gekomen is?

139.\* Bij het lichaam van 136 wordt  $p < 4l\sqrt{2}$  ondersteld, waardoor  $\varphi = 0$  ( $C$  verticaal onder het midden  $M$  van  $EE'$ ) een stabiele evenwichtsstand is. Bepaal de periode der kleine slinge-

ringen om die stand. Schrijf de periode der slingeren met een willekeurige amplitudo  $\alpha$  als  $\int$  bepaalde integraal. Bewijs (door in de integraal een nieuwe veranderlijke in te voeren, die de grenzen constant maakt), dat de periode afneemt als  $\alpha$  afneemt, en leid uit de integraal de periode der kleine slingeren af.

140.\* In het geval 137 wordt  $p < 4l$  ondersteld, zodat de stand, waarbij  $C$  zich verticaal onder het midden  $M$  van  $EE'$  bevindt, bereikt wordt. Bereken voor deze stand en voor de beginstand het moment, dat door de stang  $A'C$  in  $C$  op de stang  $AC$  wordt uitgeoefend.

141.\* In het geval 137 wordt  $p < 4l$  ondersteld. Bepaal de poolbaan en de poolkromme.

142.\* In het geval 136 loopt het punt  $C$  langs een halve cirkel van  $E$  naar  $E'$ . Bepaal de baan van het zwaartepunt  $Z$  van het lichaam  $ACA'$  en leid daaruit de stabiele en de labiele evenwichtsstanden af.

X 143. Een homogene staaf  $AB$  (lengte  $4l$ , massa  $m$ ) steunt met het uiteinde  $A$  op een glad horizontaal vlak en verder tegen een gladde dunne horizontale pen, die zich op een hoogte  $l$  boven het horizontale vlak bevindt. In de beginstand (waarin de staaf geen snelheid heeft) bevindt  $AB$  zich in een verticaal vlak loodrecht op de pen en is het zwaartepunt  $Z$  van de staaf met de pen in aanraking. Bereken de snelheden van  $A$  en  $B$  op het tijdstip  $t_1$ , waarop  $B$  de pen bereikt heeft en de staaf de pen dus gaat loslaten. Bereken de druk  $N$ , die het horizontale vlak en de druk  $N'$ , die de pen op de staaf uitoefent, in de beginstand en in de stand onmiddellijk vóór het tijdstip  $t_1$ . (handl. 72, § 163, IV)

X 144.\* Op een glad horizontaal vlak staat een homogeen rechthoekig blok (hoogte  $l$ , massa  $m$ ). Een homogene staaf  $AB$  (lengte  $4l$ , massa  $m$ ) steunt met het uiteinde  $A$  op het horizontale vlak en verder tegen een ribbe van het bovenzvlak van het blok (eveneens zonder wrijving). In de beginstand zijn alle snelheden gelijk aan 0. Het zwaartepunt  $Z$  van de staaf is dan met het midden van genoemde ribbe in aanraking, terwijl  $AB$  dan ligt in een vlak loodrecht op die ribbe. Hoeveel is het blok uit zijn beginstand verschoven op het tijdstip  $t_1$ , waarop  $B$  het midden van genoemde ribbe van het bovenzvlak bereikt heeft, en welke snelheid heeft het blok dan? Het blok wordt zo breed ondersteld, dat het niet gaat kantelen. (handl. 72, § 163, V)

145.\* Hetzelfde geval als 144, maar nu is het blok vast aan het horizontale vlak bevestigd. Bewijs, dat de staaf het blok gaat loslaten, als het punt  $B$  de ribbe van het blok bereikt heeft.

146.\* Bepaal in het geval 144 de totale verplaatsing van het blok op een tijdstip, dat  $t$  later ligt dan dat, waarop blok en staaf elkaar loslaten.

\*147. Een homogene staaf  $AC$  (lengte  $2l$ , massa  $m$ ) is draaibaar om een as door  $A$  loodrecht op  $AC$ . De homogene staaf  $DE$  (lengte  $2l$ , massa  $m$ ) is langs  $AC$  verschuifbaar. Er is geen wrijving en geen zwaartekracht. In de beginstand valt  $D$  in  $A$  en  $E$  in  $C$  en heeft  $AC$  een hoeksnelheid  $\omega$ ; de snelheid van  $E$  in de richting  $AC$  is dan 0. Bepaal de grootte van de snelheid van  $E$  op het tijdstip  $t_1$ , waarop  $D$  in het zwaartepunt van  $AC$  gekomen is, en de hoek, die de snelheid van  $E$  dan met  $DE$  maakt.

148. De door de staaf  $AC$  van 147 op de staaf  $DE$  uitgeoefende krachten kunnen worden opgevat als een kracht  $Q$  in  $D$  en een kracht  $R$  in  $C$ , loodrecht op  $DE$ , positief gerekend in de zin van de beginsnelheid van  $C$ . Bereken  $Q$  en  $R$ .

149. Een homogene staaf  $AC$  (lengte  $2l$ , massa  $m$ ) is in een vlak  $V$  draaibaar om  $A$ . De homogene staaf  $CD$  (lengte  $2l$ , massa  $M$ ) is in  $C$  scharnierend aan de staaf  $AC$  verbonden en beweegt zich eveneens in het vlak  $V$ . Als coördinaten voere men in de hoek  $\varphi$ , die  $AC$  met  $AC_0$  maakt, en de hoek  $\theta$ , die  $CD$  met het verlengde van  $AC$  maakt, beide in dezelfde zin positief gerekend. Op het tijdstip  $t=0$  is  $\theta=0$  en  $\ddot{\varphi}=\omega$  ( $\omega > 0$ ), terwijl de staaf  $CD$  dan een hoeksnelheid 0 heeft. Bepaal de grootste absolute waarde van  $\theta$ . Bepaal ook  $\dot{\varphi}$  op de tijdstippen, waarop  $\theta$  extreem is. Geen zwaartekracht.

150.\* Hetzelfde toestel als 149, maar nu met  $\theta=0$ ,  $\dot{\varphi}=0$  en  $\ddot{\varphi}=\omega$  voor  $t=0$ . Onderzoek of  $CD$  ten opzichte van  $AC$  gaat rondlopen of slingeren. Bepaal in het laatste geval de waarde van  $\dot{\varphi}$  voor de uiterste waarden van  $\theta$ . Bewijs, dat de stang  $AC$  voortdurend in dezelfde zin (die van de beginhoeksnelheid van  $CD$ ) draait. Bepaalde verhouding tussen  $m$  en  $M$ , waarbij  $\theta$  asymptotisch tot  $180^\circ$  nadert, en bepaal voor dat geval de asymptotische waarde van  $\dot{\varphi}$ .

151. Stel voor het toestel van 149 de differentiaalvergelijking van de tweede orde op, waarin geen massa voorkomt (en ook geen beginvoorwaarde), door voor de staaf  $CD$  twee vergelijkingen op



te stellen. Leid de vergelijking ook af uit de vergelijkingen van Lagrange. Leid daaruit af, dat een beweging mogelijk is, waarbij  $AC$  met een constante hoeksnelheid  $\omega$  roteert en  $CD$  in het verlengde van  $AC$  blijft. Bewijs ook dat een beweging mogelijk is, waarbij de hoeksnelheid van  $AC$  nagenoeg gelijk aan  $\omega$  blijft en  $CD$  kleine slingeren om het verlengde van  $AC$  uitvoert. Bepaal de periode dier slingeren.

\*152. Een homogene halve bol (massa  $m$ , straal  $r$ ) wordt zonder beginsnelheid op een horizontaal vlak geplaatst en wel zo, dat het vlakke grensvlak  $V$  van de halve bol verticaal is. De wrijvingscoëfficiënt  $f$  is zo groot, dat de halve bol zuiver gaat rollen (onder de invloed van de zwaartekracht). Bepaal de hoeksnelheid van de halve bol op het tijdstip  $t_1$ , waarop  $V$  horizontaal is (dus bij het passeren van de stabiele evenwichtsstand). Bereken voor de tijdstippen  $0$  en  $t_1$  de normale druk  $N$  en de wrijving  $W$ .

\*153. Bepaal bij de halve bol van 152 de periode der kleine slingeren, als het zwaartepunt zich in een verticaal vlak beweegt.

\*154. Dezelfde vragen als bij 152, maar zonder wrijving. Bepaal de uiterste standen van het middelpunt  $M$ .

155. Bepaal bij de beweging van 154 de poolbaan en de poolkromme.

156. Dezelfde vraag als 153, maar zonder wrijving.

157.\* Een holle bol met een constante vlaktedichtheid heeft een massa  $m$  en een straal  $r$ . Een materieel punt  $A$  (massa  $m$ ) is aan de binnenkant tegen de wand van de bol bevestigd. Men plaatst de bol zodanig zonder beginsnelheid op een glad hellend vlak (hellingshoek  $\alpha$ ), dat  $A$  zich verticaal onder het middelpunt  $M$  van de bol bevindt. Onderzoek de beweging van die bol. Bepaal de grootste absolute waarde der hoeksnelheid van de bol.

158. Een homogene hoepel heeft een massa  $m$  en een straal  $r$ . Een homogene staaf  $AB$  (massa  $m'$ , lengte  $r\sqrt{3}$ ) kan met de uiteinden  $A$  en  $B$  langs de binnenkant van de hoepel glijden. Men plaatst het toestel zonder beginsnelheid zodanig op een horizontaal vlak, dat  $A$  verticaal onder  $B$  valt en de hoepel aan het vlak raakt. Er is geen wrijving. Bepaal de grootste verplaatsing van het middelpunt  $M$  van de hoepel. Bepaal ook de grootste absolute waarde van de hoeksnelheid van de hoepel en van de snelheid van  $M$ .

159. Leid voor het toestel van 158 een differentiaalvergelijking van de tweede orde af, waarin geen massa's voorkomen, door voor

de staaf  $AB$  twee bewegingsvergelijkingen op te schrijven. Leid die vergelijking ook af uit de vergelijkingen van **Lagrange**. Bepaal de periode der kleine slingeren om de evenwichtsstand.

160.\* Hetzelfde toestel als 158 met dezelfde beginvoorwaarden, maar nu met een zo grote wrijvingscoëfficiënt tussen hoepel en vlak, dat de hoepel slechts zuiver kan rollen. Dezelfde vragen als in 158.

161.\* Dezelfde vragen als in 159, maar voor het geval, dat de hoepel zuiver rolt.

162.\* De homogene staven  $AC$  en  $CD$  (beide met een massa  $m$  en een lengte  $2l$ ) zijn in  $C$  scharnierend verbonden. In de beginstand vallen  $AC$  en  $CD$  in elkaars verlengde; in die stand heeft  $CD$  geen snelheid en  $AC$  een hoeksnelheid  $\omega$  ( $\omega > 0$ ). Er is geen zwaartekracht. Onderzoek de beweging van het toestel.

163.\* De homogene staven  $AB$ ,  $BC$  en  $CD$  (alle met een massa  $m$  en een lengte  $2l$ ) zijn in  $B$  en  $C$  scharnierend verbonden. Er is geen zwaartekracht. Aanvankelijk vallen  $AB$  en  $CD$  in het verlengde van  $BC$  en heeft  $BC$  geen snelheid. De staven  $AB$  en  $CD$  hebben dan hoeksnelheden  $\omega$  in hetzelfde vlak, maar in tegengestelde zin. Onderzoek de beweging van het toestel. De staven kunnen elkaar passeren.

## G. AANVANKELIJKE BEWEGING.

Bij vraagstukken over aanvankelijke beweging gaat het er vaak om, of er al dan niet kantelen of al dan niet uitglijden plaats vindt. Men maakt dan een onderstelling en stelt de ongelijkheden op, waaraan voldaan moet zijn, wil aanvankelijk de gemaakte onderstelling juist zijn. Daartoe substitueert men de beginwaarden van de noodzakelijke coördinaten en van hun eerste fluxies in de bewegingsvergelijkingen van de tweede orde, waardoor men lineaire vergelijkingen (geen differentiaalvergelijkingen) krijgt in de onbekenden. Deze zijn de beginwaarden van de tweede fluxies der noodzakelijke coördinaten en de beginwaarden van de verbindingskrachten.

\*164. Hetzelfde geval als 83. Gevraagd wordt aan welke ongelijkheden  $a$ ,  $h$ ,  $g$ ,  $f$  en  $\gamma$  moeten voldoen, wil het blok aanvankelijk gaan kantelen, om de onderste horizontale ribbe van het grondvlak zonder uit te glijden. Hierin is  $g$  de traagheidsstraal van het blok om een as door het zwaartepunt  $Z$  evenwijdig aan de ribbe, waarom het blok kantelt. Overgangsgevallen behoeven niet te worden beschouwd.

\*165. Hetzelfde geval als 83 en 164. Aan welke ongelijkheden moeten  $a$ ,  $h$ ,  $g$ ,  $f$  en  $\gamma$  voldoen, wil het blok aanvankelijk gaan kantelen om de onderste ribbe, terwijl die ribbe naar beneden uitglijdt?

166\*. Maak op de in 87 aangegeven wijze grafieken van de resultaten van 164 en 165.

## H. STOOT- EN BOTSINGSVRAAGSTUKKEN.

Bij stootvraagstukken substitueert men de gegeven waarden van de noodzakelijke coördinaten in de stootvergelijkingen, waardoor men (evenals bij gedwongen beweging) lineaire vergelijkingen krijgt.

Zijn  $I_x, I_y, I_z$  de traagheidsmomenten van een vast lichaam om 3 onderling loodrechte assen door een vast punt van het lichaam en  $P_{yz}, P_{zx}, P_{xy}$  de traagheidsproducten voor die assen, dan vindt men de toenamen der hoeksnelheden  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  uit:

$$\Delta \frac{\partial L}{\partial \omega_x} = I_x \Delta \omega_x - P_{xy} \Delta \omega_y - P_{xz} \Delta \omega_z = M_x,$$

$$\Delta \frac{\partial L}{\partial \omega_y} = I_y \Delta \omega_y - P_{yz} \Delta \omega_z - P_{yx} \Delta \omega_x = M_y,$$

$$\Delta \frac{\partial L}{\partial \omega_z} = I_z \Delta \omega_z - P_{zx} \Delta \omega_x - P_{zy} \Delta \omega_y = M_z,$$

waarin  $M_x, M_y, M_z$  de som der momenten van de stoten om  $x$ -as  $y$ -as en  $z$ -as zijn. Uit  $P_{xy} = \Sigma m x y$  volgt de verlegstelling:

$$P_{xy} = P_{x'y'} + m a b,$$

waarin  $P_{x'y'}$  het traagheidsproduct is voor evenwijdig verlegde assen door het zwaartepunt  $Z$ , terwijl  $a, b, c$  de coördinaten van  $Z$  ten opzichte van de oorspronkelijke assen zijn.

De vergelijkingen ter bepaling van  $\Delta \omega_x$  enz. gelden ook voor een lichaam zonder vast punt, maar men moet ze dan toepassen op drie onderling loodrechte assen door het zwaartepunt.

Een botsingsvraagstuk voert tot 2 stootvraagstukken. De daarin optredende onbekende stoot wordt gevonden uit de botsingsvergelijking. Deze drukt uit, dat de relatieve snelheid onmiddellijk na de botsing gevonden wordt door die vóór de botsing te vermenigvuldigen met  $-c$ , waarin  $c$  de botsingscoëfficiënt is ( $c = 0$  bij volkomen onveerkrachtige en  $c = 1$  bij volkomen veerkrachtige botsing). Met relatieve snelheid is bedoeld het verschil der snelheden

in de stootrichting van het punt, waar de botsing plaats vindt, als punt van het ene lichaam en als punt van het andere lichaam.

x \*167. De homogene stangen  $AB$  en  $BC$  (ieder met een massa  $m$  en een lengte  $2l$ ) zijn in  $B$  scharnierend verbonden. De stang  $AB$  is in  $A$  scharnierend aan een vast punt verbonden, terwijl  $BC$  met zijn uiteinde  $C$  beweegbaar is langs een horizontale door  $A$  gaande rechte  $k$ . Het geheel is, onderworpen aan de zwaartekracht en zonder wrijving, beweegbaar in een verticaal vlak door  $k$ . In de beginstand zijn alle snelheden  $0$ , terwijl dan  $AC = 2l$  ( $C$  rechts van  $A$ ) is en  $B$  lager ligt dan  $k$ . In die stand wordt in  $C$  (op een te verwaarlozen afstand onder  $k$ ) een stoot  $S$  aangebracht, die in het verlengde van  $AC$  valt. Hoe groot moet  $S$  zijn, wil  $B$  met een snelheid  $0$  de rechte  $k$  bereiken?

168. Bepaal in het geval 167 de verbindingsstoten in  $A$ ,  $B$  en  $C$ .

169.\* Bepaal in het geval 167 de hoeksnelheid van  $AB$  onmiddellijk na de stoot met de vergelijkingen van Lagrange.

170.\* De homogene stangen  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  en  $DE$  (alle met een massa  $m$  en een lengte  $2l$ ) zijn in  $B$ ,  $C$  en  $D$  scharnierend aan elkaar verbonden, terwijl  $A$  scharnierend aan een vast punt verbonden is. De punten  $C$  en  $E$  zijn beweegbaar langs een horizontale rechte  $k$  door  $A$ , alles zonder wrijving. Het geheel is beweegbaar in een verticaal vlak door  $k$ . In een zekere stand is  $AC = CE = l$ , terwijl  $B$  en  $D$  lager dan  $k$  liggen. In die stand zijn alle snelheden  $0$ . In  $E$  wordt dan op de stang  $DE$  een naar  $A$  gerichte stoot  $S$  uitgeoefend. Bereken met de vergelijkingen van Lagrange de hoeksnelheden onmiddellijk na de stoot.

\*171. De homogene stangen  $AB$  en  $BC$  zijn in  $B$  scharnierend verbonden en hebben ieder een massa  $6m$  en een lengte  $2l$ . De homogene stang  $DE$  heeft een massa  $m$  en een lengte  $2l$ . De stangen  $AB$  en  $DE$  zijn in  $A$  resp.  $D$  scharnierend aan vaste punten verbonden. Het punt  $D$  ligt even hoog als  $A$  op een afstand  $l\sqrt{3}$  daarvan verwijderd. De stangen kunnen zich in het verticale vlak door  $AD$  bewegen onder de invloed van de zwaartekracht. Er is geen wrijving. De stangen zijn aanvankelijk in rust,  $AB$  en  $BC$  in stabiel en  $DE$  in labiel evenwicht. Men geeft aan  $E$  een snelheid  $\sqrt{3gl}$  in de zin  $AD$ . Daardoor botst de stang  $DE$  na enige tijd tegen de stang  $AB$ . De botsingscoëfficiënt is  $\frac{9}{14}$ . Bepaal de

hoeksnelheden van de stangen  $AB$  en  $BC$  onmiddellijk na de botsing en de stand van de stang  $DE$ , als de snelheid daarvan voor het eerst weer 0 geworden is.

172. Bepaal in het geval 171 de verbindingsstoten  $S'$  en  $S''$  in  $B$  resp.  $A$ .

173.\* Behandel de op de dubbele slinger van 171 uitgeoefende stoot met de vergelijkingen van Lagrange (dus zonder verbindingsstoten in te voeren).

174. Een homogeen rechthoekig blok (parallelepipedum)  $ABCDEFGH$  heeft een massa 3. De ribben van het zijvlak  $ABCD$  zijn  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ . De ribben  $AE$ ,  $BF$ ,  $CG$  en  $DH$  hebben een lengte 2. Zij  $J$  het midden van  $CG$  en  $K$  het midden van  $DH$  en verder  $L$  het punt, dat zodanig op het verlengde van  $KJ$  (aan de kant van  $J$ ) ligt, dat  $JL = 2$  is. Op het blok wordt een stoot uitgeoefend, die door de vector  $LF$  wordt voorgesteld; vóór de stoot is het blok in rust. Het midden  $O$  van  $AD$  wordt vastgehouden; overigens is het blok vrij beweegbaar. Bepaal de rotatie-as en de levende kracht van het blok onmiddellijk na de stoot.

175. Men wijzigt 174 zo, dat  $FK$  de stootvector is, terwijl het blok zich geheel vrij kan bewegen. Bepaal de schroefbeweging (rotatievector, translatievector en schroefas) onmiddellijk na de stoot.

176. In 175 neemt men de stootvector van  $F$  naar een nog onbekend punt  $Q$  van de rechte  $JK$ , die de middens van  $CG$  en  $DH$  verbindt. Hoe moet men  $Q$  kiezen, opdat de schroefbeweging in een rotatie overgaat? Bepaal ook de rotatie-as.

## J. GEDWONGEN BEWEGING.

Bij eenparige rotatie met de hoeksnelheid  $\omega$  om een vaste as is de potentiële energie van de centrifugaalkracht —  $\frac{1}{2} I \omega^2$ , waarin  $I$  het traagheidsmoment van het lichaam om de rotatie-as is.

o \*177. Een dunne rechte buis  $AB$  (lengte  $2l$ ) wentelt met constante hoeksnelheid  $\omega$  om een as  $k$  door  $A$  loodrecht op  $AB$ . Een homogene rechthoekig omgebogen stang  $CDE$  heeft een massa  $2m$ , terwijl  $CD = DE = 2l$  is. Het deel  $CD$  van de stang is door de buis  $AB$  gestoken. Ten tijde  $t = 0$  bevindt  $C$  zich in  $A$  en is  $D$  in  $B$ , terwijl de relatieve snelheid van het lichaam  $CDE$  dan 0 is. Er is geen zwaartekracht en geen wrijving. Het deel  $DE$  van  $CDE$  staat loodrecht op  $k$ . De zin van  $\omega$  komt overeen met een draaiing van  $AD$  naar  $AE$ . Bepaal het tijdstip  $t_1$ , waarop het midden  $Z$  van  $CD$  in  $B$  gekomen is, en de resulterende (absolute) snelheid, die  $E$  dan heeft.

\*178. Van een homogene stang  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) doorloopt het uiteinde  $A$  eenparig een cirkel (straal  $R$ , middelpunt  $M$ , hoeksnelheid  $\omega$ ). De stang, die niet onderworpen is aan de zwaartekracht, kan in het vlak van de cirkel zonder wrijving om  $A$  draaien. Op het tijdstip  $t = 0$  valt  $AB$  in het verlengde van  $MA$ ; het punt  $B$  heeft dan een resulterende snelheid 0. Onderzoek of er een tijdstip komt, waarop de relatieve snelheid van  $AB$  nul is. Ga na voor welke waarde van  $l$  (uitgedrukt in  $R$ ) de relatieve uitwijkingshoek van  $AB$  bij het 0 worden van de relatieve snelheid het kleinst is.

179. Bepaal bij het toestel van 178 de periode der kleine slingeren om de stabiele kinetische evenwichtsstand.

180.\* Bewijs, dat de beweging van het toestel van 178 kwalitatief dezelfde is als die van een samengestelde slinger. Bewijs, dat beide bewegingen geheel (dus ook kwantitatief) overeenstemmen als  $\omega^2 = \frac{g}{R}$  is en de staaf slingert om een horizontale as door  $A$  loodrecht op  $AB$ .

\*181. Een homogene stang  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) is zonder wrijving om het vaste punt  $A$  draaibaar, maar alleen in een verticaal vlak, dat met constante hoeksnelheid  $\omega$  gewenteld wordt om de verticaal door  $A$ . De stang is onderworpen aan de zwaartekracht (vereenvoudigde stoomregulator). Ga na boven welk bedrag  $\omega$  moet liggen om te maken, dat er kinetisch evenwicht is in een stand, waarin  $AB$  niet verticaal is. Bepaal de periode der kleine slingeringen om die evenwichtsstand.

\*182. De stang  $OA$  (lengte  $a$ ) wordt om een verticale as door  $O$  in een horizontaal vlak met constante hoeksnelheid  $\omega$  rondgedraaid. Aan  $A$  is een homogene stang  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) verbonden door een scharnier, dat alleen beweging in een vlak loodrecht op  $OA$  toelaat. Op het tijdstip  $t = 0$  is  $AB$  horizontaal en de relatieve snelheid  $0$ . Ga na of de stang de verticale stand bereikt en beschrijf de relatieve beweging van  $AB$  in het geval, dat de verticale stand niet bereikt wordt. Er is zwaartekracht, maar geen wrijving.

\*183. Een cirkel (straal  $r$ , middelpunt  $M$ ) wordt in een horizontaal vlak met een constante hoeksnelheid  $\omega$  gewenteld om een verticale as, die de cirkel in een punt  $O$  loodrecht snijdt. Een homogene stang  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) kan met de uiteinden  $A$  en  $B$  zonder wrijving langs de cirkel glijden. Op het tijdstip  $t = 0$  is  $AB$  evenwijdig aan  $OM$  en is de relatieve hoeksnelheid  $0$ . Hoe groot is de relatieve hoeksnelheid, als het zwaartepunt  $Z$  van  $AB$  in het verlengde van  $OM$  komt?

\*184. Een cirkel (straal  $r$ , middelpunt  $M$ ) wordt met een constante hoeksnelheid  $\omega$  om een verticale middellijn gewenteld. Een homogene stang  $AB$  (massa  $m$ , lengte  $2l$ ) kan met de uiteinden  $A$  en  $B$  zonder wrijving langs de cirkel glijden. De stang is onderworpen aan de zwaartekracht. In welk geval heeft de wenteling geen invloed op de relatieve beweging van  $AB$ ?

185.\* In 184 neemt men  $l < \frac{1}{2} \sqrt{3} r$ . Onderzoek de kinetische evenwichtsstanden op stabiliteit.

186.\* In 184 neemt men  $l > \frac{1}{2} \sqrt{3} r$ . Onderzoek de kinetische evenwichtsstanden op stabiliteit.

187.\* Bepaal voor het toestel van 184 en  $l > \frac{1}{2} \sqrt{3} r$  de periode der kleine slingeringen om de evenwichtsstand, waarbij  $AB$  horizontaal en hoger dan  $M$  gelegen is. De hoeksnelheid  $\omega$  wordt voldoende groot ondersteld.



slingerlengte  $\lambda = \frac{I_{\text{draaipunt O}}}{m \cdot l}$



## OPLOSSINGEN.

### A. SLINGERLENGTE EN SLINGERPUNT VAN EEN SAMENGESTELDE SLINGER.

1. Stelt men de massa van de stang BC door  $kb$  voor, dan is  $ka$  de massa van de stang CD. Het traagheidsmoment om AB is  $kb^2(a + \frac{2}{3}b)$ . De slingerlengte is dus:

$$\lambda = \frac{I}{m \cdot l} =$$

$$\lambda = \frac{kb^2(a + \frac{2}{3}b)}{kb(a+b)} = b \frac{3a + 2b}{3(a+b)}$$

$$I = ka \cdot b^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}(kb) \cdot b^2 = kb^2(a + \frac{2}{3}b)$$

$$m = 2k(a+b); \quad l = \frac{1}{2}b$$

2. Het traagheidsmoment om een as door het middelpunt van de rechthoek loodrecht op het vlak van de rechthoek is:

$$2ka(\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{4}b^2) + 2kb(\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{4}a^2) = \frac{1}{6}k(a+b)^3$$

Het traagheidsmoment om de as  $l$  is dus:

$$\frac{1}{6}k(a+b)^3 + \frac{1}{2}k(a+b)(a^2 + b^2) = \frac{1}{3}k(a+b)(2a^2 + ab + 2b^2)$$

De bijbehorende slingerlengte is:

$$\frac{\frac{1}{3}k(a+b)(2a^2 + ab + 2b^2)}{k(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2a^2 + ab + 2b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$$

De slingerlengte bij slingeren om de as  $n$  is:

$$\frac{\frac{1}{6}(a+b)^3 + \frac{1}{2}(a+b)b^2}{(a+b)b} = \frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{6b}$$

Valt het slingerpunt in het midden van CD, dan is:

$$a^2 + 2ab - 2b^2 = 0, \quad a:b = -1 + \sqrt{3}$$

3. De slingerlengte is  $\frac{2}{3}b$ , dezelfde als bij een homogene stang ter lengte  $b$ , die om een horizontale as door een uiteinde in een verticaal vlak slingert.

*Opmerking.* Is ABCD een parallelogram, waarvan  $b$  de afstand der evenwijdige zijden AB en CD is, dan is het traagheidsmoment

om  $AB$  eveneens  $\frac{1}{3} m b^2$ , dus de bij  $AB$  behorende slingerlengte eveneens  $\frac{2}{3} b$ .

4. Bij slingeren om de as  $l$  is de slingerlengte:

$$\frac{\frac{1}{3} (a^2 + b^2)}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Bij slingeren om de as  $n$  is de slingerlengte:

$$\frac{\frac{1}{12} a^2 + \frac{1}{3} b^2}{\frac{1}{2} b} = \frac{a^2 + 4 b^2}{6 b}.$$

Het slingerpunt is het midden van  $CD$ , als  $a = b \sqrt{2}$  is.

5.\* Bij slingeren om  $AB$  is de slingerlengte  $\frac{1}{3} a \sqrt{3}$ . Het traagheidsmoment om  $l$  is (als  $m$  de massa van ieder der stangen  $AB$ ,  $BC$  en  $CA$  is)  $\frac{2}{3} m a^2 + \frac{1}{12} m a^2 + \frac{3}{4} m a^2 = \frac{3}{2} m a^2$ , zodat de bijbehorende slingerlengte is  $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$ . Bij slingeren om  $n$  is de slingerlengte eveneens  $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$ ; dit blijkt door rechtstreekse berekening, maar ook daaruit, dat het bij de as  $l$  behorende slingerpunt het midden van  $AB$  is. Bij slingeren om de as  $p$  is de slingerlengte  $\frac{5}{12} a \sqrt{3}$ .

6. Het traagheidsmoment  $I_p$  om de as  $p$  vindt men door de plaat in stroken te verdelen evenwijdig aan  $BC$ . Is  $k$  de vlaktedichtheid en  $x$  de afstand van de strook tot  $A$ , dan is de massa van de plaat  $m = \frac{1}{2} k a h$  en de massa van de strook  $k \frac{a x}{h} dx$ . Hieruit volgt:

$$I_p = \frac{k a}{h} \int_0^h x^3 dx = \frac{1}{4} k a h^3 = \frac{1}{2} m h^2.$$

Voor het traagheidsmoment om  $BC$  vindt men hieruit:

$$I_{BC} = I_p - m \left(\frac{2}{3} h\right)^2 + m \left(\frac{1}{3} h\right)^2 = I_p - \frac{1}{3} m h^2 = \frac{1}{6} m h^2.$$

Dit geeft voor de gevraagde slingerlengten:

$$\lambda_{BC} = \frac{1}{2} h, \quad \lambda_p = \frac{3}{4} h.$$

*Opmerking.* Men kan de traagheidsmomenten  $I_p$  en  $I_{AB}$  ook aldus vinden. We beschouwen de driehoekige plaat als de helft van het parallelogram  $ABCD$  met massa  $2m$ . Het traagheidsmoment van de vierhoekige plaat om  $BC$  is  $\frac{2}{3} m h^2$ . Dit traagheidsmoment is echter ook de som der traagheidsmomenten van de drie-

hoekige platen  $ABC$  en  $ACD$  om  $BC$ . Dit voert tot:

$$\frac{2}{3} m h^2 = I_{BC} + I_p = (I_p - \frac{1}{3} m h^2) + I_p = 2 I_p - \frac{1}{3} m h^2.$$

7. Het traagheidsmoment  $I_h$  om de hoogtelijn uit  $A$  is gelijk aan 2-maal het traagheidsmoment van driehoek  $ABN$  (massa  $\frac{1}{2} m$ ), dus volgens 6:

$$I_h = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} m \cdot (\frac{1}{2} a)^2 = \frac{1}{24} m a^2.$$

Hieruit volgt met de notatie van 6:

$$I_l = I_p + I_h = \frac{1}{24} m (a^2 + 12 h^2),$$

$$I_n = I_{BC} + I_h = \frac{1}{24} m (a^2 + 4 h^2).$$

Hieruit vindt men voor de slingerlengten:

$$\lambda_l = \frac{a^2 + 12 h^2}{16 h}, \quad \lambda_n = \frac{a^2 + 4 h^2}{8 h}.$$

Uit  $\lambda_l = h$  vindt men  $a = 2 h$ ; dit betekent, dat de driehoek gelijkbenig rechthoekig is. Een controle is, dat dan ook  $\lambda_n = h$  is.

8.\* Zij  $D$  het voetpunt van de loodlijn uit  $A$  op  $BC$  neergelaten. We stellen  $BD = p$  en  $DC = q$ , waarin b.v.  $q$  negatief is, als  $D$  op het verlengde van  $BC$  aan de kant van  $C$  valt. Om het traagheidsmoment  $I_h$  om de hoogtelijn  $h$  door  $A$  te bepalen, beschouwen we de plaat (massa  $m$ ) als de samenvoeging van de driehoekige platen  $ABD$  en  $ACD$  met massa's  $\frac{p}{a} m$  resp.  $\frac{q}{a} m$ . Daar  $p + q = a$  is, heeft men volgens 6:

$$I_h = \frac{1}{6} \frac{p m}{a} p^2 + \frac{1}{6} \frac{q m}{a} q^2 = \frac{1}{6} m (p^2 - p q + q^2).$$

Wegens:

$$p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 a}, \quad q = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 a}$$

wordt dit:

$$I_h = m \frac{a^4 + 3 b^4 + 3 c^4 - 6 b^2 c^2}{24 a^2}.$$

Daar:

$$h^2 = \frac{2 a^2 b^2 + 2 a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4 a^2}$$

is, vindt men volgens 6 voor het traagheidsmoment om  $l$ :

$$I_l = I_h + \frac{1}{2} m h^2 = \frac{1}{12} m (-a^2 + 3b^2 + 3c^2).$$

Daar  $AZ^2 = \frac{1}{9} (-a^2 + 2b^2 + 2c^2)$  is, waarin  $Z$  het zwaartepunt van de driehoek is, vindt men voor het traagheidsmoment om de as  $z$  door  $Z$  loodrecht op het vlak van de plaat:

$$I_z = I_l - m \cdot AZ^2 = \frac{1}{36} m (a^2 + b^2 + c^2);$$

de symmetrie dier uitdrukking levert een controle. Verder is:

$$I_n = I_z + m \cdot NZ^2 = I_z + \frac{1}{4} m \cdot AZ^2 = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2).$$

Men vindt dus voor de slingerlengten:

$$\lambda_l = \frac{-a^2 + 3b^2 + 3c^2}{4\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}}, \quad \lambda_n = \frac{b^2 + c^2}{2\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}}.$$

Behoren  $A$  en  $N$  als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar, dan is  $\lambda_l = AN$  en ook  $\lambda_n = AN$ . Uit ieder dier vergelijkingen vindt men  $a^2 = b^2 + c^2$ . De gevraagde voorwaarde is dus het rechthoekig zijn van driehoek  $ABC$  in  $A$ .

9. We verdelen de plaat in de driehoekige platen  $ADB$  en  $BCD$  met massa's  $\frac{a}{a+b} m$  resp.  $\frac{b}{a+b} m$ . Volgens 6 vindt men voor het traagheidsmoment om  $AD$ :

$$I_{AD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{am}{a+b} h^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{bm}{a+b} h^2 = m \frac{a+3b}{6(a+b)} h^2.$$

De afstand van het zwaartepunt  $Z$  tot  $AD$  is  $\frac{a+2b}{3(a+b)} h$ , waaruit men voor de bij  $AD$  behorende slingerlengte vindt:

$$\lambda_{AD} = \frac{a+3b}{2(a+2b)} h.$$

Door verwisseling van  $a$  en  $b$  vindt men  $\lambda_{BC}$ .

10.\* We verdelen het trapezium door rechten evenwijdig aan  $AD$  en  $BC$  in stroken, Is  $x$  de afstand van de strook tot  $BC$ , dan is de lengte daarvan  $b + \frac{x}{h} (a - b)$ .

Is  $k$  de vlaktedichtheid, dan is het traagheidsmoment om  $AB$ :

$$I_{AB} = \frac{1}{3} k \int_0^h \left(b + \frac{a-b}{h} x\right)^3 dx = \frac{kh}{12(a-b)} \left[ \left(b + \frac{a-b}{h} x\right)^4 \right]_0^h =$$

$$= \frac{kh(a^4 - b^4)}{12(a-b)} = \frac{1}{12} kh(a+b)(a^2 + b^2) = \frac{1}{6} m(a^2 + b^2),$$

waarin  $m$  de massa van de plaat is. Het zwaartepunt heeft een afstand  $\frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}$  tot  $AB$ , waaruit men voor de slingerlengte vindt:

$$\frac{(a+b)(a^2 + b^2)}{2(a^2 + ab + b^2)}.$$

*Opmerking.* Men kan  $I_{AB}$  ook bepalen, door de plaat in stukken te verdelen en van reeds vroeger bepaalde traagheidsmomenten gebruik te maken.

\*11. De massa  $m$  van de plaat en het traagheidsmoment  $I_M$  om de as van de plaat (rechte door  $M$  loodrecht op het vlak van de plaat) zijn, als  $k x^n$  de vlaktedichtheid is:

$$m = 2\pi k \int_0^r x^{n+1} dx = 2\pi k \frac{r^{n+2}}{n+2},$$

$$I_M = 2\pi k \int_0^r x^{n+3} dx = 2\pi k \frac{r^{n+4}}{n+4} = \frac{n+2}{n+4} m r^2.$$

Hieruit vindt men voor het traagheidsmoment om een middellijn  $\frac{1}{2} I_M = \frac{1}{2} m r^2 \frac{n+2}{n+4}$  en verder:

$$I_l = I_M + m r^2 = 2 \frac{n+3}{n+4} m r^2, \quad I_p = \frac{1}{2} I_M + m r^2 = \frac{3n+10}{2(n+4)} m r^2.$$

Voor de slingerlengten volgt hieruit:

$$\lambda_l = 2 \frac{n+3}{n+4} r, \quad \lambda_p = \frac{3n+10}{2(n+4)} r.$$

Voor  $n = 0$  krijgt men het geval van een homogene cirkelvormige plaat en voor  $n \rightarrow \infty$  het geval van een homogene cirkelomtrek (dunne ring). Dat in het laatste geval  $I_M = m r^2$  is, ziet men ook onmiddellijk.

\*12. Zij  $k x^n$  de ruimtedichtheid. De massa  $m$  en het polaire

traagheidsmoment  $I_M$  vindt men door verdeling door concentrische boloppervlakken, dus:

$$m = 4 \pi k \int_0^r x^{n+2} dx = 4 \pi k \frac{r^{n+3}}{n+3},$$

$$I_M = 4 \pi k \int_0^r x^{n+4} dx = 4 \pi k \frac{r^{n+5}}{n+5} = \frac{n+3}{n+5} m r^2.$$

Hieruit vindt men voor het traagheidsmoment om een middellijn:

$${}^{2/3} I_M = \frac{2(n+3)}{3(n+5)} m r^2.$$

Hieruit volgt verder:

$$I_p = {}^{2/3} I_M + m r^2 = \frac{5n+21}{3(n+5)} m r^2, \quad \lambda = \frac{5n+21}{3(n+5)} r.$$

Door  $n=0$  te nemen, vindt men voor het traagheidsmoment van een homogene bol om een middellijn  ${}^{2/5} m r^2$ . Voor  $n \rightarrow \infty$  vindt men voor het polaire traagheidsmoment van een holle bol  $I_M = m r^2$ , iets waarvan de juistheid gemakkelijker rechtstreeks is in te zien.

13. Het traagheidsmoment om  $l$  is  ${}^{2/5} m r^2$ , waarin  $m$  de massa van de halve bol is. Het zwaartepunt van de halve bol ligt op een afstand  ${}^{3/8} r$  van het middelpunt. De slingerlengte is dus  ${}^{10/15} r$ .

14. Het traagheidsmoment om  $l$  is  ${}^{2/3} m r^2$ . Het zwaartepunt ligt op een afstand  ${}^{1/2} r$  van het middelpunt, zodat de slingerlengte  ${}^{4/3} r$  is.

15. Is  $m$  de massa van de cirkelvormige plaat, dan is  $2m$  die van de bolvormige plaat. Het traagheidsmoment om  $l$  is:

$$I_1 = {}^{1/4} m r^2 + {}^{4/3} m r^2 = {}^{10/12} m r^2.$$

Het moment van het zwaartepunt ten opzichte van de bolvormige plaat is  $2m \cdot {}^{1/2} r = m r$ . De slingerlengte is dus  ${}^{10/12} r$ .

16.\* Het moment van het zwaartepunt ten opzichte van het vlakke grensvlak is:

$$\int_0^r 2 \pi x^2 \cdot k x^n \cdot {}^{1/2} x dx = \pi k \int_0^r x^{n+3} dx = \pi k \frac{r^{n+4}}{n+4}.$$

Het traagheidsmoment om  $l$  is (zie 12):

$$I_l = \frac{2}{3} I_M = \frac{4}{3} \pi k \frac{r^{n+5}}{n+5},$$

zodat de slingerlengte is  $\frac{4(n+4)}{3(n+5)} r$ .

*Opmerkingen.* 1. De massa van het lichaam is  $m = 2\pi k \frac{r^{n+3}}{n+3}$ .

De afstand van het zwaartepunt tot  $l$  is dus  $\frac{n+3}{2(n+4)} r$ .

2. Voor  $n = 0$  krijgt men de uitkomst van 13, voor  $n \rightarrow \infty$  die van 14.

17. Het traagheidsmoment van het lichaam om  $a$  is:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{3} m l^2 + M \left\{ \frac{2}{5} r^2 + (l+r)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{15} \left\{ 5 m l^2 + 3 M (7 r^2 + 10 l r + 5 l^2) \right\}. \end{aligned}$$

De afstand van het zwaartepunt tot  $A$  is:

$$\frac{m l + 2 M (l+r)}{2(m+M)},$$

zodat de slingerlengte is:

$$= \frac{2}{15} \cdot \frac{5 m l^2 + 3 M (5 l^2 + 10 l r + 7 r^2)}{m l + 2 M (l+r)}.$$

18. Men heeft vooreerst:

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{1}{3} m l^2 + M \left\{ \frac{1}{2} r^2 + (l+r)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 2 m l^2 + 3 M (3 r^2 + 4 l r + 2 l^2) \right\}, \\ \lambda_p &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2 m l^2 + 3 M (2 l^2 + 4 l r + 3 r^2)}{m l + 2 M (l+r)}. \end{aligned}$$

Het traagheidsmoment van de cylinder om de as  $n$  door het middelpunt  $N$  van de cylinder evenwijdig aan  $q$  is de som van het planaire traagheidsmoment  $\frac{1}{12} M h^2$  ten opzichte van het vlak door  $N$  loodrecht op de as van de cylinder en het planaire traagheidsmoment  $\frac{1}{4} M r^2$  ten opzichte van het vlak door  $N$  loodrecht op  $AB$ . Dit voert tot:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{12} \left\{ 4 m l^2 + M (12 l^2 + 24 l r + 15 r^2 + h^2) \right\}, \\ \lambda_q &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4 m l^2 + M (12 l^2 + 24 l r + 15 r^2 + h^2)}{m l + 2 M (l+r)}. \end{aligned}$$

19.\* We verdelen de plaat in stroken evenwijdig aan  $AB$ . Daar

de vlaktedichtheid als  $kx^2$  te schrijven is, is de massa van de strook  $2 kx^2 \sqrt{r^2 - x^2}$ , dus de massa van de plaat:

$$\begin{aligned} m &= 4 k \int_0^r x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 k r^4 \int_0^{1/2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 4 k r^4 \int_0^{1/2\pi} (\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi = \\ &= 2 k \pi r^4 \left( \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) = \frac{1}{4} \pi k r^4, \end{aligned}$$

waarbij  $x = r \sin \varphi$  gesteld is. Het traagheidsmoment om  $AB$  is:

$$\begin{aligned} I_{AB} &= 4k \int_0^r x^4 \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4kr^6 \int_0^{1/2\pi} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 4kr^6 \int_0^{1/2\pi} (\sin^4 \varphi - \sin^6 \varphi) d\varphi = \\ &= 2k\pi r^6 \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) = \frac{1}{8} \pi k r^6 = \frac{1}{2} m r^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$I_l = I_{AB} + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2, \quad \lambda_l = \frac{3}{2} r.$$

20.\* Het traagheidsmoment om  $CD$  is:

$$I_{CD} = \frac{4}{3} k \int_0^r x^2 (r^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{4}{3} k r^6 \int_0^{1/2\pi} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{6} m r^2,$$

waaruit volgt:

$$I_p = I_{CD} + m r^2 = \frac{7}{6} m r^2, \quad \lambda_p = \frac{7}{6} r.$$

Verder is:

$$I_a = I_{AB} + I_p = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{7}{6} m r^2 = \frac{5}{3} m r^2, \quad \lambda_a = \frac{5}{3} r,$$

$$I_c = I_{CD} + I_l = \frac{1}{6} m r^2 + \frac{3}{2} m r^2 = \frac{5}{3} m r^2, \quad \lambda_c = \frac{5}{3} r,$$

21. We verdelen het lichaam door vlakken evenwijdig aan het grondvlak in cirkelvormige platen. Is  $x$  de afstand van zulk een vlak tot  $T$ , dan is de straal van de cirkel  $r \sqrt{\frac{x}{h}}$ . De massa van het lichaam is dus:

$$m = \frac{k\pi r^2}{h} \int_0^h x dx = \frac{1}{2} k\pi r^2 h,$$



waarin  $k$  de ruimtedichtheid is. Het moment van het zwaartepunt  $Z$  ten opzichte van het raakvlak in  $T$  (topraakvlak) is:

$$\frac{k \pi r^2}{h} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} k \pi r^2 h^2 = \frac{2}{3} m h.$$

Het traagheidsmoment van het lichaam om  $p$  is:

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{k \pi r^2}{h} \int_0^h \left( \frac{r^2 x}{4h} + x^2 \right) x dx = \\ &= \frac{1}{12} k \pi r^2 h (r^2 + 3 h^2) = \frac{1}{6} m (r^2 + 3 h^2). \end{aligned}$$

De slingerlengte om de as  $p$  is dus:

$$\lambda_p = \frac{r^2 + 3 h^2}{4 h}.$$

Het traagheidsmoment om  $l$  is:

$$I_l = I_p - \frac{1}{9} m h^2 + \frac{1}{9} m h^2 = \frac{1}{6} m (r^2 + h^2),$$

zodat de slingerlengte om  $l$  is  $\lambda_l = \frac{r^2 + h^2}{2 h}$ .

De punten  $T$  en  $N$  behoren bij elkaar als ophangpunt en slingerpunt, als  $\lambda_p = h$  (of  $\lambda_l = h$ ) is, dus als  $h = r$  is.

22.\* Volgens 11 is de massa van het lichaam:

$$m = \int_0^h \frac{2}{3} k \pi r^3 \left( \frac{x}{h} \right)^{3/2} dx = \frac{4}{15} k \pi r^3 h.$$

Het moment van het zwaartepunt  $Z$  ten opzichte van het top-raakvlak is:

$$\frac{2}{3} k \pi r^3 \int_0^h \left( \frac{x}{h} \right)^{3/2} x dx = \frac{4}{21} k \pi r^3 h^2 = \frac{5}{7} m h.$$

Bijgevolg is  $TZ = \frac{5}{7} h$ , dus  $ZN = \frac{2}{7} h$ .

Het traagheidsmoment om  $p$  is volgens 11:

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^h \frac{2}{3} k \pi r^3 \left( \frac{x}{h} \right)^{3/2} \left( \frac{3 r^2 x}{10 h} + x^2 \right) dx = \\ &= \frac{2}{945} k \pi r^3 (27 r^2 + 70 h^2) = \frac{1}{126} m (27 r^2 + 70 h^2). \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$I_l = \frac{1}{126} m (27 r^2 + 70 h^2) - \frac{25}{49} m h^2 + \frac{4}{49} m h^2 = \\ = \frac{1}{126} m (27 r^2 + 16 h^2).$$

We vinden dus voor de slingerlengten:

$$\lambda_p = \frac{27 r^2 + 70 h^2}{90 h}, \quad \lambda = \frac{27 r^2 + 16 h^2}{36 h}.$$

$T$  en  $Z$  behoren als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar, als  $27 r^2 = 20 h^2$  is.

23. Door het lichaam te verdelen in platen evenwijdig aan het grondvlak, vindt men (als  $k$  de ruimtedichtheid is):

$$I_p = \frac{k \pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \left( \frac{r^2 x^2}{4 h^2} + x^2 \right) dx = \frac{1}{20} k \pi r^2 h (r^2 + 4 h^2) = \\ = \frac{3}{20} m (r^2 + 4 h^2),$$

$$I_l = \frac{3}{20} m (r^2 + 4 h^2) - \frac{9}{16} m h^2 + \frac{1}{16} m h^2 = \frac{1}{20} m (3 r^2 + 2 h^2).$$

Voor de slingerlengten vindt men:

$$\lambda_p = \frac{r^2 + 4 h^2}{5 h}, \quad \lambda_l = \frac{3 r^2 + 2 h^2}{5 h},$$

De punten  $T$  en  $N$  behoren als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar, als  $r = h$  is, dus als de halve tophoek van de kegel  $45^\circ$  is.

24. Het traagheidsmoment om de as  $a$  van de kegel is:

$$I_a = \frac{k \pi r^4}{2 h^4} \int_0^h x^4 dx = \frac{1}{10} k \pi r^4 h = \frac{3}{10} m r^2.$$

Om de assen door  $T$  loodrecht op de as van de kegel is het traagheidsmoment  $I_p = \frac{3}{20} m (r^2 + 4 h^2)$  (zie 23). Daar de traagheidsproducten voor drie door  $T$  gaande onderling loodrechte assen, waarvan er een langs de as van de kegel valt, gelijk aan 0 zijn (wegens de symmetrie van de kegel ten opzichte van vlakken door zijn as), vindt men:

$$I_b = I_a \cos^2 \gamma + I_p \sin^2 \gamma.$$

Hierin is  $\gamma$  de halve tophoek van de kegel, zodat  $\cos^2 \gamma = \frac{h^2}{r^2 + h^2}$   
 en  $\sin^2 \gamma = \frac{r^2}{r^2 + h^2}$  is. Men vindt dus:

$$I_b = \frac{3 m r^2 (r^2 + 6 h^2)}{20 (r^2 + h^2)}.$$

De afstand van het zwaartepunt tot  $b$  is  $\frac{3 r h}{4 \sqrt{r^2 + h^2}}$ , waaruit  
 men voor de slingerlengte vindt:

$$\lambda_b = \frac{r (r^2 + 6 h^2)}{5 h \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

25.\* Heeft  $x$  dezelfde betekenis als in 23, dan is de ruimtedichtheid te schrijven als  $kx$ . De massa van de kegel is dan:

$$m = \frac{k \pi r^2}{h^2} \int_0^h x^3 dx = \frac{1}{4} k \pi r^2 h^2$$

en het moment van het zwaartepunt  $Z$  ten opzichte van het vlak  $V$ :

$$\frac{k \pi r^2}{h^2} \int_0^h x^4 dx = \frac{1}{5} k \pi r^2 h^3 = \frac{4}{5} m h.$$

Bijgevolg is  $TZ = \frac{4}{5} h$  en  $ZN = \frac{1}{5} h$ . Verder is:

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{k \pi r^2}{h^2} \int_0^h x^3 \left( \frac{r^2 x^2}{4 h^2} + x^2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{24} k \pi r^2 h^2 (r^2 + 4 h^2) = \frac{1}{6} m (r^2 + 4 h^2), \end{aligned}$$

$$I_l = \frac{1}{6} m (r^2 + 4 h^2) - \frac{16}{25} m h^2 + \frac{1}{25} m h^2 = \frac{1}{30} m (5 r^2 + 2 h^2).$$

Voor de slingerlengten om  $p$  en  $l$  geeft dit:

$$\lambda_p = \frac{5 (r^2 + 4 h^2)}{24 h}, \quad \lambda_l = \frac{5 r^2 + 2 h^2}{6 h}.$$

Men heeft  $\lambda_p = h = \lambda_l$ , als  $5 r^2 = 4 h^2$  is. Verder is:

$$I_a = \frac{k \pi r^4}{2 h^4} \int_0^h x^5 dx = \frac{1}{12} k \pi r^4 h^2 = \frac{1}{3} m r^2,$$

$$I_b = I_a \cos^2 \gamma + I_p \sin^2 \gamma = \frac{m r^2 (r^2 + 6 h^2)}{6 (r^2 + h^2)}.$$

Dit voert tot:

$$\lambda_b = \frac{5 r (r^2 + 6 h^2)}{24 h \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

*Opmerkingen.* 1. Is de ruimtedichtheid evenredig aan de  $n$ de macht ( $n \geq 0$ ) van de afstand tot het vlak  $V$ , dan vindt men:

$$m = \frac{k \pi r^2 h^{n+1}}{n+3}, \quad I_a = \frac{k \pi r^4 h^{n+1}}{2(n+5)} = \frac{n+3}{2(n+5)} m r^2,$$

$$I_p = \frac{n+3}{4(n+5)} m (r^2 + 4 h^2), \quad \lambda_p = \frac{n+4}{4(n+5)} \cdot \frac{r^2 + 4 h^2}{h},$$

$$I_l = m \frac{(n+3)(n+4)r^2 + 8 h^2}{4(n+4)(n+5)}, \quad \lambda_l = \frac{(n+3)(n+4)r^2 + 8 h^2}{4(n+5)h},$$

$$I_b = \frac{n+3}{4(n+5)} m \frac{r^2(r^2 + 6 h^2)}{r^2 + h^2}, \quad \lambda_b = \frac{n+4}{4(n+5)} \cdot \frac{r(r^2 + 6 h^2)}{h \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

2. We nemen  $T$  als oorsprong van een rechthoekig assenkruis en de as van de kegel als  $x$ -as. De vergelijking van de traagheidsellipsoïde van  $T$  is dan:

$$(n+3)m \{ 2 r^2 x^2 + (r^2 + 4 h^2)(y^2 + z^2) \} = 4(n+5).$$

Een der beide in het  $xy$ -vlak gelegen beschrijvende van de kegel heeft tot parametervoorstelling  $x = h \mu$ ,  $y = r \mu$ ,  $z = 0$ . De snijpunten dier beschrijvende met de traagheidsellipsoïde voldoen aan:

$$(n+3)m r^2 (r^2 + 6 h^2) \mu^2 = 4(n+5).$$

Het traagheidsmoment om een beschrijvende  $b$  voldoet aan:

$$I_b(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

In verband met de parametervoorstelling van  $b$  (en de waarde van  $\mu^2$ ) voert dit tot de waarde van  $I_b$ .

26. Het traagheidsmoment om de as  $a$  der paraboloid is:

$$I_a = \frac{k \pi r^4}{2 h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{6} k \pi r^4 h = \frac{1}{3} m r^2.$$

In verband met de waarde van  $I_p$  (zie 21) vindt men hieruit:

$$I_{CA} = \frac{I_a h^2 + I_p r^2}{r^2 + h^2} = \frac{1}{6} m r^2 \frac{r^2 + 5 h^2}{r^2 + h^2}.$$

De afstand van het zwaartepunt  $Z$  tot  $T$  is  $\frac{2}{3} h$ , zodat de afstand van  $Z$  tot  $CA$  is  $\frac{2 r h}{3 \sqrt{r^2 + h^2}}$ . Hieruit volgt:

$$\lambda_{CA} = \frac{r(r^2 + 5h^2)}{4h\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

27.\* Het traagheidsmoment om de omwentelingsas  $a$  is volgens 11:

$$I_a = \frac{2}{5} k \pi r^5 \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^{5/2} dx = \frac{4}{35} k \pi r^5 h = \frac{3}{7} m r^2.$$

In verband met het in 22 gevondene heeft men:

$$I_{CA} = \frac{I_a h^2 + I_p r^2}{r^2 + h^2} = \frac{1}{126} m r^2 \frac{27 r^2 + 124 h^2}{r^2 + h^2}.$$

De afstand van  $Z$  tot  $CA$  is  $\frac{5 r h}{7 \sqrt{r^2 + h^2}}$ , waaruit volgt:

$$\lambda_{CA} = \frac{r(27 r^2 + 124 h^2)}{90 h \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

28. Is  $m$  de massa van het lichaam, dan is:

$$I_{AB} = \frac{1}{3} m (a^2 + h^2), \quad \lambda_{AB} = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 + h^2},$$

$$I_{PQ} = \frac{1}{12} m (c^2 + 4h^2), \quad \lambda_{PQ} = \frac{c^2 + 4h^2}{6h}.$$

29. Zij  $R$  het midden van  $AD$  en  $S$  het midden van  $BC$ . Uit de symmetrie volgt, dat  $PQ$  en  $RS$  (zie voor de notatie 28) hoofdtraagheidsassen zijn voor het middelpunt van  $ABCD$ . Men heeft dus:

$$I_{AC} = \frac{I_{PQ} a^2 + I_{RS} c^2}{a^2 + c^2} = m \frac{a^2 c^2 + 2 h^2 (a^2 + c^2)}{6 (a^2 + c^2)},$$

$$\lambda_{AC} = \frac{2 I_{AC}}{m h} = \frac{a^2 c^2 + 2 h^2 (a^2 + c^2)}{3 h (a^2 + c^2)} = \frac{a^2 c^2}{3 h (a^2 + c^2)} + \frac{2}{3} h.$$

30.\* We nemen  $A$  als oorsprong van een rechthoekig assenkruis en leggen de positieve  $x$ -as,  $y$ -as en  $z$ -as resp. door  $B$ ,  $D$  en  $E$ . Zijn  $P_{xy}$  enz. de traagheidsproducten en  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de richtingshoeken van  $AJ$ , dan is:

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + j^2}}, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = \frac{j}{\sqrt{c^2 + j^2}},$$

dus:

$$\begin{aligned} I_{AJ} &= I_x \cos^2 \alpha + I_z \cos^2 \gamma - 2 P_{xz} \cos \alpha \cos \gamma = \\ &= \frac{I_x c^2 + I_z j^2 - 2 P_{xz} c j}{c^2 + j^2}. \end{aligned}$$

Daar  $I_x = \frac{1}{3} m(a^2 + h^2)$ ,  $I_z = \frac{1}{3} m(a^2 + c^2)$ ,  $P_{xz} = \frac{1}{4} mch$  is, vindt men:

$$I_{AJ} = m \frac{2a^2 c^2 + 2h^2 c^2 + 2a^2 j^2 + 2c^2 j^2 - 3c^2 h j}{6(c^2 + j^2)}.$$

Is  $N$  het middelpunt van  $ABFE$  en  $K$  het voetpunt van de loodlijn uit  $N$  op  $AJ$  neergelaten, dan is  $K$  ook het voetpunt van de loodlijn uit het zwaartepunt  $Z$  op  $AJ$  neergelaten. Het kwadraat van de afstand van  $Z$  tot  $AJ$  is dus:

$$ZK^2 = ZN^2 + NK^2 = \frac{1}{4} a^2 + NK^2.$$

Nu is in het  $xz$ -vlak  $jx - cz = 0$  de vergelijking van  $AJ$ . Het kwadraat van de afstand van het punt  $N(\frac{1}{2}c, 0, \frac{1}{2}h)$  tot  $AJ$  is dus:

$$NK^2 = \frac{c^2(j-h)^2}{4(j^2 + c^2)}.$$

We vinden dus:

$$ZK^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{c^2(j-h)^2}{4(j^2 + c^2)} = \frac{a^2(j^2 + c^2) + c^2(j-h)^2}{4(j^2 + c^2)}.$$

Voor de slingerlengte vinden we dus:

$$\lambda_{AJ} = \frac{2a^2 c^2 + 2a^2 j^2 + 2c^2 h^2 + 2c^2 j^2 - 3c^2 h j}{\sqrt{(c^2 + j^2)(a^2 c^2 + a^2 j^2 + c^2 h^2 + c^2 j^2 - 2c^2 h j)}}.$$

31.\* We verdelen het viervlak door vlakken evenwijdig aan  $AB$  en  $CD$  in rechthoekige platen. Is  $x$  de afstand van zulk een plaat tot  $AB$ , dan zijn de aan  $AB$  evenwijdige zijden van de rechthoek gelijk aan  $a - x\sqrt{2}$  en de beide andere zijden aan  $x\sqrt{2}$ . Het traagheidsmoment van de plaat om  $AB$  is dus (als  $k$  de ruimtedichtheid is):

$$kx \sqrt{2}(a - x\sqrt{2})(\frac{1}{6}x^2 + x^2)dx = \frac{7}{6}k(a x^3 \sqrt{2} - 2x^4)dx.$$

Daar de afstand van  $AB$  en  $CD$  gelijk is aan  $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ , vindt men

voor het traagheidsmoment van het viervlak om  $AB$ :

$$I_{AB} = \frac{7}{6} k \int_0^{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} (ax^3\sqrt{2} - 2x^4) dx = \frac{7\sqrt{2}}{480} ka^5 = \frac{7}{40} ma^2,$$

waarin  $m$  de massa van het viervlak is. Voor de slingerlengte vindt men  $\frac{7}{10\sqrt{2}} a$ .

Ook kan men  $I_{AB}$  vinden door het viervlak door vlakken loodrecht op  $AB$  in driehoekige platen te verdelen. Is  $y$  de afstand van zulk een plaat tot  $A$  en is  $y \leq \frac{1}{2}a$ , dan zijn de zijden van de driehoekige plaat, die in een punt van  $AB$  samenkomen, gelijk aan  $y\sqrt{3}$ , terwijl de derde zijde gelijk is aan  $2y$ . De oppervlakte van de driehoekige plaat is dus  $y^2\sqrt{3}$ , terwijl zijn traagheidsmoment om  $AB$  volgens 7 gelijk is aan:

$$ky^2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{24} (4y^2 + 24y^2) dy = \frac{7}{6} ky^4\sqrt{2} dy.$$

Het traagheidsmoment van het viervlak om  $AB$  is dus:

$$I_{AB} = 2 \cdot \frac{7}{6} k\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}a} y^4 dy = \frac{7\sqrt{2}}{480} ka^5 = \frac{7}{40} ma^2,$$

32. Is  $\lambda < 2\varrho$ , dan zijn er geen oplossingen. Is  $\lambda = 2\varrho$ , dan zijn er twee oplossingen, nl. de punten  $P$  van  $r$ , die een afstand  $\varrho$  tot  $Z$  hebben. Is  $\lambda > 2\varrho$ , dan zijn er vier oplossingen, nl. de punten  $P$  van  $r$ , die een afstand  $\frac{1}{2}(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\varrho^2})$  tot  $Z$  hebben.

33.\* Eerste mogelijkheid:  $Z$  is het midden van  $BC$ . De punten  $A$  en  $C$  behoren dan als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar;  $D$  ligt zodanig op  $r$ , dat  $Z$  ook het midden van  $AD$  is. De waarde  $\varrho_1$  van  $\varrho$  voldoet aan  $\varrho_1^2 = \frac{1}{2}q(p + \frac{1}{2}q)$ .

Tweede mogelijkheid:  $Z$  is het midden van  $AC$ . Nu behoren  $A$  en  $B$  als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar;  $D$  ligt zodanig op  $r$ , dat  $Z$  het midden van  $BD$  is. De waarde  $\varrho_2$  van  $\varrho$  voldoet aan  $\varrho_2^2 = \frac{1}{4}(p^2 - q^2)$ .

Derde mogelijkheid:  $Z$  is het midden van  $AB$ . De punten  $A$  en  $C$  behoren als ophangpunt en slingerpunt bij elkaar;  $Z$  is het midden van  $CD$ . De waarde  $\varrho_3$  van  $\varrho$  voldoet aan  $\varrho_3^2 = \frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p + q)$ .

Men heeft  $\varrho_3 > \varrho_1$  en  $\varrho_3 > \varrho_2$ , zoals men ziet aan  $\varrho_3^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2$ . Men heeft  $\varrho_1 = \varrho_2$ , als  $p = (1 + \sqrt{3})q$  is.

*Opmerking.* Uit:

$$\begin{aligned}4(e_2^2 - e_1^2) &= p^2 - 2pq - 2q^2 = \\ &= \{p + (\sqrt{3} - 1)q\} \{p - (\sqrt{3} + 1)q\}\end{aligned}$$

ziet men, dat  $e_2 > e_1$  of  $e_2 < e_1$  is, al naar gelang:

$$p > (\sqrt{3} + 1)q \quad \text{of} \quad p < (\sqrt{3} + 1)q$$

is.



## B. VERBINDINGSKRACHTEN BIJ EEN SAMENGESTELDE SLINGER.

\*34. Men heeft:

$$\lambda \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi, \quad \frac{1}{2} \lambda \dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 - g.$$

$$Q = mg \sin \varphi + ml \ddot{\varphi} = mg \frac{\lambda - l}{\lambda} \sin \varphi,$$

$$S = mg \cos \varphi + ml \dot{\varphi}^2 = \frac{mg}{\lambda} \{(\lambda + 2l) \cos \varphi - 2l\} + ml \omega^2.$$

*Opmerking.*  $|Q|$  is evenredig aan de afstand van  $Z$  tot de verticaal door  $O$ , terwijl  $S$  des te kleiner is naarmate  $Z$  zich hoger bevindt.

35. Men heeft nu  $\frac{1}{2} \lambda \dot{\varphi}^2 = g(\cos \varphi - \cos \alpha)$ , dus:

$$S = \frac{mg}{\lambda} \{(\lambda + 2l) \cos \varphi - 2l \cos \alpha\},$$

terwijl  $Q$  is als in 34.

\*36. Nu is  $\lambda = \frac{4}{3} l$ , dus volgens 34 en 35:

$$Q = \frac{1}{4} mg \sin \varphi, \quad S = \frac{5}{2} mg \cos \varphi.$$

*Opmerking.* Aan te raden is het vraagstuk ook rechtstreeks te behandelen, dus zonder zich op 34 en 35 te beroepen.

37. Men heeft  $l \ddot{\varphi} = -\frac{3}{4} g \sin \varphi$ ,  $l \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} g(1 + \cos \varphi)$ , dus:

$$Q = \frac{1}{4} mg \sin \varphi, \quad S = \frac{1}{2} mg(3 + 5 \cos \varphi),$$

$$K^2 = Q^2 + S^2 = \frac{1}{16} m^2 g^2 (99 \cos^2 \varphi + 120 \cos \varphi + 37) = \frac{1}{176} m^2 g^2 \{ (33 \cos \varphi + 20)^2 + 7 \}.$$

Bijgevolg is  $K$  minimaal voor  $\cos \varphi = -\frac{20}{33}$ . De minimale waarde van  $K$  is  $\frac{1}{4} mg \sqrt{\frac{7}{11}}$ .

38. Het traagheidsmoment van de staaf om een as door  $M$

$$\rightarrow \Sigma M = I \ddot{\varphi} \rightarrow -mgl \sin \varphi = \frac{4}{3} ml^2 \cdot \ddot{\varphi} \rightarrow 57$$

$$\rightarrow \frac{4}{3} l \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi, \text{ of } l \ddot{\varphi} = -\frac{3}{4} g \sin \varphi \rightarrow \text{integreer}$$

$$l \ddot{\varphi} \varphi = -\frac{3}{4} g \sin \varphi \cdot \varphi \rightarrow \frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2 = +\frac{3}{2} g \cos \varphi + C \rightarrow l \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} g (\cos \varphi + 1)$$

loodrecht op het vlak van de cirkel is:

$$\frac{1}{3} m l^2 + m(l+r)^2 = \frac{1}{3} m(4l^2 + 6lr + 3r^2).$$

Uit  $L + P = \text{constant}$  volgt dus, als  $\varphi$  de uitwijkingshoek uit de evenwichtsstand is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(4l^2 + 6lr + 3r^2)\dot{\varphi}^2 - g(l+r)\cos\varphi &= C, \\ (4l^2 + 6lr + 3r^2)\ddot{\varphi} + 3g(l+r)\sin\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Voor kleine slingeren wordt dit:

$$(4l^2 + 6lr + 3r^2)\ddot{\varphi} + 3g(l+r)\varphi = 0,$$

zodat de periode daarvan is  $2\pi \sqrt{\frac{4l^2 + 6lr + 3r^2}{3g(l+r)}}$ . De slingerlengte is  $\frac{4l^2 + 6lr + 3r^2}{3(l+r)}$ .

Is  $a$  de amplitudo der slingeren, dan is:

$$(4l^2 + 6lr + 3r^2)\dot{\varphi}^2 = 6g(l+r)(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

zodat de periode daarvan is:

$$\begin{aligned} 4 \sqrt{\frac{4l^2 + 6lr + 3r^2}{6g(l+r)}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} &= \\ = 4 \sqrt{\frac{4l^2 + 6lr + 3r^2}{3g(l+r)}} \int_0^{1/2\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha \sin^2 u}}, \end{aligned}$$

waarbij  $\sin \frac{1}{2}\varphi = \sin \frac{1}{2}\alpha \sin u$  gesteld is.

In  $A$  wordt op de staaf een kracht uitgeoefend, waarvan de component langs  $AM$  (positief gerekend naar  $M$  toe) door  $S$  en de component langs de raaklijn in  $A$  aan de cirkel (positief gerekend in de zin der snelheid van  $A$ , als  $\dot{\varphi} > 0$  is) door  $Q$  wordt voorgesteld. Bovendien wordt op de staaf een koppel uitgeoefend, waarvan het moment  $u$  genoemd wordt, positief gerekend in dezelfde zin als  $\varphi$ . Uit de beweging van het zwaartepunt  $Z$  volgt:

$$S = mg \cos\varphi + m(l+r)\dot{\varphi}^2 = mg \frac{l^2 \cos\varphi + 3(l+r)^2(3\cos\varphi - 2\cos\alpha)}{l^2 + 3(l+r)^2},$$

$$Q = mg \sin\varphi + m(l+r)\ddot{\varphi} = mg \frac{l^2}{l^2 + 3(l+r)^2} \sin\varphi.$$

Uit de momentenstelling om  $Z$  volgt:

$$\mu = Ql + \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = -mg \frac{l^2 r}{l^2 + 3(l+r)^2} \sin \varphi.$$

*Opmerkingen.* 1. De verbindingskrachten in  $A$  (het moment  $\mu$  inbegrepen) hebben te zamen een moment 0 om  $M$ . Dit volgt onmiddellijk daaruit, dat die krachten te zamen geen invloed op het bewegingsmoment om  $M$  hebben (wegens de afwezigheid van wrijving). Ook kan men zeggen, dat het toestel op te vatten is als een samengestelde slinger  $MAB$ , waarbij de massa van  $MA$  wordt verwaarloosd; de verbindingskrachten in  $A$  zijn dan inwendig en hebben dus te zamen om  $M$  een moment 0 (daar hun reacties op de massalooze stang  $MA$  werken). Ook kan men het nog zo voorstellen, dat de verbindingskrachten in  $A$  te zamen geen arbeid verrichten (weer wegens het ontbreken van wrijving), zodat men  $L + P = \text{constant}$  kan opschrijven, zonder met die verbindingskrachten rekening te houden. Hetzelfde geldt dus voor de momentenstelling om het vaste punt  $M$  (die een vergelijking oplevert, welke door te fluxioneren uit  $L + P = \text{constant}$  ontstaat).

Uit het moment 0 om  $A$  volgt  $\mu + Qr = 0$ , dus  $\mu = -Qr$ . Dit voert nog iets sneller tot de formule voor  $\mu$ .

2. Men zou kunnen menen, dat uit het ontbreken van wrijving volgt, dat de verbindingskracht in  $A$  een component 0 langs de raaklijn in  $A$  aan de cirkel heeft (dus langs  $AM$  valt). Geeft men zich rekenschap van de aard der verbinding in  $A$ , dan blijkt dat dit niet het geval is. Het in het verlengde van  $MA$  vallen van de staaf kan niet worden afgedwongen door de staaf in één punt aan de cirkel te verbinden, daar anders geen moment in  $A$  kan worden opgeleverd, dat de hoek  $MAB$  gestrekt houdt. Is de staaf aan de cirkel gebonden in twee punten  $C$  en  $D$ , waarvan het afstand verwaarloosd wordt, dan krijgt men zeer grote (nagenoeg even grote) verbindingskrachten in  $C$  en  $D$ ; deze vallen langs de stralen van  $C$  en  $D$ , de ene naar  $M$  toe, de andere van  $M$  af. De resultante dier verbindingskrachten heeft een component loodrecht op  $AM$  en gaat niet door  $A$ , waardoor ze een moment om  $A$  krijgt (nader hierover in 39).

3. Zonder  $L + P = \text{constant}$  te gebruiken, kan men het vraagstuk geheel oplossen met de beweging van en om het zwaartepunt, dus met behulp van de vergelijkingen:

$$m(l+r)\dot{\varphi}^2 = S - mg \cos \varphi, \quad m(l+r)\ddot{\varphi} = Q - mg \sin \varphi,$$

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = \mu - Ql, \quad \mu + Qr = 0,$$

waarvan de laatste uitdrukt, dat er geen wrijving is.

39.\* De vergelijkingen, die  $\ddot{\varphi}$  en  $\dot{\varphi}^2$  in  $\varphi$  uitdrukken, zijn als in 38; hierin is  $\varphi$  weer de hoek, die  $MA$  met de naar beneden gerichte verticaal door  $M$  maakt, met inachtneming van de positieve draaizin. Stemt deze met  $CD$  overeen, dan maken  $MC$  en  $MD$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $M$  hoeken  $\varphi - \beta$  (resp.  $\varphi + \beta$ ). De in  $C$  en  $D$  op de staaf uitgeoefende verbindingskrachten vallen (wegens het ontbreken van wrijving) langs  $MC$  resp.  $MD$ . We noemen die krachten resp.  $U$  en  $V$ , positief gerekend naar  $M$  toe. De som der componenten van  $U$  en  $V$  in de richting  $AM$  noemen we  $S$ . De som der componenten van  $U$  en  $V$  in de richting van de raaklijn in  $A$  aan de cirkel (positief in de zin der snelheid van  $A$ , als  $\dot{\varphi} > 0$  is) noemen we  $Q$ . De som der momenten van  $U$  en  $V$  om  $A$  (d.w.z. om een as door  $A$  loodrecht op het vlak van de cirkel) noemen we  $\mu$ , positief gerekend in dezelfde zin als  $\varphi$ . Men heeft dan:

$$S = (U + V) \cos \beta, \quad Q = (U - V) \sin \beta, \\ \mu = r(V - U) \sin \beta.$$

Hieruit volgt:

$$U = \frac{S}{2 \cos \beta} + \frac{Q}{2 \sin \beta}, \quad V = \frac{S}{2 \cos \beta} - \frac{Q}{2 \sin \beta}.$$

De vergelijking  $\mu = r(V - U) \sin \beta$  (die tot  $\mu + Qr = 0$  voert, hetgeen uitdrukt, dat er geen wrijving is) behoeft niet te worden gebruikt. De grootheden  $S$ ,  $Q$  en  $\mu$  zijn dezelfde als die van 38. Volgens het daar gevondene heeft men dus:

$$U = mg \frac{l^2 \sin(\beta + \varphi) + 3(l+r)^2(3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha) \sin \beta}{2(4l^2 + 6lr + 3r^2) \sin \beta \cos \beta}, \\ V = mg \frac{l^2 \sin(\beta - \varphi) + 3(l+r)^2(3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha) \sin \beta}{2(4l^2 + 6lr + 3r^2) \sin \beta \cos \beta}.$$

Opmerkingen. 1. Is  $\beta$  klein en  $|\sin \varphi|$  niet klein, dan heeft men bij benadering:

$$U = \frac{mg l^2 \sin \varphi}{2(4l^2 + 6lr + 3r^2)\beta}, \quad V = -\frac{mg l^2 \sin \varphi}{2(4l^2 + 6lr + 3r^2)\beta}.$$

In dat geval zijn  $U$  en  $V$  in absolutie waarde groot en nagenoeg tegengesteld.

2. Men kan zich de verbinding tussen de stang  $AB$  en de cirkel ook aldus voorstellen. De cirkel wordt gedacht als een gladde ijzerdraad. In  $A$  is aan de stang een dun buisje bevestigd, waarvan de massa verwaarloosd wordt. De hartlijn van dit buisje is gebogen volgens een cirkelboog, waarvan de straal  $r$  en de middelpunts-hoek  $2\beta$  is. Het punt  $A$  bevindt zich in het midden van die cirkelboog, terwijl  $AB$  langs het verlengde van de door  $A$  gaande straal van de cirkelboog valt;  $AB$  staat dus loodrecht op de hartlijn van het buisje. De cirkelvormige ijzerdraad loopt door het buisje (dat daar langs kan glijden). Daardoor moet  $A$  op de cirkel blijven en valt  $AB$  in het verlengde van de straal. Daar (als  $\beta$  klein is)  $U$  en  $V$  in de meeste standen van de staaf tegengesteld teken hebben, steunt het buisje meestal met het ene uiteinde tegen de binnenkant van de ijzerdraad en met het andere uiteinde tegen de buitenkant.

\*40. Is  $\varphi$  de hoek, die  $AB$  met de naar beneden gerichte verticaal door  $A$  maakt, dan is:

$$l \ddot{\varphi} = -\frac{3}{4} g \sin \varphi, \quad l \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} g \cos \varphi.$$

Zij  $S_x$  de langs  $CA$  vallende component van de op  $CB$  werkende kracht, positief gerekend naar  $A$  toe. Zij  $Q_x$  de component van die kracht loodrecht op  $AB$ , positief in de zin der snelheid van  $B$  als  $\dot{\varphi} > 0$  is, en zij  $\mu_x$  het moment van het op  $BC$  uitgeoefende koppel, positief in dezelfde zin als waarin  $\varphi$  positief gerekend wordt.

De massa van het deel  $BC$  van de staaf is  $\frac{2l-x}{2l} m$ . Het traagheidsmoment van  $BC$  om een as door het zwaartepunt  $Z_x$  van  $BC$  loodrecht op  $BC$  is  $\frac{(2l-x)^3}{24l} m$ . De afstand  $AZ_x$  is  $\frac{1}{2}(2l+x)$ .

Men heeft dus:

$$\frac{2l-x}{2l} m \frac{2l+x}{2} \ddot{\varphi} = Q_x - \frac{2l-x}{2l} mg \sin \varphi,$$

$$\frac{2l-x}{2l} m \frac{2l+x}{2} \dot{\varphi}^2 = S_x - \frac{2l-x}{2l} mg \cos \varphi,$$

$$\frac{(2l-x)^3}{24l} m \ddot{\varphi} = \mu_x - Q_x \frac{2l-x}{2}.$$

Hieruit volgt:

$$Q_x = \frac{(2l-x)(2l-3x)}{16l^2} mg \sin \varphi,$$

$$S_x = \frac{(2l-x)(10l+3x)}{8l^2} mg \cos \varphi, \quad \mu_x = -\frac{x(2l-x)^2}{16l^2} mg \sin \varphi.$$

Een controle hierop is, dat men voor  $x = 0$  vindt:

$$Q_0 = \frac{1}{4} mg \sin \varphi, \quad S_0 = \frac{5}{2} mg \cos \varphi, \quad \mu_0 = 0$$

(zie 36);  $\mu_0 = 0$  betekent, dat in  $A$  op de staaf  $AB$  geen koppel wordt uitgeoefend, hetgeen te voorzien was.

41.\* De krachtcomponent  $S_x$  langs de staaf is steeds positief (0 voor  $x = 2l$ ), dus een trekspanning. Voor  $S_x$  kan men schrijven:

$$S_x = \frac{20l^2 - 4lx - 3x^2}{8l^2} mg \cos \varphi,$$

zodat  $S_x$  afneemt van  $\frac{5}{2} mg \cos \varphi$  tot 0, als  $x$  toeneemt van 0 tot  $2l$ . Men heeft de grootste spanning, als de staaf de verticale stand passeert ( $\varphi = 0$ ) en men  $x = 0$  neemt (spanning bij  $A$ ).

Voor de krachtcomponent  $Q_x$  (dwarskracht) kan men schrijven:

$$Q_x = \frac{(3x - 4l)^2 - 4l^2}{48l^2} mg \sin \varphi.$$

Zonder beperking kunnen we  $\sin \varphi > 0$  onderstellen. Neemt  $x$  toe van 0 tot  $\frac{4}{3}l$ , dan neemt  $Q_x$  af van  $\frac{1}{4} mg \sin \varphi$  tot  $-\frac{1}{12} mg \sin \varphi$  (voor  $x = \frac{2}{3}l$  de waarde 0 passerend). Neemt  $x$  verder toe van  $\frac{4}{3}l$  tot  $2l$ , dan neemt  $Q_x$  toe van  $-\frac{1}{12} mg \sin \varphi$  tot 0. In absolute waarde is de dwarskracht het grootst voor  $x = 0$ . De grootste dwarskracht krijgt men in  $A$  bij een uiterste stand ( $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ).

Is  $\sin \varphi > 0$ , dan is het moment  $\mu_x < 0$ . Neemt  $x$  toe van 0 tot  $\frac{2}{3}l$ , dan neemt  $|\mu_x|$  toe van 0 tot  $\frac{2}{27} mg l \sin \varphi$ , om vervolgens tot 0 af te nemen, als  $x$  toeneemt van  $\frac{2}{3}l$  tot  $2l$ . De grafiek van  $\mu_x$  als functie van  $x$  (die voor  $x = \frac{2}{3}l$  een raaklijn evenwijdig aan de  $x$ -as heeft) heeft voor  $x = \frac{4}{3}l$  een buigpunt en raakt voor  $x = 2l$  aan de  $x$ -as.

42. Het traagheidsmoment van het lichaam om  $a$  is  $\frac{17}{3} m l^2$ . De afstand van  $A$  tot het (op  $AB$  gelegen) zwaartepunt van het lichaam is  $\frac{3}{2}l$ . Men heeft dus:

$$17l \dot{\varphi}^2 = 18g \cos \varphi, \quad 17l \ddot{\varphi} = -9g \sin \varphi,$$

waarin  $\varphi$  de uitwijkingshoek uit de stabiele evenwichtsstand is. De krachtcomponenten  $S$  en  $Q$ , langs het verlengde van  $BA$  resp. loodrecht op  $BA$  (positief in de zin van toenemende  $\varphi$ ), zijn:

$$S = 2 mg \cos \varphi + 3 ml \dot{\varphi}^2 = \frac{88}{17} mg \cos \varphi,$$

$$Q = 2 mg \sin \varphi + 3 ml \ddot{\varphi} = \frac{7}{17} mg \sin \varphi.$$

Is  $S'$  de langs  $BA$  vallende component van de in  $B$  op  $AB$  uitgeoefende kracht, positief van  $B$  naar  $A$ , en  $Q'$  de langs  $CD$  vallende component van die kracht, positief in de zin der snelheid van  $B$  als  $\dot{\varphi} > 0$  is, dan is:

$$S + S' - mg \cos \varphi = ml \dot{\varphi}^2, \quad Q + Q' - mg \sin \varphi = ml \ddot{\varphi},$$

dus  $S' = -\frac{53}{17} mg \cos \varphi$ ,  $Q' = \frac{1}{17} mg \sin \varphi$ . Het in  $B$  op  $AB$  uitgeoefende moment  $\mu'$  (positief in de zin van  $\varphi$ ) wordt gevonden uit:

$$\mu' - Ql + Q'l = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi},$$

zodat  $\mu' = \frac{3}{17} mgl \sin \varphi$  is.

Sneller vindt men  $S'$ ,  $Q'$  en  $\mu'$  door de krachtcomponenten  $S''$  en  $Q''$  en het moment  $\mu''$  te berekenen in  $B$  door de stang  $AB$  op de stang  $CD$  uitgeoefend. Uit de beweging van  $CD$  volgt nl.:

$$S'' - mg \cos \varphi = 2 ml \dot{\varphi}^2 = \frac{36}{17} mg \cos \varphi,$$

$$Q'' - mg \sin \varphi = 2 ml \ddot{\varphi} = -\frac{18}{17} mg \sin \varphi,$$

$$\mu'' = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = -\frac{3}{17} mgl \sin \varphi.$$

Men heeft verder te bedenken, dat  $S' = -S''$ ,  $Q' = -Q''$  en  $\mu' = -\mu''$  is.

43. Zij  $\varphi$  de uitwijkingshoek uit de stabiele evenwichtsstand, positief in de zin der draaiing van  $OA$  naar  $OD$ . Dan is:

$$5 l \dot{\varphi}^2 = 4 g \cos \varphi, \quad 5 l \ddot{\varphi} = -2 g \sin \varphi.$$

De component van de versnelling van het zwaartepunt van  $AB$  in de richting  $BC$  (positief van  $B$  naar  $C$ ) is  $l(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi})$ , de component in de richting  $AB$  (positief van  $A$  naar  $B$ ) is  $l(\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi})$ . Voor de staaft  $AB$  geldt dus:

$$Q_1 - mg \sin \varphi = ml(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}) = \frac{2}{5} mg(2 \cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$P_1 - mg \cos \varphi = ml(\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi}) = \frac{2}{5} mg(2 \cos \varphi + \sin \varphi),$$

$$\mu_1 - Q_1 l = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = -\frac{2}{15} mgl \sin \varphi.$$

Hieruit vindt men:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{5} mg(4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi), \\ P_1 &= \frac{1}{5} mg(9 \cos \varphi + 2 \sin \varphi), \\ \mu_1 &= \frac{1}{15} mgl(12 \cos \varphi + 7 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Voor de staaf  $CD$  geldt:

$$\begin{aligned} Q_2 - mg \sin \varphi &= ml(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) = -\frac{2}{5} mg(\sin \varphi + 2 \cos \varphi), \\ P_2 - mg \cos \varphi &= ml(\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2) = \frac{2}{5} mg(-\sin \varphi + 2 \cos \varphi), \\ \mu_2 - Q_2 l &= \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = -\frac{2}{15} mgl \sin \varphi. \end{aligned}$$

Hieruit vindt men:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{5} mg(3 \sin \varphi - 4 \cos \varphi), \\ P_2 &= \frac{1}{5} mg(9 \cos \varphi - 2 \sin \varphi), \\ \mu_2 &= \frac{1}{15} mgl(7 \sin \varphi - 12 \cos \varphi). \end{aligned}$$

Zoals te voorzien was, ontstaan  $Q_2$ ,  $P_2$  en  $\mu_2$  resp. uit  $Q_1$ ,  $P_1$  en  $\mu_1$  door  $Q_1$  te vervangen door  $-Q_2$ ,  $P_1$  door  $P_2$ ,  $\mu_1$  door  $-\mu_2$  en  $\varphi$  door  $-\varphi$ .

44. De staaf beweegt zich als een samengestelde slinger met  $M$  als ophangpunt. Het traagheidsmoment van de staaf om  $M$  is:

$$\frac{1}{3} m(l^2 + 3a^2) = \frac{1}{3} m(r^2 + 2a^2),$$

waarin  $a$  de afstand van  $M$  tot het zwaartepunt  $Z$  van de staaf is. Zij  $\varphi$  de hoek, die  $MZ$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $M$  maakt, positief gerekend in de zin der draaiing van  $MA$  naar  $MB$ . Men heeft:

$$(r^2 + 2a^2)\dot{\varphi}^2 = 6ga \cos \varphi, \quad (r^2 + 2a^2)\ddot{\varphi} = -3ga \sin \varphi,$$

$$(N_1 + N_2) \frac{a}{r} - mg \cos \varphi = ma \dot{\varphi}^2,$$

$$(N_1 - N_2) \frac{l}{r} - mg \sin \varphi = ma \ddot{\varphi}.$$

Hieruit volgt:

$$a(r^2 + 2a^2)(N_1 + N_2) = mgr(r^2 + 8a^2) \cos \varphi,$$

$$(r^2 + 2a^2)(N_1 - N_2) = mgrl \sin \varphi,$$

dus (daar  $r^2 = a^2 + l^2$  is):

$$N_1 = mgr \frac{(9a^2 + l^2) \cos \varphi + a l \sin \varphi}{2a(3a^2 + l^2)},$$

$$N_2 = mgr \frac{(9a^2 + l^2) \cos \varphi - a l \sin \varphi}{2a(3a^2 + l^2)}.$$



45. Daar  $N_1$  en  $N_2$  verwisselen, als men  $\varphi$  door  $-\varphi$  vervangt (iets, dat ook zonder berekening is in te zien), kunnen we ons beperken tot waarden van  $\varphi$ , die aan  $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \pi$  voldoen. Dan is  $N_1 > 0$  (dus naar  $M$  toe gericht). Neemt  $\varphi$  af van  $\frac{1}{2} \pi$  tot 0, dan neemt  $N_2$  toe van de negatieve waarde  $-\frac{mgrl}{2(3a^2 + l^2)}$  tot de positieve waarde  $\frac{mgr(9a^2 + l^2)}{2a(3a^2 + l^2)}$ . De kracht  $N_2$  passeert de waarde 0, als  $\varphi = \frac{1}{2} \pi - \gamma$  is, waarin  $\gamma$  de scherpe hoek is, die aan:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{al}{9a^2 + l^2} \quad ?$$

voldoet; hierin is  $\gamma$  een vrij kleine hoek, daar  $\operatorname{tg} \gamma \leq \frac{1}{6}$  is ( $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{6}$ , als  $l = 3a$  is).

Voor  $N_1$  en  $N_2$  kan men schrijven:

$$N_1 = \frac{mgrl \cos(\varphi - \gamma)}{2(3a^2 + l^2) \sin \gamma}, \quad N_2 = \frac{mgrl \cos(\varphi + \gamma)}{2(3a^2 + l^2) \sin \gamma}.$$

In absolute waarde is  $N_2$  het grootst voor  $\varphi = 0$ . Neemt  $\varphi$  af van  $\frac{1}{2} \pi$  tot  $\gamma$ , dan neemt  $N_1$  toe van  $\frac{mgrl}{2(3a^2 + l^2)}$  tot:

$$\frac{mgrl}{2(3a^2 + l^2) \sin \gamma} = \frac{mgr}{2a(3a^2 + l^2)} \sqrt{(9a^2 + l^2)^2 + a^2 l^2}.$$

Neemt  $\varphi$  verder af van  $\gamma$  tot 0, dan neemt  $N_1$  af tot:

$$mgr \frac{9a^2 + l^2}{2a(3a^2 + l^2)}.$$

Voor  $\varphi = \frac{1}{2} \pi$  is  $N_1$  het kleinst en voor  $\varphi = \gamma$  het grootst.

46. Nu is  $(r^2 + 2a^2)\dot{\varphi}^2 = 6ga(\cos \varphi - \cos \beta)$ , waardoor men vindt:

$$a(r^2 + 2a^2)(N_1 + N_2) = mgr \{ (r^2 + 8a^2) \cos \varphi - 6a^2 \cos \beta \}.$$

$$N_1 = mgr \frac{(9a^2 + l^2) \cos \varphi - 6a^2 \cos \beta + al \sin \varphi}{2a(3a^2 + l^2)},$$

$$N_2 = mgr \frac{(9a^2 + l^2) \cos \varphi - 6a^2 \cos \beta - al \sin \varphi}{2a(3a^2 + l^2)}.$$

Neemt  $\varphi$  af van  $\beta$  tot 0, dan blijft  $N_1$  steeds positief, terwijl  $N_2$  toeneemt van:

$$mgr \frac{(3a^2 + l^2) \cos \beta - al \sin \beta}{2a(3a^2 + l^2)} \quad \text{tot} \quad mgr \frac{9a^2 + l^2 - 6a^2 \cos \beta}{2a(3a^2 + l^2)}.$$

Bijgevolg is  $N_2$  steeds positief, als  $\text{tg } \beta < \frac{3a^2 + l^2}{al}$  is, dus als  $\beta < \delta$  is, waarin  $\delta$  de scherpe hoek is, die aan  $\text{tg } \delta = \frac{3a^2 + l^2}{al}$  voldoet;  $\text{tg } \delta$  is minstens  $2\sqrt{3}$  ( $\text{tg } \delta = 2\sqrt{3}$  voor  $l = a\sqrt{3}$ , dus  $a = \frac{1}{2}r$ ).

47. We onderstellen, dat  $A$  lager ligt dan  $B$ . Voor evenwicht is nodig en voldoende, dat de som der componenten van de krachten in de richting  $AB$  gelijk aan 0 is, evenals de som der componenten van de krachten in een richting loodrecht op  $AB$  en de som der momenten om een of ander punt, waarvoor we  $M$  nemen. Is de staaf op het punt uit te glijden in de zin der draaiing van  $MB$  naar  $MA$ , dan vallen de wrijvingskrachten  $fN_1$  en  $fN_2$  (waarbij  $N_1$  en  $N_2$  positief ondersteld worden, dus naar  $M$  toe) in de zin der draaiing van  $MA$  naar  $MB$ . Dit geeft de vergelijkingen (zie voor de notatie 44):

$$(N_1 + N_2) \frac{a}{r} + f(-N_1 + N_2) \frac{l}{r} - mg \cos \varphi = 0,$$

$$(N_1 - N_2) \frac{l}{r} + f(N_1 + N_2) \frac{a}{r} - mg \sin \varphi = 0,$$

$$f(N_1 + N_2)r - mga \sin \varphi = 0.$$

Hieruit vindt men:

$$(1 + f^2)(N_1 + N_2)a = mgr(\cos \varphi + f \sin \varphi),$$

$$(1 + f^2)(N_1 - N_2)l = mgr(\sin \varphi - f \cos \varphi).$$

Eliminatie van  $N_1 + N_2$  geeft:

$$(a^2 - l^2 f^2) \text{tg } \varphi = r^2 f.$$

Uit het gegevene volgt, dat  $f < \frac{a}{l}$  is, zodat men een positieve waarde van  $\text{tg } \varphi$ , dus een scherpe hoek  $\varphi$  vindt. Neemt men  $\varphi$  groter, dan wordt het evenwicht verbroken. Voor de gevonden waarde van  $\varphi$  geldt:

$$N_1 + N_2 = \frac{mga}{rf} \sin \varphi, \quad N_1 - N_2 = \frac{mgl}{r} \sin \varphi.$$

Hieruit vindt men:

$$N_1 = mg \frac{a + lf}{2rf} \sin \varphi, \quad N_2 = mg \frac{a - lf}{2rf} \sin \varphi.$$

Wegens  $lf < a$  vindt men positieve waarden van  $N_1$  en  $N_2$ , zodat bij de wrijvingskrachten de tekens op juiste wijze genomen zijn.

48. De rechten, langs welke de totale drukken in  $A$  en  $B$  vallen, vindt men uit  $AM$  resp.  $BM$  door een hoek  $\alpha$  om  $A$  resp.  $B$  te draaien in de zin der draaiing van  $MB$  naar  $MA$ . Is  $S$  het snijpunt der werklijnen van de totale drukken, dan is van driehoek  $ABS$  bekend:

$$AB = 2l, \quad \angle BAS = \theta - \alpha, \quad \angle SBA = \theta + \alpha.$$

Men kan dus een driehoek  $A'B'S'$  construeren, die met driehoek  $ABS$  congruent is. We doen dit door op de cirkel de punten  $A'$  en  $B'$  zo aan te nemen, dat  $A'B' = 2l$  is. Door  $MA'$  en  $MB'$  een hoek  $\alpha$  om  $A'$  resp.  $B'$  te draaien, vindt men de rechten  $A'S'$  en  $B'S'$ . Vervolgens verbinden we  $S'$  met het midden  $Z'$  van  $A'B'$ . We draaien nu de figuur zodanig om  $M$ , dat  $Z'$  verticaal onder  $S'$  komt (daar de evenwichtsvoorwaarde luidt, dat de beide totale drukken en het gewicht door één punt gaan). Komt  $A'$  daarbij in  $A$  en  $B'$  in  $B$ , dan is  $AB$  de stand van de staaf, waarbij deze op het punt is uit te glijden.

49.\* De hoek  $\varphi$  wordt daaruit gevonden, dat:

$$\angle BZS = 90^\circ - \varphi$$

is. Men heeft dus (met de notatie van 47 en 48):

$$\frac{\cos \varphi}{BS} = \frac{\sin \angle ZSB}{l} = \frac{\sin(90^\circ + \varphi - \theta - \alpha)}{l} = \frac{\cos(\varphi - \theta - \alpha)}{l},$$

$$\frac{BS}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{2l}{\sin \angle ASB} = \frac{2l}{\sin(180^\circ - 2\theta)} = \frac{2l}{\sin 2\theta}.$$

Door vermenigvuldiging vindt men hieruit:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \sin 2\theta &= 2 \cos(\varphi - \theta - \alpha) \sin(\theta - \alpha) = \\ &= \sin(\varphi - 2\alpha) + \sin(2\theta - \varphi), \end{aligned}$$

dus  $\sin(\varphi - 2\alpha) = \sin \varphi \cos 2\theta$ , dus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 2\theta} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta}.$$

Wegens  $\cos \theta = \frac{l}{r}$  en  $\operatorname{tg} \alpha = f$  wordt dit:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r^2 f}{r^2 - l^2(f^2 + 1)} = \frac{r^2 f}{a^2 - l^2 f^2}.$$

### C. KATROLLEN-VRAAGSTUKKEN.

\*50. We kunnen de beide lichamen als materiële punten behandelen, als hun zwaartepunten zich in de beginstand bevinden in de verlengden der koorden, waaraan de lichamen zijn opgehangen. Die zwaartepunten bewegen zich dan langs verticale rechten en de afmetingen der lichamen spelen geen rol.

Als coördinaat voeren we in de daling  $x$  van het lichaam  $M$  (tevens de stijging van het lichaam  $m$ ). De hoeksnelheid van de katrol is  $\frac{\dot{x}}{R}$ . Is  $S$  de spanning in het deel van het koord, waaraan  $M$  hangt, en  $s$  de spanning in het deel, waaraan  $m$  hangt, dan is:

$$Mg - S = M\ddot{x}, \quad s - mg = m\ddot{x}, \quad (S - s)R = I \frac{\ddot{x}}{R}.$$

Hieruit volgt:

$$\ddot{x} = g \frac{(M - m)R^2}{(M + m)R^2 + I}, \quad S = Mg \frac{2mR^2 + I}{(M + m)R^2 + I},$$

$$s = mg \frac{2MR^2 + I}{(M + m)R^2 + I}.$$

Iets sneller vindt men de constante versnelling  $\ddot{x}$  met:

$$L + P = L_0 + P_0.$$

Dit geeft:

$$\frac{1}{2}(M + m)x^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = (M - m)gx.$$

Door te fluxioneren en door  $\dot{x}$  te delen, vindt men:

$$\left(M + m + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x} = (M - m)g.$$

51. Nu is  $I = \frac{1}{2}m'R^2$ , dus:

$$\ddot{x} = 2g \frac{M - m}{2M + 2m + m'}, \quad S = Mg \frac{4m + m'}{2M + 2m + m'},$$

$$s = mg \frac{4M + m'}{2M + 2m + m'}.$$

Uit  $m < M$  volgt, dat  $s < S$  is, zodat blijkens het gegevene  $S = 2s$  is, dus:

$$Mm' = 4Mm + 2mm'.$$

Uit  $\ddot{x} = \frac{1}{2}g$  volgt:

$$6m + m' = 2M.$$

Eliminatie van  $M$  voert tot  $m'^2 + 2mm' - 24m^2 = 0$ . Hieruit volgt:

$$m' = 6m, \quad M = 6m.$$

\*52. Volgens 50 zijn de spanningen  $S$  en  $s$  in de delen van het koord, waaraan de lichamen  $p$  resp.  $q$  hangen (daar de opgehangen katrol zich niet beweegt):

$$S = pg \frac{2qR^2 + i}{(p+q)R^2 + i}, \quad s = qg \frac{2pR^2 + i}{(p+q)R^2 + i}.$$

In het deel van het koord, waaraan de katrol hangt, is de spanning:

$$S + s + mg = g \left\{ \frac{4pqR^2 + (p+q)i}{(p+q)R^2 + i} + m \right\}.$$

In het andere deel van dit koord is de spanning  $Mg$ . Daar beide spanningen gelijk zijn, heeft men:

$$M = \frac{4pqR^2 + (p+q)i}{(p+q)R^2 + i} + m.$$

De straal en het traagheidsmoment van de niet draaiende vaste katrol zijn onverschillig.

53. Als coördinaten voeren we in de lengtevermeerdering  $x$  van dat deel van het tweede koord, waaraan het lichaam  $p$  hangt, en de lengtevermeerdering  $y$  van het deel van het eerste koord, waaraan het lichaam  $M$  hangt; gaat dit lichaam naar boven, dan is  $y$  als negatief te beschouwen. De versnellingen der lichamen  $p$ ,  $q$ ,  $m$  en  $M$ , positief gerekend naar beneden, zijn resp.  $\ddot{x} - \ddot{y}$ ,  $-\ddot{x} - \ddot{y}$ ,  $-\ddot{y}$  en  $\ddot{y}$ . Door voor de lichamen  $p$ ,  $q$ ,  $M$  en de opgehangen katrol een vergelijking in verticale richting toe te passen en bovendien de momentenstelling voor ieder der beide katrollen, vindt men, als de spanningen in de koorden, waaraan de lichamen  $p$ ,  $q$ ,  $M$  en de opgehangen katrol hangen, resp.  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $S$  en  $s$  zijn:

$$\begin{aligned} p(\ddot{x} - \ddot{y}) &= pg - s_1, & M\ddot{y} &= Mg - S, \\ -q(\ddot{x} + \ddot{y}) &= qg - s_2, & -m\ddot{y} &= mg + s_1 + s_2 - s, \\ \frac{1}{2}m\ddot{x} &= s_1 - s_2, & \frac{1}{2}m\ddot{y} &= S - s. \end{aligned}$$

Eliminatie van  $S$  en  $s$  uit de drie vergelijkingen rechts geeft:

$$(M + \frac{3}{2}m)\ddot{y} = (M - m)g - s_1 - s_2.$$

Verder voert eliminatie van  $s_1$  en  $s_2$  (oplossen uit de eerste twee vergelijkingen links enz.) tot:

$$(p + q + \frac{1}{2}m)\ddot{x} + (q - p)\ddot{y} = (p - q)g,$$

$$(q - p)\ddot{x} + (p + q + M + \frac{3}{2}m)\ddot{y} = (M - m - p - q)g.$$

Hieruit  $\ddot{x}$  en  $\ddot{y}$  oplossend, vindt men:

$$\ddot{x} = 2g \frac{(p - q)(4M + m)}{4(p + q)(M + 2m) + 16pq + m(2M + 3m)},$$

$$\ddot{y} = 2g \frac{(p + q)(2M - 3m) - 8pq + m(M - m)}{4(p + q)(M + 2m) + 16pq + m(2M + 3m)}.$$

Opmerking. Voor de verschillende spanningen vindt men:

$$s_1 = pg \frac{(4M + m)(4q + m)}{4(p + q)(M + 2m) + 16pq + m(2M + 3m)},$$

$$s_2 = qg \frac{(4M + m)(4p + m)}{4(p + q)(M + 2m) + 16pq + m(2M + 3m)},$$

$$S = Mg \frac{32pq + 14m(p + q) + 5m^2}{4(p + q)(M + 2m) + 16pq + m(2M + 3m)},$$

$$s = (4M + m)g \frac{8pq + 3m(p + q) + m^2}{4(p + q)(M + 2m) + 16pq + m(2M + 3m)}.$$

54.\* Dezelfde notatie als in 53, maar nu is  $S = s$ . Men krijgt de vergelijkingen:

$$p(\ddot{x} - \ddot{y}) = pg - s_1, \quad -m\ddot{y} = mg + s_1 + s_2 - S,$$

$$-q(\ddot{x} + \ddot{y}) = qg - s_2, \quad \frac{1}{2}m\ddot{x} = s_1 - s_2,$$

$$(p + q + m)\ddot{y} = (p + q + m)g - S.$$

Eliminatie van  $S$  voert tot:

$$(p + q + 2m)\ddot{y} = (p + q)g - s_1 - s_2,$$

waarna eliminatie van  $s_1$  en  $s_2$  tot:

$$(p + q + \frac{1}{2}m)\ddot{x} + (q - p)\ddot{y} = (p - q)g,$$

$$(q - p)\ddot{x} + 2(p + q + m)\ddot{y} = 0$$

voert. Door oplossing van  $\ddot{x}$  en  $\ddot{y}$  vindt men:

$$\ddot{x} = g \frac{2(p - q)(p + q + m)}{p^2 + q^2 + 6pq + 3m(p + q) + m^2},$$

$$\ddot{y} = g \frac{(p - q)^2}{p^2 + q^2 + 6pq + 3m(p + q) + m^2}.$$

Daar  $\ddot{y} > 0$  is, heeft het lichaam  $M$  een benedenwaarts gerichte versnelling. De versnelling van  $p$  is:

$$\ddot{x} - \ddot{y} = g \frac{(p - q)(p + 3q + 2m)}{p^2 + q^2 + 6pq + 3m(p + q) + m^2}.$$

Daar (blijkens  $p > q$ )  $\ddot{x} - \ddot{y} > \ddot{y}$  is, gaat  $p$  sneller naar beneden dan  $M$ . De versnelling van  $q$  is, blijkens het voorgaande, naar boven gericht en in absolute waarde groter dan de versnelling van  $p$ . Dit wordt daardoor bevestigd, dat de versnelling van  $q$ , positief gerekend naar beneden, gelijk is aan:

$$-(\ddot{x} + \ddot{y}) = -g \frac{(p - q)(3p + q + m)}{p^2 + q^2 + 6pq + 3m(p + q) + m^2}.$$

55.\* De versnelling van het gemeenschappelijke zwaartepunt der lichamen  $p$ ,  $q$  en  $p + q + m$  is (blijkens 54) gelijk aan:

$$\frac{p(\ddot{x} - \ddot{y}) - q(\ddot{x} + \ddot{y}) - m\ddot{y}}{p + q + m} = \frac{g(p - q)^2}{p^2 + q^2 + 6pq + 3m(p + q) + m^2},$$

dus aan de versnelling  $\ddot{y}$  van  $p + q + m$ . De gelijkheid van beide versnellingen is trouwens niets anders dan de in 54 gevonden vergelijking:

$$(q - p)\ddot{x} + 2(p + q + m)\ddot{y} = 0.$$

De gelijkheid van beide versnellingen beredeneert men aldus. Het stelsel der lichamen  $p$ ,  $q$  en  $m$  heeft dezelfde massa als het lichaam  $p + q + m$ . Ook de daarop werkende zwaartekrachten (gewichten) zijn bij beide stelsels dezelfde. De enige verdere daarop werkende uitwendige krachten zijn de spanningen in de beide delen van het koord, dat over de vaste katrol loopt. Beide spanningen zijn gelijk, als het traagheidsmoment van de vaste katrol verwaarloosd wordt. De vectorsommen der op beide stelsels werkende uitwendige krachten zijn dus gelijk (onverschillig welk traagheidsmoment de opgehangen katrol heeft), zodat de versnellingen der zwaartepunten van beide stelsels dezelfde zijn. Daar de levende kracht toeneemt, dus de potentiële energie afneemt, zijn de gelijke versnellingen naar beneden gericht. Daar de bewegende katrol met dezelfde versnelling naar boven gaat, gaat het lichaam  $p$  met een grotere versnelling naar beneden en  $q$  met een nog grotere versnelling naar boven.

56. De stand van de toestel is bepaald door één coördinaat. Daarvoor nemen we de verplaatsing  $x$  van de losse katrol, positief gerekend naar beneden. De verplaatsing van het lichaam  $m$  is dan  $2x$ , positief gerekend naar boven. De spanning in het deel van het koord, waaraan het lichaam  $m$  hangt, noemen we  $s$ , de spanning in het deel tussen vaste en losse katrol noemen we  $s_1$  en de spanning in het deel van het koord, dat aan de balk bevestigd is, noemen we  $s_2$ . Men vindt (daar  $\frac{2\ddot{x}}{R}$  de hoekversnelling van de vaste katrol en  $\frac{\ddot{x}}{R}$  die van de losse katrol is):

$$2m\ddot{x} = s - mg, \quad \frac{2I}{R^2}\ddot{x} = s_1 - s,$$

$$M\ddot{x} = Mg - s_1 - s_2, \quad \frac{i}{R^2}\ddot{x} = s_2 - s_1.$$

Hieruit vindt men:

$$\ddot{x} = gR^2 \frac{M - 2m}{(M + 4m)R^2 + 4I + i}.$$

Sneller geraakt men tot dit resultaat uit:

$$L = \frac{1}{2} \left( M + 4m + \frac{4I + i}{R^2} \right) \dot{x}^2, \quad P = g(M - 2m)x.$$

Opmerkingen. Voor de spanningen vindt men:

$$s = mg \frac{3MR^2 + 4I + i}{(M + 4m)R^2 + 4I + i},$$

$$s_1 = g \frac{3mMR^2 + 2MI + mi}{(M + 4m)R^2 + 4I + i},$$

$$s_2 = g \frac{3mMR^2 + 2MI + Mi - mi}{(M + 4m)R^2 + 4I + i}.$$

57. Is  $a$  de versnelling van de aap en  $S$  de spanning van het koord, dan is:

$$ma = mg - S, \quad 0 = Mg - S.$$

Hieruit volgt  $a = g \frac{m - M}{m}$ . De aap moet dus naar boven of naar beneden klimmen, al naar gelang  $m < M$  of  $m > M$  is.

58.\* Is  $x$  de verplaatsing van  $M$ , positief gerekend naar beneden,  $S$  de spanning in het deel van het koord, waaraan het lichaam



$M$  hangt, en  $s$  de spanning in het deel, waaraan de aap hangt, dan is:

$$Mg - S = M\ddot{x}, \quad mg - s = m(a - \ddot{x}), \quad (S - s)R^2 = I\ddot{x}.$$

Hieruit vindt men:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= R^2 \frac{(M - m)g + ma}{(M + m)R^2 + I}, \\ S &= M \frac{(2mR^2 + I)g - maR^2}{(M + m)R^2 + I}, \\ s &= m \frac{(2MR^2 + I)g - a(MR^2 + I)}{(M + m)R^2 + I}, \end{aligned}$$

59.\* Voor  $m = M$  en  $I = 0$  gaat de in 58 voor  $\ddot{x}$  gevonden waarde over in  $\ddot{x} = \frac{1}{2}a$ . Bijgevolg is  $a - \ddot{x} = \ddot{x}$ , zodat aap en lichaam dezelfde versnelling hebben. Zonder berekening blijkt dit aldus. Wegens  $I = 0$  zijn de spanningen in beide delen van het koord dezelfde, zodat aap en lichaam dezelfde versnelling krijgen. Of de versnelling van de aap constant of veranderlijk is, is onverschillig.

60.\* Zij  $y$  de daling van het lichaam  $2m + \mu$  ( $y$  negatief in geval van stijging) en  $x$  de lengtevermeerdering van het deel van het tweede koord waaraan het lichaam  $m$  hangt ( $x$  negatief in geval van lengtevermindering). Zij  $S$  de spanning in beide delen van het eerste koord,  $s_1$  de spanning in het deel van het tweede koord, waaraan de aap hangt, en  $s_2$  de spanning in het andere deel van het koord. Dan is:

$$\begin{aligned} (2m + \mu)g - S &= (2m + \mu)\ddot{y}, & mg - s_2 &= m(\ddot{x} - \ddot{y}), \\ \mu g + s_1 + s_2 - S &= -\mu\ddot{y}, & mg - s_1 &= m(a - \ddot{x} - \ddot{y}), \\ R^2(s_2 - s_1) &= i\ddot{x}. \end{aligned}$$

Hieruit vindt men:

$$\begin{aligned} 2mg - s_1 - s_2 &= 2(m + \mu)\ddot{y}, & 2mg - s_1 - s_2 &= m(a - 2\ddot{y}), \\ s_1 - s_2 &= m(2\ddot{x} - a), \end{aligned}$$

$$\ddot{y} = \frac{ma}{2(2m + \mu)}, \quad \ddot{x} = \frac{mR^2 a}{2mR^2 + i}.$$

De versnellingen van het lichaam  $m$  en van de aap, positief gerekend naar beneden, zijn resp.:

$$\ddot{x} - \ddot{y} = ma \frac{2(m + \mu)R^2 - i}{2(2m + \mu)(2mR^2 + i)},$$

$$a - \ddot{x} - \ddot{y} = a \frac{2m(m + \mu)R^2 + (3m + 2\mu)i}{2(2m + \mu)(2mR^2 + i)}.$$

61.\* De versnelling van het genoemde gemeenschappelijke zwaartepunt is volgens het in 60 gevondene:

$$\begin{aligned} & \frac{m(\ddot{x} - \ddot{y}) + m(a - \ddot{x} - \ddot{y}) - \mu \ddot{y}}{2m + \mu} = \\ & = \frac{ma}{2m + \mu} - \ddot{y} = \frac{ma}{2(2m + \mu)} = \ddot{y}. \end{aligned}$$

De gelijkheid van beide versnellingen volgt ook onmiddellijk daaruit, dat beide stelsels gelijke massa's hebben en daarop gelijke uitwendige krachten (gewichten en spanningen  $S$ ) werken.

*Opmerking.* Wordt ook het traagheidsmoment van de bewegende katrol verwaarloosd ( $i = 0$ ), dan zijn ook de versnellingen van het lichaam  $m$  en van de aap gelijk, nl.  $a \frac{m + \mu}{2(2m + \mu)}$ . Ook zonder berekening blijkt dit daaruit, dat nu  $s_1 = s_2$  is. Wordt bovendien de massa van de bewegende katrol verwaarloosd ( $\mu = 0$ ), dan worden de versnellingen van de beide lichamen en van de aap dezelfde, nl.  $\frac{1}{4}a$ ; bevinden de twee lichamen en de aap zich aanvankelijk op dezelfde hoogte, dan blijven ze dus onderling op dezelfde hoogte. Ook dit is zonder berekening in te zien.

### Katrollen-vraagstukken met wrijving.

62. Zijn  $S$  en  $s$  de spanningen in de delen van het koord, waaraan de lichamen  $M$  resp.  $m$  hangen, dan is de (verticaal naar boven gerichte) totale druk, die de tappen op de as uitoefent, gelijk aan  $S + s + \mu g$ . Deze druk maakt met de straal van het raakpunt van tappen en as een hoek  $\beta$ , die hoogstens gelijk is aan de wrijvingshoek  $\alpha$ . In geval van evenwicht is  $S = Mg$  en  $s = mg$ . De momentenstelling om het zwaartepunt  $Z$  van de katrol (d.w.z. om een as door  $Z$  loodrecht op het vlak van de katrol) levert:

$$SR - sR - (S + s + \mu g)r \sin \beta = 0,$$

dus (wegens  $S = Mg$  en  $s = mg$ ):

$$M(R - r \sin \beta) = m(R + r \sin \beta) + \mu r \sin \beta.$$

Tot deze vergelijking geraakt men ook door de momentenstelling op het raakpunt van tappen en as toe te passen. Dit levert nl.:

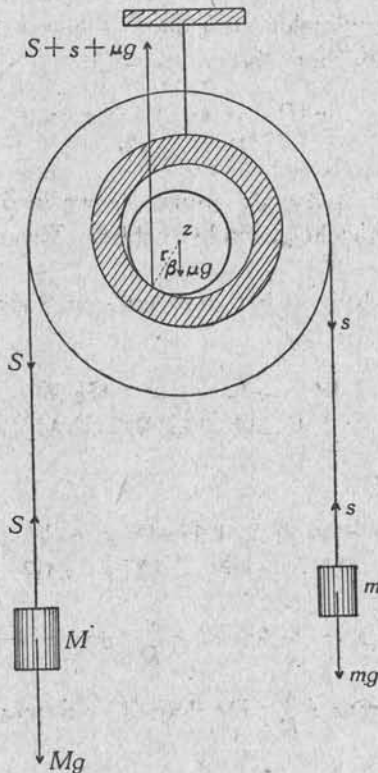
$$S(R - r \sin \beta) - s(R + r \sin \beta) - mgr \sin \beta = 0.$$

Wegens  $\beta \leq \alpha$  vindt men:

$$(M - m)R = (M + m + \mu)r \sin \beta \leq (M + m + \mu)r \sin \alpha,$$

dus:

$$M \leq \frac{m(R + r \sin \alpha) + \mu r \sin \alpha}{R - r \sin \alpha}.$$



63. De hoek  $\beta$  van 62 is nu gelijk aan de wrijvingshoek  $\alpha$ . Het raakpunt van tappen en as ligt aan dezelfde kant van het zwaartepunt  $Z$  van de katrol als het koord, waaraan het lichaam  $M$  hangt. Met de notatie van 62 heeft men, als  $x$  de daling van het lichaam  $M$  is (de momentenstelling op  $Z$  toepassend):

$$\begin{aligned} Mg - S &= M\ddot{x}, & mg - s &= -m\ddot{x}, \\ (S - s)R^2 - (S + s + \mu g)Rr \sin \alpha &= I\ddot{x}. \end{aligned}$$

Hieruit vindt men:

$$\ddot{x} = gR \frac{(M - m)R - (M + m + \mu)r \sin \alpha}{I + (M + m)R^2 - (M - m)Rr \sin \alpha},$$

$$S = Mg \frac{I + 2mR^2 + (2m + \mu)Rr \sin \alpha}{I + (M + m)R^2 - (M - m)Rr \sin \alpha},$$

$$s = mg \frac{I + 2MR^2 - (2M + \mu)Rr \sin \alpha}{I + (M + m)R^2 - (M - m)Rr \sin \alpha}.$$

Naar behoren gaan de uitdrukkingen voor  $S$  en  $s$  in elkaar over door  $M$  en  $m$  te verwisselen en  $\alpha$  door  $-\alpha$  te vervangen. De versnelling  $\ddot{x}$  valt positief uit, als:

$$M > \frac{m(R + r \sin \alpha) + \mu r \sin \alpha}{R - r \sin \alpha}$$

is, dus als  $M$  groter is dan de grens, die we in 62 als bovengrens voor geval van evenwicht gevonden hebben. Tevens is dan  $s > 0$ .

64.\* De totale druk in het raakpunt van tappen en as is volgens 63:

$$S + s + \mu g = g \frac{I(M + m + \mu) + 4MmR^2 + \mu(M + m)R^2}{I + (M + m)R^2 - (M - m)Rr \sin \alpha}.$$

De wrijving is dus:

$$W = g \frac{I(M + m + \mu) + 4MmR^2 + \mu(M + m)R^2}{I + (M + m)R^2 - (M - m)Rr \sin \alpha} \sin \alpha.$$

De draaiingshoek van de katrol is  $\frac{x}{R}$ , dus de bij de wrijving behorende afgelegde weg  $r \frac{x}{R}$ . De door de wrijving verrichte arbeid is dus:

$$-W \frac{rx}{R} = -\frac{grx}{R} \cdot \frac{I(M + m + \mu) + 4MmR^2 + \mu(M + m)R^2}{I + (M + m)R^2 - (M - m)Rr \sin \alpha} \sin \alpha.$$

Hiertoe geraakt men ook uit de (negatieve) vermeerdering van  $L + P$ . De door de wrijving verrichte arbeid is  $L + P$ , als men  $P$  in de beginstand 0 noemt. Stellen we de constante waarde van  $\ddot{x}$  door  $a$  voor, dan volgt uit  $\ddot{x} = a$ , in verband met  $\dot{x} = 0$  voor  $x = 0$ , dat  $\frac{1}{2} \dot{x}^2 = ax$  is. Men heeft dus:

$$\begin{aligned}
 L + P &= \frac{1}{2}(M + m)x^2 + \frac{1}{2}I \frac{x^2}{R^2} - Mgx + mgx = \\
 &= \frac{x}{R^2} \{ (MR^2 + mr^2 + I)a + (m - M)R^2g \} = \\
 &= -\frac{grx}{R} \cdot \frac{I(M + m + \mu) + 4MmR^2 + \mu(M + m)R^2}{I + (M + m)R^2 - (M - m)Rr \sin \alpha} \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

65.\* De hoek, die de straal van het raakpunt van as en ring met de verticaal maakt, noemen we bij de vaste katrol  $\beta$  en bij de losse katrol  $\gamma$ , positief gerekend naar de kant van het koord, waaraan het lichaam  $m$  hangt. De spanningen noemen we als in 56. In geval van evenwicht geldt, daar  $s = mg$  is (de momentenstelling op de raakpunten toepassend):

$$\begin{aligned}
 mg(R - r \sin \beta) - s_1(R + r \sin \beta) - \mu gr \sin \beta &= 0, \\
 s_1(R - r \sin \gamma) - s_2(R + r \sin \gamma) + \mu gr \sin \gamma &= 0, \\
 s_1 + s_2 - (M + \mu)g &= 0.
 \end{aligned}$$

Uit de laatste twee vergelijkingen  $s_1$  en  $s_2$  oplossend, vindt men:

$$s_1 = g \frac{M(R + r \sin \gamma) + \mu R}{2R}, \quad s_2 = g \frac{M(R - r \sin \gamma) + \mu R}{2R}.$$

Dit voert tot:

$$m = \frac{M(R + r \sin \beta)(R + r \sin \gamma) + \mu R(R + 3r \sin \beta)}{2R(R - r \sin \beta)}.$$

Wegens  $0 \leq |\beta| \leq \alpha$  en  $0 \leq |\gamma| \leq \alpha$  is de voorwaarde voor evenwicht:

$$\begin{aligned}
 \frac{M(R - r \sin \alpha)^2 + \mu R(R - 3r \sin \alpha)}{2R(R + r \sin \alpha)} &\leq m \leq \\
 &\leq \frac{M(R + r \sin \alpha)^2 + \mu R(R + 3r \sin \alpha)}{2R(R - r \sin \alpha)}.
 \end{aligned}$$

*Opmerkingen.* 1. Is de ondergrens voor  $m$  negatief, dan moet men deze door 0 vervangen. Overigens komt het negatief worden van de ondergrens praktisch niet voor, daar allicht  $3r \sin \alpha < R$  is, waarbij nog komt, dat praktisch  $\mu$  klein is ten opzichte van  $M$ .

2. De ondergrens voor  $m$  is  $< \frac{1}{2}(M + \mu)$ , de bovengrens is  $> \frac{1}{2}(M + \mu)$ . Is er weinig wrijving ( $r \sin \alpha$  klein ten opzichte van  $R$ ), dan zijn beide grenzen weinig van  $\frac{1}{2}(M + \mu)$  verschillend.

3. Ligt  $m$  tussen beide grenzen, dan zijn  $\beta$  en  $\gamma$  niet bepaald. Er zijn dan oneindig veel waarden, die men aan  $\beta$  kan toekennen, waarna men  $\sin \gamma$  uit een lineaire vergelijking kan berekenen. Men moet aan  $\beta$  een zodanige waarde toekennen, dat  $|\sin \beta| \leq \sin \alpha$  is en men voor  $\sin \gamma$  een waarde vindt, die aan  $|\sin \gamma| \leq \sin \alpha$  voldoet. Zulk een stel waarden van  $\beta$  en  $\gamma$  vindt men o.a. door  $\gamma = \beta$  te nemen, waarna men  $\sin \beta$  heeft op te lossen uit de vierkantsvergelijking:

$$Mr^2 \sin^2 \beta + (2M + 3\mu + 2m)Rr \sin \beta + (M + \mu - 2m)R^2 = 0.$$

Ligt  $m$  tussen de gevonden grenzen, dan heeft de vierkantsvergelijking één tussen  $-\sin \alpha$  en  $\sin \alpha$  gelegen wortel  $\sin \beta$ .

Een onbepaaldheid der wrijvingen doet zich in geval van evenwicht (als het toestel niet op het punt is in beweging te komen) steeds voor, als er in meer dan één punt wrijving optreedt.

66.\* Gaat het lichaam  $m$  naar beneden (met een versnelling  $2\ddot{x}$ , als  $x$  de stijging van de losse katrol is), dan is (met de notatie van 65)  $\beta = \gamma = \alpha$ . Noteren we de spanningen als in 65 dan is (nu de momentenstelling op de zwaartepunten der katrollen toepassend):

$$\begin{aligned} mg - s &= 2m\ddot{x}, & (M + \mu)g - s_1 - s_2 &= - (M + \mu)\ddot{x}, \\ (s - s_1)R^2 - (s + s_1 + \mu g)Rr \sin \alpha &= 2I\ddot{x}, \\ (s_1 - s_2)R^2 - MgRr \sin \alpha &= I\ddot{x}. \end{aligned}$$

Door  $s$  uit de eerste en  $s_1$  uit de tweede en vierde vergelijking op te lossen, uitgedrukt in  $\ddot{x}$ , vindt men:

$$\begin{aligned} s &= mg - 2m\ddot{x}, \\ s_1 &= \frac{(M + \mu)R^2g + MRrg \sin \alpha + (I + MR^2 + \mu R^2)\ddot{x}}{2R^2}. \end{aligned}$$

Door dit in de derde vergelijking te substitueren, vindt men:

$$\ddot{x} = Rg \frac{2mR(R - r \sin \alpha) - M(R + r \sin \alpha)^2 - \mu R(R + 3r \sin \alpha)}{4mR^2(R - r \sin \alpha) + (M + \mu)R^2(R + r \sin \alpha) + I(5R + r \sin \alpha)}.$$

Het geval, dat het lichaam  $m$  naar beneden gaat, doet zich alleen voor als de voor  $\ddot{x}$  aangegeven uitdrukking positief is, dus als  $m$  groter is dan de in 65 gevonden bovengrens van  $m$  in geval van evenwicht.

67.\* Is  $x$  de verplaatsing van de losse katrol, positief gerekend naar beneden, dan heeft men in de formules van 66 slechts overal

$x$  door  $-x$  en  $a$  door  $-\alpha$  te vervangen. Het genoemde geval doet zich alleen voor, als  $m$  kleiner is dan de in 65 voor het geval van evenwicht gevonden ondergrens van  $m$ .

68.\* De arbeid door de tapwrijving op de vaste katrol verricht is:

$$-(s + s_1 + \mu g) \frac{2rx}{R} \sin \alpha,$$

waarin  $s$  en  $s_1$  in het geval, dat het lichaam  $m$  naar beneden gaat, waarden hebben, die uit het in 66 gevondene zijn af te leiden. Voor het geval, dat het lichaam  $m$  naar boven gaat, heeft men  $x$  en  $a$  door  $-x$  resp.  $-\alpha$  te vervangen (zie 67). De totale druk, die de losse katrol en de bijbehorende ring op elkaar uitoefenen, is in het geval, dat het lichaam  $m$  naar beneden gaat, gelijk aan  $M(g + \ddot{x})$ , zodat de wrijving is  $M(g + \ddot{x}) \sin \alpha$ . De arbeid, die de tapwrijving op de losse katrol verricht, te zamen met de arbeid, die de reactie dier wrijving verricht op de ring, waaraan het lichaam  $M$  hangt, is gelijk aan:

$$-M(g + \ddot{x}) \frac{rx}{R} \sin \alpha.$$

De som van alle wrijvingsarbeiden kan ook gevonden worden als  $L + P$ , als in de beginstand  $P = 0$  is.

### Katrollen-vraagstukken met luchtweerstand.

69. Men heeft:

$$Mg - S - Kx^2 = M\ddot{x}, \quad s - mg - kx^2 = m\ddot{x}, \quad S - s = \frac{1}{2} \mu \ddot{x}.$$

Eliminatie van  $S$  en  $s$  voert tot:

$$(M + m + \frac{1}{2} \mu) \ddot{x} + (K + k)x^2 = (M - m)g.$$

Stelt men  $\ddot{x}^2 = w$ , dan wordt dit:

$$(2M + 2m + \mu) \frac{dw}{dx} + 4(K + k)w = 4(M - m)g.$$

In verband met  $w = 0$  voor  $x = 0$  volgt hieruit:

$$\ddot{x}^2 = \frac{M - m}{K + k} g \left\{ 1 - e^{-\frac{4(K + k)}{2M + 2m + \mu} x} \right\}.$$

70.\* De arbeid verricht door de op het lichaam  $M$  werkende luchtweerstand is:

$$\begin{aligned}
 -\int_0^x K \dot{u}^2 du &= -K \frac{M-m}{K+k} g \int_0^x \left\{ 1 - e^{-\frac{4(K+k)}{2M+2m+\mu} u} \right\} du = \\
 &= -K \frac{M-m}{K+k} g \left\{ x - \frac{2M+2m+\mu}{4(K+k)} \left( 1 - e^{-\frac{4(K+k)}{2M+2m+\mu} x} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

waarbij onder het integraalteken  $x$  door  $u$  vervangen is. De op het lichaam  $m$  werkende luchtweerstand vindt men door  $K$  en  $k$  te verwisselen.

*Opmerking.* De som van beide arbeiden van de luchtweerstand is:

$$-(M-m) g \left\{ x - \frac{2M+2m+\mu}{4(K+k)} \left( 1 - e^{-\frac{4(K+k)}{2M+2m+\mu} x} \right) \right\}.$$

Deze totale weerstandsarbeid is ook te vinden als:

$$\begin{aligned}
 L + P &= \frac{1}{2}(M+m + \frac{1}{2}\mu)x^2 - (M-m)gx = \\
 &= (2M+2m+\mu) \frac{M-m}{4(K+k)} g \left\{ 1 - e^{-\frac{4(K+k)}{2M+2m+\mu} x} \right\} - (M-m)gx.
 \end{aligned}$$

71.\* Met de notatie van 63 heeft men:

$$\begin{aligned}
 Mg - S - Kx^2 &= M\ddot{x}, \quad s - mg - kx^2 = m\ddot{x}, \\
 (S-s)R - (S+s+\mu g)r \sin \alpha &= \frac{1}{2} \mu R \ddot{x}.
 \end{aligned}$$

Door eliminatie van  $S$  en  $s$  vindt men:

$$\begin{aligned}
 &\{ (M+m + \frac{1}{2}\mu)R - (M-m)r \sin \alpha \} \ddot{x} + \\
 &+ \{ (k+K)R + (k-K)r \sin \alpha \} x^2 = \\
 &= g \{ (M-m)R - (M+m+\mu)r \sin \alpha \}.
 \end{aligned}$$

Hieruit vindt men:

$$x^2 = g \frac{(M-m)R - (M+m+\mu)r \sin \alpha}{(k+K)R + (k-K)r \sin \alpha} \left\{ 1 - e^{-4x \frac{(k+K)R + (k-K)r \sin \alpha}{(2M+2m+\mu)R - 2(M-m)r \sin \alpha}} \right\}.$$



## D. BEWEGING VAN EEN BOL OF EEN BLOK OVER EEN HORIZONTALAAL OF EEN HELLEND VLAKE

Ook bij de vraagstukken van deze afdeling ziet men direct, dat alle bewegingen eenparig versneld zijn.

\*72. Zij  $\varphi$  de hoek, die de bol gedraaid is (in een zodanige zin, dat de snelheid van het punt van de bol, dat ogenblikkelijk raakpunt is, door de draaiing verkleind wordt). Dan is, als  $x$  de verplaatsing van het zwaartepunt van de bol is en  $N$  de normale druk, die het vlak op de bol uitoefent:

$$m\ddot{x} = -fN, \quad N - mg = 0, \quad \frac{2}{5} m r^2 \ddot{\varphi} = fNr,$$

dus  $\ddot{x} = -\frac{2}{7} fg$ ,  $r\ddot{\varphi} = \frac{5}{2} fg$ , dus in verband met de beginvoorwaarde ( $\dot{x} = v_0$ ,  $x = 0$ ,  $\varphi = 0$  voor  $t = 0$ ):

$$\dot{x} = v_0 - \frac{2}{7} fgt, \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2, \quad r\dot{\varphi} = \frac{5}{2} fgt.$$

De snelheid van het punt van de bol, dat raakpunt is (positief in de zin van  $v_0$ ) is:

$$v_A = \dot{x} - r\dot{\varphi} = v_0 - \frac{7}{2} fgt.$$

Als die snelheid 0 geworden is, gaat de bol zuiver rollend verder met constante snelheid. Wijst de index 1 het begin van het zuiver rollen aan, dan is:

$$t_1 = \frac{2v_0}{7fg}, \quad x_1 = \frac{5}{7} v_0 t_1, \quad x_1 = \frac{12v_0^2}{49fg}.$$

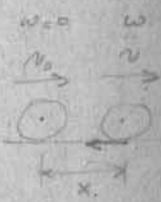
De arbeid, die de wrijving tot het ogenblik van zuiver rollen verricht heeft, is:

$$A = -\int_0^{t_1} fmg \int_0^{t_1} (v_0 - \frac{7}{2} fgt) dt = \\ = -fmg(v_0 t_1 - \frac{7}{4} fgt_1^2) = -\frac{1}{7} m v_0^2.$$

Men vindt die arbeid ook uit:

$$A = L_1 - L_0 = \frac{7}{10} m \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{7} m v_0^2.$$

Na het intreden van zuiver rollen is de wrijving 0, zodat na die tijd de wrijvingsarbeid 0 is.



$$x = \frac{dx}{dt} \rightarrow x = \int v dt$$

\*73. Zij  $\varphi$  de hoekverdraaiing van de bol en  $x$  de verplaatsing van  $Z$ , positief gerekend in een zin tegengesteld aan die der beginsnelheid van het punt van de bol, dat raakpunt is. Dan is:

$$m\ddot{x} = fN, \quad N - mg = 0, \quad \frac{2}{3} mr^2 \ddot{\varphi} = -fNr,$$

dus in verband met de beginvoorwaarde ( $\dot{x} = 0$ ,  $x = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega_0$  voor  $t = 0$ ):

$$\ddot{x} = fgt, \quad \dot{x} = \frac{1}{2} fgt^2, \quad r\dot{\varphi} = r\omega_0 - \frac{5}{2} fgt.$$

De snelheid van het punt van de bol, dat raakpunt is, positief gerekend in de zin van de beginwaarde dier snelheid, is:

$$r\dot{\varphi} - \dot{x} = r\omega_0 - \frac{7}{2} fgt.$$

Voor het begin van zuiver rollen, geldt:

$$t_1 = \frac{2r\omega_0}{7fg}, \quad \dot{x}_1 = \frac{2}{7} r\omega_0, \quad x_1 = \frac{2r^2\omega_0^2}{49fg}.$$

De wrijvingsarbeid tot het begin van zuiver rollen is:

$$\begin{aligned} A &= -fmg \int_0^{t_1} (r\omega_0 - \frac{7}{2} fgt) dt = \\ &= -fmg(r\omega_0 t_1 - \frac{7}{4} fgt_1^2) = -\frac{1}{7} mr^2 \omega_0^2. \end{aligned}$$

De wrijvingsarbeid vindt men ook aldus:

$$A = L_1 - L_0 = \frac{7}{10} m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{5} mr^2 \omega_0^2 = -\frac{1}{7} mr^2 \omega_0^2.$$

74. Zij  $x$  de verplaatsing van  $Z$  en  $\varphi$  de hoekverdraaiing van de bol, positief gerekend in de zin van  $\omega_0$ . De beginsnelheid van het punt van de bol, dat ogenblikkelijk raakpunt is, is  $v_0 - r\omega_0$ , positief gerekend in de zin van  $v_0$ . Is  $v_0 = r\omega_0$ , dan gaat de bol onmiddellijk zuiver rollen met de constante snelheid  $v_0$  van  $Z$ . Is  $v_0 \neq r\omega_0$ , dan is:

$$\ddot{x} = \mp fgt, \quad \frac{2}{3} r\ddot{\varphi} = \pm fgt,$$

waarbij de bovenste of de onderste tekens gelden, al naar gelang  $v_0 > r\omega_0$  of  $v_0 < r\omega_0$  is. In verband met de beginvoorwaarde heeft men:

$$\dot{x} = v_0 \mp fgt, \quad \dot{x} = v_0 t \mp \frac{1}{2} fgt^2, \quad r\dot{\varphi} = r\omega_0 \pm \frac{3}{2} fgt.$$

De snelheid van het punt van de bol, dat raakpunt is, positief gerekend in de zin van  $v_0$ , is:

$$\dot{x} - r\dot{\varphi} = v_0 - r\omega_0 \mp \frac{5}{2} fgt.$$

Voor het begin van zuiver rollen geldt:

$$t_1 = \pm \frac{2(v_0 - r\omega_0)}{5fg}, \quad x_1 = 1/5(3v_0 + 2r\omega_0),$$

$$x_1 = \pm \frac{2}{25fg} (4v_0 + r\omega_0)(v_0 - r\omega_0).$$

De zuiver rollende beweging is eenparig in de zin van  $v_0$ . De snelheid van  $Z$  bij het rollen is  $< v_0$  of  $> v_0$ , al naar gelang  $v_0 > r\omega_0$  of  $v_0 < r\omega_0$  is.

75.\* We nemen de verplaatsing  $x$  van  $Z$  en de draaiing  $\varphi$  positief in de zin van  $v_0$  resp.  $\omega_0$ . Dan is:

$$\dot{x} = v_0 - fgt, \quad x = v_0 t - 1/2 fgt^2, \quad r\dot{\varphi} = r\omega_0 - 3/2 fgt.$$

De snelheid van het punt van de bol, dat ogenblikkelijk raakpunt is, bedraagt:

$$\dot{x} + r\dot{\varphi} = v_0 + r\omega_0 - 5/2 fgt.$$

Voor het begin van zuiver rollen geldt:

$$t_1 = \frac{2(v_0 + r\omega_0)}{5fg}, \quad x_1 = 1/5(3v_0 - 2r\omega_0),$$

$$x_1 = \frac{2}{25fg} (4v_0 - r\omega_0)(v_0 + r\omega_0).$$

Is  $r\omega_0 < 3/2 v_0$ , dan heeft  $Z$  bij het zuiver rollen een snelheid in dezelfde zin als  $v_0$ . Het punt  $Z$  beweegt zich dan steeds in dezelfde zin, eerst vertraagd, daarna eenparig.  $Z$  komt dan niet in  $Z_0$  terug. Evenmin is er een tijdstip  $t_2$ , waarop  $Z$  in  $Z_0$  terug is, als  $r\omega_0 = 3/2 v_0$  is; op het tijdstip  $t_1 = \frac{v_0}{fg}$  komt de bol dan in het punt

$x_1 = \frac{v_0^2}{2fg}$  tot stilstand en blijft daarna in rust.

Is  $3/2 v_0 < r\omega_0 < 4v_0$ , dan is  $x_1 < 0$  en  $x_1 > 0$ . Dan wordt de snelheid van  $Z$  gelijk aan 0 voor  $t = \frac{v_0}{fg}$ , waarna  $Z$  terugkeert. Zuiver rollen treedt eerst op het latere tijdstip  $t_1$  in. Het punt  $Z_0$  is dan nog niet gepasseerd.  $Z$  komt in  $Z_0$ , nadat de bol gedurende een tijd:

$$-\frac{x_1}{x_1} = \frac{2(4v_0 - r\omega_0)(v_0 + r\omega_0)}{5fg(2r\omega_0 - 3v_0)}$$

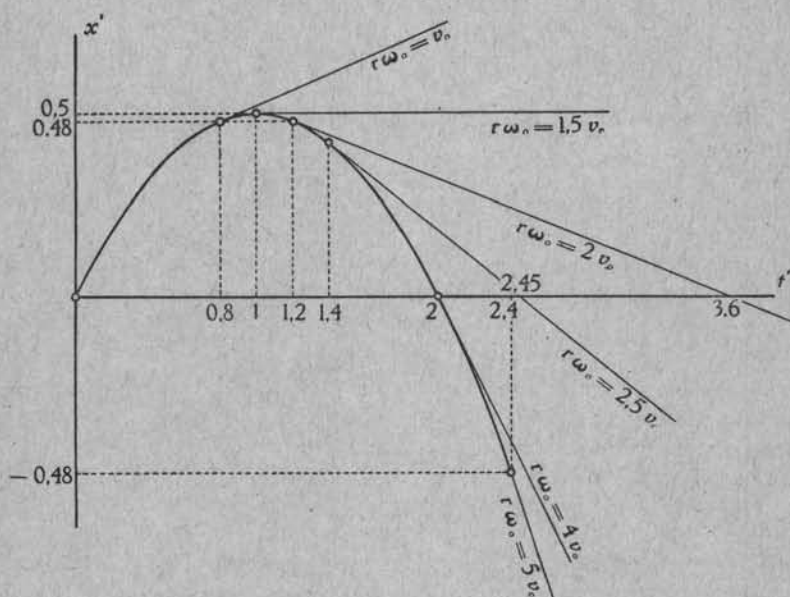
zuiver gerold heeft. Het tijdstip  $t_2$  (gerekend van het begin der beweging af), waarop  $Z$  in  $Z_0$  komt, is dus:

$$t_2 = \frac{2(v_0 + r\omega_0)}{5fg} + \frac{2(4v_0 - r\omega_0)(v_0 + r\omega_0)}{5fg(2r\omega_0 - 3v_0)} = \frac{2(v_0 + r\omega_0)^2}{5fg(2r\omega_0 - 3v_0)}$$

Is  $r\omega_0 = 4v_0$ , dan is  $Z$  juist in  $Z_0$  teruggekomen op het tijdstip  $t_1 = \frac{2v_0}{fg}$ , waarop het zuiver rollen begint.

Is  $r\omega_0 > 4v_0$ , dan is  $x_1 < 0$  en  $x_1 < 0$ . Op het tijdstip  $t_1$ , waarop het zuiver rollen begint, is  $Z$  reeds in  $Z_0$  teruggeweest. Het tijdstip, waarop  $Z$  in  $Z_0$  terug is, is dan  $t_2 = \frac{2v_0}{fg}$ .

76.\* Om eenvoudige getallen te krijgen, hebben we niet  $t$  en  $x$



op de assen uitgezet, maar de dimensieloze grootheden  $t' = \frac{fg}{v_0} t$  resp.  $x' = \frac{fg}{v_0^2} x$ . De grafiek, die betrekking heeft op het begin der beweging, waarbij nog geen zuiver rollen is ingetreden, is een deel van de parabool  $x' = t' - \frac{1}{2} t'^2$ , die voor alle waarden van

$r\omega_0$  dezelfde is. Alleen is het deel van de parabool des te groter (d.w.z. het zuiver rollen blijft des te langer uit), naarmate  $r\omega_0$  groter is. Het deel van de grafiek, dat betrekking heeft op zuiver rollen, is een raaklijn aan de parabool (of liever het deel dier raaklijn, waar  $t$  groter is dan in het raakpunt).

\*77. Er zijn twee mogelijkheden: 1°. de bol gaat zuiver rollen, 2°. er heeft uitglijden naar beneden plaats, d.w.z. het punt van de bol, dat ogenblikkelijk raakpunt is, krijgt een schuin naar beneden gerichte snelheid.

We onderzoeken eerst het geval van zuiver rollen. De wrijving  $W$  is dan in grootte onbekend (schuin naar boven gericht). Is  $x$  de (schuin naar beneden gerichte) verplaatsing van  $Z$ , dan is de bol een hoek  $\frac{x}{r}$  gedraaid. Men heeft:

$$mg \sin \gamma - W = m \ddot{x}, \quad N - mg \cos \gamma = 0, \quad Wr^2 = m \varrho^2 \ddot{x}.$$

Hieruit volgt:

$$\ddot{x} = \frac{r^2}{r^2 + \varrho^2} g \sin \gamma, \quad N = mg \cos \gamma, \quad W = mg \frac{\varrho^2}{r^2 + \varrho^2} \sin \gamma.$$

Zuiver rollen heeft plaats, als  $\frac{W}{N} \leq f$  is, dus als  $f \geq \frac{\varrho^2}{r^2 + \varrho^2} \operatorname{tg} \gamma$  is.

In het geval van zuiver rollen kan men ook van  $L + P = L_0 + P_0$  gebruik maken, dus van:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \varrho^2 \frac{\dot{x}^2}{r^2} - mg x \sin \gamma = 0.$$

Door te fluxioneren (en door  $x$  te delen) vindt men:

$$\dot{x} = \frac{r^2}{r^2 + \varrho^2} g \sin \gamma.$$

Daaruit, in verband met  $Wr^2 = m \varrho^2 \ddot{x}$ , vindt men  $W$  enz.

In geval van zuiver rollen is de poolbaan de rechte, volgens welke  $V$  het hellend vlak snijdt, en de poolkromme de cirkel, volgens welke  $V$  het boloppervlak snijdt.

In het geval van uitglijden naar beneden is  $W = fN$ . Is  $\varphi$  de hoek, waarover de bol gedraaid is (in de zin van naar beneden rollen), dan is:

$$mg \sin \gamma - fN = m \ddot{x}, \quad N - mg \cos \gamma = 0, \quad fNr = m \varrho^2 \ddot{\varphi}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g(\sin \gamma - f \cos \gamma), & \varrho^2 \ddot{\varphi} &= f r g \cos \gamma, \\ \dot{x} &= g(\sin \gamma - f \cos \gamma) t, & \varrho^2 \dot{\varphi} &= f r g t \cos \gamma. \end{aligned}$$

De snelheid van het punt van de bol, dat ogenblikkelijk raakpunt is (positief gerekend schuin naar beneden), is gelijk aan:

$$\dot{x} - r \dot{\varphi} = g \left( \sin \gamma - f \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \cos \gamma \right) t = g \left( \operatorname{tg} \gamma - f \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \right) t \cos \gamma.$$

De onderstelling van uitglijden naar beneden is juist, als  $\dot{x} - r \dot{\varphi} > 0$  is, dus als  $\operatorname{tg} \gamma > f \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2}$  is, hetgeen ook te schrijven is als  $f < \frac{\varrho^2}{r^2 + \varrho^2} \operatorname{tg} \gamma$ . Men vindt dus dezelfde grens voor  $f$  als bij zuiver rollen, maar nu als bovengrens.

In geval van uitglijden ligt de pool  $P$  op de straal van het raakpunt op een afstand  $p$  van  $Z$  (positief gerekend, als  $P$  aan dezelfde kant van  $Z$  ligt als het raakpunt), die voldoet aan  $\dot{x} - p \dot{\varphi} = 0$ , dus aan:

$$g(\sin \gamma - f \cos \gamma) t - p \frac{f r g t \cos \gamma}{\varrho^2} = 0.$$

Hieruit volgt:

$$p = \frac{\varrho^2}{f r} (\operatorname{tg} \gamma - f).$$

De poolbaan is dus een rechte evenwijdig aan het hellend vlak op een afstand  $\frac{\varrho^2}{f r} (\operatorname{tg} \gamma - f)$  van  $Z$ , dus op een afstand:

$$\frac{\varrho^2}{f r} \left( \operatorname{tg} \gamma - f \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \right)$$

van het hellend vlak aan de onderkant. De poolkromme is een cirkel met straal  $\frac{\varrho^2}{f r} (\operatorname{tg} \gamma - f)$ , die concentrisch is met de cirkel, volgens welke  $V$  het boloppervlak snijdt. De hoeksnelheid waarmede de poolkromme (die aan de bol vast zit) over de poolbaan rolt, is natuurlijk dezelfde als de hoeksnelheid, waarmede de bol draait (zonder te rollen).

*Opmerkingen.* 1. Men zou ook de onderstelling kunnen maken van uitglijden (van het punt van de bol, dat raakpunt is) naar boven. De wrijving  $fN$  is dan schuin naar beneden gericht. Is  $x$  de ver-

plaatsing van  $Z$  (positief gerekend schuin naar beneden) en  $\varphi$  de draaiing van de bol (positief gerekend in de zin van naar beneden rollen), dan heeft men in de formules voor het geval van uitglijden naar beneden slechts overal  $f$  door  $-f$  te vervangen. De snelheid van het punt van de bol, dat ogenblikkelijk raakpunt is (positief gerekend schuin naar beneden), is dus:

$$g \left( \operatorname{tg} \gamma + f \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \right) t \cos \gamma.$$

Deze snelheid is steeds positief, in strijd met de onderstelling van uitglijden naar boven. Deze onderstelling is dus steeds onjuist, zoals ook niet anders te verwachten was. Zijn nl. bol en helling vlak volkomen glad, dan gaat de bol niet draaien. Er heeft dan uitglijden naar beneden plaats. Dit uitglijden wordt, als de lichamen ruw zijn, door de wrijving tegengewerkt en of geheel vernietigd (zuiver rollen), of verminderd. Het uitglijden wordt echter door de wrijving niet in uitglijden naar de andere kant omgezet.

2. Is op een zeker tijdstip de snelheid van het punt van de bol, dat ogenblikkelijk raakpunt is, gelijk aan 0 dan blijft de toestand van zuiver rollen bestaan, of deze maakt plaats voor uitglijden naar beneden, al naar gelang  $f \geq \frac{\varrho^2}{r^2 + \varrho^2} \operatorname{tg} \gamma$  of  $f < \frac{\varrho^2}{r^2 + \varrho^2} \operatorname{tg} \gamma$  is. Bij een homogene ( $\varrho^2 = \frac{2}{5} r^2$ ) wordt de voorwaarde voor zuiver rollen  $f \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma$ .

78.\* De door de wrijving verrichte arbeid is:

$$\begin{aligned} A &= -fN \int_0^t (\dot{x} - r\dot{\varphi}) dt = -fmg^2 \left( \sin \gamma - f \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \cos \gamma \right) \cos \gamma \int_0^t \tau dt = \\ &= -\frac{1}{2} fmg^2 \left( \sin \gamma - f \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \cos \gamma \right) t^2 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Ook kan men  $A$  aldus vinden:

$$\begin{aligned} A &= L + P = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2) - mgx \sin \gamma = \\ &= \frac{1}{2} mg^2 t^2 \left\{ (\sin \gamma - f \cos \gamma)^2 + \frac{f^2 r^2}{\varrho^2} \cos^2 \gamma \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2} mg^2 t^2 (\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma. \end{aligned}$$

*Opmerking.* Doordat  $\operatorname{tg} \gamma > f \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2}$  is, valt  $A$  naar behoren negatief uit.

79. Zij  $x$  de verplaatsing van de bol, positief gerekend schuin naar boven, en  $\varphi$  de draaiing van de bol, positief gerekend in de zin van rollen naar boven. Dan is:

$$mg \sin \gamma + fN \cos \gamma = -m\ddot{x}, \quad N - mg \cos \gamma = 0, \quad fN = \frac{2}{5} mr \ddot{\varphi}.$$

Hieruit volgt  $\ddot{x} = -g(\sin \gamma + f \cos \gamma)$ , dus:

$$\dot{x} = v_0 - g(\sin \gamma + f \cos \gamma)t, \quad r \dot{\varphi} = \frac{5}{2} fgt \cos \gamma.$$

De snelheid van het punt van de bol, dat raakpunt is, positief gerekend schuin naar boven, is:

$$\dot{x} - r \dot{\varphi} = v_0 - g(\sin \gamma + \frac{7}{2} f \cos \gamma)t.$$

Hieruit volgt (voor het begin van zuiver rollen):

$$t_1 = \frac{2v_0}{g(2\sin \gamma + 7f \cos \gamma)}, \quad \dot{x}_1 = \frac{5fv_0}{2\operatorname{tg} \gamma + 7f}.$$

Uit  $\dot{x}_1 = \frac{1}{2}v_0$  volgt  $f = \frac{2}{3}\operatorname{tg} \gamma$ , dus:

$$t_1 = \frac{3v_0}{10g \sin \gamma}, \quad \dot{x}_1 = v_0 t_1 - \frac{5}{6}g t_1^2 \sin \gamma = \frac{9v_0^2}{40g \sin \gamma}.$$

Daar  $f > \frac{2}{7}\operatorname{tg} \gamma$  is, blijft de bol verder zuiver rollen (zie 77 Opm. 2). De (schuin naar beneden gerichte) versnelling van  $Z$  is daarbij volgens 77 gelijk aan  $\frac{5}{7}g \sin \gamma$ . Voor die rollende beweging geldt dus:

$$x = \dot{x}_1 - \frac{5}{7}g(t - t_1) \sin \gamma = \frac{5}{7}(v_0 - gt \sin \gamma).$$

$Z$  bereikt dus zijn hoogste stand op het tijdstip  $t_2 = \frac{v_0}{g \sin \gamma}$ .

Bij het rollen geldt:

$$x = \frac{5}{7}(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \sin \gamma) + C.$$

De constante  $C$  wordt bepaald uit  $x = \dot{x}_1$  voor  $t = t_1$ , dus uit:

$$\frac{9v_0^2}{40g \sin \gamma} = \frac{5}{7} \left( \frac{3v_0^2}{10g \sin \gamma} - \frac{9v_0^2}{200g \sin \gamma} \right) + C;$$

zodat  $C = \frac{3v_0^2}{70g \sin \gamma}$  is, dus:

$$x = \frac{5}{14}(2v_0 t - gt^2 \sin \gamma) + \frac{3v_0^2}{70g \sin \gamma}.$$

Hieruit vindt men voor het hoogste punt:

$$x_2 = \frac{5}{14}(2v_0 t_2 - gt_2^2 \sin \gamma) + \frac{3v_0^2}{70g \sin \gamma} = \frac{2v_0^2}{5g \sin \gamma}.$$



Het punt  $Z$  is in  $Z_0$  terug, als:

$$2v_0t - gt^2 \sin \gamma + \frac{3v_0^2}{25g \sin \gamma} = 0$$

is. Dit geeft voor  $Z$  in  $Z_0$ :

$$t_3 = \frac{v_0}{5g \sin \gamma} (5 + 2\sqrt{7}), \quad \dot{x}_3 = \frac{5}{7} (v_0 - gt_3 \sin \gamma) = -\frac{2}{\sqrt{7}} v_0.$$

*Opmerking.* Men kan  $\dot{x}_3$  ook vinden uit  $L_3 = L_1 + P_1$ . Hierin is:

$$L_3 = \frac{7}{10} m \dot{x}_3^2, \quad L_1 = \frac{7}{10} m \dot{x}_1^2 = \frac{7}{40} m v_0^2, \\ P_1 = mgx_1 \sin \gamma = \frac{9}{40} m v_0^2.$$

Verder heeft men te letten op  $\dot{x}_3 < 0$ .

80.\* Voor de arbeid vindt men:

$$A = -\frac{2}{3} mg \sin \gamma \int_0^{t_1} (\dot{x} - r \dot{\varphi}) dt = \\ = -\frac{2}{3} mg \sin \gamma \int_0^{t_1} (v_0 - \frac{10}{3} gt \sin \gamma) dt = \\ = -\frac{2}{3} mgt_1 \sin \gamma (v_0 - \frac{5}{3} gt_1 \sin \gamma) = \\ = -\frac{1}{5} m v_0 (v_0 - \frac{1}{2} v_0) = -\frac{1}{10} m v_0^2.$$

Uit  $A = L_3 - L_0 = \frac{7}{10} m \dot{x}_3^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$  vindt men  $\dot{x}_3^2 = \frac{4}{7} v_0^2$ .

81. Stellen we de verplaatsing van  $Z$  door  $x$  voor, positief gerekend in de zin van  $v_0$ , en de draaiing van de bol door  $\varphi$ , positief gerekend in de zin van  $\omega_0$ , dan is:

$$\dot{x} = v_0 + g(\sin \gamma - f \cos \gamma)t, \quad r \dot{\varphi} = r \omega_0 - \frac{5}{2} fgt \cos \gamma.$$

De snelheid van het punt van de bol, dat raakpunt is, positief gerekend in de zin van  $v_0$ , bedraagt:

$$\dot{x} + r \dot{\varphi} = v_0 + r \omega_0 + g(\sin \gamma - \frac{7}{2} f \cos \gamma)t.$$

Is  $\tan \gamma \geq \frac{7}{2} f$ , dan neemt  $\dot{x} + r \dot{\varphi}$  toe of blijft gelijk. De snelheid van het punt van de bol, dat raakpunt is, wordt dan dus niet 0. zodat de opgestelde vergelijkingen steeds geldig blijven (als het hellend vlak oneindig lang is). Het zwaartepunt  $Z$  van de bol gaat dan eenparig versneld naar beneden en zuiver rollen treedt nooit in.

Is  $\tan \gamma < \frac{7}{2} f$ , dan treedt zuiver rollen in op het tijdstip:

$$t_1 = \frac{2(v_0 + r\omega_0)}{g(7f \cos \gamma - 2 \sin \gamma)};$$

de beweging van de bol blijft verder zuiver rollend. Op het tijdstip  $t_1$  is de snelheid van  $Z$ :

$$\dot{x}_1 = \frac{f(5v_0 - 2r\omega_0) + 2r\omega_0 \operatorname{tg} \gamma}{7f - 2 \operatorname{tg} \gamma} = \frac{5fv_0 + 2r\omega_0(\operatorname{tg} \gamma - f)}{7f - 2 \operatorname{tg} \gamma}$$

De waarde van  $\dot{x}_1$  kan negatief zijn. Dit geval doet zich voor, als:

$$\operatorname{tg} \gamma < f, \quad r\omega_0 > \frac{5fv_0}{2(f - \operatorname{tg} \gamma)}$$

is. De eerste phase van de beweging (die waarbij nog geen zuiver rollen is ingetreden en de opgestelde vergelijkingen dus geldig zijn) bestaat dan in een vertraagd schuin naar beneden gaan van Z, gevolgd door een versneld naar boven gaan. De tweede phase van de beweging is een vertraagd zuiver rollen schuin naar boven, gevolgd door versneld zuiver rollen schuin naar beneden.

82.\* Uit het omtrent de versnelling gegevene volgt:

$$g(\sin \gamma - f \cos \gamma) = -g \sin \gamma,$$

dus  $f = 2 \operatorname{tg} \gamma$ . Voor het tijdstip, waarop zuiver rollen intreedt, geldt dan:

$$t_1 = \frac{v_0 + r\omega_0}{6g \sin \gamma}, \quad x_1 = \frac{1}{6}(5v_0 - r\omega_0),$$

$$x_1 = t_1(v_0 - \frac{1}{2}gt_1 \sin \gamma) = \frac{(v_0 + r\omega_0)(11v_0 - r\omega_0)}{72g \sin \gamma}.$$

Na het intreden van zuiver rollen geldt:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \frac{5}{7}g(t - t_1) \sin \gamma = \frac{1}{6}(5v_0 - r\omega_0) + \frac{5}{7}g(t - t_1) \sin \gamma.$$

Voor het (met de index 2 gemerkte) tijdstip, waarop  $\dot{x} = 0$  is, geldt dus:

$$t_2 - t_1 = \frac{7(r\omega_0 - 5v_0)}{30g \sin \gamma} \quad (r\omega_0 > 5v_0).$$

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + (t_2 - t_1) \left\{ \dot{x}_1 + \frac{5}{14}g(t_2 - t_1) \sin \gamma \right\} = \\ &= x_1 + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\dot{x}_1 = \frac{(v_0 + r\omega_0)(11v_0 - r\omega_0)}{72g \sin \gamma} - \\ &= \frac{7(r\omega_0 - 5v_0)^2}{360g \sin \gamma} = \frac{-r^2\omega_0^2 + 10v_0r\omega_0 - 10v_0^2}{30g \sin \gamma}. \end{aligned}$$

Wegens  $r\omega_0 > 5v_0$  heeft men dus:

$$r\omega_0 = (5 + \sqrt{15})v_0.$$

\*83. Is  $N$  de normale druk, die het hellend vlak op het blok uit-

oefent.  $W$  de wrijving en  $q$  de afstand van het aangrijpingspunt  $A$  van  $N$  tot het middelpunt  $M$  van het grondvlak, positief gerekend als  $A$  lager ligt dan  $M$ , dan is in geval van evenwicht:

$$N - mg \cos \gamma = 0, \quad mg \sin \gamma - W = 0, \quad Nq - Wh = 0,$$

dus  $q = h \operatorname{tg} \gamma$ . De voorwaarde voor evenwicht volgt uit  $W \leq fN$ ,  $q \leq a$  en luidt dus:

$$\operatorname{tg} \gamma \leq f, \quad \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{a}{h}.$$

\*84. In geval van evenwicht heffen het gewicht  $mg$  en de totale druk  $T$  elkaar op en vallen dus langs dezelfde rechte. Daar in geval van evenwicht  $T$  niet buiten het grondvlak aangrijpt en geen grotere hoek met de normaal op het hellend vlak maakt dan de wrijvingshoek  $\alpha$ , is de evenwichtsvoorwaarde (daar  $h \operatorname{tg} \gamma$  de afstand is van  $M$  tot het snijpunt van de verticaal door  $Z$  met het hellend vlak)  $h \operatorname{tg} \gamma \leq a$ ,  $\gamma \leq \alpha$ , dus  $\operatorname{tg} \gamma \leq \operatorname{tg} \alpha = f$ .

\*85. Met de notatie van 83 is in geval van uitglijden zonder kantelen (daar dan  $W = fN$  is en het bewegingsmoment om  $Z$  nul is):

$$N - mg \cos \gamma = 0, \quad mg \sin \gamma - fN = m\ddot{x}, \quad Nq - fNh = 0,$$

waarin  $x$  de verplaatsing van het blok is. Men heeft dus:

$$\ddot{x} = g(\sin \gamma - f \cos \gamma), \quad q = fh.$$

Uit  $\ddot{x} > 0$ ,  $q \leq a$  vindt men als voorwaarde voor het genoemde geval:

$$\operatorname{tg} \gamma > f, \quad f \leq \frac{a}{h}.$$

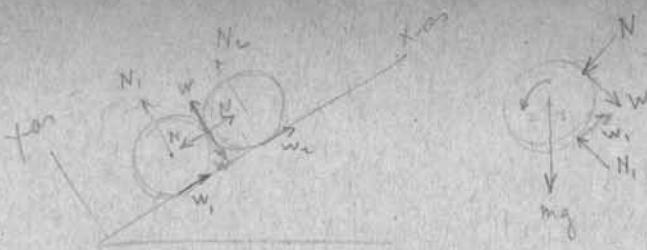
\*86. Daar het blok niet kantelt, gaat de totale druk  $T$  door het zwaartepunt  $Z$  en heeft met het gewicht  $mg$  een resultante  $R$ , die evenwijdig is aan het hellend vlak schuin naar beneden. Uit dit laatste volgt  $\alpha < \gamma$ , dus  $f = \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \gamma$  (daar  $T$  een hoek  $\alpha$  met de normaal op het hellend vlak maakt). De afstand  $q$  van het aangrijpingspunt van  $T$  tot het middelpunt  $M$  van het grondvlak is  $h \operatorname{tg} \alpha$ , zodat uit  $q \leq a$  volgt  $fh = h \operatorname{tg} \alpha \leq a$ .

*Opmerking.* Uit de sinusregel volgt:

$$\frac{R}{\sin(\gamma - \alpha)} = \frac{mg}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{mg}{\cos \alpha},$$

dus  $R = mg(\sin \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma) = mg(\sin \gamma - f \cos \gamma)$ . Dit voert eveneens tot  $\ddot{x} = g(\sin \gamma - f \cos \gamma)$ .

87.\* We nemen de positieve  $f$ -as naar rechts en de positieve  $u$ -as naar boven. Het veld van evenwicht wordt begrensd door de positieve  $f$ -as, het tussen de punten  $O(0, 0)$  en  $S(\frac{a}{h}, \frac{a}{h})$  gelegen deel van de rechte  $u = f$  en het rechts van  $S$  gelegen deel der rechte  $u = \frac{a}{h}$ . De begrenzing behoort tot dit veld. Het veld van uitglijden zonder kantelen wordt begrensd door de positieve  $u$ -as, het lijnstuk  $OS$  en het boven  $S$  gelegen deel van de rechte  $f = \frac{a}{h}$ . De begrenzing, behalve het lijnstuk  $OS$ , behoort tot dit veld. Ligt het beeldpunt in het overige deel van het eerste kwadrant van het beeldvlak dan gaat de kubus kantelen, al of niet gecombineerd met uitglijden.



## E. MEER LICHAMEN OP EEN HELLEND VLAK.

88.\* De normale drukken, die het hellend vlak op de bollen  $M_1$  en  $M_2$  uitoefent, noemen we  $N_1$  resp.  $N_2$  en de wrijvingen  $W_1$  resp.  $W_2$ , positief gerekend schuin naar boven. De normale drukken, die de bollen op elkaar uitoefenen, noemen we  $N$  en de wrijvingen  $W$ , positief gerekend, als de bol  $M_2$  op de bol  $M_1$  een schuin naar beneden gerichte wrijving uitoefent. Men heeft dan in het geval van evenwicht:

$$\begin{aligned} \Sigma x: N_1 - W - m_1 g \cos \gamma &= 0, & N_2 + W - m_2 g \cos \gamma &= 0, \\ \Sigma y: N - W_1 + m_1 g \sin \gamma &= 0, & -N - W_2 + m_2 g \sin \gamma &= 0, \\ \Sigma \text{Mom: } W_1 - W &= 0, & W_2 - W &= 0, \end{aligned}$$

waarbij de momenten om de zwaartepunten genomen zijn. Men vindt:

$$W = W_1 = W_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g \sin \gamma.$$

$$N = \frac{1}{2}(m_2 - m_1)g \sin \gamma,$$

$$N_1 = g\{m_1 \cos \gamma + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \sin \gamma\},$$

$$N_2 = g\{m_2 \cos \gamma - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \sin \gamma\}.$$

Uit  $N > 0$  volgt  $m_2 > m_1$ . Wegens  $\cot \gamma > 1$  is dan tevens  $N_2 > N > 0$ . Voor evenwicht is dus nodig en voldoende:

$$m_1 + m_2 \leq f(m_2 - m_1).$$

Hierin ligt nl.  $m_2 > m_1$  opgesloten.

89.\* Als de bol  $M_1$  of de bol  $M_2$  alleen op het hellend vlak geplaatst wordt en zuiver gaat rollen, is de versnelling van het zwaartepunt  $\frac{3}{5}g \sin \gamma$  resp.  $\frac{5}{7}g \sin \gamma$  (zie 77). Daar  $M_2$  dan een grotere versnelling krijgt dan  $M_1$ , kan men verwachten, dat de bollen met elkaar in aanraking blijven (tegen elkaar drukkend), als ze beide op het hellend vlak geplaatst worden op de in 88 aangegeven wijze en zuiver gaan rollen. Met de notatie van 88 is dan  $W = N$ . Men heeft dus bij zuiver rollen, als  $x$  de verplaatsing van  $M_1$  (tevens die van  $M_2$ ) is:

$$\begin{aligned} N_1 - N - m_1 g \cos \gamma &= 0, & N_2 + N - m_2 g \cos \gamma &= 0, \\ N - W_1 + m_1 g \sin \gamma &= m_1 \ddot{x}, & -N - W_2 + m_2 g \sin \gamma &= m_2 \ddot{x}, \\ W_1 - N &= \frac{2}{3} m_1 \ddot{x}, & W_2 - N &= \frac{2}{5} m_2 \ddot{x}. \end{aligned}$$

Daaruit vindt men achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{3}{5} g \sin \gamma, & N &= \frac{2}{25} m_2 g \sin \gamma, \\ N_1 &= g(m_1 \cos \gamma + \frac{2}{25} m_2 \sin \gamma), & N_2 &= m_2 g (\cos \gamma - \frac{2}{25} \sin \gamma), \\ W_1 &= g(\frac{2}{5} m_1 + \frac{2}{25} m_2) \sin \gamma, & W_2 &= \frac{8}{25} m_2 g \sin \gamma, \end{aligned}$$

zodat  $N$ ,  $N_1$ ,  $W_1$  en  $W_2$  positief uitvallen. Uit  $N_2 > 0$  volgt voor-  
eerst  $\text{tg } \gamma < 12,5$ . Verder is:

$$\frac{W_1}{N_1} = \frac{10 m_1 + 2 m_2}{25 m_1 \cot \gamma + 2 m_2}, \quad \frac{W_2}{N_2} = \frac{8}{25 \cot \gamma - 2}.$$

Zowel  $W_1 \leq N_1$  als  $W_2 \leq N_2$  voert tot  $\text{tg } \gamma \leq 2,5$ , waarin  
 $\text{tg } \gamma < 12,5$  ligt opgesloten. Zuiver rollen van beide bollen is dus  
mogelijk, als  $\text{tg } \gamma \leq 2,5$  is.

*Opmerking.* De versnelling van  $M_1$  is dezelfde als de versnel-  
ling, die  $M_1$  krijgt, als de bol  $M_1$  alleen op het hellend vlak geplaatst  
wordt en zuiver gaat rollen. Dit is een min of meer toevallige om-  
standigheid.

90.\* Zij  $x$  de verplaatsing van  $M_1$  en  $M_2$ , schuin naar beneden,  
en  $\varphi$  de draaiing van de bol  $M_1$ , positief gerekend als het raakpunt  
daardoor een schuin naar boven gerichte snelheid krijgt. Het traag-  
heidsmoment van ieder der bollen (om een as door het zwaartepunt)  
is  $2 mr^2$ . Met de notatie van 88 is:

$$\begin{aligned} N_1 - W - 3 mg \cos \gamma &= 0, & N_2 + W - 5 mg \cos \gamma &= 0, \\ N - fN_1 + 3 mg \sin \gamma &= 3 m \ddot{x}, & -N - fN_2 + 5 mg \sin \gamma &= 5 m \ddot{x}, \\ fN_1 - W &= 2 mr \ddot{\varphi}, & fN_2 - W &= -2 mr \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= 8 mg \cos \gamma, & -f(N_1 + N_2) &= 8 m(\ddot{x} - g \sin \gamma), \\ f(N_1 + N_2) &= 2 W, & \ddot{x} &= g(\sin \gamma - f \cos \gamma), & W &= 4 fmg \cos \gamma, \\ N_1 &= mg(3 + 4f) \cos \gamma, & N_2 &= mg(5 - 4f) \cos \gamma, \\ N &= 4 f^2 mg \cos \gamma, & r \ddot{\varphi} &= fg(2f - \frac{1}{2}) \cos \gamma. \end{aligned}$$

De snelheid van het punt van de bol  $M_1$  of  $M_2$ , dat ogenblikke-  
lijk raakpunt met het hellend vlak is (positief gerekend schuin naar  
beneden), bedraagt resp.:

$$\ddot{x} - r \ddot{\varphi} = (\operatorname{tg} \gamma - 2f^2 - \frac{1}{2}f) \cos \gamma, \quad \ddot{x} + r \ddot{\varphi} = (\operatorname{tg} \gamma + 2f^2 - \frac{3}{2}f) \cos \gamma.$$

Voor het intreden van het beschouwde geval is vooreerst nodig:

$$N_2 \geq 0, \quad |W| \leq fN.$$

Dit voert tot  $1 \leq f \leq \frac{5}{4}$ . Verder is nodig  $N_1 \geq 0$ , waaraan van zelf voldaan is, en  $\ddot{x} + r \ddot{\varphi} > 0$ , waaraan wegens  $f \geq 1$  voldaan is. Tenslotte is nog nodig  $\ddot{x} - r \ddot{\varphi} > 0$ . De voorwaarde voor de beschouwde bewegingsvorm is dus:

$$1 \leq f \leq \frac{5}{4}, \quad \operatorname{tg} \gamma > 2f^2 + \frac{1}{2}f.$$

*Opmerking.* Is  $1 \leq f \leq \frac{5}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = 2f^2 + \frac{1}{2}f$ , dan is de beweging van de bol  $M_1$  over het hellend vlak een zuiver rollende.

91.\* We letten op het gemeenschappelijke zwaartepunt  $Z$  van beide bollen. De daarheen overgebrachte uitwendige krachten zijn de zwaartekracht  $(m_1 + m_2)g$  verticaal naar beneden, de normale druk  $N_1 + N_2$  door het hellend vlak op de bollen uitgeoefend en de schuin naar boven gerichte wrijving  $f(N_1 + N_2)$ . Nu is  $N_1 + N_2 = (m_1 + m_2)g \cos \gamma$ . De drukken, die de bollen op elkaar uitoefenen, hebben wel invloed op  $N_1$  en  $N_2$ , maar niet op  $N_1 + N_2$ .

92.\* Met de notatie van 90 heeft men.

$$\begin{aligned} N_1 - W - 3mg \cos \gamma &= 0, & N_2 + W - 5mg \cos \gamma &= 0, \\ N - W_1 + 3mg \sin \gamma &= 3m\ddot{x}, & -N - fN_2 + 5mg \sin \gamma &= 5m\ddot{x}, \\ W_1 - W &= 2m\ddot{x}, & fN_2 - W &= -2m\ddot{x}. \end{aligned}$$

Door eliminatie van  $N$  en  $W$  uit de laatste vijf vergelijkingen vindt men:

$$\begin{aligned} fN_2 + W_1 + 8m\ddot{x} &= 8mg \sin \gamma, & fN_2 - W_1 + 4m\ddot{x} &= 0, \\ (f + 1)N_2 + 2m\ddot{x} &= 5mg \cos \gamma. \end{aligned}$$

Hieruit volgt door eliminatie van  $W_1$ :

$$fN_2 + 6m\ddot{x} = 4mg \sin \gamma.$$

Door oplossing van  $\ddot{x}$ ,  $N_2$  enz. vindt men verder:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{4(f+1)\sin \gamma - 5f \cos \gamma}{2(2f+3)}, \quad N_2 = mg \frac{15 \cos \gamma - 4 \sin \gamma}{2f+3}, \\ W_1 &= mg \frac{5f \cos \gamma + 4(f+2)\sin \gamma}{2f+3}, \quad W = 2mg \frac{5f \cos \gamma + 2 \sin \gamma}{2f+3}, \\ N_1 &= \frac{(16f+9)\cos \gamma + 4 \sin \gamma}{2f+3}, \quad N = mg \frac{2(4f+5)\sin \gamma - 5f \cos \gamma}{2(2f+3)}. \end{aligned}$$

Vanzelf vallen  $W_1$ ,  $W$  en  $N_1$  positief uit. Uit  $N_2 \geq 0$  en  $N > 0$  volgt:

$$\frac{5f}{2(4f+5)} < \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{15}{4}.$$

Aan deze ongelijkheden kan worden voldaan, daar het eerste lid kleiner is dan het laatste lid. De snelheid van het punt van de bol  $M_2$ , dat raakpunt met het hellend vlak is, positief gerekend naar beneden, is gelijk aan  $2\dot{x}$ ; uit  $\dot{x} > 0$  volgt in verband met het reeds gevondene:

$$\frac{5f}{4(f+1)} < \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{15}{4}.$$

Verder is:

$$\frac{W_1}{N_1} = \frac{5f + 4(f+2)\operatorname{tg} \gamma}{16f + 9 + 4\operatorname{tg} \gamma}, \quad \frac{W}{N} = \frac{4(5f + 2\operatorname{tg} \gamma)}{2(4f + 5)\operatorname{tg} \gamma - 5f},$$

zodat uit  $W_1 \leq fN_1$  en  $W \leq fN$  volgt:

$$\frac{5f(f+4)}{2(4f^2 + 5f - 4)} \leq \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{1}{2}f(4f+1), \quad 4f^2 + 5f - 4 > 0,$$

dus  $f \geq 1$ . Als voorwaarde voor het genoemde geval heeft men dus:

$$\frac{5f(f+4)}{2(4f^2 + 5f - 4)} \leq \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{1}{2}f(4f+1), \quad \text{als } 1 \leq f \leq \frac{5}{4} \text{ is,}$$

$$\frac{5f(f+4)}{2(4f^2 + 5f - 4)} \leq \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{15}{4}, \quad \text{als } \frac{5}{4} \leq f \leq 4 \text{ is,}$$

$$\frac{5f}{4(f+1)} \leq \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{15}{4}, \quad \text{als } f \geq 4 \text{ is.}$$

93. De normale druk tussen hellend vlak en bol noemen we  $N_1$ , die tussen hellend vlak en kubus  $N_2$  en die tussen bol en kubus  $N$ . De wrijving, die het hellend vlak op de <sup>bol</sup>kubus uitoefent, noemen we  $W_1$ , positief gerekend schuin naar boven. Men heeft dan:

$$N_1 - m_1g \cos \gamma = 0, \quad m_1g \sin \gamma + N - W_1 = m_1\ddot{x},$$

$$W_1 = \frac{2}{5} m_1\ddot{x},$$

$$N_2 - m_2g \cos \gamma = 0, \quad m_2g \sin \gamma - N - fN_2 = m_2\ddot{x}.$$

Hieruit vindt men:



$$\ddot{x} = 5g \frac{(m_1 + m_2)\sin \gamma - f m_2 \cos \gamma}{7m_1 + 5m_2},$$

$$N = m_1 m_2 g \frac{2 \sin \gamma - 7f \cos \gamma}{7m_1 + 5m_2},$$

$$W_1 = 2m_1 g \frac{(m_1 + m_2)\sin \gamma - f m_2 \cos \gamma}{7m_1 + 5m_2},$$

Voor het intreden van het genoemde geval is nodig  $N \geq 0$ , dus  $\text{tg } \gamma \geq \frac{1}{2}f$ . Tevens is dan  $\text{tg } \gamma > \frac{f m_2}{m_1 + m_2}$ , dus  $\ddot{x} > 0$ ,  $W_1 > 0$ . Uit  $W_1 \leq 2N_1$  volgt:

$$\text{tg } \gamma \leq \frac{7m_1 + (5+f)m_2}{m_1 + m_2}.$$

De afstand  $q$  van het middelpunt van het grondvlak van de kubus tot het aangrijpingspunt van  $N_2$ , positief gerekend schuin naar beneden, vindt men uit  $fN_2 r - N_2 q = 0$ , zodat  $q = fr$  is. In verband met  $q \leq r$  volgt hieruit  $f \leq 1$ . De voorwaarde voor het intreden van de genoemde beweging is dus:

$$\frac{1}{2}f \leq \text{tg } \gamma \leq \frac{7m_1 + (5+f)m_2}{m_1 + m_2}, \quad f \leq 1.$$

Wegens  $f \leq 1$  is de ondergrens voor  $\text{tg } \gamma$  kleiner dan de bovengrens.

94.\* Met de notatie van 93 heeft men (als  $\varphi$  de draaiingshoek van de bol is):

$$N_1 - m_1 g \cos \gamma = 0,$$

$$m_1 g \sin \gamma + N - 2N_1 = m_1 \ddot{x}, \quad 2N_1 = \frac{2}{5} m_1 r \ddot{\varphi},$$

$$N_2 - m_2 g \cos \gamma = 0, \quad m_2 g \sin \gamma - N - fN_2 = m_2 \ddot{x}.$$

Hieruit volgt:

$$\ddot{x} = g \frac{(m_1 + m_2)\sin \gamma - (2m_1 + f m_2)\cos \gamma}{m_1 + m_2},$$

$$N = m_1 m_2 g \frac{(2-f)\cos \gamma}{m_1 + m_2}, \quad r \ddot{\varphi} = 5g \cos \gamma,$$

$$\ddot{x} - r \ddot{\varphi} = \frac{(m_1 + m_2)\sin \gamma + (7m_1 + 5m_2 + f m_2)\cos \gamma}{m_1 + m_2}.$$

In verband met het niet kantelen van de kubus vindt men hieruit als voorwaarde voor de genoemde beweging:

$$\operatorname{tg} \gamma > \frac{7 m_1 + (5 + f) m_2}{m_1 + m_2}, \quad f \leq 1.$$

95.\* Is  $\operatorname{tg} \gamma \leq 7$ , dan gaat de bol, zo die alleen op het hellend vlak geplaatst wordt, zuiver rollen met een versnelling  $\frac{5}{7} g \sin \gamma$  van het zwaartepunt. Is  $\operatorname{tg} \gamma \leq 1$ ,  $\operatorname{tg} \gamma \leq f$ , dan blijft de kubus, alleen op het hellend vlak geplaatst, in rust (zie 83, waar nu  $a = h = r$  is); de bol laat dan de kubus los. Is  $f < \operatorname{tg} \gamma \leq 7$ ,  $f \leq 1$ , dan gaat de kubus, alleen op het hellend vlak geplaatst, uitglijden, zonder te kantelen, en wel met een versnelling  $g(\sin \gamma - f \cos \gamma)$  (zie 85); de bol laat dan de kubus los, als  $\operatorname{tg} \gamma < \frac{7}{2} f$  is, zodat dan  $f < \operatorname{tg} \gamma < \frac{7}{2} f$  is (dus  $\operatorname{tg} \gamma < \frac{7}{2}$  wegens  $f \leq 1$ ).

Is  $\operatorname{tg} \gamma > 7$  dan krijgt het zwaartepunt van de bol, zo deze alleen op het hellend vlak geplaatst wordt, een versnelling:

$$g(\sin \gamma - 2 \cos \gamma)$$

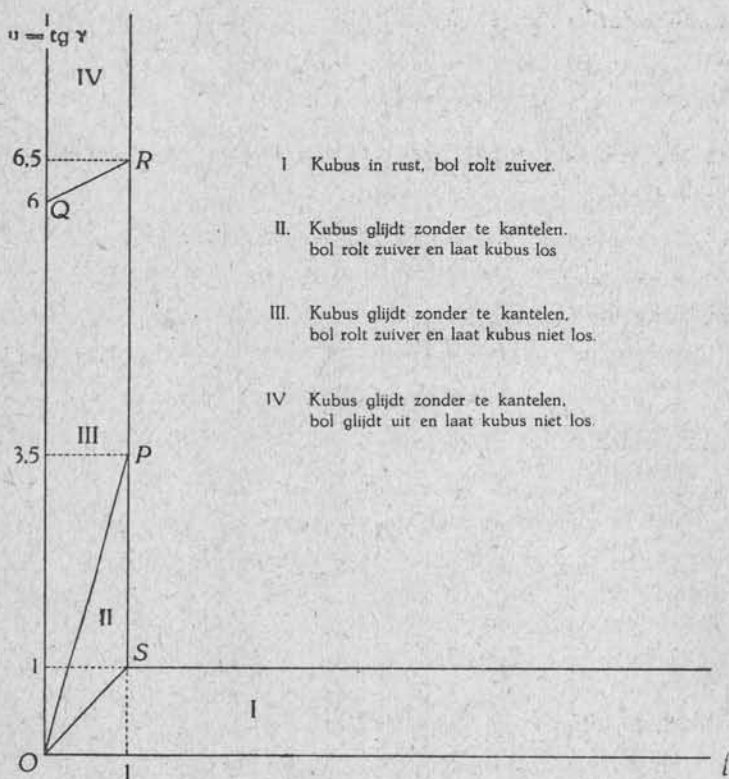
(geen zuiver rollen). Is  $\operatorname{tg} \gamma > f$ ,  $f \leq 1$ , dan is de kubus, alleen op het hellend vlak geplaatst, niet in evenwicht en gaat uitglijden zonder te kantelen; de versnelling van de kubus is dan:

$$g(\sin \gamma - f \cos \gamma),$$

dus groter dan die van het zwaartepunt van de bol, zodat de bol de kubus niet loslaat.

96.\* Als in 87 nemen we de positieve  $f$ -as naar rechts en de positieve  $u$ -as naar boven. Het veld I heeft betrekking op het in rust blijven van de kubus; de bol rolt dan zuiver. Dit veld is begrensd door de positieve  $f$ -as, het tussen de punten  $O(0, 0)$  en  $S(1, 1)$  gelegen deel van de rechte  $u = f$  en het rechts van  $S$  gelegen deel der rechte  $u = 1$ ; de begrenzing behoort tot dit veld. Het veld II wordt gevormd door de beeldpunten der gevallen, waarbij de kubus naar beneden glijdt, zonder te kantelen, en de bol de kubus loslaat, zuiver rollend. Dit veld wordt begrensd door het lijnstuk  $OS$ , het tussen  $S$  en  $P(1, \frac{7}{2})$  gelegen deel der rechte  $f = 1$  en het lijnstuk  $OP$ ; het lijnstuk  $SP$ , afgezien van de punten  $S$  en  $P$ , behoort tot het veld II, de lijnstukken  $OS$  en  $OP$  niet. Het veld III behoort bij glijden zonder kantelen van de kubus en zuiver rollen van de bol zonder de kubus los te laten (zie 93). Dit veld is begrensd door het deel van de positieve  $u$ -as tussen de punten  $O$  en  $Q(0, 6)$ , het lijnstuk  $OP$ , het deel van de rechte  $f = 1$  tussen de punten  $P$  en  $R(1, \frac{13}{2})$  en het deel van de rechte  $u = 6 + \frac{1}{2}f$  tussen de punten  $Q$  en  $R$ ; de begrenzing, van het punt  $O$  afgezien, behoort tot dit veld. Het veld IV heeft betrekking op het geval

dat de kubus gaat glijden zonder te kantelen en de bol (d.w.z. het punt van de bol, dat ogenblikkelijk raakpunt is) gaat uitglijden en de kubus niet loslaat (zie 94). Dit veld is begrensd door het boven  $Q$  gelegen deel van de  $u$ -as, het boven  $R$  gelegen deel van de rechte  $f = 1$  en het lijnstuk  $QR$ ; de begrenzing, behalve het lijnstuk  $QR$ , behoort tot dit veld.



Het overige deel van het eerste kwadrant van het beeldvlak behoort bij kantelen van de kubus, al of niet gepaard met uitglijden en al of niet gepaard met loslaten van de bol.

97.\* De normale drukken, die het hellend vlak op bol en kubus uitoefent, noemen we  $N_1$  resp.  $N_2$  en de wrijvingen  $W_1$  resp.  $W_2$ , positief gerekend schuin naar boven. De druk, die bol en kubus op elkaar uitoefenen, noemen we  $N$ . In geval van evenwicht is dan (als  $q$  de afstand van het middelpunt van het grondvlak van de kubus tot het aangrijpingspunt van  $N_2$  is, positief gerekend schuin naar beneden):

$$N_1 - m_1 g \cos \gamma = 0, \quad W_1 + N - m_1 g \sin \gamma = 0, \quad W_1 r = 0,$$

$$N_2 - m_2 g \cos \gamma = 0, \quad W_2 - N - m_2 g \sin \gamma = 0, \quad N_2 q = W_2 r,$$

dus  $W_1 = 0, N = m_1 g \sin \gamma$  en:

$$W_2 = (m_1 + m_2) g \sin \gamma, \quad q = r \frac{m_1 + m_2}{m_2} \operatorname{tg} \gamma.$$

De voorwaarde voor evenwicht ( $W_2 \leq f N_2, q \leq r$ ) is dus:

$$\operatorname{tg} \gamma \leq f \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

Het gegeven omtrent de wrijvingscoëfficiënt tussen hellend vlak en bol is overbodig.

98.\* Dezelfde notatie als in 97. Nu is echter  $W_2 = f N_2$ . Is  $x$  de verplaatsing van de kubus, dan is (wegens  $N_1 = m_1 g \cos \gamma, N_2 = m_2 g \cos \gamma$ ):

$$m_1 g \sin \gamma - N - W_1 = m_1 \ddot{x}, \quad W_1 = \frac{2}{5} m_1 \ddot{x},$$

$$m_2 g \cos \gamma + N - f m_2 g \cos \gamma = m_2 \ddot{x}, \quad f N_2 r = N_2 q,$$

Hieruit vindt men:

$$W_1 = 2 m_1 g \frac{(m_1 + m_2) \sin \gamma - f m_2 \cos \gamma}{7 m_1 + 5 m_2}, \quad q = f r.$$

$$\ddot{x} = 5 g \frac{(m_1 + m_2) \sin \gamma - f m_2 \cos \gamma}{7 m_1 + 5 m_2},$$

$$N = m_1 m_2 g \frac{7 f \cos \gamma - 2 \sin \gamma}{7 m_1 + 5 m_2}.$$

In verband met  $\ddot{x} > 0, N \geq 0, W_1 \leq \frac{1}{2} f N_1, q \leq r$  volgt hieruit:

$$f < \frac{m_1 + m_2}{m_2} \operatorname{tg} \gamma, \quad f \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma, \quad f \geq 4 \frac{m_1 + m_2}{7 m_1 + 9 m_2} \operatorname{tg} \gamma, \quad f \leq 1.$$

Nodig en voldoende voor de genoemde beweging is dus:

$$4 \frac{m_1 + m_2}{7 m_1 + 9 m_2} \operatorname{tg} \gamma \leq f < \frac{m_1 + m_2}{m_2} \operatorname{tg} \gamma, \quad f \leq 1.$$

Hierin ligt nl.  $f \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma$  opgesloten.

99.\* Nu is:

$$W_1 = \frac{1}{2} f N_1 = \frac{1}{2} f m_1 g \cos \gamma, \quad W_2 = f N_2 = f m_2 g \cos \gamma,$$

dus als  $\varphi$  de hoek is, die de bol gedraaid is (positief in de zin van naar beneden rollen):

$$m_1 g \sin \gamma - N - \frac{1}{2} f m_1 g \cos \gamma = m_1 \ddot{x}, \quad \frac{1}{2} f g \cos \gamma = \frac{2}{5} r \ddot{\varphi},$$

$$m_2 g \sin \gamma + N - f m_2 g \cos \gamma = m_2 \ddot{x}, \quad f r = q.$$

Hieruit volgt:

$$\ddot{x} = g \frac{2(m_1 + m_2) \sin \gamma - f(m_1 + 2 m_2) \cos \gamma}{2(m_1 + m_2)},$$

$$r \ddot{\varphi} = \frac{5}{4} f g \cos \gamma, \quad N = \frac{m_1 m_2 g f \cos \gamma}{2(m_1 + m_2)},$$

$$\ddot{x} - r \ddot{\varphi} = g \frac{4(m_1 + m_2) \sin \gamma - f(7 m_1 + 9 m_2) \cos \gamma}{4(m_1 + m_2)}.$$

Vanzelf is  $N > 0$  en  $\ddot{\varphi} > 0$ . Uit  $\ddot{x} - r \ddot{\varphi} > 0$  en  $q \leq r$  volgt als voorwaarde nodig en voldoende voor de genoemde beweging:

$$1 \leq f < 4 \frac{m_1 + m_2}{7 m_1 + 9 m_2} \operatorname{tg} \gamma;$$

hieraan kan alleen worden voldaan, als  $\operatorname{tg} \gamma > \frac{7 m_1 + 9 m_2}{4(m_1 + m_2)}$  is.

100.\* Gaat de kubus, alleen op het hellend vlak, uitglijden zonder te kantelen, dan is zijn versnelling  $g(\sin \gamma - f \cos \gamma)$ . Gaat de bol, zo die alleen op het hellend vlak geplaatst is, uitglijden, dan is de versnelling van zijn zwaartepunt  $g(\sin \gamma - \frac{1}{2} f \cos \gamma)$ , dus groter. Gaat de bol, alleen op het hellend vlak, zuiver rollen, dan is  $f \geq \frac{4}{7} \operatorname{tg} \gamma$  en de versnelling van het zwaartepunt van de bol  $\frac{5}{7} g \sin \gamma$  (zie 77). Die versnelling is eveneens groter dan  $g(\sin \gamma - f \cos \gamma)$  wegens  $f \geq \frac{4}{7} \operatorname{tg} \gamma$ . Elkaar loslaten, zonder dat de kubus kantelt, is dus niet mogelijk.

101.\* We nemen de positieve  $f$ -as naar rechts en de positieve  $u$ -as naar boven. Het veld, dat betrekking heeft op evenwicht, wordt begrensd door de positieve  $f$ -as, het rechts van het punt  $S(1, \frac{1}{2})$  gelegen deel der rechte  $u = \frac{1}{2}$  en het lijnstuk  $OS$  (waarin  $O$  de oorsprong van het beeldvlak is). De begrenzing behoort tot dit veld. Het veld, dat behoort bij uitglijden zonder kantelen van de kubus en zuiver rollen van de bol (geen loslaten), wordt begrensd door het lijnsegment  $SP$  van de rechte  $f = 1$ , waarin  $P$  het punt  $(1, 2)$  is, en de lijnsegmenten  $OS$  en  $OP$ . De begrenzing, met uitzondering van het lijnstuk  $OS$ , behoort tot dit veld. Het veld, dat betrekking heeft op uitglijden zonder kantelen van de kubus en uitglijden van

de bol (geen loslaten), wordt begrensd door de positieve  $u$ -as, het boven  $P$  gelegen deel der rechte  $f = 1$  en het lijnsegment  $OP$ . De begrenzing, met uitzondering van het lijnstuk  $OP$ , behoort tot dit veld.

Het overige deel van het eerste kwadrant van het beeldvlak behoort bij kantelen van de kubus, al of niet gepaard met uitglijden.

102. Zijn  $x_1$  en  $x_2$  de schuin-benedenwaartse verplaatsingen van de eerste resp. tweede plank, zij  $N_1$  de normale druk tussen hellend vlak en eerste plank en  $N_2$  die tussen beide planken. Uit  $x_2 < x_1$  volgt:

$$\begin{aligned} m_1 g \cos \gamma - N_1 + N_2 &= 0, & m_2 g \cos \gamma - N_2 &= 0, \\ m_1 g \sin \gamma - f_1 N_1 - f_2 N_2 &= m_1 \ddot{x}_1, & m_2 g \sin \gamma + f_2 N_2 &= m_2 \ddot{x}_2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt  $\ddot{x}_1 < g \sin \gamma$ ,  $\ddot{x}_2 > g \sin \gamma$ , in strijd met  $x_2 < x_1$ .

Zonder de vergelijkingen op te schrijven, ziet men onmiddellijk aan de beide schuin-bovenwaartse wrijvingen op de eerste plank en de schuin-benedenwaartse wrijving op de tweede plank, dat  $\ddot{x}_1 < g \sin \gamma$  en  $\ddot{x}_2 > g \sin \gamma$  is, dus dat de genoemde beweging onmogelijk is.

103.\* Daar  $N_2 = m_2 g \cos \gamma$  en  $N_1 = (m_1 + m_2)g \cos \gamma$  is, heeft men nu:

$$\begin{cases} m_1 g \sin \gamma - f_1 (m_1 + m_2)g \cos \gamma + f_2 m_2 g \cos \gamma = m_1 \ddot{x}_1, \\ m_2 g \sin \gamma - f_2 m_2 g \cos \gamma = m_2 \ddot{x}_2. \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= g \left\{ \operatorname{tg} \gamma - f_1 \frac{m_1 + m_2}{m_1} + f_2 \frac{m_2}{m_1} \right\} \cos \gamma, \\ \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 &= (f_1 - f_2) \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cos \gamma. \end{aligned}$$

Wegens  $0 < x_1 < x_2$  is de voorwaarde voor genoemde beweging:

$$f_1 > f_2, \quad \operatorname{tg} \gamma > f_1 \frac{m_1 + m_2}{m_1} - f_2 \frac{m_2}{m_1}.$$

104.\* De voorwaarde voor evenwicht is  $f_1 \geq \operatorname{tg} \gamma$ ,  $f_2 \geq \operatorname{tg} \gamma$ .

De voorwaarde voor in rust blijven van de onderste plank en uitglijden van de bovenste plank is:

$$f_2 < \operatorname{tg} \gamma \leq f_1 \frac{m_1 + m_2}{m_1} - f_2 \frac{m_2}{m_1}.$$

De voorwaarde daarvoor, dat beide planken uitglijden zonder over elkaar te glijden, luidt  $f_1 < \operatorname{tg} \gamma$ ,  $f_1 \leq f_2$ .

105.\* We nemen de positieve  $f_1$ -as naar rechts en de positieve  $f_2$ -as naar boven. Het veld van evenwicht wordt begrensd door het rechts van het punt  $S(\operatorname{tg} \gamma, \operatorname{tg} \gamma)$  gelegen deel van de rechte  $f_2 = \operatorname{tg} \gamma$  en het boven  $S$  gelegen deel van de rechte  $f_1 = \operatorname{tg} \gamma$ . De begrenzing behoort tot dit veld. Het veld van in rust blijven van de onderste en uitglijden van de bovenste plank wordt begrensd door het rechts van het punt  $Q(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma, 0)$  gelegen deel van de  $f_1$ -as, het rechts van  $S$  gelegen deel van de rechte  $f_2 = \operatorname{tg} \gamma$  en het lijnstuk  $QS$ . De begrenzing, met uitzondering van het deel der rechte  $f_2 = \operatorname{tg} \gamma$ , behoort tot dit veld. Het veld van uitglijden van beide planken als één vast lichaam wordt begrensd door de positieve  $f_2$ -as, het boven  $S$  gelegen deel der rechte  $f_1 = \operatorname{tg} \gamma$  en het lijnstuk  $OS$ , waarin  $O$  de oorsprong van het beeldvlak is. De begrenzing, met uitzondering van het deel der rechte  $f_1 = \operatorname{tg} \gamma$ , behoort tot dit veld. Het veld van uitglijden van beide planken, ook over elkaar, wordt begrensd door de lijnstukken  $OS$ ,  $QS$  en  $OQ$ . Alleen het deel  $OQ$  der begrenzing behoort tot dit veld. De vier velden vullen te zamen het eerste kwadrant van het beeldvlak.

106.\* De bewegingstoestand verandert niet, als men twee of meer opvolgende planken, die niet over elkaar schuiven, als één plank beschouwt, dus aan elkaar bevestigd denkt. Men krijgt dan  $n$  planken ( $n \leq N$ ), waarvan er geen twee opvolgende ten opzichte van elkaar in rust zijn. We nummeren die  $n$  planken van onderen naar boven (zodat plank 1 over het hellend vlak glijdt en plank 0 het hellend vlak zelf is). Onderstel, dat er een plank is, die ten opzichte van de daaronder liggende plank schuin naar boven gaat. We bewijzen nu, dat dit niet kan.

We nemen eerst het geval, dat ieder der  $n$  planken schuin naar boven gaat ten opzichte van de daaronder liggende plank (die het hellend vlak is voor de plank 1). De plank  $n$  gaat dan schuin naar boven (en wel sneller dan de overige planken), in strijd daarmee, dat op die plank het schuin naar beneden gerichte gewicht en de schuin naar beneden gerichte wrijving (daarop uitgeoefend door

de plank  $n - 1$ ) werkt. Ook kan men zich daarop beroepen, dat in het genoemde geval  $L + P$  zou toenemen.

Gaat niet ieder der  $n$  planken schuin naar boven ten opzichte van de daaronder liggende plank, dan is er een plank  $j$  ( $j \leq n - 1$ ), die zowel ten opzichte van de plank  $j - 1$  als ten opzichte van de plank  $j + 1$  schuin naar boven gaat. De plank  $j$  ondervindt twee schuin naar beneden gerichte wrijvingen en gaat dus schuin naar beneden ten opzichte van het hellend vlak, en wel met een versnelling, die  $\geq g \sin \gamma$  is ( $= g \sin \gamma$ , als de beide wrijvingscoëfficiënten 0 zijn). In het beschouwde geval is er een plank  $h$  ( $h < j$ ), die ten opzichte van de planken  $h + 1$  en  $j$  (hetgeen voor  $h = j - 1$  een en dezelfde plank is) schuin naar beneden gaat, evenals ten opzichte van de plank  $h - 1$ . Op de plank  $h$  werken twee schuin naar boven gerichte wrijvingen. Dit is in strijd daarmee, dat de plank naar beneden gaat sneller dan de plank  $j$ , dus met een versnelling, die  $> g \sin \gamma$  is.

**107.\*** Bij ieder der  $N$  planken zijn er volgens 106 twee mogelijkheden ten aanzien van de beweging ten opzichte van de daaronder liggende plank, nl. rust of uitglijden naar beneden.

**\*108.** Blijft de plank in rust, dan gaat (volgens 77) de bol zuiver rollen, als  $f_2 \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma$  is. De schuin bovenwaarts op de bol uitgeoefende wrijving is  $W_2 = \frac{2}{7} m_2 g \sin \gamma$ . De plank blijft in rust, als:

$$m_1 g \sin \gamma - W_1 + \frac{2}{7} m_2 g \sin \gamma = 0$$

is. De schuin naar boven gerichte wrijving, die het hellend vlak op de plank uitoefent, is dus  $W_1 = \frac{1}{7} (7 m_1 + 2 m_2) g \sin \gamma$ . Dit voert tot de voorwaarde:

$$f_1 \geq \frac{7 m_1 + 2 m_2}{7(m_1 + m_2)} \operatorname{tg} \gamma, \quad f_2 \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma.$$

Ook kan de plank in rust blijven, terwijl de bol uitglijdt. Dan is:

$$f_2 < \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma, \quad m_1 g \sin \gamma - W_1 + f_2 m_2 g \cos \gamma = 0,$$

Dit voert tot de voorwaarde:

$$f_2 < \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma, \quad f_1 \geq \frac{m_1 \operatorname{tg} \gamma + f_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

**\*109.** In het genoemde geval is (met doorzichtige notatie):



$$\begin{aligned} m_1 g \sin \gamma - f_1(m_1 + m_2)g \cos \gamma + W_2 &= m_1 \ddot{x}_1, \\ m_2 g \sin \gamma - W_2 &= m_2 \ddot{x}_2, \quad W_2 = \frac{2}{5} m_2 r \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Wegens het zuiver rollen is de snelheid van het punt van de bol, dat raakpunt is, gelijk aan  $\dot{x}_1$ , zodat men heeft:

$$\dot{x}_2 - r \dot{\varphi} = \dot{x}_1, \quad r \ddot{\varphi} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1.$$

Dit voert tot:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= g \frac{(7 m_1 + 2 m_2) \sin \gamma - 7 f_1(m_1 + m_2) \cos \gamma}{7 m_1 + 2 m_2}, \\ \ddot{x}_2 &= g \frac{(7 m_1 + 2 m_2) \sin \gamma - 2 f_1(m_1 + m_2) \cos \gamma}{7 m_1 + 2 m_2}, \\ W_2 &= 2 f_1 m_2 g \frac{m_1 + m_2}{7 m_1 + 2 m_2} \cos \gamma. \end{aligned}$$

De voorwaarde is dus:

$$f_1 < \frac{7 m_1 + 2 m_2}{7(m_1 + m_2)} \operatorname{tg} \gamma, \quad f_2 \geq 2 f_1 \frac{m_1 + m_2}{7 m_1 + 2 m_2}.$$

110. Men heeft nu:

$$\begin{aligned} m_1 g \sin \gamma - f_1(m_1 + m_2)g \cos \gamma + f_2 m_2 g \cos \gamma &= m_1 \ddot{x}_1, \\ g \sin \gamma - f_2 g \cos \gamma &= \ddot{x}_2, \quad f_2 g \cos \gamma = \frac{2}{5} r \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Het uitglijden van de bol vordert  $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 - r \ddot{\varphi} > 0$ . Nu is:

$$m_1(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 - r \ddot{\varphi}) = \frac{1}{2} g \{2 f_1(m_1 + m_2) - f_2(7 m_1 + 2 m_2)\} \cos \gamma.$$

Hieruit vindt men voor de gevraagde voorwaarde:

$$\operatorname{tg} \gamma > f_1 \frac{m_1 + m_2}{m_1} - f_2 \frac{m_2}{m_1}, \quad f_2 < 2 f_1 \frac{m_1 + m_2}{7 m_1 + 2 m_2}.$$

111.\* We nemen de positieve  $f_1$ -as naar rechts en de positieve  $f_2$ -as naar boven. Het veld van rust van de plank en rollen van de bol wordt begrensd door het rechts van  $S(\frac{9}{14} \operatorname{tg} \gamma, \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma)$  gelegen deel van de rechte  $f_2 = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma$  en het boven  $S$  gelegen deel van de rechte  $f_1 = \frac{9}{14} \operatorname{tg} \gamma$ . Het veld van rust van de plank en uitglijden van de bol wordt begrensd door het rechts van  $S$  gelegen deel der rechte  $f_2 = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma$ , het rechts van  $Q(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma, 0)$  gelegen deel van de  $f_1$ -as en het lijnstuk  $QS$ . Het veld van uitglijden van de plank en rollen van de bol wordt begrensd door de positieve  $f_2$ -as, het boven  $S$  gelegen deel der rechte  $f_1 = \frac{9}{14} \operatorname{tg} \gamma$  en het lijnstuk  $OS$ , waarin  $O$  de oorsprong is. Het veld van uitglijden van de plank en

uitglijden van de bol wordt begrensd door de lijnstukken OQ, OS en QS. De vier velden vullen te zamen het eerste kwadrant van het beeldvlak.

112. De normale drukken op de bollen noemen we  $N_1$  en  $N_2$ , de wrijvingen  $W_1$  en  $W_2$ , bij de bollen  $m_1$  en  $m_2$  positief gerekend schuin naar boven resp. beneden. Uit de momentenstellingen volgt voor het geval van evenwicht  $W_1 = W_2 = 0$  en verder, als  $S$  de spanning in het koord is:

$$m_1 g \sin \gamma_1 = S, \quad m_2 g \sin \gamma_2 = S.$$

De evenwichtsvoorwaarde is dus  $m_1 \sin \gamma_1 = m_2 \sin \gamma_2$ .

113. Is  $x$  de verplaatsing van de zwaartepunten der bollen, dan is (met de notatie van 112):

$$\begin{aligned} m_1 g \sin \gamma_1 - W_1 - S &= m_1 \ddot{x}, & W_1 &= \frac{2}{5} m_1 \ddot{x}, \\ m_2 g \sin \gamma_2 + W_2 - S &= -m_2 \ddot{x}, & W_2 &= \frac{2}{5} m_2 \ddot{x}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\ddot{x} = g \frac{5(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2)}{7(m_1 + m_2)}, \quad S = m_1 m_2 g \frac{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2}{m_1 + m_2},$$

*W<sub>1</sub> en W<sub>2</sub> moeten maximaal zijn  
W<sub>1</sub> = f<sub>1</sub> m<sub>1</sub> g cos γ<sub>1</sub>  
W<sub>2</sub> = f<sub>2</sub> m<sub>2</sub> g cos γ<sub>2</sub>*

$$\begin{cases} W_1 = m_1 g \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2)}{7(m_1 + m_2)}, \\ W_2 = m_2 g \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2)}{7(m_1 + m_2)}, \quad W_1 > W_2 \end{cases}$$

De gevraagde voorwaarde is dus  $m_1 \sin \gamma_1 > m_2 \sin \gamma_2$  en:

$$f_1 \geq \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2)}{7(m_1 + m_2) \cos \gamma_1}, \quad f_2 \geq \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2)}{7(m_1 + m_2) \cos \gamma_2}.$$

114. Men heeft nu, als  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  de draaiingen der bollen zijn positief gerekend als daardoor het punt van de bol, dat raakpunt is, schuin naar boven resp. beneden gaat:

$$\begin{aligned} m_1 g \sin \gamma_1 - f_1 m_1 g \cos \gamma_1 - S &= m_1 \ddot{x}, & f_1 g \cos \gamma_1 &= \frac{2}{5} r_1 \ddot{\varphi}_1, \\ m_2 g \sin \gamma_2 + f_2 m_2 g \cos \gamma_2 - S &= -m_2 \ddot{x}, & f_2 g \cos \gamma_2 &= \frac{2}{5} r_2 \ddot{\varphi}_2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\ddot{x} = g \frac{m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2 - f_1 m_1 \cos \gamma_1 - f_2 m_2 \cos \gamma_2}{m_1 + m_2},$$

$$\ddot{x} - r_1 \ddot{\varphi}_1 = g \frac{2 m_1 \sin \gamma_1 - 2 m_2 \sin \gamma_2 - f_1 (7 m_1 + 5 m_2) \cos \gamma_1 - 2 f_2 m_2 \cos \gamma_2}{2(m_1 + m_2)},$$

$$\ddot{x} - r_2 \ddot{\varphi}_2 = g \frac{2 m_1 \sin \gamma_1 - 2 m_2 \sin \gamma_2 - 2 f_1 m_1 \cos \gamma_1 - f_2 (5 m_1 + 7 m_2) \cos \gamma_2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Wegens  $S = m_2(g \sin \gamma_2 + f_2 g \cos \gamma_2 + \ddot{x})$  is, als  $\ddot{x} > 0$  is, ook  $S > 0$ , terwijl  $\ddot{x} > 0$  weer opgesloten ligt in  $\ddot{x} - r_1 \ddot{\varphi}_1 > 0$ ,  $\ddot{x} - r_2 \ddot{\varphi}_2 > 0$ . De voorwaarde voor de beschouwde beweging is dus (behalve  $m_1 \sin \gamma_1 > m_2 \sin \gamma_2$ ):

$$f_1 (7 m_1 + 5 m_2) \cos \gamma_1 + 2 f_2 m_2 \cos \gamma_2 < 2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2),$$

$$2 f_1 m_1 \cos \gamma_1 + f_2 (5 m_1 + 7 m_2) \cos \gamma_2 < 2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2).$$

115.\* Nu is:

$$m_1 g \sin \gamma_1 - f_1 m_1 g \cos \gamma_1 - S = m_1 \ddot{x}, \quad f_1 g \cos \gamma_1 = \frac{2}{5} r_1 \ddot{\varphi}_1,$$

$$m_2 g \sin \gamma_2 + W_2 - S = -m_2 \ddot{x}, \quad W_2 = \frac{2}{5} m_2 \ddot{x}.$$

Hieruit volgt:

$$\ddot{x} = 5 g \frac{m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2 - f_1 m_1 \cos \gamma_1}{5 m_1 + 7 m_2},$$

$$W_2 = 2 m_2 g \frac{m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2 - f_1 m_1 \cos \gamma_1}{5 m_1 + 7 m_2},$$

$$\ddot{x} - r_1 \ddot{\varphi}_1 = 5 g \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2) - 7 f_1 (m_1 + m_2) \cos \gamma_1}{2(5 m_1 + 7 m_2)},$$

De voorwaarde is (behalve  $m_1 \sin \gamma_1 > m_2 \sin \gamma_2$ ):

$$f_1 < \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2)}{7(m_1 + m_2) \cos \gamma_1}, \quad f_2 \geq \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2 - f_1 m_1 \cos \gamma_1)}{(5 m_1 + 7 m_2) \cos \gamma_2},$$

116.\* Behalve  $m_1 \sin \gamma_1 > m_2 \sin \gamma_2$  luidt de voorwaarde:

$$f_2 < \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2)}{7(m_1 + m_2) \cos \gamma_2}, \quad f_1 \geq \frac{2(m_1 \sin \gamma_1 - m_2 \sin \gamma_2 - f_2 m_2 \cos \gamma_2)}{(7 m_1 + 5 m_2) \cos \gamma_1}.$$

117.\* Men neme de positieve  $f_1$ -as naar rechts en de positieve  $f_2$ -as naar boven. Het veld van zuiver rollen van beide bollen wordt begrensd door het rechts van  $S(\frac{1}{21}, \frac{1}{28})$  gelegen deel van de rechte  $f_2 = \frac{1}{28}$  en het boven  $S$  gelegen deel van de rechte  $f_1 = \frac{1}{21}$ . Het veld van uitglijden van beide bollen wordt begrensd door de lijnstukken  $OP$ ,  $PS$ ,  $SQ$  en  $QO$ , waarin  $O(0, 0)$ ,  $P(\frac{1}{21}, 0)$ ,  $Q(0, \frac{1}{28})$  is. Het veld van uitglijden van de bol  $m_1$  en zuiver rollen van de bol  $m_2$  wordt begrensd door het boven  $Q$  gelegen deel van de  $f_2$ -as, het boven  $S$  gelegen deel van de rechte  $f_1 = \frac{1}{21}$  en het lijnstuk  $QS$ . Het veld van zuiver rollen van de bol  $m_1$  en uitglijden van de bol  $m_2$  wordt begrensd door het rechts van  $P$  gelegen deel van de  $f_1$ -as,

het rechts van  $S$  gelegen deel van de rechte  $f_2 = 1/28$  en het lijnstuk  $PS$ . De vier velden vullen te zamen het eerste kwadrant van het beeldvlak.

118. Blijft de wig in rust, dan is de voorwaarde voor zuiver rollen  $f \geq 2/7 \operatorname{tg} \gamma$ , terwijl dan de normale druk  $N$  en de wrijving  $W$  (positief gerekend schuin naar boven), die de wig op de bol uitoefent, zijn (zie 77):

$$N = mg \cos \gamma, \quad W = 2/7 mg \sin \gamma.$$

Zij  $N_1$  de normale druk en  $W_1$  de wrijving (positief van  $C$  naar  $B$ ), die het horizontale vlak op de wig uitoefent. Is  $x$  de weg, die het zwaartepunt van de bol heeft afgelegd, en  $q$  de afstand van het aangrijpingspunt van  $N_1$  tot  $CJ$  (positief gerekend, als dit aan de kant van  $BH$  ligt), dan zijn de evenwichtsvergelijkingen voor de wig (als de momenten om  $CJ$  genomen worden):

$$N_1 - Mg - N \cos \gamma - W \sin \gamma = 0,$$

$$W_1 - N \sin \gamma + W \cos \gamma = 0,$$

$$N_1 q - 1/3 Mga - Wa \sin \gamma + N \left( a \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} - x \right) = 0.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} N_1 &= g(M + m \cos^2 \gamma + 2/7 m \sin^2 \gamma) = \\ &= 1/7 g(7M + 2m + 5m \cos^2 \gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= mg(1 - 2/7) \sin \gamma \cos \gamma = 5/7 mg \sin \gamma \cos \gamma, \\ &1/7(7M + 2m + 5m \cos^2 \gamma)q = \\ &= 1/3 Ma + 2/7 ma \sin^2 \gamma - m(a \sin^2 \gamma - x \cos \gamma) = \\ &= a(1/3 M - 5/7 m \sin^2 \gamma) + m x \cos \gamma, \end{aligned}$$

$$q = \frac{a(7M - 15m \sin^2 \gamma) + 21m x \cos \gamma}{3(7M + 2m + 5m \cos^2 \gamma)},$$

$$a - q = 7 \frac{a(2M + 3m) - 3m x \cos \gamma}{3(7M + 2m + 5m \cos^2 \gamma)}.$$

De voorwaarde voor het intreden van de beschouwde beweging is  $W_1 \leq f_1 N_1$  en  $0 \leq q \leq a$ . Daar  $0 \leq x \cos \gamma < a$  is, is aan  $q \leq a$  voldaan, zodat de gevraagde voorwaarde luidt:

$$f \geq 2/7 \operatorname{tg} \gamma, \quad f_1 \geq \frac{5m \sin \gamma \cos \gamma}{7M + 2m + 5m \cos^2 \gamma}, \quad M \geq 15/7 m \sin^2 \gamma.$$

119.\* Men vindt nu (met de notatie van 118):

$$N_1 = g(M + m \cos^2 \gamma + f m \cos \gamma \sin \gamma),$$

$$W_1 = mg(\sin \gamma - f \cos \gamma) \cos \gamma,$$

$$q = \frac{a(M + 3 f m \cos \gamma \sin \gamma - 3 m \sin^2 \gamma) + 3 m x \cos \gamma}{3(M + m \cos^2 \gamma + f m \cos \gamma \sin \gamma)}.$$

De gevraagde voorwaarde is:

$$f < \frac{2}{7} \operatorname{tg} \gamma, \quad f_1 \geq \frac{m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \cos \gamma}{M + m \cos^2 \gamma + f m \cos \gamma \sin \gamma},$$

$$M \geq 3 m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma.$$

120\*. De wig gaat uitglijden. Zij  $x_1$  de verplaatsing van de wig en  $x_2$  de verplaatsing van het zwaartepunt van de bol ten opzichte van de wig. We nemen een rechthoekig assenkruis aan met het midden van  $CJ$  als oorsprong, de positieve  $x$ -as door het midden van  $BH$  en de positieve  $z$ -as verticaal naar boven. De coördinaten van het zwaartepunt  $Z$  van de bol zijn dan:

$$x = -x_1 + x_2 \cos \gamma + r \sin \gamma, \quad z = a \operatorname{tg} \gamma - x_2 \sin \gamma + r \cos \gamma.$$

Uit de beweging van  $Z$  horizontaal en verticaal volgt met de notatie van 118:

$$m(-\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \cos \gamma) = N \sin \gamma - W \cos \gamma,$$

$$-m \dot{x}_2 \sin \gamma = -mg + N \cos \gamma + W \sin \gamma.$$

Door deze vergelijkingen met  $\sin \gamma$  resp.  $\cos \gamma$  te vermenigvuldigen en op te tellen en hetzelfde te doen na vermenigvuldiging met  $-\cos \gamma$  resp.  $\sin \gamma$ , vindt men:

$$N = m(g \cos \gamma - \dot{x}_1 \sin \gamma),$$

$$W = m(g \sin \gamma + \dot{x}_1 \cos \gamma - \dot{x}_2).$$

Deze vergelijkingen krijgt men ook onmiddellijk door op te merken, dat  $\dot{x}_1 \sin \gamma$  de versnellingscomponent van  $Z$  loodrecht op het hellend vlak is en  $\dot{x}_2 - \dot{x}_1 \cos \gamma$  de versnellingscomponent langs het hellend vlak, beide keren positief schuin naar beneden. Verder heeft men:

$$W = \frac{2}{5} m \dot{x}_2, \quad N \sin \gamma - W \cos \gamma = M \dot{x}_1.$$

Men vindt hieruit:

$$\ddot{x}_2 = 5g \frac{(M+m)\sin\gamma}{7M+2m+5m\sin^2\gamma}, \quad \ddot{x}_1 = \frac{5mg\sin\gamma\cos\gamma}{7M+2m+5m\sin^2\gamma},$$

$$N = mg \frac{(7M+2m)\cos\gamma}{7M+2m+5m\sin^2\gamma}, \quad W = 2mg \frac{(M+m)\sin\gamma}{7M+2m+5m\sin^2\gamma}.$$

De normale druk  $N_1$ , die het horizontale vlak op de wig uitoefent, is:

$$N_1 = Mg + N \cos\gamma + W \sin\gamma = g \frac{(M+m)(7M+2m)}{7M+2m+5m\sin^2\gamma}.$$

Sneller vindt men dit resultaat uit de beweging van het gemeenschappelijke zwaartepunt van wig en bol in verticale richting. Daaruit volgt nl.:

$$N_1 - (M+m)g = m\ddot{z} = -m\ddot{x}_2 \sin\gamma.$$

Verder vindt men uit de momentenstelling om het zwaartepunt van de wig (aannemend, dat deze niet kantelt):

$$N_1(q - \frac{1}{3}a) - \frac{1}{3}Wa \sin\gamma + N(a \frac{1+\sin^2\gamma}{3\cos\gamma} - x_2) = 0.$$

De afstand van  $Z$  tot de loodlijn op het hellend vlak in het midden van  $AG$  (het aangrijpingspunt van  $N_1$  in de beginstand) is nl. het gemiddelde van de afstanden van de middens van  $AG$ ,  $BH$  en  $CJ$  tot die loodlijn, dus:

$$\frac{1}{3} \left( 0 + \frac{a}{\cos\gamma} + \frac{a\sin^2\gamma}{\cos\gamma} \right) = a \frac{1+\sin^2\gamma}{3\cos\gamma}.$$

De gevonden vergelijking in  $q$  levert:

$$\begin{aligned} & (M+m)(7M+2m)(3q-a) = \\ & = 2am(M+m)\sin^2\gamma - m(7M+2m)\{a(1+\sin^2\gamma) - 3x_2\cos\gamma\} = \\ & = -am(7M+5M\sin^2\gamma+2m) + 3m(7M+2m)x_2\cos\gamma, \\ & \quad 3(M+m)(7M+2m)q = \\ & = aM(7M+2m-5m\sin^2\gamma) + 3m(7M+2m)x_2\cos\gamma. \end{aligned}$$

Daar  $x_2\cos\gamma < a$  is, heeft men:

$$q < a \frac{7M^2 + 23Mm + 6m^2}{3(7M^2 + 9Mm + 2m^2)} < a.$$

In verband met  $W \leq fN$  en  $q \geq 0$  vindt men voor de gevraagde voorwaarde:

$$f \geq 2 \frac{M+m}{7M+2m} \operatorname{tg}\gamma, \quad M \geq \frac{1}{7}m(5\sin^2\gamma - 2).$$

121.\* Dezelfde notatie als in 120. Zij  $\varphi$  de hoek, die de bol gedraaid is, positief in de zin van naar beneden rollen (dus in de zin der draaiing van  $CA$  naar  $CB$ ). Uit de versnellingscomponenten  $\ddot{x}_1 \sin \gamma$  en  $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \cos \gamma$  loodrecht op resp. langs het hellend vlak vindt men:

$$mg \cos \gamma - N = m \ddot{x}_1 \sin \gamma, mg \sin \gamma - f N = m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \cos \gamma), \\ fN = \frac{2}{5} m r \ddot{\varphi}, \quad N \sin \gamma - fN \cos \gamma = M \ddot{x}_1.$$

Door oplossing volgt hieruit:

$$\ddot{x}_1 = g \frac{m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \cos \gamma}{M + m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma}, \\ \ddot{x}_2 = g \frac{(M + m)(\sin \gamma - f \cos \gamma)}{M + m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma}, \\ N = \frac{Mmg \cos \gamma}{M + m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma}, \\ r \ddot{\varphi} = \frac{\frac{5}{2} f M g \cos \gamma}{M + m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma}.$$

De normale druk  $N_1$ , die het horizontale vlak op de wig uitoefent, is:

$$N_1 = Mg + N(\cos \gamma + f \sin \gamma) = \frac{gM(M + m)}{M + m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma},$$

hetgeen ook te vinden is uit de beweging van het gemeenschappelijke zwaartepunt. Men vindt verder:

$$\ddot{x}_2 - r \ddot{\varphi} = g \frac{(M + m) \sin \gamma - (\frac{7}{2} M + m) f \cos \gamma}{M + m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma},$$

$$N_1(q - \frac{1}{3} a) - \frac{1}{3} f N a \sin \gamma + N(a \frac{1 + \sin^2 \gamma}{3 \cos \gamma} - x_2) = 0,$$

$$q = \frac{a\{M - m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma\} + 3 m x_2 \cos \gamma}{3(M + m)}.$$

Vooreerst voert  $N > 0$  tot de voorwaarde:

$$f < \frac{M + m \sin^2 \gamma}{m \cos \gamma \sin \gamma}.$$

Daarna voert  $\ddot{x}_2 - r \ddot{\varphi} > 0$  tot de scherpere voorwaarde:

$$f < 2 \frac{M + m}{7M + 2m} \operatorname{tg} \gamma.$$

Verder voert  $q \geq 0$  tot  $M \geq m(\sin \gamma - f \cos \gamma) \sin \gamma$ . Dit is met de vorige ongelijkheden samen te vatten tot:

$$\frac{m \sin^2 \gamma - M}{m \cos \gamma \sin \gamma} \leq f < 2 \frac{M + m}{7M + 2m} \operatorname{tg} \gamma.$$

Er zijn alleen dan waarden van  $f$ , die hieraan voldoen, als

$$M > \frac{1}{7} m(5 \sin^2 \gamma - 2)$$

is. Wegens  $x_2 \cos \gamma < a$  en  $f < \operatorname{tg} \gamma$  is aan  $q \leq a$  van zelf voldaan.



## F. BEWEGINGEN, DIE NIET EENPARIG VERSNELD ZIJN.

\*122. Op grond van symmetrie besluit men, dat de staaf in het verticale vlak door de beginstand blijft. Het zwaartepunt  $Z$  van de staaf blijft op dezelfde verticale rechte (wegens het ontbreken van horizontale uitwendige krachten). We onderstellen, dat de staaf het horizontale vlak niet loslaat. Is  $\varphi$  de hoek, die de staaf met het horizontale vlak maakt, dan is de hoogte van  $Z$  boven dit vlak  $z = l \sin \varphi$ . Uit  $\dot{z} = l \dot{\varphi} \cos \varphi$  volgt:

$$L = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2 (1 + 3 \cos^2 \varphi) = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2 (4 - 3 \sin^2 \varphi).$$

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$l \dot{\varphi}^2 (4 - 3 \sin^2 \varphi) = 6 g (\sin \alpha - \sin \varphi).$$

Door te fluxioneren en door  $\dot{\varphi}$  te delen, vindt men voor willekeurige beginvoorwaarde:

$$l \ddot{\varphi} (4 - 3 \sin^2 \varphi) - 3 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi = -3 g \cos \varphi.$$

Voor de druk door het horizontale vlak in  $A$  op de staaf uitgeoefend vindt men:

$$\begin{aligned} N &= m(g + \ddot{z}) = m(g + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = m \frac{g - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{4 - 3 \sin^2 \varphi} = \\ &= mg \frac{4 + 3 \sin^2 \varphi - 6 \sin \alpha \sin \varphi}{(4 - 3 \sin^2 \varphi)^2} = mg \frac{4 - 3 \sin^2 \alpha + 3(\sin \alpha - \sin \varphi)^2}{(4 - 3 \sin^2 \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Bijgevolg is steeds  $N > 0$ , zodat de staaf inderdaad het horizontale vlak niet loslaat. Is  $\varphi = 0$ , dan is (als we die stand met 1 merken):

$$l \dot{\varphi}_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{6 gl \sin \alpha}.$$

Neemt men de projectie van  $Z$  op het horizontale vlak als oorsprong, de positieve  $z$ -as verticaal naar boven en de positieve  $x$ -as door de projectie van  $B_0$  op het horizontale vlak, dan zijn de coördinaten van  $B$ :

$$x_B = l \cos \varphi, \quad z_B = 2l \sin \varphi.$$

Hieruit volgt voor  $\varphi = 0$ :

$$\dot{x}_B = 0, \quad \dot{z}_B = 2l \dot{\varphi}_1 = -\sqrt{6gl \sin \alpha}.$$

Voor het tijdstip  $t_1$ , waarop  $\varphi = 0$  is, vindt men:

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{6g}} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{4 - 3 \sin^2 \varphi}{\sin \alpha - \sin \varphi}} d\varphi.$$

123.\* Men heeft nu:

$$(\varrho^2 + l^2 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 = 2gl(\sin \alpha - \sin \varphi),$$

$$N = m \varrho^2 \frac{g - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{\varrho^2 + l^2 \cos^2 \varphi} = mg \varrho^2 \frac{\varrho^2 + l^2(1 + \sin^2 \varphi - 2 \sin \alpha \sin \varphi)}{(\varrho^2 + l^2 \cos^2 \varphi)^2},$$

zodat ook nu  $N > 0$  is.

*Opmerking.* De eerste uitdrukking voor  $N$  geldt bij willekeurige beginvoorwaarde. Men heeft alleen  $N = 0$  voor  $l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = g$ ; de waarde van  $\varrho$  is hierbij onverschillig.

124. De beginsnelheid van het zwaartepunt  $Z$  is  $\frac{1}{2} v_0$  verticaal naar boven;  $Z$  blijft in de verticaal door  $Z_0$ . Met de notatie van 122 heeft men  $l \dot{\varphi}_0 = \frac{1}{2} v_0$  en (volgens  $L + P = L_0 + P_0$ ):

$$l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{v_0^2 - 6gl \sin \varphi}{4 - 3 \sin^2 \varphi}, \quad N = m \frac{g - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{4 - 3 \sin^2 \varphi} = m \frac{gl(4 + 3 \sin^2 \varphi) - v_0^2 \sin \varphi}{l(4 - 3 \sin^2 \varphi)^2}.$$

We stellen:

$$\sin \varphi = s, \quad gl(4 + 3s^2) - v_0^2 = f(s) \quad (0 \leq s \leq 1).$$

Is  $v_0^2 < 6gl$ , dan wordt de stand, waarbij  $s = \frac{v_0^2}{6gl}$  is, met een snelheid 0 bereikt;  $f(s)$  neemt af van  $4gl$  tot de positieve waarde  $4gl - \frac{v_0^4}{12gl}$ , als  $s$  toeneemt van 0 tot  $\frac{v_0^2}{6gl}$ . Bijgevolg blijft  $N > 0$ , zodat de staaf het horizontale vlak niet loslaat (zoals ook volgt uit 122).

Is  $v_0^2 \geq 6gl$ , dan neemt  $f(s)$  af van  $4gl$  tot  $7gl - v_0^2$ , als  $s$  toeneemt van 0 tot 1. Is  $6gl \leq v_0^2 \leq 7gl$ , dan is dus steeds  $N \geq 0$ , zodat de staaf het horizontale vlak niet loslaat. De staaf bereikt de verticale stand met een hoeksnelheid  $\dot{\varphi}_1$ , die voldoet aan:

$$l^2 \dot{\varphi}_1^2 = v_0^2 - 6 gl;$$

de snelheid  $v_1$ , die  $B$  dan heeft, is horizontaal en voldoet aan  $v_1^2 = v_0^2 - 6 gl$ .

Is  $v_0^2 > 7 gl$ , dan laat de staaf het horizontale vlak los in een stand, waarbij  $\varphi$  voldoet aan:

$$s = \sin \varphi = \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - 48 g^2 l^2}}{6 gl}.$$

Opmerkingen. 1. Is  $v_0^2 = 6 gl$ , dan is:

$$l \dot{\varphi} = v_0 \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{4 - 3 \sin^2 \varphi}}, \quad t = \frac{l}{v_0} \int_0^\varphi \sqrt{\frac{4 - 3 \sin^2 u}{1 - \sin u}} du.$$

De stand, waarbij  $\varphi = 90^\circ$  is, wordt na oneindig lange tijd bereikt (dus niet bereikt, maar asymptotisch genaderd).

2. Geeft men aan  $A$  bovendien een horizontale beginsnelheid langs  $A_0 B_0$ , dan behoudt het zwaartepunt  $Z$  zijn horizontale snelheidscomponent. Verder geeft dit geen verandering.

125.\* Volgens 124 heeft loslaten plaats, als  $v_0^2 > 7 gl$  is, en wel voor de daar aangegeven waarde van  $\sin \varphi$ . De hoeksnelheid  $\dot{\varphi}_1$ , die de staaf dan heeft, voldoet aan:

$$l^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{8} (v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - 48 g^2 l^2}).$$

Op het tijdstip van loslaten heeft  $Z$  een verticaal naar boven gerichte snelheid.  $Z$  voert daarna een eenparig versnelde beweging uit met een verticaal naar beneden gerichte versnelling  $g$  (zodat de beweging van  $Z$  aanvankelijk vertraagd is). De hoeksnelheid van de staaf blijft de waarde  $\dot{\varphi}_1$  behouden. De levende kracht van de beweging om  $Z$  blijft:

$$\frac{1}{48} m (v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - 48 g^2 l^2}).$$

Dit is de totale levende kracht van de staaf geworden, als  $Z$  zijn hoogste punt bereikt en dus de snelheid 0 heeft. Is  $z_2$  de grootste hoogte van  $Z$  boven het horizontale vlak, dan volgt uit:

$$L_0 + P_0 = L_2 + P_2$$

(daar voor de beginstand van 124 geldt  $L_0 = \frac{1}{6} m v_0^2$  en  $P_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} gz_2 &= \frac{1}{6} v_0^2 - \frac{1}{48} (v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - 48 g^2 l^2}) = \\ &= \frac{1}{48} (7 v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - 48 g^2 l^2}). \end{aligned}$$

\*126. Als coördinaat voeren we in de hoek  $\theta$ , die  $AB$  met de ijzerdraad maakt ( $0 < \theta < 180^\circ$  als  $B$  onder de ijzerdraad ligt). Uit de in 122 voor  $N$  gevonden uitdrukking (positief gerekend naar boven) vindt men door  $\alpha = -\beta$  en  $\varphi = -\psi$  te stellen:

$$N = mg \frac{4 + 3 \sin^2 \theta - 6 \sin \beta \sin \theta}{(4 - 3 \sin^2 \theta)^2}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\theta} &= 6 mg \frac{3 \sin^3 \theta + 12 \sin \theta - (9 \sin^2 \theta + 4) \sin \beta}{(4 - 3 \sin^2 \theta)^2} \cos \theta = \\ &= 6 mg \frac{f(s) \cos \theta}{(4 - 3 \sin^2 \theta)^2}, \end{aligned}$$

waarin  $s = \sin \theta$  en  $f(s) = 3s^3 + 12s - (9s^2 + 4) \sin \beta$  is. Uit:

$$f'(s) = 3(3s^2 + 4 - 6s \sin \beta) > 0$$

volgt, dat  $f(s)$  toeneemt, en wel van  $2(4 - 3 \sin^2 \beta) \sin \beta$  tot  $15 - 13 \sin \beta$ , als  $\theta$  toeneemt van  $\beta$  tot  $90^\circ$  (dus  $s$  van  $\sin \beta$  tot 1).

Bijgevolg blijft  $f(s) > 0$ , zodat  $N$  toeneemt, en wel van  $\frac{mg}{4 - 3 \sin^2 \beta}$  tot  $mg(7 - 6 \sin \beta)$ , als  $\theta$  toeneemt van  $\beta$  tot  $90^\circ$ . Bijgevolg is  $N$  minimaal in de beginstand en maximaal in de stand, waarbij  $B$  zich verticaal onder  $A$  bevindt ( $\theta = 90^\circ$ ).

127.\* Dezelfde notatie als in 126. Neemt  $\theta$  toe van  $\beta$  tot  $90^\circ$ , dan neemt  $f(s)$  voortdurend toe, met een negatieve waarde beginnend en met een positieve waarde eindigend. Wegens  $f(0) > 0$  wordt  $f(s) = 0$  voor een zekere tussen  $\beta$  en 0 gelegen waarde  $-\gamma$  van  $\theta$ . Voor  $\beta \leq \theta < -\gamma$  is  $f(s) < 0$  en voor  $-\gamma < \theta \leq 90^\circ$  is  $f(s) > 0$ .

Neemt  $\theta$  toe van  $\beta$  tot  $90^\circ$ , dan neemt  $N$  dus eerst af van  $\frac{mg}{4 - 3 \sin^2 \beta}$  tot een zeker positief minimum, aangenomen voor  $\theta = -\gamma$ , dus in een stand, waarbij  $B$  nog boven de horizontale rechte ligt; die stand wordt aangewezen door:

$$3 \sin^3 \gamma + 12 \sin \gamma + (9 \sin^2 \gamma + 4) \sin \beta = 0.$$

Vervolgens neemt  $N$  toe tot  $mg(7 - 6 \sin \beta)$  (voor  $\theta = 90^\circ$ ). Dit is de grootste waarde van  $N$ . De kracht  $N$  blijft steeds verticaal naar boven gericht.

128. Als coördinaat voeren we in de hoek  $\psi$ , die  $AB$  maakt met

de naar beneden gekeerde verticaal door  $A$ . Door  $\varphi = \psi - \frac{1}{2} \pi$  te stellen, vindt men uit de differentiaalvergelijking van 122:

$$l \ddot{\psi} (4 - 3 \cos^2 \psi) + 3 l \dot{\psi}^2 \cos \psi \sin \psi + 3 g \sin \psi = 0.$$

Is  $\psi$  klein, dan wordt dit bij benadering  $l \ddot{\psi} + 3 g \psi = 0$ . Hieruit vindt men voor de periode der kleine slingeren  $T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$ .

Heeft het zwaartepunt  $Z$  van de staaf een horizontale snelheidscomponent, dan gaat het slingeren gepaard met een eenparige beweging van de projectie van  $Z$  op de horizontale ijzerdraad.

129. De beginsnelheid van het zwaartepunt  $Z$  is 0, zodat  $Z$  in dezelfde verticaal blijft. Met de coördinaat  $\psi$  van 128 heeft men:

$$l^2 \dot{\psi}^2 (1 + 3 \sin^2 \psi) = 6 gl \cos \psi - 6 gl + v_0^2.$$

Is  $v_0^2 < 12 gl$ , dan gaat de staaf slingeren met een amplitudo (grootste absolute waarde van  $\psi$ )  $\text{bg} \cos \left(1 - \frac{v_0^2}{6 gl}\right)$ . Is  $v_0^2 > 12 gl$ , dan loopt de staaf rond; in de labiele evenwichtsstand ( $B$  verticaal boven  $A$ ) is  $l \dot{\psi}^2 = v_0^2 - 12 gl$ . Is  $v_0^2 = 12 gl$ , dan wordt de labiele evenwichtsstand asymptotisch genaderd.

De pool  $P$  der beweging van  $AB$  is het snijpunt van de rechte door  $Z$  evenwijdig aan de ijzerdraad met de verticale rechte door  $A$ . Daar  $A_0P = l$  is, is de poolbaan (meetkundige plaats van  $P$  op het vaste vlak) de cirkel om  $A_0$  met straal  $l$  (of een deel van die cirkel). Daar  $\angle APZ = 90^\circ$  is, is de poolkromme (meetkundige plaats van  $P$  op het bewegende vlak) de cirkel op  $AZ$  als middellijn beschreven (of een deel daarvan). De staaf voert dus een elliptische beweging uit.

Is  $v_0^2 > 12 gl$ , dan zijn poolbaan en poolkromme de volledige cirkels. Is  $v_0^2 < 12 gl$ , dan is de poolbaan dat deel van genoemde cirkel om  $A_0$ , dat onder de horizontale rechte door de hoogste stand  $Z_1$  van  $Z$  ligt. Zijn  $P_1$  en  $P_1'$  de bijbehorende polen, dan is  $Z_1$  het midden van  $P_1P_1'$ . Is  $6 gl \leq v_0^2 < 12 gl$ , dan liggen  $P_1$  en  $P_1'$  boven of op de ijzerdraad. De poolkromme is dan de volledige cirkel op  $AZ$  als middellijn. Is  $v_0^2 < 6 gl$ , dan liggen  $P_1$  en  $P_1'$  onder de ijzerdraad. De poolkromme is dan de boog van de cirkel op  $AZ$  als middellijn, die tussen de uiterste stralen  $A_0P_1$  en  $A_0P_1'$  van de poolbaan ligt. De uiteinden van de poolkromme lopen langs die stralen. Poolbaan en poolkromme zijn dan even lange cirkelbogen.

\*130. Uit de pool van de beweging (het snijpunt van de lood-

lijnen in  $A$  en  $B$  op horizontaal vlak resp. muur) vindt men  $L = \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2$ , waarin  $\varphi$  de hoek tussen de staaf  $AB$  en het horizontale vlak is. Hieruit volgt: *via*  $L + P = \text{constant}$

$$l \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} g (\sin \alpha - \sin \varphi), \quad l \ddot{\varphi} = -\frac{3}{4} g \cos \varphi.$$

Zijn  $N$  en  $N'$  de drukken, die het horizontale vlak en de muur op de staaf uitoefenen, dan is:

$$\begin{aligned} N &= m(g + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = \\ &= \frac{1}{4} mg(1 - 6 \sin \alpha \sin \varphi + 9 \sin^2 \varphi) = \\ &= \frac{1}{4} mg\{ (3 \sin \varphi - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha \}. \end{aligned}$$

$$N' = -ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = \frac{3}{4} mg(3 \sin \varphi - 2 \sin \alpha) \cos \varphi;$$

bijgevolg is  $N > 0$ . De staaf blijft met het verticale vlak in aanraking tot de stand, waar  $N' = 0$  is, dus  $\sin \varphi = \frac{2}{3} \sin \alpha$ , dus  $OB = \frac{2}{3} OB_0$ , waarin  $O$  het snijpunt is van  $r$  met het verticale vlak door  $AB$ . Op het tijdstip  $t_1$ , waarop de staaf de muur loslaat, is  $l \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} g$ . Na dit tijdstip geldt (zie 122):

$$\begin{aligned} l \dot{\varphi}^2 (4 - 3 \sin^2 \varphi) &= 2g(2 \sin \alpha - 3 \sin \varphi) + 2g(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha) = \\ &= 2g(1 + 2 \sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha - 3 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Op het tijdstip  $t_2$ , waarop  $B$  het horizontale vlak treft, geldt:

$$l \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{6} g(3 + 6 \sin \alpha - \sin^2 \alpha).$$

We nemen  $O$  als oorsprong van een rechthoekig assenkruis, de positieve  $z$ -as verticaal naar boven en de positieve  $x$ -as door  $A$ . Vóór het loslaten van de muur geldt:

$$\dot{x}_Z = -l \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{x}_A = -2l \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{z}_B = 2l \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Op het tijdstip  $t_1$  geldt dus:

$$\begin{aligned} \dot{x}_Z &= \frac{1}{3} \sqrt{2gl} \sin \alpha, & \dot{x}_A &= \frac{2}{3} \sqrt{2gl} \sin \alpha, \\ \dot{z}_B &= \frac{1}{3} \sqrt{2gl} (9 - 4 \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Het punt  $Z$  behoudt de horizontale component van de snelheid na het tijdstip  $t_1$ . Volgens:

$$\dot{x}_A = \dot{x}_Z + l \cos \varphi, \quad \dot{x}_B = \dot{x}_Z - l \cos \varphi, \quad \dot{z}_B = 2l \sin \varphi.$$

geldt op het tijdstip  $t_2$ , waarop  $\psi = 0$  is:

$$\begin{aligned} \dot{x}_A = \dot{x}_B = \dot{x}_Z &= \frac{1}{3} \sqrt{2gl} \sin \alpha, \\ \dot{z}_B &= 2l \dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{3} \sqrt{6gl} (3 + 6 \sin \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

*Opmerking.* Men heeft na het tijdstip  $t_1$ :

$$l \dot{\varphi}^2 = 2g \frac{3 + 6 \sin \alpha - \sin^2 \alpha - 9 \sin \varphi}{3(4 - 3 \sin^2 \varphi)},$$

dus volgens 122:

$$\begin{aligned} N &= m \frac{g - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{4 - 3 \sin^2 \varphi} = \\ &= mg \frac{12 - 6 \sin \varphi + 9 \sin^2 \varphi + 2(\sin \alpha - 6) \sin \alpha \sin \varphi}{3(4 - 3 \sin^2 \varphi)^2} = \\ &= mg \frac{(3 \sin \varphi - 1 - 2 \sin \alpha)^2 + 11 - 4 \sin \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \sin \varphi}{3(4 - 3 \sin^2 \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $N > 0$ , zodat de staaf het horizontale vlak niet loslaat.

131.\* We nemen hetzelfde assenkruis en dezelfde coördinaat  $\varphi$  als in 130. De coördinaten van  $Z$  zijn  $x = b \cos \varphi$ ,  $z = a \sin \varphi$ . Uit:

$$\dot{x} = -b \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{z} = a \dot{\varphi} \cos \varphi$$

volgt:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2), \\ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2) &= ga(\sin \alpha - \sin \varphi), \\ \ddot{\varphi} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2) &+ \\ + \dot{\varphi}^2 (b^2 - a^2) \cos \varphi \sin \varphi + ga \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Voor de drukken  $N$  en  $N'$ , door het horizontale vlak en de muur op de staaf uitgeoefend, vindt men:

$$\begin{aligned} N &= m(g + a \ddot{\varphi} \cos \varphi - a \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = \\ &= m \frac{g(b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2) - \dot{\varphi}^2 a(b^2 + \varrho^2) \sin \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2} = \\ &= mg \frac{b^2(b^2 - a^2) \sin^4 \varphi + (3a^2 b^2 + a^2 \varrho^2 + 2b^2 \varrho^2) \sin^2 \varphi -}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2)^2} \\ &\quad - 2a^2(b^2 + \varrho^2) \sin \alpha \sin \varphi + \varrho^2(a^2 + \varrho^2), \\ N' &= -mb(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = mb \frac{ga \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 (a^2 + \varrho^2)}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2} \cos \varphi = \\ &= mgab \frac{(b^2 - a^2) \sin^3 \varphi + 3(a^2 + \varrho^2) \sin \varphi - 2(a^2 + \varrho^2) \sin \alpha}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2)^2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

De formules, die  $N$  en  $N'$  in  $\varphi^2$  en  $\varphi$  uitdrukken (en waarin  $\alpha$  niet voorkomt), gelden voor alle beginvoorwaarden. Door hieruit  $\varphi^2$  te elimineren, vindt men:

$$Nb(a^2 + \varrho^2) = N' a(b^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} \varphi + mgb \varrho^2.$$

Is  $N' \geq 0$ , dan is dus  $N > 0$ . Dit doet zien, dat de staaf, zolang deze de muur niet loslaat, ook het horizontale vlak niet loslaat. Stelt men:

$$\sin \varphi = s, \quad (b^2 - a^2)s^3 + 3(a^2 + \varrho^2)s - 2(a^2 + \varrho^2)\sin \alpha = f(s),$$

dan is:

$$\begin{aligned} f'(s) &= 3\{(b^2 - a^2)s^2 + a^2 + \varrho^2\} = \\ &= 3(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2) > 0. \end{aligned}$$

Neemt  $\varphi$  af van  $\alpha$  tot 0, dan neemt  $f(s)$  dus voortdurend af, en wel van de positieve waarde  $(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + \varrho^2) \sin \alpha$  tot de negatieve waarde  $-2(a^2 + \varrho^2)\sin \alpha$ . Er is dus één tussen  $\alpha$  en 0 gelegen waarde  $\varphi_1$  van  $\varphi$ , waarvoor  $f(s) = 0$  is, dus  $N' = 0$ . Voor  $\varphi_1 < \varphi \leq \alpha$  is  $N' > 0$ . Is  $\varphi$  tot  $\varphi_1$  afgenomen, dan laat de staaf de muur los.

132.\* We bepalen het maximum van de in 130 berekende druk  $N'$ . Daarvoor geldt, als  $\sin \varphi = s$  gesteld wordt:

$$\frac{dN'}{d\varphi} = \frac{3}{4} mg(3 + 2s \sin \alpha - 6s^2) = \frac{3}{4} mg F(s).$$

Blijkens  $\frac{2}{3} \sin \alpha \leq s \leq \sin \alpha$  is  $F'(s) = 2(\sin \alpha - 6s) < 0$ . Neemt  $s$  af van  $\sin \alpha$  tot  $\frac{2}{3} \sin \alpha$ , dan neemt  $F(s)$  dus toe en wel van  $3 - 4 \sin^2 \alpha$  tot  $3 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha$ . Daar  $\alpha \leq 60^\circ$  is, is dus  $F(s) \geq 0$ , dus  $\frac{dN'}{d\varphi} \geq 0$ . Neemt  $s$  af van  $\sin \alpha$  tot  $\frac{2}{3} \sin \alpha$ , dan neemt  $N'$  dus voortdurend af van  $\frac{3}{4} mg \sin \alpha \cos \alpha$  tot 0, zodat  $N'$  maximaal is voor  $\varphi = \alpha$ . Daar het horizontale vlak op het blok een normale druk  $Mg$  uitoefent en (bij in rust blijven van het blok) een wrijving  $N'$ , blijft het blok gedurende de gehele beweging in rust, als voldaan in aan  $\frac{3}{4} mg \sin \alpha \cos \alpha \leq fMg$ , dus aan:

$$f \geq \frac{3m}{4M} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Opmerking. Is  $\alpha > 60^\circ$ , dan is  $F(s) < 0$ , als  $\varphi_1 < \varphi \leq \alpha$  is, waarin  $\varphi_1$  bepaald is door:

$$\sin \varphi_1 = \frac{1}{6}(\sin \alpha + \sqrt{18 + \sin^2 \alpha}),$$



terwijl  $F(s) > 0$  is, als  $\frac{2}{3} \sin \alpha \leq \sin \varphi < \sin \varphi_1$  is. Neemt  $\varphi$  af, met  $\alpha$  beginnend, dan neemt  $N'$  dus eerst toe tot:

$$\frac{3}{4} mg(3 \sin \varphi_1 - 2 \sin \alpha) \cos \varphi_1,$$

om vervolgens tot 0 af te nemen. Dit voert tot de voorwaarde:

$$f \geq \frac{3m}{4M} (3 \sin \varphi_1 - 2 \sin \alpha) \cos \varphi_1.$$

133.\* De verplaatsing van het blok noemen we  $u$  en de hoek, die de staaf  $AB$  met het horizontale vlak maakt, noemen we  $\varphi$ . De projectie  $O$  van  $B_0$  op het horizontale vlak nemen we als oorsprong,  $OA_0$  als positieve  $x$ -as en de positieve  $z$ -as verticaal naar boven. De coördinaten van het zwaartepunt van de staaf zijn:

$$x = -u + l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi.$$

Het gemeenschappelijke zwaartepunt van staaf en blok blijft in dezelfde verticaal. Hieruit volgt:

$$-Mu + m(-u + l \cos \varphi) = ml \cos \alpha,$$

dus:

$$\begin{aligned} (M + m)u &= ml(\cos \varphi - \cos \alpha), \\ (M + m)x &= l(M \cos \varphi + m \cos \alpha), \\ (M + m)\dot{u} &= -ml \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ (M + m)\dot{x} &= -Ml \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = l \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

De levende kracht van het geheel is:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2 = \\ &= ml^2 \frac{4M + 4m - 3m \sin^2 \varphi}{6(M + m)} \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$\begin{aligned} l \dot{\varphi}^2 &= 6(M + m)g \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{4M + 4m - 3m \sin^2 \varphi}, \\ l \ddot{\varphi} &= 3(M + m)g \frac{3m(2 \sin \alpha - \sin \varphi) \sin \varphi - 4M - 4m}{(4M + 4m - 3m \sin^2 \varphi)^2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -\frac{ml}{M + m} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = \\ &= 3mg \frac{4(M + m)(3 \sin \varphi - 2 \sin \alpha) - 3m \sin^3 \varphi}{(4M + 4m - 3m \sin^2 \varphi)^2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

De druk  $N'$ , die blok en staaf op elkaar uitoefenen is:

$$N' = M\ddot{u} = 3 Mmg \frac{4(M+m)(3 \sin \varphi - 2 \sin \alpha) - 3 m \sin^3 \varphi}{(4M + 4m - 3m \sin^2 \varphi)^2} \cos \varphi.$$

Als we  $4(M+m)(3s - 2 \sin \alpha) - 3ms^3 = F(s)$  ( $s = \sin \varphi$ ) stellen, dan is:

$$F'(s) = 3\{4(M+m) - 3ms^2\}.$$

Bijgevolg is  $F'(s) > 0$ . Neemt  $\varphi$  af van  $\alpha$  tot 0, dan neemt  $F(s)$  dus af van  $(4M + 4m - 3m \sin^2 \alpha) \sin \alpha$  tot  $-8(M+m) \sin \alpha$  en wordt dus voor één tussen  $\alpha$  en 0 gelegen waarde  $\varphi_1$  van  $\varphi$ , bepaald door:

$$4(M+m)(3 \sin \varphi_1 - 2 \sin \alpha) - 3m \sin^3 \varphi_1 = 0,$$

gelijk aan 0. Voor  $\varphi = \varphi_1$  laten staaf en blok elkaar los. De waarde  $u_1$  van  $u$  is dan:

$$u_1 = \frac{ml}{M+m} (\cos \varphi_1 - \cos \alpha).$$

*Opmerkingen.* 1. De druk  $N$ , die het horizontale vlak op de staaf uitoefent, voldoet aan:

$$N - mg = ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Wegens de voor  $l\dot{\varphi}^2$  en  $l\ddot{\varphi}$  gevonden uitdrukkingen volgt hieruit:

$$\begin{aligned} & N(4M + 4m - 3m \sin^2 \varphi)^2 = \\ & = mg\{4M^2(1 + 9 \sin^2 \varphi) + Mm(8 + 39 \sin^2 \varphi - 9 \sin^4 \varphi) + \\ & \quad + m^2(4 + 3 \sin^2 \varphi) - 6(M+m)(4M+m) \sin \alpha \sin \varphi\}. \end{aligned}$$

In verband met de voor  $N'$  gevonden uitdrukking vindt men door eliminatie van  $\alpha$ :

$$N = \frac{1}{4} mg + \frac{4M+m}{4M} N' \operatorname{tg} \varphi.$$

Hieruit ziet men, dat  $N > 0$  is, tenminste zolang  $N' > 0$  is, dus dat de staaf, zolang deze met het blok in aanraking is, het horizontale vlak niet loslaat.

2. Men kan zich voorstellen, dat de staaf het blok niet kan loslaten, b.v. doordat aan het uiteinde  $B$  van de staaf een ringetje bevestigd is, dat loopt langs een verticale ijzerdraad gespannen langs een opstaand zijvlak van het blok op een te verwaarlozen afstand daarvan; in dat geval kan  $N'$  negatief worden. Ook dan blijft  $N$

positief en laat de staaf het horizontale vlak niet los. Dit blijkt door de formule voor  $N$  aldus te schrijven:

$$N(4M + 4m - 3m \sin^2 \varphi)^2 = \\ = 4mg [ \{ M(\sin \alpha - 3 \sin \varphi) + m(\sin \alpha - \sin \varphi) \}^2 + (M + m)^2 \cos^2 \alpha ] + \\ + m^2 g \{ m(2 \sin \alpha - \sin \varphi) + M(2 \sin \alpha + 15 \sin \varphi - 9 \sin^3 \varphi) \} \sin \varphi.$$

134. Als coördinaat voeren we in de hoek  $\varphi$ , die  $BA$  maakt met de naar boven gerichte verticale geleiding (zodat in de beginstand  $\varphi = 0$  is). Dan is  $l\dot{\varphi}_0 = \frac{1}{2} v_0$ , waaruit men afleidt:

$$l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} v_0^2 - 6gl(1 - \cos \varphi) \quad \{ = \frac{1}{4}(v_0^2 - 12gl \sin^2 \frac{1}{2} \varphi).$$

Is  $v_0^2 < 12gl$ , dan slingert de staaf heen en weer met een amplitudo (grootste absolute waarde van  $\varphi$ )  $\text{bgcos} (1 - \frac{v_0^2}{6gl})$ . Het punt  $B$  loopt dan heen en weer tussen twee standen, die op afstanden  $2l$  en  $\frac{6gl - v_0^2}{3gl}$  van  $O$  liggen; positief gerekend onder  $O$ .

Is  $v_0^2 \leq 6gl$ , dan is de amplitudo  $\leq \frac{1}{2}\pi$ ; deze is dan ook te schrijven als  $2 \text{bgsin} \frac{v_0}{2\sqrt{3gl}}$ . Het punt  $A$  loopt dan heen en weer tussen

twee punten  $A_2$  en  $A_2'$ , die op een afstand  $\frac{v_0}{3g} \sqrt{12gl - v_0^2}$  aan weerskanten van  $O$  liggen. Is  $6gl < v_0^2 < 12gl$ , dan loopt  $A$  aldus:

$$A_1 A_2 A_1 A_1' A_2' A_1' A_1 A_2 A_1 \dots$$

Bij de aangegeven punten keert  $A$  terug;  $A_1$  en  $A_1'$  zijn de punten op de horizontale rechte, die op een afstand  $2l$  aan weerskanten van  $O$  liggen ( $A_1$  en  $A_2$  aan dezelfde kant van  $O$ ).

Is  $v_0^2 > 12gl$ , dan loopt de staaf rond en neemt  $\varphi$  dus voortdurend toe. Het punt  $A$  loopt dan heen en weer tussen  $A_1$  en  $A_1'$ , terwijl ook  $B$  heen en weer loopt tussen twee punten op een afstand  $2l$  aan weerskanten van  $O$ . Bevindt  $B$  zich in zijn hoogste stand, dan passeert  $A$  met een snelheid  $\sqrt{v_0^2 - 12gl}$  het punt  $O$ .

Is  $v_0^2 = 12gl$ , dan is  $l\dot{\varphi} = \frac{1}{2} v_0 \cos \frac{1}{2} \varphi$ , dus:

$$t = \frac{2l}{v_0} \int_0^\varphi \frac{du}{\cos \frac{1}{2} u} = \frac{4l}{v_0} \ln \frac{1 + \sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \varphi}.$$

De staaf nadert asymptotisch tot de labiele evenwichtsstand, waarin  $B$  verticaal boven  $A$  ligt ( $\varphi = \pi$ ). De stand, waarbij  $B$  het

punt  $O$  passeert ( $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ), wordt bereikt op het tijdstip  $\frac{4l}{v_0} \ln(1 + \sqrt{2})$  met een snelheid  $\frac{1}{2}\sqrt{2}v_0$  van  $B$ .

135. Met de coördinaat  $\varphi$  van 134 is  $4l\ddot{\varphi} + 3g \sin \varphi = 0$ , dus bij benadering  $4l\ddot{\varphi} + 3g\varphi = 0$ . De periode der kleine slingeren is  $4\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$ .

136. Zij  $M$  het midden van  $EE'$  en  $\varphi$  de hoek, die  $MC$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $M$  maakt, positief gerekend als  $C$  en  $E$  aan dezelfde kant van die verticaal liggen. Alleen de waarden van  $\varphi$ , die aan  $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$  voldoen, zijn mogelijk ( $\varphi = 90^\circ$  als  $C$  in  $E$  valt en  $\varphi = -90^\circ$  als  $C$  in  $E'$  valt). We nemen  $M$  als oorsprong,  $ME$  als positieve  $x$ -as en de positieve  $z$ -as verticaal naar beneden. Het zwaartepunt  $Z$  bevindt zich op een afstand  $\frac{1}{2}\sqrt{2}p$  van  $C$  op de bissectrice van  $\angle ACA'$ . Daar  $ZC$  een hoek  $\frac{1}{2}\varphi$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $Z$  maakt (zie de fig. bij 142), zijn de coördinaten van  $Z$ :

$$x = l \sin \varphi - \frac{1}{2}\sqrt{2}p \sin \frac{1}{2}\varphi, \quad z = l \cos \varphi - \frac{1}{2}\sqrt{2}p \cos \frac{1}{2}\varphi.$$

Hieruit volgt voor de potentiële energie:

$$\begin{aligned} P &= mg(\sqrt{2}p \cos \frac{1}{2}\varphi - 2l \cos \varphi), \\ \frac{dP}{d\varphi} &= mg(2l \sin \varphi - \frac{1}{2}\sqrt{2}p \sin \frac{1}{2}\varphi) = \\ &= 4mgl(\cos \frac{1}{2}\varphi - \frac{p}{4\sqrt{2}l}) \sin \frac{1}{2}\varphi. \end{aligned}$$

Is  $l < p \leq 4l$ , dan is  $\frac{dP}{d\varphi} > 0$  voor  $0 < \varphi < 90^\circ$ . Neemt  $\varphi$  toe van  $0$  tot  $90^\circ$ , dan neemt  $P$  voortdurend toe, zodat  $\varphi = 0$  ( $C$  verticaal onder  $M$ ) een stabiele evenwichtsstand is. Andere evenwichtsstanden zijn er dan niet, behoudens de labiele evenwichtsstanden  $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi$  als  $p = 4l$  is.

Is  $p \geq 4\sqrt{2}l$ , dan is  $\frac{dP}{d\varphi} < 0$  voor  $0 < \varphi < 90^\circ$ . In dat geval is  $\varphi = 0$  een labiele evenwichtsstand. Stabiele evenwichtsstanden zijn dan die, waarbij  $C$  in  $E$  of in  $E'$  ligt en de beweging naar één kant door de verbindingen belet wordt.

Is  $4l < p < 4\sqrt{2}l$  en neemt  $\varphi$  toe van  $0$  tot  $90^\circ$ , dan neemt  $P$  eerst toe, totdat  $\varphi = 2 \operatorname{bgcos} \frac{p}{4\sqrt{2}l}$  geworden is, om vervolgens weer af te nemen. Nu is  $\varphi = 0$  een stabiele evenwichtsstand, terwijl door  $\cos \frac{1}{2} \varphi = \frac{p}{4\sqrt{2}l}$  twee labiele evenwichtsstanden worden aangewezen. De standen, waarbij  $C$  in  $E$  of in  $E'$  ligt, zijn stabiele evenwichtsstanden.

137. Volgens 136 gaat, als  $l < p < 4l$  is, het lichaam met toenemende levende kracht door de stand  $\varphi = 0$ . Is  $p > 4l$ , dan blijft het lichaam in zijn beginstand, daar  $P$  in die stand minimaal is. Is  $p = 4l$ , dan blijft het lichaam eveneens in zijn beginstand en is dan in labiel evenwicht; in de beginstand is dan nl.  $P$  maximaal en  $\frac{dP}{d\varphi} = 0$ .

Uit de coördinaten van  $Z$  (zie 136) volgt:

$$\begin{aligned}x &= \dot{\varphi}(l \cos \varphi - \frac{1}{4} \sqrt{2} p \cos \frac{1}{2} \varphi), \\z &= \dot{\varphi}(-l \sin \varphi + \frac{1}{4} \sqrt{2} p \sin \frac{1}{2} \varphi), \\x^2 + z^2 &= \dot{\varphi}^2(l^2 + \frac{1}{8} p^2 - \frac{1}{2} \sqrt{2} lp \cos \frac{1}{2} \varphi).\end{aligned}$$

Het traagheidsmoment om een as door  $Z$  loodrecht op het vlak  $ACA'$  is:

$$2(\frac{1}{8} mp^2 + \frac{1}{2} mp^2) = \frac{5}{8} mp^2.$$

De hoeksnelheid van het lichaam is  $\frac{1}{2} \dot{\varphi}$ . De totale levende kracht is dus:

$$L = \frac{1}{8} m \dot{\varphi}^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp \cos \frac{1}{2}\varphi).$$

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp \cos \frac{1}{2}\varphi) &= \\= 6g(p - \sqrt{2}p \cos \frac{1}{2}\varphi + 2l \cos \varphi).\end{aligned}$$

Is  $l < p < 4l$ , dan vindt men voor de (met de index 1 gemerkte) stand  $\varphi = 0$ :

$$\dot{\varphi}_1^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp) = 6g(2l + p - \sqrt{2}p).$$

Het punt  $C$  heeft in die stand een snelheid  $l \dot{\varphi}_1$ .

*Opmerking.* Is  $p = 4l$ , dan is:

$$l\dot{\varphi}^2(19 - 6\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\varphi) = 3g(2\cos\frac{1}{2}\varphi - \sqrt{2})^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{3g}} \int_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{19 - 6\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}u}}{2\cos\frac{1}{2}u - \sqrt{2}} du.$$

Deze integraal is divergent voor  $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ , zodat een van de beginstand verschillende stand eerst na oneindig lange tijd bereikt wordt, d.w.z. niet bereikt wordt. Het lichaam blijft dus in zijn beginstand.

138.\* Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi}^2 l^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp\cos\frac{1}{2}\varphi) + \\ & + 6gl^2(\sqrt{2}p\cos\frac{1}{2}\varphi - 2l\cos\varphi) = \\ & = v_0^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp) + 6gl^2(\sqrt{2}p - 2l). \end{aligned}$$

Wordt de (met 2 gemerkte) stand, waarbij  $C$  in  $E$  gekomen is ( $\varphi = 90^\circ$ ), bereikt, dan vindt men de snelheid  $v_2$  van  $C$  in die stand uit:

$$\begin{aligned} & v_2^2(6l^2 + 2p^2 - 3lp) = \\ & = v_0^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp) + 6gl^2(\sqrt{2}p - p - 2l). \end{aligned}$$

De stand  $\varphi = 90^\circ$  wordt bereikt, als  $L_0 + P_0$  groter is dan het maximum van  $P$ . Is  $l < p \leq 4l$ , dan komt die voorwaarde (volgens 136) neer op  $L_0 + P_0 > P_2$ , dus op:

$$v_0^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp) > 6gl^2(2l + p - p\sqrt{2});$$

is  $p < 4l$ , dan wordt de stand  $\varphi = 90^\circ$  ook nog bereikt (nu met een snelheid 0), als  $v_0$  voldoet aan:

$$v_0^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp) = 6gl^2(2l + p - p\sqrt{2}).$$

Is  $p = 4l$ , dan gaat dit over in  $v_0 = \frac{1}{17}(5 - 2\sqrt{2})\sqrt{6gl}$ ; de stand  $\varphi = 90^\circ$  wordt dan niet bereikt, maar asymptotisch genaderd.

Is  $4l < p < 4\sqrt{2}l$ , dan wordt de stand  $\varphi = 90^\circ$  bereikt, als de labiele evenwichtsstand  $\varphi_1 = 2\text{bgcos}\frac{p}{4\sqrt{2}l}$  met een van 0 verschillende snelheid gepasseerd wordt, dus als  $L_0 + P_0 > P_1$  is, dus als:

$$v_0^2(6l^2 + 2p^3 - 3\sqrt{2}lp) > 3gl^2(2\sqrt{2}l - \frac{1}{2}p)^2$$

is; met het gelijktken ( $L_0 + P_0 = P_1$ ) wordt de labiele evenwichtsstand asymptotisch genaderd, dus niet gepasseerd.

Is  $p \geq 4\sqrt{2}l$ , dan wordt de stand  $\varphi = 90^\circ$  (met voortdurend toenemende levende kracht) bereikt, als  $v_0 > 0$  is. Is  $v_0 = 0$ , dan blijft het lichaam in rust (labiel evenwicht).

139.\* Door  $L + P = \text{constant}$  te fluxioneren, vindt men:

$$2\ddot{\varphi}(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp \cos \frac{1}{2}\varphi) + \\ + \frac{3}{2}\sqrt{2}lp\dot{\varphi}^2 \sin \frac{1}{2}\varphi + 3g(4l \sin \varphi - \sqrt{2}p \sin \frac{1}{2}\varphi) = 0.$$

Voor kleine waarden van  $\varphi$  wordt dit bij benadering:

$$4(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp)\ddot{\varphi} + 3g(8l - \sqrt{2}p)\varphi = 0.$$

De periode der kleine slingeren is dus:

$$4\pi \sqrt{\frac{6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp}{3g(8l - \sqrt{2}p)}}.$$

Is  $\alpha$  (grootste waarde van  $\varphi$ ) de amplitudo van willekeurige slingeren om de stand  $\varphi = 0$ , dan is:

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi}^2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp \cos \frac{1}{2}\varphi) = \\ & = 6g(2l \cos \varphi - \sqrt{2}p \cos \frac{1}{2}\varphi - 2l \cos \alpha + \sqrt{2}p \cos \frac{1}{2}\alpha) = \\ & = 6g(\cos \frac{1}{2}\varphi - \cos \frac{1}{2}\alpha) \{4l(\cos \frac{1}{2}\varphi + \cos \frac{1}{2}\alpha) - \sqrt{2}p\} = \\ & = 12g(\sin^2 \frac{1}{4}\alpha - \sin^2 \frac{1}{4}\varphi) \{8l - \sqrt{2}p - 8l(\sin^2 \frac{1}{4}\alpha + \sin^2 \frac{1}{4}\varphi)\}. \end{aligned}$$

Alleen die waarden van de amplitudo  $\alpha$  zijn mogelijk, waarvoor:

$$4l(\cos \frac{1}{2}\varphi + \cos \frac{1}{2}\alpha) > \sqrt{2}p$$

is, ook voor  $\varphi = \alpha$ , dus waarvoor  $\cos \frac{1}{2}\alpha > \frac{p}{4\sqrt{2}l}$  is. Dit is van-

zelf zo, als  $p \leq 4l$  is, en drukt in het geval  $4l < p < 4\sqrt{2}l$  uit, dat de uiterste standen tussen de labiele evenwichtspunten liggen; laat men het lichaam zonder beginsnelheid los in een stand, waarbij

$\varphi > 2 \text{bg} \cos \frac{p}{4\sqrt{2}l}$  is, dan wordt de stabiele evenwichtsstand niet

bereikt. Voor de periode vindt men:

$$= \frac{2}{\sqrt{3}g} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp \cos \frac{1}{2}\varphi}{(\sin^2 \frac{1}{4}\alpha - \sin^2 \frac{1}{4}\varphi) \{8l - \sqrt{2}p - 8l(\sin^2 \frac{1}{4}\alpha + \sin^2 \frac{1}{4}\varphi)\}}} d\varphi.$$

Door de substitutie  $\sin \frac{1}{4}\varphi = \sin \frac{1}{4}\alpha \sin u$  wordt dit:

$$T = \frac{8}{\sqrt{3}g_0} \int_0^{1/2\pi} \sqrt{\frac{6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp + 6\sqrt{2}lp \sin^2 \frac{1}{4} a \sin^2 u}{(1 - \sin^2 \frac{1}{4} a \sin^2 u) \{8l - \sqrt{2}p - 8l(1 + \sin^2 u) \sin^2 \frac{1}{4} a\}}} du.$$

Neemt  $a$  af, dan neemt de laatste integrand af, zodat ook  $T$  afneemt. Voor kleine waarden van  $a$  vindt men (door de termen met  $\sin^2 \frac{1}{4} a$  te verwaarlozen) de boven gevonden uitdrukking.

140.\* Van de kracht in  $C$  op de stang  $AC$  uitgeoefend noemen we de langs  $CA$  vallende component  $Q$  (positief gerekend naar  $A$  toe) en de loodrecht op  $CA$  staande component  $R$  (positief gerekend van  $B$  af). Het op de stang  $AC$  uitgeoefende moment noemen we  $M$ , positief gerekend in de zin  $ECE'$ , dus in de zin van de in 136 ingevoerde hoek  $\varphi$ . De door de ringetjes  $E$  en  $E'$  uitgeoefende krachten (die loodrecht op  $AC$  resp.  $A'C$  staan) noemen we  $N$  resp.  $N'$ . We bepalen eerst  $N$  en  $N'$  uit de beweging van het zwaartepunt  $Z$  (massa  $2m$ ) van het lichaam in horizontale en verticale richting. Dit geeft in verband met de in 136 aangegeven coördinaten van  $Z$ :

$$\begin{aligned} & -N \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) + N' \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = \\ & = 2m \{ l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - \frac{1}{8} \sqrt{2} p (2\ddot{\varphi} \cos \frac{1}{2}\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \frac{1}{2}\varphi) \}. \\ & \quad 2mg - N \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) - N' \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = \\ & = 2m \{ -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + \frac{1}{8} \sqrt{2} p (2\ddot{\varphi} \sin \frac{1}{2}\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \frac{1}{2}\varphi) \}. \end{aligned}$$

Door de eerste vergelijking met  $\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$  en de tweede met  $\cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$  te vermenigvuldigen en op te tellen, vindt men:

$$N = 2m \{ (g - l\ddot{\varphi}) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) + l\dot{\varphi}^2 \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) + \frac{1}{8} p (2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) \}.$$

We beschouwen nu de enkele staaf  $AC$ . De coördinaten van het zwaartepunt  $G$  daarvan zijn:

$$x_G = l \sin \varphi + p \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi), \quad z_G = l \cos \varphi - p \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi).$$

Uit de beweging van  $G$  in horizontale en verticale richting volgt:

$$\begin{aligned} & Q \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) + (R - N) \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = \\ & = ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - \frac{1}{4} mp \{ 2\ddot{\varphi} \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \} \\ & \quad mg - Q \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) + (R - N) \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = \\ & = -ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - \frac{1}{4} mp \{ 2\ddot{\varphi} \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \} \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze als boven volgt hieruit:

$$R - N = m \{ (l\ddot{\varphi} - g) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) - l\dot{\varphi}^2 \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) - \frac{1}{2} p \ddot{\varphi} \}.$$



Uit  $GE = 2 l \cos(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) - p$  (positief gerekend van C naar A) volgt in verband met de momentenstelling om G:

$$M + 2 N l \cos(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) + (R - N)p = \\ = \frac{1}{3} m p^2 \cdot \frac{1}{2} \ddot{\varphi} = \frac{1}{6} m p^2 \ddot{\varphi}.$$

Hieruit volgt:

$$M = m \left[ \ddot{\varphi} \left\{ \frac{2}{3} p^2 + 2 l^2 (1 - \sin \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} p l (\sin \frac{1}{2} \varphi - \cos \frac{1}{2} \varphi) \right\} + \right. \\ \left. + \dot{\varphi}^2 \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{2} p l (\sin \frac{1}{2} \varphi + 3 \cos \frac{1}{2} \varphi) - 2 l^2 \cos \varphi \right\} + \right. \\ \left. + g \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{2} p (\cos \frac{1}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi) + 2 l (\sin \varphi - 1) \right\} \right].$$

Het op de stang A'C uitgeoefende moment  $-M$  wordt uit de uitdrukking voor  $M$  gevonden door deze met  $-1$  te vermenigvuldigen en  $\varphi$  door  $-\varphi$  te vervangen. De uitdrukking voor  $M$  mag dus niet veranderen als men  $\varphi$  door  $-\varphi$  vervangt. De termen:

$$m \left\{ \ddot{\varphi} \left( \frac{2}{3} p^2 + 2 l^2 - \sqrt{2} p l \cos \frac{1}{2} \varphi \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sqrt{2} p l \dot{\varphi}^2 \sin \frac{1}{2} \varphi + g \left( 2 l \sin \varphi - \frac{1}{2} \sqrt{2} p \sin \frac{1}{2} \varphi \right) \right\},$$

die bij die vervanging met  $-1$  worden vermenigvuldigd, moeten dus tegen elkaar wegvallen, hetgeen volgens de eerste vergelijking van 139 ook inderdaad gebeurt. Men vindt dus (voor iedere beginvoorwaarde):

$$M = m \left\{ \ddot{\varphi} l (\sqrt{2} p \sin \frac{1}{2} \varphi - 2 l \sin \varphi) + \right. \\ \left. + \dot{\varphi}^2 l \left( \frac{3}{4} \sqrt{2} p \cos \frac{1}{2} \varphi - 2 l \cos \varphi \right) + g \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} p \cos \frac{1}{2} \varphi - 2 l \right) \right\}.$$

Voor de beginstand ( $\varphi = 90^\circ$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ) geldt volgens de eerste vergelijking van 139:

$$2 \ddot{\varphi}_0 (6 l^2 + 2 p^2 - 3 l p) = 3 g (p - 4 l).$$

Dit voert tot:

$$M_0 = m \left\{ \ddot{\varphi}_0 l (p - 2 l) + \frac{1}{2} g (p - 4 l) \right\} = m g p^2 \frac{p - 4 l}{6 l^2 + 2 p^2 - 3 l p},$$

zodat  $M_0 < 0$  is. Voor de (met 1 gemerkte) stand  $\varphi = 0$  geldt:

$$M_1 = m \left\{ \dot{\varphi}_1^2 l \left( \frac{3}{4} \sqrt{2} p - 2 l \right) + g \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} p - 2 l \right) \right\},$$

dus volgens de in 137 voor  $\dot{\varphi}_1^2$  gevonden uitdrukking:

$$M_1 = m g \frac{\sqrt{2} p^3 + (\frac{9}{2} \sqrt{2} - 16) p^2 l + 6(5 \sqrt{2} - 2) p l^2 - 36 l^3}{2 p^2 - 3 \sqrt{2} p l + 6 l^2}.$$

Opmerkingen. 1. Uit de opgestelde vergelijkingen vindt men:

$$Q = m \left\{ (g + l \ddot{\varphi}) \cos(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) + l \dot{\varphi}^2 \sin(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) - \frac{1}{4} p \dot{\varphi}^2 \right\}.$$

$$R = m \left\{ (g - l \ddot{\varphi}) \sin(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) + l \dot{\varphi}^2 \cos(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) - \frac{1}{4} p \dot{\varphi}^2 \right\}.$$

Door  $\varphi$  door  $-\varphi$  te vervangen, gaat  $Q$  over in de langs  $CA'$  valende component (positief gerekend van  $C$  naar  $A'$ ) van de kracht door  $CA$  op de stang  $CA'$  uitgeoefend. Die kracht is ook gelijk aan  $R$ , zodat  $Q$  en  $R$  in elkaar overgaan door  $\varphi$  door  $-\varphi$  te vervangen. Dat dit met de voor  $Q$  en  $R$  gevonden uitdrukkingen in overeenstemming is, levert een contrôle. Men vindt (daar  $\ddot{\varphi}_1 = 0$  is):

$$Q_0 = m(g + l \ddot{\varphi}_0) = m g p \frac{4p - 3l}{6l^2 + 2p^2 - 3lp}, \quad R_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} Q_1 = R_1 &= \frac{1}{4} m \left\{ 2\sqrt{2}g + (2\sqrt{2}l - p)\dot{\varphi}_1^2 \right\} = \\ &= m g \frac{18\sqrt{2}l^2 + (5\sqrt{2} - 3)p^2 + 6(\sqrt{2} - 4)pl}{2(6l^2 + 2p^2 - 3\sqrt{2}lp)}. \end{aligned}$$

Dat  $Q_1 = R_1$  is, betekent, dat de op de stang  $CA$  in  $C$  uitgeoefende kracht in de stand  $\varphi = 0$  horizontaal is, iets dat op grond van symmetrie te voorspellen is.

2. Voor de (met 2 gemerkte) stand  $\varphi = -90^\circ$ , waarbij  $C$  in  $E'$  gekomen is, geldt:

$$\ddot{\varphi}_2 = -\ddot{\varphi}_0, \quad M_2 = M_0, \quad Q_2 = 0, \quad R_2 = Q_0.$$

3. De uitdrukking voor  $N'$  krijgt men uit die voor  $N$  door  $\varphi$  door  $-\varphi$  te vervangen. Men vindt:

$$N_0 = N_2' = \frac{1}{2} m p \ddot{\varphi}_0 = 3 m g \frac{p - 4l}{4(6l^2 + 2p^2 - 3lp)},$$

$$\begin{aligned} N_2 = N_0' &= \frac{1}{2} m \left\{ 4g + (4l - p)\ddot{\varphi}_0 \right\} = \\ &= m g \frac{13p^2}{4(6l^2 + 2p^2 - 3lp)}. \end{aligned}$$

141.\* De pool  $P$  is het snijpunt der loodlijnen in  $E$  en  $E'$  op  $CA$  resp.  $CA'$  opgericht. De poolbaan is dus de boven  $EE'$  gelegen halve cirkel op  $EE'$  als middellijn beschreven (straal  $l$ , middelpunt  $M$ ). Uit  $CP = 2l$  blijkt, dat de poolkromme een kwartcirkel is met middelpunt  $C$  en straal  $2l$ ; de eindpunten van de poolkromme liggen op  $CA$  en  $CA'$ .

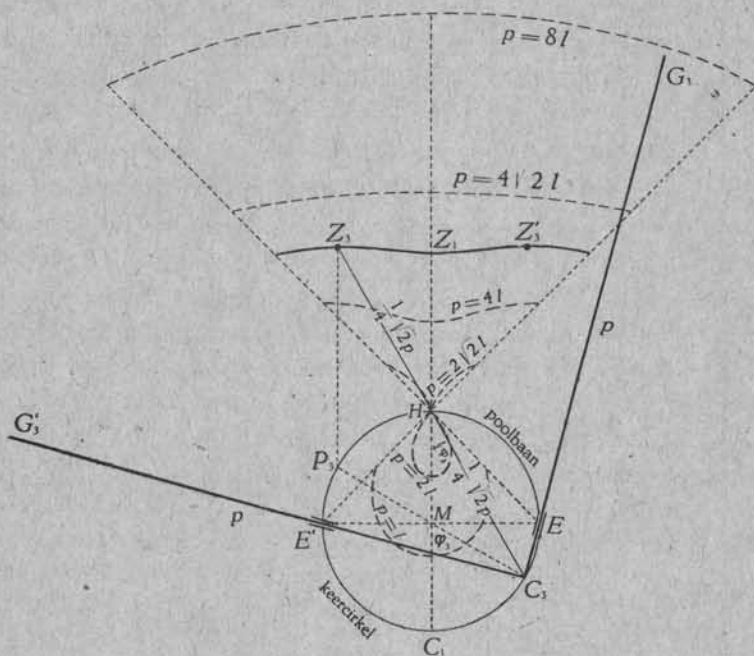
142.\* Het punt  $C$  doorloopt de onderste helft van de cirkel  $M$ , waarvan de poolbaan de bovenste helft is. De baan van  $Z$  ontstaat door het hoogste punt  $H$  van de cirkel  $M$  te verbinden met een veranderlijk punt  $C$  van de onderste helft van die cirkel en op  $CH$  naar boven een stuk  $CZ = \frac{1}{2} \sqrt{2} p$  uit te zetten. De baan van  $Z$  is dus een deel van een limaçon van Pascal, die de cirkel  $M$  tot richtcirkel heeft en het punt  $H$  tot dubbelpunt (knooppunt, keerpunt of geïsoleerd punt, al naar gelang  $p < 2 \sqrt{2} l$ ,  $p = 2 \sqrt{2} l$  of  $p > 2 \sqrt{2} l$  is); in het geval  $p = 2 \sqrt{2} l$  is de limaçon een cardioïde (waarnaar de beweging een cardioïdale heet). De baan van  $Z$  is het deel van de limaçon, waarop  $Z_1$ , het bovenste der beide van  $H$  verschillende snijpunten met de rechte  $MH$  (gelegen op een hoogte  $\frac{1}{2} \sqrt{2} p$  boven het laagste punt  $C_1$  van de cirkel  $M$ ), ligt en dat op de rechten  $EH$  en  $E'H$  gelegen eindpunten heeft. De pool  $P$  van de beweging ligt op de cirkel  $M$  diametraal tegenover  $C$ ; de raaklijn in  $Z$  aan de baan van  $Z$  staat loodrecht op  $PZ$ .

De evenwichtsstand  $\varphi = 0$  ( $C$  verticaal onder  $M$ , dus in  $C_1$ ) is stabiel, als de baan van  $Z$  in  $Z_1$  zijn bolle kant naar beneden keert (daar dan de potentiële energie een minimum heeft, als  $C$  in  $C_1$ , dus  $Z$  in  $Z_1$  valt). Dit is het geval, als de limaçon een dubbelraaklijn met twee verschillende (reële) raakpunten heeft. Die raakpunten worden gevonden door de cirkel  $M$  te snijden met de cirkel, die  $H$  tot middelpunt en  $\frac{1}{4} \sqrt{2} p$  tot straal heeft. Zijn  $C_3$  en  $C_3'$  de snijpunten en zijn  $P_3$  resp.  $P_3'$  de diametraal daartegenover gelegen punten van de cirkel  $M$  (de bijbehorende polen), dan zijn de snijpunten  $Z_3$  en  $Z_3'$  van  $C_3H$  en  $C_3'H$  met de verticale rechten door  $P_3$  resp.  $P_3'$  de raakpunten van de limaçon met de (horizontale) dubbelraaklijn. Die raakpunten zijn dus reëel en verschillend, als  $\frac{1}{4} \sqrt{2} p < 2l$  is, dus als  $p < 4 \sqrt{2} l$  is. Alleen in het geval  $p < 4 \sqrt{2} l$  is dus de evenwichtsstand  $\varphi = 0$  stabiel, in overeenstemming met het in 136 gevondene.

De raakpunten met de dubbelraaklijn behoren tot de baan van  $Z$  als de bovengenoemde snijpunten  $C_3$  en  $C_3'$  onder de rechte  $EE'$  liggen, dus als  $l \sqrt{2} < \frac{1}{4} \sqrt{2} p < 2l$  is, dus als  $4l < p < 4 \sqrt{2} l$  is. De punten  $Z_3$  en  $Z_3'$  zijn dan de hoogste punten van de baan van  $Z$ . Dit levert twee labiele evenwichtsstanden. Uit de figuur leest men voor de bijbehorende waarde  $\varphi_3$  van  $\varphi$  af:

$$\cos \frac{1}{2} \varphi_3 = \frac{HC_3}{HC_1} = \frac{\frac{1}{4} \sqrt{2} p}{2l} = \frac{p}{4 \sqrt{2} l}$$

in overeenstemming met het in 136 gevondene. In de figuur is een der beide labiele evenwichtsstanden geconstrueerd. Ter wille van de afmetingen van de figuur zijn de stangen  $CA$  en  $CA'$  slechts voor



de helft getekend, nl. van  $C$  tot de zwaartepunten  $G$  resp.  $G'$  der stangen. Verder zijn in de figuur nog door stippellijnen aangegeven de banen van  $Z$  voor de gevallen  $p = l$ ,  $p = 2l$ ,  $p = 2\sqrt{2}l$  (cardioïde),  $p = 4l$ ,  $p = 4\sqrt{2}l$  (limaçon met afplattingspunt, d.w.z. punt met 4-puntig rakende raaklijn) en  $p = 8l$ .

*Opmerkingen.* 1. Dat de getekende stand, waarbij  $C$  in  $C_3$  ligt, een evenwichtsstand is, ziet men ook onmiddellijk daaraan, dat de drie uitwendige krachten, de drukken in  $E$  en  $E'$  en het gewicht, door één punt gaan, nl.  $P_3$ . Ook als  $C$  in het laagste punt  $C_1$  van de cirkel  $M$  valt, gaan de drie krachten door één punt, nl.  $H$ . Op deze wijze ziet men echter niet of het evenwicht stabiel dan wel labiel is.

2. Of de evenwichtsstand  $\varphi = 0$  ( $C$  in  $C_1$ ) stabiel of labiel is, kan men ook vinden door met de stelling van **Bobillier** het bij  $Z_1$  behorende kromtemiddelpunt  $\zeta_1$  van de baan van  $Z$  te construeren. De cirkel  $M$  is de keercirkel, zodat met het kromtemiddelpunt  $E$  het

punt in het oneindige van  $HE$  correspondeert (daar  $H$  de bij  $Z_1$  behorende pool is). De rechte door  $Z_1$  evenwijdig aan  $HE$  snijdt de rechte  $\zeta_1 E$  in een punt  $Q$ , dat gelegen is op de rechte  $HE'$ , die in  $H$  loodrecht op de poolstraal  $HE$  staat (daar de raaklijn in  $H$  aan poolbaan en poolkromme loodrecht op de poolstraal  $HZ_1$  staat). We kunnen ons bepalen tot het geval  $p > 2\sqrt{2}l$ , daar anders  $Z_1$  onder  $H$  (of in  $H$ ) ligt en  $Z_1$  dus zeker het laagste punt van de baan van  $Z$  is. Is  $p > 2\sqrt{2}l$ , dan ligt  $Q$  op het verlengde van  $E'H$  aan de kant van  $H$ , dus aan dezelfde kant als  $E$  van de rechte  $C_1 H Z_1$  en wel op een afstand:

$$\frac{1}{2} HZ_1 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \sqrt{2} p - 2l) = \frac{1}{4} \sqrt{2} p - l$$

van die rechte. Het punt  $\zeta_1$  ligt boven of onder  $Z_1$ , al naar gelang  $Q$  op een kleinere of op een grotere afstand van  $C_1 H Z_1$  ligt dan  $E$ , dus al naar gelang  $\frac{1}{4} \sqrt{2} p - l < l$  of  $> l$  is, dus al naar gelang  $p < 4\sqrt{2}l$  of  $p > 4\sqrt{2}l$  is. Alleen in het eerste geval is de evenwichtsstand  $\varphi = 0$  stabiel.

3. Men kan de ligging van het punt  $\zeta_1$  ook bepalen met behulp van de formule, volgens welke  $\frac{1}{PD} - \frac{1}{P\delta}$  voor een zelfde poolstraal (rechte door de pool  $P$ ) constant is. Hierin is  $D$  een baanpunt en  $\delta$  het bijbehorende kromtemiddelpunt, terwijl op de poolstraal een bepaalde positieve zin (onverschillig welke) is aangenomen. Het punt in het oneindige van  $HC_1$  is het bij het kromtemiddelpunt  $C_1$  (keerpool) behorende baanpunt. Men heeft dus:

$$\frac{1}{HZ_1} - \frac{1}{H\zeta_1} = -\frac{1}{HC_1} = -\frac{1}{2l},$$

$$2l \cdot Z_1 \zeta_1 = HZ_1 \cdot H\zeta_1 = HZ_1 (HZ_1 + Z_1 \zeta_1),$$

$$Z_1 \zeta_1 = \frac{HZ_1^2}{2l - HZ_1} = \frac{HZ_1^2}{4l - C_1 Z_1} = \frac{HZ_1^2}{4l - \frac{1}{2} \sqrt{2} p},$$

waarbij de positieve zin naar boven genomen is. Het punt  $\zeta_1$  ligt dus boven of onder  $Z_1$ , al naar gelang  $4l > \frac{1}{2} \sqrt{2} p$  of  $4l < \frac{1}{2} \sqrt{2} p$  is. Voor  $4l = \frac{1}{2} \sqrt{2} p$  (dus  $p = 4\sqrt{2}l$ ) ligt  $\zeta_1$  in het oneindige: de baan keert dan in  $Z_1$  de bolle kant naar boven, zodat het evenwicht labiel is.

143. We nemen de hoek  $\varphi$ , die de staaf met het horizontale vlak maakt, als coördinaat. Verder nemen we een rechthoekig

assenkruis aan met de projectie  $O$  van  $Z_0$  op het horizontale vlak als oorsprong,  $OA_0$  als positieve  $x$ -as en  $OZ_0$  als positieve  $z$ -as. De rechthoekige coördinaten van  $Z$  zijn dan:

$$x = l(\cotg \varphi - 2 \cos \varphi), \quad z = 2 l \sin \varphi.$$

Hieruit vindt men:

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \left( -\frac{1}{\sin^2 \varphi} + 2 \sin \varphi \right), \quad \dot{z} = 2 l \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 = \\ = ml^2 \dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{2 \sin^4 \varphi} - \frac{2}{\sin \varphi} + \frac{8}{3} \right),$$

$$l \dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{2 \sin^4 \varphi} - \frac{2}{\sin \varphi} + \frac{8}{3} \right) = g(1 - 2 \sin \varphi).$$

Uit  $\sin \varphi_1 = \frac{1}{4}$  volgt  $736 l \dot{\varphi}_1^2 = 3 g (\dot{\varphi}_1 < 0)$ . De coördinaten van  $A$  en  $B$  zijn in een willekeurige stand:

$$x_A = l \cotg \varphi, \quad z_A = 0,$$

$$x_B = l(\cotg \varphi - 4 \cos \varphi), \quad z_B = 4 l \sin \varphi.$$

Hieruit volgt:

$$\dot{x}_A = -\frac{l \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi}, \quad \dot{x}_B = l \dot{\varphi} \left( -\frac{1}{\sin^2 \varphi} + 4 \sin \varphi \right),$$

$$\dot{z}_B = 4 l \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\dot{x}_{A_1} = 2 \sqrt{\frac{6gl}{23}}, \quad \dot{x}_{B_1} = \frac{15}{4} \sqrt{\frac{3gl}{46}}, \quad \dot{z}_{B_1} = -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{5gl}{46}}.$$

De snelheid van  $B$  op het tijdstip  $t = t_1$  is dus  $3 \sqrt{\frac{5gl}{46}}$ . Deze valt langs  $Z_0 A_1$ .

Blijkens de beweging van het zwaartepunt in horizontale en verticale richting worden de drukken  $N$  en  $N'$  gevonden uit:

$$N' \sin \varphi = ml \ddot{\varphi} \left( -\frac{1}{\sin^2 \varphi} + 2 \sin \varphi \right) + 2 ml \dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{\sin^3 \varphi} + 1 \right) \cos \varphi,$$

$$-mg + N + N' \cos \varphi = 2 ml (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Hieruit volgt:

$$N = mg + ml \ddot{\varphi} \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} - 2 ml \dot{\varphi}^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \right).$$

Uit de differentiaalvergelijking van de eerste orde volgt:

$$l \ddot{\varphi} \left( \frac{1}{2 \sin^4 \varphi} - \frac{2}{\sin \varphi} + \frac{8}{3} \right) + l \dot{\varphi}^2 \left( -\frac{1}{\sin^5 \varphi} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) \cos \varphi = -g \cos \varphi,$$

$$l \ddot{\varphi}_0 = -\frac{3\sqrt{3}}{40} g,$$

$$l \ddot{\varphi}_1 = \frac{3}{23} (63 l \dot{\varphi}_1^2 - \frac{1}{16} g) \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{429 \sqrt{15}}{23^2 \cdot 128} g.$$

Dit voert tot:

$$N_0 = m(g + 4\sqrt{3} l \ddot{\varphi}_0) = \frac{1}{10} mg, \quad N_0' = -6 ml \ddot{\varphi}_0 = \frac{9\sqrt{3}}{20} mg.$$

De waarde van  $N_0$  vindt men sneller uit de momentenstelling. Deze voert tot  $\sqrt{3} N_0 l = -\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_0 = \frac{1}{10} \sqrt{3} mgl$ . Verder vindt men:

$$N_1 = m(g + 16\sqrt{15} l \ddot{\varphi}_1 - 488 l \dot{\varphi}_1^2) = \frac{2249}{4232} mg.$$

$$N_1' = ml(-62 \ddot{\varphi}_1 + 130\sqrt{15} \dot{\varphi}_1^2) = \frac{4641\sqrt{15}}{33856} mg.$$

144.\* We nemen de hoek  $\varphi$  en het assenkruis als in 143. De verschuiving van het blok noemen we  $u$ , positief gerekend in de zin van de negatieve  $x$ -as (dus in de zin, waarin het blok verschuift). De coördinaten van het zwaartepunt  $Z$  van de staaf zijn:

$$x = -u + l(\cotg \varphi - 2 \cos \varphi), \quad z = 2 l \sin \varphi.$$

Daar het gemeenschappelijke zwaartepunt van blok en staaf in dezelfde verticaal blijft, is:

$$u = \frac{1}{2} l(\cotg \varphi - 2 \cos \varphi), \quad x = \frac{1}{2} l(\cotg \varphi - 2 \cos \varphi).$$

De levende kracht van het geheel is:

$$\begin{aligned} L &= m(x^2 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{2}{3} l^2 \dot{\varphi}^2) = \\ &= ml^2 \dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{4 \sin^4 \varphi} - \frac{1}{\sin \varphi} - \sin^2 \varphi + \frac{8}{3} \right). \end{aligned}$$

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt dus:

$$l \dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{4 \sin^4 \varphi} - \frac{1}{\sin \varphi} - \sin^2 \varphi + \frac{8}{3} \right) = g(1 - 2 \sin \varphi).$$

Voor de met 1 gemerkte stand, waarbij  $\sin \varphi = \frac{1}{4}$  is, geldt:

$$3005 l \dot{\varphi}_1^2 = 24 g.$$

Men vindt verder:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{15}}{4} l, & \dot{u}_1 &= l \dot{\varphi}_1 \left( -\frac{1}{2 \sin^2 \varphi_1} + \sin \varphi_1 \right) = \\ & & &= -\frac{31}{4} l \dot{\varphi}_1 = 31 \sqrt{\frac{3 gl}{6010}}. \end{aligned}$$

145.\* Zolang de staaf met de ribbe van het bovenzvlak in aanraking is, is de beweging als in 143. In de (met 1 gemerkte) stand, waarbij  $\sin \varphi = \frac{1}{4}$  geworden is, geldt voor het zwaartepunt  $Z$  van de staaf:

$$\dot{x}_{Z_1} = -\frac{31}{2} l \dot{\varphi}_1 = \frac{31}{8} \sqrt{\frac{3 gl}{46}}.$$

We onderstellen, dat de staaf verder het blok loslaat. Volgens 122 geldt dan voor de beweging:

$$16 l \dot{\varphi}^2 (4 - 3 \sin^2 \varphi) = 12 g (1 - 4 \sin \varphi) + 61 l \dot{\varphi}_1^2,$$

dus volgens het in 143 gevondene:

$$16 l \dot{\varphi}^2 (4 - 3 \sin^2 \varphi) = g \left( \frac{9015}{736} - 48 \sin \varphi \right).$$

Volgens  $x_B = x_Z - 2 l \cos \varphi$  heeft men, daar  $\dot{x}_Z$  constant is:

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= \dot{x}_{Z_1} + 2 l \dot{\varphi} \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3 gl}{46}} \left( 31 - \sin \varphi \sqrt{\frac{3005 - 11776 \sin \varphi}{4 - 3 \sin^2 \varphi}} \right). \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat  $\dot{x}_B$  steeds positief is en  $B$  zich dus steeds meer van het opstaande zijvlak van het blok verwijderd, zodat de onderstelling van loslaten juist is.

146.\* We onderstellen, dat de staaf het blok loslaat, als het punt  $B$  de ribbe van het blok bereikt heeft, tegen welke de staaf steunt, dus als  $\sin \varphi = \frac{1}{4}$  is. Voor de negatieve waarde  $\dot{\varphi}$  geldt na het loslaten de in 145 gevonden vergelijking, maar nu met de in 144 aangegeven waarde van  $\dot{\varphi}_1^2$ . De snelheid van  $B$  in horizontale richting ten opzichte van het blok is (met de notatie van 144)  $2 \dot{u}_1 + 2 l \dot{\varphi} \sin \varphi$ . Men rekent gemakkelijk na, dat dit voor



$\sin \varphi \leq \frac{1}{4}$  positief is, zodat de onderstelling omtrent het loslaten juist is. Op het tijdstip van loslaten is de verschuiving van het blok  $u_1$ , zodat een tijd  $t$  daarna de totale verschuiving volgens 144 is:

$$u_1 + \dot{u}_1 t = \frac{\sqrt{15}}{4} l + 31 t \sqrt{\frac{3gl}{6010}}.$$

\*147. Zij  $\varphi$  de hoek, die de staaf  $AC$  uit de beginstand gedraaid is, en  $r$  de afstand van  $A$  tot het zwaartepunt  $Z$  van  $DE$ .

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$(5l^2 + 3r^2)\dot{\varphi}^2 + 3r^2 = 8l^2\omega^2.$$

Uit  $B = B_0$ , waarin  $B$  het bewegingsmoment is om een as door  $A$  loodrecht op het vlak der beweging, volgt:

$$\dot{\varphi} = \frac{8l^2\omega}{5l^2 + 3r^2}.$$

Door eliminatie van  $\dot{\varphi}$  vindt men:

$$r^2 = 8l^2\omega^2 \frac{r^2 - l^2}{5l^2 + 3r^2}.$$

Op het tijdstip  $t_1$  is  $r = \frac{2}{3}l$ , zodat:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{8}{17}\omega, \quad \dot{r}_1 = 2\sqrt{\frac{6}{17}}l\omega$$

is. De snelheid van  $E$  is dan  $\frac{2}{17}\sqrt{246}l\omega$  en maakt een hoek

bgtg  $2\sqrt{\frac{6}{17}}$  met het verlengde van  $DE$ .

148. Uit de momentenstelling, toegepast op  $AC$  om  $A$  en op  $DE$  om het zwaartepunt van  $DE$ , volgt:

$$Q(r-l) + 2Rl = -\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}, \quad Ql + R(r-2l) = -\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}.$$

Hieruit volgt:

$$Q = 2ml^2\ddot{\varphi} \frac{2r-5l}{3r(3l-r)}, \quad R = -ml^2\ddot{\varphi} \frac{5l-r}{3r(3l-r)}.$$

Volgens 147 is:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{48l^2\omega r \dot{r}}{(5l^2 + 3r^2)^2} = -96\sqrt{2}l^3\omega^3 \frac{r\sqrt{r^2 - l^2}}{(5l^2 + 3r^2)^{5/2}}.$$

Voor  $Q$  en  $R$  vinden we dus:

$$Q = 64 ml^5 \omega^2 \frac{(5l - 2r) \sqrt{r^2 - l^2}}{(5l^2 + 3r^2)^{5/2} (3l - r)},$$

$$R = 32 ml^5 \omega^2 \frac{(5l - r) \sqrt{r^2 - l^2}}{(5l^2 + 3r^2)^{5/2} (3l - r)}.$$

Daar  $l \leq r < 3l$  is, is (van de beginstand  $r = l$  afgezien)  $R$  steeds positief, terwijl  $Q > 0$  is voor  $l < r < \frac{5}{2}l$  en  $Q < 0$  voor  $\frac{5}{2}l < r < 3l$ . Voor  $r = 3l$  worden  $Q$  en  $R$  oneindig groot. Is  $AC$  een buis, waar de staaf  $DE$  doorheen loopt en noemt men de zin der snelheid van  $C$  naar links, dan ligt  $DE$  bij  $C$  tegen de rechterkant van de buis en bij  $D$  aanvankelijk ook. Overschrijdt  $AD$  de waarde  $\frac{3}{2}l$ , dan legt de staaf zich met het punt  $D$  tegen de linkerkant van de buis. Voordat  $D$  in  $C$  gekomen is, moet de verbinding breken (tenminste als men de buis oneindig dun denkt).

Ligt de staaf  $DE$  aan de rechterkant los tegen de staaf  $AC$ , dan blijft  $DE$  aanvankelijk over de gehele lengte  $DC$  met  $AC$  in aanraking. Is  $AD = \frac{3}{2}l$  geworden, dan laat  $DE$  bij  $D$  de staaf  $AC$  los.

149. We leggen de positieve  $x$ -as langs  $AC_0$  en de positieve  $y$ -as langs  $AC$  bij  $\varphi = 90^\circ$ . De coördinaten van het zwaartepunt  $Z$  van  $CD$  zijn dan:

$$x = l \{ 2 \cos \varphi + \cos(\varphi + \theta) \}, \quad y = l \{ 2 \sin \varphi + \sin(\varphi + \theta) \}.$$

Hieruit volgt:

$$\dot{x} = -l \{ 2 \dot{\varphi} \sin \varphi + (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \sin(\varphi + \theta) \},$$

$$\dot{y} = l \{ 2 \dot{\varphi} \cos \varphi + (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cos(\varphi + \theta) \},$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \{ 5 \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} + \dot{\theta}^2 + 4 \dot{\varphi} (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cos \theta \}.$$

Hiertoe geraakt men (zonder assenkruis) ook door de snelheid  $v$  van  $Z$  te beschouwen als de vectorsom van de sleepsnelheid  $2l\dot{\varphi}$  loodrecht op  $AC$  en de relatieve snelheid  $l(\dot{\varphi} + \dot{\theta})$  loodrecht op  $CD$ . De levende kracht van het geheel is:

$$L = \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} Ml^2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M(x\dot{y} - y\dot{x}) = \\ = \frac{2}{3} (m + 4M) l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3} Ml^2 \{ 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} + \dot{\theta}^2 + 3 \dot{\varphi} (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cos \theta \}.$$

Het bewegingsmoment van  $Z$  om een as door  $A$  loodrecht op  $V$  is:

$$M(x\dot{y} - y\dot{x}) = Ml^2 \{ 5 \dot{\varphi} \dot{\theta} + 2(2\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cos \theta \}.$$

Men vindt dit ook uit het moment  $2l\dot{\varphi}(2l + l \cos \theta)$  van de sleepsnelheid  $2l\dot{\varphi}$  van  $Z$  en het moment  $l(\dot{\varphi} + \dot{\theta})(2l \cos \theta + l)$  van van de relatieve snelheid.

Het totale bewegingsmoment is:

$$B = \frac{4}{3} ml^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{3} Ml^2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) + M(x\dot{y} - y\dot{x}) \} = \\ = \frac{4}{3} (m + 4M)l^2 \dot{\varphi} + \frac{2}{3} Ml^2 \{ 2\dot{\theta} + 3(2\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cos \theta \}.$$

Voor  $t = 0$  is  $\dot{\theta} = -\omega$ . Uit  $L = L_0$  en  $B = B_0$  volgt dus:

$$(m + 4M + 3M \cos \theta) \dot{\varphi}^2 + M(2 + 3 \cos \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} + M \dot{\theta}^2 = \\ = (m + 3M) \omega^2,$$

$$2(m + 4M + 3M \cos \theta) \dot{\varphi} + M(2 + 3 \cos \theta) \dot{\theta} = (2m + 9M) \omega.$$

Door eliminatie van  $\dot{\varphi}$  volgt hieruit:

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 \frac{12(m + 3M) \cos \theta - 8m - 33M}{4(m + 3M) - 9M \cos^2 \theta}.$$

Hieruit volgt, dat  $\theta$  heen en weer schommelt tussen de waarden  $\pm \text{bgcos} \frac{8m + 33M}{12(m + 3M)}$ . Voor die uiterste waarden van  $\theta$  geldt:

$$\dot{\varphi} = 2 \omega \frac{m + 3M}{2m + 9M} \quad (\theta > 0),$$

$$\dot{\varphi} = 2 \omega \frac{(m + 3M)(2m + 9M)}{4m^2 + 20mM + 15M^2} \quad (\theta < 0).$$

150.\* Men vindt nu:

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 \frac{12M \cos \theta + 4m - 9M}{4(m + 3M) - 9M \cos^2 \theta}.$$

Voor  $\theta = 180^\circ$  geeft dit:

$$\dot{\theta}_1^2 = \omega^2 \frac{4m - 21M}{4m + 3M}.$$

Is  $4m > 21M$ , dan loopt  $CD$  dus ten opzichte van  $AC$  steeds in dezelfde zin rond; het was te voorzien, dat dit gebeurt voor waarden van  $m$ , die groot genoeg zijn. Is  $4m < 21M$ , dan schommelt  $\theta$  heen

en weer tussen  $\pm \text{bgcos} \frac{9M - 4m}{12M}$ . Volgens:

$2(m + 4M + 3M \cos \theta) \dot{\varphi} + M(2 + 3 \cos \theta) \dot{\theta} = 5M \omega$   
geldt voor die uiterste waarden van  $\theta$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{5} \omega (\theta > 0), \quad \dot{\varphi} = \frac{10M}{8m + 7M} \omega (\theta < 0).$$

Uit:

$$\omega^2 - \dot{\theta}^2 = 3 \omega^2 M \frac{(1 - \cos \theta)(7 + 3 \cos \theta)}{4(m + 3M) - 9M \cos^2 \theta}$$

volgt, dat steeds  $\dot{\theta}^2 < \omega^2$  is, behalve in de standen, waar  $\theta = 0$ ; dus  $\dot{\theta}^2 = \omega^2$  is. Hieruit volgt verder, dat steeds  $\dot{\varphi} > 0$  is, behalve in de standen, waar  $\theta = 0$  en  $\dot{\theta} = \omega$  en dus  $\dot{\varphi} = 0$  is.

Is  $4m = 21M$ , dan wordt de stand, waar  $\theta = 180^\circ$  is, asymptotisch genaderd. Dan is:

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega^2 \frac{1 + \cos \theta}{11 - 3 \cos^2 \theta}, \quad \dot{\varphi} = 2 \frac{5\omega - (2 + 3 \cos \theta)\dot{\theta}}{37 + 12 \cos \theta},$$

zodat  $\dot{\theta}$  voortdurend afneemt van  $\omega$  tot 0 en  $\dot{\varphi}$  asymptotisch tot de waarde  $\frac{2}{5}\omega$  nadert. De asymptotische waarde van  $\dot{\varphi}$  volgt ook uit het constant zijn van  $L$ , zodat op den duur  $\frac{2}{3}(m + M)\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}M\omega^2$  is. Ook ligt de uitkomst opgesloten in  $\dot{\varphi} = \frac{2}{5}\omega$  voor  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\theta > 0$ .

151. Van de kracht in  $C$  op de staaf  $AC$  uitgeoefend stellen we de component loodrecht op  $CD$  (positief gerekend in de zin van de snelheid van  $D$  tengevolge van draaiing om  $C$  in positieve zin) door  $Q$  voor. De component van de versnelling van het zwaartepunt  $Z$  van  $CD$  in de richting van  $Q$  is de som der componenten van sleepversnelling en relatieve versnelling. Bijgevolg is:

$$Q = M\{2l\ddot{\varphi} \cos \theta + 2l\dot{\varphi}^2 \sin \theta + l(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta})\},$$

Uit de momentenstelling om  $Z$  volgt  $-Ql = \frac{1}{3}MI^2(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta})$ , zodat eliminatie van  $Q$  geeft:

$$2\ddot{\varphi} + 2\ddot{\theta} + 3\dot{\varphi} \cos \theta + 3\dot{\varphi}^2 \sin \theta = 0.$$

Dit is de vergelijking van Lagrange naar  $\theta$ . De vergelijking van Lagrange naar  $\varphi$  geeft  $\dot{B} = 0$ , dus:

$$2(m + 4M + 3M \cos \theta)\ddot{\varphi} + M(2 + 3 \cos \theta)\ddot{\theta} - 3M\theta(2\dot{\varphi} + \dot{\theta})\sin \theta = 0.$$

Aan beide vergelijkingen is voldaan door  $\dot{\varphi} = \omega$  ( $\ddot{\varphi} = 0$ ),  $\theta = 0$ . Geldt  $\dot{\varphi} = \omega$  bij benadering en is  $\theta$  klein (evenals  $\dot{\theta}$  en  $\ddot{\theta}$ ), dan geldt bij benadering:

$$5\ddot{\varphi} + 2\ddot{\theta} + 3\omega^2\theta = 0, \quad 2(m + 7M)\ddot{\varphi} + 5M\ddot{\theta} = 0.$$

Door eliminatie van  $\ddot{\varphi}$  volgt hieruit:

$$(4m + 3M)\ddot{\theta} + 6(m + 7M)\omega^2\theta = 0.$$

De periode der kleine slingeren is dus  $\frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2(4m + 3M)}{3(m + 7M)}}$ .

Bij benadering is:

$$\dot{\varphi} = \omega - \frac{5M}{2(m+7M)} \ddot{\theta}.$$

\*152. Als coördinaat voeren we in de hoek  $\varphi$ , die  $MZ$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $M$  maakt; hierin is  $M$  het middelpunt en  $Z$  het zwaartepunt van de halve bol. Nemen we het raakpunt in de evenwichtsstand als oorsprong, de  $z$ -as verticaal naar boven en de positieve  $x$ -as door het raakpunt in de beginstand, dan geldt voor  $Z$ :

$$\begin{aligned} x &= r(\varphi - \frac{3}{8} \sin \varphi), & z &= r(1 - \frac{3}{8} \cos \varphi), \\ \dot{x} &= \frac{1}{8} r \dot{\varphi}(8 - 3 \cos \varphi), & \dot{z} &= \frac{3}{8} r \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Het traagheidsmoment om een as door  $Z$  loodrecht op het vlak, waarin  $Z$  zich beweegt, is:

$$\frac{2}{5} m r^2 - m(\frac{3}{8} r)^2 = \frac{83}{320} m r^2,$$

zodat de levende kracht is:

$$L = \frac{83}{640} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{40} m r^2 \dot{\varphi}^2 (28 - 15 \cos \varphi).$$

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$r \dot{\varphi}^2 (28 - 15 \cos \varphi) = 15 g \cos \varphi,$$

zodat  $r \ddot{\varphi}_1^2 = \frac{15}{13} g$  is. Verder is:

$$r \ddot{\varphi} (56 - 30 \cos \varphi) + 15 r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = -15 g \sin \varphi,$$

zodat  $r \ddot{\varphi}_0 = -\frac{15}{56} g$  en  $\ddot{\varphi}_1 = 0$  is. Nemen we  $W$  positief in de zin van de negatieve  $x$ -as, dan is:

$$\begin{aligned} -W &= m \dot{x} = \frac{1}{8} m r \{ \ddot{\varphi} (8 - 3 \cos \varphi) + 3 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \}, \\ N - mg &= m \ddot{z} = \frac{3}{8} m r (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi). \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$W_0 = -m r \ddot{\varphi}_0 = \frac{15}{36} m g, \quad W_1 = 0,$$

$$N_0 = m g + \frac{3}{8} m r \ddot{\varphi}_0 = \frac{403}{448} m g, \quad N_1 = m g + \frac{3}{8} m r \dot{\varphi}_1^2 = \frac{149}{104} m g.$$

\*153. Voor kleine slingeren geldt  $26 r \ddot{\varphi} + 15 g \varphi = 0$ , zodat de periode der kleine slingeren is  $2 \pi \sqrt{\frac{26 r}{15 g}}$ .

\*154. We nemen dezelfde coördinaat  $\varphi$  als in 152. Nu is steeds  $x = 0$ , terwijl  $z$  is als in 152. Men heeft dus:

$$L = \frac{83}{640} mr^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}^2 = \frac{1}{640} mr^2 \dot{\varphi}^2 (83 + 45 \sin^2 \varphi),$$

$$r \dot{\varphi}^2 (83 + 45 \sin^2 \varphi) = 240 g \cos \varphi,$$

$$r \ddot{\varphi} (83 + 45 \sin^2 \varphi) + 45 r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + 120 g \sin \varphi = 0.$$

$$r \dot{\varphi}_1^2 = \frac{240}{83} g, \quad r \ddot{\varphi}_0 = -\frac{15}{16} g, \quad \ddot{\varphi}_1 = 0,$$

$$N_0 = \frac{83}{128} mg, \quad N_1 = \frac{173}{83} mg.$$

De grootste verplaatsing van  $M$  is  $\frac{3}{4} r$ .

155. De pool  $P$  is de projectie van  $Z$  op de verticaal door  $M$ . De poolkromme is dus de cirkel op  $MZ$  als middellijn beschreven en wel die cirkel in zijn geheel, telkens heen en terug doorlopen van  $M$  tot  $M$ ; in de beide uiterste standen bevindt de pool zich in  $M$ . De projectie  $Q$  van  $M$  op de verticaal door  $Z$  beweegt zich niet, terwijl  $QP = MZ$  is. De poolbaan is dus de halve cirkel met  $Q$  als middelpunt en  $\frac{3}{8} r$  als straal en wel de helft, die onder de horizontale middellijn ligt; de eindpunten van de halve cirkel zijn de uiterste standen van  $M$ . De beweging is de elliptische.

156. Voor kleine slingeren om de evenwichtsstand geldt  $83 r \ddot{\varphi} + 120 g = 0$ . De periode dier slingeren is dus  $\pi \sqrt{\frac{83 r}{30 g}}$ .

157.\* Het traagheidsmoment van het lichaam om een horizontale as door het zwaartepunt  $Z$  (midden van  $MA$ ) loodrecht op  $MA$  is  $\frac{2}{3} mr^2 + \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{4} mr^2 = \frac{7}{6} mr^2$ . De levende kracht van het lichaam is:

$$L = \frac{7}{12} mr^2 \dot{\varphi}^2 + m(x^2 + \frac{1}{4} r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi).$$

Hierin is  $\varphi$  de hoek, die  $MZ$  met de loodlijn uit  $M$  op het hellend vlak maakt, en  $x$  de verplaatsing van de projectie  $Q$  van  $Z$  op het hellend vlak, beide positief gerekend benedenwaarts. Verder is  $P = -2 mg(x \sin \alpha + \frac{1}{2} r \cos \varphi \cos \alpha)$ . Het punt  $Q$  heeft de constante versnelling  $g \sin \alpha$ , zodat  $\dot{x}^2 = 2 gx \sin \alpha$  is.

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt dus:

$$r(7 + 3 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 = 12 g(\cos \varphi - \cos \alpha) \cos \alpha.$$

Hieruit volgt, dat  $\varphi$  heen en weer schommelt tussen  $\pm \alpha$ . De grootste waarde heeft  $\ddot{\varphi}^2$  voor  $\varphi = 0$ . Die grootste waarde is:

$$\frac{12 g(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}{7 r}$$

158. Als coördinaten voeren we in de verplaatsing  $x$  van  $M$  en de hoek  $\varphi$ , die  $AB$  met het horizontale vlak maakt (zodat  $\varphi = 90^\circ$  is in de beginstand). Daar het zwaartepunt  $Z$  van het geheel in dezelfde verticaal blijft, heeft men:

$$mx + m'(x + \frac{1}{2} r \sin \varphi) = \frac{1}{2} m' r,$$

$$2(m + m')x = m'r(1 - \sin \varphi), \quad 2(m + m')\dot{x} = -m'r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

De hoepel gaat niet draaien, zodat de levende kracht van het geheel is:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m' (\frac{1}{2} r \sqrt{3})^2 \dot{\varphi}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m' (\dot{x}^2 + \frac{1}{4} r^2 \dot{\varphi}^2 + r \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} (m + m') \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m' r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m' r \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi = \\ &= m' r^2 \dot{\varphi}^2 \frac{2m + m' + m' \sin^2 \varphi}{8(m + m')} \end{aligned}$$

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$r(2m + m' + m' \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 = 4g(m + m') \cos \varphi.$$

Hieruit blijkt, dat  $\varphi$  heen en weer schommelt tussen  $\pm 90^\circ$ . De grootste waarde van  $x$  krijgt men voor  $\varphi = -90^\circ$ ; voor die waarde van  $\varphi$  is  $x = \frac{m' r}{m + m'}$ . Neemt  $\varphi$  af van  $90^\circ$  tot 0, dan neemt  $\dot{\varphi}^2$  toe van 0 tot  $\frac{4g(m + m')}{r(2m + m')}$ . Voor  $\varphi = 0$  is ook de waarde van  $\dot{x}^2$  het grootst, nl.  $\frac{m'^2 r g}{(m + m')(2m + m')}$ .

159. De verbindingskrachten in  $A$  en  $B$  op de staaf uitgeoefend stellen we samen tot een kracht in  $M$ . De component daarvan evenwijdig aan  $AB$  (positief gerekend in de zin  $AB$ ) noemen we  $K$ . Uit de momentenstelling en de beweging van het zwaartepunt van  $AB$  in de richting  $AB$  volgt:

$$\frac{1}{4} m' r^2 \dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{2} K r, \quad m'(\ddot{x} \cos \varphi + \frac{1}{2} r \ddot{\varphi}) = K - m'g \sin \varphi.$$

Door eliminatie van  $K$  volgt hieruit:

$$\ddot{x} \cos \varphi + r \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Dit is de vergelijking van Lagrange naar  $\varphi$ . Die naar  $x$  geeft het constant zijn van  $2(m + m')\dot{x} + m'r\dot{\varphi} \cos \varphi$  (eenparige beweging van  $Z$  in horizontale richting), dus:

$$2(m + m')\dot{x} + m'r(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0.$$

Eliminatie van  $\dot{x}$  geeft:

$$(2m + m' + m' \sin^2 \varphi)r\ddot{\varphi} + m'r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi + 2(m + m')g \sin \varphi = 0.$$

Is  $\varphi$  klein, dan wordt dit bij benadering:

$$(2m + m')r\ddot{\varphi} + 2(m + m')g\varphi = 0,$$

zodat de periode der kleine slingeren is  $\pi \sqrt{\frac{2r(2m + m')}{g(m + m')}}.$

160.\* De op de hoepel uitgeoefende wrijving, positief gerekend in de zin  $Z_0M_0$ , noemen we  $W$ . Van de (in  $M$  aangrijpende) resultante der in  $A$  en  $B$  op de hoepel uitgeoefende krachten noemen we de horizontale component, positief gerekend in dezelfde zin,  $H$ . Men heeft dan (met dezelfde coördinaten als in 158):

$$Wr = m r \dot{x}, \quad W + H = -m \dot{x},$$

$$H = m' \frac{d}{dt} (x + \frac{1}{2} r \dot{\varphi} \cos \varphi).$$

Eliminatie van  $W$  en  $H$  geeft:

$$\frac{d}{dt} \{m'(x + \frac{1}{2} r \dot{\varphi} \cos \varphi) + 2m \dot{x}\} = 0,$$

$$m'(x + \frac{1}{2} r \dot{\varphi} \cos \varphi) + 2m \dot{x} = 0,$$

$$m'(x + \frac{1}{2} r \sin \varphi) + 2m \dot{x} = \frac{1}{2} m' r.$$

Dit drukt uit, dat het gemeenschappelijke zwaartepunt van hoepel en staaf, als men de massa van de hoepel verdubbeld denkt, in dezelfde verticaal blijft. De levende kracht van het geheel is:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(2m + m')\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m'r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m'r\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi = \\ &= m'r^2\dot{\varphi}^2 \frac{4m + m' + m'\sin^2\varphi}{8(2m + m')}. \end{aligned}$$

Ook al het verdere is als in 158, met vervanging van  $m$  door  $2m$ .

161.\* Alles is als in 159 met vervanging van  $m$  door  $2m$ .



162.\* We nemen in het vlak der beweging  $C_0$  als oorsprong en  $C_0A_0$  als positieve  $x$ -as van een rechthoekig assenkruis. De positieve  $y$ -as nemen we zo, dat  $CA$  aanvankelijk in positieve zin draait, d.w.z. van de positieve  $x$ -as naar de positieve  $y$ -as. Als coördinaten van het toestel nemen we aan de coördinaten  $p$  en  $q$  van het gemeenschappelijke zwaartepunt  $Z$ , de hoek  $\theta$ , die  $ZC$  met de  $y$ -as maakt, en  $\angle Z_1Z_2C = \varphi$ , waarin  $Z_1$  en  $Z_2$  de zwaartepunten van  $CA$  resp.  $CD$  zijn. De positieve draaizinnen voor  $\theta$  en  $\varphi$  zijn zo genomen, dat voor  $t = 0$  geldt  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \omega$ . Het punt  $Z$  beweegt zich eenparig langs de  $y$ -as met een snelheid  $\frac{1}{2} l \omega$  (zodat  $p = 0$  en  $q = \frac{1}{2} l \omega t$  is). De levende kracht van het geheel ten opzichte van het zwaartepunt  $Z$  (relatief  $Z$ ) is:

$$\begin{aligned} L_r &= ml^2(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi) + \\ &+ \frac{1}{6} ml^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{6} ml^2(\dot{\varphi} - \dot{\theta})^2 = \\ &= \frac{1}{3} ml^2 \{ (1 + 3 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + (1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\theta}^2 \}. \end{aligned}$$

Bij de berekening is er van gebruik gemaakt, dat bij de relatieve beweging de snelheidscomponenten van  $Z_1$  langs  $ZZ_1$  en loodrecht op  $ZZ_1$  zijn  $\frac{d}{dt} l \cos \varphi = -l \dot{\varphi} \sin \varphi$  resp.  $l \dot{\theta} \cos \varphi$ .

Voor  $t = 0$  is  $\theta = \varphi = 0$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \omega$ , zodat men heeft:

$$(1 + 3 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + (1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\theta}^2 = \frac{5}{4} \omega^2.$$

De bewegingsmomenten der staven om  $Z$  door de verandering van  $\varphi$  heffen elkaar op. Het totale bewegingsmoment om  $Z$  is dus:

$$B = 2 ml^2 \dot{\theta} \cos^2 \varphi + \frac{2}{3} ml^2 \dot{\theta} = \frac{2}{3} ml^2 (1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\theta}.$$

Men heeft dus:

$$(1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\theta} = 2 \omega.$$

Eliminatie van  $\dot{\theta}$  geeft:

$$\begin{aligned} (1 + 3 \sin^2 \varphi)(1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 &= \frac{1}{4} \omega^2 (15 \cos^2 \varphi - 11), \\ 2(16 + 9 \sin^2 2\varphi) \dot{\varphi}^2 &= \omega^2 (15 \cos 2\varphi - 7). \end{aligned}$$

Hieruit volgt, dat  $\varphi$  heen en weer schommelt tussen  $\pm \frac{1}{2} \text{bgcos } \frac{7}{15}$ . De hoek  $ACD$  blijft stomp, terwijl  $C$  telkens het punt  $Z$  passeert. Neemt  $\varphi$  toe van 0 tot  $\text{bgcos } \frac{7}{15}$ , dan neemt  $\dot{\varphi}$  voortdurend af van  $\frac{1}{2} \omega$  tot 0; daarbij neemt  $\dot{\theta}$  voortdurend toe en wel van  $\frac{1}{2} \omega$  tot  $\frac{5}{8} \omega$ . De rechte  $CZ$  draait voortdurend in dezelfde zin.

163.\* Wegens de symmetrie draait  $BC$  niet en verschuift het zwaartepunt van  $BC$  langs een rechte loodrecht op  $BC$ . Verder draaien de staven  $AB$  en  $CD$  dezelfde hoek  $\varphi$  in tegengestelde zin. Zij  $x$  de verplaatsing van de staaf  $BC$ , positief gerekend in de zin der beginsnelheden van  $A$  en  $D$ . Uit de beweging van het gemeenschappelijke zwaartepunt volgt:

$$3 \dot{x} + 2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = 2 l \omega, \quad 3 \dot{x} + 2 l \dot{\varphi} \sin \varphi = 2 l \omega t.$$

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$9 x^2 + 8 l^2 \dot{\varphi}^2 + 12 l x \dot{\varphi} \cos \varphi = 8 l^2 \omega^2 t.$$

Eliminatie van  $x$  geeft:

$$\dot{\varphi}^2 (2 - \cos^2 \varphi) = \omega^2.$$

Hieruit ziet men, dat de staven steeds in dezelfde zin draaien. Neemt  $\varphi$  toe van  $0$  tot  $90^\circ$ , dan neemt  $\dot{\varphi}$  voortdurend af van  $\omega$  tot  $\frac{1}{2} \sqrt{2} \omega$ . Neemt  $\varphi$  vervolgens toe van  $90^\circ$  tot  $180^\circ$ , dan neemt  $\dot{\varphi}$  op dezelfde wijze weer toe tot  $\omega$ . Ook  $x$  blijft voortdurend positief. Neemt  $\varphi$  toe van  $0$  via  $90^\circ$  tot  $180^\circ$ , dan neemt  $x$  voortdurend toe en wel van  $0$  via  $\frac{2}{3} l \omega$  tot  $\frac{4}{3} l \omega$ ; bij verder toenemen van  $\varphi$  neemt  $x$  op dezelfde wijze weer af tot  $0$  (voor  $\varphi = 360^\circ$ ). Dit blijkt uit:

$$\ddot{x} = \frac{4 l \omega^2 \sin \varphi}{3(2 - \cos^2 \varphi)^2}.$$

## G. AANVANKELIJKE BEWEGING.

\*164. Als coördinaat voeren we in de hoek  $\varphi$ , die het blok gedraaid is. De momentenstelling (in de beginstand) om de ribbe, waarom het blok kantelt, voert tot:

$$\ddot{\varphi}_0 = g \frac{h \sin \gamma - a \cos \gamma}{\varrho^2 + h^2 + a^2}.$$

Op het tijdstip  $t = 0$  heeft  $Z$  een normale versnelling 0 (wegens  $\dot{\varphi}_0 = 0$ ) en een loodrecht op  $CZ$  staande tangentiële versnelling  $c \ddot{\varphi}_0$ ; hier is  $c = CZ$  en  $C$  de projectie van  $Z$  op de ribbe van kantelen. Die versnelling heeft (steeds in de beginstand) een component  $h \ddot{\varphi}_0$  evenwijdig aan het hellend vlak, schuin naar beneden, en een component  $a \ddot{\varphi}_0$  daar loodrecht op, schuin naar boven. Is  $N_0$  de (in  $C$  aangrijpende) normale druk en  $W_0$  de wrijving (positief schuin naar boven), dan volgt uit de beweging van  $Z$ :

$$N_0 - mg \cos \gamma = ma \ddot{\varphi}_0, \quad mg \sin \gamma - W_0 = mh \ddot{\varphi}_0.$$

Hieruit vindt men positieve waarden van  $N_0$  en  $W_0$ . Deze voeren tot:

$$\frac{W_0}{N_0} = \frac{(\varrho^2 + a^2) \operatorname{tg} \gamma + ah}{\varrho^2 + h^2 + ah \operatorname{tg} \gamma}.$$

De voorwaarde, waaronder de beschouwde beweging aanvankelijk intreedt, is  $\ddot{\varphi}_0 > 0$ ,  $\frac{W_0}{N_0} < f$ . Dit wordt:

$$\operatorname{tg} \gamma > \frac{a}{h}, \quad (\varrho^2 + a^2) \operatorname{tg} \gamma + ah < f(\varrho^2 + h^2 + ah \operatorname{tg} \gamma).$$

\*165. Als coördinaten voeren we in de hoek  $\varphi$  van 164 en de verschuiving  $x$  van het punt  $C$  van 164. De versnelling van  $Z$  heeft aanvankelijk een component  $h \ddot{\varphi}_0 + \ddot{x}_0$  evenwijdig aan het hellend vlak en een component  $a \ddot{\varphi}_0$  daar loodrecht op. Uit de beweging van  $Z$  en die om  $Z$  volgt:

$$N_0 - mg \cos \gamma = ma \ddot{\varphi}_0, \quad mg \sin \gamma - fN_0 = m(h \ddot{\varphi}_0 + \ddot{x}_0), \\ fN_0 h - N_0 a = m \varrho^2 \ddot{\varphi}_0.$$

Hieruit vindt men:

$$N_0 = \frac{mg \varrho^2}{\varrho^2 + a^2 - fah} \cos \gamma, \quad \ddot{\varphi}_0 = g \frac{fh - a}{\varrho^2 + a^2 - fah} \cos \gamma,$$

$$\ddot{x}_0 = g \frac{(\varrho^2 + a^2) \operatorname{tg} \gamma + ah - f(\varrho^2 + h^2 + ah \operatorname{tg} \gamma)}{\varrho^2 + a^2 - fah} \cos \gamma.$$

Uit  $N_0 > 0$  volgt vooreerst  $f < \frac{\varrho^2 + a^2}{ah}$ . Uit  $\ddot{\varphi}_0 > 0$  en  $\ddot{x}_0 > 0$  volgt dan verder:

$$f > \frac{a}{h}, \quad f < \frac{(\varrho^2 + a^2) \operatorname{tg} \gamma + ah}{\varrho^2 + h^2 + ah \operatorname{tg} \gamma}.$$

In de laatste ongelijkheid ligt  $f < \frac{\varrho^2 + a^2}{ah}$  opgesloten, zodat we als voorwaarde vinden:

$$\frac{a}{h} < f < \frac{(\varrho^2 + a^2) \operatorname{tg} \gamma + ah}{\varrho^2 + h^2 + ah \operatorname{tg} \gamma}.$$

Aan deze ongelijkheden kan alleen worden voldaan, als:

$$\operatorname{tg} \gamma > \frac{a}{h}$$

is.

166.\* Het veld van kantelen zonder uitglijden wordt naar onder begrensd door het rechts van het punt  $S\left(\frac{a}{h}, \frac{a}{h}\right)$  gelegen deel der rechte  $u = \frac{a}{h}$  en het boven  $S$  gelegen deel van de orthogonale (gelijkzijdige) hyperbool:

$$ahfu + (\varrho^2 + h^2)f - (\varrho^2 + a^2)u - ah = 0.$$

Dit deel van de hyperbool nadert naar boven en naar rechts asymptotisch tot de rechte  $f = \frac{a}{h} + \frac{\varrho^2}{ah}$ . Het veld van kantelen en uitglijden ligt tusschen de hyperboolboog en het boven  $S$  gelegen deel der rechte  $f = \frac{a}{h}$ . Beide velden, te zamen met die van 87, vullen juist het gehele eerste kwadrant van het beeldvlak.

## H. STOOT- EN BOTSINGSVRAAGSTUKKEN.

\*167. De in  $C$  op  $BC$  uitgeoefende verbindingsstoot, die verticaal is, noemen we  $S'$ , positief gerekend naar boven. Van de in  $B$  op  $AB$  uitgeoefende verbindingsstoot noemen we de horizontale component  $H$ , positief naar links, en de verticale component  $V$ , positief naar boven. Als coördinaat voeren we in de hoek  $\varphi$ , die  $AB$  met de naar beneden gekeerde verticaal maakt. Deze verticaal nemen we als positieve  $y$ -as en  $AC$  als positieve  $x$ -as. De coördinaten van het zwaartepunt  $Z$  van  $BC$  zijn dan  $x = 3 l \sin \varphi$ ,  $y = l \cos \varphi$ . Hieruit volgt onmiddellijk na de stoot:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3 l \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 = \frac{3}{2} \sqrt{3} l \dot{\varphi}_1, \\ \dot{y}_1 &= -l \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 = -\frac{1}{2} l \dot{\varphi}_1. \end{aligned}$$

De vier stootvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} \text{momenten om } A: & \quad \frac{4}{3} ml \dot{\varphi}_1 = V - \sqrt{3} H, \\ \text{momenten om } Z: & \quad \frac{2}{3} ml \dot{\varphi}_1 = \sqrt{3}(S - H) - V - S', \\ \text{beweging om } Z \text{ horizontaal:} & \quad \frac{3}{2} \sqrt{3} ml \dot{\varphi}_1 = S + H \\ \text{beweging om } Z \text{ verticaal:} & \quad -\frac{1}{2} ml \dot{\varphi}_1 = V - S'. \end{aligned}$$

Hieruit vindt men:

$$l \dot{\varphi}_1 = \frac{3 \sqrt{3}}{13} \frac{S}{m}.$$

De levende kracht onmiddellijk na de stoot is:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{27}{4} + \frac{1}{4} \right) ml^2 \dot{\varphi}_1^2 = \\ &= \frac{13}{3} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{9 S^2}{13 m}. \end{aligned}$$

De horizontale stand wordt juist bereikt, als  $L_1 = \sqrt{3} mgl$  is, dus voor:

$$S = \frac{1}{3} \sqrt[4]{3 m \sqrt{13} gl}.$$

168. Uit de vergelijkingen van 167 volgt:

$$S' = \frac{6 \sqrt{3}}{13} S, \quad H = \frac{1}{26} S, \quad V = \frac{9 \sqrt{3}}{26} S.$$

zodat al deze verbindingsstoten vallen in de daarvoor aangenomen positieve richtingen. Heeft de in  $A$  op  $AB$  uitgeoefende verbindingsstoot een horizontale component  $H'$ , positief naar rechts, en een verticale component  $V'$ , positief naar beneden, dan is:

$$H' - H = \frac{1}{2} \sqrt{3} ml \dot{\varphi}_1, \quad V' - V = -\frac{1}{2} ml \dot{\varphi}_1.$$

$$\text{Hieruit volgt } H' = \frac{5}{13} S, \quad V' = \frac{3\sqrt{3}}{13} S.$$

169.\* Uit  $x_C = 4l \sin \varphi$  volgt  $dx_C = 4l \cos \varphi_1 d\varphi = 2\sqrt{3}l d\varphi$ . De arbeidscoëfficiënt is dus  $2\sqrt{3}Sl$ . In verband met  $L = \frac{13}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2$  (voor de stand op het ogenblik van de stoot) vindt men:

$$\frac{26}{3} ml^2 \dot{\varphi}_1 = 2\sqrt{3}Sl.$$

Op deze wijze geraakt men veel sneller tot  $l\dot{\varphi}_1 = \frac{3\sqrt{3}}{13} \frac{S}{m}$  dan met de methode van het vrij maken.

170.\* Als coördinaten voeren we in de hoek  $\varphi$ , die  $AB$  en de hoek  $\theta$ , die  $CD$  met de naar beneden gekeerde verticaal maakt. We nemen een rechthoekig assenkruis aan als in 167. De coördinaten van het zwaartepunt  $Z$  van  $CD$  en het zwaartepunt  $Z'$  van  $DE$  zijn:

$$x_Z = l(4 \sin \varphi + \sin \theta), \quad y_Z = l \cos \theta,$$

$$x_{Z'} = l(4 \sin \varphi + 3 \sin \theta), \quad y_{Z'} = l \cos \theta.$$

Hieruit volgt voor de genoemde stand:

$$\dot{x}_Z = \frac{1}{2} \sqrt{3} l(4 \dot{\varphi} + \dot{\theta}), \quad \dot{x}_{Z'} = \frac{1}{2} \sqrt{3} l(4 \dot{\varphi} + 3 \dot{\theta}),$$

$$\dot{y}_Z = \dot{y}_{Z'} = -\frac{1}{2} l \dot{\theta}.$$

waardoor men voor de levende kracht van de stangen  $CD$  en  $DE$  te zamen vindt:

$$\frac{1}{3} ml^2 (36 \dot{\varphi}^2 + 36 \dot{\theta} \dot{\varphi} + 13 \dot{\theta}^2).$$

De levende kracht van het geheel is (in verband met 167):

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3} ml^2 (36 \dot{\varphi}^2 + 36 \dot{\theta} \dot{\varphi} + 13 \dot{\theta}^2) + \frac{13}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{3} ml^2 (49 \dot{\varphi}^2 + 36 \dot{\theta} \dot{\varphi} + 13 \dot{\theta}^2). \end{aligned}$$

Uit:

$$x_E = 4l(\sin \varphi + \sin \theta), \quad dx_E = 2\sqrt{3}l(d\varphi + d\theta)$$

vindt men voor de arbeidscoëfficiënten:

$$G_\varphi = -2\sqrt{3}Sl, \quad G_\theta = -2\sqrt{3}Sl.$$

De vergelijkingen van **Lagrange** worden dus:

$$ml(49 \dot{\varphi}_1 + 18 \dot{\theta}_1) = -3\sqrt{3} S, \quad ml(18 \dot{\varphi}_1 + 13 \dot{\theta}_1) = -3\sqrt{3} S.$$

Hieruit volgt:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{15\sqrt{3}}{313} \frac{S}{ml}, \quad \dot{\theta}_1 = -\frac{93\sqrt{3}}{313} \frac{S}{ml}.$$

\*171. De hoeken, die *AB*, *BC* en *DE* uit hun beginstand gedraaid zijn, noemen we resp.  $\varphi$ ,  $\theta$  en  $\psi$ ; als positieve draaizin is genomen de draaiing van *DE* vóór de botsing. De toestand onmiddellijk vóór en na de botsing merken we met 1 resp. 2, de toestand, waarin de snelheid van *DE* nul geworden is, met 3. Daar *E* tegen het zwaartepunt *Z* van *AB* botst en  $\dot{\psi}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g}{l}}$  is, heeft men:

$$\frac{2}{3} ml^2 \dot{\psi}_1^2 = \frac{2}{3} ml \cdot \frac{3}{4} g + \frac{3}{2} mgl,$$

dus  $l \dot{\psi}_1^2 = 3g$ . Is *S* de stoot in *Z* op *AB* en *S'* de (ten duidelijkste horizontale) stoot in *B* op *BC* uitgeoefend, beide positief gerekend in de zin *DA*, dan heeft men:

$$Sl - 2S'l = 8ml^2 \dot{\varphi}_2, \quad -S'l = 2ml^2 \dot{\theta}_2, \quad S' = 6ml(2\dot{\varphi}_2 + \dot{\theta}_2), \\ -Sl = \frac{4}{3} ml^2(\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1).$$

Hieruit volgt:

$$l\dot{\varphi}_2 = \frac{S}{14m}, \quad l\dot{\theta}_2 = -\frac{3S}{28m}, \quad l\dot{\psi}_2 = \sqrt{3gl} - \frac{3S}{4m}.$$

De snelheidscomponenten van *E* en *Z* onmiddellijk vóór en na de botsing in de richting van *S*, positief gerekend in de zin *DA*, zijn:

	vóór	na
<i>E</i>	$\sqrt{3gl}$	$\sqrt{3gl} - \frac{3S}{4m}$
<i>Z</i>	0	$\frac{S}{14m}$
relatief	$\sqrt{3gl}$	$\sqrt{3gl} - \frac{23S}{28m}$

De botsingsvergelijking luidt:

$$\sqrt{3gl} - \frac{23S}{28m} = -\frac{9}{14} \sqrt{3gl}.$$

Hieruit volgt:

$$S = 2 m \sqrt{3 gl}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{3g}{l}}, \quad \dot{\theta}_2 = -\frac{3}{14} \sqrt{\frac{3g}{l}},$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

De stang  $DE$  krijgt in de horizontale stand ( $DE$  in het verlengde van  $AD$ ) een snelheid 0.

172. Men vindt  $S' = \frac{3}{7} m \sqrt{3 gl}$ . De kracht  $S''$  in  $A$  op  $AD$  uitgeoefend, positief gerekend in de zin  $AD$ , vindt men uit:

$$-S'' + S - S' = 6 ml \dot{\varphi}_2 = \frac{6}{7} m \sqrt{3 gl}.$$

Dit voert tot  $S'' = \frac{5}{7} m \sqrt{3 gl}$ , zodat de stoot naar  $D$  gericht is.

173.\* De levende kracht van de dubbele slinger in de stand, waarin de botsing plaats vindt, is:

$$L = 4 ml^2 \dot{\varphi}^2 + ml^2 \dot{\theta}^2 + 3 m(2l \dot{\varphi} + l \dot{\theta})^2 =$$

$$= 4 ml^2(4 \dot{\varphi}^2 + 3 \dot{\varphi} \dot{\theta} + \dot{\theta}^2).$$

Is  $S$  de in  $Z$  op  $AB$  uitgeoefende stoot, dan zijn de arbeidscoëfficiënten  $G_\varphi = Sl$ ,  $G_\theta = 0$ . De vergelijkingen van Lagrange zijn dus:

$$4 ml(8 \dot{\varphi}_2 + 3 \dot{\theta}_2) = S, \quad 3 \dot{\varphi}_2 + 2 \dot{\theta}_2 = 0.$$

174. We nemen  $O$  als oorsprong en  $OA$  als positieve  $y$ -as van een rechthoekig assenkruis; de positieve  $x$ -as leggen we door het midden van de ribbe  $BC$  en de positieve  $z$ -as door het midden van de ribbe  $EH$ . Om assen door het zwaartepunt  $Z$  van het blok evenwijdig aan de  $x$ -as,  $y$ -as en  $z$ -as zijn de traagheidsmomenten:

$I_x = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (1^2 + 1^2) = 2$ ,  $I_y = I_z = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4}$ ;  
dit zijn tevens hoofdtraagheidsmomenten voor  $Z$ , d.w.z. de traagheidsproducten zijn 0. Voor de assen door  $O$  zijn de traagheidsmomenten en -producten:

$$I_x = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (1^2 + 1^2) = 2, \quad P_{yz} = 0, \quad P_{xz} = \frac{3}{2}, \quad P_{xy} = 0.$$

De coördinaten van  $F$  zijn 1, 1, 2 en de componenten van de stoot — 2, 2, 1. De momenten van de stoot om de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -as zijn:

$$M_x = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3, \quad M_y = 2(-2) - 1 \cdot 1 = -5,$$

$$M_z = 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) = 4.$$



Dit voert (als  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  en  $\omega_z$  de componenten van de rotatievector onmiddellijk na de stoot zijn) tot:

$$5 \omega_x - \frac{3}{2} \omega_z = -3, \quad 5 \omega_y = -5, \quad 2 \omega_z - \frac{3}{2} \omega_x = 4.$$

Hieruit volgt  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = -1$ ,  $\omega_z = 2$ . Bijgevolg is  $OH$  de rotatievector. De levende kracht na de stoot is  $\frac{13}{2}$ .

*Opmerking.* Daar de grootte van de rotatievector  $\sqrt{5}$  is, volgt uit de levende kracht, dat het traagheidsmoment van het blok om  $OH$  gelijk is aan  $\frac{13}{5}$ .

175. We nemen het zwaartepunt  $Z$  als oorsprong en de coördinaatassen evenwijdig aan die van 174. De coördinaten van  $F$  zijn nu  $\frac{1}{2}$ , 1, 1 en de componenten van de stoot  $-1$ ,  $-2$ ,  $-1$ . De momenten van de stoot om de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -as zijn  $1$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$ . Men heeft dus:

$$2 \omega_x = 1, \quad \frac{5}{4} \omega_y = -\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{4} \omega_z = 0,$$

dus  $\omega_x = \frac{1}{2}$ ,  $\omega_y = -\frac{2}{5}$ ,  $\omega_z = 0$ . De componenten van de snelheid van het zwaartepunt onmiddellijk na de stoot zijn  $v_x = -\frac{1}{3}$ ,  $v_y = -\frac{2}{3}$ ,  $v_z = -\frac{1}{3}$ . De snelheidscomponenten van een willekeurig punt  $(x, y, z)$  van het blok zijn:

$$\omega_y z - \omega_z y + v_x = -\frac{2}{5} z - \frac{1}{3},$$

$$\omega_z x - \omega_x z + v_y = -\frac{1}{2} z - \frac{2}{3},$$

$$\omega_x y - \omega_y x + v_z = \frac{1}{2} y + \frac{2}{5} x - \frac{1}{3}.$$

Voor een punt van de schroefas geldt:

$$-\frac{2}{5} z - \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \lambda, \quad -\frac{1}{2} z - \frac{2}{3} = -\frac{2}{5} \lambda, \\ \frac{1}{2} y + \frac{2}{5} x - \frac{1}{3} = 0.$$

Hieruit vindt men  $\lambda = \frac{10}{41}$ . De vergelijkingen van de schroefas zijn:

$$z = -\frac{140}{123}, \quad 12x + 15y - 10 = 0.$$

De componenten van de translatievector der schroefbeweging zijn  $\frac{1}{2} \lambda$ ,  $-\frac{2}{5} \lambda$ ,  $0$ , dus  $\frac{5}{41}$ ,  $-\frac{4}{41}$ ,  $0$ .

176. De componenten van de stoot zijn nu  $S_x$ ,  $-2$ ,  $-1$ , dus de momenten van de stoot om de assen door  $Z$ :

$$1, \quad S_x + \frac{1}{2}, \quad -S_x - 1.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}\omega_x &= 1/2, & \omega_y &= 4/5 S_x + 2/5, & \omega_z &= -4/5 S_x - 4/5, \\ v_x &= 1/3 S_x, & v_y &= -2/3, & v_z &= -1/3.\end{aligned}$$

De voorwaarde voor het 0 zijn van de translatievector is:

$$\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z = 0,$$

dus  $S_x = 0$ . De stootvector is dus  $FJ$  ( $Q$  in  $J$ ). Uit:

$$\begin{aligned}\omega_x &= 1/2, & \omega_y &= 2/5, & \omega_z &= -4/5, \\ v_x &= 0, & v_y &= -2/3, & v_z &= -1/3,\end{aligned}$$

vindt men voor de vergelijkingen van de rotatie-as:

$$2y + z = 0, \quad 24x + 15z + 20 = 0, \quad 12x - 15y + 10 = 0.$$

Deze drie vergelijkingen zijn natuurlijk afhankelijk.

## J. GEDWONGEN BEWEGING.

\*177. Is  $AZ = x$ , dan is het traagheidsmoment van  $CDE$  om  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} ml^2 + mx^2 + \frac{1}{3} ml^2 + m\{ (x+l)^2 + l^2 \} = \\ = m(2x^2 + 2lx + \frac{8}{3}l^2). \end{aligned}$$

Daar het bij de potentiële energie  $P$  op een constante term niet aankomt, is de  $P$  van de centrifugaalkracht  $-m\omega^2(x^2 + lx)$ . Men heeft dus:

$$\begin{aligned} x^2 - \omega^2(x^2 + lx) = -2\omega^2 l^2, \quad \dot{x} - \omega^2(x + \frac{1}{2}l) = 0, \\ x = A \operatorname{Ch} \omega t + B \operatorname{Sh} \omega t - \frac{1}{2}l. \end{aligned}$$

In verband met de beginvoorwaarde ( $x = l$ ,  $\dot{x} = 0$  voor  $t = 0$ ) wordt dit:

$$x = \frac{1}{2}l(3 \operatorname{Ch} \omega t - 1).$$

Is  $Z$  in  $B$  gekomen, dan is  $x = 2l$ , dus:

$$\operatorname{Ch} \omega t_1 = \frac{5}{3}, \quad e^{\omega t_1} = 3, \quad t_1 = \frac{\ln 3}{\omega}.$$

Op het tijdstip  $t_1$  is:

$$\dot{x}_1 = \frac{3}{2}\omega l \operatorname{Sh} \omega t_1 = 2\omega l.$$

Dit is voor  $t = t_1$  de relatieve snelheid van  $E$  (in de richting  $AD$ ). De sleepsnelheid van  $E$  heeft dan een component  $3\omega l$  in de richting (en zin)  $DE$  en een component  $2\omega l$  in de richting  $DA$ . Deze heeft de relatieve snelheid van  $E$  op, zodat de samengestelde snelheid van  $E$  voor  $t = t_1$  gelijk is aan  $3\omega l$  in de richting  $DE$ .

*Opmerking.* Het punt  $M$  van  $CD$ , dat midden tussen  $Z$  en  $D$  ligt, beweegt zich door de buis, alsof het een materieel punt was, dat door  $A$  wordt afgestoten met een kracht  $\mu\omega^2 AM$ , waarin  $\mu$  de massa van  $M$  is.

\*178. Als coördinaat nemen we de hoek  $\varphi$ , die  $AB$  met het verlengde van  $MA$  maakt. Het traagheidsmoment om de as van de cirkel is:

$$\frac{1}{3} ml^2 + m(R^2 + l^2 + 2Rl \cos \varphi) = m(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + 2Rl \cos \varphi).$$

Men heeft dus  $\frac{2}{3} l \dot{\varphi}^2 - R \omega^2 \cos \varphi = \text{constant}$ . Daar:

$$2 l \dot{\varphi}_0 = (R + 2 l) \omega$$

is (waarbij de positieve draaizin van  $\dot{\varphi}$  tegengesteld genomen is aan de draaiing  $\omega$ ), vinden we:

$$2 l \dot{\varphi}^2 = 3 R \omega^2 \cos \varphi - 3 R \omega^2 + \frac{(R + 2 l)^2}{2 l} \omega^2.$$

Bijgevolg is  $\dot{\varphi} = 0$  voor:

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{(R + 2 l)^2}{6 l R}.$$

Deze waarde van  $\cos \varphi_1$  ligt tussen  $-1$  en  $1$  (en is dus mogelijk), als  $4 l^2 - 8 R l + R^2 < 0$  is, dus voor:

$$R(1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}) < l < R(1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}).$$

Men vindt de grootste waarde van  $\cos \varphi_1$  (dus de kleinste waarde van de amplitudo der slingeren om de kinetische evenwichtsstand, waarbij  $AB$  in het verlengde van  $MA$  valt), als  $l = \frac{1}{2} R$  is; men heeft dan  $\cos \varphi_1 = -\frac{1}{3}$ .

*Opmerking.* Is  $l = R(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{3})$ , dan nadert  $AB$  asymptotisch tot de stand, waarin  $\cos \varphi = -1$  is.

179. Uit  $4 l \ddot{\varphi} + 3 R \omega^2 \sin \varphi = 0$  vindt men voor die periode:

$$\frac{4\pi}{\omega} \sqrt{\frac{l}{3R}}.$$

180.\* Dit volgt uit de vergelijking van 179.

\*181. Is  $\varphi$  de hoek, die  $AB$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $A$  maakt, dan is de potentiële energie van de centrifugaalkracht  $-\frac{2}{3} m \omega^2 l^2 \sin^2 \varphi$ . Bijgevolg heeft men:

$$\frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi - \frac{2}{3} m \omega^2 l^2 \sin^2 \varphi = \text{constant},$$

$$4 l \ddot{\varphi} = (4 \omega^2 l \cos \varphi - 3 g) \sin \varphi = f(\varphi).$$

Een zijdelingse kinetische evenwichtsstand is er dus, als  $\omega^2 > \frac{3g}{4l}$  is. Is dan  $\alpha$  de (tussen 0 en  $\frac{1}{2}\pi$  gelegen) waarde van  $\varphi$ , waarvoor  $\cos \varphi = \frac{3g}{4\omega^2 l}$  is, en stelt men  $\varphi = \alpha + u$  ( $u$  in absolute waarde klein), dan is bij benadering:

$$4l\ddot{u} = f(\alpha + u) = f(\alpha) + u f'(\alpha),$$

waarbij de tweede en hogere machten van  $u$  verwaarloosd zijn. Nu is:

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = -4\omega^2 l \sin^2 \alpha,$$

waardoor men vindt  $\ddot{u} + \omega^2 u \sin^2 \alpha = 0$ . De periode der kleine slingeren is dus:

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin \alpha} = 4\pi \sqrt{\frac{l}{4l\omega^2 - 3g}}.$$

\*182. Is  $\varphi$  de hoek, die  $AB$  maakt met de naar beneden gerichte verticaal, dan is de bewegingsvergelijking:

$$2l\dot{\varphi}^2 = 3g \cos \varphi - 2l\omega^2 \cos^2 \varphi.$$

Deze is onafhankelijk van  $\alpha$ , zodat het toestel dezelfde beweging uitvoert als dat van 181 (mits natuurlijk ook de beginvoorwaarden overeenstemmen). Voor  $\varphi = 0$  is  $2l\dot{\varphi}_1^2 = 3g - 2l\omega^2$ , zodat  $AB$  alleen dan de verticale stand bereikt, als  $\omega^2 < \frac{3g}{2l}$ . Is  $\omega^2 = \frac{3g}{2l}$ , dan wordt de verticale stand asymptotisch genaderd. Is  $\omega^2 > \frac{3g}{2l}$ , dan slingert  $AB$  heen en weer tussen de stand, waar  $\cos \varphi = 0$  is, en de stand, waar  $\cos \varphi = \frac{3g}{2l\omega^2}$  is. De zwaartepunten van  $AB$  in deze standen liggen op gelijke hoogten boven en onder het zwaartepunt van  $AB$  in de kinetische evenwichtsstand, waar geldt:

$$\cos \varphi = \frac{3g}{4l\omega^2}.$$

\*183. Is  $\varphi$  de hoek, die  $MZ$  (waarin  $Z$  het zwaartepunt van  $AB$  is) met het verlengde van  $OM$  maakt, dan is (als  $MZ = a$  is):

$$(3a^2 + l^2)\dot{\varphi}^2 - 6\omega^2 ar \cos \varphi = 0.$$

De stand, waarbij  $Z$  in het verlengde van  $OM$  ligt, wordt dus

gepasseerd met een relatieve hoeksnelheid, die wordt aangewezen door:

$$\dot{\varphi}_1^2 = \frac{6 \omega^2 a r}{3 a^2 + l^2}.$$

Evenals bij het toestel van 178 is de verandering van  $\varphi$  dezelfde als bij een samengestelde slinger.

\*184. Zij  $Z$  het zwaartepunt van  $AB$ ,  $MZ = a$  en  $\varphi$  de hoek, die  $MZ$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $M$  maakt. Dan is:

$$(l^2 + 3 a^2)\dot{\varphi}^2 - \omega^2(l^2 \cos^2 \varphi + 3 a^2 \sin^2 \varphi) - 6 g a \cos \varphi = \text{constant},$$

$$(l^2 + 3 a^2)\ddot{\varphi} + \{\omega^2(l^2 - 3 a^2)\cos \varphi + 3 g a\}\sin \varphi = 0.$$

Is  $l^2 = 3 a^2$ , dus  $a = \frac{1}{2} r$ , dan valt  $\omega$  uit de vergelijking weg.

185.\* Is  $P$  de potentiële energie van zwaartekracht en centrifugaalkracht tezamen, dan is:

$$P = -\frac{1}{6} m \{\omega^2(l^2 \cos^2 \varphi + 3 a^2 \sin^2 \varphi) + 6 g a \cos \varphi\},$$

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{1}{3} m \{\omega^2(l^2 - 3 a^2)\cos \varphi + 3 g a\}\sin \varphi.$$

Is  $l < \frac{1}{2} \sqrt{3} r$ , dan is  $l^2 - 3 a^2 < 0$  ( $a > \frac{1}{2} r$ ). Is  $\omega^2 \leq \frac{3 g a}{3 a^2 - l^2}$ , dan neemt  $P$  voortdurend toe, als  $\varphi$  toeneemt van 0 tot  $\pi$ . Er is dan alleen stabiel kinetisch evenwicht voor  $\varphi = 0$ . Is  $\omega^2 > \frac{3 g a}{3 a^2 - l^2}$ , dan is  $P$  minimaal voor  $\cos \varphi = \frac{3 g a}{3 a^2 - l^2}$ . Voor die tussen 0 en  $90^\circ$  gelegen waarde van  $\varphi$  (of het tegengestelde daarvan) is er stabiel kinetisch evenwicht.

186.\* Is  $l > \frac{1}{2} \sqrt{3} r$ , dan is  $l^2 - 3 a^2 > 0$  ( $a < \frac{1}{2} r$ ). Is  $\omega^2 \leq \frac{3 g a}{l^2 - 3 a^2}$ , dan neemt  $P$  voortdurend toe, als  $\varphi$  toeneemt van 0 tot  $\pi$ . Er is dan alleen stabiel kinetisch evenwicht voor  $\varphi = 0$ . Is  $\omega^2 > \frac{3 g a}{l^2 - 3 a^2}$  en neemt  $\varphi$  toe van 0 tot  $\pi$ , dan neemt  $P$  eerst toe, om voor een stompe waarde van  $\varphi$  een maximum te bereiken (labiel kinetisch evenwicht). Vervolgens neemt  $P$  weer af. Nu zijn  $\varphi = 0$  en  $\varphi = \pi$  de stabiele kinetische evenwichtsstanden.

187.\* Stelt men  $\varphi = \pi + u$  ( $u$  in absolute waarde klein), dan vindt men bij benadering:

$$(l^2 + 3 a^2)\ddot{u} + \{\omega^2(l^2 - 3 a^2) - 3 ga\}u = 0.$$

Is  $\omega^2 > \frac{3 ga}{l^2 - 3 a^2}$ , dan vindt men voor de periode der kleine slingeren om de stand  $\varphi = \pi$ :

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l^2 + 3 a^2}{\omega^2(l^2 - 3 a^2) - 3 ga}}.$$

**EXAMENOPGAVEN  
VAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL.**

JUNI 1946.

1. Formuleer en bewijs de vergelijkingen van Lagrange voor een systeem van  $N$  massapunten met  $p$  ( $p \leq 3N$ ) vrijheidsgraden.

2. Van een rechthoekig assenstelsel  $OXYZ$  is  $O$  een vast punt en  $OZ$  verticaal. Dit assenstelsel wentelt met constante hoeksnelheid  $\omega$  om  $OZ$ . In het  $OXY$ -vlak kan een punt met massa  $m$  zonder wrijving bewegen. Het massapunt wordt door het met  $OXYZ$  meebewegend punt  $P$ , waarvan  $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, 0)$  de coördinaten t.o.v.  $OXYZ$  zijn, aangetrokken met een kracht, die evenredig en gelijkgericht is met den afstand van het massapunt tot  $P$  en die voor den afstand 1 gelijk is aan  $2m\omega^2$ .

- 1) Stel de bewegingsvergelijkingen van het massapunt t.o.v.  $OXYZ$  op.
- 2) Bewijs, dat het met  $OXYZ$  meebewegend punt  $Q$ , waarvan  $(a, a, 0)$  de coördinaten t.o.v.  $OXYZ$  zijn, een kinetische evenwichtsstand van het massapunt is. Onderzoek of deze evenwichtsstand stabiel dan wel labiel is.
- 3) Bewijs, dat de som van het relatieve impulsiemoment van het massapunt t.o.v.  $Q$  en  $-m\omega r^2$  constant is, wanneer  $r$  de afstand van  $Q$  tot het massapunt is.

3. Een vierkante homogene plaat  $ABCD$  (massa  $m$ ,  $AB = 2a$ ) kan in het vlak van een vast assenstelsel  $OXY$  ( $OX$  horizontaal,  $OY$  verticaal) onder invloed van de zwaartekracht en zonder wrijving zodanig bewegen, dat  $A$  langs  $OX$  en  $B$  langs  $OY$  glijdt. Ten tijde  $t = 0$  is de plaat in rust en maakt  $AB$  met  $OX$  en  $OY$  hoeken van  $45^\circ$  ( $B, C$  en  $D$  boven  $OX$ ).

Men vraagt de hoeksnelheid van de plaat en de door  $OX$  en  $OY$  op de plaat uitgeoefende reactie te berekenen voor het tijdstip, waarop  $AB$  voor het eerst horizontaal wordt.

OCTOBER 1946. C.

1. Op een omwentelingscylinder met straal  $R$ , waarvan de as in een horizontaal vlak ligt, rusten onderworpen aan de zwaarte-



kracht twee gelijke homogene staven, die in hun eene uiteinde scharnierend met elkaar zijn verbonden en die zonder wrijving over den cylinder kunnen glijden. De staven bevinden zich in een vlak loodrecht op de as van den cylinder en hebben elk de lengte  $4R$  en de massa  $m$ ; de versnelling der zwaartekracht is  $g$ .

Bereken den hoek, dien de staven met elkaar maken in den evenwichtsstand. Bepaal in dien stand ook den druk, dien de staven op den cylinder uitoefenen.

2. Een homogene omwentelingscylinder met straal  $a$  kan onder den invloed der zwaartekracht slingeren om een horizontale as, die evenwijdig is aan de as van den cylinder op een afstand  $b$  daarvan verwijderd.

Bepaal de bewegingsvergelijking en den slingertijd voor kleine slingeringen, uitgedrukt in  $a$ ,  $b$  en de versnelling der zwaartekracht.

3. Een nauwe rechte buis wentelt in een horizontaal vlak met constante hoeksnelheid  $\omega$  om een verticale as. De afstand van de as tot de buis is  $a$ . In de buis kan zich zonder wrijving bewegen een stoffelijk punt met massa  $m$ , dat onderworpen is aan de zwaartekracht. De versnelling der zwaartekracht is  $g$ .

Op den tijd  $t = 0$  bevindt het punt zich in het dichtst bij de as gelegen punt der buis en heeft ten opzichte van de buis een snelheid  $\frac{1}{2} a \omega$  in de richting tegengesteld aan die van de snelheid tengevolge der wenteling.

- a. Bepaal de relatieve beweging van het stoffelijk punt ten opzichte van de buis.
- b. Indien wordt aangenomen, dat de buis breekt, als op eenig punt in een richting loodrecht op den wand een druk wordt uitgeoefend  $\geq mg \sqrt{5}$  hoe groot mag dan  $\omega$  hoogstens zijn, om het mogelijk te maken, dat de buis na het tijdstip  $t = 0$  een volle omwenteling maakt, voordat ze breekt.

## OCTOBER 1946. M.T.

1. Aan een van de uiteinden van een horizontale middellijn van een homogene bol (straal  $R$ , massa  $m$ ), die op een volkomen glad horizontaal vlak geplaatst is, heeft men een stoffelijk punt (massa  $m$ ) bevestigd. De versnelling van de zwaartekracht is  $g$ .

- a) Bewijs dat de bol, uit deze toestand aan zichzelf overgelaten, zich zo zal gaan bewegen, dat het midden van de straal, die het stoffelijk punt draagt, zich verticaal beweegt.

- b) Stel een differentiaalvergelijking van de eerste orde in één noodzakelijke coördinaat op, waardoor de beweging van het stelsel beschreven wordt.
- c) Bereken de grootte van de drukking, die de bol op het vlak uitoefent, als het stoffelijke punt door zijn laagste stand gaat.
2. In het midden  $C$  van de homogene staaf  $AB$  (lengte  $2l$ , massa  $m$ ) is aan  $AB$  de homogene staaf  $CD$  (lengte  $\frac{1}{2}l\sqrt{2}$ , massa  $m$ ) onwrikbaar bevestigd;  $AB$  en  $CD$  staan loodrecht op elkaar. Het geheel kan om  $A$  in een verticaal vlak wentelen. In dit vlak ligt, even hoog als  $A$ , rechts van  $A$  het punt  $E$ ;  $AE = 2l$ . In  $E$  is een koord bevestigd dat door een ringetje bij  $B$  gaat en aan zijn uiteinde een gewicht  $x$  draagt. Gegeven is dat er evenwicht bestaat als  $AB$  verticaal naar beneden hangt en  $D$  rechts van  $AB$  is. De versnelling van de zwaartekracht is  $g$ .
- Bepaal  $x$  en de frequentie der kleine trillingen om de evenwichtsstand.

DECEMBER 1946.  $C_3$ .

1. Een fysische slinger bestaat uit een homogene driehoekige plaat in den vorm van een gelijkbenige rechthoekige driehoek  $ABC$ , waarvan de rechte hoek in  $C$  ligt en een homogene staaf  $DE$ , die in het midden  $D$  van  $AB$  aan de plaat bevestigd is zoo, dat  $DE$  het verlengde van  $CD$  is. Het lichaam kan slingeren om een horizontale as door  $E$  loodrecht op het vlak van de plaat. De massa van de plaat is  $8m$ , de zijde  $AB$  is  $2a$ , de lengte van de staaf is  $a$ . Bepaal de massa van de staaf  $DE$ , als de slingertijd der kleine slingeren, die het toestel kan uitvoeren, 1 seconde is.
2. Een homogene omwentelingscylinder is op den tijd  $t = 0$  in rust op een hellend vlak met hellingshoek  $45^\circ$ . De as van de cylinder is evenwijdig aan de snijlijn van het hellend vlak en het horizontale vlak. Bepaal de beweging van de cylinder:
- 1° als de wrijvingscoëfficiënt tussen cylinder en hellend vlak  $\frac{1}{4}$  is.
- 2° als die wrijvingscoëfficiënt  $\frac{1}{2}$  is.
3. Een stoffelijk punt met massa  $m$ , dat onderworpen is aan de zwaartekracht, kan zich zonder wrijving bewegen in een nauwe buis, die met een constante hoeksnelheid  $\omega$  wordt gedraaid om een verticale as, die de buis op een afstand  $a$  kruist. De buis maakt een hoek van  $30^\circ$  met de verticaal. De zin der wenteling komt overeen met de zin van het doorlopen van de horizontale projectie der buis,

die beantwoordt aan het doorlopen der buis van beneden naar boven.

Op het tijdstip  $t = 0$  bevindt het stoffelijk punt zich op een afstand  $b$  van het punt der buis, dat het dichtst bij de omwentelingsas ligt en hoger dan dat punt; het is dan ten opzichte van de buis in rust.

Bepaal de relatieve beweging van het stoffelijk punt ten opzichte van de buis en de druk, die het punt op een willekeurig tijdstip gedurende de beweging op de buis uitoefent.

Kan bij gegeven  $b$  de hoeksnelheid  $\omega$  zo gekozen worden, dat het punt ten opzichte van de buis in rust blijft?

De versnelling der zwaartekracht  $g$  is in elk der drie vraagstukken gegeven.

### MEI 1947. C<sub>3</sub>.

1. Een stoffelijk punt met massa  $m$  kan zich zonder wrijving onder invloed der zwaartekracht bewegen in een nauwe buis, die de vorm heeft van een semicubische parabool, bepaald door de vergelijking  $y^3 = ax^2$ , waarbij de  $y$ -as verticaal naar boven geplaatst is.

Op de tijd  $t = 0$  bevindt het stoffelijk punt zich zonder snelheid in het punt  $a$ ,  $a$  der buis. Gevraagd na hoeveel tijd het laagste punt der buis bereikt wordt en voor een willekeurig punt bij de beweging de druk op de buiswand te bepalen.

2. Een staaf  $AB$ , waarvan de massa kan verwaarloosd worden en waarvan de lengte  $2R$  bedraagt, is geplaatst samenvallend met een middellijn van een homogene holle bol met massa  $m$ , die onwrikbaar aan de staaf verbonden is en kan onder invloed van de zwaartekracht zonder wrijving slingeren om een horizontale as door zijn hoogste punt  $A$ .

Waar moet aan de staaf een stoffelijk punt met massa  $4\frac{1}{2}m$  worden aangebracht, opdat de periode der kleine slingeren, die het toestel dan kan uitvoeren zoo groot mogelijk zij.

3. Een staaf  $AB$  met massa  $m$  en lengte  $l$ , die zonder wrijving kan draaien om een horizontale as door  $A$ , wordt in een stand, waarbij  $AB$  een hoek  $\alpha$  maakt met de naar beneden gerichte verticaal zonder beginsnelheid losgelaten en beweegt zich onder de invloed der zwaartekracht totdat zij plotseling tot stilstand komt door een volkomen onveerkrachtige botsing tegen een vaste horizontale pen  $C$  zoo geplaatst, dat  $AC$  een hoek  $\beta (< \alpha)$  maakt met

de naar beneden gerichte verticaal en  $AC = l_1 (< l)$ . Bereken de stoot, die de staaf bij de botsing ondervindt en de reactie-stoot in  $A$ .

Hoe groot zijn deze stoten, als in plaats van volkomen onveerkrachtige botsing, botsing met een botsingscoëfficiënt  $k$  optreedt. Bepaal voor dat geval ook de beweging na de botsing, waarbij onderscheid moet gemaakt worden tussen de gevallen, dat  $AC$  en de beginstand van  $AB$  aan dezelfde kant of ter weerszijden van de verticaal liggen.

## JUNI 1947. W.S.V.

1. Wat verstaat men onder het sinusproduct van twee vectoren? Gelden voor deze bewerking de commutatieve, de distributieve en de associatieve eigenschap? Druk het product uit in de rechthoekige componenten der factoren en bewijs deze uitkomst. Wat verstaat men onder het moment van een vector  $\vec{a}$  ten opzichte van een punt? Toon aan dat het moment onveranderd blijft als  $\vec{a}$  langs zijn werklijn verschoven wordt. Bewijs dat de fluxie van het impulsmoment van een stoffelijk punt gelijk is aan de som der momenten van de op het punt werkende krachten.

2. Een stoffelijk punt (massa  $m$ ) is door middel van twee koorden, elk van lengte  $l$ , opgehangen aan twee even hoog gelegen punten  $A$  en  $B$ , die de afstand  $2a$  hebben. Een homogene staaf (massa  $m$ , lengte  $2a$ ) draagt aan beide uiteinden een ringetje; elk der beide koorden gaat door zo'n ringetje. Men brengt de staaf in de stand  $AB$  en laat haar los. Hoe groot mag de verhouding  $\frac{a}{l}$  hoogstens zijn, opdat de staaf het stoffelijk punt zal bereiken? Bepaal de evenwichtsstand van het stelsel, alsmede de cirkelfrequentie der kleine trillingen om die stand. De versnelling der zwaartekracht is  $g$ .

3. Een homogene staaf wordt in drie delen verdeeld, opvolgend lang  $2l$ ,  $2pl$  en  $2l$ ; in de deelpunten zijn de delen draaibaar verbonden. Het geheel rust op een glad horizontaal vlak en de delen liggen in elkaars verlengde. Aan een van de buitenste delen wordt op het vrije uiteinde een horizontale stoot uitgeoefend, loodrecht op de staaf. Men vraagt hoe groot  $p$  moet zijn, opdat het niet direct getroffen buitenste deel een maximale hoeksnelheid krijgt.

SEPTEMBER 1947.  $C_3$ .

1. Een nauwe buis, die de gedaante heeft van een ellips, die als

zij in het vlak  $xOy$  ligt, de vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  heeft, wentelt met constante hoeksnelheid  $\omega$  om de verticaal geplaatste  $y$ -as. In de buis kan zich, onderworpen aan de zwaartekracht, zonder wrijving een stoffelijk punt met massa  $m$  bewegen. Hoe groot moet de hoeksnelheid zijn, als het punt op de hoogte  $h$  ( $\neq 0$ ) ten opzichte van de buis in rust zal blijven en hoe groot is dan de druk op de wand der buis.

2. Een toestel bestaat uit vier gelijke homogene staven met massa  $m$  en lengte  $2l$ . De eerste  $AB$  is in haar midden  $O$  onwrikbaar verbonden met de tweede  $OC$ , die loodrecht op  $AB$  staat, en is in haar uiteinden scharnierend zonder wrijving verbonden met de beide overige  $AD$  en  $BE$ . Het geheel is zonder wrijving draaibaar om een horizontale as door  $O$  en blijft in een vlak loodrecht op die as.

Stel voor de beweging van dat toestel de vergelijkingen van Lagrange op, waarbij als coördinaten worden ingevoerd de hoeken  $\varphi$ ,  $\vartheta_1$  en  $\vartheta_2$  die  $OC$ ,  $AD$  en  $BE$  met de naar beneden gerichte verticaal maken.

Vereenvoudig die vergelijkingen door de aanname, dat  $\varphi$ ,  $\vartheta_1$  en  $\vartheta_2$  en hun afgeleiden zoo klein blijven, dat termen die in die grootheden van de tweede orde zijn kunnen worden verwaarloosd.

Bepaal met die benadering de beweging, die ontstaat, als voor  $t=0$ ,  $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ ,  $\vartheta_1 = 0$ ,  $\dot{\vartheta}_1 = \omega$ ,  $\vartheta_2 = 0$ ,  $\dot{\vartheta}_2 = -\omega$  en bereken in een willekeurige stand daarbij de druk in  $O$  en in de scharnieren  $A$  en  $B$ .

3. Een homogene staaf met massa  $m$  en lengte  $2l$  hangt, zonder wrijving draaibaar om zijn bovenste punt  $O$ , verticaal naar beneden. Een stoffelijk punt met massa  $\frac{3}{8}m$  is door een onrekbare draad zonder gewicht met lengte  $a$  verbonden met  $O$  en wordt in een stand, waarbij de draad een hoek  $\alpha$  met de naar beneden gerichte verticaal maakt, zonder beginsnelheid losgelaten. Het stoffelijk punt botst volkomen veerkrachtig tegen de staaf. Gegeven is, dat daarbij de reactiestoot in  $O$  nul is en dat in de uiterste stand, die de staaf na de botsing bereikt, de hoek, die ze met de naar beneden gericht verticaal maakt,  $60^\circ$  bedraagt.

Bereken  $a$  en  $\alpha$ .

OCTOBER 1947. C<sub>3</sub>

1. Een paal eindigt van boven in een halve bol met straal  $R$ .

Op deze halve bol rust, onderworpen aan de zwaartekracht, een toestel bestaande uit twee gelijke homogene staven, die in hun ene uiteinde scharnierend met elkaar zijn verbonden, elk op de lengte  $3R$  en de massa  $m$  hebben en aan hun andere uiteinde een massa  $\frac{1}{2}m$  dragen. De staven kunnen zonder wrijving over de bol glijden.

Bewijs, dat in de evenwichtsstand de staven een rechte hoek met elkaar maken.

2. Een stoffelijk punt met massa  $m$  kan zich, onder den invloed der zwaartekracht, zonder wrijving bewegen in een cirkelvormige buis (straal  $R$ ), die met constante hoeksnelheid  $\omega$  wentelt om een verticale middellijn.

Op het tijdstip  $t = 0$  bevindt het punt zich in het laagste punt der buis en heeft ten opzichte der buis een snelheid  $v_0$ .

Bereken  $v_0$ , als gegeven is, dat de relatieve beweging ten opzichte der buis omkeert, als het punt een boog van  $60^\circ$  heeft doorlopen, en bereken in het hoogste punt, dat dan bereikt wordt, de druk op de buiswand.

De versnelling der zwaartekracht is  $g$ .

3. Een stoffelijk punt met massa  $m$  is door een onrekbare draad van de lengte  $l$  en waarvan de massa kan verwaarloosd worden verbonden met een punt  $O$  en wordt in de stand, waarbij de draad een hoek van  $60^\circ$  met de verticaal maakt, zonder beginsnelheid losgelaten.

In  $O$  hangt verticaal naar beneden in rust een homogene staaf met lengte  $l$  en massa  $M$ , waarvan het bovenste punt zich, zonder wrijving kan bewegen over een horizontale lijn in het vlak, waarin ook de beweging van het stoffelijk punt plaats vindt.

Het stoffelijk punt botst volkomen veerkrachtig tegen de staaf en komt daardoor tot stilstand.

Men vraagt  $M$  uit te drukken in  $m$ .

#### DECEMBER 1947. W.V.S.

1. Bewijs voor een mechanisch stelsel dat de beweging van het zwaartepunt plaats heeft, alsof het een stoffelijk punt was (met een massa gelijk aan de totale massa van het stelsel), dat onderworpen is aan een stelsel krachten, dat ontstaat als men de uitwendige krachten, die op het systeem werken, met behoud van richting en grootte naar dat punt overbrengt.

2. Een homogene plaat in de vorm van een vierkant  $ABCD$ ,

die zich vrij kan bewegen, voert een rotatie uit om de diagonaal  $AC$ , met de hoeksnelheid  $\omega$ . Plotseling wordt het punt  $B$  vastgehouden. Wat is onmiddellijk na dit ogenblik de bewegingstoestand van de plaat?

3. Een homogene staaf (lengte  $2l$ , massa  $m$ ) is in de uiteinden met behulp van twee even lange koorden (lengte  $2l$ ) opgehangen aan twee even hoog gelegen punten, die op een afstand  $2l$  van elkaar verwijderd zijn. In de evenwichtsstand, waarin de koorden verticaal zijn, geeft men aan de staaf een draaiing met hoeksnelheid  $\omega$  om de verticale as door zijn midden.

- a. Tot welke hoogte zal de staaf stijgen?
- b. Hoe groot is de spanning in elk koord, onmiddellijk nadat de draaiing begonnen is?
- c. Wat is de cirkelfrequentie der kleine trillingen van de staaf om de evenwichtsstand?

## OPLOSSINGEN DER EXAMENOPGAVEN.

JUNI 1946.

1. De noodzakelijke coördinaten (algemene coördinaten, stelselcoördinaten of kortweg coördinaten)  $q_1, q_2, \dots, q_p$  bepalen de stand van het mechanisme. Is er gedwongen beweging, d.w.z. zijn er verbindingsen, die op een gegeven wijze van de tijd  $t$  afhangen (zoals in Oct. 1946 C no. 3 of Dec. 1946 no. 3 of Sept. 1947 no. 1), dan is de stand eerst volledig bepaald, als bovendien de tijd  $t$  gegeven is.

De rechthoekige coördinaten  $x_j, y_j, z_j$  van het massapunt  $A_j$  met massa  $m_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) zijn bekende functies van  $q_1, q_2, \dots, q_p$  en eventueel (als er gedwongen beweging is) ook van  $t$ . Daardoor is:

$$\dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_j}{\partial q_p} \dot{q}_p + \frac{\partial x_j}{\partial t},$$

zodat  $\dot{x}_j$  een lineaire functie van  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p$  is met coëfficiënten, die functies zijn van  $q_1, q_2, \dots, q_p$  en (eventueel)  $t$ . Verder leest men uit de vergelijking af:

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x_j}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_1}.$$

Voor de levende kracht van het toestel schrijven we:

$$L = \frac{1}{2} \sum m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) = \frac{1}{2} \sum m_j [\dot{x}_j^2].$$

Hier en in het volgende is  $\Sigma$  een sommering over  $j = 1, 2, \dots, N$  en  $[\ ]$  een sommering over  $x, y$  en  $z$ . Zet men de gedwongen beweging stop (m.a.w. houdt men  $t$  constant) en laat men  $q_1, q_2, \dots, q_p$  met oneindig kleine bedragen  $dq_1, dq_2, \dots, dq_p$  aangroeien, dan is de arbeid, die de op het toestel werkende krachten tezamen verrichten:

$$\begin{aligned} dA &= \Sigma \left[ X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \right] dq_1 + \Sigma \left[ X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \right] dq_2 + \dots + \Sigma \left[ X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_p} \right] dq_p = \\ &= F_1 dq_1 + F_2 dq_2 + \dots + F_p dq_p. \end{aligned}$$

Hierin zijn  $X_j, Y_j, Z_j$  de componenten van de op  $A_j$  werkende kracht, terwijl  $F_1, F_2, \dots, F_p$  de arbeidscoëfficiënten heten. Men



vindt  $F_h$  als de door  $dq_h$  gedeelde arbeid, die alle op het toestel werkende krachten te zamen verrichten, als  $q_h$  met  $dq_h$  aangroeit en de overige noodzakelijke coördinaten en  $t$  constant blijven. Men heeft:

$$\begin{aligned} F_1 &= \Sigma \left[ X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \right] = \Sigma m_j \left[ \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \right] = \\ &= \Sigma m_j \left[ \frac{d}{dt} \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \right] - \Sigma m_j \left[ \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \right] = \\ &= \Sigma m_j \left[ \frac{d}{dt} \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \right] - \Sigma m_j \left[ \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_1} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \frac{1}{2} \Sigma m_j [\dot{x}_j^2] - \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{1}{2} \Sigma m_j [\dot{x}_j^2] = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

Dit geeft de volgende  $p$  vergelijkingen van Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = F_h \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Zijn er geen verbindingskrachten, die ook na stopzetten van de eventueel aanwezige gedwongen beweging arbeid verrichten (is er dus geen wrijving, die gepaard gaat met uitglijden, en geen luchtweerstand), en is  $P$  de totale potentiële energie, dan is (als de gegeven krachten afkomstig zijn van een krachtveld, dat niet met de tijd verandert en conservatief is):

$$dA = -dP = -\frac{\partial P}{\partial q_1} dq_1 - \frac{\partial P}{\partial q_2} dq_2 - \dots - \frac{\partial P}{\partial q_p} dq_p.$$

Dan is  $F_h = -\frac{\partial P}{\partial q_h}$ , waardoor de vergelijkingen van Lagrange overgaan in:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = -\frac{\partial P}{\partial q_h} \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Voor dit geval lenen zich de vergelijkingen van Lagrange bijzonder goed. In de  $p$  vergelijkingen komen dan geen andere onbekenden voor dan de  $p$  noodzakelijke coördinaten (met hun eerste en tweede fluxies).

*Opmerkingen.* 1. Drukt men  $L$  uit in de noodzakelijke coördinaten en hun fluxies (en eventueel de tijd), dan ontstaat een kwadratische functie van  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p$  met coëfficiënten, die functies zijn van  $q_1, q_2, \dots, q_p$  en  $t$ . Is er geen gedwongen beweging, dan is

$L$  een homogene kwadratische functie van  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p$  met coëfficiënten, die alleen functies van  $q_1, q_2, \dots, q_p$  zijn.

2. De vergelijkingen van Lagrange gelden ook, als het mechanisme uit lichamen bestaat, die uit oneindig veel materiële punten opgebouwd gedacht kunnen worden. De door het teken  $\Sigma$  aangegeven sommeringen moeten dan door drievoudige integralen worden vervangen.

3. Door naar de tijd te integreren gaan de vergelijkingen van Lagrange in die voor stoten over. Deze luiden:

$$\Delta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = G_h \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Voor  $L$  heeft men nu te nemen de waarde daarvan in de stand op het ogenblik van de stoot, daar  $q_1, q_2, \dots, q_h$  onmiddellijk vóór de stoot dezelfde zijn als onmiddellijk daarna. De coëfficiënten van de kwadratische functie van  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p$  zijn nu dus constanten.

Verder betekent  $\Delta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \text{ na de stoot} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \text{ vóór de stoot.}$$

De grootheden  $G_h$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ) zijn de arbeidscoëfficiënten voor stoten. Deze worden op dezelfde wijze berekend als de grootheden  $F_h$ , nl. door de stoten als krachten te behandelen en de arbeid te berekenen bij een virtuele (denkbeeldige) verplaatsing, waarbij men alle noodzakelijke coördinaten constant houdt (en in geval van gedwongen beweging ook de tijd), op  $q_h$  na, die men met een oneindig klein bedrag laat aangroeien.

2. De  $x$ - en de  $y$ -component van de aantrekkende kracht zijn  $-2m\omega^2(x - \frac{1}{2}a)$  resp.  $-2m\omega^2(y - \frac{1}{2}a)$  en de  $x$ - en de  $y$ -component van de centrifugaalkracht  $m\omega^2 x$  resp.  $m\omega^2 y$ . Als zin, waarin  $\omega$  positief gerekend wordt, nemen we: van de positieve  $x$ -as door de rechte hoek naar de positieve  $y$ -as. De  $x$ - en de  $y$ -component van de kracht van Coriolis zijn dan  $2m\omega \dot{y}$  resp.  $-2m\omega \dot{x}$ . De bewegingsvergelijkingen (voor de relatieve beweging) zijn dus:

$$\ddot{x} + \omega^2(x - a) - 2\omega \dot{y} = 0,$$

$$\ddot{y} + \omega^2(y - a) + 2\omega \dot{x} = 0.$$

Hieraan is voldaan door  $x = a, y = a$ , zodat  $(a, a)$  een kinetisch evenwichtspunt is. De potentiële energie van de aantrekkende kracht is:

$$m \omega^2 \left\{ (x - \frac{1}{2} a)^2 + (y - \frac{1}{2} a)^2 \right\}$$

en die van de centrifugaalkracht  $-\frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$ . Daar de kracht van Coriolis geen arbeid verricht, heeft men dus:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2 \omega^2 \left\{ (x - \frac{1}{2} a)^2 + (y - \frac{1}{2} a)^2 \right\} - \\ - \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{constant}, \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + \omega^2 \left\{ (x - a)^2 + (y - a)^2 \right\} = \omega^2 C^2,$$

waarin  $C$  een constante is. De laatste vergelijking kan ook gemakkelijk uit de differentiaalvergelijkingen van de tweede orde worden afgeleid door de eerste met  $\dot{x}$  en de tweede met  $\dot{y}$  te vermenigvuldigen en op te tellen. Uit de differentiaalvergelijking van de eerste orde volgt:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 \leq C^2.$$

Het stoffelijke punt  $S$  komt dus niet buiten een cirkel om  $Q$  met straal  $C$ . Is  $S$  in  $Q$  in relatieve rust en brengt men een kleine storing aan, dan is  $C$  klein, zodat  $S$  dan in de buurt van  $Q$  blijft. Het relatieve evenwicht is dus stabiel.

Het relatieve impulsiemoment (bewegingsmoment) om  $Q$  (d.w.z. om een as door  $Q$  evenwijdig aan de  $z$ -as), positief gerekend in dezelfde zin als  $\omega$ , is:

$$B = m \left\{ (x - a) \dot{y} - (y - a) \dot{x} \right\}.$$

Hieruit volgt in verband met de differentiaalvergelijkingen van de tweede orde:

$$\begin{aligned} \dot{B} &= m \left\{ (x - a) \ddot{y} - (y - a) \ddot{x} \right\} = \\ &= -2 m \omega \left\{ (x - a) \dot{x} + (y - a) \dot{y} \right\} = \\ &= -m \omega \frac{d}{dt} \left\{ (x - a)^2 + (y - a)^2 \right\} = -m \omega \frac{dr^2}{dt}. \end{aligned}$$

Dit voert tot:

$$B + m \omega r^2 = \text{constant}$$

en niet tot  $B - m \omega r^2 = \text{constant}$ , zoals in de opgave staat.

3. Is  $\angle OAB = \varphi$ , dan zijn de coördinaten van het zwaartepunt  $Z$  van de plaat:

$$x = y = a(\cos \varphi + \sin \varphi).$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}x &= \dot{y} = a \dot{\varphi}(\cos \varphi - \sin \varphi); \\x^2 + \dot{y}^2 &= 2 a^2 \dot{\varphi}^2(1 - 2 \cos \varphi \sin \varphi).\end{aligned}$$

Het traagheidsmoment om een as door  $Z$  loodrecht op het vlak van de plaat is  $\frac{1}{3} ma^2 + \frac{1}{3} ma^2 = \frac{2}{3} ma^2$ . De levende kracht van de plaat is dus:

$$\begin{aligned}L &= ma^2 \dot{\varphi}^2(1 - 2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{3}) = \\&= \frac{2}{3} ma^2 \dot{\varphi}^2(2 - 3 \cos \varphi \sin \varphi).\end{aligned}$$

Uit  $L + P = L_0 + P_0$  volgt:

$$2 a \dot{\varphi}^2(2 - 3 \cos \varphi \sin \varphi) + 3 g(\cos \varphi + \sin \varphi) = 3 \sqrt{2} g.$$

Voor het met 1 gemerkte tijdstip, waarop  $\varphi = 0$  geworden is, geldt:

$$\dot{\varphi}_1^2 = \frac{3g}{4a}(\sqrt{2} - 1).$$

Uit  $L + P = \text{constant}$  vindt men door te fluxioneren:

$$\begin{aligned}4 a \ddot{\varphi}(2 - 3 \cos \varphi \sin \varphi) + \\+ 6 a \dot{\varphi}^2(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + 3 g(\cos \varphi - \sin \varphi) = 0.\end{aligned}$$

Voor  $\varphi = 0$  geeft dit:

$$16 a \ddot{\varphi}_1 = 12 a \dot{\varphi}_1^2 - 6 g = 3(3\sqrt{2} - 5)g.$$

Zijn  $Q$  en  $R$  de krachten door de  $x$ -as en de  $y$ -as op de plaat uitgeoefend, positief gerekend in de positieve  $y$ - resp.  $x$ -richting, dan is:

$$\begin{aligned}Q - mg &= m\ddot{y} = ma\{\ddot{\varphi}(\cos \varphi - \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2(\cos \varphi + \sin \varphi)\}, \\R &= m\ddot{x} = ma\{\ddot{\varphi}(\cos \varphi - \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2(\cos \varphi + \sin \varphi)\}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}Q_1 &= mg + ma(\ddot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1^2) = \frac{1}{16} (13 - 3\sqrt{2})mg, \\R_1 &= ma(\ddot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1^2) = -\frac{3}{16} (1 + \sqrt{2})mg.\end{aligned}$$

OCTOBER 1946. C.

1. We beschouwen de staven  $AB$  en  $AC$  eerst als één vast lichaam. De drukken  $N_1$  en  $N_2$  door de cylinder op  $AB$  resp.  $AC$

uitgeoeffend gaan door het punt  $M$ , waarin het vlak  $ABC$  de as van de cylinder snijdt. In geval van evenwicht gaat dus het gewicht van het geheel eveneens door  $M$ . Het gemeenschappelijke zwaartepunt  $Z$  ligt dus op de verticaal door  $M$ . Valt  $Z$  niet in  $M$ , dan ligt dus in de evenwichtsstand het scharnier  $A$  verticaal boven  $M$ .

We nemen aan, dat  $A$  verticaal boven  $M$  ligt. Zij:

$$\angle BAM = \angle MAC = \varphi.$$

Uit de horizontale componenten der op het geheel werkende uitwendige krachten volgt:

$$N_1 \cos \varphi - N_2 \cos \varphi = 0,$$

dus  $N_1 = N_2 = N$ . Hiertoe kan men ook op grond van symmetrie ten opzichte van de verticaal door  $M$  besluiten. Uit de verticale componenten der krachten op het geheel volgt:

$$N \sin \varphi + N \sin \varphi - 2 mg = 0, \quad N = \frac{mg}{\sin \varphi}.$$

Uit de momentenstelling om  $A$ , toegepast op een der staven, volgt:

$$NR \cotg \varphi - mg \cdot 2R \sin \varphi = 0,$$

dus  $N = 2 mg \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi$ . Dit voert tot:

$$2 \sin^3 \varphi = \cos \varphi, \quad 2 \operatorname{tg}^3 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi - 1 = 0.$$

De vergelijking in  $\operatorname{tg} \varphi$  heeft één reële wortel, nl.  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ . We vinden dus:

$$\varphi = 45^\circ, \quad N = \sqrt{2} mg,$$

zodat de staven een hoek van  $90^\circ$  met elkaar maken.

Uit  $\varphi = 45^\circ$  volgt, dat  $Z$  in  $M$  valt. Er is dus ook evenwicht, als  $A$  niet op de verticaal door  $M$  ligt. Zij  $\theta$  de hoek, die  $MA$  met de naar boven gerichte verticaal door  $M$  maakt, positief gerekend als  $A$  en  $B$  aan dezelfde kant van die verticaal liggen. Uit de horizontale componenten der op het geheel werkende krachten volgt:

$$N_1 \cos(\frac{1}{4}\pi - \theta) - N_2 \cos(\frac{1}{4}\pi + \theta) = 0,$$

$$N_1(\cos \theta + \sin \theta) = N_2(\cos \theta - \sin \theta),$$

terwijl uit de verticale componenten volgt:

$$N_1 \sin(\frac{1}{4}\pi - \theta) - N_2 \sin(\frac{1}{4}\pi + \theta) - 2 mg = 0,$$

$$N_1(\cos \theta - \sin \theta) + N_2(\cos \theta + \sin \theta) - 2\sqrt{2} mg.$$

Men vindt zo:

$$N_1 = \sqrt{2}(\cos \theta - \sin \theta)mg, \quad N_2 = \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta)mg.$$

Iets sneller nog vindt men  $N_1$  door de momentenstelling voor de staaf  $AB$  op  $A$  toe te passen. Dit voert tot:

$$N_1 R - 2 mg R \sin(\frac{1}{4} \pi - \theta) = 0.$$

Evenzo vindt men  $N_2$  door de momentenstelling op  $AC$  toe te passen (of door  $\theta$  door  $-\theta$  te vervangen).

Er is alleen evenwicht zolang  $N_1$  en  $N_2$  beide  $\geq 0$  zijn. Dit voert tot  $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ .

*Opmerkingen.* 1. Ligt  $A$  verticaal boven  $M$  ( $\theta = 0$ ), dan zijn de krachten, die de staven in  $A$  op elkaar uitoefenen, horizontaal. Dit volgt uit de symmetrie ten opzichte van de verticaal door  $M$ , maar is natuurlijk ook gemakkelijk te bewijzen zonder zich op die symmetrie te beroepen. Is  $Q$  de op  $AB$  in  $A$  uitgeoefende kracht, positief gerekend in de zin  $BC$ , dan is  $Q = N \cos \varphi = mg$ .

2. Bij willekeurige waarde van  $\theta$  (en  $\varphi = 45^\circ$ ) oefent  $AC$  in  $A$  op  $AB$  een kracht uit, waarvan de langs  $AC$  vallende component (van  $A$  naar  $C$  gericht) gelijk is aan:

$$\frac{1}{2} N_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} (\cos \theta - \sin \theta) mg$$

en de langs  $BA$  vallende component (in het verlengde van  $BA$ ) aan:

$$\frac{1}{2} N_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} (\cos \theta + \sin \theta) mg.$$

De horizontale component van de in  $A$  op  $AB$  uitgeoefende kracht is  $mg \cos 2\theta$  en de verticale component  $mg \sin 2\theta$ , positief gerekend naar boven. Ook nu is de grootte dier kracht gelijk aan  $mg$ . De werklijn dier kracht vindt men door de verticaal door  $A$  te spiegelen ten opzichte van  $AB$  of van  $AC$ .

De in  $A$  op  $AB$  uitgeoefende kracht is ook constructief te vinden.

3. Voor een stand, waarbij  $A$  verticaal boven  $M$  ligt, is de hoogte van het gemeenschappelijke zwaartepunt boven  $M$ :

$$z = R \left( \frac{1}{\sin \varphi} - 2 \cos \varphi \right).$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\varphi} &= R \frac{2 \sin^3 \varphi - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = R \sin \varphi (2 - \cotg \varphi - \cotg^3 \varphi) = \\ &= R \sin \varphi (1 - \cotg \varphi) (2 + \cotg \varphi + \cotg^2 \varphi). \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat  $P$  minimaal is voor  $\varphi = 45^\circ$ . Het evenwicht is dus stabiel, als men alleen standen beschouwt, waarin  $A$  op de verticaal door  $M$  ligt. Doordat  $A$  echter ook buiten die verticaal kan treden, is het evenwicht ook als indifferent (overschillig) te beschouwen.

2. Is  $m$  de massa van de cylinder, dan is zijn traagheidsmoment om de draaiingsas  $\frac{1}{2} ma^2 + mb^2$ . Hieruit vindt men voor de bewegingsvergelijking, als  $\varphi$  de uitwijkingshoek uit de stabiele evenwichtsstand is:

$$(a^2 + 2b^2)\ddot{\varphi} + 2gb \sin \varphi = 0.$$

De periode der kleine slingeren om die evenwichtsstand is:

$$\pi \sqrt{\frac{2(a^2 + 2b^2)}{gb}}.$$

De slingertijd is de helft hiervan.

3. De centrifugaalkracht heeft een component  $ma \omega^2$  loodrecht op de buis (van de draaiingsas af) en een component  $m \omega^2 x$  langs de buis, positief gerekend in de zin van de relatieve beginsnelheid. Hierin is  $x$  de verplaatsing van het stoffelijke punt  $S$  door de buis. Men heeft dus:

$$\ddot{x} = \omega^2 x, \quad x = A \operatorname{Ch} \omega t + B \operatorname{Sh} \omega t.$$

Wegens  $\dot{x} = 0$ ,  $x = \frac{1}{2} a \omega$  voor  $t = 0$  is  $A = 0$ ,  $B = \frac{1}{2} a$ , dus:

$$x = \frac{1}{2} a \operatorname{Sh} \omega t, \quad \dot{x} = \frac{1}{2} a \omega \operatorname{Ch} \omega t.$$

De op  $S$  werkende kracht van Coriolis is  $2m\omega \dot{x}$ , horizontaal en loodrecht op de buis, positief gerekend naar de kant van de draaiingsas. Zij van de kracht door de buis op  $S$  uitgeoefend  $Q$  de component loodrecht op de buis horizontaal, positief gerekend van de draaiingsas af. Men heeft dan:

$$Q + ma \omega^2 - 2m\omega \dot{x} = 0,$$

dus  $Q = ma \omega^2 (\operatorname{Ch} \omega t - 1)$ . De verticale component van de kracht door de buis op  $S$  uitgeoefend is  $mg$ , dus de totale kracht:

$$m \sqrt{g^2 + a^2 \omega^4 (\operatorname{Ch} \omega t - 1)^2}.$$

Na een volle omwenteling is  $\omega t = 2\pi$ . Is dan die kracht opgelopen tot  $mg\sqrt{5}$ , dan is:

$$g^2 + a^2 \omega^4 (\operatorname{Ch} 2\pi - 1)^2 = 5g^2,$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{a(\operatorname{Ch} 2\pi - 1)} = \frac{g}{a \operatorname{Sh}^2 \pi}.$$

De gevraagde voorwaarde is dus  $\omega \leq \frac{1}{\text{Sh } \pi} \sqrt{\frac{g}{a}}$ .

OCTOBER 1946. M.T.

1. De horizontale componenten van de uitwendige krachten zijn 0, zodat het zwaartepunt  $Z$  (het midden van genoemde straal) geen versnelling in horizontale richting heeft. Zij  $M$  het middelpunt van de bol en  $\varphi$  de hoek, die  $MZ$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $M$  maakt. De hoogte  $z$  van  $Z$  boven het horizontale vlak is  $R(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi)$ , zodat  $\dot{z} = \frac{1}{2} R \dot{\varphi} \sin \varphi$  is, dus de levende kracht van  $Z$  (massa  $2m$ )  $\frac{1}{4} mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi$ . Het traagheidsmoment om een as door  $Z$  loodrecht op  $MZ$  is:

$$\frac{2}{5} mR^2 + \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{4} mR^2 = \frac{9}{10} mR^2,$$

zodat:

$L = \frac{1}{4} mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \frac{9}{20} mR^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{20} mR^2 \dot{\varphi}^2 (9 + 5 \sin^2 \varphi)$  is. Daar  $P = -mRg \cos \varphi$  is, heeft men:

$$R \dot{\varphi}^2 (9 + 5 \sin^2 \varphi) - 20 g \cos \varphi = 0,$$

$$R \ddot{\varphi} (9 + 5 \sin^2 \varphi) + 5 R \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + 10 g \sin \varphi = 0.$$

Voor de (met 1 gemerkte) stand, waarbij het stoffelijke punt zijn laagste stand heeft ( $\varphi = 0$ ), geldt:

$$R \dot{\varphi}_1^2 = \frac{20}{9} g, \quad \ddot{\varphi}_1 = 0.$$

Tot  $\ddot{\varphi}_1 = 0$  besluit men ook direct daaruit, dat  $\dot{\varphi}$  in de laagste stand maximaal is. Is  $N$  de druk, die bol en vlak op elkaar uitoefenen, dan is:

$$N - 2mg = 2m\ddot{z} = mR(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

dus in genoemde stand  $N_1 = 2mg + mR \dot{\varphi}_1^2 = \frac{38}{9} mg$ .

*Opmerking.* Voor kleine slingeringen om de stabiele evenwichtsstand geldt  $9R\ddot{\varphi} + 10g\varphi = 0$ . De periode dier slingeringen is dus  $\frac{3}{5} \pi \sqrt{\frac{10R}{g}}$ .

2. Uit de momenten om  $A$ , d.w.z. om een as  $a$  door  $A$  loodrecht op het vlak  $ABE$ , volgt (als  $x$  de massa van het stoffelijke punt  $P$  is):

$$xgl \sqrt{2} - mg \cdot \frac{1}{4} l \sqrt{2} = 0,$$



dus  $x = \frac{1}{4} m$ . Zij  $\varphi$  de hoek, die  $AB$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $A$  maakt, positief gerekend als  $B$  rechts van die verticaal ligt,  $\theta$  de hoek, die  $BP$  met de naar beneden gekeerde verticaal door  $B$  maakt, positief gerekend als  $P$  rechts van die verticaal ligt, en  $p$  de lengte van het koord  $EBP$ . We nemen een rechthoekig assenkruis aan met  $A$  als oorsprong, de naar beneden gekeerde verticaal door  $A$  als positieve  $z$ -as en  $AE$  als positieve  $x$ -as. Daar  $EB = 4l \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = 2l\sqrt{2}(\cos \frac{1}{2}\varphi - \sin \frac{1}{2}\varphi)$  is, zijn de coördinaten van  $P$ :

$$x = 2l \sin \varphi + \{p + 2l\sqrt{2}(\sin \frac{1}{2}\varphi - \cos \frac{1}{2}\varphi)\} \sin \theta,$$

$$z = 2l \cos \varphi + \{p + 2l\sqrt{2}(\sin \frac{1}{2}\varphi - \cos \frac{1}{2}\varphi)\} \cos \theta.$$

Door reeksonthwikkeling toe te passen en termen van de tweede of hogere graad in  $\varphi$  en  $\theta$  te verwaarlozen, vindt men:

$$x = 2l\varphi + q\theta, \quad z = 2l + q + l\sqrt{2}\varphi,$$

$$\ddot{x} = 2l\ddot{\varphi} + q\ddot{\theta}, \quad \ddot{z} = l\sqrt{2}\ddot{\varphi},$$

waarin  $q = p - 2l\sqrt{2}$  is (zodat  $q$  de lengte van  $BP$  is in de evenwichtsstand  $\varphi = \theta = 0$ ). Is  $S$  de spanning in het koord, dan zijn de horizontale en verticale component daarvan (als kracht op het materiële punt)  $-S \sin \theta = -S \theta$  resp.  $-S \cos \theta = -S$ , waarbij weer termen van de tweede of hogere graad verwaarloosd zijn. Men heeft:

$$-S \theta = \frac{1}{4} m(2l\ddot{\varphi} + q\ddot{\theta}), \quad \frac{1}{4} mg - S = \frac{1}{4} ml\sqrt{2}\ddot{\varphi}.$$

Hieruit volgt (steeds bij benadering):

$$S = \frac{1}{4} m(g - l\sqrt{2}\ddot{\varphi}), \quad 2l\ddot{\varphi} + q\ddot{\theta} + g\theta = 0.$$

Het traagheidsmoment van het lichaam (stavenpaar) om de as  $a$  door  $A$  is:

$$\frac{4}{3} ml^2 + \frac{1}{3} m(\frac{1}{4} l\sqrt{2})^2 + m\{l^2 + (\frac{1}{4} l\sqrt{2})^2\} = \frac{5}{2} ml^2.$$

De momentenstelling, toegepast op de as  $a$  door  $A$ , geeft:

$$\frac{5}{2} ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - mgl(\sin \varphi + \frac{1}{4} \sqrt{2} \cos \varphi) + 2Sl \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) + 2Sl \sin(\theta - \varphi).$$

Met verwaarlozing van de termen van de tweede en hogere graad wordt dit, in verband met de voor  $S$  gevonden waarde:

$$24 l \ddot{\varphi} + g(20 - \sqrt{2})\varphi - 4 g \theta = 0.$$

Deze differentiaalvergelijking drukt  $\theta$  uit in  $\ddot{\varphi}$  en  $\varphi$ . Door deze waarde van  $\theta$  in de eerst gevonden differentiaalvergelijking in  $\varphi$  en  $\theta$  te substitueren, vindt men:

$$24 l q \ddot{\varphi} + g\{ (20 - \sqrt{2})q + 32 l \} \ddot{\varphi} + g^2(20 - \sqrt{2})\varphi = 0.$$

De karakteristieke vergelijking in  $k(\varphi = e^{kt})$  luidt:

$$24 l q k^4 + g\{ (20 - \sqrt{2})q + 32 l \} k^2 + g^2(20 - \sqrt{2}) = 0.$$

Deze vierkantsvergelijking in  $k^2$  heeft twee verschillende negatieve wortels; we schrijven deze als  $-\lambda^2$  en  $-\mu^2$  ( $\lambda > 0$  en  $\mu > 0$ ). De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking in  $\varphi$  is dan:

$$\varphi = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t + C \cos \mu t + D \sin \mu t.$$

Er zijn twee hoofdslingeringen, een met de periode  $\frac{2\pi}{\lambda}$  (frequentie  $\frac{\lambda}{2\pi}$ ) en een met de periode  $\frac{2\pi}{\mu}$  (frequentie  $\frac{\mu}{2\pi}$ ).

*Opmerkingen.* 1. De levende kracht van het stoffelijke punt, als  $\varphi = \theta = 0$  is, is gelijk aan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) &= \frac{1}{8} m\{ (2 l \dot{\varphi} + q \dot{\theta})^2 + (l \sqrt{2} \dot{\varphi})^2 \} = \\ &= \frac{1}{8} m(6 l^2 \dot{\varphi}^2 + 4 q l \dot{\varphi} \dot{\theta} + q^2 \dot{\theta}^2). \end{aligned}$$

De levende kracht van het lichaam is  $\frac{5}{4} m l^2 \dot{\varphi}^2$ , waaruit men voor de levende kracht van het geheel vindt:

$$L_0 = \frac{1}{8} m(16 l^2 \dot{\varphi}^2 + 4 q l \dot{\varphi} \dot{\theta} + q^2 \dot{\theta}^2);$$

hierbij geeft de index 0 aan, dat  $L$  betrekking heeft op  $\varphi = \theta = 0$ . De potentiële energie van het lichaam is:

$$-mgl(2 \cos \varphi - \frac{1}{4} \sqrt{2} \sin \varphi) = -mgl(2 - \varphi^2 - \frac{1}{4} \sqrt{2} \varphi),$$

waarbij in het laatste lid de termen van de derde en hogere graad verwaarloosd zijn. Met dezelfde verwaarlozing vindt men:

$$z = 2 l + q + \sqrt{2} l \varphi - \frac{1}{4}(4 - \sqrt{2})l \varphi^2 - \frac{1}{2} q \theta^2,$$

zodat de totale potentiële energie, met weglating van de constante termen, wordt:

$$P = \frac{1}{16} mg\{ (20 - \sqrt{2})l \varphi^2 + 2 q \theta^2 \}$$

Naar behoren is  $P$  minimaal voor  $\varphi = \theta = 0$ . De vergelijkingen van **Lagrange** luiden bij genoemde verwaarlozing:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0.$$

Dit voert tot:

$$32 l \ddot{\varphi} + 4 q \ddot{\theta} + g(20 - \sqrt{2})\varphi = 0, \quad 2 l \ddot{\varphi} + q \ddot{\theta} + g \theta = 0.$$

Het stel dier vergelijkingen is gelijkwaardig met het boven gevondene.

2. Men kan  $x$  ook constructief vinden. Op het lichaam in evenwicht werken de volgende drie krachten: het gewicht  $2 mg$ , aangrijpend in het zwaartepunt  $Z$ , zodanig op  $CD$  gelegen, dat  $CZ = \frac{1}{8} l \sqrt{2}$  is, de resultante  $R$  der spanningen  $xg$  in beide delen van het koord, vallende langs de lijn, die de hoek tussen de beide delen van het koord halveert, en de verbindingskracht  $Q$  in  $A$ . De drie krachten gaan door één punt  $S$ ; dit ligt zodanig op genoemde deellijn (de werklijn van  $R$ ), dat  $VS = \frac{1}{8} l \sqrt{2}$  is, waarin  $V$  het voetpunt is van de loodlijn uit  $S$  op het verlengde van  $AB$  neergelaten. We verleggen het aangrijpingspunt van het gewicht  $2 mg$  naar  $S$  en ontbinden dit gewicht in een langs  $SB$  vallende kracht  $R'$  en een kracht  $Q'$ , die langs het verlengde van  $AS$  valt. De kracht  $\bar{R}$  is dan het tegengestelde van  $R'$  en de kracht  $Q$  het tegengestelde van  $Q'$ . Door  $R$  te ontbinden in twee krachten, die langs de beide delen van het koord vallen, vindt men  $xg$ .

Men kan de waarde van  $x$  uit de figuur afleiden. Zij  $yg$  de horizontale component van  $R$ , dus de hoogtelijn op het gewicht  $2 mg$  in een der driehoeken, waarin het parallellogram van krachten door dit gewicht verdeeld wordt. Uit driehoek  $ABS$  en een der genoemde (met  $ABS$  gelijkvormige) driehoeken volgt:

$$\frac{yg}{2 mg} = \frac{VS}{AB} = \frac{\frac{1}{8} l \sqrt{2}}{2 l} = \frac{1}{16} \sqrt{2},$$

dus  $y = \frac{1}{8} m \sqrt{2}$ . De spanning in het deel van het koord, dat het gewicht  $x$  draagt, heeft een horizontale component  $0$ , zodat  $yg$  ook de horizontale component van de spanning  $xg$  in het koord  $BE$  is.

Bijgevolg is  $yg = \frac{1}{2} xg \sqrt{2}$ , dus  $x = y \sqrt{2} = \frac{1}{4} m$ .

De bepaling van  $x$  uit de momenten om  $A$  is belangrijk korter.

3. *Slotopmerking.* Er is niet één bepaalde frequentie, zoals de opgave zou doen denken, maar er zijn twee frequenties. Om deze

te bepalen ontbreekt echter een gegeven, nl. de lengte  $p$  van het koord (alsmede het gegeven, dat het gewicht  $P$  als een stoffelijk punt kan worden behandeld). Daar bovendien het vraagstuk met 2 graden van vrijheid veel te moeilijk en te bewerkelijk is (vooral voor M. en T.), is misschien de bedoeling aan te nemen, dat het onder het ringetje hangende deel van het koord niet gaat slingeren, dus verticaal blijft ( $\theta = 0$ ). Men heeft dan:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2l \dot{\varphi} \cos \varphi, \dot{z} = l \dot{\varphi} \{-2 \sin \varphi + \sqrt{2}(\cos \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{1}{2} \varphi)\}, \\ \dot{x}^2 + \dot{z}^2 &= 2l^2 \dot{\varphi}^2 \{3 + \sin \varphi - 2\sqrt{2}(\cos \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{1}{2} \varphi) \sin \varphi\}, \\ L &= \frac{1}{4} ml^2 \dot{\varphi}^2 \{8 + \sin \varphi - 2\sqrt{2}(\cos \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{1}{2} \varphi) \sin \varphi\}, \\ P &= -\frac{1}{4} mgl(10 \cos \varphi - \sqrt{2} \sin \varphi + \\ &\quad + 2\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} \varphi - 2\sqrt{2} \cos \frac{1}{2} \varphi). \end{aligned}$$

Door  $L + P = \text{constant}$  te fluxioneren en termen van hogere graad te verwaarlozen, vindt men:

$$32l \ddot{\varphi} + (20 - \sqrt{2})g \varphi = 0.$$

Dit geeft de periode  $8\pi \sqrt{\frac{2l}{(20 - \sqrt{2})g}}$ . Dit resultaat is echter

onjuist. Wel is de gevonden periode een der beide perioden, als men  $p = 2l\sqrt{2}$  (dus de lengte van het verticale deel van het koord), zeer klein neemt; de andere periode is dan klein, resultaten, die te voorzien zijn.

 DECEMBER 1946. C<sub>3</sub>.

1. Het traagheidsmoment  $I'$  van de plaat om  $AB$  is gelijk aan  $\frac{1}{6} m'a^2$ , waarin  $m' = 8m$  is. Dit is met integraalrekening te vinden door de plaat in stroken evenwijdig aan  $AB$  te verdelen. Ook kan men  $I'$  vinden door de plaat aan te vullen tot het homogene parallelogram  $ABCA'$ . Het traagheidsmoment van  $ACA'$  om  $AB$  is:

$$I' = \frac{1}{9} m'a^2 + \frac{4}{9} m'a^2 = I' + \frac{1}{3} m'a^2.$$

Daar het traagheidsmoment van  $ABCA'$  (massa  $2m'$ ) om  $AB$  gelijk is aan  $\frac{2}{3} m'a^2$ , heeft men:

$$I' + I' + \frac{1}{3} m'a^2 = \frac{2}{3} m'a^2, \quad I' = \frac{1}{6} m'a^2.$$

Het traagheidsmoment van  $ABC$  om  $CD$  is eveneens  $\frac{1}{6} m'a^2$ , zodat het traagheidsmoment van de plaat om een as door  $D$  loodrecht op de plaat is  $\frac{1}{3} m'a^2$ . Is  $M$  de massa van de staaf, dan is het traagheidsmoment van het geheel om de as door  $E$ :

$$\frac{1}{3} m'a^2 - \frac{1}{9} m'a^2 + \frac{16}{9} m'a^2 + \frac{1}{3} Ma^2 = \frac{1}{3} (6 m' + M)a^2.$$

De slingerlengte is:

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3} (6 m' + M)a^2}{\frac{4}{3} m'a + \frac{1}{2} Ma} = 2 a \frac{6 m' + M}{8 m' + 3 M}.$$

Is de slingertijd gelijk aan 1, dan is de periode gelijk aan 2, dus  $\pi^2 \lambda = g$ . Dit voert tot:

$$M = 4 m' \frac{3 \pi^2 a - 2 g}{3 g - 2 \pi^2 a} = 32 m' \frac{3 \pi^2 a - 2 g}{3 g - 2 \pi^2 a}.$$

Men vindt alleen dan een positieve waarde van  $M$ , als  $a$  voldoet aan:

$$\frac{2 g}{3 \pi^2} < a < \frac{3 g}{2 \pi^2}.$$

2. Onderstel, dat de cylinder uitglijdt. Is  $r$  de straal van de cylinder,  $x$  de verplaatsing van zijn zwaartepunt,  $\varphi$  de hoek, die de cylinder gedraaid is,  $N$  de normale druk op de cylinder uitgeoefend en  $f$  de wrijvingscoëfficiënt, dan is:

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} mg - fN = m\ddot{x}, \quad N = \frac{1}{2} \sqrt{2} mg, \quad \frac{1}{2} mr^2 \ddot{\varphi} = fNr,$$

dus:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \sqrt{2} (1 - f)g, \quad r \ddot{\varphi} = \sqrt{2} fg.$$

De onderstelling van uitglijden is juist, als  $\ddot{x} - r \ddot{\varphi} > 0$  is, dus als  $f < \frac{1}{3}$  is. Is  $f = \frac{1}{4}$ , dan is dit het geval. Dan is:

$$\ddot{x} = \frac{3}{8} \sqrt{2} g, \quad r \ddot{\varphi} = \frac{1}{4} \sqrt{2} g.$$

Rolt de bol zuiver en is  $W$  de wrijving, dan is  $r \ddot{\varphi} = \ddot{x}$ , dus:

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} mg - W = m\ddot{x}, \quad \frac{1}{2} mr\ddot{x} = Wr,$$

dus:

$$\ddot{x} = \frac{1}{3} \sqrt{2} g, \quad W = \frac{1}{6} \sqrt{2} mg.$$

De onderstelling van zuiver rollen is juist, als  $W \leq fN$  is, dus als  $f \geq \frac{1}{3}$  is. Is  $f = \frac{1}{2}$ , dan is dit het geval.

3. Zij  $A$  het punt van de buis, dat het dichtst bij de omwentelingsas ligt, en  $O$  de projectie van  $A$  op die as. De afstand van het stoffelijke punt  $S$  tot  $A$  noemen we  $x$ , positief gerekend als  $S$  hoger ligt dan  $A$ . De op  $S$  werkende centrifugaalkracht heeft een component  $m \omega^2 a$  in de richting en zin  $OA$  en een component  $\frac{1}{2} m \omega^2 x$  in een richting loodrecht op het vlak door  $AO$  en de as (ook te beschrijven als horizontaal en loodrecht op  $AO$ ) positief gerekend naar de kant, waar de buis naar boven helt. De vergelijking langs de buis levert:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x \sin 30^\circ - mg \cos 30^\circ = m\ddot{x},$$

dus  $\ddot{x} - \frac{1}{4} \omega^2 x = -\frac{1}{2} \sqrt{3} g$ . De algemene oplossing hiervan is:

$$x = A \operatorname{Ch} \frac{1}{2} \omega t + B \operatorname{Sh} \frac{1}{2} \omega t + 2 \sqrt{3} \frac{g}{\omega^2}.$$

Wegens  $x = b$ ,  $\dot{x} = 0$  voor  $t = 0$  is  $B = 0$ ,  $A = b - 2 \sqrt{3} \frac{g}{\omega^2}$ .

Men heeft dus:

$$x = (b - 2 \sqrt{3} \frac{g}{\omega^2}) \operatorname{Ch} \frac{1}{2} \omega t + 2 \sqrt{3} \frac{g}{\omega^2}.$$

Het punt  $S$  beweegt zich voortdurend schuin naar boven (ten opzichte van de buis) of voortdurend schuin naar beneden (in beide gevallen met een steeds groter wordende relatieve snelheid), al naar gelang  $\omega^2 > 2 \sqrt{3} \frac{g}{b}$  of  $\omega^2 < 2 \sqrt{3} \frac{g}{b}$  is. Is  $\omega^2 = 2 \sqrt{3} \frac{g}{b}$ , dan blijft  $S$  in rust ten opzichte van de buis;  $S$  is dan in labiel kinetisch (relatief) evenwicht.

De op  $S$  uitgeoefende kracht van Coriolis is  $2 m \omega \dot{x} \sin 30^\circ = m \omega \dot{x}$  in de richting  $OA$  (positief gerekend in de zin, die door  $OA$  wordt aangewezen). De kracht door de buis op het punt  $S$  uitgeoefend heeft een component in de richting  $AO$ , die we  $Q$  noemen (positief van  $A$  naar  $O$ ), en een component  $R$  loodrecht op de buis en op  $AO$  (dus in het verticale vlak door de buis), positief gerekend schuin naar boven. Uit:

$$Q - m \omega^2 a - m \omega \dot{x} = 0, \quad R - \frac{1}{2} mg - \frac{1}{4} \sqrt{3} m \omega^2 x = 0$$

volgt:

$$Q = m \left\{ \omega^2 a + \left( \frac{1}{2} \omega^2 b - \sqrt{3} g \right) \operatorname{Sh} \frac{1}{2} \omega t \right\},$$

$$R = m \left\{ 2g + \left( \frac{1}{4} \sqrt{3} \omega^2 b - \frac{3}{2} g \right) \operatorname{Ch} \frac{1}{2} \omega t \right\}.$$

De componenten van de kracht door  $S$  op de buis uitgeoefend zijn dezelfde, maar in tegengestelde zin. De grootte van de totale op de buis uitgeoefende druk is  $\sqrt{Q^2 + R^2}$ .

*Opmerking.* De potentiële energie van zwaartekracht en centrifugaalkracht te zamen is:

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{3} mgx - \frac{1}{8} m \omega^2 x^2;$$

$P$  is maximaal voor  $x = 2 \sqrt{3} \frac{g}{\omega^2}$ . Ook zo ziet men, dat  $S$  in relatieve rust blijft met  $x = b$ , als  $\omega^2 = 2 \sqrt{3} \frac{g}{b}$  is en dat het kinetische evenwicht labiel is. De levende kracht van de relatieve beweging is  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ . Dit voert tot:

$$x^2 + \sqrt{3} gx - \frac{1}{4} \omega^2 x^2 = \sqrt{3} gb - \frac{1}{4} \omega^2 b^2.$$

Door te fluxioneren volgt hieruit  $\dot{x} + \frac{1}{2} \sqrt{3} g - \frac{1}{4} \omega^2 x = 0$ , in overeenstemming met het boven gevondene.

### MEI 1947. C<sub>3</sub>.

1. Wegens  $\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{2ax}$  volgt uit  $L + P = L_0 + P_0$  (als  $t_1$  het tijdstip is, waarop het laagste punt bereikt wordt):

$$\begin{aligned} 2g(a-y) &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{y}^2 \left\{ \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 + 1 \right\} = \\ &= \dot{y}^2 \left( \frac{9y^4}{4a^2x^2} + 1 \right) = \dot{y}^2 \frac{9y + 4a}{4a}, \\ \frac{dy}{dt} &= -2\sqrt{2ag} \sqrt{\frac{a-y}{9y+4a}}, \end{aligned}$$

$$t_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2ag}} \int_a^0 \sqrt{\frac{9y+4a}{a-y}} dy.$$

Door  $\sqrt{\frac{9y+4a}{a-y}} = 3z$  te stellen, vindt men:

$$y = a \frac{9z^2 - 4}{9(z^2 + 1)}, \quad dy = \frac{26az dz}{9(z^2 + 1)^2}.$$

$$t_1 = \frac{13}{3} \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{\frac{2}{3}}^{\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)^2} = -\frac{13}{6} \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{\frac{2}{3}}^{\infty} z d \frac{1}{z^2 + 1} =$$

$$= -\frac{13}{6} \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[ \frac{z}{z^2 + 1} + \text{bgtg} z \right]_{\frac{2}{3}}^{\infty} = \sqrt{\frac{a}{2g}} \left( 1 + \frac{13}{6} \text{bgtg} \frac{3}{2} \right).$$

Is  $N$  de door de buis op het stoffelijke punt uitgeoefende druk, positief gerekend schuin naar boven, dan volgt uit de beweging in verticale richting, als  $\alpha$  de richtingshoek van de raaklijn aan de buis is:

$$N \cos \alpha - mg = m\ddot{y}.$$

Door  $\dot{y}^2 = 8ag \frac{a-y}{9y+4a}$  te fluxioneren, vindt men:

$$\ddot{y} = -\frac{52a^2g}{(9y+4a)^2}.$$

Dit voert tot:

$$\begin{aligned} N &= \frac{mg}{\cos \alpha} \left( 1 - \frac{52a^2}{(9y+4a)^2} \right) = \frac{9mg}{\cos \alpha} \frac{9y^2 + 8ay - 4a^2}{(9y+4a)^2} = \\ &= 3mg \frac{9y^2 + 8ay - 4a^2}{y^{1/2} (9y+4a)^{3/2}}. \end{aligned}$$

*Opmerking.*  $N$  is positief, dus schuin naar boven gericht, als  $y > \frac{1}{9}(2\sqrt{13} - 4)a$  is, en negatief als  $y < \frac{1}{9}(2\sqrt{13} - 4)a$  is. In het laagste punt is  $N$  in absolute waarde oneindig groot. Dit is daaruit te voorzien, dat dit punt een keerpunt der kromme is, zodat de kromtestraal daar 0 is.

2. De bedoeling is blijkbaar, dat  $A$  in de *evenwichtsstand* het hoogste punt van de bol is, zodat de horizontale as loodrecht op  $AB$  staat. Het traagheidsmoment om die as is:

$$I = \frac{2}{3}mR^2 + mR^2 + \frac{9}{2}mx^2 = \frac{1}{6}m(10R^2 + 27x^2),$$

waarin  $x$  de afstand van het stoffelijke punt tot  $A$  is. De slingerlengte is:

$$\lambda = \frac{I}{m(R + \frac{9}{2}x)} = \frac{10R^2 + 27x^2}{3(2R + 9x)}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d\lambda}{dx} = 3 \frac{27x^2 + 12Rx - 10R^2}{(2R + 9x)^2}.$$

Neemt  $x$  toe van 0 tot  $\frac{1}{9}R(\sqrt{34} - 2)$  dan neemt  $\lambda$  af, met  $\frac{5}{3}R$  beginnend. Neemt  $x$  verder toe van  $\frac{1}{9}R(\sqrt{34} - 2)$  tot  $2R$ , dan neemt  $\lambda$  toe, met  $\frac{59}{30}R$  eindigend. Bijgevolg is  $\lambda$  (dus ook de



periode) zo groot mogelijk voor  $x = 2R$ , dus als het stoffelijke punt in  $B$  is aangebracht.

*Opmerking.* De periode is minimaal voor  $x = \frac{1}{9} R(\sqrt{34} - 2)$ . Dan is  $27x^2 = 10R^2 - 12Rx$ , dus:

$$\lambda = \frac{4R(5R - 3x)}{3(2R + 9x)} = \frac{2}{9} R(\sqrt{34} - 2).$$

3. Zij  $\varphi$  de hoek, die  $AB$  met de naar beneden gekeerde verticaal maakt, positief aan de kant van  $B_0$  en  $\dot{\varphi}_1$  de waarde van  $\dot{\varphi}$  onmiddellijk vóór de botsing. Is  $S$  de stoot in  $C$ , dan volgt uit de beweging om  $A$ :

$$S = - \frac{m l^2 \dot{\varphi}_1}{3 l_1}.$$

De verbindingsstoot  $S_1$  in  $A$  op de staaf uitgeoefend, positief gerekend in de zin van de stoot  $S$ , wordt aldus gevonden:

$$S + S_1 = - \frac{1}{2} m l \dot{\varphi}_1, \quad S_1 = - \frac{m l (3 l_1 - 2 l) \dot{\varphi}_1}{6 l_1}.$$

Men vindt  $\dot{\varphi}_1$  uit:

$$\frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} m g l (\cos \beta - \cos \alpha).$$

Dit voert tot:

$$\dot{\varphi}_1 = - \sqrt{\frac{3g}{l} (\cos \beta - \cos \alpha)}, \quad S = \frac{m l \sqrt{3 g l (\cos \beta - \cos \alpha)}}{3 l_1},$$

$$S_1 = \frac{m (3 l_1 - 2 l) \sqrt{3 g l (\cos \beta - \cos \alpha)}}{6 l_1}.$$

Is de botsingscoëfficiënt  $k$ , dan worden de stoten:

$$S = (1 + k) \frac{m l \sqrt{3 g l (\cos \beta - \cos \alpha)}}{3 l_1},$$

$$S_1 = (1 + k) \frac{m (3 l_1 - 2 l) \sqrt{3 g l (\cos \beta - \cos \alpha)}}{6 l_1}.$$

De waarde  $\dot{\varphi}_2$  van  $\dot{\varphi}$  onmiddellijk na de botsing is:

$$\dot{\varphi}_2 = - k \dot{\varphi}_1 = k \sqrt{\frac{3g}{l} (\cos \beta - \cos \alpha)}.$$

De snelheid van de staaf wordt 0 voor een waarde  $\varphi_3$  van  $\varphi$ , die voldoet aan:

$$\frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} m g l (\cos \beta - \cos \varphi_3).$$

Hieruit vindt men:

$$\cos \varphi_3 = \cos \beta - \frac{l}{3g} \dot{\varphi}_2^2 = (1 - k^2) \cos \beta + k^2 \cos \alpha.$$

De waarde van  $\dot{\varphi}$ , als de staaf voor de tweede maal tegen de pen botst, is gelijk aan  $-\dot{\varphi}_2$ . Liggen  $AC$  en  $AB_0$  aan dezelfde kant van de verticaal door  $A$ , dan passeert  $AB$  de verticale stand niet. Liggen  $AC$  en  $AB_0$  aan verschillende kant van die verticaal, dan passeert de staaf tussen de beginstand en de eerste botsing met de pen éénmaal de verticale stand en tussen de eerste en de tweede botsing met de pen tweemaal.

*Opmerking.* De waarde van  $\dot{\varphi}$  onmiddellijk na de tweede botsing met de pen is  $k \dot{\varphi}_2$ , na de derde botsing  $k^2 \dot{\varphi}_2$ , na de vierde botsing  $k^3 \dot{\varphi}_2$  enz.

JUNI 1947. W.S.V.

1. Het sinusproduct  $\bar{a} \times \bar{b}$  (ook vectorproduct genoemd) van twee vrije vectoren  $\bar{a}$  en  $\bar{b}$ , die we in hetzelfde punt kunnen laten beginnen, is een vector ter grootte  $ab \sin \varphi$  (waarin  $\varphi$  de hoek tussen de vectoren is), die loodrecht op  $\bar{a}$  en  $\bar{b}$  staat in een zin, die als voortgaande beweging van een rechtse schroef behoort bij draaiing van  $\bar{a}$  naar  $\bar{b}$ . Daarvoor geldt de commutatieve eigenschap niet ( $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ ), de distributieve eigenschap wel en de associatieve eigenschap niet. Zijn  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  en  $\bar{k}$  eenheidsvectoren resp. langs de positieve  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -as van een rechtsdraaiend rechtshoekig assenkruis, dan is:

$$\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{j} &= -\bar{j} \times \bar{i} = \bar{k}, & \bar{j} \times \bar{k} &= -\bar{k} \times \bar{j} = \bar{i}, \\ \bar{k} \times \bar{i} &= -\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}, & \bar{i} \times \bar{i} &= 0, & \bar{j} \times \bar{j} &= 0, & \bar{k} \times \bar{k} &= 0. \end{aligned}$$

Voor  $\bar{a}$  en  $\bar{b}$  kan men schrijven:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}.$$

In verband met de distributieve eigenschap volgt hieruit:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}.$$

Onder het moment van een vector  $\bar{a}$  (beginpunt  $A$ ) ten opzichte van het punt  $P$  verstaat men de vector  $\bar{r} \times \bar{a}$ , waarin  $\bar{r}$  de vector

$\overline{PA}$  is. De grootte van  $\overline{r} \times \overline{a}$  is de oppervlakte van het parallellogram op  $\overline{PA}$  en  $\overline{a}$  als zijden beschreven. Deze oppervlakte verandert niet, als men  $\overline{a}$  langs zijn werklijn verschuift, terwijl daarbij ook de zin van het moment niet verandert.

We kiezen het punt  $P$ , ten opzichte waarvan de momenten genomen worden, als oorsprong van een rechthoekig assenkruis. Het impulsmoment (ook bewegingsmoment genoemd) van een stoffelijk punt  $A(x, y, z)$  ten opzichte van  $P$  is  $\overline{mr} \times \overline{v}$ , waarin:

$$\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$$

de snelheid van  $A$  is. De  $x$ -component van dit moment is  $m(y\dot{z} - z\dot{y})$ . De fluxie daarvan is:

$$m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) = m(y\ddot{z} - z\ddot{y}) = yZ - zY,$$

als  $X$ ,  $Y$  en  $Z$  de componenten van de resultante  $\overline{R}$  der op  $A$  werkende krachten zijn. Nu is  $yZ - zY$  de  $x$ -component van het moment van  $\overline{R}$  ten opzichte van  $P$ , zodat de fluxie van het impulsmoment gelijk is aan het moment van  $\overline{R}$ , welk moment volgens de distributive eigenschap weer gelijk is aan de vectorsom der momenten ten opzichte van  $P$  van de op  $A$  werkende krachten. De stelling geldt ook voor de (scalaire) momenten om een as. Het moment van een vector om een door  $P$  gaande as (als halfstraal opgevat) is nl. gelijk aan de van een teken voorziene grootte der projectie op die as van de momentvector ten opzichte van  $P$ .

2. Door de symmetrie blijft de staaf  $CD$  horizontaal en blijven de delen  $AC$  en  $BD$  der koorden verticaal. Het stoffelijke punt noemen we  $R$ ; het punt  $R$  beweegt zich (weer wegens de symmetrie) langs een verticale rechte. De stand van het toestel is bepaald door één coördinaat; daarvoor nemen we  $\angle DCR = \varphi$ . Dan is  $ZR = a \operatorname{tg} \varphi$ , waarin  $Z$  het zwaartepunt van de staaf is,  $CR = DR = \frac{a}{\cos \varphi}$  en  $AC = BD = l - \frac{a}{\cos \varphi}$ . De potentiële energie  $P$  van het geheel is, van constante termen afgezien:

$$P = mga \frac{2 - \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dP}{d\varphi} = mga \frac{2 \sin \varphi - 1}{\cos^2 \varphi}.$$

Stellen we  $\angle BAR_0 = \alpha$  (zodat  $a$  de beginwaarde van  $\varphi$  is), dan kan  $\varphi$  geen andere waarden aannemen dan die, welke aan  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  voldoen. Is  $\alpha \leq 30^\circ$ , dus  $\frac{a}{l} \geq \frac{1}{2} \sqrt{3}$ , dan is  $\frac{dP}{d\varphi} \leq 0$  voor  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ . Neemt dan  $\varphi$  af van  $\alpha$  tot 0, dan neemt  $P$  voortdurend toe. Laat men  $L$  met 0 beginnen, in welk geval  $L$  niet kan afnemen, dan blijft  $\varphi = \alpha$  (volgens  $L + P = \text{constant}$ ). De stand, waarbij  $C$  zich in  $A$  en  $D$  zich in  $B$  bevindt, is nu een stabiele evenwichtsstand. Een andere evenwichtsstand is er nu niet.

Is  $\alpha > 30^\circ$ , dan is  $\frac{dP}{d\varphi} < 0$  voor  $0 \leq \varphi < 30^\circ$  en  $\frac{dP}{d\varphi} > 0$  voor  $30^\circ < \varphi \leq \alpha$ . Neemt  $\varphi$  af van  $\alpha$  tot 0, dan neemt  $P$  dus eerst af, met  $mga \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$  beginnend, bereikt voor  $\varphi = 30^\circ$  een minimum, om vervolgens toe te nemen tot  $2 mga$  (voor  $\varphi = 0$ ). Bijgevolg is  $\varphi = 30^\circ$  ( $AC = BD = l - \frac{2}{3} a \sqrt{3}$ ) een stabiele evenwichtsstand. Een andere evenwichtsstand is er in het geval  $\alpha > 30^\circ$  niet.

De stand  $\varphi = 0$  ( $AC = BD = l - a$ ), waarin de staaf het punt  $R$  bereikt, wordt aangenomen, als  $P$  voortdurend (tot  $\varphi = 0$  toe)  $\leq mga \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$  blijft, dus als voldaan is aan:

$$\alpha > 30^\circ, \quad 2 \leq \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Voor de laatste ongelijkheid kan men schrijven:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha \leq 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

dus:

$$\text{tg } \frac{1}{2} \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad \text{tg } \alpha \geq \frac{4}{3}, \quad \frac{a}{l} = \cos \alpha \leq \frac{3}{5}.$$

Daar hierin  $\alpha > 30^\circ$  ligt opgesloten, is de voorwaarde nodig en voldoende voor het bereiken van genoemde stand  $\frac{a}{l} \leq \frac{3}{5}$ . Is  $a = \frac{3}{5} l$ , dan wordt de stand  $\varphi = 0$  bereikt met snelheden, die alle 0 zijn.

In een willekeurige stand zijn de snelheden van  $Z$  en van  $R$ , positief gerekend naar boven:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a}{\cos \varphi} - l \right) = a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi},$$

resp.:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{a}{\cos \varphi} - l - a \text{tg } \varphi \right) = a \frac{\sin \varphi - 1}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi}.$

Hieruit vindt men voor de levende kracht van het geheel:

$$L = \frac{1}{2} ma^2 \frac{\sin^2 \varphi + (\sin \varphi - 1)^2}{\cos^4 \varphi} \dot{\varphi}^2 = ma^2 \frac{2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi + 1}{2 \cos^4 \varphi} \dot{\varphi}^2.$$

In de evenwichtsstand ( $\varphi = 30^\circ$ ) en bij benadering in naburige standen heeft men dus  $L = \frac{1}{9} ma^2 \dot{\varphi}^2$ . Voor kleine slingeren om die evenwichtsstand geldt dus (volgens  $L + P = \text{constant}$ ) bij benadering:

$$\frac{8}{9} ma^2 \ddot{\varphi} + \frac{dP}{d\varphi} = 0.$$

Daar  $\frac{dP}{d\varphi} = 0$  is voor  $\varphi = \frac{1}{6} \pi$ , vindt men, door  $\varphi = \frac{1}{6} \pi + u$  te stellen, bij benadering (als  $u$  in absolute waarde klein is):

$$\frac{8}{9} ma^2 \ddot{u} + u \left( \frac{d^2 P}{d\varphi^2} \right)_{\varphi = \frac{1}{6} \pi} = 0.$$

Nu is:

$$\frac{d^2 P}{d\varphi^2} = 2 m g a \frac{\sin^2 \varphi - \sin \varphi + 1}{\cos^3 \varphi}, \quad \left( \frac{d^2 P}{d\varphi^2} \right)_{\varphi = \frac{1}{6} \pi} = \frac{4}{\sqrt{3}} m g a.$$

Hierdoor krijgt men (steeds bij benadering):

$$2 a \ddot{u} + 3 \sqrt{3} g u = 0.$$

De periode der kleine slingeren is dus:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{2 a}{3 \sqrt{3} g}} \quad (a > \frac{1}{6} \pi, a < \frac{1}{2} \sqrt{3} l)$$

en de cirkelfrequentie:

$$\frac{2 \pi}{T} = \sqrt{\frac{3 \sqrt{3} g}{2 a}}.$$

Opmerkingen. 1. Is  $30^\circ < \alpha < \text{bgcos } \frac{3}{5}$  ( $\frac{3}{5} l < a < \frac{1}{2} \sqrt{3} l$ ), dan blijft  $L > 0$  tot de stand, waar:

$$\frac{2 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{waarna } \dot{\varphi} = 0$$

is. Dit voert tot:

$$(5 - 4 \sin \alpha) \cos^2 \varphi - 4 \cos \alpha (2 - \sin \alpha) \cos \varphi + 3 \cos^2 \alpha = 0.$$

Een van de wortels dier vierkantsvergelijking in  $\cos \varphi$  is natuurlijk

$\cos \alpha$  (daar  $L = 0$  is voor  $\varphi = \alpha$ ). Uit het product der wortels vindt men dus voor de stand, waar opnieuw  $L = 0$  is:

$$\cos \varphi = \frac{3 \cos \alpha}{5 - 4 \sin \alpha}.$$

Uiteraard ligt de hierdoor bepaalde waarde van  $\varphi$  tussen 0 en  $\alpha$ , zoals ook gemakkelijk te verifiëren is.

2. Is  $\alpha > \text{bg} \cos \frac{3}{5}$  ( $a < \frac{3}{5} l$ ), dan vindt men uit  $L + P = L_1 + P_1$  voor de met 1 gemerkte stand, waarbij  $\varphi = 0$  is:

$$\begin{aligned} a \dot{\varphi}_1^2 &= 2g \frac{2(1 - \cos \alpha) - \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2g \frac{4(1 - \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha}{\{2(1 - \cos \alpha) + \sin \alpha\} \cos \alpha} = \\ &= 2g \frac{(1 - \cos \alpha)(3 - 5 \cos \alpha)}{\{2(1 - \cos \alpha) + \sin \alpha\} \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Uit de laatste uitdrukking voor  $\dot{\varphi}_1^2$  ziet men, dat inderdaad  $\dot{\varphi}_1^2 > 0$  is als  $\alpha > \text{bg} \cos \frac{3}{5}$  is. Natuurlijk is  $\dot{\varphi}_1 < 0$ .

Volgens de formules voor de snelheden van  $Z$  en van  $R$  is in de stand  $\varphi = 0$  de snelheid van  $Z$  gelijk aan 0 en die van  $R$  gelijk aan  $-a \dot{\varphi}_1$ , naar boven gericht.

3. Uit  $L + P = L_0 + P_0$  (met  $\varphi_0 = \alpha$  en  $\dot{\varphi}_0 = 0$ ) vindt men:

$$\begin{aligned} a \frac{2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi + 1}{2 \cos^4 \varphi} \dot{\varphi}^2 + g \frac{2 - \sin \varphi}{\cos \varphi} &= g \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}. \\ \dot{\varphi}^2 &= \frac{2g}{a} \frac{(2 - \sin \alpha) \cos \varphi - (2 - \sin \varphi) \cos \alpha}{(2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi + 1) \cos \alpha} \cos^3 \varphi = \\ &= \frac{2g}{a} \frac{(\sin \alpha - \sin \varphi) \{ (5 - 4 \sin \alpha) \sin \varphi + 5 \sin \alpha - 4 \} \cos^3 \varphi}{(2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi + 1) \{ (2 - \sin \alpha) \cos \varphi + (2 - \sin \varphi) \cos \alpha \} \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Is  $\alpha > \text{bg} \cos \frac{3}{5}$  (dus  $\sin \alpha > \frac{4}{5}$ ), dan is  $\dot{\varphi}^2 > 0$  voor  $0 \leq \varphi < \alpha$ . Voor  $\dot{\varphi}^2$  kan men dan schrijven:

$$\dot{\varphi}^2 = (\sin \alpha - \sin \varphi) f(\varphi),$$

waarin de functie  $f(\varphi)$  positief is voor  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ . Voor het tijdstip  $t_1$ , waarop de stand  $\varphi = 0$  bereikt wordt, vindt men:

$$t_1 = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sin \alpha - \sin \varphi) f(\varphi)}}.$$

Zoals te voorzien was, is  $t_1$  eindig.

Is  $\alpha = \text{bg} \cos \frac{3}{5}$ , dan gaat de formule voor  $\dot{\varphi}^2$  over in:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{a} \frac{(4 - 5 \sin \varphi) \sin \varphi \cos^3 \varphi}{(2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi + 1)(2 \cos \varphi + 2 - \sin \varphi)}$$

Voor het tijdstip, waarop  $\varphi = 0$  geworden is, vindt men:

$$t_1 = \int_0^{bg \cos^3/5} \sqrt{\frac{a}{2g}} \int \sqrt{\frac{(2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi + 1)(2 \cos \varphi + 2 - \sin \varphi)}{(4 - 5 \sin \varphi) \sin \varphi \cos^3 \varphi}} d\varphi.$$

Ook nu is  $t_1$  eindig. Bij ieder der grenzen wordt de integrand nl. oneindig van de orde  $\frac{1}{2}$  (dus van een orde  $< 1$ ).

4. De evenwichtsvoorwaarde kan ook gevonden worden uit de krachten. Wegens de symmetrie zijn de spanningen in beide koorden dezelfde; we noemen deze  $S$ . Uit het evenwicht van het stoffelijke punt  $R$  volgt:

$$2 S \sin \varphi - mg = 0.$$

Uit het evenwicht van de staaf volgt:

$$2 S - 2 S \sin \varphi - mg = 0.$$

Dit voert tot:

$$S = mg, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 30^\circ, \quad AC = BD = l - \frac{2}{3} \sqrt{3} a.$$

Deze evenwichtsstand is alleen aanwezig, als  $\alpha \geq 30^\circ$  is ( $a \leq \frac{1}{2} \sqrt{3} l$ ).

Is  $\alpha \leq 30^\circ$ , dan is er alleen evenwicht, als  $C$  in  $A$  en  $D$  in  $B$  valt ( $\varphi = \alpha$ ). Op de staaf worden dan door de ophangpunten  $A$  en  $B$  benedenwaarts gerichte krachten  $mg \frac{1 - 2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha}$  uitgeoefend.

5. Dat in een evenwichtsstand, waarbij  $CD$  lager ligt dan  $AB$ , de spanning  $S$  gelijk is aan  $mg$ , volgt ook onmiddellijk daaruit, dat de koorden  $CA$  en  $DB$  te zamen een massa  $2m$  dragen. Dit komt daarop neer, dat men voor het gehele toestel opschrijft, dat de som van de verticale componenten der uitwendige krachten (de verticaal naar boven gerichte krachten in  $C$  en  $D$  en de beide gewichten) gelijk is aan 0. Dit geeft enige vereenvoudiging in de berekening van  $\varphi$ , daar men slechts voor de staaf of voor het materiële punt (en niet voor beide) de evenwichtsvoorwaarde in verticale richting behoeft op te schrijven.

6. In een willekeurige stand is de versnelling van  $Z$ , positief gerekend naar boven, gelijk aan:

$$\frac{d}{dt} \left( a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi} \right) = a \left( \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \ddot{\varphi} + \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \dot{\varphi}^2 \right).$$

In een willekeurige stand vindt men de spanning  $S$  in de koorden uit:

$$2S - 2S \sin \varphi - mg = ma \left( \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \ddot{\varphi} + \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \dot{\varphi}^2 \right).$$

Door de voor  $\dot{\varphi}^2$  gevonden uitdrukking (voor het geval, dat de staaf met  $C$  in  $A$  en  $D$  in  $B$  zonder beginsnelheden wordt losgelaten), krijgt men ook  $\ddot{\varphi}$  in  $\varphi$  uitgedrukt. Hierdoor vindt men  $S$  in  $\varphi$  uitgedrukt.

Voor de met 1 gemerkte stand, waarbij het materiële punt de staaf treft ( $\varphi = 0$ ), geldt:

$$S_1 = \frac{1}{2} m(g + a \dot{\varphi}_1^2).$$

Blijkens de voor  $a \dot{\varphi}_1^2$  gevonden uitdrukking volgt hieruit:

$$S_1 = mg \frac{4 - 3 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Daar de maximale waarde van  $3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha$  gelijk is aan  $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ , heeft de spanning in de beschouwde stand een eindige positieve waarde.

3. De delen van de staaf noemen we  $AB$ ,  $BC$  en  $CD$  (waarin  $A$  en  $D$  de vrije uiteinden zijn en  $B$  en  $C$  de scharnierpunten). Is  $k$  de lijndichtheid, dan zijn  $2kl$ ,  $2kpl$  en  $2kl$  de massa's der delen en  $\frac{2}{3}kl^3$ ,  $\frac{2}{3}kp^3l^3$  en  $\frac{2}{3}kl^3$  de traagheidsmomenten daarvan om assen door de zwaartepunten der delen loodrecht daarop. Zij  $S$  de in  $A$  op  $AB$  uitgeoefende stoot. In  $B$  oefenen de delen een loodrecht op  $AD$  staande verbindingsstoot  $S_1$  op elkaar uit en in  $C$  een verbindingsstoot  $S_2$ . We noemen  $S_1$  en  $S_2$  positief, als de op  $BC$  uitgeoefende stoten een zin hebben tegengesteld aan die van  $S$ . De snelheden van de zwaartepunten der delen  $AB$ ,  $BC$  en  $CD$  noemen we resp.  $v_1$ ,  $v_2$  en  $v_3$ , positief gerekend in de zin van  $S$ . De hoeksnelheden der delen noemen we resp.  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  en  $\omega_3$ , positief gerekend in de zin van het moment van  $S$  om het zwaartepunt van  $AB$ . Uit de snelheden van  $B$  en  $C$  volgt:

$$v_1 - l\omega_1 = v_2 + pl\omega_2, \quad v_2 - pl\omega_2 = v_3 + l\omega_3.$$

Verder is:



$$S + S_1 = 2 klv_1, \quad -S_1 - S_2 = 2 kplv_2, \quad S_2 = 2 klv_3, \\ S - S_1 = \frac{2}{3} kl^2 \omega_1, \quad S_2 - S_1 = \frac{2}{3} kp^2 l^2 \omega_2, \quad S_2 = \frac{2}{3} kl^2 \omega_3.$$

De hieruit volgende waarden van  $v_1, v_2, v_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  in de beide betrekkingen tusschen die snelheden substituerend, vindt men:

$$2(p+1)S_1 - S_2 = pS, \quad S_1 = 2(p+1)S_2,$$

$$S_2 = \frac{p}{4p^2 + 8p + 3} S.$$

Hieruit vindt men voor de hoeksnelheid van het deel  $CD$ :

$$\omega_3 = \frac{3S}{2kl^2} \frac{p}{4p^2 + 8p + 3} = \frac{3S}{2kl^2} \frac{p}{(2p+1)(2p+3)}.$$

We nemen aan, dat de bedoeling is, dat  $S, k$  en  $l$  constant gehouden worden (zie hiervoor Opm. 4). Uit:

$$\frac{d\omega_3}{dp} = \frac{3S}{2kl^2} \frac{3-4p^2}{(4p^2+8p+3)^2}$$

ziet men, dat (als  $p$  aangroeit van 0 tot  $+\infty$ )  $\omega_3$  eerst aangroeit van 0 tot  $\frac{3(2-\sqrt{3})}{8kl^2} S$  (voor  $p = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ), om vervolgens af te nemen tot 0. Bijgevolg is  $\omega_3$  maximaal voor  $p = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

*Opmerkingen.* 1. We hebben aangenomen, dat de verbindingsstoten in  $B$  en  $C$  loodrecht op  $AD$  staan, iets dat trouwens voor de hand ligt. Het bewijs van die loodrechte stand is overigens gemakkelijk te geven. Na de stoot is de snelheid van het gemeenschappelijke zwaartepunt evenwijdig aan  $S$ , dus loodrecht op  $AD$ . Na de stoot staan dus de snelheden van de zwaartepunten der afzonderlijke delen eveneens loodrecht op  $AD$ , dus de verbindingsstoten ook.

2. Men kan de plaats van het toestel aangeven door 5 coördinaten. Daartoe nemen we  $A$  als oorsprong van een rechthoekig assenkruis; de positieve  $x$ -as leggen we langs  $AD$  en de positieve  $y$ -as in de richting en zin van  $S$ . De coördinaten van het zwaartepunt van  $BC$ , als het toestel in willekeurige stand op het horizontale vlak ligt, noemen we  $x_2$  en  $y_2$ . Als positieve draaizin nemen we de draaiing van de positieve  $y$ -as door de rechte hoek naar de positieve  $x$ -as. De hoeken, die men de positieve  $x$ -as in positieve zin moet draaien om in richting en zin met  $AB, BC$  en  $CD$  overeen te stemmen, noemen we resp.  $\varphi_1, \varphi_2$  en  $\varphi_3$ . Als coördinaten van het toestel

nemen we  $x_2, y_2, \varphi_1, \varphi_2$  en  $\varphi_3$ . De coördinaten van het zwaartepunt van  $AB$  zijn:

$$x_1 = x_2 - pl \cos \varphi_2 - l \cos \varphi_1, \quad y_1 = y_2 + pl \sin \varphi_2 + l \sin \varphi_1;$$

de coördinaten van het zwaartepunt van  $CD$  zijn:

$$x_3 = x_2 + pl \cos \varphi_2 + l \cos \varphi_3, \quad y_3 = y_2 - pl \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_3.$$

Behalve de normale verbindingsstoten  $S_1$  en  $S_2$  in  $B$  resp.  $C$  voeren we nog in een langs  $AD$  vallende stoot  $S_1'$ , die de delen  $AB$  en  $BC$  in  $B$  op elkaar uitoefenen, positief gerekend als de op  $BC$  werkende stoot in de zin van de positieve  $x$ -as valt, en een langs  $AD$  vallende stoot  $S_2'$  in  $C$ , positief als de op  $CD$  werkende stoot in positieve zin valt. In:

$$\begin{aligned} -S_1' &= 2 kl \dot{x}_1, & S_1' - S_2' &= 2 kpl \dot{x}_2, & S_2' &= 2 kl \dot{x}_3, \\ S + S_1 &= 2 kl \dot{y}_1, & -S_1 - S_2 &= 2 kpl \dot{y}_2, & S_2 &= 2 kl \dot{y}_3, \\ S - S_1 &= \frac{2}{3} kl^2 \dot{\varphi}_1, & S_2 - S_1 &= \frac{2}{3} kp^2 l^2 \dot{\varphi}_2, & S_2 &= \frac{2}{3} kl^2 \dot{\varphi}_3, \end{aligned}$$

moet men  $\dot{x}_1, \dot{y}_1$  enz. nemen in de beginstand ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ ). Men heeft dan (wegens  $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$  enz.):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_2, & \dot{y}_1 &= \dot{y}_2 + pl \omega_2 + l \omega_1, \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_2, & \dot{y}_3 &= \dot{y}_2 - pl \omega_2 - l \omega_3. \end{aligned}$$

Uit de vergelijkingen in de  $x$ -richting volgt door optelling:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0, \quad S_1' = S_2' = 0.$$

Verder vinden we:

$$\begin{aligned} p(S + S_1) &= -S_1 - S_2 + 3(S_2 - S_1) + 3p(S - S_1), \\ pS_2 &= -S_1 - S_2 - 3(S_2 - S_1) - 3pS_2, \end{aligned}$$

dus:

$$2(p+1)S_1 - S_2 = pS, \quad S_1 = 2(p+1)S_2.$$

Hieruit vindt men:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2p(p+1)S}{(2p+1)(2p+3)}, & S_2 &= \frac{pS}{(2p+1)(2p+3)}, \\ v_1 = \dot{y}_1 &= \frac{(6p^2 + 10p + 3)S}{2kl(2p+1)(2p+3)}, \\ \omega_1 &= \frac{3(2p^2 + 6p + 3)S}{2kl^2(2p+1)(2p+3)}, \\ v_2 = \dot{y}_2 &= -\frac{S}{2kl(2p+1)}, & \omega_2 &= -\frac{3S}{2kl^2p(2p+3)}. \end{aligned}$$

$$v_3 = \dot{y}_3 = \frac{\rho S}{2 kl(2\rho + 1)(2\rho + 3)},$$

$$\omega_3 = \frac{3\rho S}{2 kl^2(2\rho + 1)(2\rho + 3)}.$$

3. Men kan het vraagstuk ook oplossen met de vergelijkingen van **Lagrange** voor stoten. De levende kracht  $L$  in de beginstand met willekeurige snelheden is met de coördinaten van Opm. 2:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3} kl^3 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_3^2 + \rho^3 \dot{\varphi}_2^2) + kl(2 + \rho)x_2^2 + \\ &+ kl\{\dot{y}_2 + \rho l \dot{\varphi}_2 + l \dot{\varphi}_1\}^2 + \{\dot{y}_2 - \rho l \dot{\varphi}_2 - l \dot{\varphi}_3\}^2 + \rho \dot{y}_2^2 \} = \\ &= \frac{4}{3} kl^3 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_3^2) + kl^3 \rho^2 (\frac{1}{3} \rho + 2) \dot{\varphi}_2^2 + \\ &\quad + kl(2 + \rho)(x_2^2 + \dot{y}_2^2) + \\ &\quad + 2 kl^2 \dot{y}_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) + 2 kl^3 \rho \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3). \end{aligned}$$

Voor het punt  $A$  geldt:

$$y = y_2 + \rho l \sin \varphi_2 + 2 l \sin \varphi_1,$$

zodat voor de beginstand geldt:

$$dy = dy_2 + 2 l d\varphi_1 + \rho l d\varphi_2,$$

Hieruit vindt men voor de arbeidscoëfficiënten:

$$G_{x_2} = 0, \quad G_{y_2} = S, \quad G_{\varphi_1} = 2lS, \quad G_{\varphi_2} = \rho lS, \quad G_{\varphi_3} = 0.$$

De vergelijkingen van **Lagrange**  $\left(\frac{\partial L}{\partial x_2} = G_{x_2} \text{ enz.}\right)$  worden dus, na deling door constante factoren, nl.  $2 kl(2 + \rho^2)$  enz.

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \quad 2 kl\{(2 + \rho)\dot{y}_2 + l(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3)\} = S, \\ kl\{\dot{y}_2 + l(\frac{4}{3} \dot{\varphi}_1 + \rho \dot{\varphi}_2)\} &= S, \\ 2 kl^2\{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3 + \rho(\frac{1}{3} \rho + 2)\dot{\varphi}_2\} &= S, \\ -\dot{y}_2 + l(\rho \dot{\varphi}_2 + \frac{4}{3} \dot{\varphi}_3) &= 0. \end{aligned}$$

De eerste twee vergelijkingen krijgt men ook door de stootvergelijking toe te passen op het zwaartepunt van het geheel. Uit de laatste vergelijking vindt men  $(\dot{\varphi}_1$  door  $\omega_1$  vervangend enz.):

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{3} l(3\rho \omega_2 + 4 \omega_3).$$

Door dit in de tweede en derde vergelijking van **Lagrange** te substitueren, vindt men:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} kl^2\{3 \omega_1 + 3\rho(2 + \rho)\omega_2 + (5 + 4\rho)\omega_3\} &= S, \\ \frac{2}{3} kl^2(2 \omega_1 + 2 \omega_3 + 3\rho \omega_2) &= S, \end{aligned}$$

De laatste vergelijking voert in verband met de vierde vergelijking van Lagrange tot:

$$\omega_2 = - \frac{3S}{2kl^2 p(2p+3)}.$$

Dit voert verder tot:

$$\omega_1 + \omega_3 = \frac{3(p+3)S}{2kl^2(2p+3)},$$

$$\begin{aligned} 2(2p+1)\omega_3 &= -3(\omega_1 + \omega_3) - 3p(2+p)\omega_2 + \frac{3S}{2kl^2} = \\ &= \frac{3pS}{kl^2(2p+3)}. \end{aligned}$$

4. *Slotopmerking.* Het vraagstuk is zeer onvolledig geformuleerd, doordat niet is aangegeven welke grootheden constant gehouden worden. Dat de bedoeling is, dat de stoot  $S$  onveranderd gelaten wordt, ligt voor de hand, hoewel het beter zou zijn geweest als ook dit uitdrukkelijk gezegd was. Daar men bij het oplossen nog een grootheid moet invoeren, die in de opgave niet genoemd is (iets dat op zichzelf geen bezwaar tegen de opgave is te achten), hangt het van het toeval af, welke grootheden de candidaat constant houdt. Allicht zal hij daarvoor nemen de grootheid  $l$  en de grootheid, die hij verder nog invoert. Bij de gegeven oplossing is daarvoor genomen de lijndichtheid  $k$ , maar in plaats daarvan kan evengoed de totale massa  $m$  van de drie delen genomen worden. Met invoering van  $m$  heeft men:

$$m = 2kl(p+2), \quad \omega_3 = \frac{3S}{ml} \frac{p^2 + 2p}{4p^2 + 8p + 3}.$$

Werkt men met  $m$ , dan wordt de uitdrukking voor  $\omega_3$  natuurlijk zonder over lijndichtheid te spreken afgeleid, door op te merken, dat de massa's der drie delen van de staaf zijn  $\frac{m}{p+2}$ ,  $\frac{pm}{p+2}$  en  $\frac{m}{p+2}$ . Houdt men (wat bij deze opzet voor de hand ligt) in de voor  $\omega_3$  gevonden uitdrukking  $S$ ,  $m$  en  $l$  constant, dan vindt men:

$$\frac{d\omega_3}{dp} = \frac{18S}{ml} \frac{p+1}{(4p^2 + 8p + 3)^2},$$

zodat steeds  $\frac{d\omega_3}{dp} > 0$  is. Derhalve neemt  $\omega_3$  voortdurend toe, en

wel van 0 tot  $\frac{3S}{4ml}$ , als  $p$  toeneemt van 0 tot  $+\infty$ . Voor een eindige waarde van  $p$  is dus geen maximum aanwezig.

Nog een andere opvatting is mogelijk en deze (die evenmin tot een maximum van  $\omega_3$  voert) wordt door de opgave nog het meest gesuggereerd. „Een homogene staaf wordt in drie delen verdeeld” doet toch daaraan denken, dat een staaf gegeven is en dat deze in drie stukken gesneden wordt, die weer door scharnieren aan elkaar worden verbonden. In dat geval houdt men  $S$ , de totale massa  $m$  en de totale lengte  $\lambda$  constant en voert het in drie stukken snijden op verschillende manieren uit (zodanig, dat de lengten dier stukken zich verhouden als 1,  $p$  en 1). Dan is  $\lambda = 2l(p+2)$ , dus

$l = \frac{\lambda}{2(p+2)}$ , waardoor men vindt:

$$\omega_3 = \frac{6S}{m\lambda} \frac{p(p+2)^2}{4p^2 + 8p + 3}.$$

Houdt men  $S$ ,  $m$  en  $\lambda$  constant, dan is:

$$\frac{d\omega_3}{dp} = \frac{6S}{m\lambda} \frac{(p+2)(4p^3 + 8p^2 + 9p + 6)}{(4p^2 + 8p + 3)^2}.$$

Ook nu is  $\frac{d\omega_3}{dp} > 0$ , zodat ook nu  $\omega_3$  voortdurend toeneemt (ditmaal van 0 tot  $\infty$ ), als  $p$  toeneemt. Ook bij deze alleszins redelijke opvatting van de vraag is de candidaat gedupeerd, doordat hij naar een rekenfout gaat zoeken en niet aan een fout in de opgave denkt.

Uit het voorgaande blijkt dus de bedoeling van de opgave (in strijd met de formulering daarvan) wel te zijn, dat  $S$ ,  $l$  en de lijndichtheid  $k$  constant gehouden worden.

### SEPTEMBER 1947. C<sub>3</sub>.

1. De totale potentiële energie (van zwaartekracht en centrifugaalkracht) is, als de positieve  $y$ -as verticaal naar beneden gericht is:

$$\begin{aligned} P &= -mgy - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = m \left( \frac{\omega^2 a^2}{2 b^2} y^2 - gy \right) + \text{constante} = \\ &= m \frac{\omega^2 a^2}{2 b^2} \left( y - \frac{gb^2}{\omega^2 a^2} \right)^2 + \text{constante}. \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $P$  minimaal bij gegeven waarde van  $y$ , als:

$$\omega^2 = \frac{gb^2}{a^2 y}, \quad \omega = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{g}{y}}$$

is. Dan is er dus bij de gegeven waarde van  $y$  evenwicht en wel stabiel. Is met  $h$  bedoeld de hoogte boven het onderste punt van de ellips, dan is  $y = b - h$ , dus:

$$\omega = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{g}{b-h}}$$

In het evenwichtspunt  $P$  kunnen we zonder beperking  $x > 0$  nemen. Is  $\alpha$  de tussen  $0$  en  $90^\circ$  bedoelde hoek, die de raaklijn in  $P$  aan de ellips met de  $x$ -as maakt, dan is:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{b \sqrt{b^2 - y^2}}{ay}, \\ \cos \alpha &= \frac{ay}{\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}}, \quad \sin \alpha = b \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}}. \end{aligned}$$

Is  $N$  de druk, die de buis op het stoffelijke punt uitoefent, dan volgt uit de krachtcomponenten loodrecht op de buis, de centrifugaalkracht meegerekend:

$$N - mg \cos \alpha - m \omega^2 x \sin \alpha = 0,$$

$$N = mg \left( \cos \alpha + \frac{b^2}{a^2 y} x \sin \alpha \right) = \frac{mg}{ay} \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}.$$

Met invoering van  $h$  wordt dit:

$$N = \frac{mg}{a(b-h)} \sqrt{a^2 b^2 + (a^2 - b^2)h(h-2b)}.$$

*Opmerking.* Men kan de voorwaarde voor relatief evenwicht ook vinden uit de krachtcomponenten langs de buis:

$$mg \sin \alpha - m \omega^2 x \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Dit voert tot } \omega^2 = g \frac{\operatorname{tg} \alpha}{x} = \frac{gb^2}{a^2 y}.$$

2. We nemen  $O$  als oorsprong van een rechthoekig assenkruis en de positieve  $y$ -as verticaal naar beneden. De positieve  $x$ -as nemen we in het vlak der beweging zodanig, dat de draaiing van de positieve  $x$ -as naar de positieve  $y$ -as (door de rechte hoek)

overeenstemt met de draaiing van  $OA$  naar  $OC$  (positieve draaiing). De hoeken  $\varphi$ ,  $\vartheta_1$  en  $\vartheta_2$  nemen we zo, dat ze toenemen bij draaiing in negatieve zin. Zijn  $x_1$  en  $y_1$  de coördinaten van het zwaartepunt  $Z_1$  van  $AD$  en  $x_2$  en  $y_2$  die van het zwaartepunt van  $BE$ , dan is:

$$x_1 = l(\cos \varphi + \sin \vartheta_1), \quad x_2 = l(-\cos \varphi + \sin \vartheta_2),$$

$$y_1 = l(-\sin \varphi + \cos \vartheta_1), \quad y_2 = l(\sin \varphi + \cos \vartheta_2),$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l^2 \{ \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}_1^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_1 - \varphi) \},$$

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l^2 \{ \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}_2^2 - 2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_2 - \varphi) \}.$$

Hieruit vindt men voor de levende kracht van het geheel:

$$L = \frac{1}{6} m l^2 \{ 11 \dot{\varphi}^2 + 4(\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2) + \\ + 6 \dot{\varphi} \dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_1 - \varphi) - 6 \dot{\varphi} \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_2 - \varphi) \}.$$

De potentiële energie van het geheel is:

$$P = -mgl(\cos \varphi + \cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2).$$

Om de vergelijkingen van Lagrange op te stellen, berekenen we eerst:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{1}{3} m l^2 \{ 11 \dot{\varphi} + 3 \dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_1 - \varphi) - 3 \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_2 - \varphi) \},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} = \frac{1}{3} m l^2 \{ 4 \dot{\vartheta}_1 + 3 \dot{\varphi} \sin(\vartheta_1 - \varphi) \},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} = \frac{1}{3} m l^2 \{ 4 \dot{\vartheta}_2 - 3 \dot{\varphi} \sin(\vartheta_2 - \varphi) \}.$$

Voor de vergelijkingen van Lagrange vindt men:

$$l \{ 11 \ddot{\varphi} + 3 \ddot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_1 - \varphi) - 3 \ddot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_2 - \varphi) + \\ + 3 \dot{\vartheta}_1^2 \cos(\vartheta_1 - \varphi) - 3 \dot{\vartheta}_2^2 \cos(\vartheta_2 - \varphi) \} = -3g \sin \varphi,$$

$$l \{ 4 \ddot{\vartheta}_1 + 3 \ddot{\varphi} \sin(\vartheta_1 - \varphi) - 3 \dot{\varphi}^2 \cos(\vartheta_1 - \varphi) \} = -3g \sin \vartheta_1,$$

$$l \{ 4 \ddot{\vartheta}_2 - 3 \ddot{\varphi} \sin(\vartheta_2 - \varphi) + 3 \dot{\varphi}^2 \cos(\vartheta_2 - \varphi) \} = -3g \sin \vartheta_2.$$

Met verwaarlozing van oneindig kleinen van de tweede en hogere orde wordt dit:

$$11 l \ddot{\varphi} + 3g \varphi = 0, \quad 4 l \ddot{\vartheta}_1 + 3g \vartheta_1 = 0, \quad 4 l \ddot{\vartheta}_2 + 3g \vartheta_2 = 0.$$

Uit de symmetrie der beginvoorwaarden blijkt, dat (zonder verwaarlozing)  $\varphi = 0$  en  $\vartheta_2 = -\vartheta_1$  blijft. Daardoor wordt de eerste vergelijking van Lagrange een identiteit, terwijl de andere twee

vergelijkingen worden (zonder verwaarlozing).

$$4l\ddot{\vartheta}_1 + 3g \sin \vartheta_1 = 0.$$

Van de in  $A$  op de staaf  $AD$  werkende kracht noemen we  $S_1$  de component langs  $DA$ , positief gerekend in het verlengde van  $DA$ , en  $Q_1$  de component loodrecht op  $AD$ , positief gerekend als de draaiing van  $AD$  naar  $Q_1$  in negatieve zin plaats vindt, dus als  $Q_1$  om  $Z_1$  een positief moment heeft. Uit de beweging van  $Z_1$  in de richting van  $AD$  vindt men (zonder verwaarlozing):

$$S_1 - mg \cos \vartheta_1 = ml\dot{\vartheta}_1^2 = m \{l\omega^2 - \frac{3}{2}g(1 - \cos \vartheta_1)\},$$

$$S_1 = \frac{1}{2}m(2l\omega^2 + 5g \cos \vartheta_1 - 3g).$$

Uit het moment om  $Z_1$  vindt men (zonder verwaarlozing):

$$Q_1 = -\frac{1}{3}ml\ddot{\vartheta}_1 = \frac{1}{4}mg \sin \vartheta_1.$$

Men kan  $Q_1$  ook vinden uit de beweging van  $Z_1$  loodrecht op  $AD$ .

Met overeenkomstige tekenafspraken vindt men voor de krachtcomponenten  $S_2$  en  $Q_2$ , in  $B$  op de staaf  $BE$  uitgeoefend, langs  $EB$  en daar loodrecht op  $S_2 = S_1$ ,  $Q_2 = -Q_1$ . De kracht  $K$  in  $O$  op de staaf  $AB$  (met daaraan bevestigde staaf  $OC$ ) uitgeoefend, is wegens de symmetrie verticaal; we rekenen die kracht positief naar boven. We vinden (weer zonder verwaarlozing):

$$K = 2mg + 2S_1 \cos \vartheta_1 + 2Q_1 \sin \vartheta_1 =$$

$$= 2ml\omega^2 \cos \vartheta_1 + \frac{1}{2}mg(9 \cos^2 \vartheta_1 - 6 \cos \vartheta_1 + 5).$$

Voor kleine waarden van  $\vartheta_1$  (dus ook van  $\omega$ ) vindt men bij benadering:

$$S_1 = \frac{1}{4}m(4l\omega^2 + 4g - 5g\vartheta_1^2), \quad Q_1 = \frac{1}{4}mg\vartheta_1,$$

$$K = m(2l\omega^2 + 4g - 3g\vartheta_1^2).$$

*Opmerking.* Men kan reeds eerder benadering toepassen, dus uitgaan van:

$$l\ddot{\vartheta}_1 = -\frac{3}{4}g\vartheta_1, \quad l\dot{\vartheta}_1^2 = l\omega^2 - \frac{3}{4}g\vartheta_1^2.$$

Dit voert tot:

$$S_1 = mg(1 - \frac{1}{2}\vartheta_1^2) + ml\dot{\vartheta}_1^2 = \frac{1}{4}m(4g + 4l\omega^2 - 5g\vartheta_1^2),$$

$$Q_1 = -\frac{1}{3}ml\ddot{\vartheta}_1 = \frac{1}{4}mg\vartheta_1.$$

Het berekenen van  $S_1$  en  $Q_1$  bij benadering heeft weinig zin, daar het nog wel zo eenvoudig is  $S_1$  en  $Q_1$  zonder verwaarlozing te berekenen.



3. Is  $S$  de stoot en  $\omega$  de hoeksnelheid van de staaf onmiddellijk na de stoot, dan volgt uit de beweging om  $O$  en die van het zwaartepunt van de staaf:

$$\frac{4}{3} ml^2 \omega = Sa, \quad ml \omega = S,$$

zodat  $a = \frac{4}{3} l$  is; de stoot grijpt aan in het slingerpunt, ook stootpunt genoemd. Is  $v$  de snelheid van het stoffelijke punt onmiddellijk vóór en  $v'$  de snelheid onmiddellijk na de botsing, beide positief gerekend in de zin van  $v$ , dan is:

$$-ml \omega = -S = \frac{3}{8} m(v' - v),$$

dus  $v' = v - \frac{8}{3} l \omega$ . De snelheden vóór en na de botsing van het aangrijpingspunt van de stoot worden aangegeven door:

	vóór	na
stoffelijk punt	$v$	$v - \frac{8}{3} l \omega$
staaf	0	$a \omega = \frac{4}{3} l \omega$
relatief	$v$	$v - 4 l \omega$

Wegens het volkomen veerkrachtig zijn van de botsing is  $v - 4 l \omega = -v$ , dus  $v = 2 l \omega$ . Volgens  $L + P = \text{constant}$  voor de beweging, die op de botsing volgt, en die, welke aan de botsing voorafgaat, heeft men:

$$\frac{2}{3} m l^2 \omega^2 = \frac{1}{2} mgl, \quad l \omega^2 = \frac{3}{4} g,$$

$$\frac{3}{16} m v^2 = \frac{3}{8} m g a (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} mgl(1 - \cos \alpha),$$

dus:

$$1 - \cos \alpha = \frac{3 v^2}{8 gl} = \frac{3 l \omega^2}{2 g} = \frac{9}{8}.$$

Hieruit vindt men  $\cos \alpha = -\frac{1}{8}$ , dus  $\alpha = \pi - \text{bcos } \frac{1}{8}$ . Daar  $\alpha$  stomp is gaat het stoffelijke punt eerst verticaal naar beneden, totdat het koord weer gestrekt is (uitwijkingshoek  $\text{bcos } \frac{1}{8}$ ). We nemen maar aan, dat het stoffelijke punt verder de cirkel blijft volgen. Het geval doet enigszins zonderling aan.

OCTOBER 1947. C<sub>3</sub>.

1. De staven noemen we  $AB$  en  $AC$  zodat  $A$  het scharnierpunt is. Voor evenwicht is nodig, maar niet voldoende, dat er evenwicht is, als de staven vast aan elkaar verbonden zijn, in welk geval  $BAC$  en beide massa's  $\frac{1}{2} m$  één vast lichaam vormen. Het zwaartepunt  $Z$  daarvan ligt op de bissectrice van  $\angle BAC$ . Is het lichaam in evenwicht, dan gaan de beide drukken, door de bol op  $AB$  en  $AC$  uitgeoefend, en de verticaal door  $Z$  door één punt, nl. het middelpunt  $M$  van de bol, zodat dan het gewicht door  $M$  gaat. Verder liggen dan de beide drukken en het gewicht in één vlak. In geval van evenwicht ligt  $BAC$  dus in een verticaal vlak door  $M$ .

We beschouwen nu  $A$  weer als een scharnier. De drukken, die de bol op de staven  $AB$  en  $AC$  uitoefent, noemen we  $N$  resp.  $N'$ . Zij  $Q$  de horizontale en  $Q'$  de verticale component van de kracht, die de staaf  $AC$  op de staaf  $AB$  uitoefent, positief gerekend naar de kant van  $C$  resp. naar boven, en zij  $\angle MAB = \varphi$ . De hoek, die  $MA$  met de naar boven gerichte verticaal door  $M$  maakt, noemen we  $\theta$ , positief gerekend, als  $A$  en  $B$  aan dezelfde kant van die verticaal liggen. Het zwaartepunt  $G$  van de staaf  $AB$  met daaraan bevestigde massa  $\frac{1}{2} m$  ligt zodanig op  $AB$ , dat  $AG = 2 R$  is. De evenwichtsvergelijkingen voor beide staven luiden:

$$N \sin(\varphi - \theta) + Q' - \frac{3}{2} mg = 0, \quad N \cos(\varphi - \theta) - Q = 0,$$

$$NR \cotg \varphi - 3 mg R \sin(\varphi - \theta) = 0,$$

$$N' \sin(\varphi + \theta) - Q' - \frac{3}{2} mg = 0, \quad N' \cos(\varphi + \theta) - Q = 0,$$

$$N'R \cotg \varphi - 3 mg R \sin(\varphi + \theta) = 0,$$

waarbij de momentenstellingen op  $A$  (d.w.z. op een as door  $A$  loodrecht op het vlak  $MABC$ ) zijn toegepast. Uit de vergelijkingen volgt door eliminatie van  $Q$  en  $Q'$ :

$$N \sin(\varphi - \theta) + N' \sin(\varphi + \theta) - 3 mg = 0,$$

$$N \cos(\varphi - \theta) - N' \cos(\varphi + \theta) = 0,$$

vergelijkingen, die men ook verkrijgt door het gehele toestel te beschouwen. Uit de laatste twee vergelijkingen vindt men:

$$N = 3 mg \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\sin 2\varphi}, \quad N' = 3 mg \frac{\cos(\varphi - \theta)}{\sin 2\varphi}.$$

Hierdoor gaan de momentenvergelijkingen over in:

$$\cos(\varphi + \theta) = 2 \sin^2 \varphi \sin(\varphi - \theta),$$

$$\cos(\varphi - \theta) = 2 \sin^2 \varphi \sin(\varphi + \theta).$$

Door optelling en aftrekking volgt hieruit:

$$(\cos \varphi - 2 \sin^3 \varphi) \cos \theta = 0,$$

$$(1 - \sin 2 \varphi) \sin \varphi \sin \theta = 0.$$

Dit voert tot:

$$\varphi = 45^\circ, \quad \theta \text{ willekeurig.}$$

*Opmerkingen.* 1. Men vindt:

$$N = \frac{3}{2} \sqrt{2} mg (\cos \theta - \sin \theta), \quad N' = \frac{3}{2} \sqrt{2} mg (\cos \theta + \sin \theta),$$

$$Q = \frac{3}{2} mg \cos 2 \theta, \quad Q' = \frac{3}{2} mg \sin 2 \theta,$$

waaruit volgt  $-45^\circ < \theta < 45^\circ$ .

2. Aannemend, dat  $A$  verticaal boven  $M$  ligt, kan men het vraagstuk ook geheel constructief oplossen. In geval van evenwicht gaan de verticaal door  $G$ , de druk  $N$  en de kracht in  $A$  op  $AB$  uitgeoefend door één punt  $S$ . Evenzo gaan de verticaal door het zwaartepunt  $G'$  van  $AC$ , de druk  $N'$  en de kracht in  $A$  op  $AC$  uitgeoefend door één punt  $S'$ ; dit punt  $S'$  is het spiegelbeeld van  $S$  ten opzichte van  $MA$ . Daar  $AS$  en  $AS'$  langs één rechte vallen (actie en reactie) is  $AS$  horizontaal. Is  $D$  raakpunt van bol en  $AB$ , dan is:

$$DS = \frac{AD^2}{R}, \quad DG = \frac{DS^2}{AD} = \frac{AD^3}{R^2},$$

$$AG = AD + DG = \frac{AD \cdot R^2 + AD^3}{R^2}.$$

Uit  $AG = 2R$  volgt dus:

$$AD^3 + R^2 \cdot AD - 2R^3 = 0,$$

dus  $AD = R$ , dus  $\angle MAD = 45^\circ$ , dus  $\angle CAB = 90^\circ$ .

De constructie der (naar  $S$  overgebrachte) krachten  $N$  en  $Q$  voert (steeds aannemend, dat  $A$  verticaal boven  $M$  ligt) tot:

$$N = N' = \frac{3}{2} \sqrt{2} mg, \quad Q = \frac{3}{2} mg.$$

Neemt men omgekeerd aan, dat  $\angle MAD = 45^\circ$  is, dan leest men uit de figuur zonder enige berekening af, dat  $AD = DG = R$ , dus  $AG = 2R$  is, dus dat er evenwicht is. Men ziet zo echter niet duidelijk, dat dit het enige geval van evenwicht is.

3. Is eenmaal gebleken, dat in geval van evenwicht  $BAC$  in een

verticaal vlak door  $M$  ligt, dan kan men het evenwicht ook bepalen uit het extreem zijn van de potentiële energie. Door de gebroken lijn  $MAG$  op  $MA$  te projecteren, vindt men:

$$MZ = \frac{R}{\sin \varphi} - 2R \cos \varphi,$$

positief gerekend, als  $A$  en  $Z$  aan dezelfde kant van  $M$  liggen. Voor de hoogte  $z$  van het zwaartepunt  $Z$  boven het horizontale vlak door  $M$  vindt men hieruit:

$$z = R \left( \frac{1}{\sin \varphi} - 2 \cos \varphi \right) \cos \theta.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= R \left( \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \cos \theta = \\ &= R(2 - \cotg \varphi - \cotg^3 \varphi) \sin \varphi \cos \theta = \\ &= R(1 - \cotg \varphi)(2 + \cotg \varphi + \cotg^2 \varphi) \sin \varphi \cos \theta, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= R \left( 2 \cos \varphi - \frac{1}{\sin \varphi} \right) \sin \theta = R \frac{\sin 2\varphi - 1}{\sin \varphi} \sin \theta. \end{aligned}$$

Bijgevolg voert  $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$  tot  $\varphi = 45^\circ, \theta$  willekeurig.

4. Voor  $\theta = 0$  heeft men  $z = R \left( \frac{1}{\sin \varphi} - 2 \cos \varphi \right)$ . Deze functie van  $\varphi$  is minimaal voor  $\varphi = \frac{1}{4} \pi$ . Dit betekent stabiel evenwicht, als men slechts standen beschouwt, waarbij  $A$  verticaal boven  $M$  ligt. Doordat er ook andere standen mogelijk zijn, is het evenwicht labiel. Dit blijkt daaruit, dat  $Z$  daalt, als men het toestel zodanig evenwijdig verschuift, dat de staven aan de bol blijven raken (waarbij het vlak  $BAC$  verticaal en de hoek  $\varphi$  gelijk aan  $45^\circ$  blijft).

Ten aanzien van draaiing om een as door  $M$  loodrecht op het vlak  $MBAC$  is het evenwicht indifferent.

5. We laten het toestel los in een stand, waarbij  $A$  verticaal boven  $M$  ligt. Op grond van symmetrie besluit men, dat  $A$  op de verticaal door  $M$  blijft. Er is dan één coördinaat, waarvoor we nemen  $\varphi = \angle MAB$ . We nemen  $M$  als oorsprong, de positieve  $x$ -as horizontaal (in het vlak  $ABC$ ), positief naar de kant van  $A$ , en de positieve  $z$ -as verticaal naar boven. De coördinaten van  $G$  zijn dan:

$$x = 2R \sin \varphi, \quad z = R \left( \frac{1}{\sin \varphi} - 2 \cos \varphi \right).$$

Hieruit vindt men voor de levende kracht van  $G$  (massa  $\frac{3}{2} m$ ):

$$\frac{3}{4} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{3}{4} m R^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} - 4 \cotg \varphi + 4 \right) \dot{\varphi}^2.$$

Het traagheidsmoment van de staaf  $AB$  met massa  $\frac{3}{2} m$  om een as door  $G$  loodrecht op  $AB$  is:

$$\frac{1}{3} m \left(\frac{3}{2} R\right)^2 + m \left(\frac{1}{2} R\right)^2 + \frac{1}{2} m R^2 = \frac{3}{2} m R^2.$$

De levende kracht van het gehele toestel is dus:

$$L = \frac{3}{2} m R^2 (\cotg^4 \varphi + \cotg^2 \varphi - 4 \cotg \varphi + 5) \dot{\varphi}^2.$$

De potentiële energie van het gehele toestel is:

$$P = 3 mgz = 3 mgR \left( \frac{1}{\sin \varphi} - 2 \cos \varphi \right).$$

Uit  $L + P = \text{constant}$  volgt dus:

$$R (\cotg^4 \varphi + \cotg^2 \varphi - 4 \cotg \varphi + 5) \dot{\varphi}^2 + 2g \left( \frac{1}{\sin \varphi} - 2 \cos \varphi \right) = C.$$

Beschouwt men kleine slingeren om de evenwichtsstand  $\cotg \varphi = 1$ , dan vindt men bij benadering (door te fluxioneren):

$$3 R \ddot{\varphi} + \sqrt{2} g \sin(\varphi - \frac{1}{4} \pi) (2 + \cotg \varphi + \cotg^2 \varphi) = 0,$$

dus bij benadering:

$$3 R \ddot{\varphi} + 4 \sqrt{2} g (\varphi - \frac{1}{4} \pi) = 0.$$

Hieruit vindt men voor de periode der kleine slingeren:

$$\frac{\pi}{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{3R}{g}}.$$

2. Als coördinaat voeren we in de hoek  $\varphi$ , die de straal van het stoffelijke punt maakt met de naar beneden gekeerde verticaal door het middelpunt  $M$  van de buis. De levende kracht der relatieve beweging is  $\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2$ . De potentiële energie van de centrifugaalkracht is  $-\frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \varphi$ . Hieruit vindt men:

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 - mgR \cos \varphi - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \varphi = \text{constant},$$

dus in verband met de voorwaarde  $\dot{\varphi} = 0$  voor  $\varphi = \frac{1}{3} \pi$ :

$$R \dot{\varphi}^2 - 2g \cos \varphi - \omega^2 R \sin^2 \varphi = -g - \frac{3}{4} \omega^2 R.$$

Door  $\varphi = 0$  te stellen, volgt hieruit:

$$v_0^2 = R^2 \dot{\varphi}_0^2 = R(g - \frac{3}{4} \omega^2 R).$$

Het genoemde geval is dus alleen mogelijk, als  $\omega^2 < \frac{4}{3} \frac{g}{R}$  is. In de hoogste stand is de relatieve snelheid 0, zodat daar ook de kracht van Coriolis gelijk aan 0 is. Ook de normale component van de relatieve versnelling is daar 0, terwijl de centrifugaalkracht dan is  $m \omega^2 R \sin 60^\circ$ . Is  $N$  de druk, die de buis op het stoffelijk punt uitoefent, positief gerekend naar  $M$  toe, dan is:

$$N - mg \cos 60^\circ - m \omega^2 R \sin^2 60^\circ = 0,$$

dus  $N = \frac{1}{2} mg + \frac{3}{4} m \omega^2 R$ . De druk op de buiswand is even groot, maar van  $M$  af gericht.

3. Het stoffelijke punt  $P$  botst met een snelheid  $\sqrt{gl}$  tegen het onderste punt  $A$  van de staaf. Daar  $P$  door de botsing tot rust komt, wordt op  $P$  een horizontale stoot  $S = m \sqrt{gl}$  uitgeoefend, dus op de staaf  $OA$  ook, maar in tegengestelde zin. Daar de relatieve snelheid der botsende punten door de botsing met  $-1$  wordt vermenigvuldigd, krijgt het punt  $A$  van de staaf een snelheid  $\sqrt{gl}$ . Het zwaartepunt  $Z$  van de staaf krijgt door de botsing een snelheid  $v = \frac{S}{M} = \frac{m}{M} \sqrt{gl}$ . Is  $\omega$  de hoeksnelheid, die de staaf krijgt, dan is  $\frac{1}{12} M l^2 \omega = \frac{1}{2} S l$ , dus:

$$l \omega = \frac{6 S}{M} = \frac{6 m}{M} \sqrt{gl}.$$

De snelheid van  $A$  na de botsing is dus  $v + \frac{1}{2} l \omega = \frac{4 m}{M} \sqrt{gl}$ .

Daar die snelheid ook gelijk is aan  $\sqrt{gl}$  is  $M = 4 m$ .

*Opmerkingen.* 1. Om de beweging van de staaf na de botsing te onderzoeken, voeren we als coördinaat in de hoek  $\varphi$ , die de staaf met de verticaal maakt, positief gerekend in de zin van  $\omega$ . De horizontale component van de snelheid van  $Z$  blijft  $\frac{1}{4} \sqrt{gl}$ . De verticale component van die snelheid is  $\frac{1}{2} l \dot{\varphi} \sin \varphi$ .

Uit  $L + P = \text{constant}$  volgt:

$$2 m (\frac{1}{2} l \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 - 2 m g l \cos \varphi = \text{constant},$$

dus in verband met de beginvoorwaarde  $\dot{\varphi} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$  voor  $\varphi = 0$ :

$$4 l (1 + 3 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 = 3 g (16 \cos \varphi - 13).$$

Hieruit blijkt, dat  $\varphi$  heen en weer schommelt tussen  $\pm \text{bgcos } 13/10$ .

2. Onmiddellijk na de botsing heeft het bovenste punt van de staaf een snelheid  $-\frac{1}{2}\sqrt{gl}$ . Deze snelheid heeft een zin tegengesteld aan de snelheid van  $A$  op dit tijdstip. Het is daarom nodig aan te nemen, dat de staaf ongehinderd het ophangpunt van de draad kan passeren.

## DECEMBER. W.S.V.

1. Onderstel, dat het stelsel bestaat uit  $n$  materiële punten  $A_j(x_j, y_j, z_j)$  (massa  $m_j$ ), waarin  $j = 1, 2, \dots, n$  is. Zijn  $x, y, z$  de coördinaten van het zwaartepunt en is  $M = \sum_{j=1}^n m_j$  de totale massa van het stelsel, dan is:

$$Mx = \sum_{j=1}^n m_j x_j, \quad My = \sum_{j=1}^n m_j y_j, \quad Mz = \sum_{j=1}^n m_j z_j.$$

Door tweemaal te fluxioneren volgt hieruit:

$$M\ddot{x} = \sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j = \sum_{j=1}^n X_j, \quad M\ddot{y} = \sum_{j=1}^n Y_j, \quad M\ddot{z} = \sum_{j=1}^n Z_j,$$

waarin  $X_j, Y_j, Z_j$  resp. de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -component zijn van de resultante der op  $A_j$  werkende krachten. In  $\sum_{j=1}^n X_j$  vallen de  $x$ -componenten van de inwendige krachten twee aan twee tegen elkaar weg (actie = — reactie), zodat  $\sum_{j=1}^n X_j$  ook is de algebraïsche som van de  $x$ -componenten der uitwendige krachten, die op het stelsel werken.

Uit  $M\ddot{x} = \sum_{j=1}^n X_j$ , met overeenkomstige vergelijkingen voor de  $y$ - en de  $z$ -coördinaten (en componenten), volgt het gestelde.

Bestaat het stelsel niet uit een eindig aantal materiële punten, maar uit (al of niet vaste) lichamen, dan moet men de sommen door integralen vervangen. Verder verandert er aan het bewijs niets.

2. De plaat ondervindt door het vasthouden van  $B$  een stoot  $S$  in  $B$  loodrecht op de plaat en wel in een zin tegen de oorspronkelijke snelheid van  $B$  in. Is  $2a$  de zijde van het vierkant en  $m$  de massa van de plaat, dan zijn de traagheidsmomenten om assen door het zwaartepunt  $Z$  evenwijdig aan een zijde van het vierkant beide gelijk aan  $\frac{1}{8} ma^2$ . Het traagheidsmoment om  $AC$  is dus eveneens

$\frac{1}{3} ma^2$ . Als positieve draaizin nemen we de zin van  $\omega$  (zodat  $\omega > 0$  is). Het moment van  $S$  om  $AC$  is dan  $-Sa\sqrt{2}$ . Is  $\omega'$  de hoeksnelheid van de beweging relatief  $Z$  onmiddellijk na het vasthouden van  $B$  en  $v'$  de snelheid van  $Z$  (eveneens na dit vasthouden), positief gerekend in de zin van de oorspronkelijke snelheid van  $B$ , dan is:

$$-Sa\sqrt{2} = \frac{1}{3} ma^2(\omega' - \omega), \quad -S = mv',$$

dus  $\omega' = \omega - \frac{3S\sqrt{2}}{ma}$  en  $v' = -\frac{S}{m}$ . Daardoor wordt de snelheid van  $B$ :

$$\omega' a\sqrt{2} + v' = \omega a\sqrt{2} - \frac{6S}{m} - \frac{S}{m} = \omega a\sqrt{2} - \frac{7S}{m}.$$

Daar de snelheid van  $B$  gelijk aan 0 wordt, heeft men:

$$S = \frac{1}{7} m \omega a\sqrt{2}, \quad \omega' = \frac{1}{7} \omega, \quad v' = -\frac{1}{7} \omega a\sqrt{2}.$$

Onmiddellijk na het vasthouden van  $B$  is de bewegingstoestand van de plaat (wat de snelheidsverdeling aangaat) een rotatie om een as door  $B$  evenwijdig aan  $AC$  met een hoeksnelheid  $\frac{1}{7} \omega$  in dezelfde zin als de oorspronkelijke rotatie.

*Opmerking.* Dat de rotatie-as na het vasthouden van  $B$  evenwijdig is aan  $AC$  volgt uit de symmetrie ten opzichte van het vlak door  $Z$  loodrecht op  $AC$ . Daaruit volgt, dat  $Z$  onmiddellijk na de stoot een snelheid loodrecht op de plaat heeft. Daar de snelheid van  $Z$  onmiddellijk vóór de stoot 0 is, staat de stoot loodrecht op de plaat.

3. Zij  $AB$  de staaf en zijn  $CA$  en  $DB$  de beide koorden.

a. We nemen aan, dat de bedoeling van de vraag is, dat  $\omega$  zo klein is, dat de stand, waarbij  $A$  in  $D$  en  $B$  in  $C$  gekomen is, niet of met snelheden 0 bereikt wordt. Zij  $z$  de stijging van het midden (zwaartepunt)  $Z$  van  $AB$ . Merken we alles wat betrekking heeft op het tijdstip, waarop de snelheden 0 geworden zijn, met de index 1, dan volgt uit  $L_0 + P_0 = L_1 + P_1$ :

$$\frac{1}{2} m \dot{z}_0^2 + \frac{1}{6} m l^2 \omega^2 = mgz_1.$$

Daar  $z$  in de beginstand minimaal is, is  $\dot{z}_0 = 0$ , zodat we vinden:

$$z_1 = \frac{l^2 \omega^2}{6g}.$$



De onderstelling, dat  $z_1 \leq 2l$  is, betekent dus  $\omega^2 \leq \frac{12g}{l}$ .

b. Is  $\varphi$  de hoek, die de staaf uit de evenwichtsstand gedraaid is, dan is (daar  $Z$  wegens de symmetrie zich langs een verticale rechte beweegt)  $2l \sin \frac{1}{2} \varphi$  de afstand van  $A$  tot de projectie  $P$  van  $A$  op  $A_0C$ , dus:

$$(2l - z)^2 + (2l \sin \frac{1}{2} \varphi)^2 = (2l)^2,$$

$$z = 2l(1 - \cos \frac{1}{2} \varphi), \quad \dot{z} = l \dot{\varphi} \sin \frac{1}{2} \varphi,$$

hetgeen bevestigt, dat  $\dot{z} = 0$  is voor  $\varphi = 0$ . Men vindt verder:

$$\ddot{z} = l(\ddot{\varphi} \sin \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \frac{1}{2} \varphi), \quad \ddot{z}_0 = \frac{1}{2} l \omega^2.$$

Wegens de symmetrie zijn de spanningen in beide koorden gelijk. Noemen we die spanningen  $S$ , dan geldt voor de beginstand:

$$2S_0 - mg = m \ddot{z}_0, \quad S_0 = \frac{1}{4} m(2g + l \omega^2).$$

c. Uit  $L + P = \text{constant}$  volgt:

$$\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgz = A,$$

$$l(1 + 3 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi) \dot{\varphi}^2 - 12g \cos \frac{1}{2} \varphi = B.$$

Door te fluxioneren, vindt men hieruit:

$$2l(1 + 3 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi) \ddot{\varphi} + 3l \dot{\varphi}^2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi + 6g \sin \frac{1}{2} \varphi = 0.$$

Voor kleine slingeren om de evenwichtsstand ( $\varphi = 0$ ) wordt dit:

$$2l \ddot{\varphi} + 3g \varphi = 0.$$

De periode dier slingeren is:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}},$$

dus de cirkelfrequentie  $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ .

*Opmerkingen.* 1. Voor de onder a en b beschouwde beweging geldt:

$$l \dot{\varphi}^2 = \frac{l \omega^2 - 12g + 12g \cos \frac{1}{2} \varphi}{4 - 3 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi},$$

$$l \ddot{\varphi} = 3 \frac{(12g - l \omega^2) \cos \frac{1}{2} \varphi - 2g(4 + 3 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi)}{2(4 - 3 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi)^2} \sin \frac{1}{2} \varphi.$$



De verticale componenten van de spanningen in de koorden hebben een moment 0 om de verticale as door  $Z$ . De horizontale component van de spanning  $S$  in het koord  $AC$  (in  $A$  werkend op de staaf) valt langs  $AP$  en is gelijk aan:

$$S \frac{AP}{AC} = S \frac{2l \sin \frac{1}{2} \varphi}{2l} = S \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

Deze heeft om de verticale as door  $Z$  een moment (positief gerekend in dezelfde zin als  $\varphi$ ) —  $Sl \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi$ . Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} -2Sl \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi &= \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}, \\ S &= - \frac{ml \ddot{\varphi}}{6 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi} = \\ &= m \frac{2g(4 + 3 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi) - (12g - l\omega^2) \cos \frac{1}{2} \varphi}{4(4 - 3 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi)^2 \cos \frac{1}{2} \varphi} = \\ &= m \frac{2g\{1 + 3(1 - \cos \frac{1}{2} \varphi)^2\} + l\omega^2 \cos \frac{1}{2} \varphi}{4(4 - 3 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi)^2 \cos \frac{1}{2} \varphi}. \end{aligned}$$

Is  $\omega^2 < \frac{12g}{l}$ , dan is  $\cos \frac{1}{2} \varphi > 0$ , zodat  $S$  dan steeds positief is (dus de koorden gespannen). Is  $\omega^2 \geq \frac{12g}{l}$ , dan bereikt  $\varphi$  de waarde van  $180^\circ$  en wordt de spanning in het koord dus oneindig groot. Het koord moet dus vóór het bereiken van de stand, waarbij  $A$  in  $D$  en  $B$  in  $C$  gekomen is, breken, zodat men moet aannemen, dat  $\omega^2 < \frac{12g}{l}$  is.

2. Dat  $S = \infty$  is voor  $\varphi = 180^\circ$  blijkt met minder gereken daaruit, dat voor die stand (gemarkt met 2) geldt  $4l\ddot{\varphi}_2 + 3g = 0$  (blijkens een onder  $c$  gevonden vergelijking), zodat  $\ddot{\varphi}_2$  een van 0 verschillende waarde heeft. Deze kan alleen ontstaan door de momenten der spanningen om de verticale as door  $Z$ . Daar deze spanningen voor  $\varphi = 180^\circ$  door  $Z$  gaan en dus een arm 0 hebben, zijn die spanningen oneindig groot.

3. Men kan de formule voor  $S$  ook vinden uit de beweging van  $Z$ . De verticale component van  $S$  is  $S \frac{2l-z}{2l}$ . Men heeft dus:

$$m\ddot{z} = S \frac{2l-z}{l} - mg = 2S \cos \frac{1}{2} \varphi - mg.$$

Volgens  $\ddot{z} = l(\ddot{\varphi} \sin \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \frac{1}{2} \varphi)$  vindt men:

$$\ddot{z} = \frac{(l\omega^2 - 12g) \cos \frac{1}{2} \varphi + 6g(2 - 3 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi - 3 \sin^4 \frac{1}{2} \varphi)}{2(1 + 3 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi)^2}.$$

Dit voert tot de in Opm. 1 gevonden waarde van  $S$ . De berekening van Opm. 1 is aanzienlijk korter.

4. Bij de onder  $a$  en  $b$  beschouwde beweging is:

$$\dot{z}^2 = \frac{z(4l - z)(l^2 \omega^2 - 6gz)}{4l^2 + 12lz - 3z^2},$$

$$\ddot{z} = \frac{4l^4 \omega^2(2l - z) + 3gz(-32l^3 - 36l^2z + 24lz^2 - 3z^3)}{(4l^2 + 12lz - 3z^2)^2}.$$

Hieruit vindt men voor de spanning  $S$ :

$$S = ml \frac{\ddot{z} + g}{2l - z} = 4ml^3 \frac{g(4l^2 + 3z^2) + l^2 \omega^2(2l - z)}{(2l - z)(4l^2 + 12lz - 3z^2)^2},$$

een formule, die ook uit de in Opm. 1 gevonden formule voor  $S$  is af te leiden. Uit de formule, die  $S$  in  $z$  uitdrukt, ziet men onmiddellijk, dat  $S > 0$  is voor  $z < 2l$  en  $S = \infty$  voor  $z = 2l$ .

5. Is  $z_1$  de grootste waarde van  $z$  ( $z_1 < 2l$ ), dan is:

$$\dot{z}^2 \frac{4l^2 + 12lz - 3z^2}{z(4l - z)} = 6g(z_1 - z).$$

Is  $z_1$  klein, dan heeft men bij benadering:

$$l \dot{z}^2 = 6gz(z_1 - z).$$

De tijd, waarin  $z$  aangroeit van 0 tot  $z_1$  is dus bij benadering:

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{6g}} \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z(z_1 - z)}} = 2 \sqrt{\frac{l}{6g}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \pi \sqrt{\frac{l}{6g}},$$

waarbij  $\sqrt{z(z_1 - z)} = zu$  gesteld is. De periode der kleine slingeren is dus:

$$T = 4t_1 = 4\pi \sqrt{\frac{l}{6g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}},$$

in overeenstemming met het onder  $c$  gevondene.

6. Men zou kunnen aannemen, dat de staaf ongehinderd de stand passeren kan, waarbij  $A$  zich in  $D$  en  $B$  zich in  $C$  bevindt (en de staaf dus  $180^\circ$  gedraaid is). Daartoe moet men aannemen, dat  $CD$  iets (een te verwaarlozen bedrag) groter is dan  $2l$  en dat ook de koorden iets langer zijn dan  $2l$ . Verder moet dan nog worden aangenomen, dat na het passeren van genoemde stand de koorden zich zo leggen, dat ze elkaar en de staaf niet hinderen. Van het oneindig groot worden van de spanning zou men kunnen afzien door de opmerking, dat dit het gevolg is van het idealiseren van het

probleem. Na het passeren van de genoemde stand wordt  $\cos \frac{1}{2} \varphi$  (dus ook  $2l - z$ ) negatief. Volgens de in Opm. 1 of 4 voor de spanning gevonden uitdrukking wordt deze negatief (verspringt van  $+\infty$  op  $-\infty$ ), als de genoemde stand gepasseerd wordt (hetgeen alleen gebeurt, als  $\omega^2 > \frac{12g}{l}$  is). Daarna gaan de koorden dus slap hangen.

De staaf behoudt zijn hoeksnelheid  $\dot{\varphi}_2$  om een verticale as door  $Z$ , waarin  $\dot{\varphi}_2$  gevonden wordt uit  $4l\dot{\varphi}_2^2 = l\omega^2 - 12g$ ; verder krijgt  $Z$  een eenparig versnelde beweging met een verticaal naar boven gerichte beginsnelheid  $\dot{z}_2 = l\dot{\varphi}_2$  en een verticaal naar beneden gerichte versnelling  $g$ . Het punt  $Z$  stijgt tot een hoogte  $\frac{l(l\omega^2 - 12g)}{8g}$

boven het midden van  $CD$ , als niet vóór die tijd de koorden weer gestrekt worden. Wil men uitmaken of en in welke stand dit gebeurt, dan krijgt men een vergelijking, die niet met letters is op te lossen.

7. *Slotopmerking.* De eerste vraag had beter aldus geformuleerd kunnen zijn:

a. Beneden welk bedrag moet  $\omega$  liggen, wil de staaf tot stilstand komen, nadat zijn zwaartepunt minder dan  $2l$  gestegen is? Bereken voor dat geval de hoogte, tot welke de staaf stijgt.

Zoals de vraag a gesteld was, bestaat de mogelijkheid, dat een zeer goede candidaat zich gaat verdiepen in de vraag wat er gebeurt, nadat de staaf  $180^\circ$  gedraaid is. Zoals uit de opmerkingen 1 en 6 blijkt, is het onmogelijk hierop een geheel bevredigend antwoord te geven, maar het kost veel tijd om tot dit inzicht te komen. Het vraagstuk heeft dus het zeer ernstige bezwaar, dat een uitstekende candidaat zou kunnen ingaan op beschouwingen, die onmogelijk in de bedoeling van de steller van het vraagstuk hebben kunnen liggen; hierdoor kunnen andere vraagstukken of onderdelen van hetzelfde vraagstuk in het gedrang komen. Een oppervlakkige candidaat daarentegen ziet geen zwarigheden en viadt snel de gewenste antwoorden.