

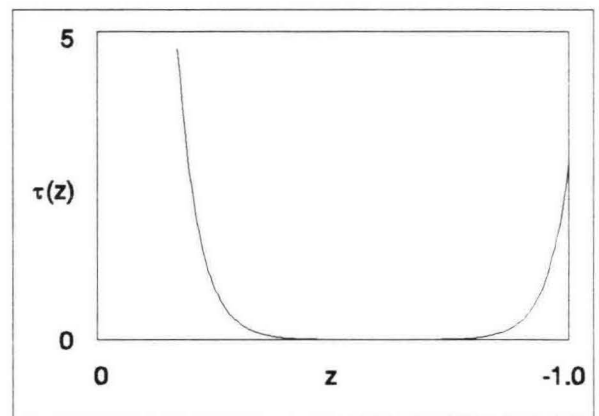
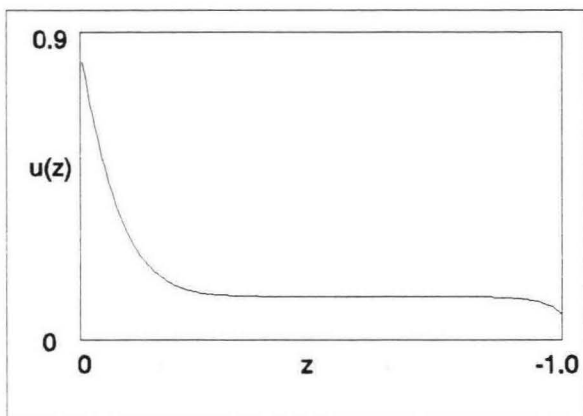
# Parallel stroming in een geometrisch open filterconstructie

Een theoretisch model voor de berekening  
van poriesnelheden en schuifspanningen

december 1996

Ir. M.Hauer, Ir. T. van der Meulen

---



## Inhoudsopgave:

1. Inleiding . . . . .	pag. 03
2. Analyse gedrag hydraulisch model Ikeya . . . . .	pag. 05
3. Nadere bestudering poreus medium vergelijking . . . . .	pag. 11
4. Theoretische beschrijving rekenmodel voor een twee lagen systeem . . . . .	pag. 20
5. Resultaten van het rekenmodel voor een praktijksituatie . . . . .	pag. 24
6. Samenvatting . . . . .	pag. 31
Appendix A: Analyse van modelconstanten . . . . .	pag. 32
Appendix B: Afleiding bewegingsvergelijking voor uniforme stationaire stroming in een poreus medium . . . . .	pag. 39
Literatuur . . . . .	pag. 42

## 1. Inleiding

Deze studie moet worden opgevat als een vervolg op de publicaties van Ikeya [4], Shimizu, Tsujimoto & Nakagawa [8] en Hoffmans [5], waarin de stroming in een poreus medium werd beschreven voor de situatie van een in principe oneindig dikke filterlaag grenzend aan een open waterloop met een uniform, stationair stroombeeld. Op basis van gelijksoortige modelleringen kwam uit al deze studies naar voren dat de gemiddelde watersnelheid in het poreus medium vanaf het grensvlak waterloop/filterlaag over een relatief korte afstand (globaal de helft van de maatgevende diameter van de korrels van het medium) zal dalen van de slipsnelheid op het grensvlak tot de zgn. 'seepage velocity', welke overeenkomt met de evenwichtsstromingsnelheid in het medium bij een gelijk verhang, maar dan zonder invloed van een aangrenzende waterloop. Deze bevindingen worden ook ondersteund door de resultaten van enkele modelproeven van Shimizu, Tsujimoto & Nakagawa [8], waarbij op verschillende hoogten in een filterlaag van glazen bollen de gemiddelde watersnelheden zijn bepaald uit de reistijd van zoutpulsen in het poreus medium tussen het punt van injectie en concentratiemeters benedenstrooms. Ikeya [4] vermeldt ook nog enkele resultaten van proeven van Stephenson [22], welke een gelijksoortig beeld opleveren.

Wanneer men de in deze publicaties beschreven formules wil toepassen om de belasting op een onder een filterlaag gelegen basislaag in te schatten, stuit men op het probleem dat de stroming in de toplaag in deze situatie ook zal worden beïnvloed door de aanwezigheid van die basislaag zelf. In de genoemde publicaties is telkens sprake van een oneindig dikke toplaag, terwijl er nu sprake is van een eindige dikte van de toplaag en een tweede, van de toplaag verschillend poreus medium daaronder. Er is hier dus sprake van afwijkende randvoorwaarden voor de stroming in de toplaag. Daarom mogen de formules in de publicaties [4], [5] en [8] in deze situatie niet zomaar zonder meer worden toegepast. Men zal voor dit geval eerst een model voor het gehele filtersysteem (waterloop, toplaag én basislaag) moeten opstellen. Het opstellen van theoretische formuleringen voor de stroming in een dergelijk systeem met gekoppelde filterlagen was het doel van deze studie.

De eerste stap naar dit doel vormde een nadere analyse van de zgn. 'poreus medium vergelijking', welke de gemiddelde stroming in het poreus medium beschrijft. Een numerieke controle van de met behulp van linearisering berekende uitkomst van Ikeya [4] toonde aan dat zijn versie van deze vergelijking in feite fysisch onmogelijke resultaten voorspelt. Dit punt wordt in hoofdstuk 2 behandeld. Hoofdstuk 3 handelt daarna over de vraag welke versie van de poreus medium vergelijking dan wel goed overeenstemt met de fysische realiteit. In dat hoofdstuk worden tevens standaardoplossingen voor de verbeterde versie van deze vergelijking gegeven, welke als basis kunnen dienen voor de opstelling van een rekenmodel voor de stroming in een filter met gekoppelde lagen. Dit rekenmodel komt dan in hoofdstuk 4 aan de orde. In dat hoofdstuk zijn theoretische formules opgesteld die kunnen worden gebruikt om de stroming in een meerlagen systeem te analyseren. In hoofdstuk 5 worden tot slot met het rekenmodel uit hoofdstuk 4 enkele voorbeelden doorgerekend, waarna enkele conclusies uit deze resultaten zullen worden getrokken. Eén van de belangrijkste conclusies betreft de invloed van de dikte van de toplaag op de belasting die op de basislaag aangrijpt. Volgens de resultaten in hoofdstuk 5 wordt deze belasting bij relatief dikke toplagen (dikte groter dan 1.5 à 2 maal de  $D_{n50}$  van de toplaag) niet meer beïnvloed door een "meesleepeffect" als gevolg van doorwerking van het snelheidsprofiel dat in de waterloop boven de toplaag optreedt.

De belasting hangt in dat geval uitsluitend af van het verhang over de constructie en de materiaalparameters van top- en basislaag. Bij nog dikkere toplagen blijft deze belasting verder constant.

Een apart punt van aandacht vormde de waarde van enkele modelconstanten die binnen de formuleringen worden gehanteerd. De literatuur is niet eenduidig over de waarden die aan deze modelconstanten moeten worden toegekend. Bij de berekeningen in hoofdstuk 5 is eerst uitgegaan van een soortement gemiddelde voor deze waarden, waarna ook de invloed van afwijkingen van deze gemiddelde waarden op de uitkomsten zijn geanalyseerd. In Appendix A wordt nader ingegaan op de discussie rond de waarden die voor de diverse modelconstanten moeten worden aangehouden.

In Appendix B wordt tot slot nog de afleiding beschreven voor de in deze studie als uitgangspunt genomen bewegingsvergelijking voor uniforme, stationaire stroming in een poreus medium.

#### *Opmerkingen vooraf:*

In deze studie wordt gerekend met een macroscopisch model voor de berekening van gemiddelde poriesnelheden die samenhangen met de optredende filtersnelheden volgens de relatie  $u = \underline{u}/n$  ( $\underline{u}$  = filtersnelheid,  $n$  = porositeit,  $u$  = gemiddelde poriesnelheid binnen het macroscopisch model). De in deze studie berekende gemiddelde poriesnelheden moeten dus net als de filtersnelheden worden opgevat als debieten per oppervlakteenheid, waarbij de gemiddelde poriesnelheid dan een maat geeft voor de snelheid waarmee een tracer (bijv. zout, kaliumpermanganaat) door de poriën van het poreus medium wordt getransporteerd. Er is gekozen voor deze modellering om de theoretische formuleringen te kunnen ijken met behulp van de resultaten van de modelproeven van Shimizu, Tsujimoto & Nakagawa [8], waarbij men met behulp van tracers indirect deze gemiddelde poriesnelheden heeft gemeten. De werkelijke, instantaan optredende poriesnelheden binnen het turbulent stroombeeld op microscopisch niveau zijn binnen deze wijze van modelleren echter buiten beschouwing gebleven. Men dient zich dit telkens goed te realiseren wanneer in deze studie over gemiddelde poriesnelheden wordt gesproken.

Hiernaast wordt op voorhand nog eens benadrukt dat alle formuleringen binnen deze studie betrekking hebben op een *uniforme, stationaire* stromingssituatie. Voor deze situatie zal worden aangetoond dat de invloed van eventuele doorwerking van het snelheidsprofiel in de waterloop op de belasting op de basislaag bij in de praktijk gangbare diktes voor de toplaag te verwaarlozen is. Dit betekent echter geenszins dat men de invloed van de waterloop in zijn geheel mag verwaarlozen. In veel situaties zal ook sprake zijn van *drukfluctuaties* in de waterloop - niet stationaire en niet uniforme stroombeelden. Voor deze situaties valt op grond van de in deze studie beschreven theorie wel te verwachten dat ook hier de eventuele meesleepeffecten door doorwerking van de snelheidsprofielen in de waterloop voor gangbare toplaagdiktes weer verwaarloosbaar zijn. In dit geval zullen de drukfluctuaties echter aanleiding geven tot fluctuaties in het verhang over de constructie en daarmee in fluctuaties in de belasting op de basislaag. Het mogen verwaarlozen van het meesleepeffect van de snelheidsprofielen in de waterloop is dus niet equivalent met het mogen verwaarlozen van de invloed van drukfluctuaties in de waterloop. Dit zijn twee wezenlijk verschillende zaken.

## 2. Analyse gedrag hydraulisch model Ikeya

Ikeya [4] gaat voor de opbouw van zijn hydraulisch model uit van de in de literatuur gangbare basisvergelijking (1) voor stationaire stroming door een poreus medium:

$$\rho \cdot g \cdot i + F + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Een uitgebreide afleiding voor deze bewegingsvergelijking is beschreven in appendix B van deze studie. De weerstandskracht  $F$  beschrijft Ikeya met de volgende Forchheimer relatie:

$$F = -\rho \cdot \left( \frac{C_a \cdot v}{D^2} \cdot u + \frac{C_b}{D} \cdot u^2 \right) \quad (2)$$

Hierin staat  $D$  voor een representatieve korreldiameter van het granulair materiaal. Hoffmans [5] houdt hiervoor de  $D_{50}$  van het materiaal aan. De watersnelheid  $u$  betreft in vergelijking (2) de *poriesnelheid*. Ikeya geeft verder voor de constanten  $C_a$  en  $C_b$  als gangbare waarden  $200 < C_a < 900$  en  $1 < C_b < 5$  bij porositeiten  $0.30 < n < 0.45$ . Deze waarden heeft hij o.a. gebaseerd op de uitdrukkingen voor de coëfficiënten van de Forchheimer relatie op pagina 57 van CUR-rapport 161 [3]. Deze laatste relatie is opgesteld voor de *filtersnelheid*  $\underline{u}$ , welke Ikeya via de formule  $\underline{u} = n \cdot u$  ( $n$  = porositeit) in poriesnelheden heeft omgerekend. In deze bureaustudie zijn als gemiddelde waarden  $C_a = 600$  en  $C_b = 3$  aangehouden.

De schuifspanning modelleert Ikeya volgens de hypothese van Boussinesq:

$$\tau_{xz} = \rho \cdot (v + v_t) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3)$$

De turbulente viscositeit  $v_t$  hangt hierbij samen met de kenmerkende lengteschaal voor de stroming. Deze lengteschaal wordt hier bepaald door de schalen van de korreldiameter en de watersnelheid. Ikeya hanteert daarom voor  $v_t$  onderstaand verband:

$$v_t = \beta \cdot D \cdot u_s \quad (4)$$

De snelheid  $u_s$  geldt in deze formulering als kenmerkende waarde voor de lengteschaal van de snelheid in de gehele laag. Ikeya en Hoffmans [5] houden hiervoor beiden de (maximale) slipsnelheid t.p.v. het grensvlak water/filterlaag aan. De modelconstante  $\beta$  ligt volgens Ikeya binnen de range  $0.1 < \beta < 1.0$ . Hoffmans [5] vermeldt in zijn studie echter ook andere waarden, op grond van kritiek van M. de Groot [1] op het werk van Ikeya. Volgens M. de Groot ligt  $\beta$  eerder in de orde van grootte van  $\beta \approx 0.005$ . In deze bureaustudie is in eerste instantie een soort midden tussen deze verschillende waarden

gezocht en is  $\beta = 0.05$  aangehouden. In Appendix A wordt dieper ingegaan op de problematiek rond de keuze van juiste waarden voor de modelconstanten.

De combinatie van de vergelijkingen (1) tot en met (4) levert vervolgens de volgende, niet lineaire differentiaalvergelijking (5) voor de watersnelheid:

$$(v + \beta \cdot D \cdot u_s) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left( \frac{C_a \cdot v}{D^2} \right) \cdot u - \left( \frac{C_b}{D} \right) \cdot u^2 = -g \cdot i \quad (5)$$

Het is deze vergelijking die als uitgangspunt dient voor de benaderende, gelineariseerde variant van Ikeya. Voor de details van Ikeya's aanpak bij de linearisatie van bovenstaande vergelijking wordt verwezen naar zijn eigen publicatie [4]. Hij komt tenslotte met behulp van de randvoorwaarden  $u(z) = u_s$  voor  $z = 0$  en  $\partial u(z)/\partial z = 0$  voor  $z \rightarrow -\infty$  uit bij de volgende uitdrukking voor het snelheidsverloop in de filterlaag:

$$u(z) = u_0 + (u_s - u_0) \cdot \exp(z/\kappa) \quad \text{voor } z < 0 \quad (6)$$

De snelheid  $u_0$  en de karakteristieke lengte  $\kappa$  voor de demping van de turbulentie in de filterlaag zijn hierin volgens Ikeya's benadering gelijk aan:

$$\text{Ikeya: } u_0 = \frac{-C_a \cdot v + \sqrt{(C_a \cdot v)^2 + 4 \cdot C_b \cdot D^3 \cdot g \cdot i}}{2 \cdot C_b \cdot D} \quad (7)$$

$$\kappa = D \cdot \sqrt{\frac{v + \beta \cdot D \cdot u_s}{C_a \cdot v + C_b \cdot D \cdot (u_s + u_0)}} \quad (8)$$

De grootte van de snelheid  $u_s$  is door Ikeya verder in het midden gelaten. Hoffmans [5] koppelt de snelheid  $u_s$  op basis van de resultaten van Japanse proeven aan de schuifspanningssnelheid  $u_s = \sqrt{g \cdot h \cdot i}$  en stelt  $u_s \approx 5 \cdot u$  ter plaatse van de bodem. (Dit geldt dan specifiek voor die Japanse proeven, waarbij uniforme glazen bollen zijn gebruikt. De grootte van de verhouding  $u_s/u$  voor gewone granulaire materialen is op voorhand nog niet direct duidelijk (zie ook Appendix A)).

Het is ook mogelijk een theoretische, analytische uitdrukking voor de slipsnelheid  $u_s$  af te leiden. Daartoe moet worden bedacht dat de schuifspanning ter plaatse van het grensvlak water/filter continu moet zijn. Dit betekent dat de schuifspanning in de filterlaag direct onder dit grensvlak gelijk moet zijn aan de schuifspanning  $\tau_0 = \rho \cdot g \cdot h \cdot i = \rho \cdot u_s^2$  direct boven dit grensvlak. De combinatie van dit gegeven met de vergelijkingen (3), (4) en (6) levert dan:

$$\text{voor } z = 0 : \rho \cdot u_*^2 = \rho \cdot (v + v_t) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \rho \cdot (v + \beta \cdot D \cdot u_s) \cdot \left( \frac{u_s - u_0}{\kappa} \right) \quad (9)$$

$$\Rightarrow u_s = \frac{(\beta \cdot D \cdot u_0 - v) + \sqrt{(\beta \cdot D \cdot u_0 - v)^2 + 4 \cdot \beta \cdot D \cdot (v \cdot u_0 + \kappa \cdot u_*^2)}}{2 \cdot \beta \cdot D}$$

Bij verwaarlozing van de visceuse effecten en de invloed van  $u_0$  in de berekening voor  $\kappa$  (aanname:  $u_s + u_0 \approx u_s$ ) kan de uitdrukking voor  $u_s$  sterk worden vereenvoudigd. Er geldt dan bij benadering  $\kappa \approx D \cdot \sqrt{\beta/C_b}$  en  $u_0 \approx \sqrt{(g \cdot i \cdot D/C_b)} \approx u_* \cdot \sqrt{(D/(C_b \cdot h))}$ . Dit ingevuld in vergelijking (9) levert:

$$u_s \approx \frac{1}{2 \cdot \sqrt{C_b}} \cdot \left( \sqrt{\frac{D}{h}} + \sqrt{\frac{D}{h} + 4 \cdot \sqrt{\frac{C_b}{\beta}}} \right) \cdot u_* \quad (10)$$

In veel gevallen is de invloed van de factor  $(D/h)$  ook te verwaarlozen. Als vuistregel voor een eerste schatting voor  $u_s$  resteert dan tot slot:

$$u_s \approx \left( \frac{1}{\beta \cdot C_b} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot u_* \quad (11)$$

Wanneer in deze vergelijking de gemiddelde waarden  $\beta = 0.05$  en  $C_b = 3$  worden ingevuld vindt men als resultaat  $u_s/u_* \approx 1.6$ . Deze waarde wijkt flink af van de schatting van Hoffmans ( $u_s \approx 5 \cdot u_*$ , voor glazen bollen). Deze afwijking kan verband houden met een verschil tussen de materiaaleigenschappen van uniforme glazen bollen en gewone granulaire materialen, afwijkende waarden voor de modelconstanten  $\beta$  en  $C_b$ , een fout in de modellering van stroming en schuifspanning in het poreus medium of een combinatie van al deze invloeden tesamen. Dit is op voorhand nog niet duidelijk. In Appendix A zal wat dieper op deze problematiek worden ingegaan.

Zoals gesteld is de oplossing van Ikeya afgeleid na linearisering van de exacte vergelijking (5). Er zal worden nagegaan in hoeverre zijn benadering afwijkt van de exacte oplossing van vergelijking (5). Daartoe zal het voorbeeld met de gegevens in vergelijking (12) worden onderzocht:

*Gegevens voorbeeld:*  $h = 2.0$  ,  $i = 0.01$  ,  $D = 0.25$

$$C_a = 600 \text{ , } C_b = 3 \text{ , } \beta = 0.05 \quad (12)$$

$$\rho = 10^3 \text{ , } \nu = 10^{-6} \text{ , } g = 9.81$$

Voor deze gegevens volgt met de formule  $u_*^2 = g \cdot h \cdot i$  en de vergelijkingen (7) t/m (9):

$$\textit{Uitwerking voorbeeld: } u_* = 0.443 \text{ , } u_0 = 0.090 \quad (13)$$

$$\kappa = 0.0323 \text{ , } u_s = 0.758$$

Daarnaast volgt via de randvoorwaarde in vergelijking (9) ook:

$$\textit{voor } z = 0 : \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*^2}{\nu + \beta \cdot D \cdot u_s} = 20.705 \quad (14)$$

De invloed van Ikeya's linearisering kan nu worden nagegaan door de exacte vergelijking (5) numeriek te integreren voor  $z < 0$  met als randvoorwaarden  $u = u_s = 0.758$  en  $\partial u / \partial z = 20.705$  voor  $z = 0$ . Voor de gegevens in (12) luidt vergelijking (5) als volgt :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1266.357 \cdot u^2 + 1.013 \cdot u - 10.352 \quad (15)$$

De numerieke integratie is uitgevoerd met toepassing van onderstaand algemeen schema (methode volgens Heun voor 2<sup>e</sup> orde differentiaalvergelijkingen):

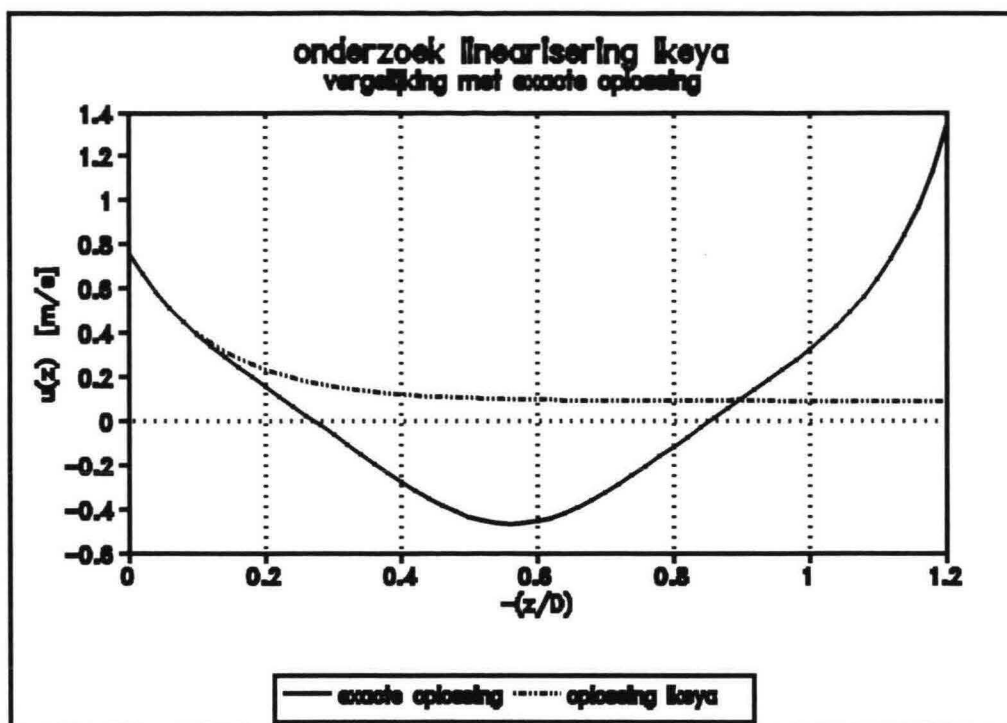
---

Gegeven het verband  $u^{(2)} = f(z, u, u^{(1)})$  (met notatie  $u^{(n)} = n^e$  afgeleide van  $u$  naar  $z$ ) volgt het punt  $(z_1, u_1, u^{(1)}_1)$  voor  $z_1 = (z_0 + dz)$  als volgt uit het punt  $(z_0, u_0, u^{(1)}_0)$ :

1. bereken predictor 1<sup>e</sup> afgeleide :  $u^{(1)}_{1p} = u^{(1)}_0 + dz * f(z_0, u_0, u^{(1)}_0)$  ;
  2. bereken predictor functiewaarde:  $u_{1p} = u_0 + dz * u^{(1)}_0$  ;
  3. bereken corrector 1<sup>e</sup> afgeleide:  
 $u^{(1)}_{1c} = u^{(1)}_0 + (dz/2) * (f(z_0, u_0, u^{(1)}_0) + f(z_1, u_{1p}, u^{(1)}_{1p}))$  ;
  4. bereken corrector functiewaarde:  $u_{1c} = u_0 + (dz/2) * (u^{(1)}_0 + u^{(1)}_{1c})$  ;
  5.  $u_1 := u_{1c}$  ,  $u^{(1)}_1 := u^{(1)}_{1c}$  , herhaal procedure weer vanaf stap 1., enz.
-



Het via numerieke integratie van deze vergelijking (15) berekende exacte snelheidsverloop in de filterlaag is weergegeven in figuur 1.



Figuur 1: Onderzoek linearisering Ikeya

Uit deze figuur blijkt duidelijk dat Ikeya's gelineariseerde benadering enkel in het gebied  $-0.15 < (z/D) < 0$  de exacte oplossing redelijk benadert. De benadering wijkt te sterk af van de exacte oplossing om in praktische zin bruikbaar te kunnen heten. Dat de linearisering zo een grote invloed heeft, had men overigens ook op voorhand kunnen bedenken. Met een watersnelheid  $u_0 = 0.09 < u(z) < 0.758 = u_s$  is de kwadratische term  $1266.957 \cdot u^2$  in vergelijking (15) tussen de 110 tot 950 maal groter dan de lineaire term  $1.013 \cdot u$ . In dit voorbeeld overheerst de kwadratische term het gedrag van de differentiaalvergelijking. Linearisering van deze kwadratische term beïnvloedt hier in directe zin het gedrag van de oplossing.

Ikeya's uitkomst voor een exponentieel dalende snelheid in de filterlaag is niet alleen gebaseerd op zijn analytische oplossing. Een dergelijk verloop voor dit snelheidsprofiel is ook bij enkele proeven geconstateerd. Ikeya sluit hier met zijn gelineariseerde variant aardig bij aan. Uit bovenstaande figuur mag echter duidelijk blijken dat Ikeya's oplossing slechts een rekentrucje is. De onderliggende exacte vergelijking vertoont een heel ander gedrag dan Ikeya's oplossing.

Het gedrag van de exacte oplossing is daarbij fysisch gesproken zeer merkwaardig. Volgens de exacte oplossing in figuur 1 zou de watersnelheid tussen  $(z/D) = 0$  en  $(z/D) = -0.27$  snel dalen van  $u = 0.758$  tot  $u = 0$ , vervolgens zou tussen  $(z/D) = -0.27$  en  $(z/D) = -0.84$  de stroming in de filterlaag tegen de stroming in de waterloop in gaan stromen (het water stroomt hier dus 'berg op'), waarna voor  $(z/D) < -1.2$  de stroming weer van richting is omgekeerd en de snelheid in rap tempo naar plus oneindig gaat

naderen. Dit alles geschiedt nog ruim binnen de gangbare laagdikten van 2 a 2.5 maal de  $D_{50}$  van de filterlaag.

De numerieke integratie is met verschillende stapgrootten uitgevoerd om na te gaan of dit de stabiliteit van deze uitkomsten veel beïnvloedde. Mits de stapgrootte maar niet al te groot werd gekozen bleven de uitkomsten stabiel.

Variaties in de gebruikte beginvoorwaarden  $u = u_s = 0.758$  en  $\partial u / \partial z = 20.705$  voor  $z = 0$  hebben slechts invloed op de ligging van het minimum (het punt  $u_{\min} = -0.46$  voor  $(z/D) = -0.56$  in figuur 1). Het karakter van de oplossing verandert echter niet: altijd daalt de snelheid eerst tot een minimum voor  $(z/D) \approx -0.4$  a  $-0.8$ , waarna de snelheid voor  $(z/D) < -1.0$  a  $-1.8$  naar plus oneindig gaat naderen. Hiermee moge duidelijk zijn aangetoond dat dus niet alleen Ikeya's lineariserings-truc maar tevens de vorm van zijn onderliggende exacte vergelijking discutabel is. Als de exacte oplossing voor het onderliggend model al fysisch gesproken onmogelijke resultaten oplevert, hoe zal een benaderende oplossing dan nog iets realistisch opleveren? Met het oog op figuur 1 moeten de formuleringen die Ikeya voor de opbouw van zijn onderliggend model heeft aangenomen in twijfel worden getrokken. In het volgend hoofdstuk zal hier dieper op worden ingegaan.

#### *Commentaar bij het rekenvoorbeeld in dit hoofdstuk*

Het voor het rekenvoorbeeld gekozen verhang  $i = 0.01$  moet voor een waterloop met uniforme stroomcondities als extreem groot worden aangemerkt. De bijbehorende dieptegemiddelde snelheid bedraagt ongeveer  $U = 3.8$  m/s. Dergelijke snelheden zullen in de praktijk slechts voorkomen bij stroming boven drempels of onder stuwen o.i.d. (waar doorgaans geen uniforme stroomcondities gelden).

De gekozen waarde  $i = 0.01$  was gebaseerd op een rekenvoorbeeld op de pagina's 165 t/m 171 in CUR-rapport 161 [3], waar een bodemverdediging direct achter een spuisluis wordt doorgerekend. Het niet-uniforme karakter van het stroombeeld wordt hier verdisconteerd met behulp van een veiligheidsfactor, welke volgt uit een beschouwing van de zgn. *actieve* gradient  $i_{\text{act}}$ :

$$i_{\text{act}} = i_{\text{uniform}} + i_{\text{niet-uniform}} = U^2 / (R \cdot C^2) + (U/g) * (\partial U / \partial x)$$

Hierin is 'U' de dieptegemiddelde snelheid, 'R' de hydraulische straal, 'C' de Chezy-coëfficiënt, 'g' de valversnelling en ' $\partial U / \partial x$ ' de gradient van de dieptegemiddelde snelheid in stromingsrichting. De toepasbaarheid van deze vertaalslag voor het omrekenen van niet-uniforme stromingssituaties naar uniforme stromingssituaties is echter nog onderwerp van veel discussies.

Met het oog op deze realiteit was het achteraf gezien wellicht beter geweest als rekenvoorbeeld een wel uniforme stromingssituatie met een kleiner verhang te beschouwen. Voor de *kwalitatieve* uitkomsten van al de berekeningen in deze studie maakt het echter geen verschil of men nu met een verhang  $i = 0.01$  of een kleinere waarde rekent. Daarom is er vanaf gezien alle berekeningen achteraf opnieuw uit te voeren met een kleinere waarde voor het verhang.

### 3. Nadere bestudering poreus medium vergelijking

Vergelijking (1) is al langere tijd onderwerp van veel studie ([4] t/m [13]). In Japan (en eerder al in Amerika) zijn enkele proeven uitgevoerd waaruit blijkt dat de gemiddelde watersnelheid in een filterlaag min of meer exponentieel daalt tot een min of meer constante waarde en verder dieper in de laag constant blijft. Een karakteristieke lengteschaal voor deze exponentiële demping is hierbij 0.1 tot 0.5 maal de  $D_{50}$  van het filtermateriaal. Ikeya werkt hiernaar toe met zijn linearisatie-truc. Zoals in het vorig hoofdstuk bleek is zijn onderliggende model echter wezenlijk foutief.

Shimizu, Tsujimoto en Nakagawa pakken het probleem in hun publicatie [8] anders aan. Zij gaan uit van precies dezelfde vergelijkingen (1) t/m (3) als Ikeya; in vergelijking (3) veronderstellen zij echter een turbulente viscositeit volgens dezelfde modellering als Ikeya maar nu evenredig met de *locale* snelheid:

$$\text{Shimizu [et al]} : \tau_{xz} = \rho \cdot (v + \beta \cdot D \cdot u) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (16)$$

Deze uitdrukking wordt in publicatie [8] naar  $z$  gedifferentieerd en samen met vergelijking (2) voor de weerstandskracht in vergelijking (1) ingevuld. Deze procedure levert de volgende differentiaalvergelijking:

$$(v + \beta \cdot D \cdot u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \cdot D \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{C_a \cdot v}{D^2} \right) \cdot u - \left( \frac{C_b}{D} \right) \cdot u^2 = -g \cdot i \quad (17)$$

Vervolgens stellen Shimizu, Tsujimoto en Nakagawa dat de invloed van de viscositeit van het water verwaarloosd mag worden - hun onderzoek betreft de stroming boven in een toplaag waar dit in het algemeen inderdaad het geval is. Met deze veronderstelling reduceert vergelijking (17) tot vergelijking (18):

$$\beta \cdot D \cdot u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \cdot D \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{C_b}{D} \right) \cdot u^2 = -g \cdot i \quad (18)$$

Als oplossing voor dit geval wordt in publicatie (8) een gelijksoortige formulering als bij Ikeya beschreven. Men komt met behulp van randvoorwaarden  $u(z) = u_s$  voor  $z = 0$  en  $\partial u(z)/\partial z = 0$  voor  $z \rightarrow -\infty$  uit bij de volgende uitdrukking voor het snelheidsverloop in de filterlaag:

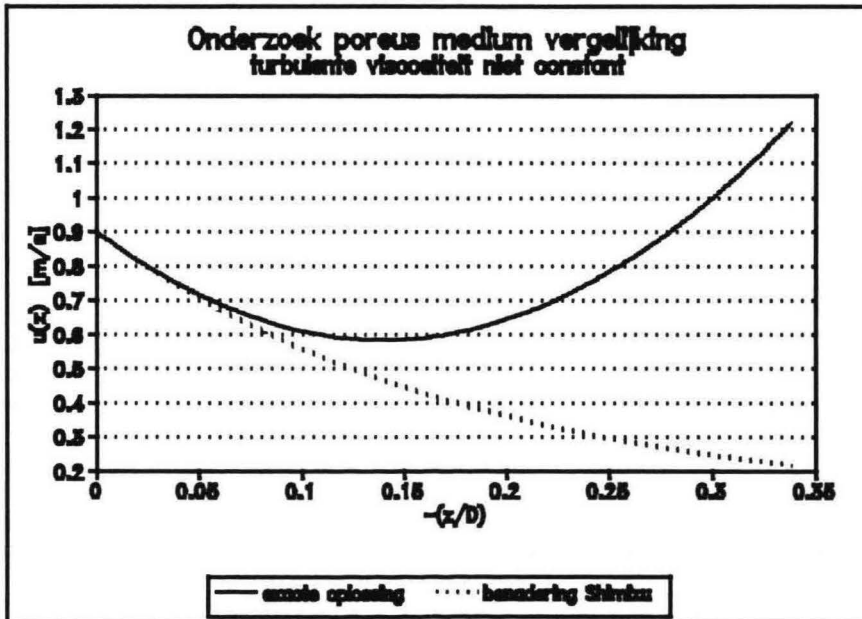
$$u(z) = u_0 + (u_s - u_0) \cdot \exp(z/\kappa) \quad \text{voor } z < 0 \quad (19)$$

De snelheid  $u_0$  en de karakteristieke lengte  $\kappa$  voor de demping van de turbulentie in de filterlaag zijn volgens publicatie [8] in deze formulering gelijk aan:

$$\text{Shimizu [et.al.]:} \quad u_0 = \sqrt{\frac{g \cdot i \cdot D}{C_b}} \quad \text{en} \quad \kappa = D \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \beta}{C_b}} \quad (20)$$

Deze resultaten lijken veel op die van Ikeya. Bij verwaarlozing van de viscositeit van het water volgt voor  $u_0$  via vergelijking (7) voor Ikeya's model precies dezelfde uitdrukking, terwijl via vergelijking (8) afgezien van een factor  $\sqrt{2}$  voor  $\kappa$  dezelfde uitdrukking volgt als in bovenstaande vergelijking (20) is vermeld. Verder laten Shimizu, Tsujimoto en Nakagawa net als Ikeya de grootte van de snelheid  $u_s$  ook buiten beschouwing.

De in publicatie [8] beschreven oplossing voor vergelijking (18) is echter wiskundig gesproken fundamenteel onjuist. Deze oplossing is uitgedrukt in de vorm van de som van een partiele en een particuliere oplossing voor vergelijking (18), waarbij de partiele oplossing simpelweg is bepaald door als oplossing  $u(z) = \text{constante} \cdot \exp(z/\kappa)$  [m/s] te stellen en vervolgens  $\kappa$  te bepalen via het invullen van deze oplossing in de gereduceerde vergelijking. Deze procedure mag echter uitsluitend worden toegepast bij het oplossen van *lineaire* differentiaalvergelijkingen. De differentiaalvergelijking in (18) bevat echter kwadraten van de eerste afgeleide en de functiewaarde naast een product van functiewaarde en tweede afgeleide en mag dus geenszins als een lineaire differentiaalvergelijking worden opgevat. In figuur 2 zijn de exacte oplossing van vergelijking (18) (weer numeriek geïntegreerd volgens schema Heun onderaan pagina 9) en de oplossing volgens Shimizu [et al] voor de gegevens uit het voorbeeld in (12) weergegeven (beide oplossingen beginnen in het punt  $z = 0$  met dezelfde snelheid en snelheidsgradient):



Figuur 2: Exacte oplossing en oplossing Shimizu [et al]

Het verschil tussen beide oplossingen in figuur 2 moge de lezer overtuigen van de onjuistheid van de wiskundige oplossing zoals die in publicatie [8] is beschreven. De exacte oplossing gedraagt zich fysisch gesproken ook vreemd: dit is het gevolg van de volgens Shimizu's foutieve wiskundige oplossing te klein berekende snelheidsgradient ter plaatse van het punt  $z = 0$ . Vergelijking (18) kan in wiskundig opzicht echter wel degelijk op juiste wijze worden opgelost. Daartoe moet deze vergelijking echter wel eerst in een lineaire differentiaalvergelijking worden omgeschreven.

Beschouw weer de uitdrukking voor de schuifspanning in vergelijking (16). Bij verwaarlozing van de viscositeit is deze uitdrukking te schrijven als:

$$\tau_{xz} = \rho \cdot \beta \cdot D \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\rho \cdot \beta \cdot D}{2} \cdot \frac{\partial (u^2)}{\partial z} \quad (21)$$

Combinatie van dit resultaat met de vergelijkingen (1) en (2) levert (bij verwaarlozing van de viscositeit van het water):

$$\frac{\beta \cdot D}{2} \cdot \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial z^2} - \left( \frac{C_b}{D} \right) \cdot (u^2) = -g \cdot i \quad (22)$$

De differentiaalvergelijking is daarmee omgeschreven naar een lineaire 2<sup>e</sup> orde differentiaalvergelijking die het verloop voor het kwadraat van de snelheid  $u^2(z)$  beschrijft. De algemene vorm voor de exacte oplossing voor deze differentiaalvergelijking luidt:

$$u^2(z) = u_0^2 + I_1 \cdot \exp(z/\kappa) + I_2 \cdot \exp(-z/\kappa) \quad \text{voor } z < 0 \quad (23)$$

De hiermee corresponderende schuifspanning volgt via combinatie van (21) en (23):

$$\tau_{xz}(z) = \frac{\rho \cdot \beta \cdot D}{2 \cdot \kappa} \cdot (I_1 \cdot \exp(z/\kappa) - I_2 \cdot \exp(-z/\kappa)) \quad \text{voor } z < 0 \quad (24)$$

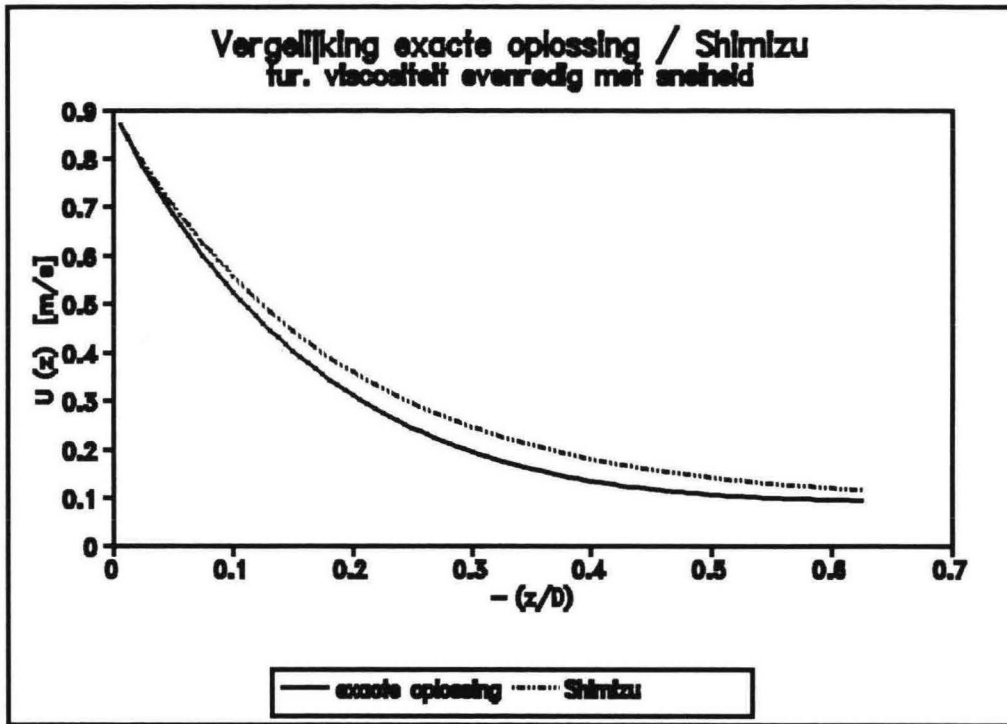
De integratieconstanten  $I_1$  en  $I_2$  moeten hierin nog worden berekend uit een tweetal randvoorwaarden. Voor de randvoorwaarden  $u(z) = u_s$  voor  $z = 0$  en  $\partial u(z)/\partial z = 0$  voor  $z \rightarrow -\infty$  van Ikeya en Shimizu [et al] volgt:

$$u(z) = \left( u_0^2 + (u_s^2 - u_0^2) \cdot \exp(z/\kappa) \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad \tau_{xz}(z) = \frac{\rho \cdot \beta \cdot D \cdot (u_s^2 - u_0^2)}{2 \cdot \kappa} \cdot \exp(z/\kappa)$$

De parameters  $u_0^2$  en  $\kappa$  in de vergelijkingen (23) t/m (25) zijn verder gelijk aan:

Hauer: 
$$u_0^2 = \frac{g \cdot i \cdot D}{C_b} \quad \text{en} \quad \kappa = D \cdot \sqrt{\frac{\beta}{2 \cdot C_b}} \quad (26)$$

Deze uitdrukkingen zijn qua opbouw ervan weer vergelijkbaar met de uitdrukkingen van Ikeya en Shimizu [et al] voor hun parameters  $u_0$  en  $\kappa$ . De watersnelheid in vergelijking (25) daalt nu echter niet meer via een zuivere e-macht maar via de wortel uit die zuivere e-macht. In figuur 3 zijn zowel de correcte oplossing volgens vergelijking (25) als Shimizu's foutieve oplossing voor het voorbeeldgeval van figuur 2 getekend:



Figuur 3: Vergelijking correcte, exacte oplossing en foutieve oplossing Shimizu

Zoals deze figuur laat zien is de snelheidsgradient op het punt  $z = 0$  voor de correcte oplossing iets groter dan bij Shimizu. Bij numerieke integratie met randvoorwaarden die in overeenstemming zijn met deze correcte oplossing wordt wel precies dezelfde curve als de curve van de correcte oplossing teruggevonden - dit is gecontroleerd door de auteur van deze studie. De oplossing in vergelijking (25) is bij verwaarloosbaarheid van visceuse invloeden precies de exacte oplossing voor het probleem met de randvoorwaarden  $u(z) = u_s$  voor  $z = 0$  en  $\partial u(z)/\partial z = 0$  voor  $z \rightarrow -\infty$ . Het is aardig hierbij op te merken dat de steilere bocht in de correcte curve ook zeer goed overeenstemt met de in publicatie [8] weergegeven resultaten van proeven.

Wanneer de visceuse invloeden van het water niet verwaarloosbaar zijn is oplossing (23) niet langer geldig. In dat geval zal men van de algemene vergelijkingen (16) en (17) uit moeten gaan. Beschouw opnieuw deze twee vergelijkingen. Wanneer ditmaal de visceuse invloeden overheersen (dus bij verwaarloosbare turbulente viscositeit) kunnen deze vergelijkingen worden gereduceerd tot onderstaand stelsel:

$$\tau_{xz}(z) = \rho \cdot \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (27)$$

$$\nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left( \frac{C_a \cdot \nu}{D^2} \right) \cdot u = -g \cdot i \quad (28)$$

Vergelijking (28) is weer een lineaire differentiaalvergelijking, die direct kan worden opgelost. De algemene oplossing voor het geval waar de visceuse invloeden overheersen luidt:

$$u(z) = u_0 + I_1 \cdot \exp(z/\kappa) + I_2 \cdot \exp(-z/\kappa) \quad \text{voor } z < 0 \quad (29)$$

$$\tau_{xz}(z) = \frac{\rho \cdot \nu}{\kappa} \cdot ( I_1 \cdot \exp(z/\kappa) - I_2 \cdot \exp(-z/\kappa) ) \quad \text{voor } z < 0 \quad (30)$$

Hierin zijn de parameters  $u_0$  en  $\kappa$  ditmaal gelijk aan:

$$u_0 = \frac{g \cdot i \cdot D^2}{\nu \cdot C_a} \quad \text{en} \quad \kappa = D \cdot \sqrt{\frac{1}{C_a}} \quad (31)$$

Met deze oplossing zijn er nu dus twee wiskundig exact juiste oplossingen beschikbaar voor twee uitersten: oplossing (23) voor het geval waar visceuse invloeden verwaarloosbaar zijn en bovenstaande oplossing (29) voor het tegenovergestelde geval waar de visceuse invloeden juist overheersen.

Om te komen tot een benaderende oplossing voor het geval waar zowel de visceuse als turbulente invloeden een niet verwaarloosbare rol spelen kunnen er nu twee wegen bewandeld worden. Men kan de algemene vergelijkingen (16) en (17) modifieren in de richting van een oplossing van de 'turbulente' vorm (23) of in de richting van een oplossing van de 'visceuse' vorm (29). Beide benaderingen zullen hier achtereenvolgens worden uitgewerkt.

## 1. De 'turbulente' oplossing

Wanneer de visceuse invloeden niet geheel verwaarloosbaar zijn, kan dit via de algemene vergelijkingen (16) en (17) als volgt in de vergelijkingen (21) en (22) tot uitdrukking worden gebracht:

$$\tau_t(z) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left( \frac{v}{u_p} + \beta \cdot D \right) \cdot \frac{\partial (u_t^2)}{\partial z} \quad (32)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{v}{u_p} + \beta \cdot D \right) \cdot \frac{\partial^2 (u_t^2)}{\partial z^2} - \left( \frac{v \cdot C_a}{u_p \cdot D^2} + \frac{C_b}{D} \right) \cdot (u_t^2) = -g \cdot i \quad (33)$$

De parameter  $u_p$  heeft hierin de betekenis van een gemiddelde snelheid in het poreus medium (impliciet wordt het kwadraat  $u_t^2$  benaderd met  $u_p \cdot u_t$  - de index 't' verwijst naar 'turbulente' oplossing). De parameter  $u_p$  wordt binnen deze redenering als vooralsnog onbekende constante opgevat. Voor dat geval luidt de oplossing van de vergelijkingen (32) en (33):

$$u_t^2(z) = u_{0t}^2 + I_{1t} \cdot \exp(z/\kappa_t) + I_{2t} \cdot \exp(-z/\kappa_t) \quad (34)$$

$$\tau_t(z) = \frac{\rho}{2 \cdot \kappa_t} \cdot \left( \frac{v}{u_p} + \beta \cdot D \right) \cdot (I_{1t} \cdot \exp(z/\kappa_t) - I_{2t} \cdot \exp(-z/\kappa_t)) \quad (35)$$

waarbij de parameters  $u_{0t}^2$  en  $\kappa_t$  ditmaal als volgt kunnen worden geschreven:

$$u_{0t}^2 = \frac{g \cdot i \cdot D^2 \cdot u_p}{C_a \cdot v + C_b \cdot D \cdot u_p} \quad (36)$$

$$\kappa_t = D \cdot \sqrt{\frac{v + \beta \cdot D \cdot u_p}{2 \cdot (C_a \cdot v + C_b \cdot D \cdot u_p)}} \quad (37)$$

Met behulp van een 'goede' schatting voor de parameter  $u_p$  kan de exacte oplossing worden benaderd met deze formules. Het is echter nog een open vraag hoe die goede schatting voor  $u_p$  zou moeten luiden. Daarom wordt ook nog de andere, 'visceuse' benaderingsmogelijkheid onderzocht.



## 2. De 'visceuse' oplossing

Men kan op analoge wijze ook de vergelijkingen (27) en (28) voor de 'visceuse' oplossing modifieren om niet verwaarloosbare turbulente invloeden tot uitdrukking te kunnen brengen. Via de algemene vergelijkingen (16) en (17) levert dit:

$$\tau_v(z) = \rho \cdot (v + \beta \cdot D \cdot u_p) \cdot \frac{\partial (u_v)}{\partial z} \quad (38)$$

$$(v + \beta \cdot D \cdot u_p) \cdot \frac{\partial^2 u_v}{\partial z^2} - \left( \frac{v \cdot C_a}{D^2} + \frac{C_b \cdot u_p}{D} \right) \cdot u_v = -g \cdot i \quad (39)$$

De parameter  $u_p$  heeft hierin weer precies dezelfde betekenis (impliciet wordt het kwadraat  $u_v^2$  benaderd met  $u_p \cdot u_v$  - de index 'v' verwijst naar 'visceuse' oplossing). Bij een constante waarde voor  $u_p$  luidt de oplossing van het stelsel vergelijkingen (38) en (39):

$$u_v(z) = u_{0v} + I_{1v} \cdot \exp(z/\kappa_v) + I_{2v} \cdot \exp(-z/\kappa_v) \quad (40)$$

$$\tau_v(z) = \frac{\rho}{\kappa_v} \cdot (v + \beta \cdot D \cdot u_p) \cdot (I_{1v} \cdot \exp(z/\kappa_v) - I_{2v} \cdot \exp(-z/\kappa_v)) \quad (41)$$

waarbij de parameters  $u_{0v}$  en  $\kappa_v$  als volgt kunnen worden geschreven:

$$u_{0v} = \frac{g \cdot i \cdot D^2}{C_a \cdot v + C_b \cdot D \cdot u_p} \quad (42)$$

$$\kappa_v = D \cdot \sqrt{\frac{v + \beta \cdot D \cdot u_p}{(C_a \cdot v + C_b \cdot D \cdot u_p)}} \quad (43)$$

Deze uitdrukkingen vertonen overeenkomsten met de uitdrukkingen voor  $u_{0t}^2$  en  $\kappa_t$  voor de turbulente oplossing. Er geldt:  $\kappa_v/\kappa_t = \sqrt{2}$  en  $u_{0v} = u_{0t}^2/u_p$ .

Dit laatste gegeven kan worden benut om een formulering voor een goede schatting voor  $u_p$  op te stellen. Bij een goede keuze voor  $u_p$  moeten de twee verschillende oplossingen via de 'turbulente' en de 'visceuse' aanpak ongeveer hetzelfde resultaat opleveren. Enige studie op het verloop van beide oplossingen voor een aantal voorbeelden leverde de conclusie dat beide benaderende oplossingen voor het snelheidsprofiel redelijk in elkaars

buurt komen te liggen wanneer men als eis stelt dat zij (binnen de context van het geval van Ikeya en Shimizu [et al]) voor  $z \rightarrow -\infty$  naar dezelfde limietwaarde naderen, m.a.w. wanneer men als eis  $u_{0t} = u_{0v}$  stelt. Aangezien ook  $u_{0v} = u_{0t}^2/u_p$  geldt, komt deze eis neer op de eis  $u_p = u_{0t} = u_{0v}$ . Combinatie van dit gegeven met vergelijking (42) voor  $u_{0v}$  levert dan de volgende formulering voor een goede schatting voor  $u_p = u_{0t} = u_{0v}$ :

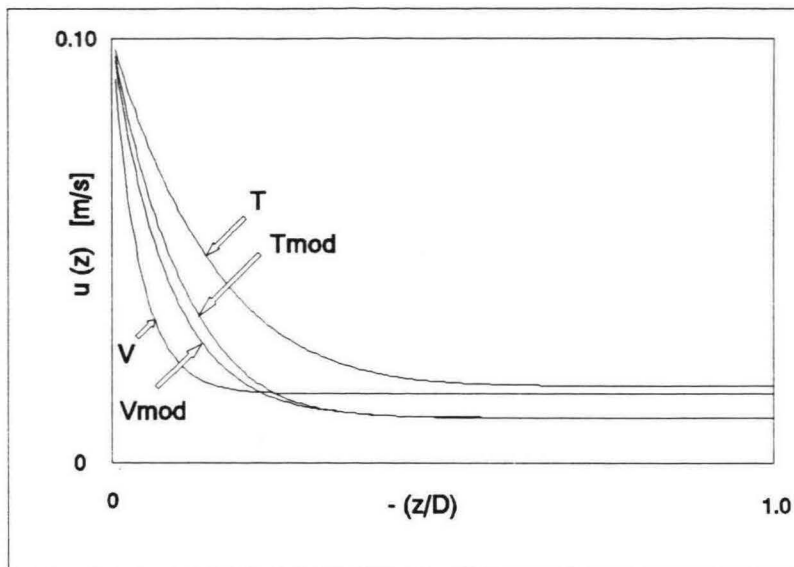
$$u_p = u_{0t} = u_{0v} = -\frac{C_a \cdot v}{2 \cdot C_b \cdot D} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{C_a \cdot v}{C_b \cdot D}\right)^2 + \frac{4 \cdot g \cdot i \cdot D}{C_b}} \quad (44)$$

Deze uitdrukking voor  $u_p = u_{0t} = u_{0v} = u_0$  is (na enig omschrijven) precies hetzelfde als Ikeya's uitdrukking (7) voor zijn parameter  $u_0$ . Deze uitdrukking voor  $u_0$  stemt precies overeen met de oplossing voor de watersnelheid  $u$  wanneer via de algemene vergelijkingen (1) en (2) de constante watersnelheid in de evenwichtssituatie bij  $\partial\tau_{xz}/\partial z = \partial u/\partial z = 0$  wordt uitgerekend.

Wanneer visceuse invloeden overheersen zal de oplossing  $u_v(z)$  voor de 'visceuse variant' van de gemodificeerde vergelijking exact naderen tot de oplossing  $u(z)$ , zoals die (bij volledige verwaarlozing van turbulente invloeden) via de vergelijkingen (29) en (31) kan worden berekend. De oplossing  $u_t(z)$  voor de 'turbulente variant' zal dan niet exact daaraan gelijk zijn maar daar toch dicht bij in de buurt komen. Hetzelfde geldt voor de omgekeerde situatie: wanneer turbulente invloeden overheersen zal de oplossing  $u_t(z)$  voor de turbulente variant van de gemodificeerde vergelijking exact naderen tot de oplossing  $u(z)$ , zoals die (bij volledige verwaarlozing van visceuse invloeden) via de vergelijkingen (23) en (26) kan worden berekend. De oplossing  $u_v(z)$  voor de 'visceuse variant' zal dan weer niet exact daaraan gelijk zijn maar ook daar weer dicht bij in de buurt liggen. Dit gedrag van de verschillende oplossingen is met de computer onderzocht.

In figuur 4 zijn de vier oplossingen getekend voor een situatie waarin de visceuse en turbulente invloeden niet ten opzichte van elkaar verwaarloosd mogen worden. De gegevens voor deze snelheidsprofielen zijn weer gelijk aan de gegevens van het voorbeeld in (12), met uitzondering van de grootte van de kenmerkende korreldiameter die nu  $D = 0.01$  m. (men kan denken aan bijv. een grindlaag) bedraagt. Verder is als uitgangspunt  $u_s = 0.10$  m/s op het grensvlak aangenomen.

De index 'T' verwijst naar de turbulente oplossing (volledige verwaarlozing visceuse invloeden), de index 'Tmod' naar de turbulente variant van de gemodificeerde oplossing, de index 'V' naar de visceuse oplossing (volledige verwaarlozing turbulente invloeden) en de index 'Vmod' naar de visceuse variant van de gemodificeerde oplossing.



*Figuur 4: Benaderende snelheidsprofielen voor  $D = 0.01$  m.*

De beide varianten 'Tmod' en 'Vmod' voor de gemodificeerde oplossing naderen tot een kleinere constante snelheid dieper in de laag ( $(z/D) = -1$ ) dan de oplossingen 'T' en 'V': dit stemt overeen met de realiteit (wanneer zowel turbulente als visceuse demping worden meegerekend wordt de snelheid uiteraard meer gedempt dan wanneer één van beide dempingsinvloeden wordt verwaarloosd). Verder komt in figuur 4 duidelijk naar voren dat zowel de turbulente als visceuse variant voor de gemodificeerde oplossing elk ertoe neigen aan de kant van hun 'afstamming' te blijven. Hieruit kan men concluderen dat men bij overwegend turbulente invloeden het beste de turbulente modificatie-variant en bij overwegend visceuse invloeden het beste de visceuse modificatie-variant kan toepassen. Bij ongeveer even grote visceuse als turbulente invloeden (zoals voor het geval in figuur 4) kan men beide varianten toepassen.

#### 4. Theoretische beschrijving van een rekenmodel voor een twee lagen systeem

Nadat in het vorig hoofdstuk formuleringen voor een verbeterde algemene oplossing voor het verloop van de poriesnelheden en schuifspanningen in een poreus medium zijn opgesteld, kunnen deze formuleringen worden gebruikt om het verloop van poriesnelheden en schuifspanningen in een meer lagen systeem te beschouwen. Hierbij zal in eerste instantie een twee lagen systeem beschouwd worden (een toplaag van eindige dikte op een oneindig dikke filterlaag). Op grond van het karakter van de oplossingen voor dit twee lagen systeem kunnen daarna ook conclusies worden getrokken ten aanzien van systemen die uit meer dan twee lagen bestaan.

Het rekenmodel voor het twee lagen systeem zal worden gebaseerd op de 'turbulente' modificatie variant (oplossingen (34) en (35)) voor de twee oplossingen van de systeemvergelijkingen van zowel de toplaag als de filterlaag. In de toplaag zal de stroming weliswaar overwegend turbulent zijn, maar in de filterlaag kunnen ook visceuse invloeden meespelen. De eventuele rol van visceuse invloeden is in het rekenmodel meegenomen door uit te gaan van de gemodificeerde turbulente oplossingen. De twee algemene oplossingen voor de twee verschillende lagen zullen worden gekoppeld door passende randvoorwaarden ter plaatse van het grensvlak.

Beschouw de algemene oplossingen voor de twee systeemvergelijkingen:

$$u_t^2(z) = u_{0t}^2 + I_{1t} \cdot \exp(z/\kappa_t) + I_{2t} \cdot \exp(-z/\kappa_t) \quad \text{voor } -d_t \leq z \leq 0$$

$$u_f^2(z) = u_{0f}^2 + I_{1f} \cdot \exp((z+d_t)/\kappa_f) + I_{2f} \cdot \exp(-(z+d_t)/\kappa_f) \quad \text{voor } z \leq -d_t$$

$$\tau_t(z) = \frac{\rho}{2 \cdot \kappa_t} \cdot \left( \frac{v}{u_{pt}} + \beta \cdot D_t \right) \cdot (I_{1t} \cdot \exp(z/\kappa_t) - I_{2t} \cdot \exp(-z/\kappa_t)) \quad \text{voor } -d_t \leq z \leq 0$$

$$\tau_f(z) = \frac{\rho}{2 \cdot \kappa_f} \cdot \left( \frac{v}{u_{pf}} + \beta \cdot D_f \right) \cdot (I_{1f} \cdot \exp((z+d_t)/\kappa_f) - I_{2f} \cdot \exp(-(z+d_t)/\kappa_f)) \quad \text{voor } z \leq -d_t$$

Met het oog op het verkrijgen van overzichtelijke uitdrukkingen voor de randvoorwaarden ter plaatse van het grensvlak tussen toplaag en filterlaag (voor  $z = -d_t$  met  $d_t =$  dikte toplaag) zijn hierin de snelheid en schuifspanning in de filterlaag voor  $z < -d_t$  in algemene zin beschreven via e-machten van de vorm  $\exp(\pm(z+d_t)/\kappa_f)$  in plaats van  $\exp(\pm(z)/\kappa_f)$ . Dit maakt wiskundig gesproken geen verschil voor de geldigheid van de oplossing. De parameters met index 't' betreffen de toplaag en de parameters met index 'f' betreffen de filterlaag. Volgens de vergelijkingen (36), (37) en (44) kunnen de parameters  $u_{pt}$ ,  $u_{0t}^2$ ,  $\kappa_t$ ,  $u_{pf}$ ,  $u_{0f}^2$ ,  $\kappa_f$  volgens de volgende uitdrukkingen worden berekend:

$$u_{pt} = -\frac{C_a \cdot v}{2 \cdot C_b \cdot D_t} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{C_a \cdot v}{C_b \cdot D_t}\right)^2 + \frac{4 \cdot g \cdot i \cdot D_t}{C_b}} \quad (49)$$

$$u_{pf} = -\frac{C_a \cdot v}{2 \cdot C_b \cdot D_f} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{C_a \cdot v}{C_b \cdot D_f}\right)^2 + \frac{4 \cdot g \cdot i \cdot D_f}{C_b}} \quad (50)$$

$$\kappa_t = D_t \cdot \sqrt{\frac{v + \beta \cdot D_t \cdot u_{pt}}{2 \cdot (C_a \cdot v + C_b \cdot D_t \cdot u_{pt})}} \quad (51)$$

$$\kappa_f = D_f \cdot \sqrt{\frac{v + \beta \cdot D_f \cdot u_{pf}}{2 \cdot (C_a \cdot v + C_b \cdot D_f \cdot u_{pf})}} \quad (52)$$

$$\text{verder geldt: } u_{0t}^2 = u_{pt}^2 \quad \text{en} \quad u_{0f}^2 = u_{pf}^2 \quad (53)$$

De integratie constanten  $I_{1t}$ ,  $I_{2t}$ ,  $I_{1f}$  en  $I_{2f}$  zullen uit de randvoorwaarden moeten volgen. Deze randvoorwaarden kunnen worden gebaseerd op eisen ten aanzien van de continuïteit van watersnelheid en schuifspanning ter plaatse van de grensvlakken. Beschouwd wordt een filterconstructie die is aangebracht op de bodem van een rivier met een uniforme, stationaire stroming. Voor  $z = 0$  moet dan gelden:

$$u^2(0) = u_{0t}^2 + I_{1t} + I_{2t} = u_s^2 \quad (a)$$

$$\tau(0) = \frac{\rho}{2 \cdot \kappa_t} \cdot \left( \frac{v}{u_{pt}} + \beta \cdot D_t \right) \cdot (I_{1t} - I_{2t}) = \tau_0 = \rho \cdot g \cdot h \cdot i \quad (b)$$

Hierin is de snelheid  $u_s$  vooralsnog onbekend. De grootte van deze snelheid zal moeten volgen uit de oplossing van de randvoorwaarden. Voor de oneindig dikke filterlaag moet ten aanzien van de snelheid in de filterlaag gelden:  $\partial u / \partial z = 0$  voor  $z \rightarrow -\infty$ . Wanneer de integratieconstante  $I_{2t}$  ongelijk is aan nul kan dit nooit het geval zijn. Daarom moet gelden  $I_{2t} = 0$ . Ter plaatse van het andere grensvlak voor  $z = -d_t$  moet dan nog gelden:

$$u^2(-d_r) = u_{0r}^2 + I_{1r} \cdot e^{-\frac{d_r}{\kappa_r}} + I_{2r} \cdot e^{\frac{d_r}{\kappa_r}} = u_{0f}^2 + I_{1f} = u_g^2 \quad (c)$$

$$\tau(-d_r) = \frac{\rho}{2 \cdot \kappa_r} \cdot \left( \frac{v}{u_{pr}} + \beta \cdot D_r \right) \cdot \left( I_{1r} \cdot e^{-\frac{d_r}{\kappa_r}} - I_{2r} \cdot e^{\frac{d_r}{\kappa_r}} \right) = \frac{\rho}{2 \cdot \kappa_f} \cdot \left( \frac{v}{u_{pf}} + \beta \cdot D_f \right) \cdot I_{1f} \quad (d)$$

De vergelijkingen (a) en (c) kunnen dienen om de grootte van de vooralsnog onbekende snelheden  $u_s$  en  $u_g$  ter plaatse van de grensvlakken te berekenen wanneer de oplossing voor de integratieconstanten  $I_{1r}$ ,  $I_{2r}$  en  $I_{1f}$  eenmaal bekend is. De oplossing voor deze drie integratieconstanten kan worden bepaald door het stelsel vergelijkingen (b) t/m (d) op te lossen. Terwille van de overzichtelijkheid wordt dit stelsel hieronder nog eens vereenvoudigd weergegeven

$$c_2 \cdot I_{1r} - c_2 \cdot I_{2r} = c_1 \quad (b)$$

$$c_3 \cdot I_{1r} + c_4 \cdot I_{2r} - I_{1f} = -c_6 \quad (c)$$

$$c_2 \cdot c_3 \cdot I_{1r} - c_2 \cdot c_4 \cdot I_{2r} - c_5 \cdot I_{1f} = 0 \quad (d)$$

waarbij de constanten  $c_1$  t/m  $c_6$  corresponderen met de volgende uitdrukkingen:

$$c_1 = \rho \cdot g \cdot h \cdot i \quad c_2 = \frac{\rho}{2 \cdot \kappa_r} \cdot \left( \frac{v}{u_{0r}} + \beta \cdot D_r \right)$$

$$c_3 = e^{-\frac{d_r}{\kappa_r}} \quad c_4 = e^{+\frac{d_r}{\kappa_r}}$$

$$c_5 = \frac{\rho}{2 \cdot \kappa_f} \cdot \left( \frac{v}{u_{0f}} + \beta \cdot D_f \right) \quad c_6 = u_{0r}^2 - u_{0f}^2$$

Het stelsel vergelijkingen (b) t/m (d) is een eenvoudig lineair stelsel met als variabelen  $I_{1r}$ ,  $I_{2r}$  en  $I_{1f}$ . De oplossing ervan luidt:

$$I_{1t} = \frac{c_2 \cdot c_5 \cdot c_6 - c_1 \cdot c_4 \cdot (c_2 + c_5)}{c_2^2 \cdot (c_3 - c_4) - c_2 \cdot c_5 \cdot (c_3 + c_4)} \quad (64)$$

$$I_{2t} = I_{1t} - \frac{c_1}{c_2} \quad (65)$$

$$I_{1f} = (c_3 + c_4) \cdot I_{1t} + c_6 - \frac{c_1 \cdot c_4}{c_2} \quad (66)$$

Met deze oplossing voor de integratieconstanten  $I_{1t}$ ,  $I_{2t}$  en  $I_{1f}$  volgt na invullen hiervan in de algemene oplossingen op pagina 20 een oplossing voor het verloop van watersnelheid en schuifspanning in toplaag en filterlaag. Kenmerkende waarden voor dit verloop zijn de watersnelheid  $u_s$  aan de bovenkant van de toplaag en de watersnelheid  $u_g$  en schuifspanning  $\tau_g$  ter plaatse van het grensvlak van toplaag en filterlaag. Voor deze kentallen volgt:

$$u_s = \sqrt{u_{0t}^2 + I_{1t} + I_{2t}} \quad (67)$$

$$u_g = \sqrt{u_{0f}^2 + I_{1f}} \quad (68)$$

$$\tau_g = c_5 \cdot I_{1f} \quad (69)$$

Met een vaste input voor de waterstand  $h$ , het verhang  $i$ , de constanten  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $g$ ,  $\beta$ ,  $C_a$  en  $C_b$  en de kenmerkende diameters  $D_t = D_{50t}$  en  $D_f = D_{50f}$  van toplaag en filterlaag kunnen op basis van de formules die in dit hoofdstuk staan beschreven de integratie constanten  $I_{1t}$ ,  $I_{2t}$  en  $I_{1f}$  en de watersnelheden  $u_s$  en  $u_g$  en schuifspanning  $\tau_g$  rechtstreeks worden uitgerekend. Teneinde de invloeden van de diverse betrokken parameters snel te kunnen analyseren zijn de formules geprogrammeerd in het wiskunde programma MATHCAD. De resultaten van de met dit programma uitgevoerde analyses worden in het volgend hoofdstuk behandeld.

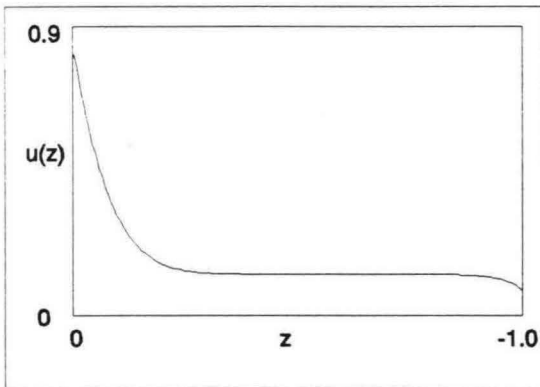
## 5. Resultaten van het rekenmodel voor een praktijksituatie

Alle analyses in dit hoofdstuk gaan uit van de volgende 'gemiddelde' input voor een situatie van een toplaag met een laagdikte  $d_t$  gelijk aan 2 maal de  $D_t$  van de toplaag ( $D_t = D_{50t}$  in deze studie) op een grindbodembodem:

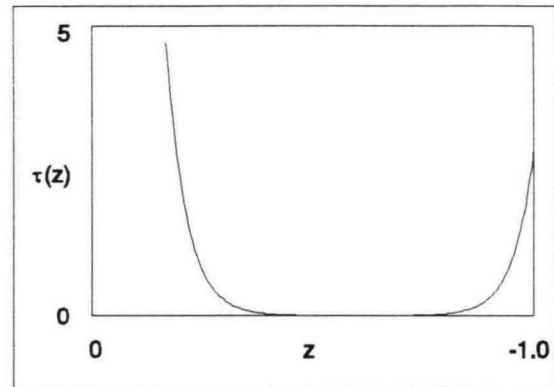
$g = 9.81$	$\beta = 0.05$	$D_t = 0.50$	$h = 2.0$
$\rho = 10^3$	$C_a = 600$	$D_f = 0.01$	$i = 0.01$
$\nu = 10^{-6}$	$C_b = 3$	$d_t = 1.0$	

Alleen waar expliciet vermeld kan sprake zijn van een van deze input afwijkende invoer.

Voor de gemiddelde input volgt  $\tau_0 = \rho \cdot g \cdot h \cdot i = 196.2 \text{ N/m}^2$  en met de formules uit het vorig hoofdstuk via vergelijking (69)  $\tau_g = 2.88 \text{ N/m}^2$ . Op basis van alleen deze twee getallen zou men kunnen menen dat de schuifspanning  $\tau_g$  ter plaatse van het grensvlak toplaag/filterlaag door de weerstand die de stroming in de toplaag ondervindt blijkbaar is gereduceerd tot ca. 1.5 % van de bodemschuifspanning  $\tau_0$ . Er is echter iets wezenlijk anders aan de hand. Dit wordt duidelijk wanneer het met de uitkomst  $\tau_g = 2.88 \text{ N/m}^2$  corresponderende watersnelheids- en schuifspanningsverloop in de toplaag wordt getekend:



Verloop watersnelheid bij  $d_t = 1.0 \text{ m}$ .



Verloop schuifspanning bij  $d_t = 1.0 \text{ m}$ .

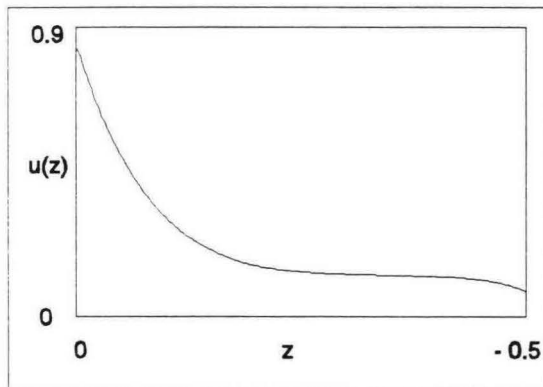
Uit deze figuren blijkt dat de watersnelheid in het bovenste deel van de toplaag over een afstand van ca. 0.25 m. ( $= 0.5 \cdot D_{50t}$ ) snel daalt van  $u_s = 0.855 \text{ m/s}$  tot de constante snelheid  $u_{ot} = 0.128 \text{ m/s}$ , vervolgens over een afstand van ca. 0.65 m. constant blijft (evenwichtssituatie), om tenslotte in de onderste ca. 0.10 m. van de toplaag weer te gaan dalen tot  $u_g = 0.076 \text{ m/s}$  op de grens met de filterlaag. In de filterlaag daalt de watersnelheid vervolgens over een afstand van ca. 0.005 m. ( $= 0.5 \cdot D_{50f}$ ) van  $u_g = 0.076 \text{ m/s}$  tot de constante snelheid  $u_{of} = 0.011 \text{ m/s}$  en blijft verder constant op grotere diepte (dit laatste volgt uit de berekeningen: het is in de figuur niet weergegeven). De voor  $z = 0$  aanwezige bodemschuifspanning  $\tau_0 = 196.2 \text{ N/m}^2$  dempt dus in een bovenste deel van ca.  $0.5 \cdot D_{50t}$  van de toplaag tot nul, waarna de schuifspanning in de



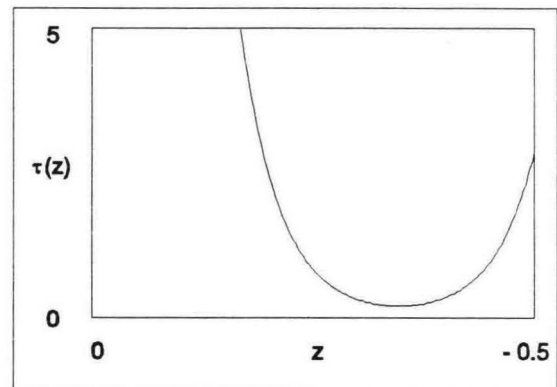
toplaag over 0.65 m. nul blijft. Er ontstaat pas weer een schuifspanning ongelijk aan nul in de onderste 0.1 m. van de toplaag. Deze schuifspanning heeft echter geen directe relatie meer met de bodemschuifspanning  $\tau_0$ . De waarde van de schuifspanning  $\tau_g = 2.88 \text{ N/m}^2$  ter plaatse van het grensvlak van toplaag en filterlaag wordt volledig bepaald door het gegeven dat onderin de toplaag de watersnelheid moet gaan dalen als een gevolg van de 'naderende' aanwezigheid van de veel minder doorlatende filterlaag.

Men mag overigens uit de uitkomst dat de schuifspanning over 0.65 m. gelijk aan nul wordt binnen de hier gehanteerde modellering niet afleiden dat er hier 'dus' geen kracht op de stenen in de toplaag wordt uitgeoefend. Deze kracht zit immers *impliciet* in bewegingsvergelijking (1) verwerkt. De grootte van deze kracht kan volgens de Forchheimer relatie (2) worden berekend door hier de constante snelheid  $u_{0t} = 0.128 \text{ m/s}$  in te vullen. Bij een constante snelheid is ook de op de stenen uitgeoefende kracht over de hoogte constant en diengevolge is de verandering in schuifspanning nul. De schuifspanning heeft hier dus een constante waarde, welke binnen de in deze studie gehanteerde formuleringen gelijk is aan nul. Men moet de hier berekende schuifspanningen beschouwen als maat voor de verandering in de op de stenen uitgeoefende kracht.

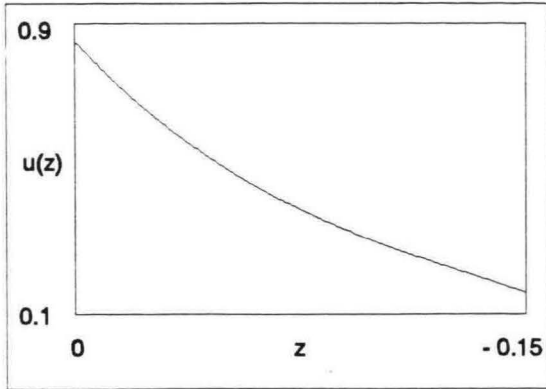
Om na te gaan wanneer de bodemschuifspanning  $\tau_0$  de schuifspanning  $\tau_g$  wel zal gaan beïnvloeden, zijn vervolgens berekeningen uitgevoerd voor andere laagdikten van de toplaag. In de volgende figuren zijn het verloop van watersnelheid en schuifspanning in de toplaag getekend voor laagdikten van 0.50 m. ( $1.0 \cdot D_{50t}$ ) respectievelijk 0.15 m. ( $0.3 \cdot D_{t50}$ ):



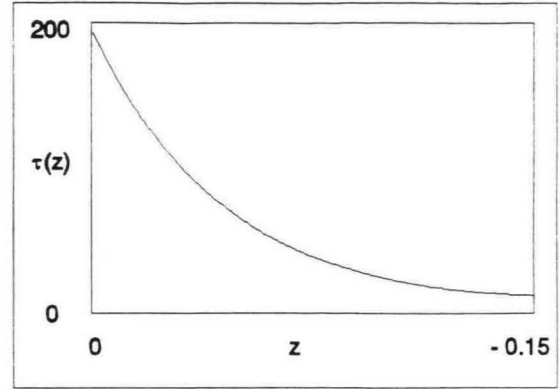
Verloop watersnelheid bij  $d_t = 0.5 \text{ m}$ .



Verloop schuifspanning bij  $d_t = 0.5 \text{ m}$ .

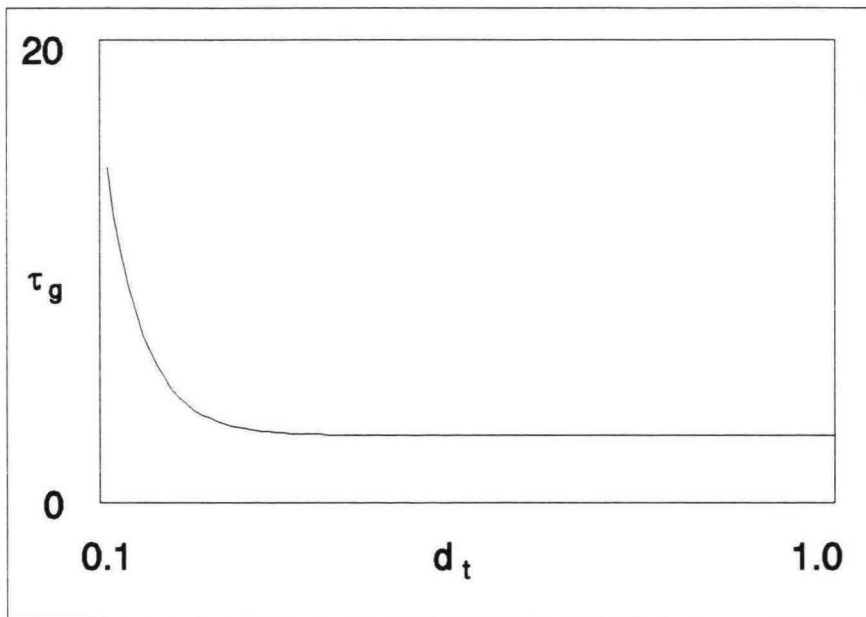


Verloop watersnelheid bij  $d_t = 0.15$  m.



Verloop schuifspanning bij  $d_t = 0.15$  m.

Uit de berekeningen kon worden opgemaakt dat er pas bij laagdiktes die kleiner zijn dan  $d_t \leq 0.4 \cdot D_{50t}$  werkelijk sprake is van een duidelijke invloed van de bodemschuifspanning  $\tau_0$  op de grootte van de schuifspanning  $\tau_g$  ter plaatse van het grensvlak top laag/filter laag. Bij dergelijke laagdiktes zal de waarde van de schuifspanning  $\tau_g$  vrijwel geheel worden bepaald door de mate waarin de bodemschuifspanning  $\tau_0$  ter plaatse van het grensvlak van top laag en filter laag al is uitgedempt. In figuur 12 hieronder is de waarde van de schuifspanning  $\tau_g$  als functie van de laagdikte van de top laag getekend:

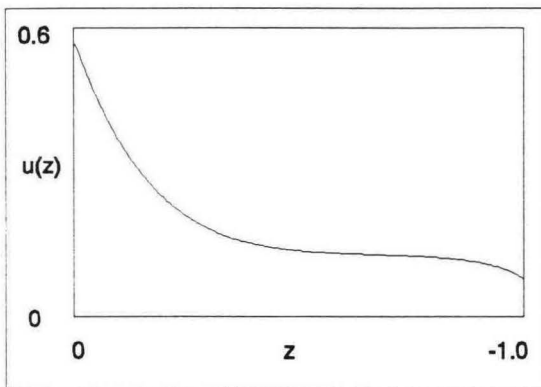


Figuur 12: Invloed laagdikte  $d_t$  op schuifspanning  $\tau_g$

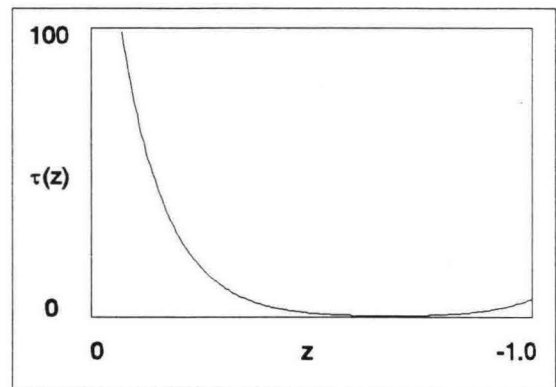
Voor laagdikten in de range  $0.2 (= 0.4 \cdot D_{50t}) \leq d_t \leq 0.4 (= 0.8 \cdot D_{50t})$  bleek de waarde van de schuifspanning  $\tau_g$  te worden bepaald door zowel de mate van uitdemping van de bodemschuifspanning  $\tau_0$  als de invloed van de geringere doorlatendheid van de filter laag. Bij laagdikten groter dan  $d_t \geq 0.8 \cdot D_{50t}$  bleek het uitdempen van de bodemschuifspanning geen rol meer te spelen voor de schuifspanning  $\tau_g$  op de filter laag: de waarde

van  $\tau_g$  werd hier geheel bepaald door de invloed van de aanwezigheid van de filterlaag op de stroming in het onderste deel van de toplaag. Wanneer de laagdikte maar groter was dan  $d_t \geq 0.8 * D_{50t}$  deed de exacte waarde van de laagdikte er verder niet toe en werd de schuifspanning  $\tau_g$  onafhankelijk van de laagdikte.

Praktische waarden voor laagdikten van toplagen liggen in de range  $1.5 * D_{50t} \leq 3 * D_{50t}$ . De berekeningen in dit hoofdstuk wijzen erop dat dergelijke laagdikten ruim voldoende zijn om ervoor te zorgen dat de bodemschuifspanning  $\tau_0$  ter plaatse van het grensvlak van toplaag en filterlaag al geheel is uitgedempt en geen invloed meer heeft op de schuifspanning die op de filterlaag aangrijpt. De berekeningen zijn hierbij gebaseerd op gemiddelde waarden voor de modelconstanten  $C_a$ ,  $C_b$  en  $\beta$ , zoals die in de literatuur ([4] en [5]) vermeld staan. De waarde van  $\beta$  is in de literatuur echter nog onderwerp van veel discussie. Zoals reeds opgemerkt is in deze studie met de waarde  $\beta = 0.05$  een soort compromis gezocht tussen Ikeya's [4] schatting  $\beta \approx 0.50$  en de schatting  $\beta = 0.005$  van M. de Groot die Hoffmans in zijn studie [5] vermeld. De lengteschaal voor het proces van uitdempen van de bodemschuifspanning in de toplaag hangt (bij verwaarlozing van visceuse invloeden) via vergelijking (26) nauw samen met de waarde van  $\beta$ . Wanneer de waarde van  $\beta$  toeneemt, wordt deze lengteschaal groter en zal het proces van uitdempen van de bodemturbulentie dieper in de toplaag doordringen. In de figuren hieronder zijn het verloop van watersnelheid en schuifspanning in de toplaag getekend bij een laagdikte  $d_t = 2 * D_{50t} = 1$  m. voor een relatief grote waarde  $\beta = 0.25$ .

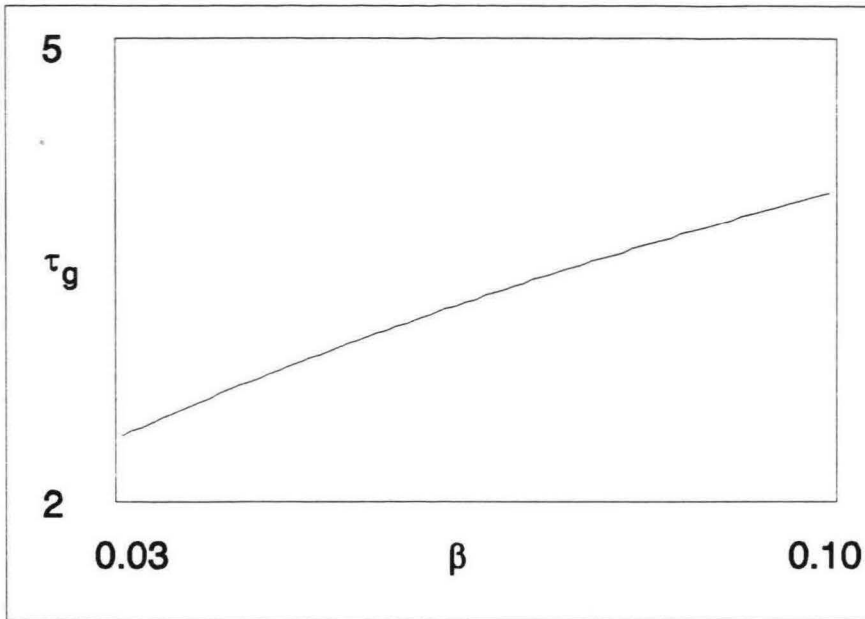


Verloop watersnelheid bij  $\beta = 0.25$ .



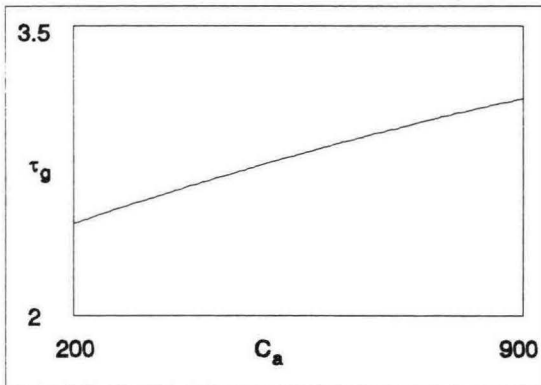
Verloop schuifspanning bij  $\beta = 0.25$ .

Uit deze figuren blijkt dat het uitdempen van de bodemschuifspanning ook voor de relatief grote waarde  $\beta = 0.25$  bij een toplaag met een gangbare laagdikte  $d_t = 2 * D_{50t}$  geen invloed heeft op de schuifspanning  $\tau_g$  die op de filterlaag aangrijpt. Ook hier wordt deze schuifspanning geheel bepaald door de invloed van de aanwezigheid van de minder doorlatende filterlaag op de stroming in het onderste deel van de toplaag. De preciese waarde voor de constante  $\beta$  speelt nog wel een rol binnen de context van het uitrekenen van deze schuifspanning zelf (zie figuur 15 bovenaan de volgende pagina), maar de lengteschaal voor het proces van uitdempen van de bodemschuifspanning blijft van een zodanig kleine orde van grootte dat dit proces bij gangbare laagdikten geen invloed heeft op de waarde van de schuifspanning  $\tau_g$ .

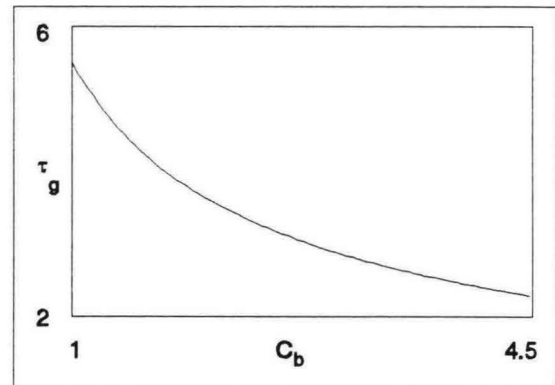


Figuur 15: Invloed  $\beta$  op  $\tau_g$  bij een laagdikte  $d_t = 1$  m.

Naast de invloed van eventueel afwijkende waarden voor de modelconstante  $\beta$  is ook nog gekeken naar de invloed van afwijkende waarden voor de andere modelconstanten  $C_a$  en  $C_b$ . Voor de mogelijke variaties in deze twee modelconstanten kwam weer hetzelfde beeld naar voren als bij modelconstante  $\beta$  naar voren kwam: de variaties hebben wel invloed bij het berekenen van de exacte waarde voor de schuifspanning  $\tau_g$  zelf, maar de lengteschaal voor het proces van uitdempen van de bodemschuifspanning blijft van een zodanig kleine orde van grootte dat dit proces geen effect heeft op de grootte van  $\tau_g$ . Het verloop van  $\tau_g$  voor de ranges  $200 \leq C_a \leq 900$  en  $1 \leq C_b \leq 4.5$  is getekend in onderstaande figuren.



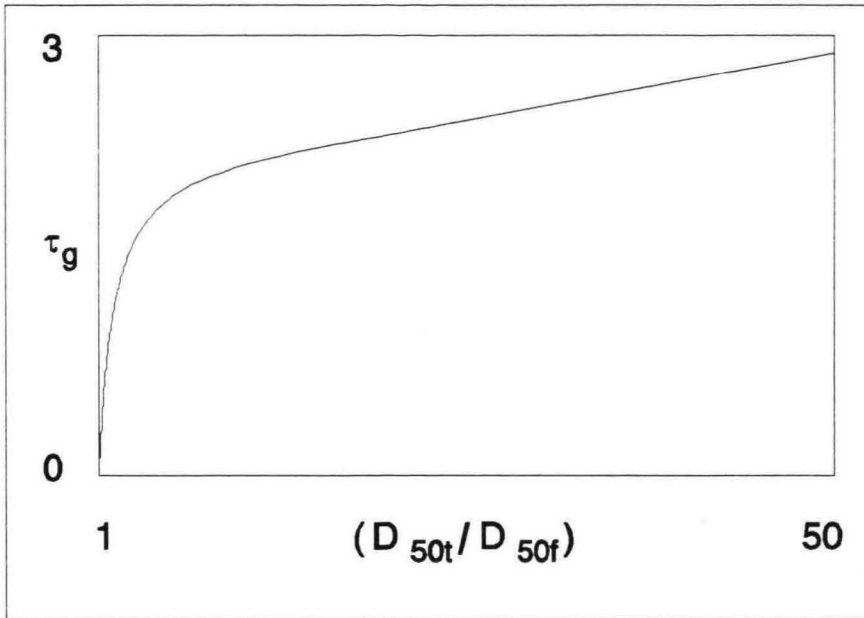
Schuifspanning  $\tau_g$  voor  $200 \leq C_a \leq 900$



Schuifspanning  $\tau_g$  voor  $1 \leq C_b \leq 4.5$

Naast de invloed van variaties in de modelconstanten is ook de invloed van de kenmerkende korreldiameter  $D_f = D_{50f}$  van het filtermateriaal op de schuifspanning  $\tau_g$  op dat materiaal nagegaan. Hierbij is het verloop van de schuifspanning  $\tau_g$  voor de range

waarden  $0.01 \text{ m.} \leq D_{50f} \leq 0.50 \text{ m.}$  berekend. In onderstaande figuur is de schuifspanning  $\tau_g$  als functie van  $(D_{50t}/D_{50f})$  getekend ( $D_{50t}$  had bij deze berekeningen telkens de constante waarde  $D_{50t} = 0.50 \text{ m.}$ ).

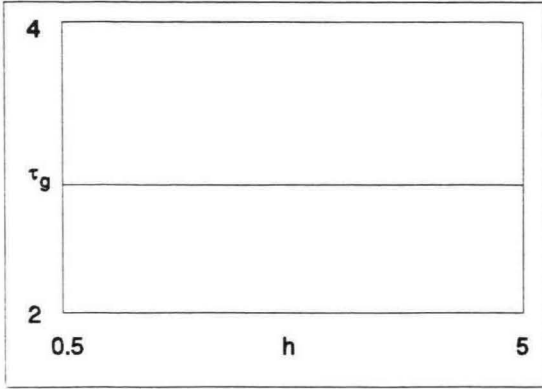


*Figuur 18: Schuifspanning  $\tau_g$  als functie van  $(D_{50t}/D_{50f})$*

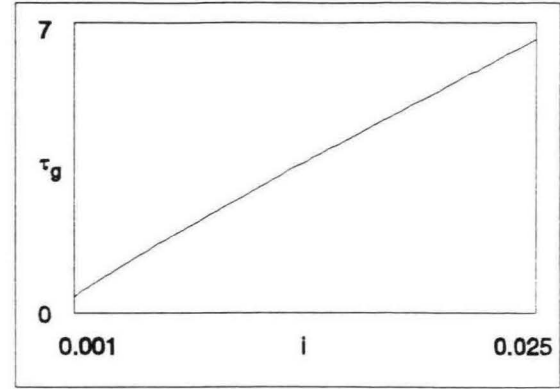
De uitkomsten die in figuur 18 zijn weergegeven zijn goed te verklaren.

Als  $(D_{50t}/D_{50f})$  gelijk is aan 1 is eigenlijk geen sprake meer van een twee-lagen systeem: de filterlaag bestaat dan uit hetzelfde materiaal als de toplaag. Er is dan geen sprake van een ongelijkheid in doorlatendheid van toplaag en filterlaag. De schuifspanning  $\tau_g$  zal in dit geval dus uitsluitend worden bepaald door de mate waarin de bodemschuifspanning al is uitgedempt. Bij de laagdikte  $d_t = 2 \cdot D_{50t}$  volgt dan  $\tau_g = 0.00004 \text{ N/m}^2$ . Als de diameter van het filtermateriaal echter kleiner is dan de diameter van de toplaag zal de filterlaag minder doorlatend zijn dan de toplaag. Hierdoor zal de filterlaag aan de stroming onderin de toplaag gaan zuigen. De zuigende werking van de filterlaag veroorzaakt wrijving en dus - naast de schuifspanning  $\tau_{bs} = 0.00004 \text{ N/m}^2$  ten gevolge van de bijdrage van de bodemschuifspanning - een extra schuifspanning  $\tau_{wf}$  ter plaatse van het grensvlak van toplaag en filterlaag. Deze extra schuifspanning gaat al bij nog relatief geringe verschillen tussen  $D_{50f}$  en  $D_{50t}$  een overheersende rol spelen waardoor  $\tau_{bs} (\ll \tau_{wf})$  verder verwaarloosd kan worden en  $\tau_g \approx \tau_{wf}$ . Het is verder logisch dan de grootte van  $\tau_{wf}$  toeneemt naarmate de diameters van toplaag en filterlaag verder uit elkaar komen te liggen: de waarde van  $\tau_{wf}$  neemt toe bij een toenemend verschil in doorlatendheden.

Tot slot is nog de invloed van de waterdiepte  $h$  en het verhang  $i$  nagegaan voor de ranges  $0.5 \leq h \leq 5$  en  $0.001 \leq i \leq 0.025$ . De resultaten zijn weergegeven in de figuren bovenaan de volgende bladzijde:



Schuifspanning  $\tau_g$  voor  $0.5 \leq h \leq 5.0$



Schuifspanning  $\tau_g$  voor  $0.001 \leq i \leq 0.025$

De waterdiepte bleek in het rekenmodel voor de twee gekoppelde lagen geen noemenswaardige invloed op de schuifspanning  $\tau_g$  te hebben. De waterdiepte heeft binnen het model immers alleen maar invloed op de bodemschuifspanning  $\tau_0 = \rho * g * h * i$ , welke bij een laagdikte van 2 maal de  $D_{50}$  van de toplaag ter plaatse van het grensvlak van toplaag en filterlaag slechts resulteert in een verwaarloosbare schuifspanningsbijdrage van ongeveer  $\tau_{bs} \approx 0.002 * h * i$  N/m<sup>2</sup> ( $\tau_{bs} = 0.00004$  N/m<sup>2</sup> voor de situatie met  $h = 2$  en  $i = 0.01$ ).

Het verhang  $i$  heeft daarentegen wel veel invloed op de schuifspanning  $\tau_g$ . De schuifspanning  $\tau_g$  op de filterlaag bleek recht evenredig te zijn met het verhang. Gezien deze evenredigheid kan men het verhang (zoals dat in de gangbare ontwerpformules gebeurt) inderdaad rechtstreeks als belasting opvatten. Hierbij dient dan wel te worden opgemerkt dat dit alleen geldt voor stationaire, uniforme stroombeelden. Voor *niet-uniforme stromingen* zal het gemiddeld verhang de belasting op filters in het algemeen niet goed representeren. In vertragsgebieden bijvoorbeeld zal het gemiddeld verhang afnemen door de toename van de waterstanden. Door de grote turbulentieintensiteit in het vertragsgebied valt hierbij echter eerder een toename dan een afname van de belasting op het filter te verwachten. In dergelijke situaties zal de belasting op het filter vooral worden bepaald door de grootte van de momentane, turbulente drukfluctuaties, waarbij het gemiddeld stationair verhang verder een ondergeschikte rol speelt.

## 6 Samenvatting

In deze studie is een theoretisch rekenmodel opgesteld voor de berekening van gemiddelde poriesnelheden en schuifspanningen in een filterconstructie die bestaat uit een toplaag van beperkte dikte op een in principe oneindig dikke filterlaag. Bij de opstelling van het model is ervan uitgegaan dat deze filterconstructie als bodembescherming dient in een rivier met een uniforme, stationaire stromingssituatie.

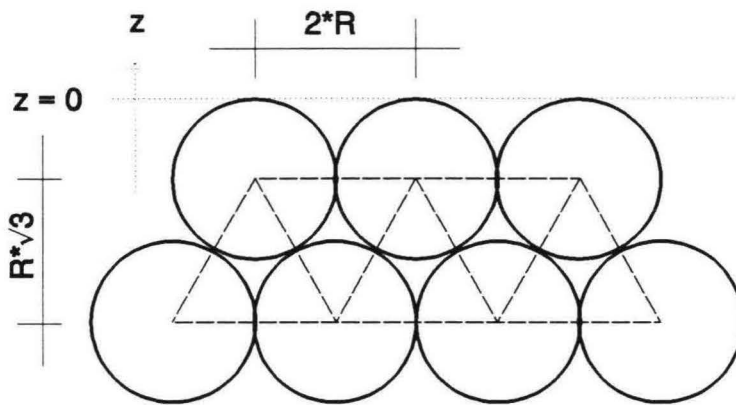
Het rekenmodel is gebaseerd op standaardoplossingen voor de poreus medium vergelijkingen die de stroming in toplaag en filterlaag beschrijven. De juiste vorm voor deze standaardoplossingen vormde aanvankelijk nog een punt van discussie. In hoofdstuk 2 is de oplossing van Ikeya [4] onder de loep genomen. Deze bleek bij nadere beschouwing significante mankementen te vertonen. Daarom is in hoofdstuk 3 eerst naar een betere algemene oplossing voor de beschrijving van de stroming in een poreus medium gezocht. Het in hoofdstuk 4 beschreven rekenmodel is gebaseerd op de verbeterde standaardoplossingen die in hoofdstuk 3 zijn afgeleid.

Hoofdstuk 5 behandelt de resultaten van het rekenmodel voor een praktijksituatie. Uit de resultaten komt duidelijk naar voren dat de belasting op de filterlaag (uitgedrukt in de schuifspanning  $\tau_0$  die op de filterlaag aangrijpt) bij gangbare dikten voor de toplaag en gemiddelde waarden voor de diverse modelconstanten niet afhangt van de grootte van de bodemschuifspanning  $\tau_0$  maar alleen van het verhang over de constructie en het verschil in doorlatendheid van toplaag en filterlaag. De invloed van de bodemschuifspanning bleek te zijn beperkt tot hooguit het bovenste deel van de toplaag met een dikte van ca.  $0.5 \cdot D_{50t}$  tot  $1.0 \cdot D_{50t}$ .

In de berekeningen van hoofdstuk 5 is ook gekeken naar de gevoeligheid van het berekende resultaat voor afwijkende waarden van de diverse modelconstanten. Mogelijke afwijkingen van deze constanten veranderden weinig aan het kwalitatief karakter van het de resultaten. Er bestond op voorhand met name nog veel discussie over de waarde die moet worden ingevuld voor de modelconstante  $\beta$  die in de modellering voor de turbulente viscositeit wordt gebruikt. In Appendix A wordt hier aan de hand van enkele resultaten van modelproeven dieper op ingegaan. Uit de analyse van deze proeven komt voor de gangbare granulaire materialen als gemiddelde waarde  $\beta \approx 0.05$  naar voren. Hierbij moet wel worden bedacht dat deze waarde slechts is gebaseerd op een gering aantal metingen waarbij ook nog de nodige extrapolaties zijn verricht. In verband met deze situatie wordt aanbevolen voor de gangbare granulaire materialen minimaal een range van  $0.01 < \beta < 0.5$  aan te houden.

## Appendix A: Analyse van modelconstanten (afstemming metingen en theorie)

Zoals eerder aangegeven in hoofdstuk 2 en hoofdstuk 5 bestaat er nog verwarring over de juiste waarden die voor de diverse modelconstanten moet worden aangehouden. Deze verwarring betreft vooral de waarde van de modelconstante  $\beta$  in de modellering voor de turbulente viscositeit. De enige manier om meer inzicht in deze problematiek te verkrijgen bestaat uit het vergelijken van de theoretische formuleringen met resultaten van modelproeven. Er zijn echter nog zeer weinig proeven uitgevoerd waarbij ook snelheden *in het filter* zijn gemeten. Tijdens onderzoek Q572 [2] voor de opstelling van de Bakker-Konter formule zijn in het filter wel drukken maar geen snelheden gemeten. Dit maakt de proefresultaten van onderzoek Q572 weinig bruikbaar bij de ijking van de diverse modelconstanten binnen de theoretische formuleringen die in deze studie zijn opgesteld. In het in hoofdstuk 3 aangehaalde artikel [8] van Shimizu, Tsujimoto en Nakagawa worden naast hun theoretische benadering ook een viertal resultaten beschreven van proeven waarbij wel snelheden in een filter zelf zijn gemeten. De filterlaag bestond hier uit een aantal lagen glazen bollen (elke bol uniform met diameter 3 cm.) op een ondoordringbare bodem. De opbouw van de lagen bollen was telkens volgens het meest dichtgepakte tetragonaal-sferoïdale patroon:



Figuur 23: Dwarsdoorsnede pakking bij Japanse proeven.

De gemiddelde poriesnelheden in het filter zijn telkens gemeten door bovenstrooms een zout water puls te injecteren en benedenstrooms op verschillende afstanden van het injectiepunt en op verschillende hoogten in het filterpakket de zoutconcentraties te meten. Uit de verschillen tussen de aankomsttijden van de concentratiepiek op de verschillende plaatsen zijn met gebruikmaking van dispersie theorie de poriesnelheden op de verschillende afstanden van het injectiepunt en op de verschillende hoogten in het filterpakket berekend. Hoewel bij deze Japanse proeven sprake was van een wel zeer sterk geïdealiseerde filterconstructie (enkel uniforme bollen, telkens uniform gestapeld) kunnen de proefresultaten toch dienen om inzicht in passende waarden voor de diverse modelconstanten te verkrijgen. Bij de huidige stand van het modelonderzoek naar filters zijn de Japanse metingen de enige werkelijk goed bruikbare proefresultaten voor de ijking van de theoretische formuleringen.



Uit de resultaten van de vier proeven [8] blijkt dat de slipsnelheid  $u_s$  ter plaatse van de grens tussen filterlaag en waterloop ( $z=0$ ) telkens ongeveer 5 tot 6 maal de schuifspanningssnelheid bedraagt:  $u_s \approx (5 \text{ à } 6) \cdot \sqrt{(g \cdot h \cdot i_0)}$ . Voor  $z < 0$  daalt de gemiddelde poriesnelheid in de filterlaag min of meer exponentieel van  $u_s$  tot een min of meer constante waarde  $u_0$  op grotere diepte. Wanneer men de proefresultaten benadert met de formule  $u(z) = u_0 + (u_s - u_0) \cdot \exp(z/\alpha)$  bedraagt de dempingsschaal bij de vier metingen ongeveer  $\alpha = 0.8 \text{ à } 1.0 \text{ cm}$  ( $= 0.28 \text{ à } 0.33$  maal de boldiameter). De gevonden waarden voor het quotient  $u_s/u_0$  en de dempingsschaal  $\alpha$  kunnen worden vergeleken met theoretische uitdrukkingen hiervoor.

In hoofdstuk 1 is voor het foutieve model van Ikeya als vuistregel (bij verwaarlozing van viskeuse invloeden) relatie (11) voor het quotient  $u_s/u_0$  afgeleid. De dempingsschaal wordt hierbij weergegeven met relatie (8). Gelijksoortige uitdrukkingen kunnen ook worden afgeleid voor de oplossing van het juiste model in de vergelijkingen (25) en (26). Bij verwaarlozing van visceuse effecten en de invloed van  $u_0$  ( $u_0 \ll u_s$ ) kan deze oplossing worden geschreven als:

$$u(z) \approx u_s \cdot \exp(z/2\kappa) \quad \text{en} \quad \tau_{xz}(z) \approx \frac{\rho \cdot \beta \cdot D \cdot u_s^2}{2 \cdot \kappa} \cdot \exp(z/\kappa)$$

$$\text{waarin} \quad \kappa = D \cdot \sqrt{\frac{\beta}{2 \cdot C_b}} \quad (132)$$

De schuifspanning moet op het grensvlak met de waterloop ( $z = 0$ ) gelijk zijn aan de bodemschuifspanning  $\tau_0 = \rho \cdot u_*^2$ . Dit levert:

$$\tau_{xz}(0) \approx \frac{\rho \cdot \beta \cdot D \cdot u_s^2}{2 \cdot \kappa} = \rho \cdot u_*^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{u_s}{u_*}\right) \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\beta \cdot D}} \quad (133)$$

Bij vergelijking van de theoretische uitdrukking voor het snelheidsverloop met het opgemeten verloop blijkt dat moet gelden  $2 \cdot \kappa = \alpha \approx 0.3 \cdot D \Rightarrow \kappa \approx 0.15 \cdot D$ . Dit resultaat kan worden ingevuld in uitdrukking (133), waarna met het opgemeten quotient  $u_s/u_* \approx 5.5$  voor  $\beta$  een waarde  $\beta \approx 0.01$  volgt:

$$\left(\frac{u_s}{u_*}\right) \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\beta \cdot D}} \approx \sqrt{\frac{0,3}{\beta}} \approx 5,5 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 0,01 \quad (135)$$

Door vergelijking van de theoretische uitdrukking voor  $\kappa$  in vergelijking (132) met het meetresultaat  $\kappa \approx 0.15 \cdot D$  volgt dan voor de modelconstante  $C_b$  een waarde  $C_b \approx 0.22$ :

$$\kappa = D \cdot \sqrt{\frac{\beta}{2 \cdot C_b}} \approx D \cdot \sqrt{\frac{0,01}{2 \cdot C_b}} \approx 0,15 \cdot D \Rightarrow C_b \approx 0,22 \quad (136)$$

Bij gebrek aan andere metingen van snelheidsprofielen in filterlagen is het moeilijk het gevonden resultaat voor de modelconstante  $\beta$  te beoordelen. Deze kan immers uitsluitend worden bepaald door de theoretische uitdrukkingen voor de dempingsschaal  $\alpha$  en het quotient  $u_s/u$  aan de metingen te koppelen. Dit ligt anders voor de gevonden waarde van  $C_b$ . Over de waarde van deze modelconstante is al zeer veel bekend. Ikeya heeft zijn waarden voor deze modelconstante afgeleid met gebruikmaking van de Forchheimer-relatie op pagina 57 van CUR-leidraad no. 161 [3]. Deze relatie is gebaseerd op een groot aantal onderzoeksresultaten. Vergelijking van formulering (2) die Ikeya hanteert met deze CUR-relatie levert de conclusie dat Ikeya's modelconstante  $C_b$  gelijk moet zijn aan de modelconstante  $c_7$  in de CUR-relatie (NB: Ikeya's relatie is opgesteld voor poriesnelheden ( $u$ ): men moet de CUR relatie voor filtersnelheden ( $\underline{u}$ ) dus alvorens deze met Ikeya's relatie te vergelijken eerst via de formule  $\underline{u} = n \cdot u$  in een relatie voor poriesnelheden omzetten). Aangezien moet gelden  $C_b = c_7$  kan men voor  $C_b$  hetzelfde 95 % betrouwbaarheidsinterval aanhouden dat in de CUR-leidraad voor  $c_7$  wordt gegeven, dus  $1.0 \leq C_b \leq 5.0$  met als gemiddelde waarde  $C_b \approx 2.2$ . Gezien de grote hoeveelheid onderzoek die aan de Forchheimer-relatie in de CUR-leidraad ten grondslag ligt kan men deze range wel als een betrouwbaar richtsnoer opvatten. De uit de Japanse proefresultaten berekende waarde  $C_b = 0.22$  is dus aan de wel zeer kleine kant. Deze waarde valt zelfs ruim buiten het 95 % betrouwbaarheidsinterval. Deze uitkomst doet vermoeden dat er bij de afstemming van de theoretische modellering voor het verloop van de poriesnelheid in de filterlaag op de Japanse proefresultaten wellicht nog andere, nog niet onderkende invloeden meespelen.

Voor de significante afwijking tussen de richtwaarde  $C_b \approx 2.2$  en de via de Japanse proeven bepaalde waarde  $C_b \approx 0.22$  zijn meerdere verklaringen mogelijk. Deze verklaringen betreffen hoofdzakelijk de volgende twee aspecten:

- a. De Japanse proeven zijn uitgevoerd met uniforme bollen in een telkens uniforme stapeling. Dit is bepaald wat anders dan de gegradieerde natuurlijke materialen die zijn gebruikt bij de proeven die aan de Forchheimer relatie in de CUR-leidraad ten grondslag liggen. Het is mogelijk dat voor deze verschillende materialen ook verschillende waarden voor de diverse modelconstanten moeten worden aangehouden.
- b. Ikeya hanteert voor het verband tussen poriesnelheid en filtersnelheid het gangbare verband  $u = \underline{u}/n$ , waarin 'n' de porositeit op volumieke basis betreft. Dit verband kan ter discussie worden gesteld. Men treft voor dit verband in de literatuur ("Modelling groundwaterflow and pollution" van J. Bear en A. Verruyt, hoofdstuk 2, pagina 30) ook wel een ander verband aan:

$$u = \frac{\underline{u}}{n_{eff}} \quad \text{waarin } n_{eff} < n \quad (137)$$

De uitdrukking 'n<sub>eff</sub>' verwijst hierin naar de zgn. effectieve porositeit. Deze moet worden gebaseerd op een beschouwing van de percentages holle ruimte per doorstroomd oppervlak (de filtersnelheid wordt immers berekend als quotient van debiet en oppervlak). Via theoretische overwegingen kan worden beredeneerd dat de waarde van de effectieve porositeit n<sub>eff</sub> kleiner zal zijn dan de 'gewone' porositeit n, die op volumieke basis wordt berekend. Dit impliceert dat de door toepassing van het verband  $u = \underline{u}/n$  voorspelde gemiddelde poriesnelheden de werkelijke (en dus opgemeten) gemiddelde poriesnelheden zullen onderschatten. Men zal hiervoor eerst moeten corrigeren voordat de theoretische formuleringen aan de gemeten snelheden kunnen worden gekoppeld.

In het nu volgende zal voor elk van deze twee aspecten worden nagegaan wat hier voor invloed van uitgaat en in hoeverre deze invloed de significante afwijking tussen de richtwaarde en de via de Japanse proeven bepaalde waarde voor C<sub>0</sub> kan verklaren.

ad. a: In het artikel van Shimizu, Tsujimoto en Nakagawa [8] staan naast de metingen van de snelheidsprofielen ook gegevens vermeld over een doorlatendheidstest die is uitgevoerd op een monster met dezelfde opbouw (dezelfde uniforme glazen bollen en dezelfde stapeling). Met behulp van deze test is onderstaande doorlatendheidsrelatie gefit:

$$i_0 = \left( \frac{v_w}{g \cdot K} \right) \cdot \underline{u} + \left( \frac{c}{g \cdot \sqrt{K}} \right) \cdot \underline{u}^2 \quad (138)$$

De parameters c en K zijn hierin modelconstanten. Uit de test bleken deze constanten voor het gebruikte filtermateriaal met de glazen bollen gelijk te zijn aan c = 0.055 en K = 0.28 · 10<sup>-6</sup> [m<sup>2</sup>]. Vergelijking van bovenstaande relatie (138) met de Forchheimer relatie op pagina 57 van de CUR leidraad [3] leert dat bij een goede overeenstemming zou moeten gelden:

$$\frac{c_7}{n^2 \cdot D} = \frac{c}{\sqrt{K}} = \frac{0,055}{\sqrt{0,28 \cdot 10^{-6}}} \approx 104 \text{ [m}^{-1}\text{]} \quad (139)$$

Wanneer men in relatie (139) voor D de diameter D = 0.03 m. van de gebruikte glazen bollen en voor n de ook opgemeten porositeit n = 0.38 invult, vindt men voor c<sub>7</sub> een waarde c<sub>7</sub> ≈ 0.45. Deze waarde wijkt sterk af van de range waarden die volgens de CUR-leidraad [3] voor c<sub>7</sub> moet worden aangehouden. In dit opzicht is er dus geen sprake van een werkelijk goede overeenstemming tussen doorlatendheidsrelatie (138) en de Forchheimerrelatie zoals de CUR-leidraad die beschrijft.

De reden hiervoor moet worden gezocht in het verschil tussen de voor beide relaties beproefde filtermaterialen. De CUR-relatie is opgesteld met

behelp van proefresultaten van proeven met filterlagen van gegradeerde, natuurlijke materialen (zand, grind, steenslag). De weerstand die de sterk geidealiseerde filterlaag van de uniforme *gladde*, glazen bollen met uniforme stapeling op de stroom uitoefent zal kleiner zijn dan de weerstand van een filterlaag van gegradeerde, *hoekige en ruwe* steenslag met gelijke porositeit en gelijke kenmerkende diameter. Hierdoor zal binnen de CUR-relatie de waarde van de constante  $c_7$  voor de glazen bollen kleiner zijn dan voor de steenslag. Gezien de gevonden waarde  $c_7 \approx 0.45$  is blijkbaar zelfs sprake van een aanzienlijk verschil.

Gezien al het bovenstaande moet voor de glazen bollen als richtwaarde voor  $C_b$  ( $C_b = c_7$ ) eerder  $C_b \approx 0.45$  dan  $C_b \approx 2.20$  worden aangehouden. Gegeven deze nieuwe richtwaarde voor  $C_b$  wijkt de uit de snelheidsprofielen berekende waarde  $C_b \approx 0.22$  al niet meer zo sterk af als zich in eerste instantie liet aanzien.

Het verschil in ruwheid tussen de filterlaag van de gladde, glazen bollen en een filterlaag van steenslag zal overigens ook invloed hebben op de slipsnelheid ter plaatse van het grensvlak filterlaag/waterloop. Voor een filterlaag van steenslag zal de verhouding  $u_s/u$  kleiner zijn dan bij een filterlaag van glazen bollen. Dit vermoeden kan worden geverifieerd met behulp van de metingen met filterlagen van steenslag, die voor de opstelling van de Bakker-Konter formule zijn verricht (WL-verslag Q572 [2]). Tijdens dit onderzoek zijn ook telkens op diverse hoogten in de waterloop de watersnelheden gemeten. Door deze snelheidsprofielen te extrapoleren naar  $z = 0$  kan men schattingen voor de slipsnelheid  $u_s$  berekenen. De bijbehorende waarden van  $u$  kunnen hierbij telkens uit de andere meetgegevens worden berekend. Wanneer men op de meest eenvoudige wijze extrapoleert (rechte lijn trekken door de twee punten die het dichtst bij  $z = 0$  zijn opgemeten en deze lijn snijden met  $z = 0$ ), kan uit de meetgegevens in rapport Q572 worden opgemaakt dat men bij een filterlaag van steenslag eerder aan een verhouding  $u_s/u \approx 3$  (2 à 4) moet denken dan aan de verhouding  $u_s/u \approx 5$  à 6 die bij de proeven met de glazen bollen is opgemeten.

- ad b. Al de theoretische uitdrukkingen in deze studie zijn afgeleid voor een gemiddelde poriesnelheid die via de relatie  $u = \underline{u}/n$  met de filtersnelheid  $\underline{u}$  en de volumieke porositeit samenhangt. Volgens relatie (137) had men echter eigenlijk moeten uitgaan van de relatie  $u = \underline{u}/n_{\text{eff}}$ , waarbij de effectieve porositeit  $n_{\text{eff}}$  kleiner is dan de volumieke porositeit. Het hanteren van het verband  $u = \underline{u}/n$  leidt dan tot theoretische uitdrukkingen voor gemiddelde poriesnelheden die de werkelijk optredende gemiddelde poriesnelheden met een factor  $(n/n_{\text{eff}})$  zullen onderschatten. Wanneer men de metingen aan de theoretische formuleringen wil koppelen moet hiervoor worden gecorrigeerd. De theoretische uitdrukking voor de slipsnelheid  $u_s$  zal de *opgemeten* slipsnelheid  $u_s$  een factor  $(n/n_{\text{eff}})$  onderschatten. Dit kan worden verdisconteerd door de theoretische uitdrukking eerst met die factor  $(n/n_{\text{eff}})$  te vermenigvuldigen alvorens deze aan de metingen te koppelen. Vergelijking (133) moet dan als volgt worden aangepast:

$$\left(\frac{u_s}{u_*}\right) = \left(\frac{n}{n_{eff}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\beta \cdot D}} \approx 5,5 \quad (= \text{meting}) \quad (140)$$

Wanneer men nu uitgaat van de bij punt a. gevonden waarde  $C_b \approx 0.45$  (voor glazen bollen) en deze nieuwe waarde combineert met vergelijking (132) en de meting voor de dempingsschaal  $\kappa = a/2 = 0.15 \cdot D$ , dan vindt men voor  $\beta$  ditmaal een waarde  $\beta \approx 0.02$ :

$$\kappa = D \cdot \sqrt{\frac{\beta}{2 \cdot C_b}} \approx D \cdot \sqrt{\frac{\beta}{0,9}} \approx 0,15 \cdot D \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 0,02 \quad (141)$$

Wanneer dit resultaat wordt gecombineerd met vergelijking (140) vindt men tot slot onderstaande schatting voor het quotient  $n_{eff}/n$ :

$$\left(\frac{u_s}{u_*}\right) = \left(\frac{n}{n_{eff}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\beta \cdot D}} \approx \left(\frac{n}{n_{eff}}\right) \cdot \sqrt{\frac{0,3}{0,02}} \approx 5,5 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{n_{eff}}{n}\right) \approx 0.70 \quad (142)$$

Deze uitkomst is theoretisch gesproken alleszins te verdedigen. Dit zal worden geïllustreerd aan de hand van een beschouwing van de situatie bij een filterlaag met uniforme bollen met straal  $R$  in een *losse* pakking. Bij deze pakking kan men de filterlaag in ruimtelijke zin schematiseren als een systeem van gelijkvormige kubusjes met zijde  $2 \cdot R$ , waarbij elk hoekpunt het middelpunt van een bol is. De volumieke porositeit van één zo'n kubusje is dan gelijk aan de volumieke porositeit van de gehele filterlaag. Deze is gelijk aan de verhouding tussen het holle volume in het kubusje en het totaal volume  $8 \cdot R^3$  van het kubusje. Aangezien het niet holle volume in het kubusje precies gelijk is aan het volume van één bol bedraagt het holle volume  $(8 - (4/3) \cdot \pi) \cdot R^3$  en de volumieke porositeit dus  $n = (8 - (4/3) \cdot \pi) / 8 = 0.476$ . De *effectieve* porositeit hangt daarentegen af van het percentage holle ruimte *per oppervlak*. Bij een vast debiet  $Q$  door elk kubusje hangt de werkelijke poriesnelheid immers af van het holle oppervlak  $A_{hol}$  volgens  $u_r = Q/A_{hol}$ . De filtersnelheid is hierbij gelijk aan  $\underline{u} = Q/A_{tot}$ , waardoor moet gelden  $n_{eff} = \underline{u}/u_r = A_{hol}/A_{tot}$ . Bij de berekening van het holle oppervlak stuit men daarbij op het probleem dat dit holle oppervlak in stromingsrichting niet constant is. Wanneer het water loodrecht door het kubusje stroomt (totaal doorstroomd oppervlak per kubusje  $A_{tot} = 4 \cdot R^2$ ) verloopt het niet holle oppervlak in stromingsrichting van  $\pi \cdot R^2$  bij het begin tot nul in het midden tot weer  $\pi \cdot R^2$  aan het eind. Het holle oppervlak varieert dus van  $A_{hol} = (4 - \pi) \cdot R^2$  tot  $4 \cdot R^2$  tot weer  $(4 - \pi) \cdot R^2$  enzovoorts. Ten aanzien van de doorlatendheid is hierbij de nauwste doorstroomopening maatgevend.

Het minimum oppervlak  $A_{hol} = (4-\pi) \cdot R^2$  zal dus het zwaarst wegen waar het gaat om de effectieve porositeit. De effectieve porositeit zal in deze geïdealiseerde situatie met uniforme bollen dus bij benadering gelijk zijn aan  $n_{eff} = A_{hol}/A_{tot} = (4-\pi)/4 = 0.215$ . Voor de verhouding tussen effectieve en volumieke porositeit vindt men dan  $n_{eff}/n = 0.215/0.476 \approx 0.45$ . Uit deze uitkomst voor uniforme bollen in een losse pakking moge blijken dat de effectieve porositeit aanzienlijk kan afwijken van de volumieke porositeit. De gevonden verhouding  $n_{eff}/n \approx 0.70$  voor uniforme bollen in een *dichte* pakking (figuur 23) is dus zeer zeker geen onmogelijke uitkomst.

Na dit alles rijst uiteraard nog de vraag welke waarde men nu voor de modelconstante  $\beta$  moet hanteren bij de beoordeling van filterconstructies die zijn opgebouwd uit de gangbare granulaire materialen. Voor de glazen bollen bleek de waarde  $C_b \approx 0.45$  aanzienlijk af te wijken van de waarde  $C_b \approx 2.2$  die men volgens de CUR-leidraad [3] voor de gangbare granulaire materialen moet hanteren. De modelconstante  $\beta$  zou voor gangbare granulaire materialen net zo goed flink af kunnen wijken van de waarde  $\beta \approx 0.02$  die uiteindelijk voor de glazen bollen werd gevonden.

Men kan zich hier een indruk over vormen door de vergelijkingen (141) en (142) tot één vergelijking te combineren. Het resultaat kan worden geschreven in de vorm van een algemene uitdrukking voor  $\beta$ :

$$\beta = \frac{2}{C_b \cdot \left(\frac{u_s}{u_*}\right)^4 \cdot \left(\frac{n_{eff}}{n}\right)^4} \quad (143)$$

De verhouding  $u_s/u_*$  betreft hierbij de verhouding tussen de *werkelijke* poriesnelheid ter plaatse van het grensvlak van filterlaag en waterloop en de schuifspanningssnelheid. Onder punt a. is op basis van extrapolaties van meetgegevens van de proeven voor de Bakker-Konter formule [2] geconcludeerd dat deze verhouding bij granulaire materialen waarschijnlijk  $u_s/u_* = 2$  à  $4$  zal bedragen. Gaat men uit van een verhouding  $u_s/u_* = 3$ , een verhouding  $n_{eff}/n = 0.7$  en de waarde  $C_b \approx 2.2$  voor granulaire materialen dan vindt men met formule (143) voor granulaire materialen voor  $\beta$  een soortement gemiddelde waarde  $\beta \approx 0.05$ .

De mogelijke spreiding rond deze waarde is echter groot. Wanneer men uitgaat van de ranges  $2 \leq u_s/u_* \leq 4$  en  $0.6 \leq n_{eff}/n \leq 0.8$  dan vindt men bij een waarde  $C_b = 2.2$  voor de uiterste waarden van  $\beta$  de range  $0.01 \leq \beta \leq 0.44$ . Gelet op dit resultaat - en gelet op de onnauwkeurigheden ten gevolge van de noodzakelijke extrapolaties - wordt daarom aanbevolen in berekeningen voor de modelconstante  $\beta$  een grote spreiding in acht te nemen.

## Appendix B: Afleiding bewegingsvergelijking voor uniforme stationaire stroming in een poreus medium

De bewegingsvergelijking in relatie (1) op pagina 5 wordt in veel publicaties direct als uitgangspunt voor nadere modelleringen genomen. Men moet echter wel beseffen dat bij de opstelling van deze vergelijking op voorhand al veel termen zijn weggeschrappt uit de hieraan ten grondslag liggende Navier-Stokes vergelijking. De volledige Navier-Stokes vergelijking voor stroming in een poreus medium kan in algemene zin als volgt worden geschreven:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p - U \cdot \nabla U + \nu \cdot \nabla^2 U + \frac{X}{\rho} + \frac{F_s}{\rho}$$

De notatie 'U' verwijst hierin naar de vector (u,v,w) van poriesnelheidscomponenten in x-, y- en z-richting. De notaties 'X/ρ' en 'F<sub>s</sub>/ρ' verwijzen naar de versnellingen ten gevolge van uitwendige krachten op de stroming. De versnellingen X/ρ zijn het gevolg van de helling van de waterloop. Voor kleine waarden van deze helling geldt: X<sub>x</sub>/ρ = g·sin(i) ≈ g·i, X<sub>z</sub>/ρ = -g·cos(i) ≈ -g. De versnellingen F<sub>s</sub>/ρ zijn het gevolg van de weerstand die het poreus medium op de stroming uitoefent. Deze kunnen worden beschreven met een Forchheimer relatie. Analoog aan relatie (2) op pagina 5 kan hiervoor onderstaande formulering worden gehanteerd:

$$\frac{F_s}{\rho} = -\left(\frac{C_a \cdot \nu}{D^2} \cdot U + \frac{C_b}{D} \cdot U^2\right)$$

Wanneer men zich beperkt tot een 2 dimensionale modellering (alleen componenten in x- en z-richting), dan levert uitwerking van de Navier Stokes vergelijking het onderstaand stelsel vergelijkingen (met de notaties 'a' voor de coefficient (C<sub>a</sub>·ν/D<sup>2</sup>) en 'b' voor de coefficient (C<sub>b</sub>/D)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot i - a \cdot u - b \cdot u \cdot \sqrt{u^2 + w^2} - \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - g - a \cdot w - b \cdot w \cdot \sqrt{u^2 + w^2} - \left(u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

De laatste vergelijking betreft hierbij de bijbehorende continuïteitsvergelijking.

In publicatie [21] behandelde Nakagawa in 1984 een mogelijke aanpak voor het oplossen van dit stelsel vergelijkingen. Hierbij verwaarloosde hij de convectieve termen en de interne vloeistofwrijving (de laatste twee termen in beide bewegingsvergelijkingen). Zijn oplossing was verder gebaseerd op de toepassing van eerste orde storingstheorie (superpositie van momentane snelheidsfluctuaties op een hoofdzakelijk stationaire stroombeeld). Deze toepassing is echter alleen toegestaan bij relatief kleine fluctuaties. Dit was de reden waarom Nakagawa's oplossing in de praktijk niet echt goed bruikbaar was. Daarom is in een later stadium overgestapt op een andere modellering. Deze wordt beschreven in publicatie [8], welke Nakagawa samen met Shimizu en Tsujimoto publiceerde in 1990.

Uitgangspunt van deze modellering is een stationaire stroming, die hoofdzakelijk in horizontale richting plaatsvindt. De verticale snelheidscomponent 'w' kan dan verwaarloosd worden ten opzichte van de horizontale component 'u'. Verder wordt de stroming in horizontale richting als uniform verondersteld (alle partieele afgeleiden naar x verwaarloosbaar). Wanneer men hiervan uitgaat, dan reduceert het stelsel vergelijkingen op de vorige bladzijde tot onderstaand stelsel:

$$0 = g \cdot i - a \cdot u - b \cdot u^2 + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Aan de onderste (continuïteits-)vergelijking is automatisch voldaan aangezien er sprake is van uniforme stroming. De tweede vergelijking drukt uit dat er in verticale richting sprake is van een hydrostatische drukverdeling. De bovenste vergelijking levert tot slot de vergelijking die de stroming in het medium beschrijft. Men kan deze ook schrijven als:

$$\rho \cdot g \cdot i + F_s + \rho \cdot \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

De kracht  $F_s$  correspondeert hierin met de Forchheimerrelatie (2) op pagina 5. De derde term kan met de hypothese van Boussinesq ook worden uitgedrukt in de vorm van een verticale gradient van een schuifspanning. De viscositeit kan hierbij worden opgevat als de som van de viscositeit van het water en de turbulente viscositeit:



$$\text{Boussinesq: } \tau_{xz} = \rho \cdot (v + v_t) \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

In combinatie met deze modellering naar Boussinesq kan de bewegingsvergelijking voor de stroming in het poreus medium ook worden beschreven volgens:

$$\rho \cdot g \cdot i + F_s + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Het is deze vergelijking die in de meest recente publicaties over dit onderwerp doorgaans als uitgangspunt voor verdere berekeningen wordt genomen. Uit voorgaande afleiding moge duidelijk zijn geworden dat deze vergelijking alleen geldt indien sprake is van:

- Stationaire stroming
- Verwaarloosbare variaties in breedterichting (2 dimensionaal stroombeeld)
- Verwaarloosbare verticale snelheden (overwegend horizontale stroming)
- Uniforme stroming
- Geldigheid van de hypothese van Boussinesq bij stroming in een poreus medium

De vergelijking gaat verder uit van een beschrijving van het poreus medium, waarbinnen impliciet is aangenomen dat dit medium overal dezelfde eigenschappen bezit. Men moet de vergelijking dus opvatten als een macromodel, waarmee alleen het gemiddeld stroombeeld in het medium kan worden berekend.

## Literatuur

- [1] **H. den Adel & M.B. de Groot**, GD-rapport CO-349410/16: Implementatie filteronderzoek, Delft, januari 1995.
- [2] **J.J.A. van Huijstee & H.J. Verhey**, WL-rapport Q572: Verruiming ontwerpregels voor filters in bodemverdedigingen - gelijktijdige instabiliteit van toplaag en basislaag, 1991.
- [3] **CUR rapport 161**, Filters in de waterbouw, Gouda, 1993.
- [4] **T. Ikeya**, An analytical estimate of the velocity distribution through protection layers, 1991.
- [5] **G. Hoffmans**, Geometrisch open filters onder invloed van stroming en turbulentie, februari 1996.
- [6] **M. Hauer**, Probabilistische analyse van het falen van geometrisch open filters, verkennende notitie, maart 1996.
- [7] **M.A. Koenders**, Hydraulic criteria for filters, july 1985.
- [8] **Y. Shimizu, T. Tsujimoto & H. Nakagawa**, Experiment and macroscopic modelling of flow in highly permeable porous medium under free-surface flow, J. Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol. 8, No. 1, pp. 69 - 78, october 1990.
- [9] **C. Guoxiang & Y. Yongdi**, Resistance of flow on porous permeable bed, Proceedings Int. Symposium on Hydraulic Research in Nature and Laboratory, pp. 190 - 195, Wuhan, China, november 1992.
- [10] **C. Mendoza & D. Zhou**, Effects of porous bed on turbulent stream flow above bed, J. Hydraulic Engineering, Vol. 118, No. 9, pp. 1222 - 1240, 1992.
- [11] **R.B. Codell, S.R. Abt, T. Johnson & J.F. Ruff**, Estimation of flow through and over armored slopes, J. Hydraulic Engineering, Vol. 116, No. 10, pp. 1252 - 1269, 1990.
- [12] **A.F.E. Zagni & K.V.H. Smith**, Channel flow over permeable beds of graded spheres, J. Hydraulics Division, Vol. 102, No. 2, pp. 207 - 222, 1976.
- [13] **A.D. Gupta & G.N. Paudyal**, Characteristics of free surface flow over gravel bed, J. Irrigation and Drainage Engineering, Vol. 111, No. 4, pp. 299 - 318, 1985.
- [14] **A.C.W.M. Vrouwenvelder & J.K. Vrijling**, Dictaat b3: Probabilistisch ontwerpen, Civiele techniek TU Delft, 1996.
- [15] **J.K. Vrijling**, Dictaat f30: Probabilistisch ontwerpen in de waterbouwkunde, Civiele Techniek TU Delft, 1996.
- [16] **A. Sieben**, Hydraulics and morphology of mountain rivers: a literature survey, Communications on hydraulic and geotechnical engineering, Report no. 93 - 4, Faculty of Civil Engineering, Delft University of Technology, januari 1993.
- [17] **R.J. de Jong, H.J. Verhey & J.H. van Zwol**, WL-verslag Q891: Haalbaarheid van de toepassing van niet-zanddichte bodemverdedigingen, Delft, september 1990.
- [18] **J.R. Benjamin & C.A. Cornell**, Probability, statistics and decision for civil engineers, McGraw-Hill Inc., New York, 1970.
- [19] **W.T. Bakker & Th. van Doorn**, WL-publication no. 208: Near-bottom velocities in waves with a current, Delft, december 1980.
- [20] **W.T. Bakker & W.G.M. van Kesteren**, Near bottom velocities in waves with a current - analytical and numerical computations, Proceedings International Conferences on Coastal Engineering, pp. 1161-1177, 1984.
- [21] **H. Nakagawa & T. Tsujimoto**, Interaction between flow over a granular permeable bed and seepage flow - a theoretical analysis, J. Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol. 2, No. 2, pp. 1 - 10, 1984.
- [22] **D. Stephenson**, Rockfill in hydraulic engineering, Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.

In deze studie hebben de volgende symbolen de volgende betekenis:

$\rho$	=	dichtheid water
$\nu$	=	viscositeit water
$\nu_t$	=	turbulente viscositeit
$g$	=	versnelling zwaartekracht
$h$	=	waterstand
$i$	=	verhang
$\beta$	=	modelconstante voor modellering turbulente viscositeit
$C_a$	=	modelconstante voor modellering visceuse demping
$C_b$	=	modelconstante voor modellering turbulente demping
$d_t$	=	laagdikte toplaag
$D_{50t}$	=	kenmerkende diameter $D_{n50}$ toplaag
$D_{50f}$	=	kenmerkende diameter $D_{n50}$ filterlaag
$n$	=	porositeit
$n_{eff}$	=	effectieve porositeit
$\underline{u}$	=	filtersnelheid
$u$	=	poriesnelheid
$u_p$	=	gemiddelde poriesnelheid bij lineariseren poreus medium vergelijking
$u_*$	=	schuifspanningssnelheid ter plaatse van bovenkant toplaag
$u_s$	=	watersnelheid ter plaatse van bovenkant toplaag
$u_0$	=	constante watersnelheid in poreus medium bij stationair verhang
$u_g$	=	watersnelheid ter plaatse van grensvlak toplaag/filterlaag
$\tau$	=	schuifspanning
$\tau_0$	=	bodemschuifspanning ter plaatse van bovenkant toplaag
$\tau_g$	=	schuifspanning ter plaatse van grensvlak toplaag/filterlaag