

Speltheorie

Akiyama's Nim

Verslag

ter verkrijging van de graad van Bachelor of Science
aan de Technische Universiteit Delft,

door

Tim Trussner

Delft, Nederland

Begeleider

Dr. R.J. Fokkink

Samenstelling commissie

Dr. B. van den Dries,
Dr. W.G.M. Groenevelt



Contents

Samenvatting	1
1 Introductie	3
1.1 Onpartijdige Combinatorische Spellen	3
1.2 Gewonnen en Verloren Posities	4
1.3 Nim	5
1.4 Spel als een Graaf	6
1.5 Het Spel van Wythoff	8
1.5.1 Koude posities	8
1.5.2 Notatie	11
1.5.3 Hogere temperaturen	11
Referenties	13
2 Sprague-Grundy Values of the $\mathcal{R}$-Wythoff Game	15
2.1 $\mathcal{R}$ -Wythoff	15
2.2 Algoritme	15
2.3 Posities met temperatuur 0, 1 en 2	19
Referenties	24
3 Experimentele Resultaten van Akiyama's Nim	25
3.1 Spelregels	25
3.2 Bijna Veilige Combinaties met een Naief Algoritme	25
3.3 Alternatief Algoritme	28
3.4 Limieten van Coördinaten	32
conclusie	37
appendix	39

Samenvatting

Akiyama's Nim is een 3d versie van een onpartijdig combinatorisch spel genaamd Wythoffs Nim. Het spel van Wythoff kan met twee stapels munten gespeeld worden. Elke positie in dit spel komt overeen met een getal dat als temperatuur te zien is waarbij posities met temperatuur 0 koud genoemd worden. Er is een makkelijke formule voor de koude posities van Wythoffs spel. Voor hogere temperaturen zijn geen gesloten formules bekend. Door het aantal toegestane zetten te beperken is wel een formule voor posities met hogere temperaturen te vinden. De formule voor posities met temperatuur 1 en 2 worden voor deze beperkte versie gegeven. Nu kan het spel van Akiyama bekeken worden, dit is een versie van Wythoff met 3 stapels munten. Van dit spel is geen formule voor de koude posities bekend. Het is al heel moeilijk om een correct algoritme te maken. Daarom bekijk ik in dit verslag een vereenvoudigd algoritme. Van dit algoritme kunnen de onder- en bovengrenzen worden berekend die een indicatie geven van de afstand tussen koude posities. Het vermoeden is dat deze koude posities op een lijn liggen en er wordt een vermoeden van de helling van deze lijn gegeven.

1

Introductie

Voordat Akiyama's nim of het spel $\mathcal{R}$ -Wythoff besproken kan worden, wordt een algemene introductie van het relevante gedeelte van de speltheorie gegeven. Eerst de definitie van een onpartijdig spel, daarna worden posities bekeken vanuit waar de speler die aan zet is altijd verliest, de zogenaamde koude posities en hoe hier een winnende strategie uit volgt. Hierna wordt een spel genaamd nim bekeken en wordt uitgelegd hoe je spellen bij elkaar op kan tellen. Hier is de Sprague-Grundy functie belangrijk bij. Tot slot een variatie op Nim genaamd Wythoffs Nim. Dit is de 2d-variant van Akiyama's nim. Van het spel van Wythoff kunnen de koude posities worden berekend. Ook wordt gekeken naar een aantal eigenschappen van dit spel die niet allemaal bewezen kunnen worden, maar wel als we minder zetten toelaten zoals in hoofdstuk 2.

1.1. Onpartijdige Combinatorische Spellen

Onpartijdige combinatorische spellen zijn spellen waarbij de mogelijke zetten alleen afhangen van de huidige staat van het spel, niet de speler die aan zet is. Verder heeft iedere speler perfecte informatie, er zijn geen verborgen zetten en het spel hangt op geen manier van kans af. De definitie van een combinatorisch spel zoals in Ferguson [2] wordt gegeven.

Definitie 1. Een onpartijdig combinatorisch spel voldoet aan de volgende eisen

1. Er zijn 2 spelers.
2. Er is een verzameling van alle mogelijke posities.
3. De regels geven aan welke zetten toegestaan zijn vanuit een bepaalde positie. Deze legale zetten hangen niet af van de speler die aan zet is.
4. De spelers zijn om de beurt aan zet.

1

5. *Het spel eindigt als er geen toegestane zetten meer mogelijk zijn voor de speler die aan zet is. Deze speler heeft verloren onder de normale spelregels. Het is ook mogelijk om onder misère spelregels te spelen, hierbij verliest de speler die de laatste zet doet.*
6. *Het spel eindigt altijd in een eindig aantal stappen. Onafhankelijk van hoe het spel gespeeld wordt.*

1.2. Gewonnen en Verloren Posities

Een voorbeeld van een dergelijk spel is een Take-Away game. De posities zijn te zien als een stapel munten. De spelers zijn om de beurt aan zet en mogen 1, 2 of 3 munten van de stapel pakken. De laatste persoon die munten van de stapel kan pakken heeft gewonnen. Om een winnende strategie voor dit spel te bedenken, kunnen we met een kleine stapel beginnen. Neem 4 munten, speler 1 is aan zet. Speler 1 kan 1, 2 of 3 munten wegnemen, dus het aantal dat overblijft na deze zet is 3, 2, of 1. Speler 2 kan deze munten wegnemen en winnen. Dus bij 4 munten verliest de speler die aan zet is. Stel er liggen 5, 6 of 7 munten, dan brengt speler 1 het aantal naar 4 en wint, omdat speler 2 in een verloren positie terecht komt. Bij 8 munten verliest de speler die aan zet is weer, de mogelijke zetten leiden tot 5, 6, of 7 munten, dit zijn gewonnen posities voor de volgende speler. We noemen posities waarmee de speler die aan zet is wint 'warm' en de verliezende posities 'koud'.

Alle posities in een onpartijdig spel kunnen als warm of koud gelabeld worden.

1. Noem de eindposities koud
2. Noem elke positie die minstens één koude positie kan bereiken warm.
3. Label alle posities waarvan alle bereikbare posities als warm gelabeld zijn als koud.

Elke positie is te zien als een knoop in een gerichte graaf. De pijlen in deze graaf zijn hierbij de toegestane zetten. Door de knopen te labelen als hierboven wordt deze graaf in warme en koude knopen opgedeeld. Net zoals we zojuist met de Take-Away Game hebben gedaan. De koude posities zijn hier precies de stapels met een veelvoud van 4 munten.

Definitie 2. *De volgende eigenschappen karakteriseren alle warme en koude posities.*

1. *Alle eindposities zijn koude posities*
2. *Vanuit alle warme posities kan minstens 1 koude positie bereikt worden.*
3. *Vanuit alle koude posities kunnen alleen warme posities bereikt worden.*

De speler die op een warme positie begint, kan nu altijd winnen door een zet te doen die een koude positie geeft. De tegenstander zal het spel naar een warme positie brengen.

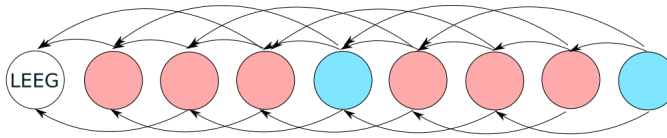


Figure 1.1: Warme en koude posities met een stapel munten. De positie zonder munten is ook een koude positie omdat het een eindpositie is.

1.3. Nim

Nim is vergelijkbaar met het muntspel van net. Nu mag van een stapel een willekeurig aantal munten genomen worden. Met één stapel is dit spel triviaal. De speler die als eerst aan zet is neemt alle munten en wint, dus het spel wordt pas interessant met meerdere stapels. Bij twee stapels is het makkelijk te zien dat een positie koud is als het aantal munten in de stapels gelijk is. Als speler 2 een aantal munten van de gelijke stapels neemt, maakt speler 1 de stapels steeds weer gelijk. Bij drie stapels is het patroon in de koude posities lastiger te zien. Om de koude posities van dit spel te bepalen hebben we de nim-som nodig.

Definitie 3. De nim-som van twee niet-negatieve getallen is de binaire optelling modulo 2. Ofterwijl gegeven twee niet-negatieve getallen en bijbehorende binaire representatie $x = x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + \dots + x_1 2^1 + x_0$ en $y = y_n 2^n + y_{n-1} 2^{n-1} + \dots + y_1 2^1 + y_0$, genoteerd als $x = (x_m x_{m-1} \dots x_0)_2$ en $y = (y_n y_{n-1} \dots y_0)_2$ met wordt de nim-som voor $m < n$ gegeven door

$$z = (z_n z_{n-1} \dots z_0)_2 = x \oplus y = \sum_{i=0}^n (x_i + y_i \bmod 2) 2^i. \quad (1.1)$$

Dus $z_i = x_i + y_i \bmod 2$ waarbij $x_i = 0$ als $i > m$ en $y_j = 0$ als $j > n$.

Dit definieert een groep op $\mathbb{N}_0$. Het resultaat van een nim som is altijd weer een geheel getal. De optelling is associatief, gegeven drie getallen $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ geldt $w = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ omdat optelling voor elke bit w_i optelling $\bmod 2$ is. Dit is associatief. De identiteit is 0 en de inverse van een getal x wordt gegeven door x zelf. Deze optelling voldoet dus aan alle eisen van een groep. Door de nim som van drie stapels uit te rekenen kunnen de koude posities van nim bepaald worden. We geven een positie aan met (x_1, x_2, x_3) het aantal munten in stapel 1, 2 en 3. De nim-som van de positie (25, 14, 13) wordt nu als volgt uitgerekend.

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \oplus \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

De nim-som kan per kolom bekeken worden, ofterwijl per macht van 2 in de binaire representatie. Als het aantal enen even is, dan is het resultaat voor die

1

kolom een 0. Bij een oneven aantal is het 1. Het aantal munten in een nim stapel wordt ook wel een nimber genoemd. Nu worden de koude posities van nim met drie stapels precies gegeven door alle posities waarvoor de nim-som van het aantal munten 0 is. Dus als de nim-som van de nimbers 0 is.

Stelling 1. *Laat $\mathcal{P}$ de verzameling zijn van alle posities met $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$ en laat $\mathcal{N} = \mathbb{N}_0^3 \setminus \mathcal{P}$, dan zijn dit precies de kouden en respectievelijk warme posities.*

Bewijs: Om dit bewijzen tonen we aan dat de verzameling van posities met nim-som 0 voldoet aan de karakterisering van koude en warme posities als in definitie 2.

1. Alle eindposities zitten in $\mathcal{P}$. Alleen $(0, 0, 0)$ is een eindpositie en hiervoor geldt $0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$.
2. Als $(x_1, x_2, x_3) \notin \mathcal{P}$, dan is er een legale zet naar een positie in $\mathcal{P}$. Kies de meest significante kolom met een oneven aantal enen. Deze bestaat altijd omdat de nim-som anders 0 is. Kies nu één van de x_1, x_2, x_3 met een 1 in deze kolom en trek hier een aantal munten vanaf zodat alle minder significante kolommen nu een even aantal enen bevatten. Nu is de nim-som 0.
3. Vanuit alle posities in $\mathcal{P}$ kunnen alleen posities in $\mathcal{N}$ bereikt worden. Neem x_1, x_2, x_3 zodat $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$. Stel dat de zet in de eerste stapel wordt gedaan, $x'_1 < x_1$, dan is het niet mogelijk dat $x'_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$. Dit is direct te zien door $x_2 \oplus x_3$ op te tellen. Dat geeft $x'_1 = x_1$, een tegenspraak. Dus (x'_1, x_2, x_3) zit in $\mathcal{N}$.

□

1.4. Spel als een Graaf

Alle spellen die we beschouwen kunnen ook op een gerichte graaf gespeeld worden. Een graaf $G = (X, F)$ heeft een verzameling X , de knopen en voor elke knoop $x \in X$ de eindpunten van de pijlen $F(x) \subset X$. De knopen zijn hierbij de posities en de pijlen geven de legale zetten, zoals in figuur 1.1. Een spel kan op een graaf gespeeld worden.

1. Speler 1 begint op $x_0 \in X$.
2. Spelers spelen om de beurt.
3. De speler die aan de beurt is in positie x kiest een $y \in F(x)$ als zet.
4. Een speler die geen zetten meer kan zetten, $F(x) = \emptyset$, verliest.

Een spel dat door 2 spelers uitgespeeld wordt is een pad in de graaf die bij het spel hoort. Alleen aan conditie 6) in definitie 1.2 moet nog voldaan worden. Elk spel moet in een eindig aantal stappen eindigen. Dus moet elk pad in de graaf eindige lengte hebben, ofwel progressively finite zijn.

Definitie 4. Een graaf $G = (X, F)$ is *progressively finite* als voor alle beginposities $x_0 \in X$ geldt dat elk mogelijk pad vanuit deze knoop eindige lengte heeft.

Als het aantal posities eindig is, komt dit precies overeen met alle gerichte grafen zonder cyclen. Nu we spellen als grafen hebben weergegeven kunnen we de Sprague-Grundy waarde van een positie uitrekenen. Deze functie geeft meer informatie dan 'warm' of 'koud'. Het is te zien als de temperatuur van een spel. Hiervoor is het eerst handig om de minimal excludant (mex) van een verzameling te definiëren.

Definitie 5. De mex van een eindige deelverzameling van $\mathbb{N}_0$ is het kleinste niet-negatieve gehele getal dat niet in de verzameling zit.

$$\text{mex}(S) = \min\{n \geq 0 : n \notin S\}$$

Definitie 6. De Sprague-Grundy functie die de temperatuur van een positie geeft heeft de volgende recursieve definitie:

$$\mathcal{G}(x) = \text{mex}\{\mathcal{G}(y) : y \in F(x)\}$$

De waarde van een eindpositie is 0.

De posities met temperatuur 0 zijn alle posities die geen zet kunnen doen naar andere posities met temperatuur 0. Vanuit de posities met temperatuur 1 kan wel een zet naar posities met temperatuur 0 gedaan worden, maar geen zetten naar posities met temperatuur 1 enzovoort. Als je de deelverzameling van alle posities met temperatuur g neemt, dan kunnen posities met temperatuur $h < g$ bereikt worden, maar geen andere posities met temperatuur g . Dit lijkt veel op de definitie van warm of koud, maar geeft extra informatie. Deze extra informatie kan gebruikt worden om een winnende strategie voor de som van een aantal spellen te bepalen. Het blijkt dat de posities met temperatuur 0 precies de koude posities zijn.

1. Alle eindposities hebben temperatuur 0.
2. Als een positie p een temperatuur ongelijk aan 0 heeft, dan is er een zet naar een positie q met temperatuur 0. Anders zou de temperatuur van p gelijk aan 0 zijn.
3. Als een positie temperatuur 0 heeft, dan is er geen zet naar een andere positie met temperatuur 0. Anders zou de temperatuur groter dan 0 zijn.

De posities met temperatuur > 0 zijn warm. Een spel met temperatuur 7 is nu op een bepaalde manier gelijk aan een nim stapel met 7 munten. Er kunnen zetten gedaan worden naar posities met temperatuur < 7 . Stel dat aan dit spel een nim stapel met 7 munten wordt toegevoegd, en dat de speler die aan zet is mag kiezen of hij een zet doet in het eerste spel, of dat hij een zet doet in de nim stapel, dan vormt dit een nieuw spel. De temperatuur van dit nieuwe spel is 0. Speler 1 kan een zet doen in spel 1 of de nim stapel. De temperatuur van spel 1 kan hoger worden, dan kan speler 2 een zet doen zodat de temperatuur weer 7 wordt.

Anders wordt de temperatuur van het spel of de nim stapel lager, en speler 2 past de temperatuur in één van beide aan zodat de temperaturen weer gelijk zijn. Een spel is dus altijd equivalent aan een nim stapel met als aantal munten de temperatuur. Nu kunnen ook drie spellen tegelijk gespeeld worden, dan is de temperatuur van het resulterende spel de nim-som van de individuele temperaturen. De winnende strategie is altijd om een zet te doen zodat de nim-som 0 wordt. Elk spel is dus gelijk aan een nimber en de temperatuur geeft een winnende strategie voor de som van spellen.

1.5. Het Spel van Wythoff

Wythoffs spel wordt met twee stapels munten gespeeld. Spelers nemen om de beurt een willekeurig aantal munten van één van de stapels, of een gelijk aantal van beide stapels. De speler die de laatste munten wegneemt heeft gewonnen. Dit is ook te zien als twee spelers die dezelfde dame naar links, onder en diagonaal naar links-onder moeten bewegen. De x en y coördinaat zijn hierbij het aantal munten in de eerste en tweede stapel. Wythoffs spel werd voor het eerst in Wythoff [3] omschreven. Een positie wordt weergegeven als (x, y) met x en y het aantal munten in de stapels. Wythoff gaf ook meteen een winnende strategie door de koude posities te geven. We gaan deze posities nu opnieuw afleiden.

1.5.1. Koude posities

Bekijk de koude posities op een kwart oneindig schaakbord. Posities worden gegeven door (a, b) met a de rij, verticaal omhoog en b de kolom, naar rechts. We kijken naar de koude posities (a_i, b_i) oplopend in de eerste coördinaat met $a_i \leq b_i$, dus rechts van de hoofddiagonaal. Het spel is symmetrisch, dus we berekenen wat Wythoff de veilige combinaties noemde. De spiegeling in de hoofddiagonaal (b_i, a_i) is ook koud. Noem $d = b - a$ de diagonaal van een positie. De eerste koude positie is de eindpositie $(0, 0)$. Alle posities die in één zet naar $(0, 0)$ kunnen zijn nu warm, dit zijn alle posities op rij 0, diagonaal 0 en kolom 0. De posities $(1, 2)$ en $(2, 1)$ kunnen nu alleen maar warme posities bereiken, dit zijn de volgende koude posities. nu kunnen weer alle posities op rij 1 en kolom 2 en rij 2 en kolom 1 en de diagonalen -1 en 1 warm genoemd worden, dit geeft als volgende koude posities $(3, 5)$ en $(5, 3)$ omdat alle volgers van deze posities warm zijn. Als we de veilige combinaties uit willen rekenen, ofterwijl alle koude posities onder de hoofddiagonaal, kijken we dus steeds naar de eerste rij of kolom p_k die nog niet in eerdere veilige combinaties is voorgekomen, en daarna de eerste diagonaal d_k die nog geen veilige combinatie bevat. Dit geeft veilige combinatie $(a_k, b_k) = (p, p + d)$. De eerste lege rij is de mex van de eerdere kolommen en diagonalen van veilige combinaties. De eerste lege diagonaal na diagonaal d is gewoon diagonaal $d + 1$. Dus de k e veilige combinatie wordt verkregen door het eerste getal dat je nog niet hebt gezien te nemen als eerste coördinaat. Voor de tweede coördinaat tel je er k bij op. Dit is samen te vatten in een algoritme dat de veilige combinaties geeft.

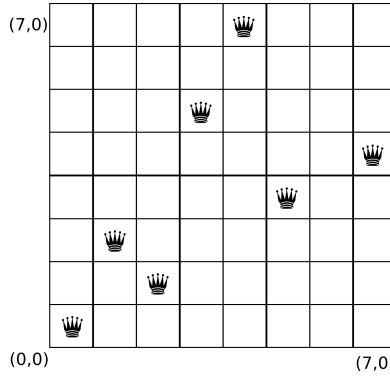


Figure 1.2: Eerste 4 veilige combinaties en bijbehorende spiegelingen.

Algoritme 1. Gegeven $T_0 = ((a_0, b_0), \dots, (a_{k-1}, b_{k-1}))$
 $= ((0, 0), (a_1, a_1 + 1) \dots, (a_{k-1}, a_{k-1} + k - 1))$ de rij van koude posities tot k .

1. $p \leftarrow \text{mex}\{a_i, b_i \mid 0 \leq i < k\}$.
2. $(a_k, b_k) \leftarrow (p, p + k)$.

Bewijs: Dit algoritme geeft een rij van coördinaten $T_0 = (a_k, b_k)_{k \geq 0}$, waarbij de eerste coördinaat oplopend is. We laten zien dat de elementen in deze rij en de spiegelingen alle posities opdelen in koude en warme posities als in definitie 2. Ieder getal in $\mathbb{N}_0$ komt minstens eenmaal voor in T_0 vanwege de mex in stap 1. Ieder positief getal komt niet meer dan eenmaal voor omdat voor $0 < i < k$ geldt dat $a_i < a_k$, omdat a_i de mex is van een kleinere verzameling, dan $a_i < b_i = a_i + i < a_k + k = b_i$. Dus ieder getal in $\mathbb{N}$ komt precies één keer voor. De koude posities voldoen nu aan de eisen van definitie 2:

1. beginpositie $(0, 0)$ zit in T_0 .
2. Er is vanuit een koude positie $(a, b) \in T_0$ geen zet naar een ander element in T_0 of reflectie te maken. Voor alle (a_k, b_k) geldt dat er geen $(a, b) \in T_0$ zit zodat $(a_k, b_k) \rightarrow (a, b)$ of $(a_k, b_k) \rightarrow (b, a)$ een toegestane zet is, omdat we eerder hebben aangetoond dat de rijen (a_n) en (b_n) disjunct zijn.
3. Voor $(r, r + d) \notin T_0$ rechts van de diagonaal is een legale zet naar een koude positie te maken. Als $a_d < r$ dan zijn we klaar, omdat (a_d, b_d) dan lager op dezelfde diagonaal ligt. Stel dit is niet zo, dan is er een k zodat $a_k = r$ of $b_k = r$. In het laatste geval is $(r, r + d) \rightarrow (b_k, a_k)$ een legale zet omdat $a_k < r + d$. In het eerste geval geldt $k < d$ omdat $a_k < a_d$. Dus $b_k = a_k + k = r + k < r + d$ dus $(r, r + d) \rightarrow (a_k, b_k)$ is een legale zet.

Dus T_0 en de reflecties in $x = y$ voldoen aan de verzameling van koude posities en omdat dit algoritme de elementen van T_0 in oplopende volgorde geeft, moet gelden

dat dit algoritme alle veilige combinaties in oplopende volgorde geeft. $\square$

De eerste paar posities door die door dit algoritme worden gegeven zijn

Table 1.1: Veilige combinaties

(0,0)	(11, 18)
(1,2)	(12, 20)
(3,5)	(14, 23)
(4,7)	(16, 26)
(6,10)	(17, 28)
(8,13)	(19, 31)
(9, 15)	:

Dit algoritme kost niet veel moeite om uit te voeren. Een formule die direct de k e veilige combinatie geeft zou nog makkelijker zijn en deze bestaat ook. De koude posities in figuur 1.2 lijken op een lijn te liggen. De helling van de lijn boven de hoofddiagonaal blijkt de gulden snede te zijn $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. De reflectie in de hoofddiagonaal geeft de helling van de andere lijn $\frac{1}{\phi}$.

Stelling 2. De veilige combinaties (a_k, b_k) worden gegeven door

$$([k\phi], [k\phi^2]) = ([k\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})], [k\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})]). \quad (1.2)$$

Bewijs: Nu moet bewezen worden dat (1.2) precies deze combinaties geeft. Bewering: Er is maar één rij van coördinaten $(a_k, b_k)_{k \geq 0}$ met de volgende eigenschappen:

1. De rij is oplopend in de eerste coördinaat.
2. Het verschil $b_k - a_k = k$.
3. Elk getal in $\mathbb{N}$ komt één keer voor in $\{a_i, b_i \mid i \geq 0\}$ en $(a_0, b_0) = (0, 0)$.

Stel er is nog zo'n rij $(c_k, b_k)_{k \geq 0} \neq (a_k, b_k)_{k \geq 0}$, dan is er een eerste j zodat $c_k > a_k$ omdat a_k steeds het kleinste getal is dat nog niet is voorgekomen wegens de mex. Nu wordt a_k overgeslagen in deze rij vanwege de monotoniciteit. Nu tonen we aan dat de rij in 1.2 aan deze drie eigenschappen voldoet. Dat aan eigenschap 1) wordt voldaan is direct duidelijk. Ook aan eigenschap 2) wordt voldaan. Het verschil tussen de x en y coördinaat is altijd k omdat $\frac{1}{2}k(1 + \sqrt{5}) - \frac{1}{2}k(3 + \sqrt{5}) = k$. Voor punt 3) tonen we aan dat iedere $n \in \mathbb{N}$ één keer in $\{[\phi k], [\phi^2 k] \mid k \geq 1\}$ voorkomt. Laat α en β de kleinste getallen zijn zodat $n + \alpha$ een veelvoud van ϕ is en $n + \beta$ een veelvoud van ϕ^2 .

$$\alpha = \frac{1}{2}p(1 + \sqrt{5}) - n \quad (1.3)$$

$$\beta = \frac{1}{2}p(3 + \sqrt{5}) - n \quad (1.4)$$

Er moet gelden dat

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad (1.5)$$

$$0 < \beta < \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad (1.6)$$

Vermenigvuldigvuldig (1.5) met $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ en (1.6) met $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ en tel bij elkaar op om de ongelijkheid

$$0 < \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\alpha + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\beta < 2 \quad (1.7)$$

Te krijgen. Dit is om te schrijven naar

$$0 < p + q - n < 2. \quad (1.8)$$

Omdat $p + q - n$ geheel is, moet dit precies 1 zijn.

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\alpha + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\beta = 1. \quad (1.9)$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan als $\alpha = \beta = 1$, maar dit kan geen oplossing zijn omdat $n + 1$ nooit een veelvoud van ϕ of ϕ^2 , beide irrationaal, kan zijn. Dus $\alpha \neq \beta$ en we tonen aan dat als $\alpha < 1$ dat $\beta > 1$ en omgekeerd. Laat $\psi = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ en $\alpha < 1$ dan $\alpha = (1 - \beta(1 - \psi))/\psi < 1$. Dit omschrijven naar β geeft $\beta > 1$. Voor $\alpha > 1$ geldt analoog dat $\beta < 1$. Stel nu dat $\alpha < 1$, dan $\beta > 1$ dus $n = \lfloor \frac{1}{2}p(1 + \sqrt{5}) \rfloor$. Als $\beta < 1$ dan $\alpha > 1$, dus $n = \lfloor \frac{1}{2}q(3 + \sqrt{5}) \rfloor$. Iedere n komt dus maar één keer voor als coördinaat in een veilige combinatie. $\square$

De koude posities, dus met temperatuur 0 zijn dus makkelijk uit te rekenen. Nu rest de vraag of dit ook voor posities met temperatuur groter dan 0 kan. Er is helaas geen polynomiaal algoritme bekend om andere waarden van g dan 0 uit te rekenen [1]. Wel kan een algoritme gegeven worden om een rij van willekeurige g -waarden uit te rekenen. Eerst is het handig om wat notatie te geven.

1.5.2. Notatie

We gaan hier naar bepaalde g -posities kijken. Een g -positie is een positie $p = (a, b)$ met $\mathcal{G}(a, b) = g$. Als $p \rightarrow q$ een toegestane zet is, dan wordt q een volger van p genoemd. Als $\mathcal{G}(q) = g$ dan is q een g -volger van p . De rij van g -posities wordt als $T_g = ((a_0^g, b_0^g), (a_1^g, b_1^g), \dots)$ weergegeven. Hierbij geldt dat $a_n^g \leq b_n^g$ en de a_n^g zijn oplopend. In het kort wordt soms $p_n^g = (a_n^g, b_n^g)$ geschreven en $d_n^g = b_n^g - a_n^g$ voor de diagonaal.

1.5.3. Hogere temperaturen

Er kunnen een aantal uitspraken gedaan worden over hogere temperaturen van het spel van Wythoff. In het bewijs van de koude posities zagen we al dat de elke rij en kolom precies één positie met temperatuur 0 heeft. Dit blijkt ook zo te zijn voor hogere temperaturen. Eerst zal ik dit aantonen met een direct bewijs.

Stelling 3. Voor alle gehele niet negatieve g en c bestaat een unieke niet negatieve r zodat $\mathcal{G}(r, c) = g$

Bewijs: Stel er is een rij r zonder g -waarde. Dan geldt voor iedere positie $(r, c), c \geq 0$ in deze rij 1) $\mathcal{G}(r, c) = h$ voor een $0 \leq h < g$. Of 2) (r, c) heeft een g -volger lager op dezelfde diagonaal of lager op dezelfde kolom. Geval 1) kan maar g keer voorkomen, $\{(r, c_i) | \mathcal{G}(r, c_i) < g\}$ is eindig, laat nu $M = \max_i \{c_i\}$. Geval 2) kan ook maar eindig vaak voorkomen, omdat een g -positie maximaal 1 keer op een rij voor kan komen. Er zijn r rijen onder rij r . Dus $\{(x_i, y_i) | \mathcal{G}(x_i, y_i) = g, x < r\}$ bevat maximaal r elementen. Laat nu $d = \max_i \{y_i - x_i\}$ en laat $p = \max\{r + d, M\} + 1$. Dan geldt voor (r, p) dat $\mathcal{G}(r, p) > g$ omdat $p > M$, maar ook geldt dat geen g -waarde bereikt kan worden, dus $\mathcal{G}(r, p) < g$. Dit is een tegenspraak. Elke rij bevat precies één g -waarde en vanwege de symmetrie geldt dit ook voor elke kolom. $\square$

Het volgende algoritme geeft een manier om de rij van g -posities uit te rekenen voor een willekeurige g . Er wordt net zoals bij de verloren posities alleen rechts van de hoofd diagonaal gekeken. Intuïtief gezien zoekt het algoritme de kleinste rij p waar nog geen g -waarde geplaatst is. Hier zoekt het vervolgens de eerste diagonaal d zodat deze diagonaal en de kolom $p + d$ nog geen g -posities bevat en $(p, p + d)$ nog niet bezet is door een h -positie met $0 \leq h < g$. Op deze manier wordt dus de eerste mogelijke positie met temperatuur g gevonden. In dit algoritme wordt aangenomen dat alle posities met temperatuur kleiner dan g , de rijen T_h , al bekend zijn. Om dit algoritme werkelijk uit te voeren is het voldoende om alle posities met temperatuur $0 \leq h < g$ tot en met een zeker rij R uit te rekenen, zodat T_h alle posities (a_i^h, b_i^h) bevat met $a_i^h \leq R$. Dit algoritme geeft dan de correcte g -posities tot en met rij R .

Algoritme 2. Laat $T_h = ((a_0^h, b_0^h), (a_1^h, b_1^h), \dots)$ voor $0 \leq h < g$ en de g -posities $T_g = ((a_0^g, b_0^g), \dots, (a_{k-1}^g, b_{k-1}^g))$ gegeven zijn en laat $S = \{a_i^g, b_i^g | 0 \leq i < k\}$ en $D = \{b_i^g - a_i^g | 0 \leq i < k\}$.

1. $p \leftarrow \text{mex}\{S\}$
2. Kies d zo klein mogelijk zodat
 - (a) $(p, p + d) \notin T_h$ for $0 \leq h < g$
 - (b) $d \notin D$
 - (c) $p + d \notin S$
3. $(a_k^g, b_k^g) \leftarrow (p, p + d)$

Bewijs: Merk op dat het algoritme altijd eindigt, in stap 1 en 3 is dat duidelijk. In Stap 2 zijn de verzamelingen S en D altijd eindig, dus deze d kan zo klein mogelijk gekozen worden. We bewijzen dat dit algoritme klopt door inductie naar k . Voor $k = 0$ zijn S en D leeg en geeft dit algoritme $p = 0$ en $d = g$ omdat $(0, h) \in T_h$ voor $0 \leq h < g$. Het klopt dat $(a_0^g, b_0^g) = (0, g)$ omdat de onderste rij nim is met één

stapel. Nu tonen we aan dat $(p, p + d) = (a_k^g, b_k^g)$ Voor willekeurige k . We weten dat $G(p, p + d) \geq g$ omdat deze niet in T_h zit voor $0 \leq h < g$ volgens stap 2(a). Er kan geen stap naar een eerder gegeven g -positie gemaakt worden door een zet over de rij omdat $p \notin S$. Ook niet over de kolom omdat $p + d \notin S$ en ook niet via de diagonaal omdat $d \notin D$. Er kan geen g -positie lager op de rij liggen omdat d zo klein mogelijk is gekozen, dus $G(p, p + d) \geq g$. Omdat $p = \text{mex}(S)$, moet gelden dat $p \leq a_k^g$, dus is $(p, p + d) = (a_k^g, b_k^g)$ de eerstvolgende g -positie. $\square$

13	13	14	12	11	16	15	17	2	0	5	6	19	20	9
12	12	13	14	15	11	9	16	17	18	19	7	8	10	20
11	11	9	10	7	12	14	2	13	17	6	18	15	8	19
10	10	11	9	8	13	12	0	15	16	17	14	18	7	6
9	9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17	6	19	5
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16	17	18	0
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3	14	15	13	17	2
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	0	2	16	17
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2	7	12	14	9	15
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1	8	13	12	11	16
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10	12	8	7	15	11
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13	14
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(a, b)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Table 1.2: Een 14 x 14 bord met daarop de temperaturen van wythoff

Referenties

- [1] Uri Blass and Aviezri S. Fraenkel. The Sprague-Grundy function for Wythoff's game. *Theoretical Computer Science*, 75(3):311–333, 1990. ISSN 03043975. doi: 10.1016/0304-3975(90)90098-3.
- [2] Thomas S. Ferguson. *Game Theory*. 2014. URL https://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/.
- [3] W.A. Wythoff. A modification of the game of nim. *Nieuw archief voor wiskunde*, 2(7):199–202, 1907.

2

Sprague-Grundy Values of the $\mathcal{R}$ -Wythoff Game

Het $\mathcal{R}$ -Wythoff spel is een beperkte versie van wythoffs spel, geïntroduceerd in Ho [2]. In het traditionele spel van Wythoff is niet elke zet nodig om dezelfde koude posities te houden. Ho [2] bewijst dat $\mathcal{R}$ -Wythoff de minimale regels heeft om dezelfde koude posities te behouden. De temperatuur van andere posities verandert wel ten opzichte van traditioneel wythoff. In Gu [1] worden de posities met temperatuur 2 en 3 bekeken. In dit hoofdstuk worden de resultaten uit deze publicatie behandeld, dit betreft een formule voor de 2-posities en een algoritme om de rij van g -posities uit te rekenen voor willekeurige g . Met behulp van dit algoritme wordt een alternatief bewijs van de koude posities en de 1-posities van $\mathcal{R}$ -Wythoff gegeven.

2.1. $\mathcal{R}$ -Wythoff

In $\mathcal{R}$ -Wythoff mag een aantal munten van de grotere stapel gepakt worden of een gelijk aantal van beide stapels. Dus als de speler in een zet x munten van de ene stapel pakt en y munten van de andere stapel met (x_0, y_0) het aantal munten in de stapels, dan moet gelden $x(x - y) = 0$ als $y_0 > x_0$ en $y(x - y)$ als $x_0 > y_0$ met $(x, y) \neq (0, 0)$ en $x \leq x_0, y \leq y_0$. Bij een gelijk aantal geldt gewoon $xy(x - y) = 0$ net als in traditioneel Wythoff. We zullen hier kijken naar de posities met temperatuur 2 en 3 en een vermoeden van de algemene vorm van posities met Sprague-Grundy waarden g zoals in Gu [1]. Zie voor de temperatuur op een 14×14 bord tabel 2.1.

2.2. Algoritme

Net als voor het traditionele Wythoff spel willen we weer een algoritme dat alle posities met een temperatuur g geeft. Hier wordt het algoritme gegeven uit Gu [1].

De posities met temperatuur g noemen we de g -posities. We kijken alleen naar de g -posities rechts van de hoofddiagonaal, dus (a, b) met a de rij en b de kolom met $a \leq b$. De rij van g -posities wordt genoteerd als $T_g = \{(a_0^g, b_0^g), (a_1^g, b_1^g), \dots\}$. Soms wordt het superscript g weggelaten als het duidelijk is dat het om de rij van g -posities gaat. Een g -positie wordt soms in het kort weergegeven als $p_k^g = (a_k^g, b_k^g)$. Er kan in dit spel maar één g -positie (a, b) per rij a zijn met $a \leq b$ omdat er anders een zet mogelijk is $(a, b') \rightarrow (a, b)$ met $b' > b \geq a$. Het volgende algoritme geeft alle g -waarden op volgorde van de eerste coördinaat maar er kunnen dus meerdere g -posities per rij of kolom voorkomen, zoals te zien is in tabel 2.1.

In de eerste stap van het algoritme wordt het kleinste getal gezocht dat nog niet in eerdere g -posities voor is gekomen. Dit wordt de rij waar de nieuwe g -positie geplaatst zal worden. Hierna wordt de kleinste $(p, p+d)$ gekozen zodat deze positie geen g -volger heeft langs de diagonaal en zodat deze positie niet al bezet is door een h -waarde met $h < g$. De diagonalen worden genoteerd als $d_i = b_i - a_i$. Om dit algoritme werkelijk uit te voeren is het voldoende om de eerdere rijen T_h uit te rekenen tot een bepaalde rij R . Dus voor iedere $h < g$ is het voldoende om alle posities met $a_i^h \leq R$ uit te rekenen.

Algoritme 3. *Algoritme voor het $\mathcal{R}$ -Wythoff spel.*

Gegeven de rijen van h -posities, T_h voor $0 \leq h < g$ en de rij van g -posities $T_g = ((a_0^g, b_0^g), \dots, (a_{k-1}^g, b_{k-1}^g))$, dan wordt (a_k^g, b_k^g) gegeven door

1. $p \leftarrow \text{mex}\{a_i, b_i : 0 \leq i < k\}$.
2. *Kies het kleinste niet negatieve getal d zodat*
 - (a) $d \notin \{d_i : 0 \leq i < k\}$,
 - (b) $(p, p+d) \notin T_h$ for $0 \leq h < g$.
3. $(a_k^g, b_k^g) \leftarrow (p, p+d)$.

Bewijs: We bewijzen het gevraagde met inductie naar k . Als $k = 0$, dan geeft het algoritme $(0, g)$, want $p_0^h = (0, h)$ voor alle $0 \leq h < g$. Stel dat $p_0^g, p_1^g, \dots, p_{k-1}^g$ bekend zijn. Er geldt $\mathcal{G}(p, p+d) \geq g$ omdat $(p, p+d) \notin T_h$ voor $0 \leq h < g$. Ook geldt dat $\mathcal{G}(p, p+d) \leq g$ omdat er geen g -positie in dezelfde rij zit wegens stap 1. En er zit geen g -positie in de diagonaal vanwege 2(a). Dus kunnen we concluderen dat $\mathcal{G}(p, p+d) = g$. Verder weten we dat $a_k^g \geq p$, omdat $a_k^g \neq a_i^g$ en $a_k^g \neq b_i^g$ voor alle $0 \leq i < k$, p is nu kleiner of gelijk aan a_k^g omdat het de mex is van alle getallen die hier aan voldoen. en omdat $p \leq a_k^g$ moet gelden dat $(a_k^g, b_k^g) = (p, p+d)$ omdat $(p, p+d)$ anders een g -positie zou zijn met $p < a_k^g$ en dus eerder in de rij van g -posities voor zou moeten komen. $\square$

Uit dit algoritme volgen twee stellingen die in Gu [1] worden gegeven. Voor elke Sprague-Grundy waarde g heeft iedere rij een positie met waarde g en zo ook iedere kolom vanwege de symmetrie van het spel. Verder heeft iedere diagonaal heeft een unieke positie met waarde g .

13	13	13	13	9	7	12	12	4	0	11	13	13	13	14
12	12	12	12	12	6	10	3	1	3	7	12	10	11	13
11	11	11	11	11	11	9	2	2	11	6	11	12	10	13
10	10	10	10	6	10	3	0	10	10	8	9	11	12	13
9	9	9	9	5	9	1	9	5	9	10	8	6	7	11
8	8	8	8	8	8	2	8	6	7	9	10	11	3	0
7	7	7	7	7	0	7	7	8	6	5	10	2	1	4
6	6	6	6	1	1	4	5	7	8	9	0	2	3	12
5	5	5	5	0	5	6	4	7	2	1	3	9	10	12
4	4	4	4	2	3	5	1	0	8	9	10	11	6	7
3	3	3	3	4	2	0	1	7	8	5	6	11	12	9
2	2	0	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(a/b)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Table 2.1: Een 14×14 bord met daarop de temperaturen van $\mathcal{R}$ -Wythoff, sommige rijen en kolommen hebben meerdere posities met temperatuur g .

Stelling 4. Voor alle gehele niet negatieve r en g geldt dat er een c is zodat $\mathcal{G}(r, c) = g$.

Bewijs: Neem r willekeurig. We bekijken de rij van g -posities. Stel $r = b_i^g$ voor een zekere i , dan voldoet $c = a_i$ aan het gevraagde. Als $r \neq b_i$ voor iedere $i \in \mathbb{N}_0$, dan is er een k zodat $r = \text{mex}\{a_i, b_i | 0 \leq i < k\} = a_k$. De rij (a_k) is strikt stijgend want $a_k = \text{mex}\{a_i, b_i | i < k - 1\} \cup \{a_{k-1}, b_{k-1}\}$ waarbij a_{k-1} de mex van de verzameling $\{a_i, b_i | i < k - 1\}$ is. Stel dat $a_k \geq r$ en er is geen $i < k$ zodat $a_i = r$, dan $a_k = \text{mex}\{a_i, b_i | i < k\} < i < k$ en dat kan niet. Dus is er een k zodat $(r, c) = (a_k^g, b_k^g)$. $\square$

Stelling 5. Voor alle gehele niet negatieve q en g geldt dat er een unieke r is zodat $\mathcal{G}(r, r + q) = g$.

Bewijs: Laat q de gegeven diagonaal zijn, voor het bestaan van een r zodat $\mathcal{G}(r, r + q) = g$ volstaat om te bewijzen dat in stap 2 alleen een getal boven q wordt gekozen als voor q niet aan 2(a) of 2(b) wordt voldaan. Als niet aan 2(a) wordt voldaan dan ligt er al een g -waarde op de diagonaal. Stap 2(b) kan maar een eindig aantal keren falen, eenmaal voor elke T_h met $0 \leq h < g$. Omdat er anders twee h -waarden op de diagonaal zouden liggen en een h -waarde kan geen h -volger hebben. De uniciteit volgt direct omdat een g -waarde geen g -volger kan hebben. Dus krijgt diagonaal q uiteindelijk een unieke g -positie volgens dit algoritme. $\square$

De posities met temperatuur ongelijk aan 0 verschillen met die van Wythoff. Het vermoeden conjecture 1 in Gu [1] zegt dat er zelfs een formule in gesloten

vorm voor iedere rij g -posities is. In dit hoofdstuk zal de formule voor de 2-posities gegeven worden. In de onderstaande warmteplot is te zien dat de temperatuur van $\mathcal{R}$ -Wythoff een stuk regelmatigiger lijkt dan traditioneel Wythoff.

2

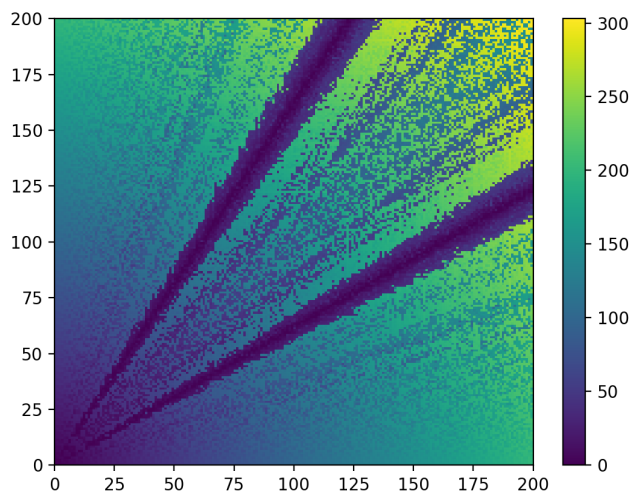


Figure 2.1: Warmteplot van de temperatuur van traditioneel Wythoff op een bord van 200×200 .

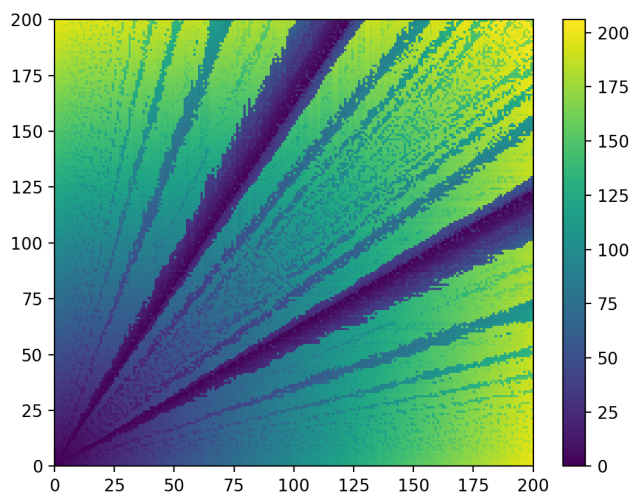


Figure 2.2: Temperatuur op een bord met $\mathcal{R}$ -Wythoff.

2.3. Posities met temperatuur 0, 1 en 2

Zoals in Ho [2] werd bewezen komen de koude posities in $\mathcal{R}$ -Wythoff overeen met de koude posities in het traditionele Wythoff spel. Hier geef ik een alternatief bewijs met behulp van algoritme 3.

Stelling 6. *De posities (a_n^0, b_n^0) met Sprague-Grundy waarde 0, worden gegeven door $(\lfloor n\phi \rfloor, \lfloor n\phi^2 \rfloor)$.*

Bewijs: Er zijn geen temperaturen kleiner dan 0, dus het algoritme voor de 0-posities wordt

1. $p \leftarrow \text{mex}\{a_i, b_i \mid 0 \leq i < k\}.$
2. $d \leftarrow \text{mex}\{d_i \mid 0 \leq i < k\}.$
3. $(a_k^0, b_k^0) \leftarrow (p, p + d).$

De waarde van d is in de eerste stap 0 en in iedere stap van het algoritme wordt de d aan de verzameling van verschillen toegevoegd. Dus $d_k = d_{k-1} + 1 = k$. Stap 2) wordt dus $d_k = k$. Hiermee is dit algoritme precies gelijk aan algoritme 1 voor de koude posities van Wythoff gegeven in het vorige hoofdstuk. $\square$

Nu kan een formule gegeven worden voor de 1-posities en de 2-posities. Hierbij wordt een g -positie vaak in het kort genoteerd als $p_k^g = (a_k^g, b_k^g)$, een vector dus. Definieer hierbij $p_k^g - (x, y) = (a_k^g - x, b_k^g - y)$.

Stelling 7. *De posities met Sprague-Grundy waarde 1 worden gegeven door de verzameling.*

$$\{(0, 1), (2, 2), (3, 6)(4, 6)\} \cup \{(\lfloor n\phi \rfloor - 1, \lfloor n\phi^2 \rfloor - 1) \mid n \geq 3\}.$$

Dus voor $k \geq 4$

$$p_k^1 = p_k^0 - (1, 1)$$

Bewijs: De eerste vier 1-posities zijn handmatig met het algoritme te verifiëren, zie tabel 2.1. Voor $k = 4$ geeft het algoritme $(5, 9) = p_4^0 - (1, 1)$. Stel dat voor een zekere $k \geq 4$ geldt dat het algoritme voor $4 \leq i < k - 1$ inderdaad geeft dat $p_i^1 = p_i^0 - (1, 1)$. We laten eerst zien dat $\text{mex}\{a_i^1, b_i^1 \mid 0 \leq i < k\} = a_k^0 - 1$. Door een hele verzameling te transleren wordt de mex van die verzameling ook getransleerd. Dus voor $n > 0$ weten we dat

$$\text{mex}\{a_i^0 - 1, b_i^0 - 1 \mid 0 \leq i < n\} = \text{mex}\{a_i, b_i \mid 0 \leq i < n\} - 1.$$

Deze verzameling bevat negatieve elementen, maar deze worden volgens de definitie $\text{mex}(S) = \min(\mathbb{N}_0 \setminus S)$ genegeerd. Verder is na te gaan dat $\{a_i^1, b_i^1 \mid i < 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ en $\{a_i^0 - 1, b_i^0 - 1 \mid i < 4\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 6\}$. Dit geeft

$$\text{mex}\{a_i^1, b_i^1 \mid i < k\} = \text{mex}\{0, 1, 2, 3, 4, 6\} \cup \{a_i^0 - 1, b_i^0 - 1 \mid 4 \leq i < k\} = a_k^0 - 1.$$

Dus het algoritme geeft in stap (1) dat $p = a_k^0 - 1$. Nu laten we zien dat $\text{mex}\{d_i^1 | i < k\} = k$. Het is te controleren dat $\{d_i^1 | i < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$ en als $i \geq 4$ dan $d_i^1 = (b_i^0 - 1) - (a_i^0 - 1) = b_i^0 - a_i^0 = d_i^0 = i$. Dus $\text{mex}\{d_i^1 | 0 \leq i < k\} = k$ als $k \geq 4$. Nu moet alleen nog aangetoond worden dat $(a_k^0 - 1, a_k^0 + k - 1) = (a_k^0 - 1, b_k^0 - 1)$ niet gelijk is aan een 0-positie. Dit volgt meteen omdat er maar één 0-positie per diagonaal kan zijn, anders is een zet naar tussen deze posities mogelijk. De positie $(a_k^0 - 1, b_k^0 - 1) = p_k^0 - (1, 1)$ ligt op dezelfde diagonaal als p_k^0 en kan dus niet gelijk zijn aan een andere 0-positie. Dus $p_k^1 = (a_k^0 - 1, b_k^0 - 1)$. $\square$

Nu zal een formule voor de 2-posities gegeven worden. Deze formule en alle overige stellingen met uitzondering van lemma 4 komen uit Gu [1].

Stelling 8. *De eerste 10 posities in T_2 zijn $(0, 2), (1, 1), (3, 4), (5, 8), (6, 11), (7, 11), (9, 16), (10, 16), (12, 21), (13, 21)$. Definieer nu*

$$\begin{aligned} (m_k^1)_{k \geq 0} : m_0^1 &= 10, m_1^1 = 17, m_{k+2}^1 = m_{k+1}^1 + m_{k+1}^1 \\ (m_k^2)_{k \geq 0} : m_0^2 &= 11, m_1^2 = 18, m_{k+2}^2 = m_{k+1}^2 + m_{k+1}^2 \\ (m_k^3)_{k \geq 0} : m_0^3 &= 12, m_1^3 = 20, m_{k+2}^3 = m_{k+1}^3 + m_{k+1}^3 \\ (m_k^4)_{k \geq 0} : m_0^4 &= 15, m_1^4 = 24, m_{k+2}^4 = m_{k+1}^4 + m_{k+1}^4 \end{aligned}$$

Voor $n \geq 10$ wordt de n de waarde in T_2 gegeven door

$$p_n^2 = \begin{cases} ([\phi n], [\phi^2 n]) - (2, 2) & \text{als } n = m_k^1, k \text{ even} \\ ([\phi n], [\phi^2 n]) - (4, 4) & \text{als } n = m_k^1, k \text{ oneven} \\ ([\phi n], [\phi^2 n]) - (2, 2) & \text{als } n = m_k^2, k \text{ even} \\ ([\phi n], [\phi^2 n]) - (4, 4) & \text{als } n = m_k^2, k \text{ oneven} \\ ([\phi n], [\phi^2 n]) - (2, 2) & \text{als } n = m_k^3, k \text{ even} \\ ([\phi n], [\phi^2 n]) - (4, 4) & \text{als } n = m_k^3, k \text{ oneven} \\ ([\phi n], [\phi^2 n]) - (4, 4) & \text{als } n = m_k^4, k \text{ even} \\ ([\phi n], [\phi^2 n]) - (2, 2) & \text{als } n = m_k^4, k \text{ oneven} \\ ([\phi n], [\phi^2 n]) - (3, 3) & \text{anders} \end{cases}$$

We zullen eerst aantonen dat de bovenstaande formule welgedefinieerd is.

Lemma 1. *Alle (m_k^i) zijn disjunct.*

Bewijs: We tonen aan met inductie dat $m_k^1 < m_k^2 < m_k^3 < m_k^4 < m_{k+1}^1$. Met inspectie is direct duidelijk dat dit geldt voor $k = 0$ en voor $k = 1$ omdat $m_1^4 = 24 < 27 = m_2^1$. Als we hebben dat

$$\begin{aligned} m_k^1 &< m_k^2 < m_k^3 < m_k^4 < m_{k+1}^1, \\ m_{k+1}^1 &< m_{k+1}^2 < m_{k+1}^3 < m_{k+1}^4 < m_{k+2}^1 \end{aligned}$$

Dan volgt door dit op te tellen dat $m_{k+2}^1 < m_{k+2}^2 < m_{k+2}^3 < m_{k+2}^4 < m_{k+3}^1$. Dus komt een getal nooit meermalen voor. $\square$

Het volgende lemma is nodig in het bewijs.

Lemma 2. Als $(a_n)_{n \geq 0}$ een rij positieve getallen is met $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, dan zijn er constanten c_1 en c_2 zodat $a_n = c_1 \phi^n + c_2 \psi^n$. Waarbij $\psi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = -\frac{1}{\phi}$. Bovendien als $|c_2| < \frac{1}{-\psi^{-1} - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dan

$$(\lfloor \phi a_n \rfloor, \lfloor \phi^2 a_n \rfloor) = \begin{cases} (a_{n+1}, a_{n+2}) & \text{als } c_2(-1)^n \geq 0 \\ (a_{n+1} - 1, a_{n+2} - 1) & \text{als } c_2(-1)^n < 0 \end{cases}$$

Bewijs: Dat $a_n = c_1 \phi^n + c_2 \psi^n$ volgt uit het feit dat ϕ en ψ oplossingen zijn van de karakteristieke vergelijking $r^2 - r - 1 = 0$. Oplossen $a_0 = c_1 + c_2$ en $a_1 = c_1 \phi + c_2 \psi$ voor c_1 en c_2 geeft de constanten. Nu kunnen we schrijven $\phi a_n = \phi(c_1 \phi^n + c_2 \psi^n) = c_1 \phi^{n+1} - c_2 \psi^{n-1} = c_1 \phi^{n+1} + c_2 \psi^{n+1} - c_2 \psi^{n+1} - c_2 \psi^{n-1} = a_{n+1} + c_2 \psi^n(-\psi^{-1} - \psi)$. Omdat $\psi < 0$ volgt nu precies de formule voor $\lfloor \phi a_n \rfloor$. De formule van $\lfloor \phi^2 a_n \rfloor$ volgt door het resultaat nog een keer met ϕ te vermenigvuldigen, dan is dit te herschrijven tot $a_{n+2} + c_2 \psi^n(-\psi^{-1} - \psi)$. $\square$

Laat nu T'_2 de posities zijn die in stelling (8) zijn berekend. We willen laten zien dat $T'_2 = T_2$.

Lemma 3. Laat $p'_n = (a'_n, b'_n)$ de n de positie in T'_2 zijn. Definieer de rij

$$S' := (a'_{10}, b'_{10}, a'_{11}, b'_{11}, a'_{12}, \dots)$$

Deze rij bevat geen herhalingen en overdekt

$$\mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 21\}$$

Bewijs: Definieer

$$S := (\lfloor 10\phi \rfloor - 3, \lfloor 10\phi^2 \rfloor - 3, \lfloor 11\phi^2 \rfloor - 3, \dots)$$

Deze rij bevat geen herhalingen zoals gezien in het bewijs van Wythoff (1.5) en

$$S = \mathbb{N}_0 \setminus \{\lfloor n\phi \rfloor, \lfloor n\phi^2 \rfloor \mid 0 \leq n < 10\} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 20\}$$

Deze komen overeen met S' behalve op de rijen $(m^1), (m^2), (m^3)$ en (m^4) . Dus definieer voor elke rij twee verzamelingen om deze waarden te vergelijken.

$$M^1 = (\lfloor m_0^1 \phi \rfloor - 3, \lfloor m_0^1 \phi^2 \rfloor - 3, \lfloor m_1^1 \phi \rfloor - 3, \lfloor m_1^1 \phi^2 \rfloor - 3, \lfloor m_2^1 \phi \rfloor - 3, \dots)$$

$$M'^1 = (\lfloor m_0^1 \phi \rfloor - 2, \lfloor m_0^1 \phi^2 \rfloor - 2, \lfloor m_1^1 \phi \rfloor - 4, \lfloor m_1^1 \phi^2 \rfloor - 4, \lfloor m_2^1 \phi \rfloor - 2, \dots)$$

En definieer op dezelfde manier $M_2, M'_2, M_3, M'_3, M_4, M'_4$. Nu kunnen voor alle (m^i) de constanten c_1 en c_2 uitgerekend worden zoals in lemma 2. De rijen kunnen geschreven worden als

$$m_n^1 = (5 + \frac{12}{\sqrt{5}})\phi^n + (5 - \frac{12}{\sqrt{5}})\psi^n \quad (2.1)$$

$$m_n^2 = (\frac{11}{2} + \frac{25}{2\sqrt{5}})\phi^n + (\frac{11}{2} - \frac{25}{2\sqrt{5}})\psi^n \quad (2.2)$$

$$m_n^3 = (6 + \frac{14}{\sqrt{5}})\phi^n + (6 - \frac{14}{\sqrt{5}})\psi^n \quad (2.3)$$

$$m_n^4 = (\frac{15}{2} + \frac{33}{2\sqrt{5}})\phi^n + (\frac{15}{2} - \frac{33}{2\sqrt{5}})\psi^n \quad (2.4)$$

De constanten c_2 zijn $-0.367, -0.090, -0.261, 0.121$. Ieder in absolute waarde kleiner dan $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447$. Dus geldt de formule in lemma 2. M^1 en M'^1 kunnen nu omgeschreven worden naar

$$M'^1 = (m_1^1 - 3, m_2^1 - 3, m_3^1 - 4, m_4^1 - 4, m_5^1 - 3, \dots)$$

$$M^1 = (m_1^1 - 4, m_2^1 - 4, m_3^1 - 3, m_4^1 - 3, m_5^1 - 2, \dots)$$

En dus $\{M'^1\} = \{M^1\} \cup \{m_1^1 - 3\} \setminus \{m_1^1 - 4\} = \{M^1\} \cup 14 \setminus 13$. M'^2 en M'^3 volgen precies hetzelfde patroon, dus $\{M'^2\} = \{M^2\} \cup 15 \setminus 14$, $\{M'^3\} = \{M^3\} \cup 17 \setminus 16$. M'^4 gaat iets anders, $c_2 > 0$ en de volgorde waarin $(2, 2)$ of $(4, 4)$ wordt afgetrokken is omgedraaid, hierdoor $\{M'^4\} = \{M^4\} \cup \{m_1^4 - 4\} \setminus \{m_1^4 - 3\} = \{M^4\} \cup 20 \setminus 21$. Dit alles geeft

$$\begin{aligned} \{S'\} &= \{S\} \cup \{14, 15, 17, 20\} \setminus \{13, 16, 21\} \\ &= \mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 21\} \end{aligned}$$

□

Gevolg 1. De elementen van T'_2 en de bijbehorende reflecties overdekken elke rij.

Bewijs: Het is voldoende te bewijzen dat de elementen van T'_2 heel $\mathbb{N}_0$ overdekken. Dit volgt direct uit lemma 3 en de eerste 10 waarden van T'_2 gegeven in stelling 8. □

Nu gebruiken we de volgende karakterisering van g -posities om aan te tonen dat de rij T'_2 precies alle elementen in T_2 geeft. Het bewijs is gebaseerd op lemma 8 gegeven in Jiao [3].

Lemma 4. Een rij van posities T_g is precies een rij g -posities als

1. $T_g \cap T_h = \emptyset$ voor alle $0 \leq h < g$.
2. Als $p \in T_g$ dan is er geen volger in T_g .
3. Als $q \notin T_0 \cup \dots \cup T_g$, dan heeft q een volger in T_g .

1. Element n van T_2' voor $n > 10$ ligt op diagonaal n . Volgens stelling 6 en 7 liggen de 0-posities en de 1-posities op $p_n^0 - (0, 0)$ en $p_n^1 - (1, 1)$ respectievelijk. De 1-positie p_n^1 ligt op diagonaal n , getransleerd met $(-1, -1)$ ten opzichte van p_n^0 en de 2-posities liggen op deze zelfde diagonaal getransleerd met $(-2, -2)$ of $(-4, -4)$ ten opzichte van p_n^0 . Er is dus geen overlap met de 0-posities en 1-posities.
2. Met de hand kan geverifieerd worden dat $\{b'_n - a'_n | 0 \leq n \leq 9\} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Verder $b'_n - a'_n = n$ voor $n \geq 10$, er is dus geen positie in T_2' met een volger

langs de diagonaal. En uit gevolg 1 volgt dat geen enkele positie een positie in T'_2 als rij-volger heeft.

3. Laat $q \notin T_0 \cup T_1 \cup 2'$. We tonen aan dat er een $p \in T'_2$ is als volger van q . Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat q onder de hoofddiagonaal ligt en schrijf $q = (r, r + d)$ met $d \geq 0$. Laat $p \in T'_2$ het unieke element op diagonaal d zijn. Als p onder q ligt, dan is dit een volger langs de diagonaal, dus stel dat dit niet zo is. Als $d \leq 9$ volgt meteen uit tabel 2.2 dat er een volger p is. Stel $d \geq 10$. Schrijf $p = p'_d$. volgens stelling 1 is er een k zodat $a'_k = r$ of $b'_k = r$. In het tweede geval weten we dat (b'_k, a'_k) een volger is van q . In het eerste geval geldt $a'_k = r < d$. Hieruit volgt dat $k < d$ omdat $(a'_n)_{n \geq 10}$ een stijgende rij is en $d \geq 10$. Dus de diagonaal van p'_k is kleiner dan de diagonaal van p'_d , dus $b'_k < r + d$. (a'_k, b'_k) is een rij-volger van q .

□

Referenties

- [1] Albert Gu. Sprague-Grundy Values of the R -Wythoff Game. *The electronic journal of combinatorics*, 22(2):1–15, 2015.
- [2] Nhan B A O Ho. Two variants of wythoff's game preserving its p -positions. *Journal of Combinatorial Theory*, 119(6):1302–1314, 2000.
- [3] Yang Jiao. On the Sprague-Grundy Values of the F -Wythoff Game. *Electr. J. Comb*, 20(1):1–12, 2013.

3

Experimentele Resultaten van Akiyama's Nim

In dit hoofdstuk wordt een versie van het spel van Wythoff bekeken met drie stapels munten. Er worden twee equivalente algoritmes gegeven om bijna veilige posities van dit spel uit te rekenen en met behulp van deze algoritmes worden uitspraken gedaan over de afstand tussen deze posities. Er lijkt geen gesloten formule te bestaan, er zitten een aantal onregelmatigheden in de veilige posities die dit probleem een stuk lastiger maken.

3.1. Spelregels

Akiyama's nim is te zien als een 3d versie van Wythoff. Het wordt gespeeld met 3 stapels met munten. Als (x, y, z) in $\mathbb{N}_0^3 / (0, 0, 0)$ een zet voorstelt, waarbij x, y en z munten van (x_0, y_0, z_0) , de 1e 2e en 3e stapel worden gehaald, dan moet een zet voldoen aan $xyz(x - y)(x - z)(y - z) = 0$ en $x \leq x_0, y \leq y_0, z \leq z_0$. Dit is te zien als een driedimensionale versie van Wythoff.

3.2. Bijna Veilige Combinaties met een Naief Algoritme

De echte veilige posities van Akiyama's nim zijn zeer onregelmatig en vereisen een ingewikkelder algoritme. Hier zal een algoritme gegeven worden om posities uit te rekenen die bijna veilig zijn. Er zijn geen zetten mogelijk tussen deze posities. Deze posities zullen gewoon veilige posities genoemd worden. De bijna veilige combinaties kunnen weer door een soortgelijk algoritme uitgerekend worden als voor het spel van Wythoff. Nu moeten de 3 verschillen tussen de coördinaten bijgehouden worden en de gebruikte getallen. Laat (A_n, B_n, C_n) de verloren posities zijn in volgorde van de eerste coördinaat. Dit kan omdat iedere A_n hoogstens één keer voor kan komen als eerste coördinaat. Stel dat deze tot $k - 1$ bekend zijn.

Laat nu $S = \{A_n, B_n, C_n | 0 \leq n < k\}$ en laat D de verzameling van verschillen tussen de coördinaten zijn, dus $D = \{B_n - A_n, C_n - B_n, C_n - A_n | 0 \leq n < k\}$. Nu wordt (A_k, B_k, C_k) gegeven door

Algoritme 4. *AkiyamaI*

1. $a \leftarrow \text{mex}(S)$
2. Kies de kleinste waarde voor b zodat
 - (a) $b - a \notin D$
 - (b) $b \notin S$
3. Kies de kleinste waarde $c \geq b$ zodat
 - (a) $c - b \notin D$
 - (b) $c - a \notin D$
 - (c) $c \notin S$
4. $(A_k, B_k, C_k) \leftarrow (a, b, c)$.

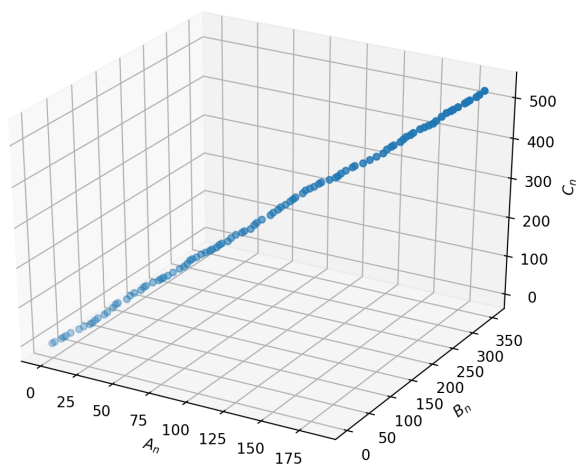


Figure 3.1: Eerste 100 veilige combinaties.

Table 3.1: Veilige combinaties

Veilige Combinaties	Verschillen
(0, 0, 0)	0
(1, 2, 3)	1, 2
(4, 7, 10)	3, 6
(5, 9, 13)	4, 8
(6, 11, 16)	5, 10
(8, 15, 22)	7, 14
(12, 21, 30)	9, 18
(14, 25, 36)	11, 22
(17, 29, 41)	12, 24
(18, 31, 44)	13, 26
(19, 34, 49)	15, 30
(20, 37, 53)	17, 16, 33
(23, 42, 61)	19, 38
(24, 45, 65)	21, 20, 41
(26, 51, 74)	25, 23, 48

Uit het algoritme volgt direct dat ieder getal boven 0 precies één keer in (A_n) , (B_n) of (C_n) voorkomt. Een verschil tussen twee coördinaten kan niet in verschillende veilige posities voorkomen. De eerste 14 worden in tabel 3.1 gegeven.

Het lijkt in het begin alsof de verschillen $B_n - A_n$ en $C_n - B_n$ gewoon de mex van de eerdere verschillen zijn. Maar dit patroon stopt bij (20, 37, 53). De mex van D is 16, maar 36 is al eerder gebruikt. Dit is een uitzondering, dus de veilige combinaties i waarvoor geldt $C_i - B_i \neq B_i - A_i$. De uitzonderingen zijn hier dikgedrukt. Er zijn 643347 van deze uitzonderingen in de eerste 3200000 veilige combinaties. Hieronder wordt de ratio van het aantal uitzonderingen ten opzichte van n weergegeven.

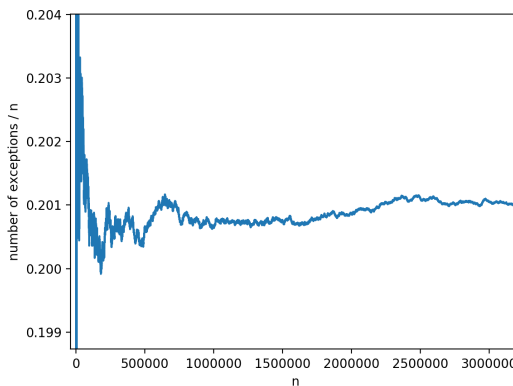


Figure 3.2: (Aantal uitzonderingen) / n tot en met $n = 3200000$.

Nu rest de vraag of deze posities op een lijn liggen zoals in Wythoff. Dit lijkt uit de experimentele data wel het geval te zijn. Voor de eerste 3200000 veilige combinaties kan nog gekeken worden of de verschillen begrensd zijn. Een verschil wordt genoteerd als $A'_i = A_i - A_{i-1}$.

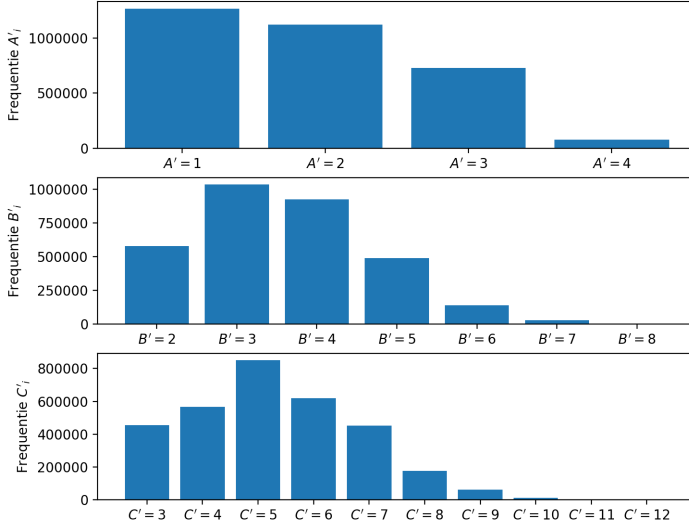


Figure 3.3: Frequentie van de verschillen $A'_i = A_i - A_{i-1}$, $B'_i = B_i - B_{i-1}$, $C'_i = C_i - C_{i-1}$ in de eerste 3200000 veilige combinaties.

Het lijkt zo te zijn dat voor de verschillen geldt dat $1 \leq A'_i \leq 4$, $2 \leq B'_i \leq 8$ en $3 \leq C'_i \leq 12$. Dit blijken inderdaad de precieze boven- en ondergrenzen te zijn voor de verschillen. Het verschil $C'_i = 12$ komt hierbij erg weinig voor, slechts 165 keer in de eerste 3200000 veilige combinaties en als eerst voor $i = 26185$.

3.3. Alternatief Algoritme

Uit deze experimentele data blijkt de afstand $C_n - B_n$ altijd de mex van de verschillen is. Het verschil $B_n - A_n - \text{mex } D$ is nooit meer dan 2. Dus er kan blijkbaar maar 2 keer een fout gemaakt worden. Dit heeft te maken met de onder- en bovengrenzen van de verschillen. Het algoritme dat we nu gaan bewijzen gaat er vanuit dat de resultaten uit de experimentele data waar zijn. Vervolgens zal met inductie bewezen worden dat dit algoritme dezelfde resultaten geeft als algoritme 4.

In dit nieuwe algoritme worden twee nieuwe rijen geïntroduceerd. De rij (e_n) gedefinieerd als $e_n = B_n - A_n$ en de rij $d_n = \text{mex}(D_n)$ waarbij D_n nog steeds is gedefinieerd als $D_n = \{B_i - A_i, C_i - B_i, C_i - A_i | 0 \leq i < n\}$. Dit algoritme gaat er

vanuit dat $d_n = C_n - B_n$ zoals uit experimentele resultaten blijkt. Verder zullen we aantonen dat de rijen (e_n) en (d_n) ook strikt stijgend zijn. Als het inderdaad zo is dat $3 \leq C'_n$ voor alle $n \geq 1$, dan zijn een aantal stappen in algoritme ?? overbodig. Stap 1 kan niet vereenvoudigd worden, er geldt nog steeds dat $A_n = \text{mex}(S_n)$ met $S_n = \{A_i, B_i, C_i, 0 \leq i < n\}$. Stap (1) geeft nu een bepaalde $a = \text{mex}(S_n)$ in stap (2) wordt gekeken naar het kleinste getal b waarvoor geldt dat

1. $b - a = e \notin D_n$,
2. $b \notin S_n$.

We zijn nu geïnteresseerd in $e = b - a$. Er moet gelden dat $e \geq \text{mex}(D_n)$ omdat $e \notin D_n$. Laat nu $d = \text{mex}(D_n)$, deze stap kan vereenvoudigd worden door eerst alleen te controleren of $a + d \in S_n$. Sterker nog, het zal blijken dat $a + d$ niet gelijk kan zijn aan een eerdere A_i of B_i , dus hoeft alleen gecontroleerd te worden of $a + d = C_i$ voor een $i < n$. Als dit niet zo is, dan hebben we $e = \text{mex}(D_n) = d$, er is dus geen uitzondering in deze stap. Zoniet, dan kan niet gelden dat $a + d + 1 = C_j$ voor een $j < n$ omdat we uitgaan van $C'_i = C_i - C_{i-1} \geq 3$. Dus hoeft alleen gecontroleerd te worden of $d + 1 \in D_n$. Op een zelfde soort manier zal blijken dat als $d + 1 \in D_n$, dan $d + 1 = e_i + d_i$ voor een zekere $i < n$. Hieruit zal volgen dat $d + 2 \notin D_n$. Verder volgt uit $C'_i \geq 3$ ook dat $a + d + 2 \notin S_n$ dus zijn we klaar. Het verschil $B_n - A_n$ in een uitzondering kan maar 2 verschillen van $\text{mex}(D_n)$. Uit de experimentele resultaten bleek verder dat $C_n - B_n = \text{mex}(D_n)$, dus stap (3) in algoritme 4 is volledig overbodig en we hebben $c = a + d + e$. Het nieuwe algoritme wordt nu:

Algoritme 5. (Akiyama II) Stel $S_k = \{A_i, B_i, C_i | 0 \leq i < k\}$ en laat D_k de verzameling van verschillen zijn $D_k = \{B_i - A_i, C_i - B_i, C_i - A_i | 0 \leq i < k\}$.

1. $a \leftarrow \text{mex}(S_k)$
2. $d \leftarrow \text{mex}(D_k)$
3. $e \leftarrow d$ of
 - (a) $e \leftarrow d + 1$ als $a + d = C_i$ voor $i < n$. Zoniet ga naar 4.
 - (b) $e \leftarrow d + 2$ als $d + 1 = d_i + e_i$ voor $i < n$
4. $b \leftarrow a + e$
5. $c \leftarrow a + e + d$
6. $(A_k, B_k, C_k) \leftarrow (a, b, c)$.

We tonen aan dat dit algoritme dezelfde resultaten geeft als algoritme 4. Daarvoor moeten eerst een aantal lemma's over dit algoritme bewezen worden. In dit algoritme is het verschil $B_k - A_k$ maximaal 2 hoger dan de mex van de verschillen. Deze fout wordt genoteerd als $u_k = e_k - d_k$. Een positie heeft een fout als $u_k \geq 1$. We noemen algoritme 4 vanaf nu (AI) en 5 (AII). Let op dat de volgende lemma's alleen over algoritme (AII) gaan. Later wordt pas bewezen dat dit algoritme dezelfde resultaten geeft als algoritme (AI).

Lemma 5. Voor de e_k in (AII) geldt dat $e'_k = e_k - e_{k-1} \geq 1$.

Bewijs: We tonen het gevraagde aan met inductie. Voor $k = 1$ hebben we $e_1 - e_0 = 1 - 0 = 0$. Stel dat dit algoritme tot en met stap $k - 1$ is uitgevoerd. Merk op dat $d'_k \geq 1$ omdat de mex van de verschillen altijd wordt gebruikt voor het verschil $C_i - B_i$. Stel dat $e'_k \leq 0$. Er zijn 3 gevallen:

1. $d'_k \geq 3$. Nu moet gelden dat $u_k \leq -3$, dit kan niet omdat $e_k - d_k \leq 2$.
2. $d'_k = 2$ en $u'_k = -2$. Dan $u_k = 0$ en $u_{k-1} = 2$. Maar dan $d_k = d_{k-1} + 2 = e_{k-1}$. Dit kan niet omdat $\text{mex}(D_k) = \text{mex}(D_{k-1} \cup \{e_{k-1}, d_{k-1}, e_{k-1} + d_{k-1}\})$.
3. $d'_k = 1$ en $u'_k \leq -1$. Dan moet gelden $u_{k-1} = 1$ of $u_{k-1} = 2$. We weten dat $u_{k-1} \neq 1$ omdat dan zou gelden $d_k = d_{k-1} + 1 = e_{k-1}$. Als $u_{k-1} = 2$ dan moet $d_k = d_{k-1} + 1 = e_i + d_i$ voor een $i < n$. Dus $d_k \in D_k$, dit kan niet. Dus moet gelden dat $e'_k \geq 1$.

□

Hieruit volgt dat dit algoritme de koude posities geeft

Stelling 9. Algoritme 5 geeft de koude posities.

Nu dit bekend is kan bewezen worden dat dit algoritme dezelfde posities geeft als algoritme 4.

Stelling 10. Algoritme 5 geeft dezelfde (A_i, B_i, C_i) als algoritme 4

Bewijs: We tonen dit aan met inductie. Voor $k = 0$ en $k = 1$ geven beide algoritmen inderdaad dezelfde posities. Stel de posities zijn hetzelfde tot een willekeurige $k > 1$, we tonen aan dat beide algoritmen, aangegeven door AI en AII, weer dezelfde posities opleveren. Merk op dat voor $0 \leq i < k$ geldt dat $A'_i \geq 1$ omdat in iedere stap n de $\text{mex } \text{mex}(S_n)$ wordt toegevoegd aan de verzameling S . $d'_i = C'_i - B'_i \geq 0$ ook omdat in iedere stap de $\text{mex } d_n = \text{mex}(D_n)$ wordt toegevoegd aan de verzameling D . in iedere stap van (AII). Samen met lemma 5 levert dit $B'_i = A'_i + e'_i \geq 2$ en $C'_i = A'_i + e'_i + d'_i \geq 3$. Stap 1 is in beide algoritmen hetzelfde, $a = \text{mex}(S)$.

Algoritme AI geeft nu een b , schrijf deze als $b = a + w$. Laat $d = \text{mex}(D)$, het is uit stap 2(a) duidelijk dat $w \geq d$. Stel $w = d$, dan $a + d \notin S$, dus AII geeft $e = d$ en beide geven dezelfde b . Stel dat $w = d + 1$, het is niet mogelijk dat $w = d \in D$, dus moet gelden $a + d \in S$. We tonen aan dat $a + d = C_i$ voor een $i < k$. We weten $a > A_i$ voor alle $i < k$. Verder is bekend dat de B_i stijgend zijn, dus we tonen aan dat $a + d > B_{k-1} = A_{k-1} + d_{k-1} + u_{k-1}$ met $u_{k-1} = e_{k-1} - d_{k-1}$. Omdat a en d altijd de mex van hun bijbehorende verzamelingen zijn weten we dat $a - A_{k-1} + d - d_{k-1} \geq 2$. Als $u_{k-1} \leq 1$ dan zijn we klaar. Stel $u_{k-1} = 2$, dan $d_{k-1} + 1 = e_i + d_i$ voor een $i < k$. Dus $d - d_{k-1} \geq 2$ en $a + d + 1 > B_{k-1}$. We weten dus dat $w = C_i$ voor een $i < k$, dus ook AII geeft $b = a + d + 1$. Stel AII geeft $w = d + 2$, we hebben laten zien dat $a + d > B_i$ voor $i < k$ en we weten $a + d = C_i$ voor een bepaalde i . We weten $C'_i \geq 3$ dus het is niet mogelijk dat $a + d + 1 \in S$. Dus moet gelden $d + 1 \in D$. Het is direct duidelijk dat $d + 1 > d_i$ voor alle $i < k$. Ook geldt dat $d + 1 > e_{k-1} = d_{k-1} + u_{k-1}$. Stel $u_k \leq 1$ dan volgt dit direct, als $u_{k-1} = 2$ dan geldt weer dat $d_{k-1} + 1 = e_i + d_i$ voor een $i < k$, dus $d - d_{k-1} \geq 2$ en $d + 1 > e_{k-1}$. Dus moet gelden dat $d + 1 = e_i + d_i$ voor een $i < k$. Algoritme AII geeft weer hetzelfde, $b = a + d + 2$. Het is niet mogelijk dat $a + d + 2 \in S$ weer omdat $C'_i \geq 3$. Ook kan het niet dat $d + 2 \in D$ omdat $d + 2 > e_i \geq d_i$ en $d'_{i+1} + e'_{i+1} \geq 2$ en $d + 1 = e_i + d_i$. Dus in alle gevallen geven AI en AII hetzelfde resultaat voor $b = a + e = a + w$.

Nu geeft AI een c , we tonen aan dat $c = a + e + d$. Als $c < a + e + d$, dan $c - b = c - (a + e) < d$, dit verschil is eerder voorgekomen, dan is er een zet mogelijk naar een eerdere koude positie, dus $c \geq a + e + d$. Het kan niet dat $a + e + d \in S$ omdat $a - A_{k-1} + e - e_{k-1} + d - d_{k-1} \geq 3$ zoals eerder is laten zien. Het is duidelijk dat $d \notin D$. Ook geldt $d + e \notin D$ omdat $d - d_{k-1} + e - e_{k-1} \geq 2$ dus $c - b = d$. Ook voor c worden dezelfde waarden gevonden. Dus beide algoritmen geven dezelfde resultaten. $\square$

Uit dit algoritme volgen meteen de ondergrenzen voor de verschillen A'_k , B'_k en C'_k . Namelijk 1, 2 en 3 respectievelijk. Nu kunnen we op zoek naar een bovengrens op de verschillen, zodat we uiteindelijk kunnen bewijzen dat alle oplossingen op één lijn liggen.

Lemma 6. Voor de verschillen $d'_k = d_k - d_{k-1}$ en $e'_k = e_k - e_{k-1}$ geldt $1 \leq d'_k \leq 4$ en $1 \leq e'_k \leq 4$.

Bewijs: We tonen eerst aan dat $d_k - d_{k-1} \leq 4$. Stel $d_k - d_{k-1} > 4$. Als $d_{k-1} + 1 = e_i + d_i$ voor een $i < k$ dan $d_{k-1} + 2 \neq e_{i+1} + d_{i+1}$ omdat $e'_{i+1} + d'_{i+1} \geq 2$. Dus $d_{k-1} + 2 = e_{k-1}$. Dan moet gelden $d_{k-1} + 3 = e_{i+1} + d_{i+1}$ omdat (e_n) en (d_n) oplopende rijtjes zijn met minstens verschil 2. Nu geldt dus dat $d_{k-1} + 4 \neq e_{i+2} + d_{i+2}$ en zeker niet gelijk aan een e_i of d_i met $i < k$. Dus dan moet $d_{k-1} + 4 = d_k$, dus $d'_k = 4$. Dit is in tegenspraak met de aanname. Stel dat $d_{k-1} + 1 = e_{k-1}$, dan $d_{k-1} + 1 = d_i + e_i$ en $d_{k-1} + 2 = d_k \neq d_i + e_i$. De laatste mogelijkheid is dat $d_{k-1} + 1 = d_i + e_i$ voor een bepaalde i . Dan $d_{k-1} + 2 = e_k$, $d_{k-1} + 3 = e_{i+1} + d_i + 1$ en $d_{k-1} + 4 = d_k \neq e_{i+3} + d_i + 3$. Dus $d'_k \leq 4$.

Nu rest nog te bewijzen dat $e_k - e_{k-1} \leq 4$. Stel dat $e'_k = d'_k + u'_k > 4$. Stel $u'_k = 2$, dan $u'_{k-1} = 0$, dus $d_{k-1} + 1 = d_i + e_i$ en $d_{k-1} + 2 = d_k$. Dus $e'_k = 4$. Stel $u_k = 1$ en $u_{k-1} = 0$, dan $d_{k-1} + 1 = d_i + e_i$ vervolgens $d_{k-1} + 2 = d_k$ en dus $e'_k = 3$. Stel $u_k = 2$ en $u_{k-1} = 1$, dan $d_{k-1} + 1 = e_k$ en $d_{k-1} + 2 = e_i + d_i$ en $d_{k-1} + 3 = d_k$. Dit geeft $e'_k = 3$. Anders geldt dat $e'_k = d'_k$ dus geldt altijd dat $e'_k \leq 4$. $\square$

Stelling 11. Voor de verschillen in de coördinaten van verloren combinaties geldt dat

$$\begin{aligned} 1 &\leq A_k - A_{k-1} \leq 4 \\ 2 &\leq B_k - B_{k-1} \leq 8 \\ 3 &\leq C_k - C_{k-1} \leq 12 \end{aligned}$$

Bewijs: De ondergrenzen zijn al in stelling 10 bewezen. We tonen eerst aan dat $A'_k \leq 4$. Stel $A'_k \geq 4$. Als $A_{k-1} + 1 = B_i$, dan $A_{k-1} + 2 = C_j$ en $A_{k-1} + 3 = B_{i+1}$ en $A_{k-1} + 4 \neq C_{i+1}$ en $A_{k-1} + 4 \neq B_{j+1}$ omdat dan $C'_{j+1} = 2$ en $B'_{j+1} = 1$. Dus $A'_k = 4$. Stel $A_{k-1} + 1 = C_i$, dan $A_{k-1} + 2 = B_j$ en meteen geldt $A_{k-1} + 3 \neq C_{i+1}$ en $A_{k-1} + 3 \neq B_{j+1}$ dus $A'_k = 3$. Er geldt dus altijd dat $A'_k \leq 4$.

Hieruit volgt dat $B'_k = A'_k + e'_k \leq 4 + 4 = 8$ en $C'_k = A'_k + e'_k + d'_k \leq 12$ vanwege lemma 6. Alle bovengrenzen van de verschillen zijn nu bekend. $\square$

3.4. Limieten van Coördinaten

Het is aannemelijk dat de volgende ratio's convergeren

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n} = \beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} = \gamma.$$

De decimale waarden zijn $\alpha = 1.8814109563827515$ $\beta = 3.582587242126465$ en $\gamma = 5.283763408660889$ voor $n = 3 \cdot 10^6$. We laten nu $(A(n), B(n), C(n))$ functies zijn die de opeenvolgende veilige combinaties geven. Definieer $A^{-1}(n)$, $B^{-1}(n)$ en $C^{-1}(n)$, met $A^{-1}(n) = \#\{i \mid A(i) < n\}$, het aantal getallen kleiner dan n dat een eerste coördinaat van een veilige positie is. Definieer $B^{-1}(n)$ en $C^{-1}(n)$

op dezelfde manier. De volgende lemma's zijn nuttig omdat veel van de tot nu toe genoemde rijen een partitie van $\mathbb{N}_0$ vormen. Omdat ieder getal in $\mathbb{N}$ precies één keer voorkomt, hebben deze rijen een dichtheid in de gehele getallen, de totale dichtheid moet 1 zijn. Dit principe wordt in stelling 12 gebruikt.

Lemma 7. *Laat $A(n)$ een strikt stijgende rij gehele niet negatieve getallen zijn. Als $\frac{A(n)}{n} \rightarrow \alpha$ voor $n \rightarrow \infty$ met $\alpha \neq 0$, dan $\frac{A^{-1}(n)}{n} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$.*

Bewijs: De rij $(A^{-1})_n$ neemt toe met 1 op alle $A(n) + 1$, anders blijft de rij constant. De rij $\frac{A^{-1}(n)}{n}$ daalt als $n \neq A(i) + 1$ voor een bepaalde i . Dus

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A^{-1}(n)}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A^{-1}(A(n))}{A(n)} = \lim_n \frac{n}{A(n)} = \frac{1}{\alpha} \quad (3.1)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A^{-1}(n)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A^{-1}(A(n) + 1)}{A(n) + 1} = \lim_n \frac{n + 1}{A(n) + 1} = \frac{1}{\alpha} \quad (3.2)$$

De $\liminf$ en $\limsup$ zijn gelijk dus de limiet bestaat en het gevraagde is bewezen. $\square$

Met dit lemma kunnen we een identiteit bewijzen voor rijen die convergeren en een partitie van $\mathbb{N}_0$ zijn.

Stelling 12. *Gegeven drie rijen, (A_n) , (B_n) en (C_n) met $A_n = \max\{A_i, B_i, C_i \mid 0 \leq i < n\}$ en (B_n) en (C_n) strikt stijgend en $A_i \neq B_i \neq C_i$ voor alle $i \geq 0$ en $A_0 = B_0 = C_0 = 0$ met verder*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n} = \beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} = \gamma$$

dan geldt

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1 \quad (3.3)$$

Bewijs: De rijen hebben geen overlap. Heel $\mathbb{N}$ wordt overdekt en (A_n) is strikt stijgend omdat A_n steeds de mex is. Dit geeft samen met lemma 7

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^{-1}(n) + B^{-1}(n) + C^{-1}(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{n} = 1$$

$\square$

Nu kan een vermoeden van de exacte waarde van de limieten α , β en γ opgesteld worden. Dit vermoeden gaat ervanuit dat de limieten convergeren en dat het aantal uitzonderingen, dus de verloren combinaties waarvoor $C_n - B_n = d_n \neq e_n = B_n - A_n$ ook convergeert bij deling door n . Definieer hiervoor eerst de rij van indices van uitzonderingen, (w_n) . Dit is de rij van alle indices i waarvoor geldt dat $C_i - B_i \neq B_i - A_i$. Deze is alleen welgedefinieerd als er oneindig veel uitzonderingen zijn. Vandaar het volgende vermoeden:

Vermoeden 1. Er zijn oneindig veel i zodat $C_i - B_i \neq B_i - A_i$. De rij (w_n) van indices i in oplopende volgorde waarvoor $C_i - B_i \neq B_i - A_i$ is dus welgedefinieerd en bovendien convergeert deze bij deling door n . De dichtheid noemen we ω .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{n} = \frac{1}{\omega}$$

Uit de experimentele data lijkt de ratio van uitzonderingen ten opzichte van n te convergeren, zie figuur 3.2. Het aantal uitzonderingen onder $n = 3200000$ bleek $w^{-1}(n) = 643347$. De ratio $\frac{n}{w_n} \approx \frac{w^{-1}(n)}{n} \approx 0.2010459$.

Definieer nu de rij (f_n) als alle e_i waarvoor geldt $e_i \neq d_i$ in oplopende volgorde met $f_0 = 0$. Dit kan ook gedefinieerd worden als $f_0 = 0$ en $f_n = e_{w_n}$ voor $n \geq 1$.

Stelling 13. Als geldt dat $\frac{d_n}{n} = \delta$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{n} = \frac{1}{\omega}$ en $\frac{A_n}{n} = \alpha$, dan is α de positieve reële oplossing voor x van

$$x^3 + \left(\frac{3}{2} + 3\omega\right)x^2 + \left(2\omega^2 - \frac{9}{2}\right)x - \frac{9}{2} - 6\omega - 2\omega^2 = 0,$$

en dan convergeren de rijen $\frac{B_n}{n} \rightarrow \beta$ en $\frac{C_n}{n} \rightarrow \gamma$ voor $n \rightarrow \infty$ met waarden

$$\beta = \alpha + \frac{3}{2} + \omega,$$

$$\gamma = \alpha + 3 + 2\omega.$$

Bewijs: De drie rijen d_n , $d_n + e_n$, f_n vormen een partitie van $\mathbb{N}$ en zijn ongelijk aan elkaar voor $n > 0$. Verder geldt $d_n = \max\{d_i, d_i + e_i, f_i \mid 0 \leq i < n\}$ omdat $f_i \geq e_i$ voor alle i . Hiermee voldoen deze rijen aan de eisen van stelling 12. Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n} = \delta$. Omdat $0 \leq e_n - d_n \leq 2$ voor alle $n \geq 0$ moet gelden dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_n}{n} = \delta.$$

Verder omdat (w_n) convergeert en strikt stijgend is hebben we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{w_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{w(w^{-1}(n))}}{w^{-1}(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_n/n}{w^{-1}(n)/n} = \frac{\delta}{\omega}.$$

Dus volgens stelling 12 geldt

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\delta} + \frac{\omega}{\delta} = 1$$

Dit oplossen voor δ geeft $\delta = \frac{3}{2} + \omega$. De rijen (A_n) , (B_n) en (C_n) voldoen ook aan de eisen van stelling 12. Omdat $B_n = A_n + d_n$ en $C_n = A_n + d_n + e_n$ geeft dit

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + \delta} + \frac{1}{\alpha + 2\delta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1.5 + \omega} + \frac{1}{\alpha + 3 + 2\omega} = 1$$

Dit oplossen voor α is hetzelfde als het vinden van de nulpunten van de derdegraads polynoom

$$x^3 + \left(\frac{3}{2} + 3\omega\right)x^2 + \left(2\omega^2 - \frac{9}{2}\right)x - \frac{9}{2} - 6\omega - 2\omega^2 = 0$$

□

De vermoedens zijn dus dat de drie rijen $\frac{w_n}{n}$, $\frac{A_n}{n}$ en $\frac{d_n}{n}$ convergeren. Als dit waar is, dan zijn de constanten α , β en γ alleen maar afhankelijk van de ratio uitzonderingen ten opzichte van n . We kunnen deze stelling testen door de gevonden ratio van uitzonderingen in te voeren voor ω . Dit geeft $\delta = 1.7010459$ en voor α zijn drie reële oplossingen te vinden met de formule van Cardano, waarvan één positief, dit geeft $\alpha \approx 1.88122$, $\beta \approx 3.58227$ en $\gamma \approx 5.28332$. Elk tot op 3 decimalen gelijk aan de gevonden ratio's voor $\frac{A_n}{n}$, $\frac{B_n}{n}$ en $\frac{C_n}{n}$ voor $n = 3200000$.

Conclusie

Spellen worden al snel ingewikkelder als meer toegestane zetten vanuit posities toegevoegd worden. Nim met twee stapels munten is zeer eenvoudig op te lossen, alle posities met evenveel munten in beide stapels zijn koud, de temperatuur is precies de nim-som van het aantal munten per stapel. Als je ook toestaat dat een gelijk aantal munten van beide stapels weggenomen mag worden, dan liggen de koude posities ineens op twee lijnen met als helling de gulden snede en de inverse van de gulden snede. Dit is het spel van Wythoff. Voor de koude posities is nog wel een gesloten formule te maken maar hogere temperaturen hoef je niet aan te beginnen. Als je hier dan weer een aantal zetten illegaal maakt, de zetten waarbij van de kleinere stapel wordt gepakt, dan blijven de koude posities hetzelfde en zijn ineens wel weer formules voor posities met hogere temperaturen te maken. Dit was $\mathcal{R}$ -Wythoff. Tot slot werd het spel van Akiyama bekeken waarbij het principe van Wythoffs spel uitbreidt voor drie stapels munten, waarbij je zetten (x, y, z) laat voldoen aan $xyz(x - y)(x - z)(y - z) = 0$. Nu wordt de temperatuur zo onregelmatig dat er zelfs geen formule voor de koude posities lijkt te zijn. Wel kan nog steeds een algoritme gemaakt worden om de koude posities uit te rekenen en deze werd gegeven. Uit een nieuwe versie van dit algoritme kon een onderen bovengrens op de afstand tussen de koude posities bepaald worden. Voor de coördinaten (A_k, B_k, C_k) geldt dat $1 \leq A_k - A_{k-1} \leq 4$, $2 \leq A_k - A_{k-1} \leq 8$ en $3 \leq A_k - A_{k-1} \leq 12$. Tot slot werd een vermoeden geformuleerd dat deze posities op een lijn liggen. Als dit vermoeden waar is, dan is een manier gegeven om de helling van deze lijn te bepalen. Deze bleek van het gemiddeld aantal uitzonderingen af te hangen.

Appendix

Om de 3200000 koude posities van Akiyama's nim uit te rekenen is het naieve algoritme in Java geïmplementeerd. Deze slaat ze op in een textbestandje dat vervolgens door python gelezen kan worden waar vervolgens experimenten gedaan konden worden.

```
1 import java.io.PrintWriter;
2 import java.math.BigInteger;
3 import java.util.ArrayList;
4 import java.util.HashMap;
5
6 public class Akiyama {
7
8     public HashMap<Long, Integer> usedIntegers = new HashMap<Long, Integer>();
9     public HashMap<Long, Integer> differences = new HashMap<Long, Integer>();
10    public ArrayList<Long> A;
11    public ArrayList<Long> B;
12    public ArrayList<Long> C;
13
14    public int N = 3200000;
15
16    public Akiyama() {
17        calculate();
18    }
19
20    public long mex(HashMap<Long, Integer> set, long startFrom) {
21        long idx = startFrom;
22        while(set.containsKey(idx)) idx++;
23        return idx;
24    }
25
26    public void calculate() {
27        long mexInt = 0;
28        long mexDif = 0;
29        A = new ArrayList<Long>(N);
30        B = new ArrayList<Long>(N);
31        C = new ArrayList<Long>(N);
32        long a, b, c, d;
33        for(int i = 0; i < N; i++) {
34            a = mex(usedIntegers, mexInt);
35            mexInt = a;
36            d = mex(differences, mexDif);
37            mexDif = d;
38            b = a + d;
39            while(usedIntegers.containsKey(b) || differences.containsKey(b-a) ) b++;
40            c = b+d;
41            while(usedIntegers.containsKey(c)
42                || differences.containsKey(c-b)
43                || differences.containsKey(c-a)) c++;
```

```
44     A.add(a);
45     B.add(b);
46     C.add(c);
47     usedIntegers.put(a, 0);
48     usedIntegers.put(b, 1);
49     usedIntegers.put(c, 2);
50     differences.put(b-a, 0);
51     differences.put(c-b, 1);
52     differences.put(c-a, 2);
53     if(i%1000==0) System.out.println(i);
54 }
55 try {
56     PrintWriter writer = new PrintWriter("akiyamaM32.txt", "UTF-8");
57     for(int i = 0; i < N; i++) {
58         writer.println(String.format("%d %d %d", A.get(i), B.get(i), C.get(i)));
59     }
60     writer.close();
61 } catch(Exception e) {
62     ;
63 }
64 }
65
66 public static void main(String[] args) {
67     new Akiyama();
68 }
69 }
```