

Modellering van een riviermeander

P. van der Plas

Juli 2007

Delft

Bachelorverslag voor de opleiding Technische Wiskunde

Technische Universiteit Delft



Bachelor-commissie:

Prof. dr. ir. A. W. Heemink

Drs. A. Verweij

Dr. P. Wilders

Dr. J. W. van der Woude

Πάντα ρεῖ

Inhoudsopgave

1	Inleiding	11
2	Geometrie en riviergegevens	13
2.1	De Dommel	13
2.2	Rivierkarakteristieken	14
2.3	Bijzonderheden	14
2.4	Meetgegevens	15
2.5	Het meetgebied	15
2.6	Bodemprofiel	16
3	Shallow water equations	19
3.1	De vergelijkingen	19
3.2	Implementatie in <i>SIMONA</i>	21
4	Roostergeneratie	25
4.1	Gestructureerde roosters	25
4.2	Orthogonaliteit	25
4.3	Bilineaire transformatie	27
4.4	Conforme afbeeldingen	28
4.4.1	Parametrische ruimte als tussenstap	30
4.5	Elliptische roostergeneratie	31
4.5.1	Orthogonalisatie langs de randen	31
4.5.2	Forcing functies	32
4.6	Variationele methoden	33
4.6.1	Klassieke functionalen	34
4.6.2	Verdere verbetering	36
4.7	Vergelijking aan de hand van een testcase	36
4.7.1	Conclusies	37
4.7.2	Roosterkeuze voor gebruik in <i>SIMONA</i>	38
5	Mathematische, fysische en numerieke modelaspecten	41
5.1	Terugkoppeling op de meetresultaten	41
5.2	Natuurkundige aspecten	41
5.3	Modelleringsproces in <i>SIMONA</i>	45
5.3.1	Modeluitvoer	45
5.3.2	Convergentie	46
5.3.3	Massabehoud	46

6	Numerieke Resultaten	47
6.1	Referentiemodel zonder eddy-viscositeit	47
6.1.1	Convergentie	47
6.1.2	Massabehoud	49
6.1.3	Stroomsnelheid en waterniveau	51
6.2	Model met eddy-viscositeit $0.0075 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$	55
6.2.1	Convergentie en massabehoud	55
6.2.2	Stroomsnelheid en waterniveau	55
6.3	Algemene opmerkingen	55
7	Modelvergelijking	57
7.1	Bespreking	57
8	Conclusies	61
A	MATLAB programmacodes	63
A.1	Schwarz-Christoffel roostergeneratie	63
A.2	Elliptische roostergeneratie	63
A.3	Variationele roostergeneratie	64
B	SIMONA invoerbestand	67
B.1	Modelinvoer versie 2.x	67
C	Waterstand checkpoints	69
C.1	Referentiemodel zonder eddy-viscositeit	69

Voorwoord

Voor u ligt het rapport van het modelleringsproject ter afsluiting van mijn bacheloropleiding. In dit project is kennis gemaakt met numerieke stromingsmodellering. Dankzij onderzoek naar het maken van een orthogonaal rooster is ervaring opgedaan met numerieke wiskundige methoden en functionaalanalyse. Voor het ontwerp en de eerste optimalisatiestappen van het riviermodel is kennis gemaakt met modelleringsprocedures en enkele natuurkundige principes met betrekking tot rivierstromen.

Dankwoord

Allereerst ben ik dank verschuldigd aan dr. P. Wilders die mij gedurende het project heeft begeleid. Dank ben ik verschuldigd aan de promovendi Julius Harry Sumihar en Nils van Velzen voor de hulp die zij hebben geboden bij het gebruik van het softwarepakket *SIMONA*. Op het gebied van roostergeneratie en bodeminterpolatie heb ik veel gehad aan de hulp van Herman Kernkamp, medewerker aan het Waterkundig Laboratorium te Delft. André Brouwer en Michel de Nijs hebben het voor mij mogelijk gemaakt op de faculteit Civiele Techniek gebruik te maken van het softwarepakket Delft-3D.

Zonder het volgende reeds bestaande werk was uitvoering van het bachelorproject in de vorm zoals deze nu is niet mogelijk geweest:

- *Main flow velocity in short and sharply curved river bends*, H.J. de Vriend & H.J. Geldof (1983) [5]
- *Application of three two-dimensional depth-averaged models to flow in river bends*, Abdul A. Khan & Kenichi Koshino (2000) [1]

Eerder verricht werk door studenten aan de Technische Universiteit te Delft heeft mij vooral in de opstartfase geholpen:

- *Spline-interpolatie en meshgeneratie, De Dommel* [16]. Hier is een eerste stap gezet voor de interpolatie van de gebiedsranden en roostergeneratie aan de hand van Sepran routines.
- *Longitudinale snelheid van een Nederlands riviersegment* [17]. De in dit verslag gebruikte modelinvoer heeft mij in de startfase op weg geholpen met het pakket *SIMONA*.

Voor de foto's van het riviersegment van de Dommel dank ik mijn vader Jan van der Plas, een enthousiast amateur-fotograaf.

Abstract

Bij het modelleren van rivieren leveren de bochten over het algemeen een uitdaging. Deze vormen dan ook uitstekend testmateriaal voor een model. Al jaren maakt Rijkswaterstaat in verschillende projecten gebruik van het modelleringspakket *SIMONA*. Dit is een eindige-volume modelpakket gebaseerd op de *shallow-water-equations*, bedoeld voor het modelleren van gebieden die in verhouding tot het stroomgebied relatief ondiep zijn. Het pakket *SIMONA* wordt voornamelijk gebruikt voor het modelleren van grote rivieren, meren en zeeën. Om de toepasbaarheid van dit pakket op kleine meanderende rivieren te onderzoeken is het pakket uitgeprobeerd op een riviersegment uit de Dommel. De gemaakte modellen zijn gebaseerd op de meetgegevens uit *Main flow velocity in short and sharply curved river bends*, DeVriend en Geldof, 1983 [5].

Meanderende rivieren kunnen doorgaans niet op een rechtlijnig rooster gemodelleerd worden. Daarom dient het riviergebied door een orthogonaal kromlijinig rooster beschreven te worden. In de praktijk wordt gebruik gemaakt van quasi-orthogonale roosters. *SIMONA* rekent alleen met de orthogonale componenten en verwaarloost de niet-orthogonale componenten. Voor een kwalitatief goed model is het dus zaak de orthogonaliteitsafwijking van het rooster zo klein mogelijk te houden. Voor het genereren van quasi-orthogonale roosters kan gebruik gemaakt worden van conforme afbeeldingen, elliptische roostergeneratie en verschillende variationele methoden. Aan de hand van de orthogonaliteitskwaliteit in de twee opeenvolgende bochten worden enkele van deze methoden met elkaar vergeleken. Stromingsberekeningen zijn uitgevoerd voor een gebied bestaande uit een bocht in de Dommel. De resultaten zijn vergeleken met metingen en met gepubliceerde uitkomsten van de modellen *CCHE2D*, *RMA-2* en *FESWMS-2DH* die eerder met elkaar zijn vergeleken in *Application of Three Two-Dimensional Depth-Averaged Models to Flow in River Bends*, Khan & Koshino, 2004 [1].

Het blijkt dat *SIMONA* goed met deze pakketten kan concurreren en op sommige punten zelfs betere resultaten behaalt. Er dient opgemerkt te worden dat mogelijk nog betere resultaten behaald kunnen worden door te zoeken naar betere modelparameters.

Hoofdstuk 1

Inleiding

Niets is zo blijvend als verandering. Hier is in dit Bachelorproject ook vanuit gegaan. In dit verslag bespreken we de *steady-flow* modellering van een riviersegment uit de Dommel. Er wordt verondersteld dat de rivierstroom naar een *steady state* convergeert en vervolgens onveranderd blijft stromen. In die zin is het hier wel mogelijk - in tegenstelling tot het bekende gezegde - twee keer voet te zetten in dezelfde rivier.

Het riviersegment bestaat uit twee opeenvolgende scherpe bochten en levert hiermee uitstekend materiaal voor modelvergelijking. Er zijn al eerder modellen gemaakt van hetzelfde riviersegment. In 2000 zijn door Khan en Koshino drie Amerikaanse riviermodelleringspakketten op de twee bochten in de Dommel met elkaar vergeleken [1]. Het betreft hier een vergelijking van de modellen *CCHE2D*, *RMA-2* en *FESWMS-2DH*. Eerder al, in de jaren tachtig, zijn twee modellen gemaakt door De Vriend [5].

De modellen uit [1][5] evenals de modellen uit dit project zijn gemaakt op basis van meetgegevens die terug te vinden zijn in *Main flow velocity in short and sharply curved river bends*, DeVriend en Geldof, 1983 [5].

Het blijkt dat het pakket *SIMONA* op het voorbeeldgebied van de Dommel goed met de drie bovengenoemde Amerikaanse modellen kan concurreren. Uit eerste vergelijkingen is gebleken dat in ieder geval twee van de Amerikaanse modellen mindere resultaten behalen dan *SIMONA*.

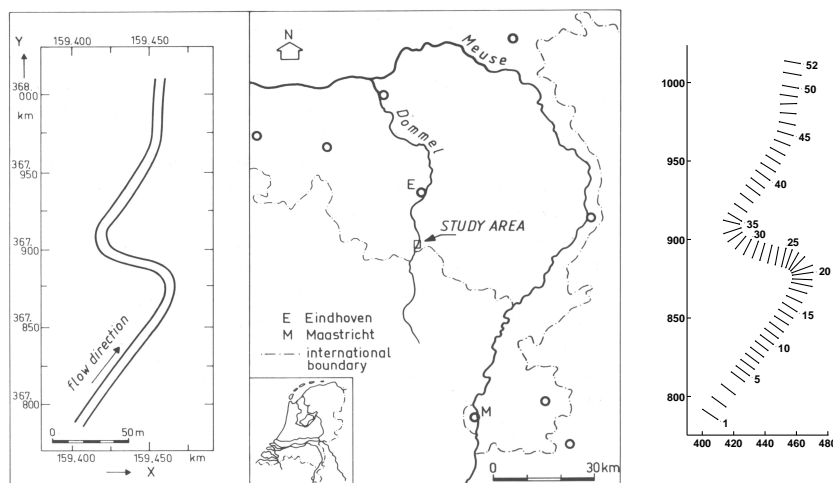
In hoofdstuk 2 wordt een bespreking gegeven van het riviergebied. Vervolgens komt in hoofdstuk 3 en 4 vooral de technische implementatie aan bod. Daarna wordt gekeken naar enkele natuurkundige aspecten van het riviermodel in hoofdstuk 5, gevolgd door een bespreking van de numerieke resultaten in hoofdstuk 6.

Hoofdstuk 2

Geometrie en riviergegevens

2.1 De Dommel

De rivier de Dommel¹ begint in België en heeft een totale lengte van 95 km. Op het punt waar de rivier bekeken wordt is deze al redelijk tot ontwikkeling gekomen. Het rivierseg-



Figuur 2.1: Beschrijving uit [5] van de locatie van het riviersegment en een overzicht van de meetdoorsnedes.

ment dat bekeken wordt bevindt zich ongeveer 25 km. onder Eindhoven, vlak boven de Belgische grens, tussen de twee plaatsen Borkel en Schaft. In dit gebied is de rivier sterk meanderend met soms nog scherpere bochten dan hier bekeken worden. De rivier is gemiddeld een halve meter diep en heeft een breedte-diepte verhouding van ongeveer 12.

Steady Flow Uit de verrichte metingen blijkt dat op de korte termijn geen sprake is van grote variatie in stroomsnelheid alsmede het bodemprofiel. We zullen in het modelleringsproces daarom uitgaan van convergentie naar een *tijdsinvariante rivierstroom*. De snelheid van de rivier over het hele stroomgebied varieert tussen de 0.5 en 1.0 m s⁻¹. Op het

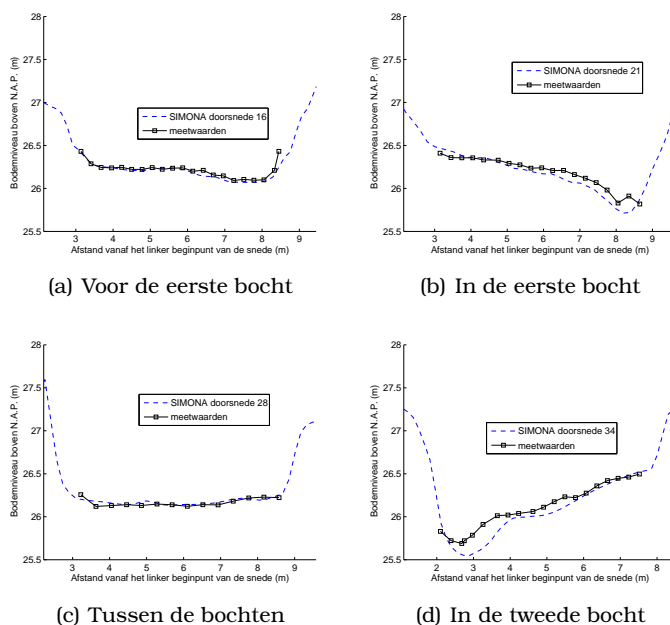
¹meer algemene informatie over de Dommel is te vinden op de webpagina van het Waterschap de Dommel, <http://www.dommel.nl/>

riviersegment dat gemodelleerd is werd door De Vriend [5] een gemiddelde longitudinale stroomsnelheid van 0.5 m s^{-1} gemeten.

Shallow water equations Het stuk rivier dat bekeken wordt heeft een lengte van ongeveer 285 m. In verhouding tot de lengte is de diepte klein genoeg om te modelleren op basis van de *shallow-water-equations* [3]. Details hierover zijn terug te vinden in hoofdstuk 3.

2.2 Rivierkarakteristieken

De rivier heeft vrij steile randen² en in de buitenkant van de bochten is de waterdiepte aanzienlijk groter. De diepte varieert weinig in de tijd en ook de stroomsnelheid verandert weinig in de tijd.



Figuur 2.2: Bodemniveaus door het riviersegment heen. De weergegeven meetwaarden zijn van metingen later in de maand mei van 1980. De *SIMONA* dieptewaarden zijn gebaseerd op metingen uitgevoerd aan het begin van mei 1980.

2.3 Bijzonderheden

DeVriend vermeldt in zijn bespreking dat de rivier in de binnenkant van de tweede bocht een kleine opeenhoping heeft van vegetatie. Dit kan kleine afwijkingen in de modelresultaten ten opzichte van de meetresultaten opleveren.

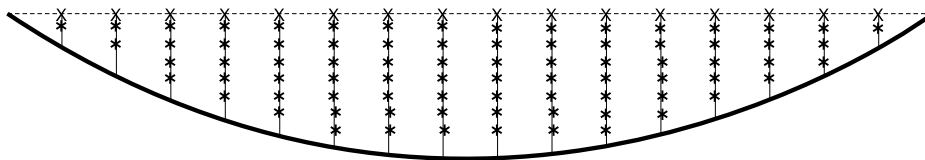
Documentatie over de rivier is niet overal even compleet of even consistent. Zo zijn er bijvoorbeeld geen snelheidsmetingen voor de eerste drie riviersnedes beschikbaar. Dit betekent dan ook dat we voor het bepalen van de snelheden op de instroomsnede afhankelijk zijn van extrapolatie vanaf snede 4 of de berekende debietwaarde uit [1].

²dit is goed te zien in de foto van de eerste bocht op het voorblad van het rapport.

Een tweede probleem bestaat uit het feit dat de riviermetingen meerdere keren zijn verricht verspreid over een hele maand. De dieptemetingen zijn aan het begin van de maand verricht en de waterstanden iets later in de maand. Hoewel de variatie over het algemeen niet groot is, zijn er enkele uitschieters tot ongeveer 10 à 20 cm. Dit heeft tot gevolg dat lichte afwijkingen in de modelresultaten onvermijdelijk zijn.

2.4 Meetgegevens

In 1980 zijn metingen uitgevoerd op 52 doorsnedes van het riviersegment. De meetdoorsnedes variëren in lengte tussen de ongeveer 10 m. en 12 m. De metingen van het grondniveau hebben dus ook plaatsgevonden buiten het stroomgebied zelf. Het meetgebied komt dus niet overeen met het stroomgebied, maar is aanzienlijk groter. In [1] en [16] worden de randen van het meetgebied dan ook onterecht als de oevers omschreven. De



Figuur 2.3: Meetgegevens op een meetsnede. Normaalsnelheden in de punten *, waterhoogte in X en de grondniveaus verspreid over de rivierbodem en een stuk daarbuiten.

volgende metingen zijn uitgevoerd [5]:

- grondniveau op de 52 meetsnedes in meters boven N.A.P. De coördinaten van de linkerpunten van de snedes worden in het vervolg $x_l^{(1)}, \dots, x_l^{(52)}$ en $y_l^{(1)}, \dots, y_l^{(52)}$ genoemd. De coördinaten van de rechteruiteindes van de snedes $x_r^{(1)}, \dots, x_r^{(52)}$ en $y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(52)}$. De dieptemetingen zijn verricht op verschillende dagen in mei 1980. In de metingen zijn geen grote verschillen waarneembaar en daarom wordt de rivierbodem in de modellering als onveranderlijk beschouwd.
- normaalsnelheden op de snedes in m s^{-1} en waterhoogtes op dezelfde coördinaten in meters boven N.A.P. De snelheden zijn op verschillende afstanden op de snedes uitgevoerd. Op iedere afstand zijn metingen op verschillende dieptes verricht (zie figuur 2.3). De waarden waarop het model getoetst wordt zijn verkregen door dieptemiddeling van de meetgegevens.

2.5 Het meetgebied

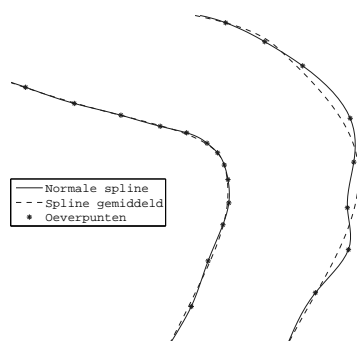
Voordat een bodemprofiel en rooster gemaakt kunnen worden moeten de 2×52 meetpunten op de randen van het meetgebied geïnterpoleerd worden. Een natuurlijke methode is een cubische spline door de punten te leggen³. Dit geeft een gladde benadering. De spline-interpolatie is uitgevoerd op de verwisselde coördinaten $(y_r^{(i)}, x_r^{(i)})$ en $(y_l^{(i)}, x_l^{(i)})$. De standaardvorm van splineinterpolatie kan namelijk alleen op injectieve functies toegepast worden. De verwisseling van de coördinaten is nodig om te voorkomen dat we door de aanwezigheid van de S-bocht dubbele functiewaarden krijgen.

³voor spline interpolatie is gebruik gemaakt van de MATLAB functie `spline(x,y,X)`

Aanpassing De vele aanwezige kleine bochten in de randen van het meetgebied leveren een probleem voor orthogonale roostergeneratie (zie hiervoor hoofdstuk 4). Er is daarom voor gekozen het volgende recept te gebruiken voor interpolatie van de randpunten:

1. leg een spline door de randpunten met oneven index i
2. leg een spline door de randpunten met even index i
3. neem het gemiddelde van de twee splines

De resulterende interpolant is nog steeds glad, maar de ongewenste lokale details zijn weggeveegd. De aanpassingen in de rand vormen geen probleem aangezien de daadwerkelijke rivierstroom niet in de buurt komt van de randen van het meetgebied (zoals beschreven in paragraaf 2.4). Details in de kromming van de randen van het meetgebied zeggen dus niets over details in de kromming van de rivierstroom. Details van de daadwerkelijke rivierstroom kunnen bepaald worden door de waterstand met het grondniveau te vergelijken.⁴



Figuur 2.4: Resultaat in de eerste bocht bij het genereren van een gemiddelde spline. De resultaten in de andere bocht zijn vergelijkbaar. De rechte stukken van het meetgebied blijven vrijwel onveranderd.

2.6 Bodemprofiel

Tijdens het modelleren zullen we het bodemniveau in andere punten nodig hebben. De meetwaarden⁵ op de snedes zijn naar de rest van het gebied geïnterpoleerd. Dit proces wordt in het Engels ook wel *scattered data interpolation* genoemd.

Voor het interpoleren van de dieptegegevens is op basis van de (x, y) coördinaten van de dieptemeteerpunten een *Delaunay triangulatie* gemaakt⁶. Interpolatie van de meetgegevens naar een bepaald punt (x^*, y^*) bestaat vervolgens uit twee stappen:

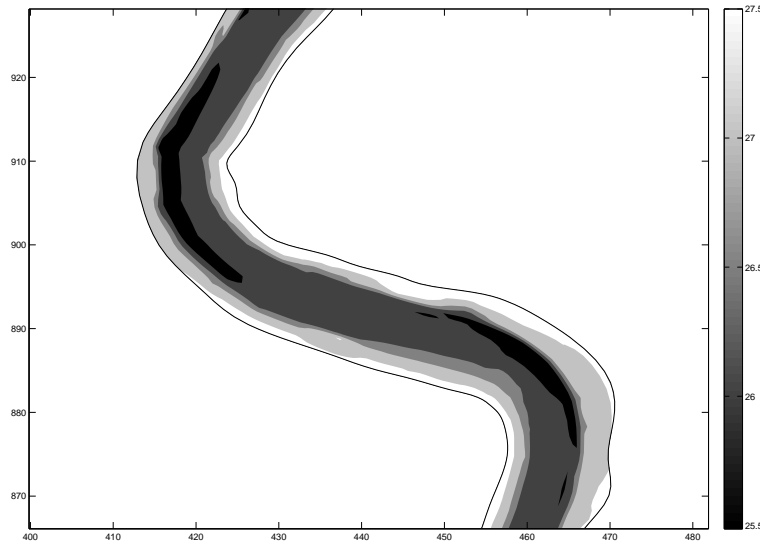
⁴hier ligt een mogelijkheid voor toekomstige modelverbetering. Bij het genereren van een rooster is tot nu toe uitgegaan van de randen van het meetgebied en niet van de randen van het wateroppervlak. Zie ook de conclusies in hoofdstuk 4.

⁵voor het bodemprofiel is gebruik gemaakt van de metingen uitgevoerd tussen 1 en 5 mei 1980 [5]

⁶binnen dit project is in eerste instantie een eigen interpolatiefunctie geschreven gebaseerd op de Delaunay toolbox van MATLAB; het blijkt ook mogelijk deze vorm van interpolatie in een keer uit te voeren met behulp van de MATLAB-functie `griddata(x,y,z,XI,YI)`.

1. het bepalen van de omringende Delaunay driehoek van het punt (x^*, y^*)
2. lineaire interpolatie naar het punt (x^*, y^*) binnen de gevonden driehoek

Het resultaat van deze methode is te zien in de figuren 2.5 en 2.6.



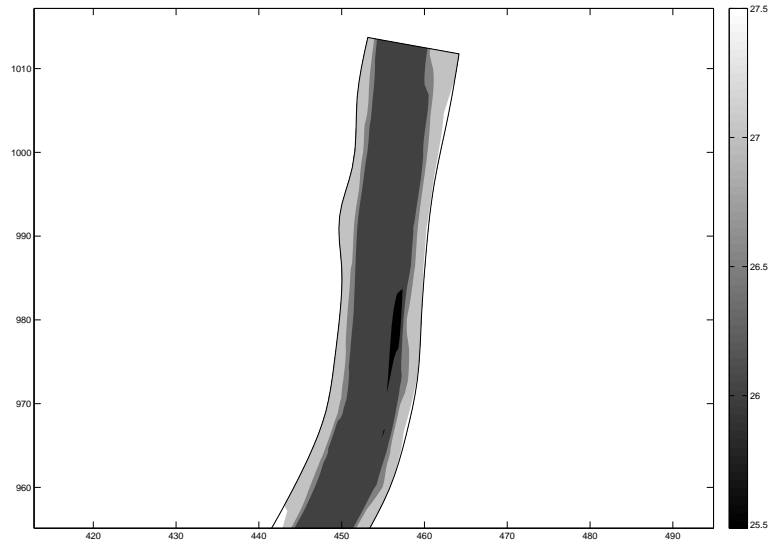
Figuur 2.5: De getekende rand komt overeen met de rand van het meetgebied en niet met de de oevers van de rivier zelf, die afhankelijk zijn van de waterstand.

Bij het interpoleren met deze methode ontstaat voor een klein aantal punten het probleem dat deze buiten een van de driehoeken vallen. Dit komt doordat de roosterpunten door de splineinterpolatie van de oeverpunten net iets buiten de randen van het meetgebied kunnen vallen. Er is daarom voor gekozen de bodemmetingen langs alle sneden naar buiten toe uit te breiden met het bodemniveau gelijk aan het niveau van de buitenste punten op de doorsnedes. Dit levert een natuurlijk resultaat.

Er bestaan andere methoden om de bodemhoogtes te interpoleren maar omdat de meetgegevens geclusterd zijn op de riviersneden levert Delaunay triangulatie een zeer natuurlijke interpolatie. Het is ook geprobeerd de bodemmetingen te interpoleren met behulp van C^1 -cubische-spline-interpolatie [18] geïmplementeerd in het programma *CSABATHY*⁷. Voor veel twee-dimensionale interpolatieproblemen vormt dit een goede en snelle methode. De methode is echter niet geschikt voor de sterk geclusterde meetdata waar we in het geval van de Dommel mee te maken hebben.

⁷ontwikkeld door Pavel Sakov; op het moment van schrijven beschikbaar op de webpagina <http://www.marine.csiro.au/~sakov/>

Bijzonderheden in de rivierbodem In figuur 2.5 is goed te zien dat het bodemniveau in de twee bochten aanzienlijk lager is dan in de rest van het riviersegment. Merk op dat in figuur 2.6 hetzelfde te zien is in het licht gekromde uitstroomgebied.



Figuur 2.6: Diepte in het uitstroomgebied. Opvallend is dat er in de laatste flauwe bocht een klein gebied is met van relatief grote diepte

Hoofdstuk 3

Shallow water equations

In dit hoofdstuk worden de modelvergelijkingen geïntroduceerd. Vervolgens wordt aandacht besteed aan technische details van de implementatie in SIMONA. Voor een uitgebreide bespreking van de natuurkundige details van het model evenals een beschrijving van pre-processing en post-processing wordt verwezen naar hoofdstuk 5.

3.1 De vergelijkingen

De rivier wordt gemodelleerd aan de hand van de **shallow-water equations**¹. Gegeven door:

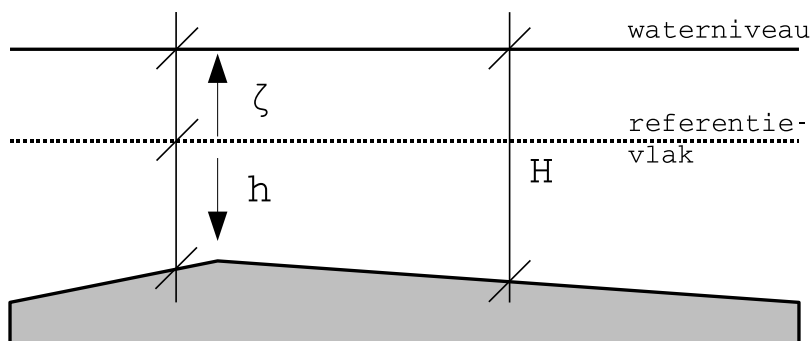
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + gu \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{HC^2} &= \frac{\rho_a C_d W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{\rho_w H} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + gv \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{HC^2} &= \frac{\rho_a C_d W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{\rho_w H} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv) &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

¹zie hiervoor [3]. De vergelijkingen zijn omgeschreven om overeen te komen met de naamgeving van de waarden in SIMONA

waarbij:

u, v	= componenten van de dieptegemiddelde snelheid
ζ	= waterhoogte boven het referentieniveau
h	= waterdiepte onder het referentieniveau
H	= $h + \zeta$
f	= parameter van Coriolis
g	= zwaartekrachtsversnelling
C	= Chézy-factor
W_x, W_y	= windsnelheidscomponenten op het wateroppervlak
C_d	= wind drag coëfficiënt
ρ_a, ρ_w	= waterdichtheid en luchtdichtheid
ν	= eddy-viscositeit

Het modelleren aan de hand van deze vergelijkingen wordt gemotiveerd door de diepte-lengte-verhouding van het stroomgebied. De lengte van het riviersegment is ongeveer 285m. en de gemiddelde rivierdiepte is minder dan een meter. In [3] beschrijft Vreugdenhil hoe de Navier-Stokes vergelijkingen naar de diepte gemiddeld kunnen worden zodra de lengte-diepte verhouding van het modelleringsgebied voldoende klein is.



Figuur 3.1: Beschrijving van de diepte- en waterhoogte variabelen.

In het model wordt geen rekening gehouden met wind- en corioliskrachten. Voor de windkracht zijn geen gegevens beschikbaar en het effect van de corioliskracht is gezien de korte lengte van de rivier te verwaarlozen. De *shallow-water-equations* vereenvoudigen hiermee tot:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g u \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{HC^2} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g v \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{HC^2} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Implementatie in SIMONA

Beroostering Er is gebruik gemaakt van een kromlijng orthogonaal gestructureerd rooster² bestaande uit een matrix van $M \times N$ elementen waarin de coördinaten van de roosterpunten gegeven worden. Oorspronkelijk was SIMONA ontworpen voor het rekenen op een rechthoekig rooster. Op een kromlijng rooster zijn de partiële differentiaalvergelijkingen die opgelost moeten worden dezelfde, met het enige verschil dat er een coördinatentransformatie in verwerkt is. De betreffende vergelijkingen zijn terug te vinden in de handleiding van het pakket SIMONA [9]. Een kromlijng rooster wordt in de praktijk beschreven door een eindig aantal roosterpunten verbonden met rechte lijnstukken. Het rooster waarmee we werken wordt dus ook wel *quasi-orthogonaal* genoemd. In de berekeningen gaat SIMONA ervan uit dat het gegeven kromlijng rooster orthogonaal is. Geven we een quasi-orthogonaal rooster als invoer dan betekent dit dus dat we de niet-orthogonale componenten niet in de modelberekeningen meenemen. Om deze reden dient het gegeven rooster aan bepaalde orthogonaliteitseisen te voldoen (zie hiervoor hoofdstuk 4). Mits aan de gestelde eisen wordt voldaan wegen de voordelen van een kromlijng rooster op tegen het nadeel van verwaarlozing van de niet-orthogonale componenten. Modelleren op een rechthoekig rooster geeft vooral aan de randen een onnatuurlijk resultaat door de aanwezigheid van haakse hoeken, een zogeheten 'traprede-effect'.

Staggered grid SIMONA rekent op een zogenaamd *staggered grid*³ (zie figuur 3.2). Dit houdt in dat berekeningen worden uitgevoerd op vier verschillende over elkaar heen geschoven roosterruimtes: een rooster met de dieptewaarden, een rooster met de waterstandswaarden, een rooster met de snelheden in v -richting tussen de waterstandspunten en een rooster met de snelheden in de u -richting tussen de dieptepunten (zoals weergegeven in figuur 3.2). Een cel in het gestaggerde rooster van SIMONA bestaat uit een dieptepunt linksom, twee snelheidscomponenten en een waterstandspunt rechtsom. In figuur 3.2 zijn als voorbeeld vierkanten geplaatst om de cellen ($M = 2, N = 2$) en ($M = 4, N = 5$).

De snelheidsberekeningen vinden altijd plaats tussen twee waterstandspunten.

Alleen de snelheidspunten die zich tussen twee dieptepunten bevinden worden in de berekeningen meegenomen. Dit betekent dat de horizontale snelheden gedefiniëerd zijn op het roostergebied van $M=1..M_{MAX}-1$ en $N=2..N_{MAX}-1$ en dat de verticale snelheden gedefiniëerd zijn op het roostergebied van $M=2..M_{MAX}-1$ en $N=1..N_{MAX}-1$. Op de randen van deze gebieden kunnen snelheidsopeningen geplaatst worden als randvoorwaarden voor de vergelijkingen.

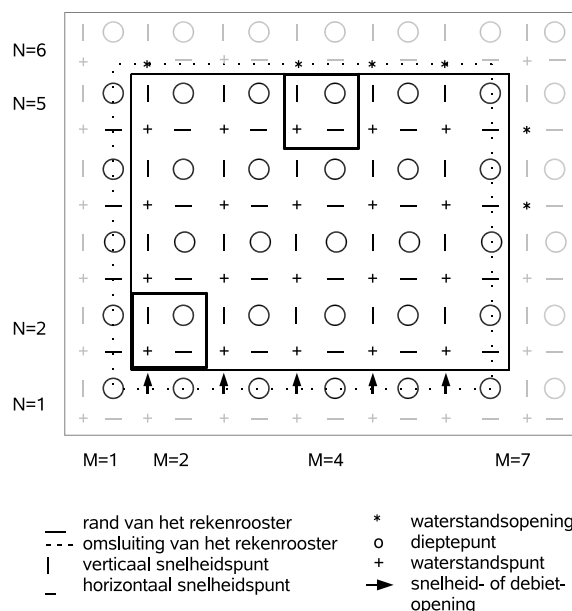
De waterstandspunten zijn alleen in de roosterpunten gedefiniëerd die aan alle kanten omringd worden door snelheidspunten, ofwel op het roostergebied van $M=2..M_{MAX}-1$ en $N=2..N_{MAX}-1$. Langs de randen van het gebied kunnen waterstandsopeningen worden geplaatst als randvoorwaarde voor de vergelijkingen. Deze moeten net buiten het rekengebied geplaatst worden en moeten grenzen aan een van de snelheidspunten in het rekengebied.

Binnen het gehele rooster ($M=1..M_{MAX}$ en $N=1..N_{MAX}$) is een *rekengebied* gedefiniëerd dat de waarden $M=2..M_{MAX}-1$ en $N=2..N_{MAX}$ bestrijkt. Hierop worden de daadwerkelijke berekeningen uitgevoerd. De extra roostercellen zijn toegevoegd om ook aan de rand van het gebied in zowel een horizontale als verticale snelheidscomponent te kunnen voorzien.

In de buurt van de randen van het rekengebied is de bodemhoogte dusdanig hoog dat deze cellen altijd buiten het stroomgebied vallen en dit levert dus geen problemen op. Als randvoorwaarden van het probleem wordt aan de onderkant van het stroomgebied

²voor de gebruikte definitie van een gestructureerd rooster wordt verwezen naar het begin van hoofdstuk 4.

³hiervoor is geen geschikte Nederlandse vertaling gevonden.



Figuur 3.2: Voorbeeldrooster met snelheidsopening en waterstandsopening. Merk op dat er aan de bovenkant en aan de rechtkant een rij en kolom minder zijn voor de snelheden

($N=1$) een debietopening⁴ ingesteld en aan de uitvoerzijde van het stroomgebied wordt een waterhoogte-opening gedefiniëerd (zie hiervoor de bespreking van de modelinvoer in hoofdstuk 5).

Gegevensinvoer De invoergegevens voor *SIMONA* bestaan uit een quasi-orthogonaal rooster dat de dieptepunten definiëert en het bodemprofiel gegeven in de dieptepunten en de modelparameters. De randvoorwaarden en simulatieparameters worden gegeven in een invoerbestand waarvan een voorbeeld is te vinden in bijlage B.

Courant-getal Bij de keuze van een geschikt rooster speelt ook het *Courant*-getal van het model een rol, deze wordt in dit project, overeenkomend met de formule in de *SIMONA* handleiding [9], gedefiniëerd door:

$$C_f = \Delta t \times \frac{\sqrt{2gH}}{dx}$$

waarbij:

$$H = \text{totale waterdiepte (m)} \quad (3.3)$$

$$\Delta t = \text{tijdstep van de simulatie (s)}$$

$$g = \text{zwaartekrachtsversnelling (m s}^{-2}\text{)}$$

Hierbij moet dx gelijk genomen worden aan de kleinste horizontale en verticale onderlinge afstand van alle naburige roosterpunten en H aan de bovengrens van de rivierdiepte. Omdat we de extremen van de waarden nemen is het gehanteerde *Courant*-criterium vrij streng. Dit is nodig omdat in *SIMONA* alleen een constante tijdstep van simulatie ingesteld

⁴[EN] discharge opening

kan worden. Hierdoor is het helaas ook niet mogelijk de simulatiesnelheid te vergroten in geval de situatie naar een *steady state* convergeert.

Voor een goede numerieke benadering moeten een dx en een Δt gekozen worden zodat het *Courant*-getal ongeveer gelijk aan 1 is. De modelprecisie hangt ook van andere factoren als het bodemprofiel af. Om de rekentijd te beperken dient de celgrootte van het rooster niet te klein te zijn.

Hoofdstuk 4

Roostergeneratie

In dit hoofdstuk worden verschillende klassieke roostergeneratiemethoden bekeken. Er vindt een roostervergelijking plaats aan de hand van een testcase en er wordt een voorstel voor verdere verbetering in de toekomst gedaan.

4.1 Gestructureerde roosters

Een rooster wordt beschreven door de functies:

$$\begin{aligned}x(\xi, \eta) &: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\y(\xi, \eta) &: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}\tag{4.1}$$

die gedefiniëerd zijn in de uniform verdeelde punten $(\xi^{(m,n)}, \eta^{(m,n)}) = (\frac{m}{M}, \frac{n}{N})$ met $m = 0..M, n = 0..N$. De linkerruimte van de roosterfunctie wordt in het vervolg de *rekenruimte* genoemd en de rechterraimte van de functie de *fysische ruimte*. De waarde M wordt beschouwd als de horizontale dimensie en de waarde van N als de verticale dimensie.

Voor later gebruik definiëren we het volgende:

$$\begin{aligned}g_{11} &= (x_\xi)^2 + (y_\xi)^2 \\g_{12} &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\g_{22} &= (x_\eta)^2 + (y_\eta)^2\end{aligned}\tag{4.2}$$

4.2 Orthogonaliteit

Het modelleringspakket *SIMONA* gaat uit van een orthogonaal rooster als invoer. Om de kwaliteit van de gemaakte roosters te beoordelen is een orthogonaliteitsmeting gedefiniëerd. Orthogonaliteitsafwijking wordt gemeten door te kijken naar de maximale afwijking van orthogonaliteit (*MDO*¹):

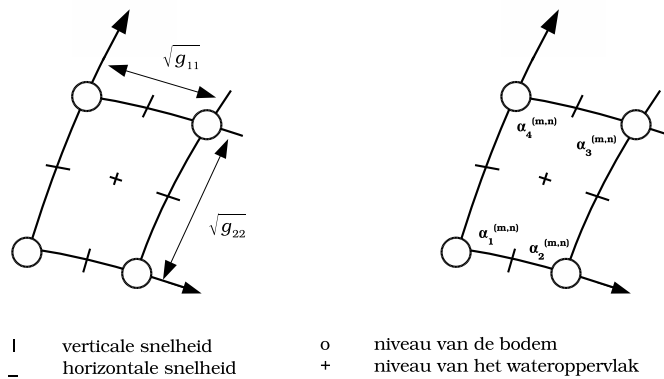
$$\max_{m \leq M-1, n \leq N-1, k \in \{1,2,3,4\}} \cos \alpha_k^{(m,n)}\tag{4.3}$$

en de gemiddelde afwijking van orthogonaliteit (*ADO*²):

$$\frac{1}{4(M-1)(N-1)} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^4 \cos \alpha_k^{(m,n)}\tag{4.4}$$

¹MDO = maximum deviation of orthogonality

²ADO = average deviation of orthogonality



Figuur 4.1: SIMONA rekeneenheid in een kromlijng rooster.

Hierbij staan $\alpha_1^{(m,n)}$ tot en met $\alpha_4^{(m,n)}$ voor de vier hoeken van roostercel (m, n) . Er bestaan ook andere manieren om orthogonaliteitsafwijking te meten. Een mogelijkheid is het vervangen van de cosinus term door de term $1/\sin^2 \alpha_k^{(m,n)}$. Op deze manier gaat het gewicht voor grote orthogonaliteitsafwijkingen naar oneindig. Dit kan handig zijn wanneer we functionaalanalyse gebruiken [13] (zie ook de bespreking van variationele methoden in §4.6).

Opmerking over roosterverfijning Zodra een zeker rooster is gegenereerd heeft het geen zin het rooster te verfijnen zonder ook de roosterpunten van het oorspronkelijke rooster te verschuiven. Het is eenvoudig in te zien dat in dat geval de waarde *ADO* wel afneemt, maar dat de afwijking alleen maar over meerdere cellen verspreid wordt, aangezien de waarden $M \times N \times ADO$ en *MDO* ongewijzigd blijven.

Vuistregels Als vuistregels worden de strenge voorwaarden $MDO < 0.05$ en $ADO < 0.02$ (volgens de handleiding [9]) en de minder strenge voorwaarden $MDO < 0.087$ en $ADO < 0.035$ gebruikt (volgens een cursus [10]). Gezien de vorm van het gebied is het lastig volledig aan de vuistregels te voldoen. Het blijkt vooral lastig te zijn de *MDO* voldoende klein te krijgen. Uiteindelijk is het wat betreft de *ADO* ruimschoots gelukt aan de strenge variant van de vuistregels te voldoen en wat betreft de *MDO* is het alleen gelukt aan de minder strenge variant van de vuistregels te voldoen. Hierbij dient opgemerkt te worden dat de hoge *MDO* veroorzaakt wordt aan de randen van het meetgebied die geen deel uit maken van de rivierstroom en gedurende de *SIMONA* simulatie droog komen te liggen. De orthogonaliteitsafwijking in deze cellen heeft op de simulatie dus geen invloed.

Gebiedsorthogonalisatie Om een orthogonaal rooster te creëren moesten allereerst de hoeken bij de in- en uitvoersnede orthogonaal gemaakt worden. Hierbij is er oorspronkelijk voor gekozen om een klein stuk van het modelgebied af te snijden. Omdat het in- en uitstroomgebied van de rivier vrijwel geen onregelmatigheden bevat was de verwachting dat dit weinig effect heeft op de stroomkarakteristieken in het midden van de rivier. In verband met de randvoorwaarden die gedefiniëerd zijn op de in- en uitvoersnede is het echter essentieel dat deze met de onder- en bovenkant van het rooster samenvallen. Vooral het verschuiven van de uitstroomsnede (waarop de waterstandsrandvoorwaarde geplaatst zal worden, zie hoofdstuk 5) kan de resultaten van het model sterk beïnvloeden. Daarom is er in een later stadium voor gekozen een bescheidenere aanpassing te maken zodat de

in- en uitvoerrandvoorwaarden uit het model nog steeds samenvallen met riviersnedes 1 en 52 resp. Om de vier hoeken van het gebied te orthogonaliseren zijn de hoekpunten verschoven over de bijbehorende snedes zodanig dat ze een rechte hoek maken met de twee aangrenzende meetpunten.

Consideraties In de modellen *CCHE2D*, *RMA-2* en *FESWMS-2DH* is gebruik gemaakt van een rooster bestaande uit 18×51 vierhoekige cellen waarbij de horizontale zijdes gelijk zijn aan de 52 riviersnedes. Voor de laatste twee modellen is op de middens van iedere zijde een punt toegevoegd omdat berekeningen hier met 8-node finite elements worden uitgevoerd. Vanwege de te hoge orthogonaliteitsafwijking is een rooster langs de riviersnedes niet geschikt voor modellering in *SIMONA*. Daarnaast moet opgemerkt worden dat het pakket *SIMONA* voor het oplossen van de *shallow-water-equations* gebruikt maakt van een eindige-volume-methode die zich tot op zekere hoogte laat vergelijken met een 4-node eindige-elementen-methode en als zodanig van lagere orde dan de methodes toegepast in drie bovenstaande modellen. Hierdoor moet het aantal cellen waarschijnlijk op zijn minst met een factor 2 in beide richtingen vergroot worden. Het uiteindelijke rooster wordt gekozen aan de hand van orthogonaliteitsvergelijking. Hierna kan de keuze later, met terugkoppeling op de modelresultaten, nog aangepast worden. Bij de keuze van een geschikte roostergrootte dient rekening gehouden te worden met het al eerder besproken *Courant*-getal³. Een te fijn rooster vereist een te kleine tijd-rekenstap in *SIMONA*.

Opmerking Waarschijnlijk kunnen we aan de randen van het rooster soepel omgaan met de vuistregels van *SIMONA* aangezien het daadwerkelijke stroomgebied veel kleiner is dan het te beroosteren meetgebied. Op dit punt zou het rooster verbeterd kunnen worden.

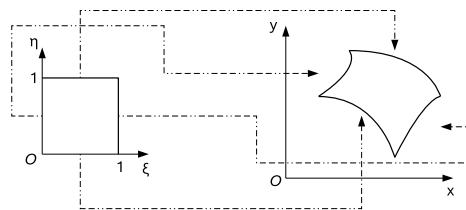
Andere aspecten Naast een goede orthogonaliteitsbenadering verlangt *SIMONA* ook dat het relatieve verschil tussen aangrenzende cellen niet boven 1.30 uitkomt en de celverhouding niet boven de 1 : 8. Om deze redenen zal de roosterdichtheid zodanig gekozen worden dat de celverhouding rond de 1 : 1 komt te liggen. Als er rekking van de cellen plaats vindt dan zal dit alleen in stroomrichting gebeuren. Dit omdat de te berekenen stroomsnelheden voornamelijk in de stroomrichting liggen en langgerekte cellen de rekestijd voor het model zullen verminderen, terwijl zeer platte cellen juist onnodige rekestijd toevoegen. Dit komt overeen met de algemene praktijk in riviermodellering.

4.3 Bilineaire transformatie

Een eenvoudige manier om een gebied als de Dommel te beroosteren is door een bilineaire transformatie uit te voeren [4]. Hierbij worden de randen in het fysische gebied beschreven door de functies $x_r(\eta)$, $y_r(\eta)$, $x_l(\eta)$, $y_l(\eta)$, $x_t(\xi)$, $y_t(\xi)$, $x_b(\xi)$, $y_b(\xi)$. Het interpoleren naar de bilineaire functies $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ is numeriek snel en eenvoudig uit te voeren. De volgende vergelijkingen geven de interpolatiefuncties:

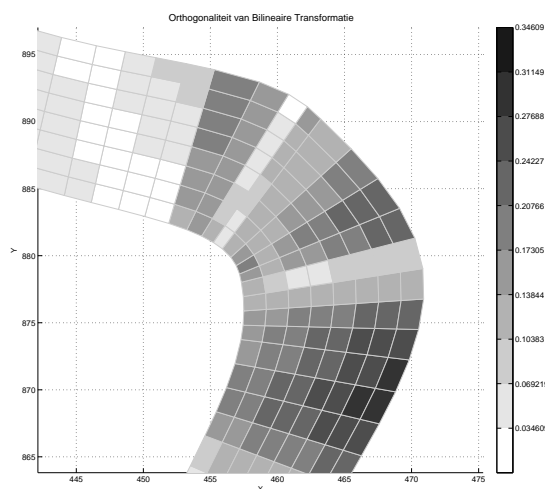
$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1 - \xi)x_l(\eta) + \xi x_r(\eta) + (1 - \eta)x_b(\xi) + \eta x_t(\xi) \\ &\quad - (1 - \xi)(1 - \eta)x_b(0) - (1 - \xi)\eta x_t(0) - (1 - \eta)\xi x_b(1) - \xi\eta x_t(1) \\ y(\xi, \eta) &= (1 - \xi)y_l(\eta) + \xi y_r(\eta) + (1 - \eta)y_b(\xi) + \eta y_t(\xi) \\ &\quad - (1 - \xi)(1 - \eta)y_b(0) - (1 - \xi)\eta y_t(0) - (1 - \eta)\xi y_b(1) - \xi\eta y_t(1) \end{aligned} \tag{4.5}$$

³zie hiervoor paragraaf 3.2



Figuur 4.2: Schematische weergave van bilineaire transformatie

Het resulterende rooster is vanwege de hoge orthogonaliteitsafwijking in de bochten onbruikbaar. Wel kan het rooster als beginbenadering worden gebruikt in de numerieke iteratie voor de verderop beschreven elliptische roostergeneratie.



Figuur 4.3: Eenvoudig rooster van 16×400 gegenereerd met bilineaire transformatie

4.4 Conforme afbeeldingen

Conforme afbeeldingen voldoen aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.6)$$

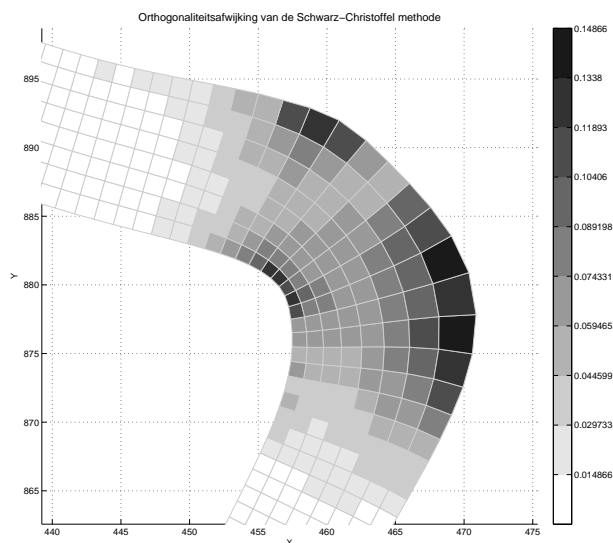
en zijn derhalve orthogonaal (immers $g_{12} = x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi = 0$). Bovendien zijn ze voor twee gegeven gebieden uniek bepaald. Een conforme afbeelding tussen een rekengebied bestaande uit een vierkant van $[0, 1] \times [0, 1]$ en de fysieke ruimte bestaande uit het meetgebied van de rivier kan op directe wijze worden bepaald door bovenstaande vergelijkingen numeriek op te lossen.

Omdat we weten dat een conforme afbeelding tussen twee gebieden uniek bepaald is [20] kunnen we ook gebruik maken van de Schwarz-Christoffel transformatie⁴. Dit is een transformatie tussen een veelhoek en een ander samenhangend complex gebied. In het geval van de rivier kunnen we een transformatie uitvoeren vanaf een rekengebied bestaande uit een vierkant of rechthoek.

Beschrijven we het riviergebied in het complexe vlak door $z^{(m,n)} = x^{(m,n)} + iy^{(m,n)}$ dan geeft de formule van Schwarz-Christoffel de mogelijkheid een conforme afbeelding te maken van het riviergebied naar een willekeurig ander enkelvoudig samenhangend gebied in het complexe vlak. Het stappenplan wordt dus als volgt:

1. benader numeriek de Schwarz-Christoffel transformatiefunctie $\tilde{\phi}(z)$ van rekengebied naar fysisch gebied aan de hand van een veelhoekontrek van het gebied
2. leg in het rekengebied een (uniform) orthogonaal rooster $(\xi^{(m,n)}, \eta^{(m,n)})$
3. bepaal de inverse waarden van de roosterpunten $\tilde{\phi}^{-1}(\xi^{(m,n)} + i\eta^{(m,n)})$

De transformatie is hoekbehoudend. In algebraïsche uitvoering zou dit betekenen dat een orthogonaal rooster in de rekenruimte omgezet wordt in een orthogonaal gekromd rooster in de fysische ruimte. Omdat we in de praktijk de roosterpunten in de fysische ruimte simpelweg met rechte lijnstukken verbinden levert deze methode in numerieke uitvoering dus over het algemeen wat we noemen een *quasi-orthogonaal rooster*. Dat de transformatie in algebraïsche uitvoering orthogonaal is geeft geen garantie dat we ook in numerieke uitvoering het beste orthogonaliteitsresultaat behalen. In bijlage A.1 is een



Figuur 4.4: Rooster bestaande uit 16x400 gegenereerd met de SC-transform

MATLAB code te vinden voor het uitvoeren van Schwarz-Christoffel roostergeneratie op een rivierveelhoek van 2×52 hoekpunten.⁵

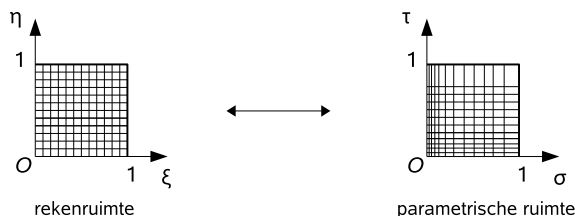
⁴in [2] wordt een uitgebreide introductie gegeven op Schwarz-Christoffel transformaties. Ook wordt een kleine paragraaf besteed aan de toepassing van roostergeneratie.

⁵er wordt hier gebruikt gemaakt van de SC-toolbox [7]

De resulterende *scalar* geeft een indicatie voor de te gebruiken roosterdichtheid in vertical en horizontale richting om roostercellen met een verhouding van 1 : 1 te krijgen. Conformal mapping met de Schwarz-Christoffel formule wordt voor polygonen met een groter aantal zijdes al snel tijdsintensief. Het is verstandig de berekeningen binnen een low-level programmeeromgeving uit te voeren.⁶

4.4.1 Parametrische ruimte als tussenstap

In bovenstaand voorbeeld wordt een transformatie uitgevoerd tussen een eenvoudig uniform beroosterde rekenruimte van $[0, 1] \times [0, 1]$ naar de fysische ruimte. We kunnen meer controle over de interne roosterverdeling binnen het fysische gebied krijgen door een zogeheten *parametrische* ruimte in te voeren. De oorspronkelijke transformatiefunctie van rekenruimte naar fysische ruimte wordt nu toegepast op de punten $(\sigma^{(m,n)}, \tau^{(m,n)})$ uit de parametrische ruimte zodat de roosterpunten in de fysische ruimte een andere verdeling krijgen. Om orthogonaliteit te waarborgen moet de transformatie van rekenruimte naar

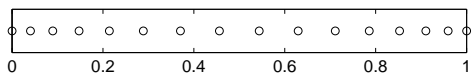


Figuur 4.5: Schematische weergave van relatie tussen de ruimtes

parametrische ruimte ook in de parametrische ruimte weer een (quasi-)orthogonaal rooster opleveren. Een eenvoudig voorbeeld hiervan is het simpelweg verschuiven van de roosterlijnen in de rekenruimte. Dit kan met de hand gedaan worden, maar er kan ook gebruik gemaakt worden van rekfuncties⁷ $f_1(\xi)$ en $f_2(\eta)$. Dit zijn bijectieve functies $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Een bekende rekfunctie wordt gegeven door⁸:

$$f(x) = \frac{\tanh(b(x-c)) - \tanh(b(-c))}{\tanh(b(1-c)) - \tanh(b(-c))} \quad (4.7)$$

De waarde b geeft hier de mate van rekking aan en de waarde van c het symmetriepunt waar de intervallen grote zijn. Om het tegenovergestelde resultaat te krijgen met hoge dichtheid in het midden zou de functie geïnverteerd kunnen worden.



Figuur 4.6: Rekking op het interval $[0, 1]$ voor de waarden $b = 2.0, c = 0.5$

Het lijkt nuttig de celdichtheid langs de randen te vergroten zodat de celdichtheid zowel in de binnen- als buitenbochten groter wordt en de orthogonaliteitsafwijking hier minder

⁶de gebruikte Schwarz-Christoffel MATLAB-toolbox is gebaseerd op het pakket SCPACK geschreven door Trefethen. Berekeningen worden aanzienlijk sneller gedaan door het pakket GRIDGEN [6] dat de Fortran functies uit SCPACK op directe wijze aanroept.

⁷[EN] *stretching functions*

⁸zie bijvoorbeeld [4] voor een bespreking van andere rekfuncties

wordt. Om dit voor elkaar te krijgen kan bijvoorbeeld horizontale rekking toegepast worden met de horizontale rekfunctie f_1 zoals gegeven in vergelijking (4.7). We zien in het voorbeeld in de roostervergelijking dat het toepassen van een horizontale rekfunctie geen positief effect heeft op de orthogonaliteitsafwijking. Daarnaast wordt de celdichtheid in de binnenbochten al snel te groot en de onderlinge verschillen in celgrootte hebben hier de neiging te groot te worden (zeker als een nog grotere rekfactor toegepast wordt).

4.5 Elliptische roostergeneratie

Een veelgebruikte manier om een gebied te beroosteren is het oplossen van de Laplace-vergelijkingen [8][4]:

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0\end{aligned}\tag{4.8}$$

met Dirichlet of Neumann voorwaarden op de gebiedsrand. Passen we deze methode in basisvorm toe dan levert dit ongeveer dezelfde orthogonaliteitsafwijking als bij het gebruik van een conforme afbeelding. Dit is verrassend omdat de elliptische methode niet in de eerste plaats de orthogonaliteit minimaliseert maar bepaalde gladheidseigenschappen nastreeft.

Beschrijving Door de Laplace vergelijkingen in de rekenruimte om te schrijven krijgen we een stelsel vergelijkingen in de fysische ruimte die bekend staan als de *Winslow*-vergelijkingen.

$$g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0\tag{4.9}$$

$$g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0\tag{4.10}$$

Een oplossing van bovenstaande partiële differentiaalvergelijkingen kan door middel van Gauss-Seidel iteratie benaderd worden. De iteratie kan het beste vanuit een eenvoudige beginbenadering worden begonnen (bijvoorbeeld een rooster verkregen met bilineaire transformatie) om zo de rekentijd te verminderen⁹. Elliptische roostergeneratie is in vergelijking met de Schwarz-Christoffel methode een stuk sneller, zeker als we de oever met hoge precisie willen beschrijven. Gediscretiseerd op een equidistant cartesisch rooster $(\xi^{(m,n)}, \eta^{(m,n)})$ in de rekenruimte met $m = 1..M$ en $n = 1..N$ kunnen we de volgende Gauss-Seidel iteratie uitvoeren. In bijlage A.2 bevindt zich een MATLAB-code waarmee deze iteratie uitgevoerd kan worden. Hierbij dient opgemerkt te worden dat met het doel van roostergeneratie voor ogen geen afbreekcriterium wordt gehanteerd. Bovendien wordt dit bemoeilijkt als er gebruik wordt gemaakt van randorthogonalisatie zoals beschreven in paragraaf 4.5.1.

4.5.1 Orthogonalisatie langs de randen

Een nadeel van de elliptische methode is dat er geen controle is over de distributie van de randpunten van het gebied. De cellen aan de randen van het gebied dienen daarom tijdens of na het iteratieproces georthogonaliseerd te worden.

In [4] wordt voorgesteld na iedere Gauss-Seidel iteratiestap de randen op volgende wijze te orthogonaliseren. Als voorbeeld wordt een randpunt op de rechteroever bekeken. Eerste

⁹voor al het numerieke werk is gebruik gemaakt van de MATLAB programmeeromgeving op een AMD Athlon XP 3200+ systeem met 512 MB intern geheugen

stap is het (numeriek) bepalen van de helling van de rand in het randpunt $(x^{(m,n)}, y^{(m,n)})$. Vervolgens wordt het snijpunt bepaald van de raaklijn aan de oever door het randpunt en de lijn loodrecht erop door het interne roosterpunt $(x^{(m-1,n)}, y^{(m-1,n)})$. Bij toepassing hiervan zijn twee mogelijkheden:

1. bepaal de helling op de huidige rand in het iteratieproces: de randen veranderen in de loop van de iteraties, dit effect is sterker in geval van minder randpunten omdat de helling van de rand dan minder goed kan worden benaderd
2. verschuif het randpunt over de vooraf bepaalde spline zodat de rand in de loop van de tijd vrijwel onveranderd blijft

Wanneer er een te lage celdichtheid wordt gebruikt kunnen de randpunten dusdanig ver uit elkaar liggen dat orthogonaliseren volgens methode 1 zorgt voor te grote veranderingen in de rand waardoor details kunnen verdwijnen. De tweede methode heeft dus duidelijk de voorkeur. Binnen dit project is er echter in eerste instantie voor gekozen de eerste methode toe te passen.

Ook in de verderop beschreven numerieke methoden kan randorthogonalisatie gewenst zijn. Indien daar van randorthogonalisatie wordt gesproken betreft het bovenstaande methode.

4.5.2 Forcing functies

In de standaardvorm van elliptische roostergeneratie hebben we geen controle over de interne distributie van de roosterpunten. Deze kunnen we verkrijgen door *forcing functies*¹⁰ $P(\xi, \eta)$ en $Q(\xi, \eta)$ te gebruiken waarmee we de Winslow vergelijkingen veranderen in [8][4]:

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{4.11}$$

omgeschreven naar differentiaalvergelijkingen in de fysische ruimte worden dit de volgende Poisson vergelijkingen (zie [4]):

$$\begin{aligned}g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) &= 0 \\ g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) &= 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

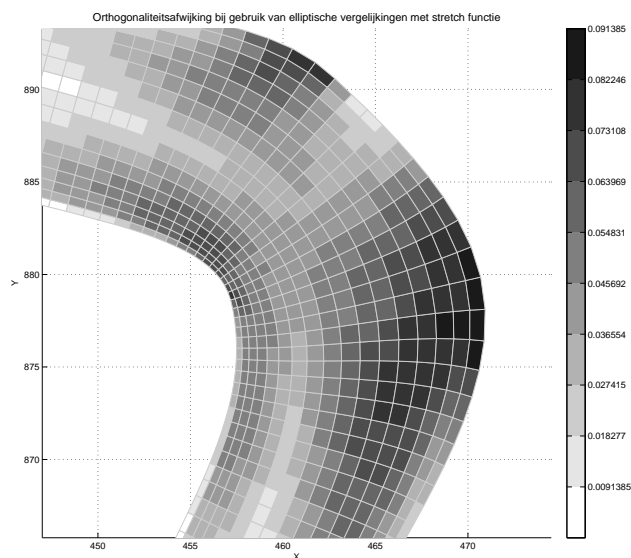
Op deze manier krijgen we een nog grotere controle over de interne distributie van de roosterpunten. Het is vooraf echter erg moeilijk een geschikte *forcing functie* te bepalen en te voorspellen wat het gevolg voor de orthogonaliteit zal zijn. Relatief eenvoudige forcing functies zijn functies gebaseerd op de reeds besproken *rekfuncties*.

Als we zekere rekfuncties $f_1(\xi)$ en $f_2(\eta)$ nemen dan moeten we het volgende stelsel oplossen:

$$\begin{aligned}g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= \left(\frac{f_1''}{f_1'} \right) g_{22} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \left(\frac{f_2''}{f_2'} \right) g_{11} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= \left(\frac{f_1''}{f_1'} \right) g_{22} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \left(\frac{f_2''}{f_2'} \right) g_{11} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{4.13}$$

Numeriek oplossen kan net als bij de basisvorm met de SOR-methode uitgevoerd worden.

¹⁰voor deze Engelse term is helaas geen geschikte Nederlandse vertaling gevonden



Figuur 4.7: Rooster bestaande uit 17×401 gegenereerd met elliptische roostergeneratie en de rekfunctie (4.7) met $b = 2.0, c = 0.5$

4.6 Variationele methoden

Het is ook mogelijk met variatierekening aan de slag te gaan. Hierin liggen veel mogelijkheden voor verdere kwaliteitsverbetering van de roosters. De gewenste roostereigenschappen van het rooster worden in dit geval beschreven door een te minimaliseren functionaal. Variationele methoden geven een krachtig apparaat om een rooster te optimaliseren, maar vergen vanwege hun soms onvoorspelbare karakter ook veel onderzoek.

Elk van de hieronder genoemde minimalisatieproblemen wordt omgezet in een *Euler-Lagrange* vergelijking [22]. Op deze vergelijkingen wordt vervolgens een aantal Gauss-Seidel iteraties uitgevoerd. In bijlage A.3 zijn MATLAB-codes te vinden waarmee deze iteraties uitgevoerd kunnen worden. Bij toepassing op fysische gebieden is over het algemeen lastig of zelfs niet te voorspellen of de numerieke methoden naar het minimum (of een van de minima) convergeren en wat de roostereigenschappen zijn van dit minimum (of deze minima). Van een echte convergentie naar een optimum is dus doorgaans geen sprake.

Met het doel van roostergeneratie voor ogen is het niet nodig te controleren op convergentie, maar kunnen de numerieke iteratiestappen beschouwd worden als roosteroptimalisatie en dient de Gauss-Seidel iteratie gestopt te worden zodra de gewenste eigenschappen bereikt worden. In de praktijk blijkt een klein aantal iteraties over het hele rooster (10-20x) al voldoende te zijn om de gewenste kwaliteit te verhogen. Vooral bij grote aantallen iteraties bestaat het gevaar dat de methode een gevouwen rooster oplevert.

Na iedere iteratiestap kunnen de punten langs de oevers verschoven worden om te orthogonaliseren. Zeker in het geval van de verderop besproken *O*-functionaal kan dit relevant zijn aangezien het niet orthogonaal zijn van de cellen aan de randen de methode zou kunnen belemmeren naar een lagere orthogonaliteitsafwijking te 'convergeren'. Ook met het geven van vrijheid op de randen dient opgepast te worden. Het geven van vrijheid aan de randen kan voordelen opleveren, maar het kan er ook voor zorgen dat de methode

makkelijker 'explodeert' en gevouwen rooster oplevert.

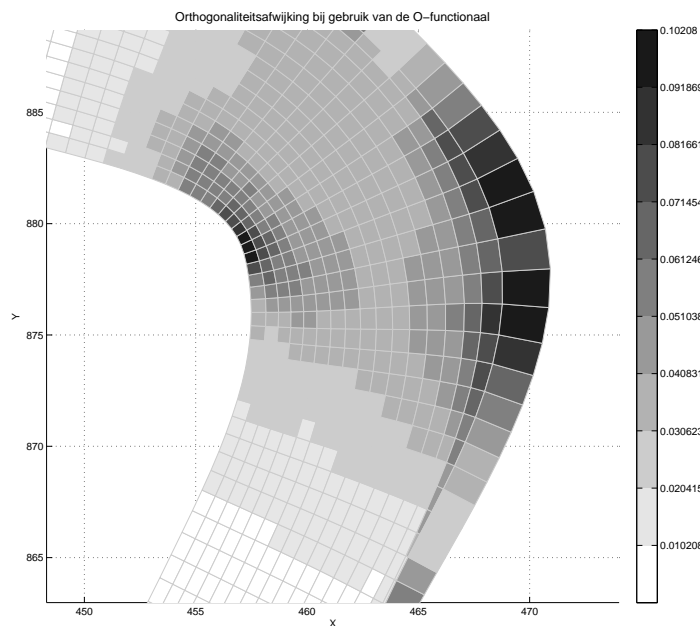
De kwaliteit van de uit de vergelijkingen voortkomende roosters is moeilijk te voorspellen. Er dient begonnen te worden met een intuïtieve inschatting van de te gebruiken methode aan de hand van de beschrijving van de functionaal. Terugkoppelend op de resultaten kan de het aantal iteraties en de vrijheid op de randen aangepast worden.

4.6.1 Klassieke functionalen

O-functionaal Willen we de orthogonaliteitsafwijking minimaliseren dan willen we dat het totaal van g_{12} zo klein mogelijk worden. Voor orthogonaliteitsminimalisatie kunnen we gebruik maken van de O -functionaal:

$$I_O = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (g_{12})^2 d\xi d\eta \quad (4.14)$$

Wanneer we een rooster als beginbenadering nemen met weinig cellen of een rooster met cel-aspect-ratio die sterk afwijkt van 1 dan heeft deze methode de neiging gevouwen roosters te produceren. Als we echter een 1 : 1 celverhouding nemen dan levert deze methode bij grote roosters vaak al betere resultaten dan de Schwarz-Christoffel methode. Deze resultaten verdwijnen weer als er teveel iteraties uitgevoerd worden omdat dan weer de kans bestaat dat het rooster zich gaat plooiën. De methode heeft vooral rond de twee bochten de neiging de verticale lijnen van het rooster over elkaar heen te schuiven.



Figuur 4.8: Toepassing van de O -functionaal (500 iteraties) op een elliptisch gegenereerde beginbenadering. In de afbeelding is goed te zien dat de methode de neiging heeft gevouwen roosters op te leveren.

L-functionaal Een bekende methode om meer controle over de cellengte en -breedte te krijgen is het minimaliseren van de L_{12} -functionaal (zie [4]), hier gegeven in ongewogen

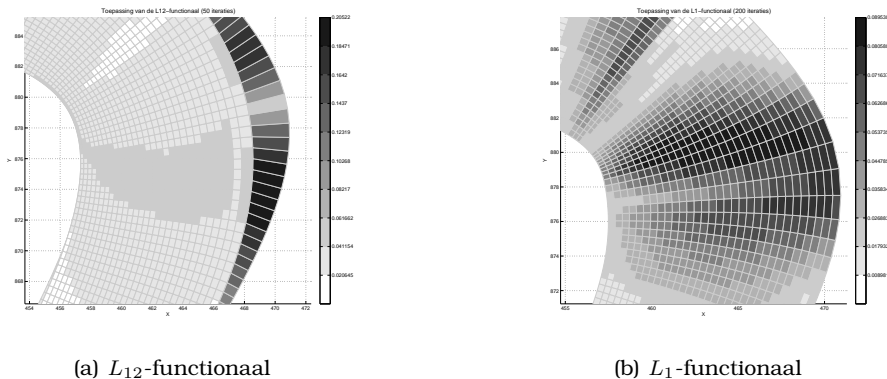
vorm:

$$I_{L_{12}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \{(x_\xi)^2 + (x_\eta)^2 + (y_\xi)^2 + (y_\eta)^2\} d\xi d\eta \quad (4.15)$$

Het minimaliseren van deze functionaal staat gelijk aan het minimaliseren van het totale kwadratische verschil in lengtes van de verschillende cellen. Op zich zelf levert deze methode geen bruikbare resultaten. In zijn oorspronkelijke vorm minimaliseert de functionaal de verschillen in zowel ξ - als in η -richting. In het geval van de S-bocht in de Dommel resulteert dit erin dat de cellen naar het midden van de rivier gedrukt worden (zie afbeelding 4.9(a)) waardoor de cellen in de buitenbochten veel te groot worden. De functionaal is daarom aangepast zodat deze alleen in ξ -richting de som van de kwadratische verschillen minimaliseert.

$$I_{L_1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \{(x_\xi)^2 + (y_\xi)^2\} d\xi \quad (4.16)$$

De orthogonaliteitsafwijking wordt door de L_{12} - en L_1 -functionaal niet geminimaliseerd en deze bleek in de geproduceerde roosters dan ook altijd significant groter te zijn dan bij roosters gegenereerd met de andere methoden. De L_1 -functionaal zal verderop nog van pas komen wanneer we functionalen gaan combineren. De L_1 -functionaal voorkomt dat verticale roosterlijnen (in η -richting) over elkaar heen vouwen, maar heeft de neiging bij een groot aantal iteraties de horizontale roosterlijnen (in ξ -richting) over elkaar heen te vouwen. Wanneer de methode vrijheid op de randen krijgt wordt het vouwproces sterk versneld.



Figuur 4.9: Toepassing van de L_{12} -functionaal (links) en de L_1 -functionaal (rechts) op een elliptisch gegenereerde beginbenadering. In de afbeelding is te zien dat het streven van de L_{12} -functionaal naar gelijke lengte van de cellen in de η richting overheerst en resulteert in kleine dan wel grote celoppervlakken in resp. de binnen- en buitenbochten. De L_1 -functionaal streeft duidelijk even brede cellen na.

Combinaties Het is zoals al vermeld ook mogelijk bovenstaande functionalen in een gewogen combinatie toe te passen. Op deze manier kunnen we van de kwalitatieve eigenschappen van verschillende methoden profiteren. In de praktijk kan bekeken worden welke combinatie het beste resultaat oplevert.

$$I = \omega_{L_1} I_{L_1} + \omega_{L_{12}} I_{L_{12}} + \omega_O I_O + \omega_A I_A \quad (4.17)$$

Waarbij $\omega_{L_1} + \omega_{L_{12}} + \omega_O + \omega_A = 1$.¹¹ Een goede combinatie van gewichten moet door trial-and-error bepaald worden. Op het gebied van de Dommel is de methode toegepast met een combinatie van $\omega_{L_1} = 0.5, \omega_O = 0.5$ en wordt deze omschreven als de OL_1 -functionaal. De combinatie wordt gemotiveerd aan de hand van de volgende tabel. Het is erg lastig gebleken

	Orthogonaliteit	Vouwneiging vert.	Vouwneiging hor.
O-functionaal	++	++	-
L_1 -functionaal	n.v.t.	-	++

Tabel 4.1: Eigenschappen van de O - en L_1 -functionaal

geschikte gewichten te vinden voor de gecombineerde OL_1 -functionaal. Alleen bij een zeer kleine weging van de O -functionaal verdwijnt het negatieve effect hiervan. Helaas wordt er dan ook bijna niet meer georthogonaliseerd.

4.6.2 Verdere verbetering

Mocht in de toekomst een nog lagere orthogonaliteitsafwijking gewenst zijn dan liggen in verdere verfijning van de variationele methoden de beste mogelijkheden om tot betere resultaten te komen.

In [13] wordt een orthogonaliteitsfunctionaal voorgesteld gebaseerd op de sinus van de celhoeken. De te minimaliseren functionaal wordt hiermee, in gediscretiseerde vorm:

$$\sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\sin^2 \alpha_k^{(m,n)}} \quad (4.18)$$

Het voordeel van deze functionaal is dat het vouwen van roosterlijnen voorkomen wordt. Wanneer een celhoek naar 0 of naar π radialen gaat, gaat de functionaal naar oneindig. Het gebruik van deze functionaal geeft dus in ieder geval een stabiele methode. Wel moet onderzocht worden of deze betere orthogonaliteitsresultaten oplevert en of ook aan andere kwaliteitseisen (celverhouding en celoppervlak) wordt voldaan.

Binnen dit project is geen ruimte meer voor verdere studie van variationele methoden en geven de besproken methoden al voldoende resultaat. Hier ligt een onderwerp voor vervolgonderzoek.

4.7 Vergelijking aan de hand van een testcase

Bij elk van bovenstaande methoden vormen vooral binnen- en buitenbochten een probleem. Orthogonaliteitsafwijking wordt gemeten aan de hand van de waarden MDO en ADO . Daarnaast is het ook zinvol het rooster op andere kwaliteiten te beoordelen. Hiervoor zijn de waarden ARD , MRD , AAR en MAR geïntroduceerd¹². Al deze indicatoren kunnen goed helpen bij het maken van een objectieve roostervergelijking. In de praktijk is het echter aan te raden de roosters ook altijd even visueel te beoordelen en hierbij vooral in te zoomen op de probleemgebieden. In het geval van de Dommel zijn dit de twee bochten.

¹¹in de vergelijking is de A -functionaal I_A toegevoegd. Deze is ook op het Dommelgebied uitgeprobeerd. De A -functionaal kan gebruikt worden om het celoppervlak van de verschillende cellen gelijk te krijgen. Toepassing is binnen dit project niet zinvol, zie *roostervergelijking*

¹² ARD = gemiddelde relatieve verschil in oppervlak van aangrenzende cellen; MRD = maximale relatieve verschil in oppervlak van aangrenzende cellen; AAR = gemiddelde lengte-breedte verhouding van de cellen; MAR = maximale lengte-breedte verhouding van de cellen

Voor de roostervergelijking is gebruik gemaakt van een spline-interpolatie bestaande uit 2×391 punten. In voorgaande afbeeldingen zijn roosters van lagere dichtheid weergegeven om de karakteristieke eigenschappen van de verschillende methoden naar voren te laten komen. Onderstaande roostervergelijking is gebaseerd op een selectie uit de gegenereerde roosters met grotere dichtheid zoals die gebruikt zouden kunnen worden in de simulatie van de Dommel.

	$M \times N$	ADO	MDO	ARD	MRD	AAR	
Basismethoden:							
a.	Bilineaire transformatie	32×391	0.0510	0.2959	1.0425	2.4621	2.1274
b.	Schwarz-Christoffel	32×391	0.0073	0.0881	1.0156	1.1631	2.0824
c.	Winslow vergelijkingen (500x)	32×391	0.0089	0.0662	1.0189	1.1582	2.0825
Met (c) als beginbenadering:							
d.	O -func. (5x) (vrije rand)	32×391	0.0088	0.0543	1.0188	1.1501	2.0825
e.	O -func. (20x) (vrije rand)	32×391	0.0087	0.0568	1.0193	1.2882	2.0825
f.	O -func. (50x) (vrije rand)	32×391	0.0091	0.0597	1.0202	1.6043	2.0827
g.	O -func. (500x) (vaste rand)	32×391	0.0082	0.0596	1.0258	1.4636	2.0839
Met (c) als beginbenadering:							
h.	L -func. (20x)	32×391	0.0085	0.0568	1.0175	1.1898	2.0840
i.	L -func. (50x)	32×391	0.0085	0.0608	1.0173	1.2894	2.0883
Met (c) als beginbenadering:							
j.	OL_1 -func. (20x) (vrije rand)	32×391	0.0087	0.0568	1.0193	1.2880	2.0825
k.	OL_1 -func. (50x) (vrije rand)	32×391	0.0088	0.0557	1.0207	1.5780	2.0827
Met (b) als beginbenadering:							
l.	O -func. (250x) (vaste rand)	32×391	0.0075	0.0999	1.0394	7.4628	8.2968
m.	OL_1 -func. (250x) ($\omega_O = 0.02, \omega_{L_1} = 0.98$)	32×391	0.0074	0.1005	1.0276	3.3156	2.0859
Rekfunctie (4.7) met $b = 2, c = 0.5$:							
n.	Winslow vergelijkingen (500x)	32×391	0.0129	0.0550	1.0654	1.1817	2.2342
o.	Winslow vergelijkingen (1000x)	32×391	0.0116	0.0587	1.0654	1.1809	2.2306
p.	Winslow vergelijkingen (1500x)	32×391	0.0111	0.0609	1.0654	1.1808	2.2302
q.	Schwarz-Christoffel	32×391	0.0074	0.0879	1.0650	1.1776	2.2302

Tabel 4.2: Overzicht van de roosterkwaliteit voor verschillende methoden.

Opmerkingen bij de roosterresultaten Zelfs met een gewicht van 0.02 overheerst de negatieve eigenschap van de O -functionaal nog. De gewichten dienen nog beter uitgebalanceerd te worden. Mogelijkerwijs hangt een geschikte keuze ook nog van het actuele rooster in de iteratie af en zou een adaptief proces ontworpen kunnen worden. Een dergelijk concept is ook gebruikt in bijvoorbeeld [23].

De Schwarz-Christoffel is zeer goed wat betreft de ADO , maar de slechtste wat betreft de MDO . Op dit moment lijkt het de beste optie een elliptisch rooster als beginbenadering te nemen en vervolgens een functionaalminimalisatie erop toe te passen. Voor toepassing binnen *SIMONA* is echter gekozen voor een Schwarz-Christoffel gegenereerd rooster (zie subparagraaf 4.7.2 over de roosterkeuze).

4.7.1 Conclusies

1. Elliptische roostergeneratie vormt een handig gereedschap om vanuit te beginnen maar levert op zichzelf meestal niet voldoende kwaliteit. De methode is zeer geschikt voor het genereren van een beginrooster. Toepassing van een horizontale rekfunctie geeft meestal een iets beter orthogonaliteitsresultaat, maar geeft bijkomend nadeel van te kleine of te langgerekte roostercellen.

2. Roostergeneratie met de Schwarz-Christoffel transformatie is zeer zinvol in fysische gebieden waarin zich geen scherpe bochten bevinden¹³. In het geval van de Dommel levert de methode vooral op het punt van de gemiddelde orthogonaliteitsafwijking zeer goede resultaten, maar de maximale orthogonaliteitsafwijking van de roosters is over het algemeen groter dan bij andere methoden. Dit is vooral te wijten aan de bochten en onregelmatigheden in de randen. Voor het produceren van zeer gedetailleerde roosters vergt het uitrekenen van de integralen te veel tijd¹⁴. De Schwarz-Christoffel transformatie is de eerste methode die in het verband van dit project is uitgeprobeerd. De methode levert doorgaans iets betere resultaten dan de elliptische methode.
3. Voor het beroosteren van een stuk rivier met twee opeenvolgende scherpe bochten levert toepassing van de O - of OL_1 -functionaal in sommige, maar zeker niet alle gevallen, een zeer goed resultaat¹⁵. De variationele methoden zijn zeer krachtig, maar sterk afhankelijk van de genomen beginbenadering. De methoden kunnen niet goed omgaan met sterke onregelmatigheden in de randen en hebben vaak de neiging de roosters te vouwen.

Mogelijke verbeteringen De meeste mogelijkheden voor verdere roosterverbetering zijn te vinden in de variationele methoden. Hier kunnen andere gewichten gekozen worden of gezocht worden naar een functionaalformulering van het type beschreven in (4.18). Vooral op het gebied van variatonele methoden is overigens de laatste twee decennia nog veel onderzoek verricht.

De kwaliteit van de roosters zou verder verbeterd kunnen worden door het riviergebied in verschillende blokken op te delen. Zo zouden bijvoorbeeld de twee bochten en de vrijwel rechte in- en uitstroomgebieden apart beroosterd kunnen worden. Het betreft hier dan een beperkt aantal blokken en aansluiting op de randen zou met de hand gedaan kunnen worden. Op deze manier zou de celdichtheid in de bochten op eenvoudigere wijze vergroot kunnen worden. Het bijbehorende voorwerk is echter groot en dit lijkt daarom niet de meest voor de hand liggende optie.

Aansluiting op het stroomgebied Doordat het rooster nu niet met het stroomgebied, maar met het meetgebied samenvalt¹⁶ krijgen we af en toe een licht traprede effect langs de randen van het stroomgebied. *SIMONA* is ontworpen om met droogvallende cellen om te gaan, maar waarschijnlijk kan het modelresultaat verbeterd worden als het rooster beter samenvalt met de richting van de rivierstroom. Deze kan pas na simulatie bepaald worden. Een rooster dat beter met de stroom meegaat zorgt waarschijnlijk voor minder verwaarlozing van stromingscomponenten.

4.7.2 Roosterkeuze voor gebruik in *SIMONA*

Voor iedere roostergrootte zijn de verschillen in kwaliteit van de verschillende methoden weer anders. Er is voor gekozen gebruik te maken van het Schwarz-Christoffel gegenereerd rooster (rooster (b) uit tabel ??) omdat deze het beste scoort wat betreft de *ADO*. De relatief grote *MDO* van deze methode wordt vooral langs de randen van het gebied veroorzaakt. In

¹³zie voorbeelden op website van Pavel Sakov

¹⁴het is waarschijnlijk om deze reden dat Driscoll en Trefethen in [2] de verwachting uiten dat de methode in de toekomst niet veel gebruikt zal worden

¹⁵op deze rivier levert de ook veel gebruikte *AO*-functionaal [4] geen goed resultaat.

¹⁶de linkerpunten van de meetsnedes worden in [1] dan ook onterecht als oevers omschreven

SIMONA zal langs de randen geen water stromen dus deze orthogonaliteitsafwijking vormt geen probleem.

Om de hoeveelheid rekentijd te beperken is er voor gekozen het roosterformaat niet te vergroten. Als geschikte modelparameters zijn gekozen, is het mogelijk meer details in de uitvoer te krijgen door dit alsnog te doen.

Hoofdstuk 5

Mathematische, fysische en numerieke modelaspecten

In dit hoofdstuk worden eerst de natuurkundige aspecten van de rivier bekeken. Vervolgens komt het in- en uitvoerproces van het SIMONA pakket aan bod. Hier worden belangrijke opmerkingen met betrekking tot verwerking van de uitvoer gemaakt.

5.1 Terugkoppeling op de meetresultaten

De kwaliteit van het model wordt beoordeeld door de resultaten te vergelijken met gemeten snelheden en waterhoogtes [5]. Omdat de gegevens niet in digitale vorm beschikbaar zijn, vindt de vergelijking plaats op een selectie meetsnedes. Er zijn twee andere belangrijke redenen hiervoor.

Allereerst kunnen we door ons te concentreren op enkele snedes meer aandacht besteden aan details. Voor het bepalen van een globale 'afwijkingnorm' is binnen dit project geen tijd beschikbaar. Bovendien zegt een dergelijke norm niet alles over de modelkwaliteit en dient deze voorafgegaan te worden door een kwalitatieve analyse waar nu de volledige aandacht naar uit zal gaan.

Een tweede reden vormt de mogelijkheid die dit geeft de resultaten te vergelijken met de modellen uit [1].

5.2 Natuurkundige aspecten

De gemiddelde diepte \bar{h} is door [5] geschat op 0.5 m. Deze waarde is ook hier in alle berekeningen gebruikt. De gemiddelde longitudinale snelheid \bar{u} is geschat op 0.5 m s^{-1} . Het gemiddelde verhang, een dimensieloze waarde die de gemiddelde daling van het waterniveau per meter in stromingsrichting aangeeft, wordt voor het segment in de Dommel geschat op $0.145/285 = 0.000509$.

Chézy bodemwrijving en de Manning coëfficiënt De stroomsnelheid van het water hangt sterk samen met de bodemwrijving. Een belangrijke natuurkundige relatie wordt

beschreven door de *Wet van Chézy* die uitgedrukt wordt in de volgende formule [14]:

$$\bar{u} = C \cdot \sqrt{R \cdot S_f}$$

waarbij:

$$\bar{u} = \text{gemiddelde snelheid (m s}^{-1}\text{)} \quad (5.1)$$

$$C = \text{de coëfficiënt van Chézy (m}^{1/2} \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$R = \text{de hydraulische straal (m)}$$

$$S_f = \text{gemiddelde absolute verval van het wateroppervlak in stromingsrichting}$$

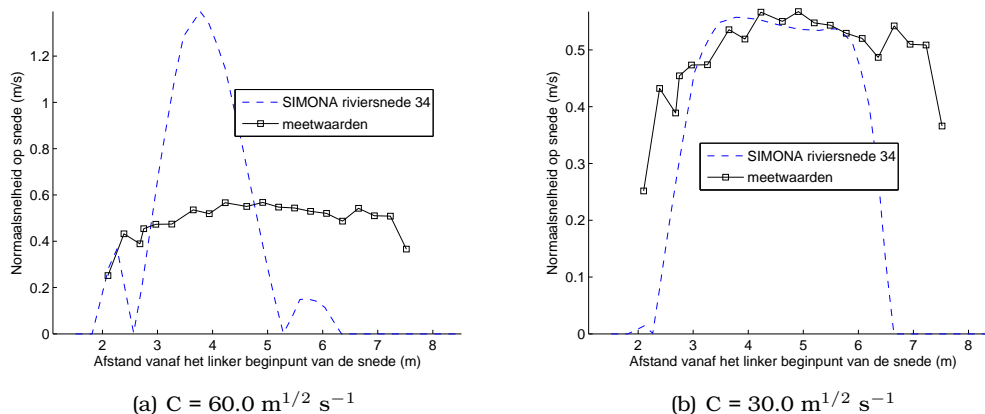
De hydraulische straal kan berekend worden door [14]:

$$R = \frac{A}{P} \quad (5.2)$$

waarbij A het oppervlak van een doorsnede loodrecht op de stromingsrichting is en P de bijbehorende lengte van het natte vlak van de rivier op de doorsnedes. Met een gemiddelde diepte van $\bar{h} = 0.5$ en een gemiddelde breedte van de rivier van 6 m wordt de gemiddelde *hydraulische straal* geschat op:

$$R = \frac{6\bar{h}}{6 + 2\bar{h}} = 0.429 \text{ m.}$$

De *Chézy* formule kan gebruikt worden om de gemiddelde stroomsnelheid in de rivier te bepalen. Omgekeerd kan dus aan de hand van de snelheidsmetingen een geschikte *Chézy*-factor voor het model bepaald worden. Hiermee werd de *Chézy*-factor in eerste instantie geschat op $C = 34 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$. In [5] werd de waarde geschat op $C = 30 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$. Deze waarde is ook in het huidige model gebruikt. Door een model te laten draaien met een hogere factor is goed te zien dat de stroomsnelheid toeneemt en deze ruim boven de metingen uitkomt. De schatting van $C = 30 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ blijkt uit testruns een goede te zijn, maar kan mogelijk nog iets opgehoogd worden. Dat de *Chézy*-factor goed ingeschat is blijkt ook verderop wanneer deze in verband wordt gebracht met de *Manning*-coëfficiënt.



Figuur 5.1: Als voorbeeld is op meetsnede 34 goed te zien wat voor een invloed de *Chézy*-factor heeft. Met een waarde van $30 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ worden de gemeten snelheden veel beter benaderd.

Eddy-viscositeit Een andere factor van belang is de *eddy-viscositeit*. Deze factor drukt de *stropigheid* van de vloeistof uit. *SIMONA* werkt met een diepte-gemiddelde eddy-viscositeit. Een geschikte waarde van de eddy-viscositeit kan in dit geval geschat worden met behulp van de formule [3][1]:

$$\nu_t = \nu_0 + c_\mu u_* \bar{h} \quad (5.3)$$

waarbij ν_t de eddy-viscositeit is uitgedrukt in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$, c_μ de dimensieloze eddy viscositeit, u_* de *shear velocity* en \bar{h} de gemiddelde rivierdiepte. ν_0 drukt de dynamische viscositeit van het water uit en is verwaarloosbaar klein. In [15] wordt de volgende relatie voor de *shear velocity* gegeven:

$$u_*^2 = \frac{g}{C^2} \bar{u}^2 \quad (5.4)$$

De *shear stress* wordt hiermee geschat op 0.0462.

In de modellen van [1] wordt een dimensieloze eddy-viscositeit van 0.67 gebruikt. Met schattingen van de gemiddelde stroomsnelheid, de rivierdiepte uit [5] en de *shear velocity* berekend met bovenstaande formule, werd de eddy-viscositeit hiermee in eerste instantie geschat op $\nu_t = 0.0155$.

Een model in *SIMONA* met $C = 30.0 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ en bovenstaande waarde voor de eddy-viscositeit laat in de berekende waterstanden een lichte overschatting zien, maar geeft in andere opzichten een redelijk goed resultaat. De aanwezigheid van visceuze krachten zorgt voor betere structuurovereenkomsten met de gemeten snelheidsbenaderingen.

In [19] wordt voor een rivier van vergelijkbare omvang als de Dommel onderzoek gedaan naar de eddy-viscositeit. Hier wordt geschreven dat de dimensieloze eddy-viscositeit voor rivieren over het algemeen varieert tussen de 0.07 en 0.30. Omdat *SIMONA* bij gebruik van een dimensieloze eddy-viscositeit van 0.67 de waterstanden iets te hoog berekent zou de eddy-viscositeit mogelijk iets verlaagd moeten worden. Om deze overschatting in de waterhoogte te voorkomen zou ook een iets opgehoogde *Chézy*-factor gebruikt kunnen worden. Samenvattend kan verbetering gezocht worden in (een combinatie van) de volgende stappen:

1. het licht verhogen van de *Chézy*-factor
2. het verder verlagen van de eddy-viscositeit.

Het verhogen van de *Chézy* coëfficiënt staat min of meer gelijk aan het veronderstellen van een ander type bodemwrijving. De mate van wrijving op de bodem kan ook uitgedrukt worden aan de hand van de *Manning* coëfficiënt, doorgaans beschreven met n . Een *Manning* coëfficiënt van 0.02 komt overeen met een rotsachtige bodem en een *Manning* coëfficiënt van 0.03 komt meer overeen met een zandbodem (zie tabel 5.1 voor een overzicht). De

Manning	Bodemtype	Manning	Bodemtype
0.013	Kleibodem	0.025	Masonry
0.019	Grof zand	0.035	Rotsachtig
0.030	Vlakke bodem		

Tabel 5.1: Overzicht van gemiddelde *Manning* coëfficiënten [14]

Vriend gebruikt gaat in zijn modellen uit van een waarde 0.03 en dit komt goed overeen met het type bodem van de Dommel. De relatie tussen de *Manning* en *Chézy* coëfficiënt wordt gegeven door [15][14][9]:

$$C = \frac{1}{n} \sqrt[6]{R} \quad (5.5)$$

waarbij R de hydraulische straal van de rivier. De *Chézy* coëfficiënt is dus omgekeerd evenredig met de *Manning* coëfficiënt. Aan de hand van de waarden in tabel 5.1 kunnen we stellen dat slechts een lichte ophoging van de *Chézy*-waarde mogelijk is. De effecten van dergelijke kleine aanpassingen kunnen op basis van enkele plots op de doorsnedes niet voldoende beoordeeld worden. Voor een goede parameterafschatting dient een of andere afwijkingnorm ten opzichte van de metingen gedefiniëerd te worden. Hiervoor is binnen dit project geen tijd beschikbaar. Dit wordt bovendien bemoeilijkt doordat de meetgegevens niet digitaal beschikbaar zijn.

De bodemwrijving werd in al de hier besproken SIMONA modellen geïmplementeerd door het opgeven van een Manning-coëfficiënt. In alle gevallen is een Manning coëfficiënt van 0.03 gebruikt. Het gebruik van een Manning coëfficiënt is de standaard optie in het SIMONA systeem. Het is ook mogelijk op directe wijze een Chézy-waarde op te geven.

Andere modelparameters De riviersimulaties zijn iedere keer gestart met een water-niveau van 26.7 m boven N.A.P. en een longitudinale stroomsnelheid van 0.5 m s^{-1} . Voor alle modelversies is gebruik gemaakt van een kritieke diepe van 1 mm. Dit komt niet overeen met de in [1] gebruikte waarde van 0.04 m. Voor het droogvallen van roosterzellen is gebruik gemaakt van een *maximum criterium*¹. De keuze voor beperkte droogvalcontrole in het model is gemaakt vanwege op dit punt geconstateerde problemen.

In alle versies zijn de volgende randvoorwaarden gebruikt:

- een debietrand bij de instroom met een totaal van $1.4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Het debiet wordt door *SIMONA* aan de hand van de waterhoogtes over de instroomrand verspreid.
- een waterstandsrand bij de uitstroom met een constante hoogte van 26.55 m boven N.A.P.

Het totale debiet wordt door *SIMONA* over de instroomrand verdeeld. De lokale snelheid in een roostercel wordt vervolgens berekend aan de hand van de relatie [9]:

$$Q = H \cdot \Delta y \cdot u \quad (\text{m}^3 \text{ s}^{-1})$$

met Q de debietwaarde, Δy de roostercelbreedte en u de lokale snelheid. Het gemiddelde rivierdebiet is in [1] bepaald door een dieptemiddeling van de gemeten longitudinale snelheden te maken en deze vervolgens te vermenigvuldigen met het bijbehorende stromingsoppervlak (dit staat ook wel bekend als de *velocity-area* method ([14], p. 263). Op de waterstandsrand is een constante waterhoogte gebruikt die gebaseerd is op de gemiddelde gemeten waterstand op meetdoorsnede 52.

De randvoorwaarden zouden preciezer beschreven kunnen worden door aan de hand van de meetgegevens de waarden per roostercel te bepalen. Het effect hiervan is naar verwachting beperkt: de variatie in waterhoogte in de uitstroom is klein en details in de debietrand bij de instroom verdwijnen grotendeels stroomafwaarts.

¹het gaat te ver hier een uitleg van te geven, informatie is te vinden in de handleiding [9]

5.3 Modelleringsproces in SIMONA

Het modelleringsproces in *SIMONA* bestaat uit de volgende stappen:

1. Het samenstellen van de modelinvoer binnen dit project bestaande uit een kromlijng rooster voor de dieptepunten, dieptegegevens op ditzelfde rooster en een invoerbestand met alle modelparameters.
2. Voorverwerking met WAQPRE². Dit programma verwerkt de modelinvoer zodat het klaar is voor de simulatie.
3. Simulatie met het programma WAQPRO³. Dit programma voert de simulatie uit en schrijft de modelresultaten naar een zogeheten SDS bestand.
4. Het uitlezen van de modelgegevens op de verschillende *staggered grids* met behulp van RSDS⁴.
5. Verwerking van de gegevens op de verschillende roosters. Omzetting naar bruikbare vorm voor MATLAB.
6. Beoordeling van de convergentie aan de hand van de modelresultaten op de roosters zelf.
7. Interpolatie van de modelresultaten naar de gewenste coördinaten voor vergelijking met de meetresultaten. Hiervoor is in alle gevallen gebruik gemaakt van de MATLAB routine `griddata(...)` die Delaunay triangulatie met lineaire interpolatie toepast.
8. Modelpresentatie in MATLAB.

5.3.1 Modeluitvoer

Er dienen enkele opmerkingen gemaakt te worden in verband met de modeluitvoer. Omdat *SIMONA* gebruik maakt van *staggered grids* worden horizontale snelheid, verticale snelheid en waterniveau op verschillende punten opgeslagen. Dit heeft twee belangrijke gevolgen:

1. De horizontale en verticale snelheden worden bijgehouden op twee verschillende roosters. Om de snelheid in een bepaald punt is een dubbele interpolatie nodig. Eerst worden de snelheden geïnterpoleerd naar de waterstandpunten. Vervolgens vindt interpolatie naar de gevraagde coördinaten plaats.
2. De waterstanden en bodemniveaus worden in twee verschillende rooster bijgehouden. Om de waterdiepte te bepalen worden eerst de dieptegegevens naar de waterstandpunten geïnterpoleerd.

Omdat de rivier wordt gemodelleerd op een kromlijng rooster moet ook de richting van de snelheden nog aangepast worden. In detail wordt het volgende schema voor snelheidsinterpolatie toegepast:

1. Zowel in de horizontale als de verticale snelheidspunten worden de zuid>noord en west>oost componenten van de snelheid bepaald aan de hand van de draaiing van de roostercel.

²WAQUA Preprocessor

³WAQUA Processor

⁴Read SDS. Er kan ook gebruik gemaakt worden het programma SDS2MAT dat de gegevens uitleest en tevens interpolatie uitvoert. Waarschijnlijk door een fout in de programmatuur hiervan voert deze de gegevens voor een deel van de tijdstappen niet uit.

2. Beide componenten van de snelheden worden vervolgens naar de waterstandspunten geïnterpoleerd. De snelheden worden nu beschreven door een zuid>noord en west>oost component in ieder waterstandspunt.

Om de snelheid in een willekeurig punt van het stroomgebied te bepalen worden in feite dus drie lineaire interpolatiestappen toegepast. Door de gebruikte interpolatieprocedure lijken kleine details in de snelheidsprofielen te verdwijnen. Mogelijkerwijs kan dit verholpen worden door op zoek te gaan naar een ander type interpolatie.

5.3.2 Convergentie

SIMONA bevat geen ingebouwd systeem om te controleren op convergentie naar een *steady state*. Als oplossing hiervoor wordt de maximum-norm van het verschil in snelheid en het verschil in waterniveau berekend. De methode is niet waterdicht aangezien niet gecontroleerd kan worden of ook daadwerkelijk een stabiele eindsituatie is bereikt. Het controleren op convergentie wordt bemoeilijkt door de aanwezigheid van cellen die een waterhoogte hebben rond de kritieke diepte. Deze cellen hebben soms wel water en soms niet. De convergentie wordt grondiger beoordeeld worden aan de hand van zogenaamde *checkpoints* die meer in het midden van de stroom liggen.

De vrij lange rekentijd (dit vanwege het *Courant*-getal) legt beperkingen op aan de simulatieduur. Een simulatieduur van 1000 minuten vergt een computertijd van ongeveer 3 uur.

Controle op convergentie gebeurt aan de hand van de gegevens zoals deze opgeslagen is op de roosters. Dit om afwijkingen veroorzaakt door interpolatie te voorkomen. Controle op convergentie vindt hoofdzakelijk plaats door te kijken naar verschillen in waterhoogte, maar er wordt ook gekeken naar verschillen in snelheid.

Voor een concrete bespreking van de convergentie in de gemaakte modellen wordt verwezen naar hoofdstuk 6.

5.3.3 Massabehoud

De gemaakte modellen zijn op massabehoud gecontroleerd door de al eerder genoemde *velocity-area* methode toe te passen op de horizontale lijnen van het rooster. Hiertoe is voor ieder verticale snelheidspunt op de roosterlijn het volgende stappenplan gebruikt:

1. benader het grondniveau in het verticale snelheidspunt \bar{Z}_b door het gemiddelde te nemen van de waarden in de aangrenzende dieptepunten
2. benader de waterstand in het verticale snelheidspunt \bar{Z}_s door het gemiddelde te nemen van de waarden in de aangrenzende waterstandspunten
3. bepaal de lengte L tussen de twee aangrenzende dieptepunten, het verticale snelheidspunt ligt precies tussen deze twee punten
4. benader het verticale stroomoppervlak $\bar{A} = L(\bar{Z}_s - \bar{Z}_b)$
5. bepaal het debiet door de snelheid in het verticale snelheidspunt te vermenigvuldigen met \bar{A}

Deze controle op massabehoud wordt uitgevoerd om een volledige vergelijking mogelijk te maken met de in [1] gepresenteerde resultaten.

Hoofdstuk 6

Numerieke resultaten

In dit hoofdstuk wordt aandacht besteed aan de numerieke resultaten van de verschillende modelversies. De numerieke resultaten zijn getoetst op gegevens uit [5]. De metingen zijn verricht op verschillende dagen¹, verspreid over de maand mei van 1980. Hoewel er niet al te veel variatie in de metingen is vernomen kan dit toch zorgen voor lichte afwijkingen in de modelresultaten. Afwijkingen in de berekende waterstanden van enkele millimeters tot een centimeter zijn daarom niet onwaarschijnlijk. Tussen de dieptemetingen voor het bodemprofiel en de later in de maand verrichte dieptemetingen tijdens de snelheidsmetingen zijn variaties te zien van meestal minder dan 1 cm, maar in de diepe gebieden in de bochten zijn enkele punten waar het verschil oploopt tot 4 à 5 cm.

De modellen zijn gebaseerd op de bodemniveaus gemeten tussen 1 en 5 mei 1980. De gebruikte snelheids- en waterstandsmetingen zijn verspreid over de eerste helft van de maand mei verricht.

6.1 Referentiemodel zonder eddy-viscositeit

Als referentiemodel is eerst een *SIMONA* simulatie uitgevoerd zonder eddy-viscositeit. Wanneer geen eddy-viscositeit wordt gebruikt worden de snelheden en waterhoogtes redelijk goed benaderd.

6.1.1 Convergentie

Al na ongeveer 30 minuten is de variatie in de waterhoogte van de orde van enkele $\mu\text{m h}^{-1}$. Ten opzichte van een waterdiepte van gemiddeld een halve meter is dit voldoende klein om er vanuit te gaan dat de rivierstroom niet veel meer in de tijd verandert. De fluctuaties in de tijd zijn voldoende klein om een eerste analyse van het model mogelijk te maken. De gemeten variaties in waterhoogte in het referentiemodel zijn terug te vinden in bijlage C.

Gedurende de eerste 15 uur blijven de variaties van de hierboven beschreven orde. Hierna nemen de variaties in enkele checkpoints plotseling weer toe tot maximaal ongeveer 1 cm. Een vergelijkbaar patroon is ook zichtbaar wanneer we de variatie beoordelen aan de hand van een maximum-norm toegepast op de waterhoogteverschillen in alle rooster-cellen. Het probleem is waarschijnlijk te wijten aan een nog niet juist afhandelen van het droogvallen van rooster-cellen. Naarmate meer droogvalcontrole wordt toegepast doen

¹de snelheden, waterhoogtes en grondniveaus tussen 14 en 30 mei 1980; het grondniveau voor het bodemprofiel tussen 1 en 5 mei 1980.

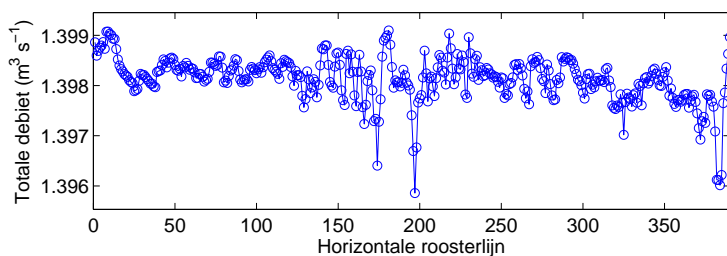
de problemen zich eerder voor². De plotselinge variaties ontstonden in alle geprobeerde modellen rond de instroomsnede (zie figuur 6.10). Mogelijke veroorzakers van de fout zijn:

- problemen in de automatische verdeling van het debiet op de instroomopening
- problemen rondom het droogvallen van roostercellen

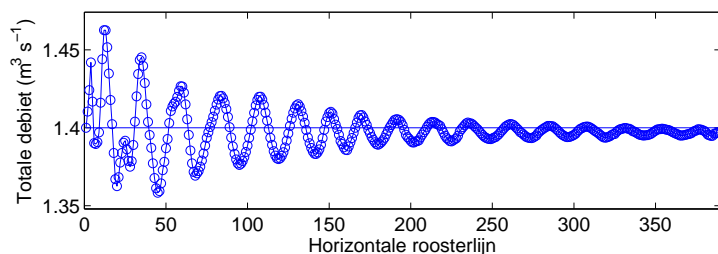
In de handleiding [9] wordt vermeld dat de standaard droogvalcontrole in *SIMONA* problemen kan geven in ondiepe stromingsgebieden. Om dit probleem te verhelpen is in de laatste *SIMONA*-releases³ de invoeroptie *UPWIND_ZETA* toegevoegd. Het toepassen van deze optie gaf al aanzienlijke verbetering ten opzichte van de standaard droogvalprocedures. Het probleem is echter nog niet volledig verholpen. Het is niet duidelijk of het probleem door de keuze van andere invoerparameters verholpen kan worden. Mogelijk hebben we hier te maken met een fout in de software⁴.

De problemen zijn van dusdanig lokale aard dat gesteld kan worden dat dit het oplossen ervan weinig invloed zal hebben op de gehele modelresultaten. Een eerste modelanalyse blijft hiermee nog steeds mogelijk.

Opmerking: in een eerder stadium van het project zijn ook modellen gemaakt met een grotere kritieke diepte. Dit gaf al aan het begin van de simulaties geen stabiele stroming. In de hier besproken modellen wordt een kritieke diepte van 1 mm gehanteerd. Hierbij wordt de zwakste vorm van droogvalcontrole gebruikt.



Figuur 6.1: Totale debietwaarden op de horizontale roosterlijnen. Tijdstip $t=600$ min.



Figuur 6.2: Totale debietwaarden op de horizontale roosterlijnen. Tijdstip $t=900$ min.

²de optie *METHDPS* = 'MAX_DPUV' geeft de beste resultaten; voor technische details wordt verwezen naar de handleiding [9]

³de modellen zijn gemaakt met *SIMONA* Major Release 2006-01

⁴om deze reden is een zogeheten *service-call* ingediend bij de ontwikkelaars; binnen het Bachelorproject is echter onvoldoende tijd beschikbaar om hier nog een vervolg op te geven.

6.1.2 Massabehoud

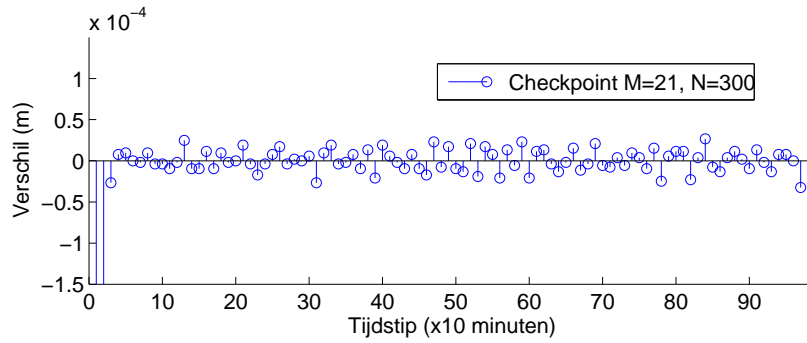
Om een volledige vergelijking met de resultaten van de drie Amerikaanse modellen mogelijk te maken is er voor gekozen om net als in [1] aan de hand van de *velocity-area* methode een plot te maken van de debietwaarden op doorsnedes van de rivier. In figuur 6.1 is te zien dat de debietwaarde van $1.4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ in het hele verloop van de rivier zeer goed benaderd wordt, met een afwijking van minder dan een procent. De lichte afwijking en het slingerend karakter kunnen zeer waarschijnlijk verklaard worden door het gebruik van lineaire interpolatie in de toepassing van de *velocity-area* methode. *SIMONA* hanteert een andere methode om te controleren op massabehoud.

In figuur 6.2 is te zien dat zich *na ruim tien uur van stabiele stroming* plotseling afwijkingen in de debietwaarden rond de instroom voordoen.

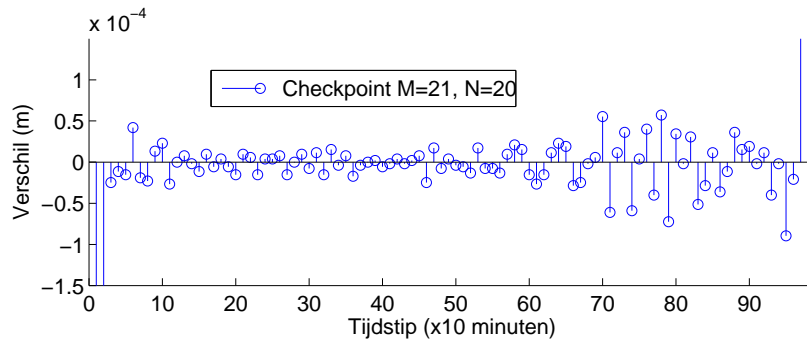
Ook in een plot van de stroomsnelheden op het tijdstip $t=1000 \text{ min.}$ (figuur 6.10) is duidelijk te zien dat zich een onregelmatigheid voordoet. De stroming rond de invoeropening verandert opeens van richting en er ontstaat turbulentie. Dit is ook terug te zien in de plotselinge hevige verandering in de waterhoogte (zie figuur 6.8).

Voor de globale resultaten verderop in de rivier heeft dit verder geen ingrijpende gevolgen, behalve dat het stromingskarakter niet meer stabiel is maar er sprake is van oscillatie rond een schijnbaar evenwichtspunt.

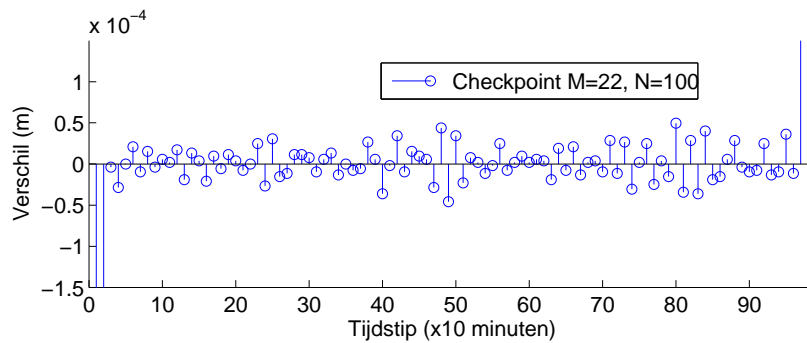
De hierna besproken resultaten betreffen de stabiel te noemen situatie voordat zich na ruim 10 uur onregelmatigheden gaan voordoen (genomen tijdstip is $t= 500 \text{ min.}$)



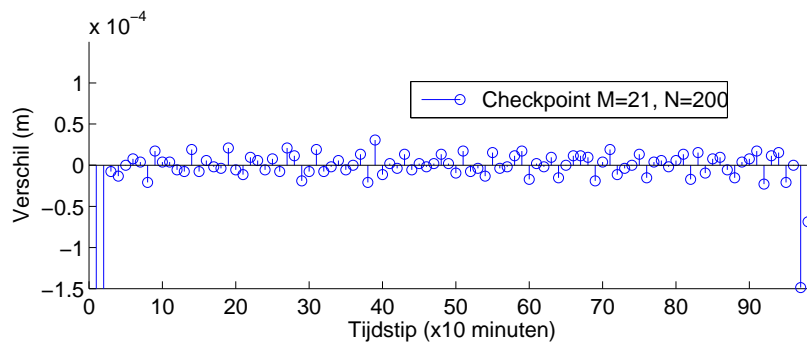
(a) Stroomafwaarts, na de tweede bocht



(b) Het instroomgebied van de rivier



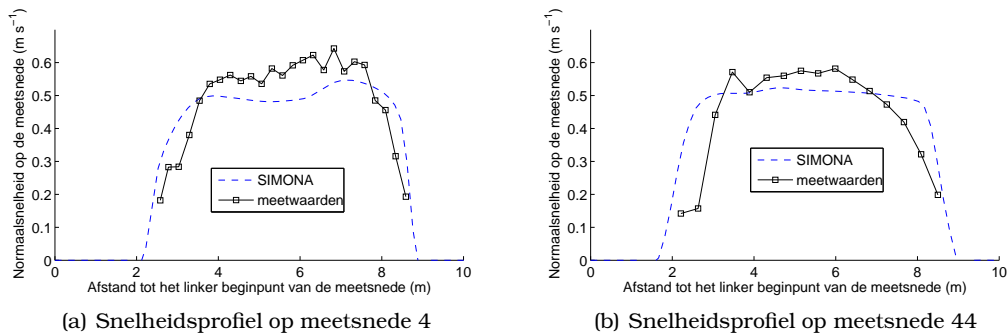
(c) In de eerste bocht



(d) Rond de tweede bocht

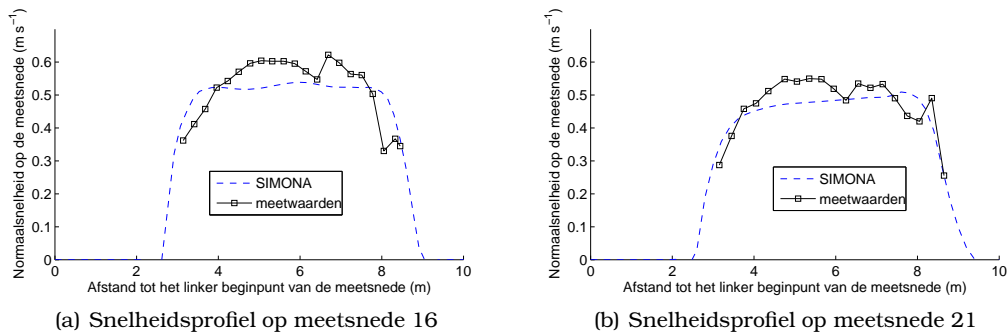
Figuur 6.3: Verschillen in waterhoogte op verschillende plaatsen in de rivier. Na ongeveer 900 minuten wordt de variatie groter. Na bijna 1000 minuten zijn enkele uitschieters zichtbaar die buiten het bereik van de figuur vallen. Het betreft hier verschillen in de orde van 10^{-4} m. Gegevens van twaalf checkpoints zijn terug te vinden in bijlage C.

6.1.3 Stroomsnelheid en waterniveau



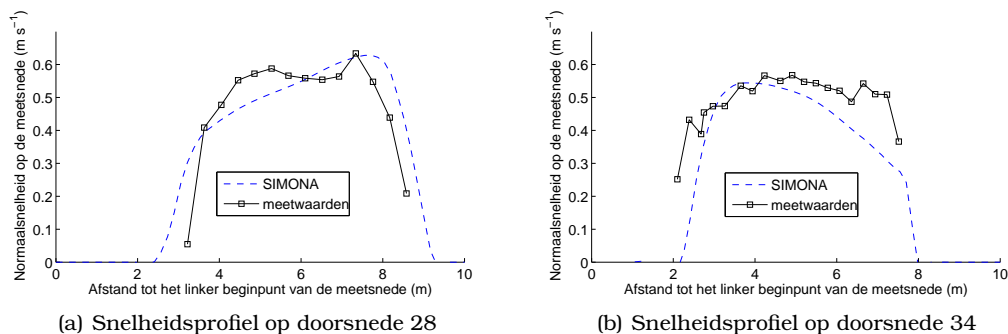
Figuur 6.4: Snelheidsprofiel op tijdstip $t = 500$ min.

In het in- en uitstroomgebied van het riviersegment wordt het gemeten snelheidsprofiel redelijk goed benaderd. Vooral op doorsnede 44 zou de structuurovereenkomst nog wat verbeterd kunnen worden. Omdat in eerste instantie een rooster ter grootte van 31×391 is genomen is het niet vreemd dat kleine details in de modelresultaten ontbreken. Het ontbreken van kleine details is ook enigszins te wijten aan de gebruikte interpolatie van de modelresultaten naar de meetsnedes.



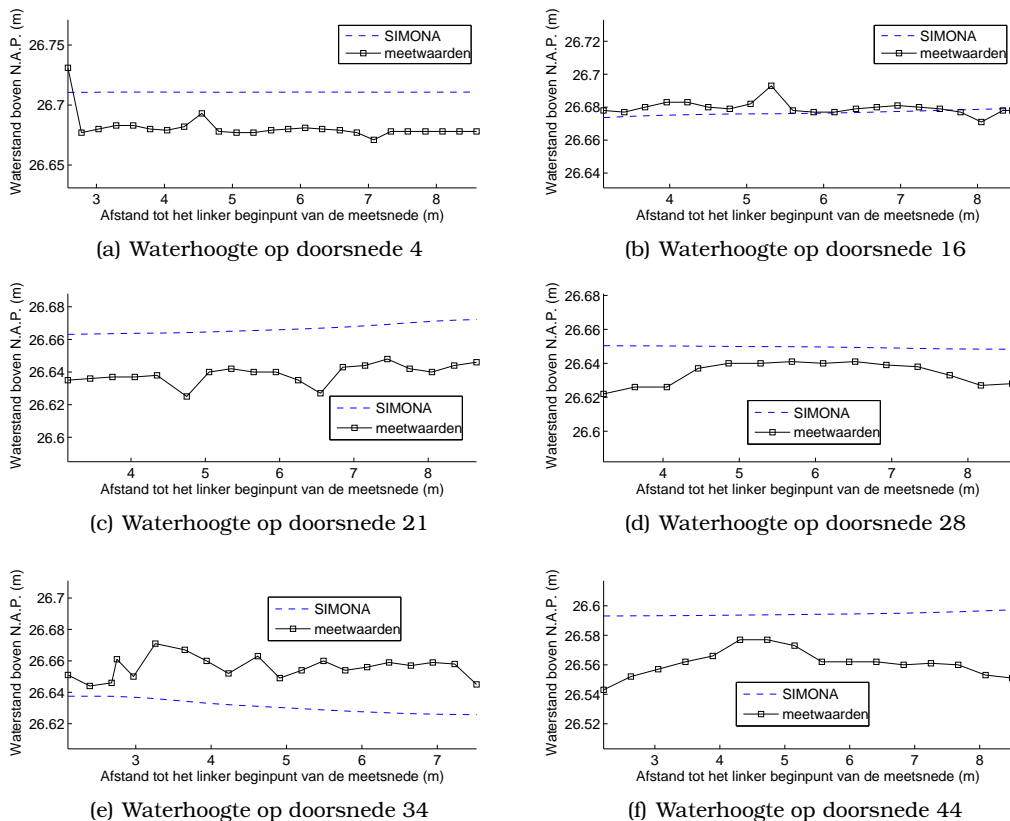
Figuur 6.5: Snelheidsprofiel op tijdstip $t = 500$ min.

Op de meetsnedes 16 en 21 wordt de snelheid globaal gezien goed benaderd. De snelheden uit *SIMONA* vertonen dezelfde parabolvorm als de gemeten snelheden met als enige verschil dat de top iets is afgevlakt.



Figuur 6.6: Snelheidsprofiel op tijdstip $t = 500$ min.

Het gemeten snelheidsprofiel op doorsnede 28, vlak voor de tweede bocht, wordt goed benaderd. De snelheid valt aan de linkerkant iets onder de meetwaarden uit. In de tweede bocht zelf, op doorsnede 34 wordt de snelheid vooral aan de rechterkant iets te laag berekend. Zoals te zien in figuur 6.7 varieert de kwaliteit van de waterhoogtebenadering. Over het



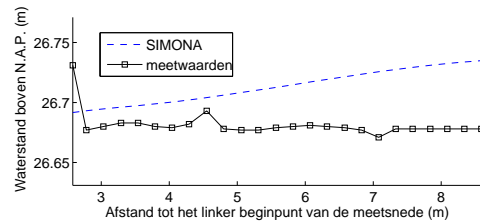
Figuur 6.7: Waterhoogtes op het tijdstip $t = 500$ min.

algemeen echter is de benadering zeer goed en varieert de afwijking meestal van een halve tot ongeveer twee centimeter. Dit ten opzichte van een waterdiepte van gemiddeld een halve meter. De grootste afwijking is terug te zien in de waterhoogte op doorsnede 44,

halverwege het rechte uitstroomgebied na de tweede bocht. Hier is de afwijking ongeveer vier centimeter.

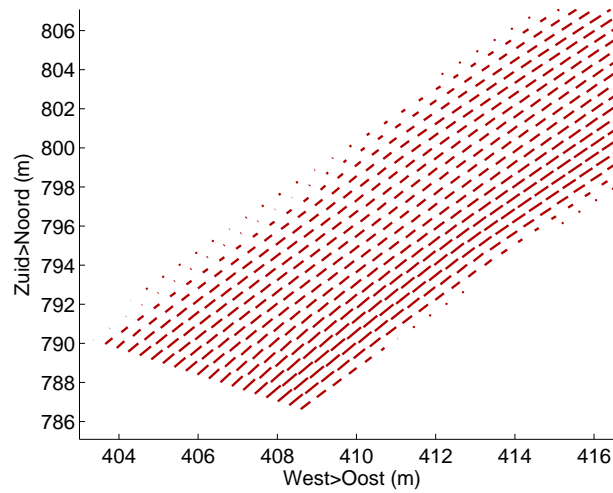
Vooraf op de doorsnedes 21 en 34 is goed te zien dat de helling van het wateroppervlak, details buiten beschouwing gelaten, goed benaderd wordt.

De onregelmatigheden die aan het eind van de simulatietijd ontstaan laten zich vrij snel terugzien in de waterhoogte rond de instroom. In figuur 6.8 is te zien dat op dezelfde doorsnede grote verschillen in waterhoogte ontstaan. Dit effect verdwijnt grotendeels verder stroomafwaarts.



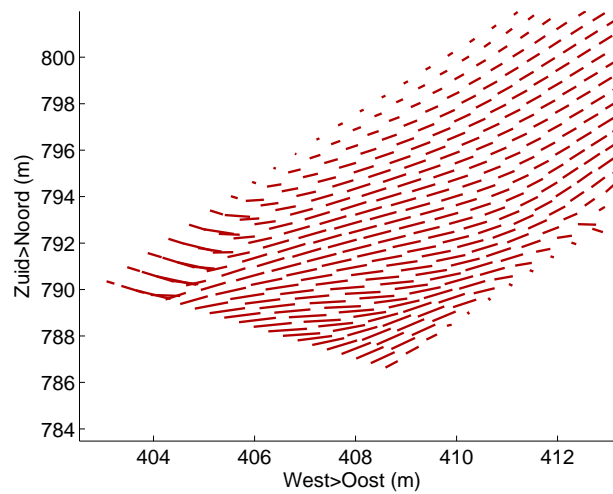
Figuur 6.8: Waterhoogte op doorsnede 4 ($t = 1000$ min.)

In figuur 6.9 is het stromingspatroon te zien zoals deze is gedurende de stabiele stromingsperiode. Dit stromingskarakter zet zich in de rest van het riviersegment voort.



Figuur 6.9: Snelheidsplot rond de invoersnede ($t = 500$ min.)

Na 1000 min. is de eerste turbulentie in dit gebied ontstaan en ontstaat het stromingskarakter dat te zien is in figuur 6.10.



Figuur 6.10: Snelheidsplot rond de instroomsnede ($t = 1000$ min.)

6.2 Model met eddy-viscositeit $0.0075 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

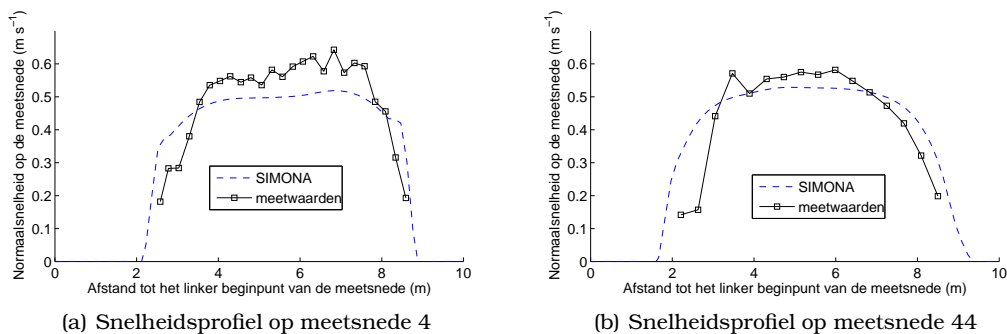
Als een simulatie wordt uitgevoerd met eddy-viscositeit zien we dat de snelheden ondergeschat en de waterhoogtes overgeschat worden. Wel zijn in de snelheids- en waterhoogteprofielen meer structurele overeenkomsten te herkennen.

6.2.1 Convergentie en massabehoud

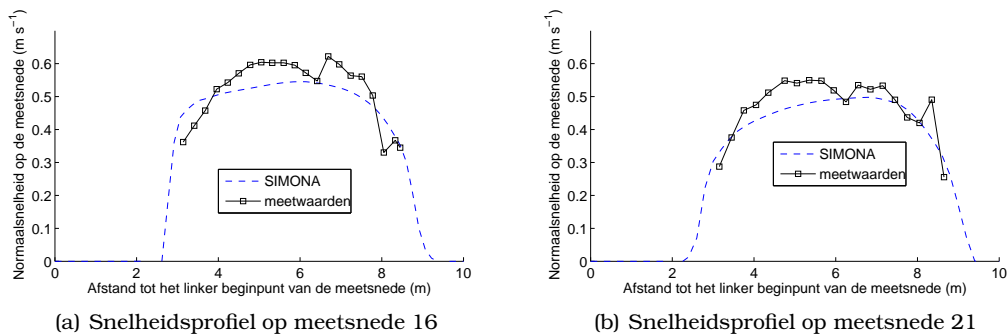
Hier kan hetzelfde opgemerkt worden als bij het model zonder eddy-viscositeit.

6.2.2 Stroomsnelheid en waterniveau

In de figuren is te zien dat de snelheidsprofielen beter benaderd worden. Naar de oevers toe verloopt de afname van de snelheid nu iets soepeler.



Figuur 6.11: Snelheidsprofiel op tijdstip $t = 500 \text{ min}$.

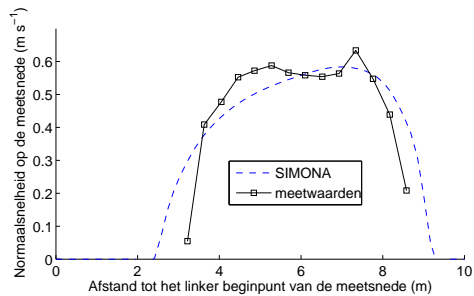


Figuur 6.12: Snelheidsprofiel op tijdstip $t = 500 \text{ min}$.

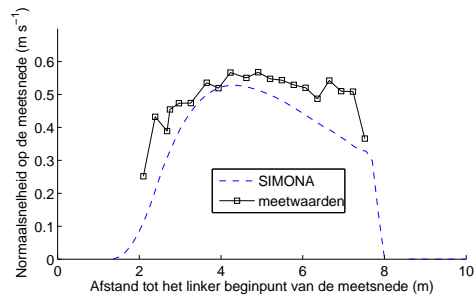
De kwaliteit van de benadering van de waterhoogtes is vrijwel onveranderd. De waterhoogtes worden overall iets hoger ingeschat.

6.3 Algemene opmerkingen

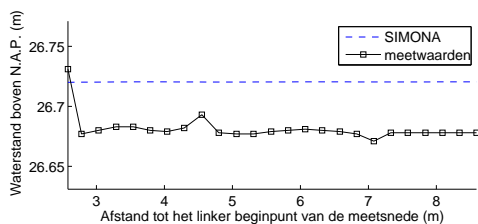
Het model met toevoeging van visceuze krachten vertoont al betere resultaten. De structuur van de snelheidsprofielen wordt beter benaderd. Het algemene beeld bij verhoging van de



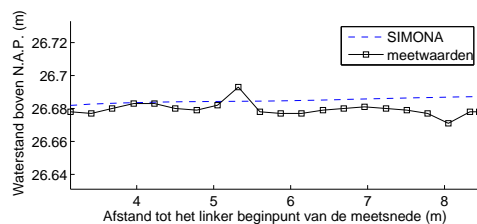
(a) Snelheidsprofiel op doorsnede 28



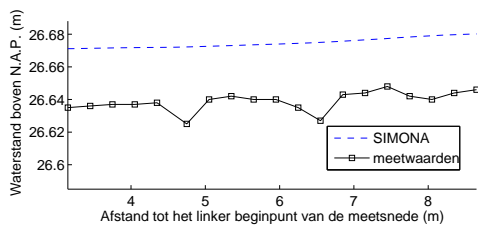
(b) Snelheidsprofiel op doorsnede 34

Figuur 6.13: Snelheidsprofiel op tijdstip $t = 500$ min.

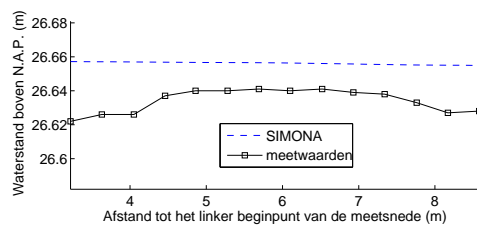
(a) Waterhoogte op doorsnede 4



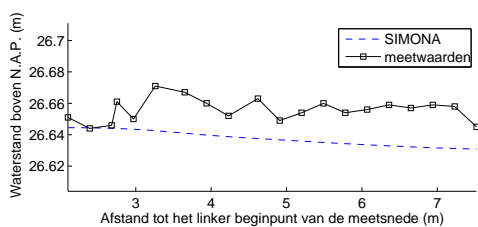
(b) Waterhoogte op doorsnede 16



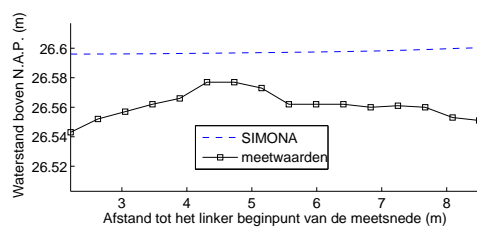
(c) Waterhoogte op doorsnede 21



(d) Waterhoogte op doorsnede 28



(e) Waterhoogte op doorsnede 34



(f) Waterhoogte op doorsnede 44

Figuur 6.14: Waterhoogtes op het tijdstip $t = 500$ min.

visceuze krachten is een hogere waterstand.

Er moet nog een betere afweging gezocht worden tussen de verschillende natuurkundige parameters. De verwachting is dat bij verdere ophoging van de eddy-viscositeit details in de snelheidsprofielen nog beter benaderd zullen worden. Mogelijk moet hierbij de bodemwrijvend ook nog licht aangepast worden.

Hoofdstuk 7

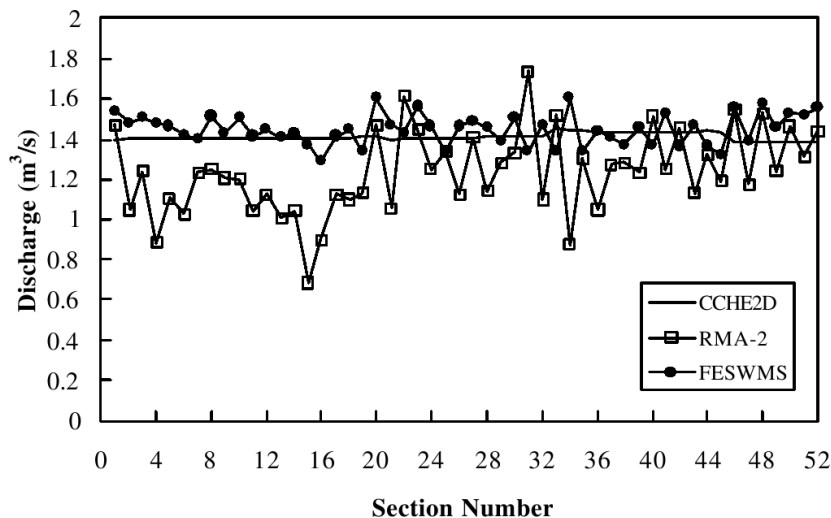
Modelvergelijking

De resultaten van SIMONA worden hier vergeleken met de resultaten van drie Amerikaanse modellen uit [1]. In deze publicatie is een uitgebreidere bespreking van deze modellen terug te vinden. De vergelijking vindt plaats op een selectie bochten vlak voor, in en vlak na de bochten.

SIMONA wordt vergeleken op basis van het model met eddy-viscositeit ingesteld op $0.0075 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Het tijdstip waarop het SIMONA model wordt bekeken is 500 minuten na de start van de simulatie. Het SIMONA model kan mogelijk nog betere resultaten leveren, zie hiervoor het afsluitende hoofdstuk 8.

7.1 Bespreking

Massabehoud Als we kijken naar de debietwaarden op de rivierdoorsnedes (zie figuur 7.1 en ook 6.1 in hoofdstuk 6) dan is te zien dat SIMONA net als CCHED2 zeer goede massabehoudskarakteristieken vertoont. De andere twee methoden vertonen vooral stroomopwaarts veel variatie in de debietwaarden.



Figuur 7.1: Debietwaardenoverzicht overgenomen uit [1]

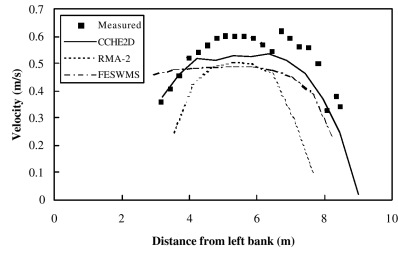
Waterhoogtes Wanneer we kijken naar de berekende waterstanden dan scoort *SIMONA* op de vijf vergeleken snedes over het algemeen beter dan de andere drie modellen. De vergelijking vindt plaats op basis van de gemiddelde waterhoogtes op de doorsnedes.

Meetsnede	Gemeten	CCHE2	RMA-2	FESWMS	SIMONA
16	26.680	26.719	26.691	26.721	26.685
21	26.639	26.705	26.681	26.706	26.675
28	26.634	26.680	26.657	26.676	26.656
34	26.656	26.650	26.641	26.649	26.638
44	26.594	26.599	26.593	26.605	26.598

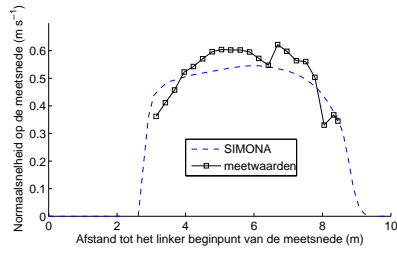
Tabel 7.1: Gemiddelde waterhoogte op de meetsnedes. De waarden van de drie Amerikaanse modellen zijn overgenomen uit [1]

Stroomsnelheden Tenslotte zijn de resultaten van *SIMONA* vergeleken aan de hand van de snelheidsprofielen op de meetsnedes. Het blijkt dat *SIMONA* op de meeste snedes betere resultaten behaalt dan de modellen *RMA-2* en *FESWMS*. De snelheidsprofielen berekend door *SIMONA* komen dicht in de buurt van de snelheidsprofielen uit het *CCHE2* model. Dit model vertoont echter wel meer detailovereenkomsten met de snelheidsprofielen. Op doorsnede 21 lijkt *SIMONA* een betere benadering te geven.

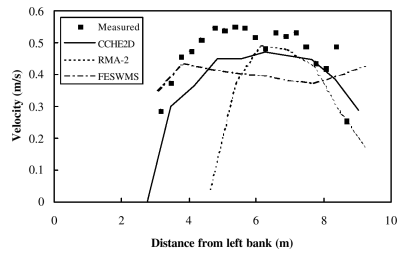
Op de volgende pagina bevindt zich een overzicht van de snelheidsprofielen op de meetsnedes 16, 21, 28, 34 en 44.



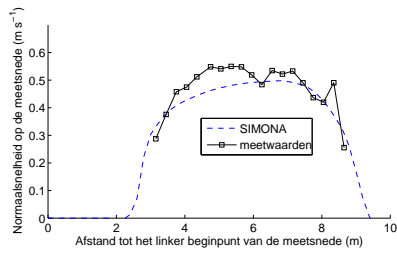
(a) Snelheidsprofiel op doorsnede 16



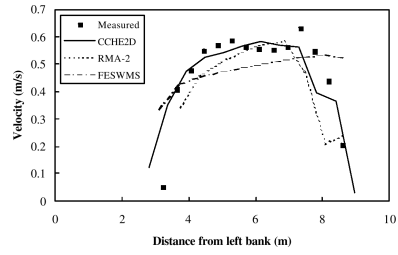
(b) Snelheidsprofiel op doorsnede 16



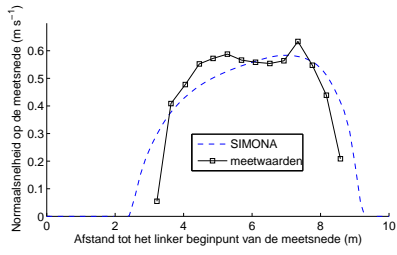
(c) Snelheidsprofiel op doorsnede 21



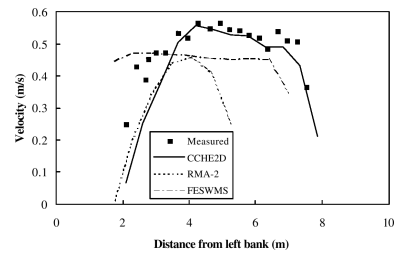
(d) Snelheidsprofiel op doorsnede 21



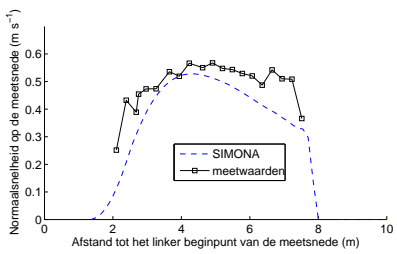
(e) Snelheidsprofiel op doorsnede 28



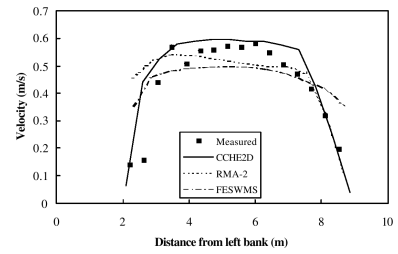
(f) Snelheidsprofiel op doorsnede 28



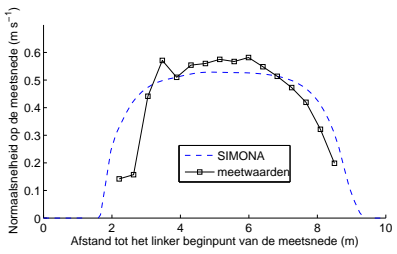
(g) Snelheidsprofiel op doorsnede 34



(h) Snelheidsprofiel op doorsnede 34



(i) Snelheidsprofiel op doorsnede 44



(j) Snelheidsprofiel op doorsnede 44

Figuur 7.2: Snelheidsprofiel op tijdstip $t = 500$ min.

Hoofdstuk 8

Conclusies

SIMONA De eerste resultaten met het modelleringspakket *SIMONA* geven al een redelijk goede benadering van de gemeten stromingswaarden. De resultaten zijn beduidend beter dan die van de modellen *RMA-2* en *FESWMS*. De resultaten van *SIMONA* zijn vergelijkbaar met die van het model *CCHED2*. In het gemaakte model op een rooster van 31×391 levert *SIMONA* nog wel wat minder details dan *CCHED2*. Mogelijk zijn de resultaten beter wanneer een nog groter rooster wordt gebruikt.

De modelsituatie bestaande uit twee opeenvolgende tegengestelde scherpe bochten is een nogal extreme. Met de hier behaalde resultaten is het de verwachting dat de resultaten voor iets lichter meanderende rivieren nog beter zullen zijn. Hiermee kan gesteld worden dat *SIMONA*, binnen zekere grenzen, geschikt is voor het modelleren van riviermeanders. Tijdens het modelleren is aangelopen tegen een probleem dat waarschijnlijk te maken heeft met de wateraanvoer of het droogvallen van roostercellen. Dit probleem dient verder onderzocht te worden.

De stroomsnelheden worden zeer goed ingeschat maar structuurovereenkomsten in de snelheidsprofielen zouden nog verder verbeterd kunnen worden. De waterhoogtes worden over het algemeen beter ingeschat dan in alle drie de Amerikaanse modellen.

Verbeteringsmogelijkheden worden ook verwacht op het gebied van de te gebruiken fysische parameters van het model. Misschien kan de instroomrand in de toekomst per rooster cel ingesteld worden zodat de randvoorwaarden nog beter overeenstemmen met de meetgegevens.

Tot nu toe is gebruik gemaakt van een *trial-and-error* methode voor het bepalen van de invoerparameters. In de toekomst zou een krachtigere parameterafschatting gemaakt kunnen worden door afwijkingsnormen te definiëren. Aan de hand van een dergelijke normering zou gezocht kunnen worden naar een relatie tussen de modeluitvoer en invoerparameters als de *Manning*-coëfficiënt of de eddy-viscositeit.

Roostergeneratie Met betrekking tot het modelleren van de Dommel is het niet erg relevant om verder onderzoek naar roostergeneratie uit te voeren: er wordt al behoorlijk goed aan de roosterkwaliteitseisen voldaan.

Op zichzelf staand is het echter wel interessant om verder onderzoek te verrichten naar de toepassing van functionaalanalyse voor verdere orthogonalisatie.

Suggesties voor verder onderzoek In eerste instantie is verdere modeloptimalisatie gewenst. In een later stadium is het mogelijk onderzoek te verrichten naar de gevolgen van veran-

deringen in de rivier of het transport van deeltjes. Het pakket *SIMONA* biedt hier uitgebreid de mogelijkheden voor.

Voordat hiermee begonnen kan worden dient eerst het probleem omtrent het droogvallen en de aanvoer van het water opgelost te worden.

Bijlage A

MATLAB programmacodes

A.1 Schwarz-Christoffel roostergeneratie

Als voorbeeld wordt hier een Schwarz-Christoffel roostergeneratie gegeven op een rivierpolygoon bestaande uit 2×52 punten.

```
% deze code maakt gebruik van de SC Toolbox
% MX en MY bevatten de coördinaten in de reken- of parametrische ruimte geschaald naar [0,1]x[0,1]
% de polygoon dient tegen de klok in gegeven te worden beginnend in de linkerbovenhoek

function [X Y scalar] = scgridgen(B,MX,MY)

    % aantal punten op een oever
    height=length(B)/2;

    % conversie naar polygoon object bruikbaar voor SC Toolbox
    p=polygon(B);

    % schwarz-christoffel transformatiefunctie van rechthoek naar rivierpolygoon
    f=rectmap(p,[1,height,height+1,height*2]);

    % bepaal de hoeken van de rechthoek in de rekenruimte met behulp van de inverse van f
    scalar=imag(evalinv(f,B(height)));
    MX=MX-0.5;
    MX=MX*pi;
    MY=MY*scalar;

    % bepaal de Schwarz-Christoffel transformatie van de roosterpunten in de rechthoek
    G = eval(f,MX+i*MY);
    X=real(G);
    Y=imag(G);
    X=X';
    Y=Y';

    % deze geeft de verhouding van de rechthoek in rekenruimte
    % kies M:N in de verhouding 1:scalar om een rooster te krijgen met 1:1 celverhouding
    scalar=scalar/pi;

return
```

A.2 Elliptische roostergeneratie

De volgende code kan in MATLAB gebruikt worden om elliptische roostergeneratie uit te voeren. Aan de functie moet een reeds bestaand rooster (bijvoorbeeld gemaakt met bilineaire interpolatie) meegeleverd worden. In onderstaande code zijn geen rekfuncties en randorthogonalisatie geïmplementeerd.

```
% ELLGRIDGEN: grid generation for a simple river polygon by solving the
```

```

% Winslow equations on a given grid
%
% MX,MY= initial grid
% iter= number of Gauss-Seidel iterations
%
% note: for large numbers of Gauss-Seidel steps it is better to implement
% the function in a low-level programming environment
function [X Y] = ellgridgen(MX,MY,iter)

    griddim = size(MX);
    M = griddim(1);
    N = griddim(2);
    X=MX;
    Y=MY;

    % stepsize finite differences (with computational space of [0,1]x[0,1])
    dx = 1 / (M-1); % M points gives M-1 intervals
    dy = 1 / (N-1); % idem
    dxx = dx^2;
    dyy = dy^2;
    dxy = 4*dx*dy;

    % start Gauss-Seidel iteration process
    for k=1:iter
        for eta=2:N-1
            for ksi=2:M-1
                % Gauss-Seidel step: solve elliptic equation
                % weight functions equal to constant 1

                % using finite differences (determined for computational
                % space of [0,1]x[0,1])

                x1 = (X(ksi+1,eta)-X(ksi-1,eta)) / (2*dx);
                x2 = (X(ksi,eta+1)-X(ksi,eta-1)) / (2*dy);
                y1 = (Y(ksi+1,eta)-Y(ksi-1,eta)) / (2*dx);
                y2 = (Y(ksi,eta+1)-Y(ksi,eta-1)) / (2*dy);
                x12 = (X(ksi+1,eta+1)-X(ksi-1,eta+1)-X(ksi+1,eta-1)+X(ksi-1,eta-1)) / dxy;
                y12 = (Y(ksi+1,eta+1)-Y(ksi-1,eta+1)-Y(ksi+1,eta-1)+Y(ksi-1,eta-1)) / dxy;
                y11 = (Y(ksi+1,eta) + Y(ksi-1,eta)) / dxx; % without middle part of finite difference
                y22 = (Y(ksi,eta+1) + Y(ksi,eta-1)) / dyy;
                x11 = (X(ksi+1,eta) + X(ksi-1,eta)) / dxx;
                x22 = (X(ksi,eta+1) + X(ksi,eta-1)) / dyy;

                % determined by finite differences
                g11 = x1^2 + y1^2;
                g22 = x2^2 + y2^2;
                g12 = x1*x2 + y1*y2;

                % Gauss-Seidel step:
                X(ksi,eta) = (1/(2*(g22/dxx+g11/dyy))) * (g22*x11 - 2*g12*x12 + g11*x22);
                Y(ksi,eta) = (1/(2*(g22/dxx+g11/dyy))) * (g22*y11 - 2*g12*y12 + g11*y22);
            end
        end
    end
end
return

```

A.3 Variationale roostergeneratie

O-functionaal Op onderstaande manier kan een Gauss-Seidel-iteratie worden uitgevoerd voor de *O*-functionaal. De code vraagt om een bestaand rooster als invoer. Dit rooster moet aan bepaalde eisen voldoen (zoals beschreven in hoofdstuk 4).

```

% VARGRIDGENO: use variational methods to generate a grid (O-functional)
%
function [X Y] = vargridgeno(xx,yy,iter)

    % dimension of initial grid
    griddim = size(xx);
    M = griddim(1);
    N = griddim(2);
    X=xx;

```



```

Y=yy;

% stepsize finite differences (for computational space of [0,1]x[0,1])
dx = 1 / (M-1);
dy = 1 / (N-1);
dxx = dx^2;
dyy = dy^2;
dxy = 4*dx*dy;
tdx = 2*dx;
tdy = 2*dy;

% start Gauss-Seidel iteration process
for k=1:iter
    for eta=2:N-1
        for ksi=2:M-1
            % Gauss-Seidel step: solve equation for O-functional with
            % weight functions equal to constant 1

            % using finite differences
            x1 = (X(ksi+1,eta)-X(ksi-1,eta)) / tdx;
            x2 = (X(ksi,eta+1)-X(ksi,eta-1)) / tdy;
            y1 = (Y(ksi+1,eta)-Y(ksi-1,eta)) / tdx;
            y2 = (Y(ksi,eta+1)-Y(ksi,eta-1)) / tdy;
            x12 = (X(ksi+1,eta+1)-X(ksi-1,eta+1)-X(ksi+1,eta-1)+X(ksi-1,eta-1)) / dxy;
            y12 = (Y(ksi+1,eta+1)-Y(ksi-1,eta+1)-Y(ksi+1,eta-1)+Y(ksi-1,eta-1)) / dxy;
            y11 = (Y(ksi+1,eta) + Y(ksi-1,eta)) / dxx; % without middle part of finite difference
            y22 = (Y(ksi,eta+1) + Y(ksi,eta-1)) / dyy;
            x11 = (X(ksi+1,eta) + X(ksi-1,eta)) / dxx;
            x22 = (X(ksi,eta+1) + X(ksi,eta-1)) / dyy;

            % solve matrix equations
            a11 = x2^2;
            a22 = y2^2;
            a12 = x2*y2;
            b11 = 4*x1*x2+2*y1*y2;
            b22 = 4*y1*y2+2*x1*x2;
            b12 = x1*y2+x2*y1;
            c11 = x1^2;
            c12 = x1*y1;
            c22 = y1^2;

            A11 = [ [a11,a12]' [a12,a22]' ];
            A12 = [ [b11,b12]' [b12,b22]' ];
            A22 = [ [c11,c12]' [c12,c22]' ];
            b11 = [x11,y11]';
            b12 = [x12,y12]';
            b22 = [x22,y22]';

            rhs = A11*b11 + A12*b12 + A22*b22;
            lhs = A11*2/dxx + A22*2/dyy;
            sol = lhs\rhs;
            X(ksi,eta) = sol(1);
            Y(ksi,eta) = sol(2);
        end
    end
end
return

```

***L*-functionaal** Voor het uitvoeren van de iteraties voor het minimaliseren van de *L*-functionaal kan de Gauss-Seidel-iteratie in de code voor de *O*-functionaal vervangen worden door:

```

% start Gauss-Seidel iteration process
for k=1:iter
    for eta=2:N-1
        for ksi=2:M-1
            % Gauss-Seidel step: solve equation for L-functional with
            % weight functions equal to constant 1
            X(ksi,eta) = ( (X(ksi+1,eta)+X(ksi-1,eta))/dxx + (X(ksi,eta+1)+X(ksi,eta-1))/dyy ) / (2/dxx + 2/dyy);
            Y(ksi,eta) = ( (Y(ksi+1,eta)+Y(ksi-1,eta))/dxx + (Y(ksi,eta+1)+Y(ksi,eta-1))/dyy ) / (2/dxx + 2/dyy);
        end
    end
end

```


Bijlage B

SIMONA invoerbestand

B.1 Modelinvoer versie 2.x

Hieronder staat de invoer voor het programma WAQPRE gegeven, aangevuld met commentaar:

```
# DOMMEL versie 2.x
# - gebruikte rooster: 32x391 Schwarz-Christoffel gegenereerd
# - manning = 0.03 (equivalent aan Chezy van ongeveer 30)
# - eddy = 0.xxxx
# - simulatieduur: 1000 min.
#

# modelidentificatie
IDENTIFICATION
WAQUA
EXPERIMENT='dommel2x'
OVERWRITE
MODID='dommel2x'
TITLE='Riviersegment uit de Dommel, versie 2.x'

# roostergegevens
MESH
GRID
AREA MMAX=33, NMAX=392      # M=MMAX,N=NMAX geven een extra rij en kolom bovenop het RGF rooster
CURVILINEAR
  RGFFILE='dommel2x.rgf'

# definitie debietrand (instroom) en waterstandsrand (uitstroom)
POINTS
P1: M=2 , N=1              # M=1,N=1 verticaal snelheidspunt niet voedend op rekenrooster
P2: M=32 , N=1            # M=MMAX, N=1 idem
P3: M=2 , N=392           # M=1, N=NMAX waterstandspunt niet voedend op rekenrooster
P4: M=32 , N=392         # M=MMAX, N=NMAX idem

# definitie van de openingen
BOUNDARIES
OPENINGS
OPEN1: LINE P1, P2 # upstream
OPEN2: LINE P3, P4 # downstream

# diepte instellingen
BATHYMETRY
GLOBAL
METH_DPS='MAX_DPUV'
DEPDEF=28.5
LOCAL
include file='dommel2x.dep'

# algemene instellingen
GENERAL
DIFFUSION
GLOBAL: CONST_VALUES=0, CDCON=0.0000
```

```
PHYSICAL_PARAMETERS
# geen coriolis krachten
CORIOLIS
GLOBAL
CONST_VALUES=0.0

# beschrijving van het stromingsprobleem
FLOW
PROBLEM
TIMEFRAME
DATE='15 may 1980', TSTART=0.0, TSTOP=1000 # in minuten

METHODVARIABLES
CHECKCONT='VEL'
TSTEP=0.005 # in minuten
ITERCON=20
ITERACCURACY=0.00025
ITERMOM=12
SMOOTHING
TLSMOOTH=1440.0
DRYING
CHECK_WL='YES'
DEPCRIT=0.0010 # kritieke diepte van 1 mm
UPWIND_ZETA='YES'
FRICTION
GLOBAL
FORMULA='Manning'
TICVAL=0.005
UDIREC
GLOBAL
CONST_VALUES=0.03
VDIREC
GLOBAL
CONST_VALUES=0.03
VISCOSITY
EDDYVISCOSITYCOEFF=0.xxxx

# besturing van de rivierstroom
FORCINGS
INITIAL
WATLEVEL
GLOBAL
CONST_VALUES=26.7
COMPUTE
VELOCITIES

BOUNDARIES # openingen net buiten het rekenrooster
B: OPEN1 BTYPE='disch-ad' BDEF='series' SAME # debietrand
B: OPEN2 BTYPE='wl' BDEF='series' SAME # waterstandsrand
TIMESERIES
S: P1 TID=1.4 # 1.4 m3 s debiet
S: P3 TID=26.55 # 26.55 m constante waterhoogte

# uitvoer naar het SDS databestand
SDSOUTPUT
MAPS
TFMAPS=0 TIMAPS=10 TLMAPS=1000
```

Bijlage C

Waterstandscheckpoints

C.1 Referentiemodel zonder eddy-viscositeit

Hier staan de verschillen in waterhoogte van twaalf checkpoints, verspreid over het riviersegment (op volgorde: $N = 300 : M = 16, 21, 22; N = 20 : M = 16, 21, 22; N = 100 : M = 16, 21, 22; N = 200 : M = 16, 21, 22$). Iedere kolom bevat de verandering in waterniveau na afloop van het voorafgaande interval van tien minuten. Beginnend op $t=10$ min.

Columns 1 through 10

-1.9571e-01	-2.0485e-03	-1.9073e-05	1.9073e-05	-7.6294e-06	-7.6294e-06	-1.7166e-05	2.6703e-05	1.9073e-06	0
-1.9516e-01	-2.0676e-03	-2.6703e-05	7.6294e-06	9.5367e-06	0	-1.9073e-06	9.5367e-06	-3.8147e-06	-3.8147e-06
-1.9503e-01	-2.0790e-03	1.3351e-05	1.9073e-06	5.7220e-06	-3.8147e-06	1.9073e-06	1.9073e-06	-5.7220e-06	2.4796e-05
-7.5136e-02	-3.1490e-03	-1.9073e-05	-3.8147e-06	-1.1444e-05	-1.9073e-06	-5.7220e-06	1.1444e-05	-1.9073e-06	-9.5367e-06
-7.5230e-02	-3.1796e-03	-2.4796e-05	-1.1444e-05	-1.5259e-05	4.1962e-05	-1.9073e-05	-2.2888e-05	1.3351e-05	2.2888e-05
-7.5264e-02	-3.1796e-03	-1.7166e-05	-7.6294e-06	-3.8147e-06	-1.9073e-06	-2.2888e-05	1.3351e-05	9.5367e-06	-1.3351e-05
-1.0798e-01	-3.3112e-03	-1.3351e-05	2.0981e-05	-1.7166e-05	1.7166e-05	-3.8147e-06	1.1444e-05	1.9073e-06	-5.7220e-06
-1.0788e-01	-3.2978e-03	-9.5367e-06	-5.7220e-06	3.8147e-06	-3.8147e-06	-1.9073e-06	1.9073e-05	-2.4796e-05	1.5259e-05
-1.0779e-01	-3.2997e-03	-3.8147e-06	-2.8610e-05	0	2.0981e-05	-9.5367e-06	1.5259e-05	-3.8147e-06	5.7220e-06
-1.5853e-01	-2.8687e-03	-9.5367e-06	-5.7220e-06	-9.5367e-06	-3.8147e-06	1.3351e-05	1.9073e-06	1.5259e-05	-2.6703e-05
-1.5857e-01	-2.7790e-03	-7.6294e-06	-1.3351e-05	0	7.6294e-06	3.8147e-06	-2.0981e-05	1.7166e-05	3.8147e-06
-1.5886e-01	-2.7466e-03	-1.3351e-05	0	0	1.9073e-06	7.6294e-06	-3.8147e-06	1.9073e-06	0

Columns 11 through 20

-1.5259e-05	7.6294e-06	1.1444e-05	9.5367e-06	-2.6703e-05	7.6294e-06	1.9073e-05	-1.1444e-05	1.5259e-05	-9.5367e-06
-9.5367e-06	-1.9073e-06	2.4796e-05	-9.5367e-06	-9.5367e-06	1.1444e-05	-9.5367e-06	9.5367e-06	-1.9073e-06	0
-1.3351e-05	1.9073e-06	-5.7220e-06	-1.9073e-06	3.8147e-06	9.5367e-06	7.6294e-06	-5.7220e-06	-1.3351e-05	2.2888e-05
9.5367e-06	3.8147e-06	-1.5259e-05	-1.9073e-06	-7.6294e-06	1.9073e-05	-1.9073e-05	7.6294e-06	7.6294e-06	-7.6294e-06
-2.6703e-05	0	7.6294e-06	-1.9073e-06	-1.1444e-05	9.5367e-06	-5.7220e-06	3.8147e-06	-5.7220e-06	-1.5259e-05
3.8147e-06	1.3351e-05	-1.1444e-05	-3.8147e-06	0	1.9073e-05	-1.7166e-05	-1.9073e-05	2.0981e-05	-1.9073e-06
-9.5367e-06	0	9.5367e-06	7.6294e-06	-9.5367e-06	-2.4796e-05	2.4796e-05	5.7220e-06	-9.5367e-06	0
1.1444e-05	3.8147e-06	-9.5367e-06	-2.8610e-05	3.4332e-05	-1.5259e-05	1.9073e-05	-9.5367e-06	7.6294e-06	-1.9073e-06
1.9073e-06	1.7166e-05	-1.9073e-05	1.3351e-05	3.8147e-06	-2.0981e-05	9.5367e-06	-5.7220e-06	1.1444e-05	3.8147e-06
1.5259e-05	-3.8147e-06	-3.8147e-06	9.5367e-06	5.7220e-06	5.7220e-06	-1.9073e-05	1.7166e-05	7.6294e-06	-1.7166e-05
3.8147e-06	-5.7220e-06	-7.6294e-06	1.9073e-05	-7.6294e-06	5.7220e-06	-1.9073e-06	-3.8147e-06	2.0981e-05	-5.7220e-06
7.6294e-06	5.7220e-06	-9.5367e-06	-1.9073e-05	2.4796e-05	0	-5.7220e-06	-3.8147e-06	2.6703e-05	-9.5367e-06

Columns 21 through 30

1.3351e-05	-5.7220e-06	-2.2888e-05	1.3351e-05	-5.7220e-06	2.6703e-05	-2.8610e-05	5.7220e-06	1.5259e-05	5.7220e-06
1.9073e-05	-3.8147e-06	-1.7166e-05	-3.8147e-06	7.6294e-06	1.7166e-05	-3.8147e-06	1.9073e-06	0	5.7220e-06
-7.6294e-06	-1.9073e-06	9.5367e-06	-5.7220e-06	3.8147e-06	0	-3.8147e-06	0	0	-9.5367e-06
-9.5367e-06	2.2888e-05	-9.5367e-06	3.8147e-06	-1.3351e-05	-7.6294e-06	1.1444e-05	-9.5367e-06	-5.7220e-06	5.7220e-06
9.5367e-06	5.7220e-06	-1.5259e-05	3.8147e-06	3.8147e-06	7.6294e-06	-1.5259e-05	0	9.5367e-06	-7.6294e-06
-1.3351e-05	1.7166e-05	-1.9073e-06	-1.9073e-05	1.9073e-06	1.1444e-05	-1.7166e-05	1.5259e-05	5.7220e-06	-1.1444e-05
1.1444e-05	7.6294e-06	1.7166e-05	-1.9073e-06	9.5367e-06	-2.6703e-05	1.9073e-06	3.8147e-06	3.0518e-05	-1.7166e-05
1.9073e-05	-2.4796e-05	3.6240e-05	-2.8610e-05	9.5367e-06	-2.4796e-05	4.1962e-05	-7.6294e-06	-1.1444e-05	9.5367e-06
-7.6294e-06	0	2.4796e-05	-2.6703e-05	3.0518e-05	-1.5259e-05	-1.1444e-05	1.1444e-05	1.1444e-05	7.6294e-06
-5.7220e-06	5.7220e-06	1.3351e-05	-7.6294e-06	-1.9073e-06	1.1444e-05	-1.9073e-06	1.3351e-05	-1.1444e-05	7.6294e-06
-1.1444e-05	9.5367e-06	5.7220e-06	-5.7220e-06	7.6294e-06	-7.6294e-06	2.0981e-05	1.1444e-05	-1.9073e-05	-7.6294e-06
-1.1444e-05	5.7220e-06	9.5367e-06	-5.7220e-06	9.5367e-06	1.9073e-06	-1.9073e-06	5.7220e-06	-1.1444e-05	5.7220e-06

Columns 31 through 40

-1.3351e-05	1.5259e-05	1.1444e-05	-3.8147e-06	-1.7166e-05	-1.1444e-05	7.6294e-06	1.5259e-05	5.7220e-06	-9.5367e-06
-2.6703e-05	9.5367e-06	1.9073e-05	-3.8147e-06	-1.9073e-06	7.6294e-06	-9.5367e-06	1.3351e-05	-2.0981e-05	1.9073e-05
1.5259e-05	1.5259e-05	-1.9073e-06	-7.6294e-06	-2.0981e-05	1.9073e-06	2.8610e-05	-9.5367e-06	1.7166e-05	-1.7166e-05
-5.7220e-06	-3.8147e-06	5.7220e-06	3.8147e-06	-3.8147e-06	-5.7220e-06	5.7220e-06	0	1.9073e-06	-1.5259e-05
1.1444e-05	-1.5259e-05	1.5259e-05	-3.8147e-06	7.6294e-06	-1.7166e-05	-3.8147e-06	0	1.9073e-06	-5.7220e-06
1.9073e-06	-3.2425e-05	2.2888e-05	3.8147e-06	3.8147e-06	-1.1444e-05	9.5367e-06	-1.7166e-05	-3.8147e-06	0
-1.1444e-05	-1.9073e-06	1.5259e-05	3.8147e-06	1.1444e-05	-1.7166e-05	2.8610e-05	-2.8610e-05	1.1444e-05	-1.5259e-05
2.8610e-05	-9.5367e-06	-1.7166e-05	1.9073e-05	-1.7166e-05	2.0981e-05	-1.3351e-05	-1.9073e-06	9.5367e-06	7.6294e-06
-9.5367e-06	5.7220e-06	1.3351e-05	-1.3351e-05	0	-7.6294e-06	-5.7220e-06	2.6703e-05	5.7220e-06	-3.6240e-05
0	7.6294e-06	-1.3351e-05	1.1444e-05	5.7220e-06	0	-1.3351e-05	1.3351e-05	1.7166e-05	-3.8147e-06
1.9073e-05	-7.6294e-06	-1.9073e-06	5.7220e-06	-5.7220e-06	0	1.3351e-05	-2.0981e-05	3.0518e-05	-1.1444e-05

7.6294e-06 -1.7166e-05 2.2888e-05 -9.5367e-06 3.8147e-06 3.8147e-06 0 3.8147e-06 -3.8147e-06 1.3351e-05

Columns 41 through 50

-5.7220e-06 2.2888e-05 -1.1444e-05 9.5367e-06 -1.9073e-06 2.6703e-05 -3.4332e-05 5.7220e-06 1.7166e-05 -1.1444e-05
5.7220e-06 -1.9073e-06 -9.5367e-06 7.6294e-06 -9.5367e-06 -1.7166e-05 2.2888e-05 -7.6294e-06 1.7166e-05 -9.5367e-06
-1.9073e-06 -1.9073e-06 -9.5367e-06 2.0981e-05 -3.8147e-06 -5.7220e-06 0 -1.9073e-06 7.6294e-06 1.1444e-05
-7.6294e-06 1.1444e-05 5.7220e-06 -1.1444e-05 3.8147e-06 -9.5367e-06 1.1444e-05 -5.7220e-06 -1.7166e-05 -3.8147e-06
-1.9073e-06 3.8147e-06 -1.9073e-06 1.9073e-06 7.6294e-06 -2.4796e-05 1.7166e-05 -7.6294e-06 3.8147e-06 -3.8147e-06
-7.6294e-06 1.9073e-05 -1.9073e-06 -1.1444e-05 1.1444e-05 -1.3351e-05 9.5367e-06 -5.7220e-06 -9.5367e-06 1.3351e-05
3.8147e-06 2.0981e-05 -2.2888e-05 9.5367e-06 -9.5367e-06 7.6294e-06 2.6703e-05 -9.5367e-06 -9.5367e-06 3.4332e-05
0 0 -3.8147e-06 5.7220e-06 3.8147e-06 -2.6703e-05 4.0054e-05 -1.3351e-05 5.7220e-06 -5.7220e-06
-1.9073e-06 3.4332e-05 -9.5367e-06 1.5259e-05 9.5367e-06 5.7220e-06 -2.8610e-05 4.3869e-05 -4.5776e-05 3.4332e-05
-2.8610e-05 7.6294e-06 1.7166e-05 -1.9073e-06 -5.7220e-06 3.8147e-06 1.1444e-05 5.7220e-06 -2.2888e-05 5.7220e-06
1.9073e-06 -3.8147e-06 1.3351e-05 -5.7220e-06 1.9073e-06 -1.9073e-06 1.3351e-05 1.9073e-06 -9.5367e-06
-2.0981e-05 1.3351e-05 5.7220e-06 5.7220e-06 -7.6294e-06 -1.9073e-06 1.3351e-05 5.7220e-06 0 -1.9073e-05

Columns 51 through 60

-1.7166e-05 2.2888e-05 -1.9073e-06 -1.5259e-05 3.0518e-05 -2.2888e-05 1.3351e-05 -3.8147e-06 -2.0981e-05 1.7166e-05
-1.3351e-05 2.0981e-05 -1.9073e-05 1.7166e-05 7.6294e-06 -2.0981e-05 1.3351e-05 -5.7220e-06 2.2888e-05 -2.0981e-05
-5.7220e-06 5.7220e-06 3.8147e-06 -1.1444e-05 0 1.5259e-05 7.6294e-06 -2.8610e-05 5.7220e-06 5.7220e-06
2.0981e-05 -3.8147e-06 -1.9073e-06 -1.9073e-06 9.5367e-06 -2.4796e-05 1.7166e-05 -1.5259e-05 5.7220e-06 -2.8610e-05
-5.7220e-06 -1.3351e-05 1.7166e-05 -7.6294e-06 -7.6294e-06 -1.3351e-05 9.5367e-06 2.0981e-05 1.5259e-05 -1.5259e-05
-1.1444e-05 1.7166e-05 -2.0981e-05 5.7220e-06 -7.6294e-06 -7.6294e-06 2.2888e-05 -3.0518e-05 2.2888e-05 0
9.5367e-06 0 -5.7220e-06 7.6294e-06 -2.6703e-05 9.5367e-06 1.3351e-05 -3.8147e-06 0 1.5259e-05
5.7220e-06 -9.5367e-06 7.6294e-06 2.2888e-05 -7.6294e-06 3.8147e-06 -7.6294e-06 -1.9073e-05 3.8147e-05 3.8147e-05
-2.2888e-05 7.6294e-06 1.9073e-06 -1.1444e-05 -1.9073e-06 2.4796e-05 -7.6294e-06 1.9073e-06 9.5367e-06 1.9073e-06
2.2888e-05 -1.7166e-05 0 3.8147e-06 1.1444e-05 -5.7220e-06 1.9073e-06 1.5259e-05 -1.1444e-05 9.5367e-06
1.7166e-05 -7.6294e-06 -3.8147e-06 -1.3351e-05 1.5259e-05 -3.8147e-06 -1.9073e-06 1.1444e-05 1.7166e-05 -1.7166e-05
3.2425e-05 -2.0981e-05 -9.5367e-06 5.7220e-06 1.3351e-05 -1.3351e-05 1.1444e-05 -1.9073e-06 9.5367e-06 -1.3351e-05

Columns 61 through 70

1.1444e-05 -7.6294e-06 1.9073e-06 -7.6294e-06 1.5259e-05 -1.7166e-05 1.1444e-05 1.7166e-05 -1.5259e-05 1.9073e-06
1.1444e-05 1.3351e-05 -3.8147e-06 -1.3351e-05 -1.9073e-06 1.5259e-05 -1.1444e-05 -3.8147e-06 2.0981e-05 -5.7220e-06
-1.9073e-06 2.2888e-05 -1.5259e-05 0 3.8147e-06 1.9073e-06 -2.2888e-05 1.5259e-05 3.0518e-05 -2.0981e-05
3.6240e-05 -1.3351e-05 5.7220e-06 -1.5259e-05 1.9073e-06 1.9073e-05 -2.8610e-05 1.9073e-06 1.5259e-05 1.9073e-06
-2.6703e-05 -1.5259e-05 1.1444e-05 2.2888e-05 1.9073e-06 -2.4796e-05 -2.8610e-05 -1.9073e-06 5.7220e-06 5.5333e-05
-3.8147e-06 -2.8610e-05 -1.9073e-06 2.8610e-05 -1.9073e-06 1.5259e-05 -4.1962e-05 -2.4796e-05 3.8147e-05 3.2425e-05
2.0981e-05 -1.5259e-05 -2.8610e-05 2.2888e-05 3.8147e-06 1.7166e-05 -1.3351e-05 9.5367e-06 1.3351e-05 1.1444e-05
-1.5259e-05 -1.9073e-06 -1.9073e-06 1.3351e-05 -3.8147e-06 7.6294e-06 1.9073e-06 -7.6294e-06 3.8147e-06 2.2888e-05
5.7220e-06 3.8147e-06 -1.9073e-05 1.9073e-05 -7.6294e-06 2.0981e-05 -1.3351e-05 1.9073e-06 3.8147e-06 -9.5367e-06
-7.6294e-06 1.3351e-05 0 -7.6294e-06 -7.6294e-06 1.9073e-06 1.1444e-05 3.8147e-06 -1.9073e-06 -1.9073e-06
1.9073e-06 -1.9073e-06 9.5367e-06 0 1.1444e-05 1.1444e-05 9.5367e-06 -1.9073e-05 3.8147e-06
3.8147e-06 2.4796e-05 -1.9073e-05 7.6294e-06 -9.5367e-06 -1.9073e-06 1.9073e-06 1.7166e-05 0 -1.3351e-05

Columns 71 through 80

-5.7220e-06 1.9073e-05 -1.5259e-05 0 -1.3351e-05 -1.9073e-06 2.0981e-05 3.8147e-06 -3.8147e-06 1.5259e-05
-7.6294e-06 3.8147e-06 -5.7220e-06 9.5367e-06 3.8147e-06 -9.5367e-06 1.5259e-05 -2.4796e-05 5.7220e-06 1.1444e-05
-3.8147e-06 -1.9073e-06 2.6703e-05 -9.5367e-06 -5.7220e-06 3.8147e-06 -5.7220e-06 -2.0981e-05 3.6240e-05 -1.5259e-05
-5.7220e-06 -1.1444e-05 1.7166e-05 -2.4796e-05 1.9073e-06 1.9073e-05 -1.7166e-05 3.0518e-05 -4.5776e-05 2.2888e-05
-6.1035e-05 1.1444e-05 3.6240e-05 -5.9128e-05 3.8147e-06 4.0054e-05 -4.0054e-05 5.7220e-05 -7.2479e-05 3.4332e-05
-7.0572e-05 9.5367e-06 4.1962e-05 -4.1962e-05 -2.2888e-05 4.7684e-05 -6.6757e-05 7.2479e-05 -6.6757e-05 3.6240e-05
-9.5367e-06 -1.3351e-05 2.4796e-05 -3.8147e-06 -1.9073e-05 3.0518e-05 -4.5776e-05 1.3351e-05 -3.8147e-06 3.4332e-05
-1.5259e-05 -2.2888e-05 4.9591e-05 -5.7220e-06 -2.4796e-05 2.8610e-05 -3.6240e-05 5.3406e-05 -4.5776e-05 3.0518e-05
2.8610e-05 -1.1444e-05 2.6703e-05 -3.0518e-05 1.9073e-06 2.4796e-05 -2.4796e-05 3.8147e-06 -1.5259e-05 4.9591e-05
9.5367e-06 9.5367e-06 -1.9073e-05 1.9073e-05 -1.9073e-06 -7.6294e-06 7.6294e-06 5.7220e-06 1.5259e-05 -2.4796e-05
1.9073e-05 -1.1444e-05 -3.8147e-06 0 1.3351e-05 -1.5259e-05 3.8147e-06 5.7220e-06 -1.9073e-06 5.7220e-06
2.6703e-05 -1.3351e-05 -9.5367e-06 2.6703e-05 -7.6294e-06 -9.5367e-06 7.6294e-06 -1.1444e-05 2.2888e-05 -1.1444e-05

Columns 81 through 90

-1.1444e-05 0 -9.5367e-06 1.3351e-05 1.7166e-05 -1.3351e-05 -1.3351e-05 7.6294e-06 1.9073e-05 -1.3351e-05
1.1444e-05 -2.2888e-05 3.8147e-06 2.6703e-05 -7.6294e-06 -1.3351e-05 3.8147e-06 1.1444e-05 1.9073e-06 -9.5367e-06
2.0981e-05 -2.8610e-05 2.0981e-05 -5.7220e-06 1.1444e-05 3.8147e-06 -1.5259e-05 9.5367e-06 1.5259e-05 -2.0981e-05
5.7220e-06 4.3869e-05 -5.7220e-05 -1.3351e-05 -1.1444e-05 -9.5367e-06 1.1444e-05 4.5776e-05 3.8147e-06 -7.6294e-06
-1.9073e-06 3.0518e-05 -5.1498e-05 -2.8610e-05 1.1444e-05 -3.6240e-05 -1.1444e-05 3.6240e-05 1.5259e-05 1.9073e-05
-1.9073e-05 5.7220e-05 -6.4850e-05 -5.3406e-05 2.6703e-05 -4.1962e-05 -3.8147e-06 3.0518e-05 1.9073e-06 5.7220e-06
-1.1444e-05 1.3351e-05 -4.1962e-05 4.1962e-05 7.6294e-06 -7.6294e-06 -3.0518e-05 2.2888e-05 1.3351e-05 -9.5367e-06
-3.2425e-05 2.2888e-05 -3.2425e-05 4.1962e-05 -5.7220e-06 -7.6294e-06 1.5259e-05 1.5259e-05 0 1.9073e-06
-3.4332e-05 2.8610e-05 -3.6240e-05 4.0054e-05 -1.9073e-05 -1.5259e-05 5.7220e-06 2.8610e-05 -3.8147e-06 -9.5367e-06
3.8147e-06 1.3351e-05 3.8147e-06 -1.5259e-05 5.7220e-06 1.9073e-05 -9.5367e-06 -5.7220e-06 1.7166e-05 0
1.3351e-05 -1.7166e-05 1.5259e-05 -9.5367e-06 7.6294e-06 9.5367e-06 -5.7220e-06 -1.5259e-05 3.8147e-06 7.6294e-06
9.5367e-06 -5.7220e-06 1.3351e-05 -5.7220e-06 -1.9073e-06 -3.8147e-06 1.5259e-05 -1.9073e-05 9.5367e-06 1.5259e-05

Columns 91 through 99

1.5259e-05 -1.9073e-05 5.7220e-06 1.7166e-05 -2.4796e-05 0 -3.2425e-05 1.4114e-04 -4.0817e-04
1.3351e-05 -1.9073e-06 -1.3351e-05 7.6294e-06 7.6294e-06 0 -3.2425e-05 1.7738e-04 -4.8637e-04
1.7166e-05 -7.6294e-06 -7.6294e-06 -1.9073e-06 -7.6294e-06 1.9073e-05 -1.3351e-05 1.6594e-04 -4.9591e-04
2.6703e-05 -1.9073e-06 -2.6703e-05 3.8147e-06 -3.8147e-05 -4.5776e-05 -6.1607e-04 -3.6659e-03 -3.0136e-03
-1.9073e-06 1.1444e-05 -4.0054e-05 -1.9073e-06 -8.9645e-05 -2.0981e-05 2.4986e-04 -4.8294e-03 8.9836e-03
0 1.3351e-05 -4.4054e-05 0 -7.2479e-05 3.8147e-06 4.4060e-04 -5.5141e-03 1.2159e-02
1.1444e-05 1.9073e-05 -1.3351e-05 -3.0518e-05 1.9073e-05 2.2888e-05 6.9046e-04 2.3460e-04 -2.3613e-03
-2.2888e-05 1.9073e-06 1.5259e-05 -5.7220e-06 -3.8147e-06 3.8147e-05 6.6948e-04 2.9755e-04 -2.1648e-03
-7.6294e-06 2.4796e-05 -1.3351e-05 -9.5367e-06 3.6240e-05 -1.1444e-05 7.0381e-04 3.6621e-04 -2.2411e-03
1.9073e-06 -2.2888e-05 1.9073e-06 -5.7220e-06 -1.7166e-05 -1.2207e-04 1.3542e-04 -1.0490e-04
1.7166e-05 -2.2888e-05 1.1444e-05 1.5259e-05 -2.0981e-05 0 -1.4877e-04 -6.8665e-05 3.6812e-04
-3.8147e-06 -9.5367e-06 -3.8147e-06 1.7166e-05 1.1444e-05 -3.8147e-06 -1.9836e-04 -5.5313e-05 4.1389e-04

Bibliografie

- [1] Kahn, A. A. & Koshino, K. (2000) *Application of Three Two-Dimensional Depth-Averaged Models to Flow in River Bends*, in: Proc. 4th Int. Conf. on Hydro-Science and Engineering (CD-ROM), eds. M. S. Altinakar e.a., National Center for Computational Hydroscience at the University of Mississippi
- [2] Driscoll, T. A. & Trefethen, L.N. (2002) *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge Univ. Press, Cambridge
- [3] Vreugdenhil, C. B. (1994) *Numerical methods for shallow-water flow*, Kluwer, Dordrecht
- [4] Farrashkhalvat, M. & Miles, J.P. (2003) *Basic structured grid generation*, Butterworth Heinemann, Burlington
- [5] Vriend, H.J. de & Geldof, H.J. (1983) *Report No. 83-6, Main flow velocity in short and sharply curved river bends*, Communications on Hydraulics, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology
- [6] Sakov, P. *GRIDGEN, software for orthogonal grid generation based on SCPACK*, <http://www.marine.csiro.au/~sakov/>
- [7] Driscoll, T. A., *The Schwarz-Christoffel Toolbox for MATLAB, for the computation of conformal maps to polygonally bounded regions*, <http://www.math.udel.edu/~driscoll/SC/>
- [8] Thompson, J. F. e.a. (1999) *Handbook of grid generation*, CRC Press, Boca Raton
- [9] EDS. (2001) *User's Guide WAQUA. General information. Technical report*, Ministry of Transport, Public Works and Water Management. Directorate-General for Public Works and Water Management, Leidschendam
- [10] Lander, J. (2001) *Syllabus WAQUA/TRIWAQ cursus, gehouden in maart 2001 op de TU Delft: hoofdstuk 'Kromlijnige roosters'*
- [11] Sakov, P. *CSABATHY, software for C1-cubic-spline-interpolation of scattered data sets*, <http://www.marine.csiro.au/~sakov/>
- [12] Tinoco-Ruiz, Jose-Gerardo, Pablo Barrera-Sanchez & Adan Cortes-Medina (2001) *Some Properties of Area Functionals in Numerical Grid Generation*, in: Proc. of 10th Int. Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pp.43-54, October 7-10 2001
- [13] Tishkin, V. & Bogomolov, K. (2000), *Adaptive High-Aspect Ratio Structured 2-D Grids*, in: Proceedings, 9th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pp.193-204, October 2000

- [14] Chaudry, M. H. (1993), *Open-Channel Flow*, Prentice-Hall Inc., New Jersey
- [15] Jansen, P. Ph. (ed.) (1993), eerste druk: 1979, *Principles of River Engineering*, Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft
- [16] Ballegooien, T. van & Vedder, D. N. (2003), *Modelbouw 2b: spline-interpolatie en meshgeneratie, de Dommel*, Technische Universiteit Delft, Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, Delft
- [17] Bervoets, F. & Horst, J. ter (2003), *Longitudinale snelheid van een Nederlands riviersegment*, Technische Universiteit Delft, Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, Delft
- [18] Haber, J. & Zeilfelder, F. & Davydov, O. & Seidel, H. (2000), *Smooth Approximation and Rendering of Large Scattered Data Sets*, Max-Planck-Institut für Informatik, Saarbrücken, Germany
- [19] Vionnet, C. A. & Tassi, P. A. & Vide, M. (2004), *Estimates of flow resistance and eddy viscosity coefficients for 2D modelling on vegetated floodplains*, Hydrol. Process., v.18, pp. 2907-26.
- [20] Bruin, M. G. de (2003), *Dictaat Complexe Functietheorie*, Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Delft
- [21] Delft-3D, version 3.26, WL / Delft Hydraulics, Delft
- [22] Strauss, W. A. (1992), *Partial Differential Equations, An Introduction*, John Wiley & Sons Inc., United States
- [23] Akcelik, V. e.a. (2001), *Nearly orthogonal Two-Dimensional Grid Generation with Aspect Ratio Control*, in: Journ. of Computational Phys. **171**, pp. 805-821 (2001)