



(Foto MA HAILIN / CAMERA PRESS / HOLLANDSE HOOGTE)

DAP HARTMANN

Een schommel is stabiel in zijn laagste stand. Als dit evenwicht wordt verstoord keert de schommel (uiteindelijk) terug naar deze stand.



Aan een systeem in evenwicht waarop slechts twee krachten werken, zoals een schommel, is vrij eenvoudig te zien of het stabiel is. Bij drie krachten in evenwicht, zoals bijvoorbeeld een hangmat, was dat tot nu toe niet mogelijk. Een team van werktuigbouwkundig ingenieurs aan de TU Delft ontdekte een wiskundige methode om de stabiliteit te bepalen van evenwichtsituaties met willekeurig veel krachten van willekeurig karakter, zoals zwaartekracht, veerkracht of magneetkracht.

Daarnaast hebben de onderzoekers een bijbehorende elegante grafische methode ontwikkeld om bijna op het oog de stabiliteit te bepalen van bepaalde evenwichtsituaties.

Deze kennis is vooral van interesse voor ontwerpers van robots, handprothesen, schepen, en allerlei systemen in delicaat evenwicht.

Een kwestie van stabiliteit

“Voor het evenwicht maakt het niet uit, maar voor de stabiliteit is het aangrijpingspunt van de kracht essentieel”, zegt dr.ir. Just Herder, universitair docent bij afdeling Biomechanisch Ontwerpen van de faculteit Werktuigbouwkunde, Maritieme Techniek en Technische materiaalwetenschappen (3mE). “Anders gezegd, in situaties waarin de krachten niet veranderd zijn, maar wel op een andere plaats van een voorwerp aangrijpen, kan de beweging van dat voorwerp als gevolg daarvan heel verschillend zijn.”

Herder ontwerpt indifferente veersystemen: mechanismen met veren in voortdurend evenwicht, die moeiteloos beweegbaar zijn ondanks de aanwezigheid van aanzienlijke krachten. Dergelijke systemen, met belangrijke toepassingen voor mensen met een spierziekte of een handprothese, bevinden zich op het grensvlak tussen stabiliteit en instabiliteit. Voor mensen met zo'n arondersteuning voelt hun arm net zo licht als die van een astronaut tijdens een ruimtevlucht.

Ook sommige robots in assemblagehallen zijn met compensatieveren indifferent gemaakt, zodat ze weinig moeite de hele dag hun eigen gewicht te tillen. Daardoor kunnen ze dus met kleinere motoren worden uitgerust. Dat gaat vooral op voor robots die snel moeten bewegen, bij langzaam bewegende systemen, zoals een ophaalbrug, worden contragewichten toegepast.

Schommel Een schommel is een heel stabiel systeem. Er zijn twee krachten werkzaam die elkaar in evenwicht houden. De zwaartekracht trekt de schommel naar het laagste punt en de ophanging van de schommel levert een even grote opwaartse kracht. Beide krachten werken in tegengestelde richting en zijn van elkaar af gericht. Daardoor is het evenwicht stabiel.

In een systeem waarin de krachten naar elkaar toe zijn gericht, is het evenwicht labiel ofwel instabiel. Een eenvoudig experiment illustreert dit. Bevestig aan beide uiteinden van een potlood een touwtje en trek even hard aan beide touwtjes. De trekkrachten grijpen aan op verschillende punten, en zijn van elkaar af gericht. Hierdoor is het evenwicht stabiel. Wanneer iemand anders het potlood verdraait, wordt het evenwicht van het potlood door de rotatie verstoord, maar het evenwicht herstelt zich zodra de ander het potlood weer loslaat.

Een instabiel evenwicht ontstaat door twee krachten die vanuit verschillende aangrijpingspunten naar elkaar toe zijn gericht. Bijvoorbeeld wanneer een potlood op z'n punt wordt gezet. Daarbij werkt in het midden van het potlood de zwaartekracht naar beneden, terwijl onderaan, op de punt, de ondersteuningskracht omhoog werkt. Het potlood zou in theorie zo in evenwicht zijn, maar slechts een zuchtje wind zou al voldoende om dit evenwicht permanent te verstoren. Want er ontstaat een koppel dat door de toenemende verdraaiing wordt versterkt. Het potlood valt om.

Resultante Wanneer een lichaam waarop slechts twee krachten werken in evenwicht is, is het voor de meeste mensen intuïtief duidelijk of het evenwicht stabiel is. Maar wanneer er sprake is van drie krachten, zoals bijvoorbeeld in elke situatie waarbij hefboomen worden gebruikt, zie je dat niet zo makkelijk. Een situatie van drie krachten is echter terug te brengen tot een situatie met slechts twee krachten in evenwicht. Door de vectorsom te maken van twee van de drie krachten krijgt je de resultante kracht. En samen met de overgebleven derde kracht levert dat weer een situatie op met twee krachten. Op dat moment zou je de situatie weer op het oog kunnen beoordelen. Helaas gaat bij het samenstellen vitale informatie verloren die belangrijk is voor het bepalen van de stabiliteit, want het is onbekend waar die resultante kracht aangrijpt. Zonder aangrijpingspunt is niet te beoordelen of de bijdrage van de resultante kracht aan de stabiliteit gelijk is aan die van de twee oorspronkelijke krachten waaruit die is opge maakt.

Herder legt uit hoe hij dit probleem samen met dr.ir. Arend Schwab, universitair docent bij de afdeling Technische Mechanica van de faculteit 3mE, heeft opgelost: “We hebben de stabiliteit van een lichaam rond z'n oorspronkelijke evenwichtstand weergegeven in een bewegingsvergelijking, dat zijn wiskundige vergelijkingen die de beweging van het lichaam beschrijven onder invloed van krachten. Daarin zitten traagheid, massa, uitwendige krachten, zoals veerkrachten en demping. Met die bewegingsvergelijking kan je zien hoe een lichaam zich gedraagt onder invloed van krachten. We hebben als eis gesteld dat de resultante kracht dezelfde bijdrage moet leveren aan dat gedrag – de stabiliteit – als de twee oorspronkelijk krachten. Het blijkt dat het karakter van een kracht van invloed is op de bijdrage aan de stabiliteit. Onder karakter versta ik de relatie tussen de grootte en de richting van de kracht die op een voorwerp aangrijpt en de positie van dat voorwerp. Zwaartekracht is een voorbeeld van een constante kracht: waar ik een voorwerp ook houd, het weegt altijd hetzelfde. Bij veerkrachten neemt de kracht toe naarmate de veer verder wordt uitgerekt. Dat betekent dus dat veerkrachten en constante krachten verschillende effecten geven. Een voorwerp dat onder invloed van veerkrachten stabiel is, kan onder invloed van constante krachten instabiel zijn. De bijdrage aan de stabiliteit komt tot uitdrukking in een stijfheidsmatrix. Zo'n matrix geeft aan wat er gebeurt met de krachten als gevolg van kleine verstoringen (verplaatsingen en verdraaiingen) van het lichaam. Voor constante krachten blijkt die stijfheidsmatrix maar één term te bevatten: alleen wanneer het lichaam roteert treedt een verandering op, omdat daarbij het moment verandert.”

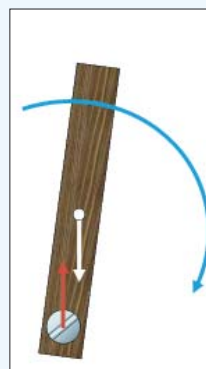
De aangrijpingspunten van de twee krachten en het snijpunt van de hulplijnen liggen op een (unieke) cirkel. Voor constante krachten blijkt dat het aangrijpingspunt van de resultante kracht ook op die cirkel ligt, op het snijpunt met de resultante werklijn.

Herder: “Mijn promotor, Jan Cool, zag als eerste dat die punten allemaal op een

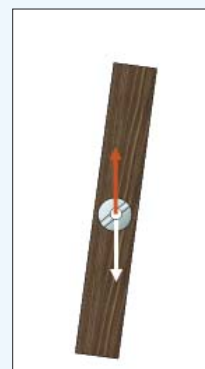
Een eenvoudig experiment illustreert het verschil in gedrag van drie evenwichtsituaties met identieke krachten die echter in verschillende punten aangrijpen.



Een plank aan de bovenkant met een schroef aan de muur opgehangen, zodanig dat hij rond de schroef kan draaien. Als deze plank uit zijn evenwichtstand wordt gebracht keert hij weer terug: het evenwicht van twee krachten die van elkaar af wijzen is stabiel.



Als de schroef aan de onderkant van de plank wordt geplaatst is er weliswaar evenwicht als de plank rechtop staat, maar komt hij na een kleine verstoring niet meer terug: het evenwicht van twee krachten die naar elkaar wijzen is instabiel.



In het bijzondere geval dat het zwaartepunt en het ophangpunt samen vallen blijft de plank in elke situatie in evenwicht. Het evenwicht is indifferent.

Twee krachten in evenwicht

Een schommel blijft uit zichzelf goed naar beneden hangen. Er werken continu twee krachten op, die even groot zijn en tegengesteld van richting. De zwaartekracht op de zitting werkt loodrecht naar beneden, en de haken leveren een even grote opwaartse kracht. Ook voor een potlood dat met zijn punt op tafel staat geldt dat er twee krachten op werken die elkaar opheffen. Toch is er een groot verschil, want niemand kan een potlood op zijn punt zetten. Hoe komt dat eigenlijk?

Het heeft te maken met de stabiliteit. Een kleine verdraaiing van de schommel zorgt ervoor dat de twee krachten niet meer op dezelfde werklijn liggen maar op enige afstand van elkaar komen. Ze vormen dan een koppel (moment) dat het evenwicht probeert te herstellen. Het is te vergelijken met een knikker die op de bodem van een kom ligt. Een klein tikje brengt de knikker uit de evenwichtstoestand, maar hij keert vanzelf weer terug in dat evenwicht. Het is een stabiel evenwicht. De kromming van de kom bepaalt de mate van stabiliteit, en is evenredig met de hoeveelheid energie die nodig is om het evenwicht te verstoren.

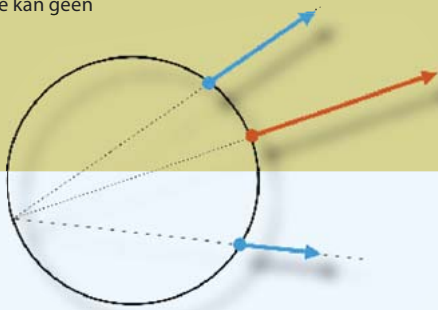
Een potlood op zijn punt is wiskundig gezien weliswaar in evenwicht, maar die toestand is niet stabiel. Het verschil is dat de opwaartse kracht onderin het lichaam werkt en de neerwaartse kracht (de zwaartekracht) in het midden van het potlood aangrijpt zodat de krachten in deze situatie dus naar elkaar toe wijzen. De minste verstoring verbreekt het evenwicht: de krachten vormen weer een koppel, maar dit keer versterkt dit koppel de uitwijking in de richting van de verstoring, waardoor de uitwijking steeds groter wordt. Het is als een knikker die op een bol ligt. Zodra dat evenwicht wordt verstoord, rolt de knikker er vanaf, en komt niet meer terug in de uitgangssituatie. Het is een instabiel evenwicht. Er is nog een derde vorm van stabiliteit, het zogenaamde indifferente evenwicht, waarbij na iedere verstoring van het evenwicht een ander evenwicht ontstaat. Denk aan een knikker op een vlakke tafel. Door een kleine verstoring komt de knikker op een andere plaats in een nieuwe evenwichtssituatie terecht. Dit is een grenssituatie tussen stabiliteit en instabiliteit. Dat klinkt gevaarlijk maar is in feite zeer bruikbaar: het verplaatsen van de knikker over de tafel kost immers nauwelijks energie en hij blijft overal uit zichzelf liggen. Dit is ook het geval in de veergebalanceerde Anglepoise bureaulamp: je kan hem gemakkelijk in elke stand zetten.



Een potlood op zijn punt bevindt zich in een zeer delicaat evenwicht. In de praktijk lukt het niet om dit voor elkaar te krijgen: de kleinste verstoring doet het potlood omvallen. Het evenwicht is instabiel.

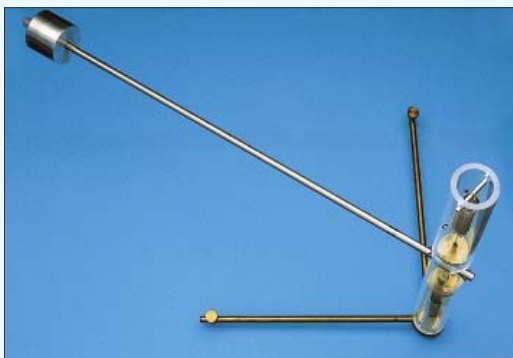
Het samenstellen van twee krachten: de resultante kracht

Een kracht is een vector met een grootte en een richting, en kan worden weergegeven als een pijl. De oriëntatie van de pijl geeft de richting aan, en de lengte verbeeldt de grootte. Voor twee krachten die niet in dezelfde richting werken, kan meetkundig de resultante kracht eenvoudig worden gevonden: trek hulplijnen door beide vectoren en bepaal daarvan het snijpunt; verschuif de vectoren langs de hulplijnen zodat ze in het snijpunt aangrijpen; construeer hieruit een parallellogram. De diagonaal van dat parallellogram is de resultante kracht. De grootte en de richting van de resultante kracht zijn op die manier exact te bepalen. Maar niet het aangrijpingspunt, want dat is kunstmatig naar het snijpunt van de hulplijnen verschoven. De locatie van dat aangrijpingspunt is echter wezenlijk belangrijk voor het bepalen van de stabiliteit. Een vectorsom levert wel de statisch equivalente kracht, maar niet de dynamisch equivalente kracht. Met deze meetkundige methode kan geen uitspraak worden gedaan over het aangrijpingspunt van de resultante kracht en dus ook niet over de stabiliteit.



Het aangrijpingspunt van de (rode) resultante kracht, die dezelfde bijdrage levert aan de stabiliteit van een voorwerp als de twee oorspronkelijke (blauwe) krachten, grijpt aan in het snijpunt van de resultante werklijn en de cirkel die wordt opgespannen door de (blauwe) aangrijpingspunten van de oorspronkelijke krachten en het snijpunt van hun werklijnen.

Demonstratiemodel met twee veren die in hetzelfde punt van het bewegende deel aangrijpen, dat in elke stand in evenwicht is. De veren balanceren elkaar.



Demonstratiemodel van een indifferent evenwicht: de staaf met massa blijft in elke stand staan. De dynamisch equivalente resultante van de twee veren grijpt aan in het zwaartepunt van de massa. Dit is een voorbeeld van een zwevend scharnier.



Anglepoise bureaulamp met speciale veren die exact gebalanceerd is. Hij kan in elke stand worden gezet en blijft daar staan, ook als er geen wrijving in de scharnieren zou zijn.



cirkel liggen. Ongelooflijk, hè? Zo simpel en elegant. Ik heb me suf gezocht in de literatuur, en uiteindelijk heeft een collega uit de Verenigde Staten, dr. Jim Papadopoulos, indertijd bij MIT en Cornell University, me geholpen. Het bleek dat Edward Routh in 1893 al zo'n constructie had bedacht, maar hij trok er verder geen conclusies uit en heeft er geen ontwerpen mee gemaakt."

Anglepoise bureaulamp Deze elegante cirkelconstructie geldt echter alleen wanneer de 3 krachten constant zijn in grootte en richting. Voor andere krachten, zoals veerkrachten of magneetkrachten, ligt het wat ingewikkelder. Herder was met name geïnteresseerd in veerkrachten, omdat die zeer geschikt zijn om energie in op te slaan. Ze zijn lichter dan contragewichten en zijn niet afhankelijk van de richting van de zwaartekracht. Een veer heeft in rust een bepaalde lengte. Voor een normale veer is er een lineair verband tussen de uitrekking en de kracht die daar voor nodig is. De meeste veren hebben een voorspanning: de windingen zitten met een bepaalde kracht tegen elkaar aangedrukt. Zo'n veer rekt pas uit als eerst die voorspanning is overwonnen. Voorbij dat punt is de uitrekking weer evenredig met de kracht. Eigenlijk zou de veer korter willen zijn, maar de windingen zitten in de weg. Die theoretisch kortste lengte wordt de vrije lengte van de veer genoemd. Heel bijzonder zijn veren met een dusdanig grote voorspanning, dat de vrije lengte gelijk is aan nul. Dat betekent dat de kracht nu lineair is met de lengte van de veer, en niet langer met de uitrekking. Dat type veren blijkt heel praktisch te zijn bij het ontwerpen van statisch gebalanceerde mechanismen, omdat het de wiskundige vergelijkingen sterk vereenvoudigt en bovendien een oplossing met een exacte balancerende oplevert.

Een aantal jaren geleden ontdekte Herder via patentonderzoek dat de firma Anglepoise, in Waterlooville in het zuiden van Engeland, nog bleek te bestaan. Het bedrijf maakt onder meer de beroemde gelijknamige bureaulampen, waarin zulke veren worden gebruikt. Hij bezoekt Anglepoise nu regelmatig om te adviseren, maar ook vanwege de vriendschap die is ontstaan met de mensen van dit familiebedrijf.

Zwevend draaipunt Hoewel voorgespannen veren wiskundig gezien heel eenvoudig zijn, bevat de stijfheidmatrix voor veren geen nullen meer. Behalve in een paar bijzonder gevallen, zoals wanneer twee veren in hetzelfde punt aangrijpen, bestaat er geen dynamisch equivalente veer die dezelfde bijdrage aan de stabiliteit van het evenwicht geeft als twee afzonderlijke veren. Verrassend genoeg blijkt dat er voor twee veren wel een dynamisch equivalente constante kracht is te vinden. Die heeft echter wel een andere aangrijpingspunt dan de resultante kracht van twee constante krachten. Van dit principe is een werkend model gemaakt dat dit laat zien. Herder heeft hier nog geen verklaring voor. In elk geval blijkt dat indifferente systemen verrassende vormen kunnen aannemen.

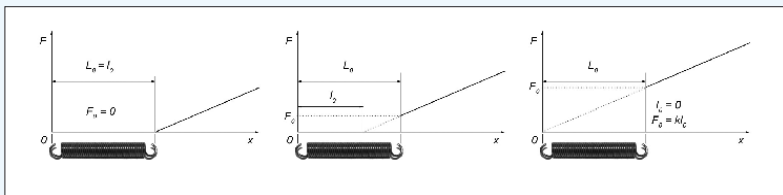
De onderzoeker pakt het model en laat zien dat het geen fysiek scharnierpunt heeft, maar een virtueel (zwevend) draaipunt dat desondanks stationair is: "Dit systeem is al ontstaan voordat we deze theorie hadden afgeleid. Het begon met de vraag of het scharnier in een bekend basiselement – een staaf met aan het eind een gewicht en aan het andere eind een scharnierpunt – verwijderd kon worden om wrijving te verminderen. Het idee was om het scharnier op te vatten als een element dat een kracht kan genereren in plaats van een bewegingsgeleider. Ik moest dus een andere krachtgenerator vinden om het evenwicht te herstellen. Het lag voor de hand om daarvoor een veer te gebruiken. Met twee veren en een massa zijn er al drie krachten aanwezig in het systeem. Dus kun je dat fysieke scharnier weghaalden. Dan zakt het geheel wel wat naar beneden, maar komt toch weer in een perfect gebalanceerd evenwicht. Het systeem heeft nu een virtueel stationair draaipunt."

Het is een verbluffend eenvoudige constructie en de zwevende scharnierpunt ziet er bijna magisch uit. Zelfs als er geen voorgespannen veren voorhanden zijn, kan het principe worden gedemonstreerd met onverwachte hulpmiddelen. Herder: "Er kwam een Amerikaanse prof op bezoek, Andy Ruina van Cornell University, een heel slimme man, en die wilde dat balanceermechanisme wel namaken om de werking ervan te ervaren. Als de stang met het gewicht nam ik een bezem die ik hier toevallig had staan. En in plaats van veren gebruikten we latex beschermingsmateriaal van chirurgische instrumenten die hier rondslingerden. Die latex gedroeg zich toevallig precies zoals een veer met een vrije lengte van nul. Op die manier hebben we de 'gebalanceerde bezem' gecon-

strueerd.” De bezem blijft in alle mogelijke standen hangen: hij is in indifferent evenwicht.

Schoenendoos te water Nu een systeem met drie krachten in evenwicht kan worden herleid tot een dynamisch equivalent systeem met twee krachten in evenwicht, is het ook mogelijk om de stabiliteit te bepalen voor systemen waarin veel meer krachten elkaar in evenwicht houden. Daarom paste Arend Schwab de methode toe op een schip dat in het water ligt. Daarbij houden de zwaartekracht en de hydrostatische druk elkaar in evenwicht. Wanneer er een verstoring optreedt, bijvoorbeeld een kleine rotatie om de lengteas van een schip, dan is de grote vraag natuurlijk of het schip terugkeert naar de evenwichtspositie of niet, anders gezegd: of zij omslaat of niet. Het evenwicht van het schip is stabiel indien het zogenaamde metacentrum, zich boven het zwaartepunt bevindt. Dit metacentrum is voor onderzoekers altijd een beetje een mysterieus punt geweest. Schwab laat zien dat dit mysterieuze punt exact hetzelfde is als het dynamisch equivalente aangrijpingspunt van de hydrostatische krachten. Hij stelde de vergelijking van deze hydrostatische krachten op als functie van de rotatie, en voegde al die verdeelde krachten samen tot één resultante kracht. Dan zijn we weer terug bij de situatie met twee trekkrachten. Als aardige bijkomstigheid verklaart de methode ook waarom een schoenendoos stabiel op het water ligt, terwijl het zwaartepunt daarvan ver boven het wateroppervlak ligt. Altijd handig om te weten.

Voor nader informatie over dit onderwerp kunt u contact opnemen met dr.ir. Just Herder, tel (015) 278 4713, e-mail j.l.herder@wbmt.tudelft.nl



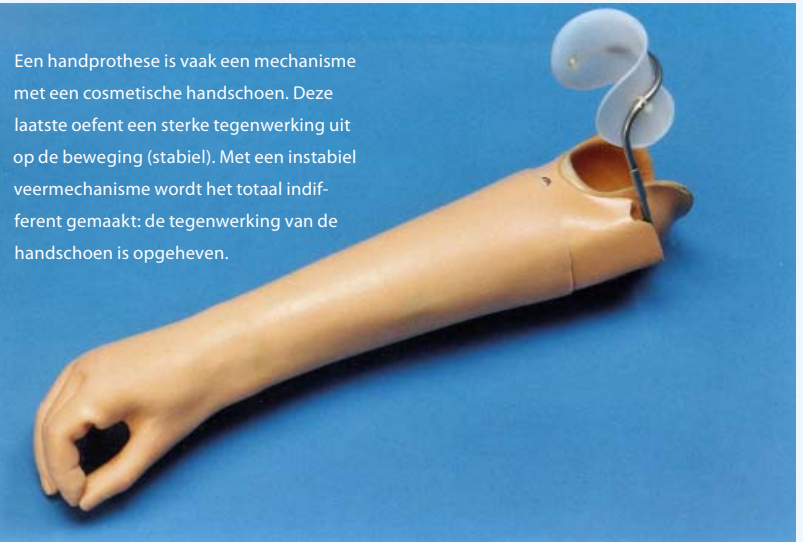
Deze figuur geeft de kracht-lengte karakteristieken weer van drie trekveren die er op het eerste oog gelijk uit zien: links een veer zonder voorspanning, in het midden een veer met enige voorspanning, en rechts een veer met sterk verhoogde voorspanning, zodanig dat de karakteristiek door de oorsprong gaat. Dit soort veren zit in de Anglepoise bureaulamp.



Armondersteuning voor mensen met neuromusculaire aandoeningen. Het veermechanisme heft de zwaartekracht op: de arm van de gebruiker zweeft en kan zonder inspanning bewogen worden.



Bij het grijpen van voorwerpen is het belangrijk om te weten of een greep stabiel is. Zo niet, dan schiet het voorwerp uit je hand als je kracht zet.

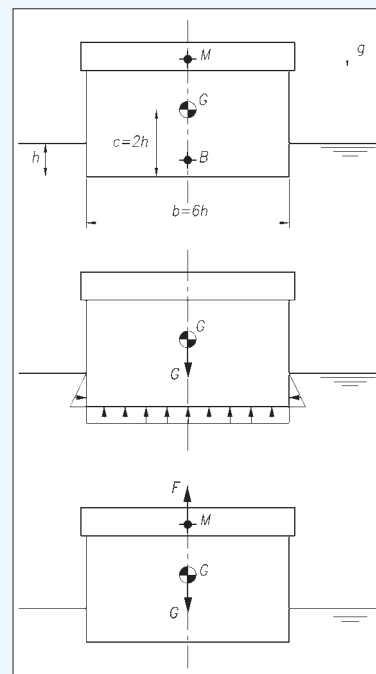


Een handprothese is vaak een mechanisme met een cosmetische handschoen. Deze laatste oefent een sterke tegenwerking uit op de beweging (stabiel). Met een instabiel veermechanisme wordt het totaal indifferent gemaakt: de tegenwerking van de handschoen is opgeheven.

Handprothese

Mensen met een spierziekte hebben vaak nog wel controle over hun spieren, maar niet meer de kracht om hun armen te bewegen. Een indifferent ondersteuningsmechanisme kan die last opvangen, zodat de armen met slechts zeer geringe inspanning toch kunnen worden bewogen. Een andere nuttige toepassing van indifferente veersystemen is een handprothese.

Just Herder laat een tekening zien en legt uit: “Het is een mechanisme met een kunsthand eromheen. Die huid moet heel stevig zijn, om bij normaal gebruik niet te hard te slijten. Het is ongeveer anderhalve millimeter dik PVC, en daardoor nogal stug. Om de kunsthand te openen, moet die handschoen oprekken en dat kost veel kracht. De energie hiervoor wordt geleverd door een zogenaamde compensatieveer. Wanneer de hand weer dicht gaat, slaat die veer de energie uit de handschoen op. Als je zorgt dat deze energiestromen op elkaar zijn afgestemd, dan is het systeem altijd in evenwicht – een indifferent systeem. Het voelt alsof die stugge handschoen er niet meer is, want je hebt geen kracht nodig om die hand te bewegen. Maar het belangrijkste voordeel is dat je ‘gevoel’ in die prothese krijgt. Bij een lichaamsaangedreven handprothese leveren de schouderspieren via een ‘touwje’ de benodigde kracht. Als de prothese niet verder dicht gaat, dan voel je dat in je bovenarmspieren.”



Een schoenendoos op het water lijkt instabiel omdat het drukingspunt (B) onder het zwaartepunt G ligt (krachten naar elkaar toe). Het dynamisch equivalente aangrijpingspunt van de hydrostatische druk (het metacenter, M) ligt echter hoger: de schoenendoos is stabiel.

