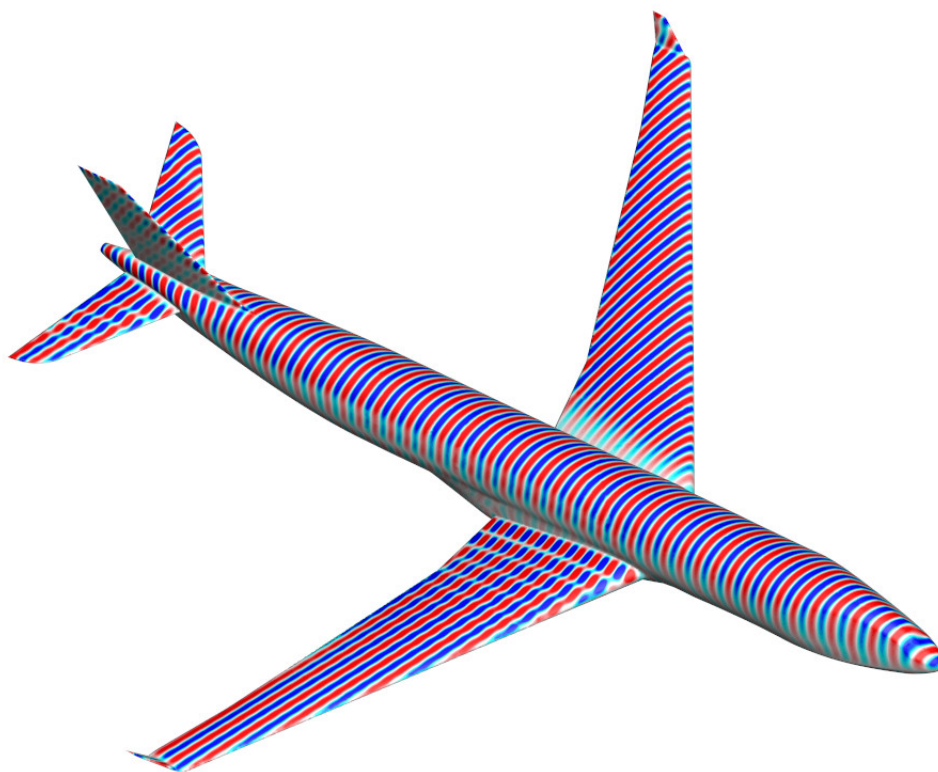


Tijdsdomein Integraalvergelijking

De elektromagnetische verstrooiing van een rechte geleidende draad.



Auteur:
Thijs VERBEEK

Begeleider:
Dr.Ir. Duncan VAN DER HEUL

24 juni 2014

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
1.1	Achtergrond	4
1.2	Doel van dit onderzoek	4
2	Een model voor de elektromagnetische verstrooiing van een rechte draad	6
2.1	Randvoorwaarden	7
2.2	Verstrooiing door een rechte draad	7
3	Het bepalen van een referentieoplossing	9
3.1	Oplossen met behulp van centrale differentie	9
3.2	Berekening stijfheids,- massamatrix en stroom	11
3.3	Referentieoplossing	12
3.4	Stabiliteit van de referentieoplossing	15
4	Lineaire basisfuncties voor ruimtelijke discretisatie en eindige differentie voor tijdsdiscretisatie	17
4.1	Zwakke formulering	17
4.2	Lineaire basisfuncties	19
4.3	Berekening stijfheids,- massamatrix en stroom	20
4.4	Verificatie van de oplossing	20
5	Lineaire basisfuncties voor ruimtelijke discretisatie en tijdsdiscretisatie met behulp van collocatie	22
5.1	Zwakke formulering	22
5.2	Tijdsbasisfuncties	24
5.3	Basis -en testfuncties in de ruimte	29

5.4	Berekening stijfheids,- massamatrix en stroom	30
5.5	Verificatie van de oplossing	31
6	Analyse van stabiliteit en nauwkeurigheid van de tijdsbasisfuncties	33
6.1	Convergentie naar referentieoplossing	33
6.2	Nauwkeurigheid van de oplossing	35
6.3	Stabiliteit van de oplossing	37
6.4	Conclusies	40
7	Conclusies en aanbevelingen	41
7.1	Centrale differentie voor plaats en tijd	41
7.2	Lineaire plaatsbasisfuncties en centrale differentie voor tijd	41
7.3	Lineaire basisfuncties voor ruimtelijke discretisatie en tijdsdiscretisatie met behulp van collocatie	41
8	Appendix	43
8.1	Voorbeeld impliciete methode	43
8.2	Gebruikte theorie in de code	44
8.3	Integralen	45
8.4	Uitwerking integralen met polynomiale tijdsbasisfuncties	48
8.5	MATLAB-code	49

Samenvatting

In dit verslag analyseren we de elektromagnetische verstrooiing van een rechte, perfect geleidende draad. Hiervoor gebruiken we de Time Domain Integral Equation methode (TDIE), ofwel tijdsdomein-integraalvergelijkingsmethode, zoals gebruikt in het onderzoek van Van 't Wout voor elektromagnetische verstrooiing van een oppervlak. Omdat in het onderzoek van Van 't Wout de implementatie van het driedimensionale probleem erg foutgevoelig is, willen we een één-dimensionaal probleem opstellen dat zich, hopelijk, hetzelfde gedraagt als het driedimensionale geval. We zullen daarbij iets zeggen over de stabiliteit en convergentie van de oplossing. Hiervoor bepalen we eerst een nauwkeurige referentieoplossing op basis van een discretisatie met centrale eindige differenties voor plaats en tijd. Deze gebruiken we om de convergentie aan te tonen van de oplossingen van de andere methoden. Daarna gebruiken we basisfuncties voor de plaats en centrale differentie voor de tijd. Als laatste kijken we naar zowel basisfuncties voor de plaats als de tijd. Door te kijken naar een één dimensionaal probleem is de implementatie veel gemakkelijker. Dit maakt het analyseren van de TDIE methode betrouwbaarder en vooral een stuk eenvoudiger. Dit zou ons informatie kunnen geven over het lastige driedimensionale geval.

Uit dit onderzoek blijkt dat de TDIE-methode stabiel is voor de tijdsbasisfuncties Quadratic Lagrange, Cubic Lagrange en Quadratic Spline. Cubic Spline blijkt alleen voor grotere CFL(CourantFriedrichsLewy)-waarden stabiel te zijn. Het CFL-getal is het verband tussen Δt en $\frac{\Delta z}{c}$. Tevens convergeren de verschillende tijdsbasisfuncties naar de referentieoplossing. We kunnen echter niet de orde van convergentie bepalen met behulp van de referentieoplossing omdat voor verschillende CFL-getallen de oplossingen een klein faseverschil hebben. Hierdoor komen de datapunten niet overeen en geeft het een verkeerde orde van convergentie. De convergentie van de basisfuncties zelf komt wel overeen met de orde die is gegeven voor deze basisfuncties. Wel moet een groot CFL-getal gekozen worden om in het asymptotisch stabiele gebied te zitten. Bevinden we ons hier nog buiten, dan kan de orde van convergentie verschillen.

1 Inleiding

1.1 Achtergrond

Om een object te kunnen verbergen tegen radartechnologie is het nodig om de weerkaatste radargolven te minimaliseren. Op de titelpagina zie je een voorbeeld van zo'n elektromagnetische verstrooiing van een vliegtuig [1]. Deze techniek wordt ook wel stealthtechniek genoemd. Stealth wordt vaak gebruikt bij militaire vliegtuigen en schepen. Het kost veel tijd en geld om van elk object de verstrooiing van elektromagnetische golven te meten, daarom wordt er vaak gebruik gemaakt van numerieke simulatie. Hierbij worden de oplossingen van de natuurkundige formules die schuilen achter de verstrooiing van de radargolven met behulp van een computer benaderd. Het is alleen niet altijd mogelijk om een stabiele en juiste benadering te geven. In de thesis van Van 't Wout [7] is één van de meest recente oplosmethodes onderzocht. Deze methode heet de 'Time Domain Integral Equation' (TDIE), ofwel tijdsdomein-integraalvergelijkingsmethode.

1.2 Doel van dit onderzoek

De TDIE-methode werkt op een zwakke formulering vanuit de partiële differentiaalvergelijking voor het elektrische veld. Deze partiële differentiaalvergelijking is gevonden met behulp van Maxwell's vergelijkingen. Deze vergelijking heet de elektrisch veld integraalvergelijking, in het Engels 'Electric Field Integral Equation' (EFIE).

We gebruiken de populaire RWG (Rao Wilton Glisson) test -en basisfuncties voor de plaatsdiscretisatie. Voor de tijdsdiscretisatie gebruiken we verschillende soorten tijdsbasisfuncties. Basisfuncties beschrijven de interpolatie van de datapunten. Deze basisfuncties moeten voldoen aan een aantal voorwaarden zoals stuksgewijs continue differentieerbaarheid die nodig is in de EFIE. In dit onderzoek bekijken we een aantal tijdsbasisfuncties die ook worden gebruikt in het onderzoek van Van 't Wout.

Uit het onderzoek van Van 't Wout bleek dat de tijdsbasisfuncties Quadratic Lagrange, Cubic Lagrange en Quadratic Spline stabiel waren en de Cubic Spline basisfunctie instabiel. Een ander belangrijk resultaat is dat de integralen uit de integraalvergelijking een singulariteit hebben. In het onderzoek van Van 't Wout is hier een verdere analyse op gedaan waar we in dit onderzoek verder niet op in zullen gaan. Omdat de integralen vaak niet analytisch berekend kunnen worden, moeten ze numeriek berekend worden. Vanwege de singulariteit moet dit zorgvuldig gedaan worden.

In het onderzoek van Van 't Wout bleek dat het analyseren van de verstrooiing van een oppervlak moeilijk is vanwege de implementatie die deze analyse nodig heeft. Omdat de implementatie zo ingewikkeld is, is het moeilijk om zeker te weten dat een resultaat klopt. Daarom gaan we in dit onderzoek de verstrooiing bekijken van een geleidende rechte stroomdraad op basis van dezelfde TDIE-methode. Als we de (dunne) draad zien als een één dimensionale lijn wordt de implementatie eenvoudiger vanwege de simpele geometrie. Dus minder foutgevoelig. Er moet echter wel vastgesteld worden of dit dezelfde resultaten geeft als het onderzoek van Van 't Wout. Dat is wat er naast de verstrooiing van een rechte draad wordt onderzocht in dit verslag.

Hieruit formuleren we de onderzoeksvraag:

Gedraagt het model van verstrooiing van een rechte draad op basis van 'Time

Domain Integral Equation' (TDIE) zich hetzelfde als het model van verstrooiing van een oppervlak op basis van TDIE?

We beginnen met een simpele methode die centrale differentie gebruikt voor zowel plaats als tijd. Deze methode gebruiken we om een referentieoplossing te maken waarvan we weten dat deze klopt en nauwkeurig is. Hierna breiden we deze methode uit naar interpolatie met test -en basisfuncties voor de plaats en centrale differentie voor de tijd. Als laatste, definitieve methode, wordt ook de tijdsbenadering gedaan met behulp van basisfuncties. Deze oplossingen vergelijken we met de referentieoplossing om te bepalen of de TDIE-methode klopt voor ons rechte draadmodel. Ook gebruiken we de referentieoplossing om iets te zeggen over de orde van convergentie.

2 Een model voor de elektromagnetische verstrooiing van een rechte draad

Om de uitgezonden elektromagnetische velden van een bepaald object S te bepalen, hebben we de stroom nodig die loopt over dit object. De stroom kunnen we afleiden uit de uitdrukkingen van de elektrische -en magnetische velden in het tijdsdomein. We beginnen met de Maxwell vergelijkingen en halen daaruit onze uitdrukking voor de stroom. De Maxwell vergelijkingen zijn als volgt:

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} + J, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{q}{\epsilon}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot H = 0, \quad (4)$$

waarbij $E(\mathbf{r}, t)$ het elektrisch veld is, $H(\mathbf{r}, t)$ het magnetisch veld, $q(\mathbf{r}, t)$ de ladingsdichtheid en $J(\mathbf{r}, t)$ de stroomdichtheid. μ en ϵ zijn respectievelijk de permeabiliteit -en permittiviteitconstante in vacuüm. De relatie tussen deze constanten is $c^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$, c is de lichtsnelheid in vacuüm.

De relatie tussen stroomdichtheid J en ladingsdichtheid q wordt gegeven door de continuïteitsvergelijking:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (5)$$

Samen met (3) geeft dit:

$$J = -\epsilon \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (6)$$

Om een afleiding te kunnen geven, bekijken we het elektrisch -en magnetisch veld in termen van een vector potentiaal $A(\mathbf{r}, t)$ en een scalaire potentiaal $\Phi(\mathbf{r}, t)$. We definiëren H als volgt:

$$H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A. \quad (7)$$

Substitueren we (7) in vergelijking (1) voor het uitgaande veld van S dan volgt:

$$\begin{aligned} \nabla \times E^s(\mathbf{r}, t) &= -\mu \frac{1}{\mu} \frac{\partial \nabla \times A}{\partial t}, \\ \Rightarrow \nabla \times \left(E^s(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial A}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

De converse van de gradiëntstelling [2] uit de vectoranalyse zegt: als de rotatie van een veld nul is, dan is dit veld gelijk aan de gradiënt van een scalair potentiaal. We krijgen dus:

$$E^s(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi. \quad (9)$$

Substitueren we nu vergelijking (7) en (9) in (2) dan krijgen we:

$$\nabla \frac{1}{\mu} \times \nabla \times A = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi \right] + J. \quad (10)$$

Met de relatie (7) is het veld nog niet helemaal gedefinieerd. De volgende conditie legt de beschrijving van het veld vast:

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Deze conditie wordt ook wel de Lorenz-ijk conditie genoemd. [5].

Hiermee vinden we, gebruikmakend van $\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J. \quad (11)$$

De oplossing voor (11) is een bekende oplossing uit de differentiaalvergelijking, die zegt:

$$A(r, t) = \mu \int_S \frac{J(r', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} dr', \quad (12)$$

waarbij $R = |r - r'|$, r' de locatie van de observatie en r de locatie van de bron.

Vullen we (6) in bij (11) en gebruiken we de verhouding tussen ϵ en μ , dan vinden we de differentiaalvergelijking voor ons model. Deze is:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (13)$$

2.1 Randvoorwaarden

In het geval van een perfect geleidend object waarvan de omgeving vacuüm is, geldt dat de tangentiële component van het elektrisch veld op het oppervlak van het object nul moet zijn. Als we het totale veld ontbinden in het inkomende veld E^i en het verstrooide veld E^u dan volgt hieruit:

$$(E^i(\mathbf{r}, t) + E^u(\mathbf{r}, t))_{\tan} = 0 \quad (14)$$

Merk op dat het inkomende veld E^i de inkomende golf is.

2.2 Verstrooïng door een rechte draad

Stel we nemen voor ons object S een draad met lengte l en diameter $2a$ met $a \ll l$ (zie figuur 1) en leggen deze op de z -as met zijn middelpunt op de oorsprong. Dit is dus eigenlijk een hele dunne cylinder. We veronderstellen dat de stroomdichtheid

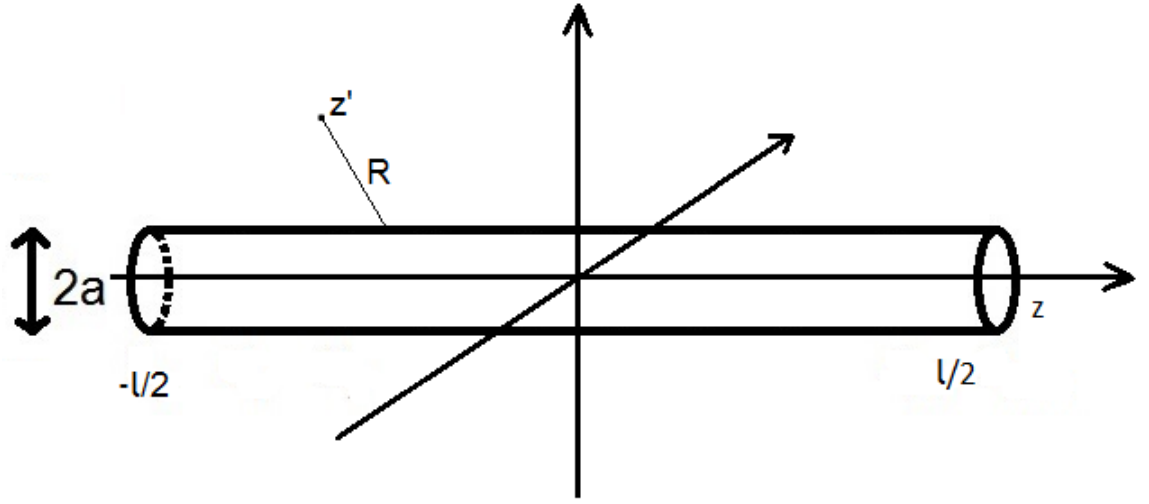
constant is over de omtrek van de cylinder. De stroom over een klein stukje draad is gelijk aan de integraal van de stroomdichtheid J over de omtrek van de draad over het stukje draad.

Vanwege causaliteit is er geen stroom voor $t = 0$. Causaliteit betekent hier dat de stroom alleen afhankelijk is van waarden in het verleden en van nu. Niet van de toekomst. Op de uiteinden van de draad moet de stroom nul zijn omdat er anders lading zou opbouwen op de uiteinden.

Nemen we nu al deze informatie samen dan vinden we ons model voor de verstrooiing door een rechte draad:

$$\begin{cases} \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ A(z, t) = \mu \int_{z'=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{I(z', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} dz', \\ I(z, t) = 0, t < 0, \\ I(-\frac{l}{2}, t) = I(\frac{l}{2}, t) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Hier met $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$, de afstand van het observatiepunt z' tot het punt z op de rand van de draad.



Figuur 1: Een stroomdraad met dikte $2a$ liggend op de z -as.

3 Het bepalen van een referentieoplossing

Om onze andere oplosmethoden te controleren, hebben we eerst een referentieoplossing nodig. Deze oplossing vinden we met behulp van centrale differentie in de ruimte en tijd. We weten dat deze oplossing correct is voor een specifieke verhouding tussen de tijdstap en de maaswijdte. Deze verhouding is het CFL getal, $\frac{1}{p}$. Deze oplossing is goed omdat hij vergeleken is met de oplossing die wordt gevonden door middel van de Inverse Discrete Fourier Transformation (IDFT). Zie ook [3].

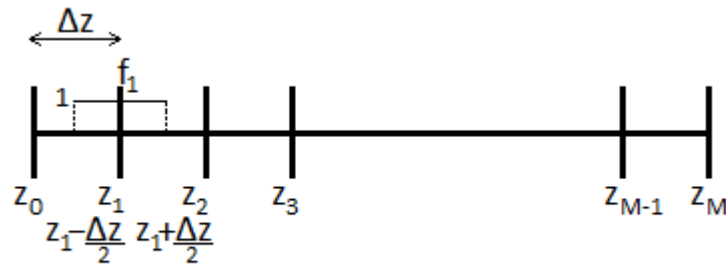
3.1 Oplossen met behulp van centrale differentie

De integraal (12) wordt numeriek benaderd door de draad op te delen in M stukken met lengte Δz , zie figuur 2. Dit geeft $M + 1$ punten, genoteerd als $z_0, z_1, \dots, z_{M+1}$ waarbij z_0 en z_{M+1} de uiteinden zijn van de draad. De tijd wordt opgedeeld in tijdstappen met lengte Δt zodat $t_n = n\Delta t$ voor $n = 1, 2, \dots$



Figuur 2: Een stroomdraad met dikte $2a$ opgedeeld in M stukken.

Plaats -en tijdsdiscretisatie



Figuur 3: Basisfunctie f_k gedefinieerd over de segmentjes van de draad.

Er wordt aangenomen dat de stroom op een segmentje $[z_j - \frac{\Delta z}{2}, z_j + \frac{\Delta z}{2}]$, $j = 1, \dots, M$ stuksgewijs constant is. Dit kan wiskundig als volgt worden geformuleerd:

$$I(z, t) \approx \sum_{k=1}^M I_k(t) f_k(z),$$

met $I_k(t)$ de stroom op het k^e segment en $f_k(z)$ een basisfunctie:

$$f_k(z) = \begin{cases} 1 & z_k - \frac{\Delta z}{2} \leq z \leq z_k + \frac{\Delta z}{2} \\ 0 & \text{rest} \end{cases}.$$

Op deze manier wordt ook de stroom op de uiteinden van de draad nul verondersteld, omdat in de sommatie $f_k(z_0) = f_k(z_{M+1}) = 0$ voor elke $k = 1, \dots, M$. Om de stroom alleen afhankelijk te maken van de tijd kiezen we het observatiepunt z' in z_k .

Dit ingevuld in (12) met $A_m(t) = A(z_m, t)$, de potentiaal geïnduceerd door de stroomverdeling in z_m , geeft:

$$A_m(t) \approx \mu \int_{z'=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\sum_{k=1}^M I\left(t - \frac{|z_m - z_k|}{c}\right) f_k(z')}{4\pi R_{m,k}} dz' = \sum_{k=1}^M I\left(t - \frac{|z_m - z_k|}{c}\right) \kappa_{m,k}. \quad (16)$$

Met $R_{m,k} = \sqrt{|z_m - z_k| + a^2}$ en

$$\begin{aligned} \kappa_{m,k} &= \mu \int_{z'=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4\pi R} dz' \Big|_{m,k} = \mu \int_{z'=-z_k - \frac{\Delta z}{2}}^{z_k + \frac{\Delta z}{2}} \frac{1}{4\pi R} dz' \Big|_{m,k} = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \ln \left(z_m - z_k + \frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\left(z_m - z_k + \frac{\Delta z}{2} \right)^2 + a^2} \right) \\ &\quad - \frac{\mu}{4\pi} \ln \left(z_m - z_k - \frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\left(z_m - z_k - \frac{\Delta z}{2} \right)^2 + a^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Merk op dat deze $\kappa_{m,k}$ alleen afhangen van de plaats. Deze hoeven dus maar één keer bepaald te worden. Verder geldt ook dat deze matrix symmetrisch is en circulant, dat wil zeggen dat op een diagonaal elk element gelijk is. Zie appendix paragraaf 8.2 voor het bewijs van symmetrie. De gelijkwaardigheid is gemakkelijk te zien omdat voor de diagonalen geldt dat $z_m - z_k = m\Delta z - k\Delta z = (m - k)\Delta z$ en het verschil van indices is hetzelfde voor diagonalen van een matrix. Dus het verschil $z_m - z_k$ is gelijk in de logtermen.

De tijd discretiseren we door een vaste tijdstap te kiezen die evenredig is met $\frac{\Delta z}{c}$. We schrijven $\Delta t = \frac{\Delta z}{pc}$.

Nu noteren we $A_{m,n} = A(z_m, t_n)$ en krijgen:

$$A_{m,n} \approx \sum_{k=1}^M I_k\left(t_n - \frac{|z_m - z_k|}{c}\right) \kappa_{m,k}. \quad (18)$$

Om de $I(t)$ coëfficiënten te bepalen, is er een vergelijking nodig die alleen afhangt van stromen uit eerdere tijden (die bekend zijn). Uit (18) kan deze vergelijking gehaald worden als we aannemen dat $\Delta t \leq \frac{\Delta z}{c}$, ofwel het CFL-getal moet kleiner zijn dan één

($p \leq 1$). Deze voorwaarde zorgt ervoor dat de input van $I\left(t_n - \frac{|z_m - z_k|}{c}\right)$ momenten zijn uit het verleden. Om de vergelijking voor de onbekende stroom $I_{m,n}$ te verkrijgen, kan (18) als volgt geschreven worden:

$$A_{m,n} = I_{m,n}\kappa_{m,m} + \bar{\mathcal{A}}_{m,n}, \quad (19)$$

waarbij

$$\bar{\mathcal{A}}_{m,n} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M I\left(t_n - \frac{|z_m - z_k|}{c}\right) \kappa_{m,k}.$$

De partiële differentiaalvergelijking van (13) in het geval van een rechte draad is de volgende PDV:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (20)$$

Dit kan worden benaderd met centrale differentie naar de plaats en de tijd, dit geeft:

$$\frac{A_{m+1,n-1} - 2A_{m,n-1} + A_{m-1,n-1}}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2) - \frac{A_{m,n} - 2A_{m,n-1} + A_{m,n-2}}{(c\Delta t)^2} + O(\Delta t^2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_{m,n-1}}{\partial t} \quad (21)$$

Hier is in de eerste term van de linkerkant van de vergelijking centrale differentie naar de plaats toegepast en in de tweede term centrale differentie naar de tijd.

Met (19) volgt er een vergelijking voor $I_{m,n}$:

$$I_{m,n}\kappa_{m,m} = -\bar{\mathcal{A}}_{m,n} + 2A_{m,n-1} - A_{m,n-2} + \Delta t^2 \frac{\partial E_{m,n-1}}{\partial t} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta z}\right)^2 [A_{m+1,n-1} - 2A_{m,n-1} + A_{m-1,n-1}] \quad (22)$$

Aan de linkerkant staat nu een term die afhangt van tijdstip t_n , terwijl rechts alleen maar termen staan die afhangen van t_{n-1} en t_{n-2} . Deze recurrente betrekking hangt af van twee verschillende tijden in het verleden en vraagt dus twee beginvoorwaarden. Vanwege causaliteit geldt: $I_{m,0} = I_{m,1} = 0$. Hierdoor kunnen de coëfficiënten $I_{m,n}$ worden bepaald, zolang $\Delta t \leq \frac{\Delta z}{c}$. Dit is een expliciete methode waarbij de stroom direct wordt berekend. Er bestaan ook impliciete methodes. Stel $\Delta t > \frac{\Delta z}{c}$, dan wordt $\bar{\mathcal{A}}_{m,n}$ afhankelijk van onbekende stromen. Zetten we deze onbekende stromen aan de linkerkant en bekijken we alle verschillende plaatsen M , dan ontstaat er een stelsel met een aantal onbekende stromen aan de linkerkant en een aantal bekende stromen aan de rechterkant. Door aan te nemen dat de stroom constant is op een tijdsinterval Δt kan dit lineaire stelsel opgelost worden en de stroom alsnog worden berekend. Hiervan staat een voorbeeld voor $p = 2$ in de appendix. We gaan hier in dit verslag niet verder op in, omdat deze impliciete methode alsnog instabiel is voor $p > 1$.

3.2 Berekening stijfheids,- massamatrix en stroom

Stel we zien I^n als een vector die de stroom aangeeft op de draad op tijdstip n , dan kunnen we uit de vergelijking (52) een stelsel vinden dat er als volgt uit ziet:

$$C_n \tilde{I}^n = \tilde{F}_n + \sum_{k=1}^{\omega} C_{n-k} \tilde{I}^{n-k}, \quad (23)$$

waarbij $\tilde{I}^n$ de stroomvector is op tijdstip n . $\tilde{I}^{n-k}$ de stroomvector op tijdstip $n-k$. $\tilde{F}_n$ de bronterm op tijdstip n en C_{n-k} alle plaatsafhankelijke termen behorend bij k -tijdstappen terug. ω is de waarde die aangeeft hoeveel stappen we maximaal terug kunnen afhankelijk van de lengte van de draad en hoeveel tijdstappen de golf nodig heeft deze te overbruggen. Deze C -matrices bevatten dus allemaal verschillende $\kappa_{m,k}$ -waarden. C_n is bijvoorbeeld een diagonaalmatrix met $\kappa_{m,m}$ als waarde. Maken we nu van de stroomvector links I^n , alle onbekende stromen van n tot $n-\omega-1$, dan krijgen we:

$$M_n I^n = F_n + S_{n-1} I^{n-1}, \quad (24)$$

met:

$$M_n = \begin{bmatrix} C_n & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}, \quad (25)$$

de massamatrix,

$$S_n = \begin{bmatrix} C_{n-1} & C_{n-2} & \cdots & C_{n-\omega} \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

de stijfheidsmatrix en

$$F_n = \begin{bmatrix} \tilde{F}_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

de bronterm. Vermenigvuldigen we nu links met de inverse van de massamatrix dan vinden we de matrix:

$$Q_n = \begin{bmatrix} C_n^{-1} C_{n-1} & C_n^{-1} C_{n-2} & \cdots & C_n^{-1} C_{n-\omega} \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

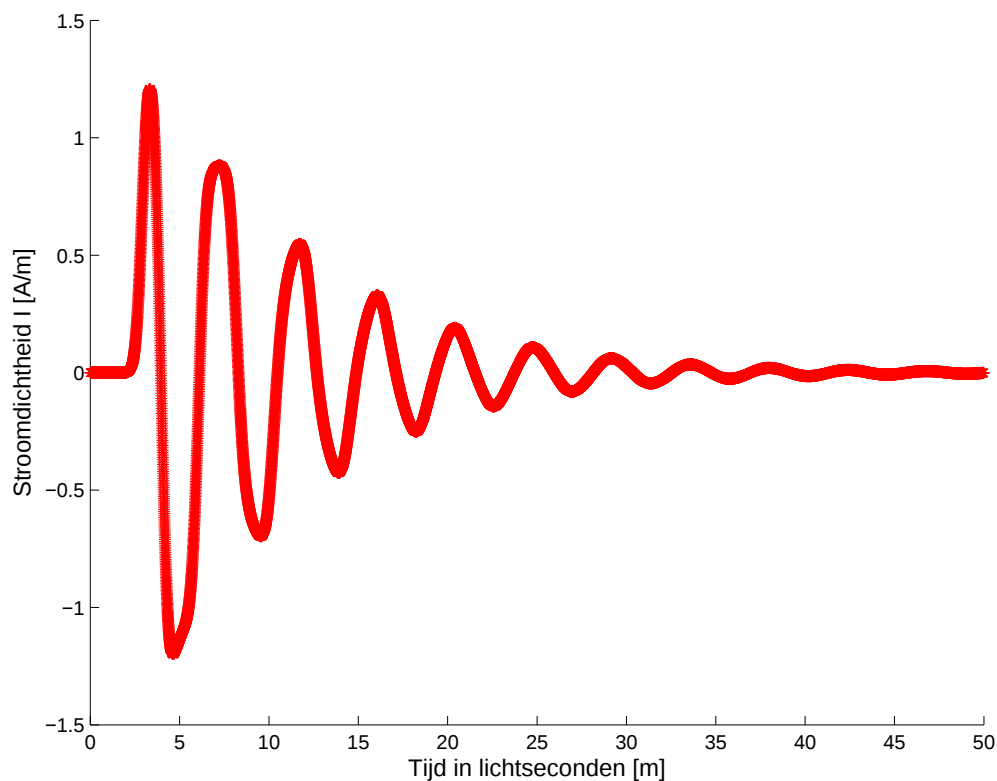
Deze matrix noemen we de versterkingsmatrix. Met behulp van de eerste rij matrices uit de versterkingsmatrix kunnen we de recurrente betrekking voor de stroom voor elk tijdstip n bepalen met beginvoorwaarden $I^0 = I^1 = 0$. Het stelsel op tijdstip n ziet er dan zo uit:

$$I^n = [C_n^{-1} C_{n-1} \ C_n^{-1} C_{n-2} \ \cdots \ C_n^{-1} C_{n-\omega}] [I^{n-1} \ I^{n-2} \ \cdots \ I^{n-\omega}]^T. \quad (29)$$

3.3 Referentieoplossing

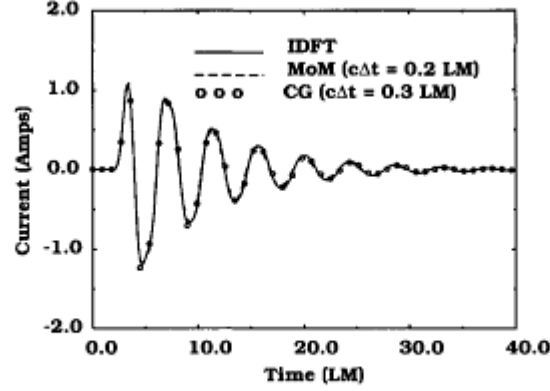
Om een zo goed mogelijke referentieoplossing te maken, moeten we de draad in zoveel mogelijk stukken opbreken met een relatief klein CFL getal. Figuur 4 hieronder is de referentieoplossing voor 160 stukken en CFL getal $\frac{1}{4}$, ofwel $m = 160$ en $p = 4$.

Deze oplossing zullen we gebruiken voor de analyse van de TDIE methode op het één-dimensionale model. De stroomdichtheid die je hier ziet is het punt in het midden van de draad. Dus in $z = 0$.



Figuur 4: De referentieoplossing voor $m = 160, p = 4$ voor het punt op het midden van de draad.

De referentieoplossing uit [3] is de volgende grafiek:



Current induced at the center of a conducting wire scatterer ($2h = 2.0$ m, $a = 0.01$ m) excited by a normal incident Gaussian plane wave.

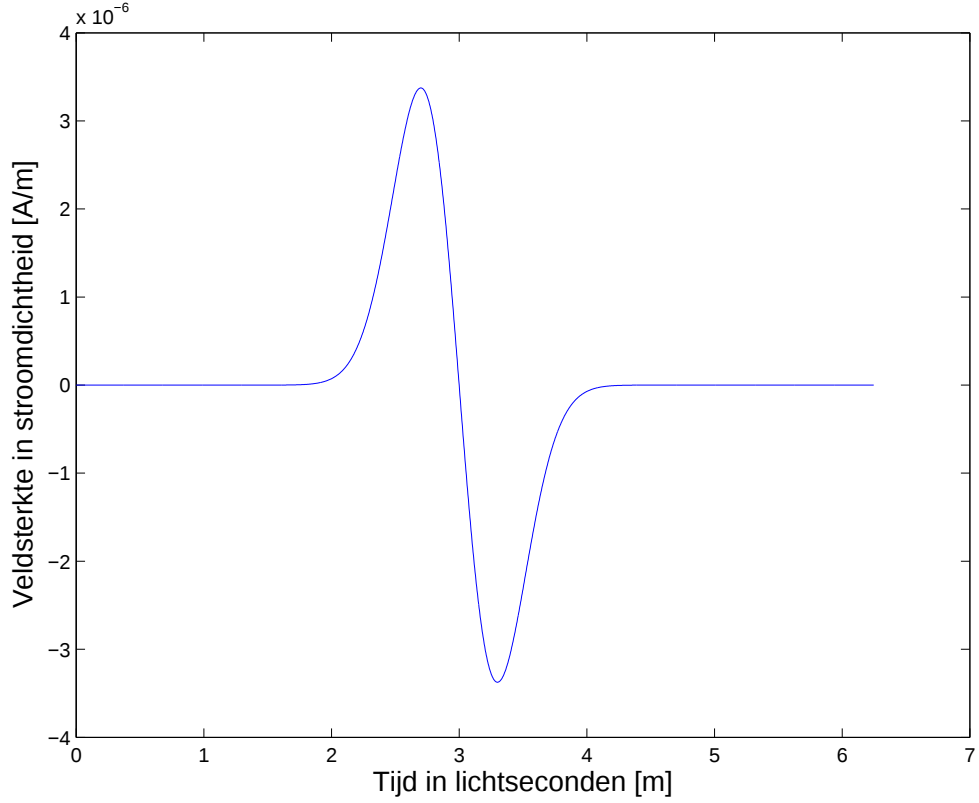
Er is duidelijk te zien dat deze overeenkomt met onze referentieoplossing.

Gaussian golf

Voor de analyse in dit verslag gebruiken we een vaste Gaussian golf. De vergelijking voor deze golf is:

$$\frac{E_0 4e^{-\gamma^2}}{T\sqrt{\pi}} \quad (30)$$

met $\gamma = \frac{4(ct_n - 1 - ct_0 - r \cdot a_k)}{T}$. Waarbij E_0 de golfsterkte is, T de golfbreedte en t_0 de inkomsttijd van de golf is. Verder is t_n de tijd, $r \cdot a_k$ de richting van de golf en c de lichtsnelheid. Voor onze golf gebruiken we: $E_0 = 120\pi$, $T = \sqrt{\frac{2}{\log 2}}$, $t_0 = \frac{3}{c}$ en de golf komt vanaf de negatieve kant op de z -as. In de differentiaalvergelijking is de bronterm de afgeleide van deze golf met een factor $\frac{1}{c^2}$ ervoor. Deze golf ziet er als volgt uit:



Figuur 5: De afgeleide van de Gaussian golf geplot in lichtseconden.

3.4 Stabiliteit van de referentieoplossing

Stel we hebben een oplossing x en we nemen een kleine verstoring ϵ .

$$x^n = C_n^{-1} F_n + Q_n x^{n-1}, \quad (31)$$

$$(x + \epsilon)^n = C_n^{-1} F_n + Q_n (x + \epsilon)^{n-1}. \quad (32)$$

Het verschil tussen deze twee waarden is:

$$\epsilon^n = Q_n \epsilon^{n-1}. \quad (33)$$

Ofwel:

$$\epsilon^n = [C_n^{-1} C_{n-1} \ C_n^{-1} C_{n-2} \ \dots \ C_n^{-1} C_{n-\omega-1}] \epsilon^{n-1}. \quad (34)$$

Dit is de eerste rij van onze versterkingsmatrix, alle andere rijen bevatten alleen maar eenheidsmatrices. Het stelsel voor alle tijden ziet er als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} \epsilon^n \\ \epsilon^{n-1} \\ \vdots \\ \epsilon^{n-\omega-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_n^{-1} C_{n-1} & -C_n^{-1} C_{n-2} & \dots & -C_n^{-1} C_{n-\omega} \\ I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{n-1} \\ \epsilon^{n-2} \\ \vdots \\ \epsilon^{n-\omega} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon^n \\ \epsilon^{n-1} \\ \vdots \\ \epsilon^{n-\omega-1} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \epsilon^{n-1} \\ \epsilon^{n-2} \\ \vdots \\ \epsilon^{n-\omega} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

De stabiliteit van de oplossing hangt af van het spectrum van de matrix Q . Als het spectrum van deze matrix binnen de eenheidscirkel ligt, is het systeem stabiel. Voor de referentieoplossing kunnen we met behulp van een Arnoldi methode van MATLAB de maximale eigenwaarde benaderen. Vanwege een te grote matrix kon de eigenwaarde niet snel genoeg benaderd worden. De rekentijd is erg hoog voor de matrix Q die we hebben. Deze is namelijk $[100488 \times 100488]$. Omdat we aan de voorwaarde $\Delta t \leq \frac{\Delta z}{c}$ hebben voldaan, weten we dat de referentieoplossing stabiel moet zijn. Dus de berekening van de maximale eigenwaarde is ook niet nodig.

4 Lineaire basisfuncties voor ruimtelijke discretisatie en eindige differentie voor tijdsdiscretisatie

In dit hoofdstuk zullen we de stroomverdeling in de draad in een verzameling stuksgewijs lineaire basisfuncties uitdrukken. Dit waren in het vorige hoofdstuk stuksgewijs constante basisfuncties. Deze stuksgewijs lineaire basisfuncties corresponderen met het één dimensionale equivalent van de RWG (Rao Wilton Glisson) basisfuncties die worden gebruikt om de stroomverdeling op een oppervlak te representeren.

4.1 Zwakke formulering

We kijken opnieuw naar de vectorpotentiaal $A(t, z)$ met de stroom ontbonden in plaats-basisfunctie voor z' en vermenigvuldigt met een testfunctie voor de plaats z , waarna geïntegreerd wordt over het domein van deze testfunctie $g_m(z)$. Deze testfunctie zorgt ervoor dat we de stroom niet evalueren in alleen het punt z_m , maar over een domein om dit punt. Om de testfunctie te gebruiken, moet deze alleen gedefinieerd zijn op het domein van het element dat we bekijken en op de randen moet deze functie nul zijn om aan de randvoorwaarden te voldoen. Verder zal hij ook één keer stuksgewijs differentieerbaar moeten zijn. Hetzelfde geldt voor de basisfuncties. We beginnen vanuit de partiële differentiaalvergelijking (13).

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t}.$$

Hieruit kregen we de oplossing (12):

$$A(z, t) = \mu \int_{z'=-h}^h \frac{I(z', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} dz'.$$

Met $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$.

Dit gebruiken we voor de eerste term van de differentiaalvergelijking en vermenigvuldigen deze met een testfunctie $g_m(z)$ en integreren over de lengte van de draad, dan krijgen we:

$$\mu \int_L \left\{ g_m(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_L \frac{I(z', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} dz' \right\} dz \quad (37)$$

Stel $\frac{1}{4\pi R} = G(z, z')$. Er geldt $\frac{\partial}{\partial z} I(z') G(z, z') = I(z') \frac{\partial}{\partial z} G(z, z')$, sinds I alleen afhangt van z' en R is een vaste waarde. Halen we de afgeleiden in de integraal en nemen we één keer de afgeleiden krijgen we:

$$\mu \int_L \left\{ g_m(z) \frac{\partial}{\partial z} \int_L \frac{\partial}{\partial z} \frac{I(z', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} dz' \right\} dz \quad (38)$$

Merk op dat $\frac{\partial}{\partial z} G(z, z') = -\frac{\partial}{\partial z'} G(z, z') = -\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{4\pi R}$ en gebruik partiële integratie, met stokterm nul omdat de stroom nul is op de uiteinden. Dit geeft:

$$\mu \int_L \left\{ g_m(z) \frac{\partial}{\partial z} \int_L \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial z'} I\left(z', t - \frac{R}{c}\right) dz' \right\} dz \quad (39)$$

Nog een keer partiele integratie waarbij de stokterm weer nul is, vinden we:

$$-\mu \int_L \left\{ g'_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial z'} I \left(z', t - \frac{R}{c} \right) dz' \right\} dz. \quad (40)$$

Nu drukken we de stroom I uit in zijn basisfuncties voor de plaats:

$$I(z', t) = \sum_{k=1}^M I \left(t - \frac{R}{c} \right) f_k(z'). \quad (41)$$

We bekijken nu R in z_m en z_k , genoteerd als $R_{m,k}$. Dus $\tau_i = t_i - \frac{|z-z'|}{c}$ wordt $\tau_i = t_i - \frac{|z_m - z_k|}{c} = t_i - \frac{R_{m,k}}{c}$. τ heet de *retarded time*. Dit geeft voor de stroom:

$$I(z', t) = \sum_{k=1}^M I \left(t - \frac{R_{m,k}}{c} \right) f_k(z'). \quad (42)$$

Substitueren we in (40) dan krijgen we:

$$\begin{aligned} -\mu \sum_{k=1}^M I \left(t - \frac{R_{m,k}}{c} \right) \int_L \left\{ g'_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} f'_k(z') dz' \right\} dz = \\ \sum_{k=1}^M I \left(t_{n-1} - \frac{R_{m,k}}{c} \right) K_{m,k}, \end{aligned} \quad (43)$$

waarbij:

$$K_{m,k} := -\mu \int_L \left\{ g'_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} f'_k(z') dz' \right\} dz. \quad (44)$$

Dus $\nabla^2 A$ in de differentiaalvergelijking op plaats z_m en tijd t_{n-1} wordt:

$$A_{m,n-1}^2 := \sum_{k=1}^M I \left(t_{n-1} - \frac{R_{m,k}}{c} \right) K_{m,k}. \quad (45)$$

Voor de tweede term:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (46)$$

krijgen we:

$$A_{m,n-1}^0 := \sum_{k=1}^M I'' \left(t_{n-1} - \frac{R_{m,k}}{c} \right) \kappa_{m,k}^0. \quad (47)$$

Met:

$$\kappa_{m,k}^0 := \mu \int_L \left\{ g_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} f_k(z') dz' \right\} dz. \quad (48)$$

Dan krijgen we voor de tweede term:

De bronterm moet ook worden vermenigvuldigd met de testfunctie en geïntegreerd over de draad. Voor de tweede tijdsafgeleide gebruiken we nog steeds een benadering op basis van centrale differenties. Dan krijgen we voor de differentiaalvergelijking:

$$A_{m,n-1}^2 - \frac{A_{m,n}^0 - 2A_{m,n-1}^0 + A_{m,n-2}^0}{(c\Delta t)^2} = \int_L \frac{g_m(z)}{c^2} \frac{\partial E_{m,n-1}}{\partial t} dz \quad (49)$$

Schrijven we dit uit voor de onbekende stroom $I_{m,n}$ aan de linkerkant, krijgen we:

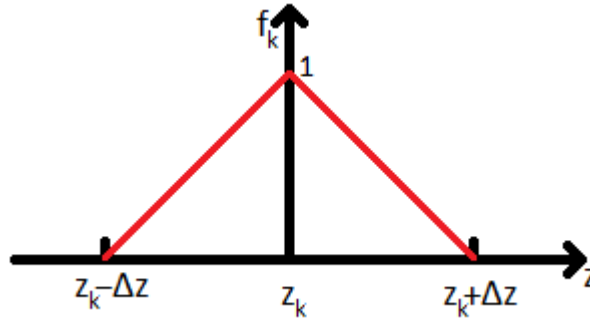
$$I_{m,n}\kappa_{m,m}^0 = (c\Delta t)^2 A_{m,n-1}^2 - \tilde{A}_{m,n}^0 + 2A_{m,n-1}^0 - A_{m,n-2}^0 + \Delta t^2 \Delta z \frac{\partial E_{m,n-1}}{\partial t} \quad (50)$$

Waarbij $\tilde{A}_{m,n}^0$ alle overgebleven termen van $A_{m,n}^0$ zijn met stroom in het verleden.

4.2 Lineaire basisfuncties

De basis -en testfunctie die we kiezen is als volgt gedefinieerd (zie ook figuur 6 hieronder):

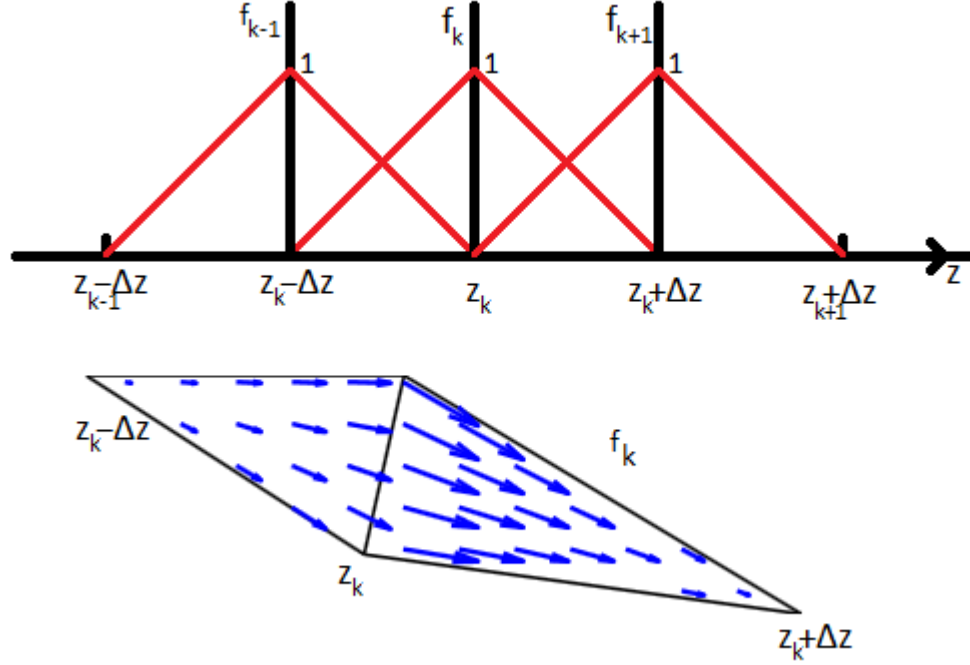
$$f_k(z) = \begin{cases} \frac{z - (z_k - \Delta z)}{\Delta z} & z_k - \Delta z \leq z \leq z_k \\ \frac{(z_k + \Delta z) - z}{\Delta z} & z_k \leq z \leq z_k + \Delta z \\ 0 & |z| > z_k + \Delta z \end{cases} \quad (51)$$



Figuur 6: Lineaire basisfunctie f_k .

Net als bij de centrale differentiemethode wordt aan de randvoorwaarden voldaan door op $z_k \pm \Delta z$ de stroombijdrage nul te nemen. Zo zal in z_1 de bijdrage van z_0 nul zijn sinds $z_1 - \Delta z = z_0$ en $f_1(z_1 - \Delta z) = 0$.

In een artikel van het onderzoek van Van 't Wout [6] wordt gebruikt gemaakt van twee aaneengesloten driehoeken die een parallellogram vormen. Dit zijn de RWG basisfuncties. Deze basisfuncties hebben dezelfde structuur. Per punt is er overlap met precies één buurpunt, behalve in het punt zelf, waar de bijdrage aan de burens nul is. Het deel dat rechts van het punt z_k zit, het interval $(z_k, z_k + \Delta z)$ is het linker interval van het volgende punt z_{k+1} , namelijk $(z_{k+1} - \Delta z, z_{k+1})$. In het geval van Van 't Wout worden twee driehoeken gebruikt waarbij de gemeenschappelijke zijde de lijn is die geen bijdrage geeft aan de burens. Zie ook figuur 7.



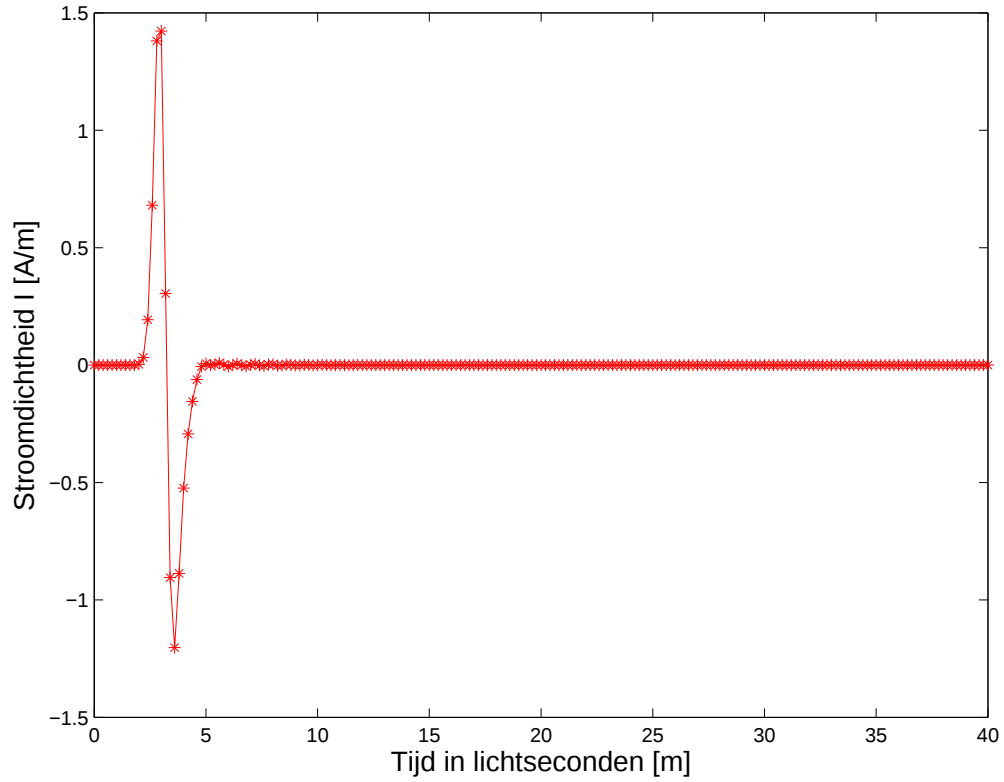
Figuur 7: Boven de lineaire basisfunctie f_{k-1}, f_k, f_{k+1} voor het ééndimensionale geval. Onderste figuur [7] de lineaire basisfunctie f_k voor het driedimensionale geval. Hierbij zijn de blauwe pijlen de waarden van de basisfunctie over de driehoeken.

4.3 Berekening stijfheids,- massamatrix en stroom

De vergelijking die we krijgen voor dit systeem heeft dezelfde vorm als de methode met benadering van de afgeleiden met centrale differentie voor plaats en tijd. Alleen de coëfficiënten van de κ -matrix worden anders berekend. De uitwerking van de binnenste integralen is te vinden in paragraaf (8.3). Deze coëfficiënten worden berekend door middel van een combinatie van (44) en (48). Ook het bepalen van de oplossing gaat op dezelfde manier aan de hand van de bovenste rij matrices in de versterkingsmatrix.

4.4 Verificatie van de oplossing

Om te laten zien dat deze methode dezelfde oplossing geeft, vergelijken we een grafiek van deze methode met de centrale differentiemethode. Voor $p = 2, M = 20$ krijgen we de volgende grafiek:



Figuur 8: Plot van stroomdichtheid op het midden van de draad voor lineaire basisfuncties voor de plaats en centrale differentie voor de tijd.

We zien hier dat de oplossing niet overeenkomt met de referentieoplossing. Er lijkt wel een golf te lopen, maar die zwakt heel snel weer af. Dit lijkt te komen door de symmetrie in de integralen en het punt wat we kiezen om de retarded time in te evalueren. Omdat deze methode een tussenstap is naar de definitieve methode slaan we die voor nu over. In de definitieve methode kwam dit probleem ook een keer terug bij een tussenstap. Dit konden we oplossen door de retarded time niet te evalueren in het middelpunt, maar een combinatie van het middelpunt plus-en min een halve plaatsstap. Dit zorgt ervoor dat de symmetrie in de integraal de waarden niet uitdooft.

5 Lineaire basisfuncties voor ruimtelijke discretisatie en tijdsdiscretisatie met behulp van collocatie

Hier zullen we het model bekijken waar dit onderzoek echt over gaat. We discretiseren naar plaats en tijd door gebruik te maken van basisfuncties. Door gebruik te maken van tijdsbasisfuncties en dezelfde corresponderende één dimensionale RWG basisfuncties voor de plaats als in het onderzoek van Van 't Wout zijn deze modellen gelijk aan elkaar.

5.1 Zwakke formulering

We leiden opnieuw de oplossing van de stroom af, maar nu in termen van nog ongedefinieerde basisfuncties voor de plaats en tijd. Basisfuncties zijn functies gedefinieerd over het domein tussen twee buurpunten. Buiten dit domein is de functie nul.

$$I(z, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M I_{k,i} f_k(z) T_i(t). \quad (52)$$

Hierbij is $I_{k,i}$ de stroomcoëfficiënt plaats z_k en op tijdstip t_i .

Net als in hoofdstuk 4 bekijken we de drie termen van de differentiaalvergelijking (13). We bekijken als eerste de term $\nabla^2 A$. We werken verder vanuit de vergelijking (39) waarbij we alleen de ruimtelijke afhankelijkheid hebben geëxpandeerd in plaatsbasisfuncties. De afleiding gaat verder precies hetzelfde, alleen is nu de tijd ook beschreven met een basisfunctie. We gebruiken ook hier weer $t - \frac{R}{c} = \tau$, de *retarded-time*. De tijd die de golf er over doet om aan te komen op de huidige plaats.

$$\begin{aligned} \mu \int_L \left\{ g'_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial z'} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^M I_{k,i} f_k(z') T_i(\tau) \right) dz' \right\} dz = \\ \mu \int_L \left\{ g'_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^M I_{k,i} f'_k(z') T_i(\tau) dz' \right\} dz = \\ \mu \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^M I_{k,i} \int_L \left\{ g'_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} f'_k(z') T_i(\tau) dz' \right\} dz = \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^M I_{k,i} B_{mk,i}(\tau). \end{aligned} \quad (53)$$

Met:

$$B_{mk,i}(t) = \mu \int_L \left\{ g'_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} f'_k(z') T_i(\tau) dz' \right\} dz. \quad (54)$$

Term 2, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} A$:

$$\begin{aligned}
& \mu \frac{1}{c^2} \int_L \left\{ g_m(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_L \frac{I(z', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} dz' \right\} dz = \\
& \mu \frac{1}{c^2} \int_L \left\{ g_m(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_L \frac{1}{4\pi R} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^M I_{k,i} f_k(z') T_i(\tau) \right) dz' \right\} dz = \\
& \mu \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^M I_{k,i} \frac{1}{c^2} \int_L \left\{ g_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} f_k(z') T_i''(\tau) dz' \right\} dz = \\
& \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^M I_{k,i} A_{mk,i}(t).
\end{aligned} \tag{55}$$

Met:

$$A_{mk,i}(t) = \mu \int_L \left\{ g_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} f_k(z') T_i''(\tau) dz' \right\} dz. \tag{56}$$

Term 3, de bronterm:

$$\int_L g_m(z) \frac{\partial E(z, t)}{\partial t} dz = F_m(t). \tag{57}$$

Nu vermenigvuldigen we met een testfunctie in de tijd en integreren daarover. Voor deze testfunctie kiezen we een deltafunctie waarvoor geldt:

$$\delta(t - t_n) = \begin{cases} 1 & t = t_n \\ 0 & t \neq t_n \end{cases}.$$

Op tijdstip t_n voor term 1 krijgen we dan:

$$B_{mk,i}(t_n) = \mu \int_L \left\{ g'_m(z) \int_L \frac{1}{4\pi R} f'_k(z') T_i \left(t_n - \frac{R_{m,k}}{c} \right) dz' \right\} dz \tag{58}$$

We nemen aan dat de retarded-time over de plaats constant is en dus alleen nog maar van de tijd afhangt omdat dit de integraal behoorlijk makkelijker maakt en geen grote consequenties heeft voor de fout in de oplossing. Dit kan echter wel de stabiliteit in gevaar brengen. Dit is niet gebruikt in het onderzoek van Van 't Wout. Verder is een basisfunctie nul voor $z \notin \Omega_m$, met Ω_m het interval wat hoort bij elementje z_m , ofwel $(z_m - \Delta z, z_m + \Delta z)$. De integralen over L worden dus nul op alles behalve Ω_m .

$$B_{mk,i}(t_n) = \mu T_i \left(t_n - \frac{R_{m,k}}{c} \right) \int_{\Omega_m} \left\{ g'_m(z) \int_{\Omega_k} \frac{1}{4\pi R} f'_k(z') dz' \right\} dz. \tag{59}$$

Term 2:

$$A_{mk,i}(t_n) = \mu T_i'' \left(t_n - \frac{R_{m,k}}{c} \right) \int_{\Omega_m} \left\{ g_m(z) \int_{\Omega_k} \frac{1}{4\pi R} f_k(z') dz' \right\} dz. \tag{60}$$

Term 3:

$$F_{m,n} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_m} g_m(z) \frac{\partial E(z, t_n)}{\partial t} dz. \tag{61}$$

Dus de vergelijking (39) op tijdstip t_n wordt:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M I_{k,i} \left(\frac{1}{c^2} A_{mk,i}(t_n) + B_{mk,i}(t_n) \right) = F_{m,n}. \quad (62)$$

De matrices $A_{mk,i}(t_n), B_{mk,i}(t_n)$ zijn te vergelijken met de κ -matrix en de K, κ^0 -matrix van de andere twee methodes. Alleen zijn deze nu wel afhankelijk van de tijd. Deze tijdsafhankelijkheid is uit te drukken in het aantal tijdstappen terug in de tijd met behulp van het CFL-getal. De term $(t_n - \frac{R_{m,k}}{c})$ in de tijdsbasisfunctie T_i is namelijk gelijk aan $\Delta t(n - p|m - k|)$, waarbij $\frac{1}{p}$ het CFL getal is. Als we van te voren weten hoeveel tijdstappen we maximaal terug kunnen kijken, kunnen we de matrices $A_{mk,i}$ en $B_{mk,i}$ dus al van tevoren bepalen. Dit is verder uitgewerkt in paragraaf 5.4. De uitwerking van de integralen is terug te vinden in de appendix, zie paragraaf 8.3. In de laatste versie van de implementatie is de retarded time niet meer onafhankelijk van de plaats gekozen. Beide integralen werden numeriek benaderd met behulp van Gaussian Legendre kwadratuur. De integraal over z' is zelfs nog exact te berekenen als we er vanuit gaan dat de tijdsbasisfuncties polynomiaal zijn. Dit hebben we echter niet kunnen implementeren. Zie paragraaf 8.4 voor de uitwerking van de integralen.

5.2 Tijdsbasisfuncties

We zullen verschillende tijdsbasisfuncties bekijken. De orde van convergentie van deze basisfuncties wordt gegeven bij de resultaten. We bekijken als eerste de stapfunctie met zelf gedefinieerde tweede afgeleide, die overeenkomt met de centrale differentie methode. Daarnaast bekijken we twee Lagrange en Spline functies, Quadratic en Cubic. De Spline functies zijn een extra keertje differentieerbaar. Dit zorgt voor betere gladheid.

Stapfunctie

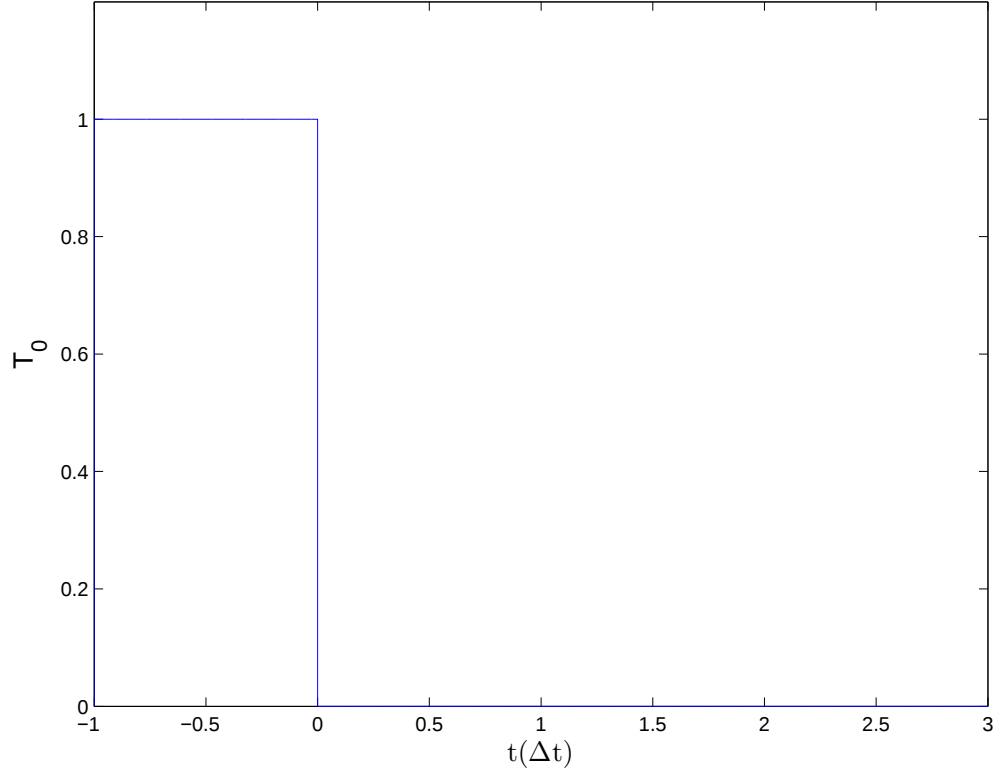
Het simpelste geval is wanneer de tijdsbasisfunctie een stapfunctie is en de stroom dus constant is over een tijdstap. Deze functie wordt gegeven door:

$$T_i(t) = \begin{cases} 1 & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ 0 & \text{rest} \end{cases}. \quad (63)$$

Deze functie is niet continu differentieerbaar dus de tweede afgeleide wordt apart gedefinieerd.

$$T_i''(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t^2} & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ -\frac{2}{\Delta t^2} & t_i < t \leq t_i + \Delta t \\ \frac{1}{\Delta t^2} & t_i + \Delta t < t \leq t_i + 2\Delta t \\ 0 & \text{rest} \end{cases}. \quad (64)$$

Deze tijdsbasisfunctie komt overeen met het gebruik van centrale differentie voor de tijd. $T_i(t)$ zal bijdrage leveren over het hele interval $(t_{i-1}, t_i]$ voor de eerste term van de differentiaalvergelijking. $T_i''(t)$ geeft $+1 \cdot A_{m,n-2}$, $-2 \cdot A_{m,n-1}$ en $+1 \cdot A_{m,n}$ gedeeld door Δt^2 , dit is precies de centrale differentie.



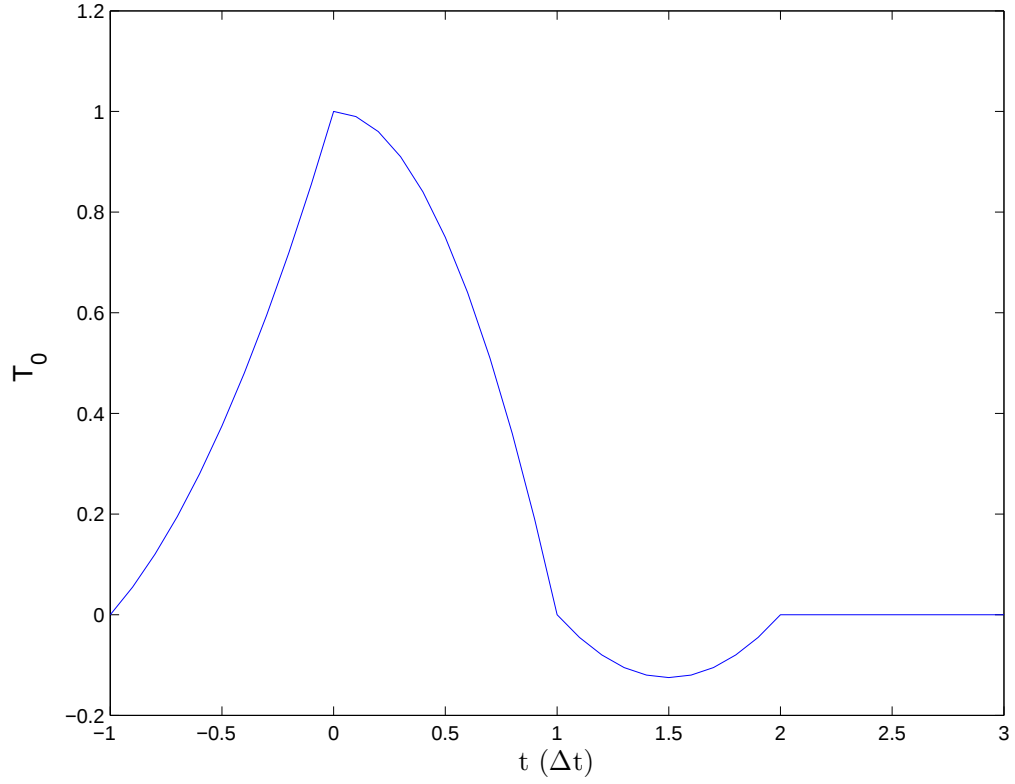
Figuur 9: Plot van de stapfunctie uitgezet tegen de tijd in tijdstappen Δt .

Quadratic Lagrange interpolatie

Als we (64) willen krijgen vanuit $T_i(t)$ moeten we de functie $T_i(t)$ als volgt definiëren:

$$T_i(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2\Delta t^2} + \frac{3t}{2\Delta t} + 1 & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ -\frac{t^2}{\Delta t^2} + 1 & t_i < t \leq t_i + \Delta t \\ \frac{t^2}{2\Delta t^2} - \frac{3t}{2\Delta t} + 1 & t_i + \Delta t < t \leq t_i + 2\Delta t \\ 0 & \text{rest} \end{cases} . \quad (65)$$

De tweede afgeleide van deze functie is precies (64).

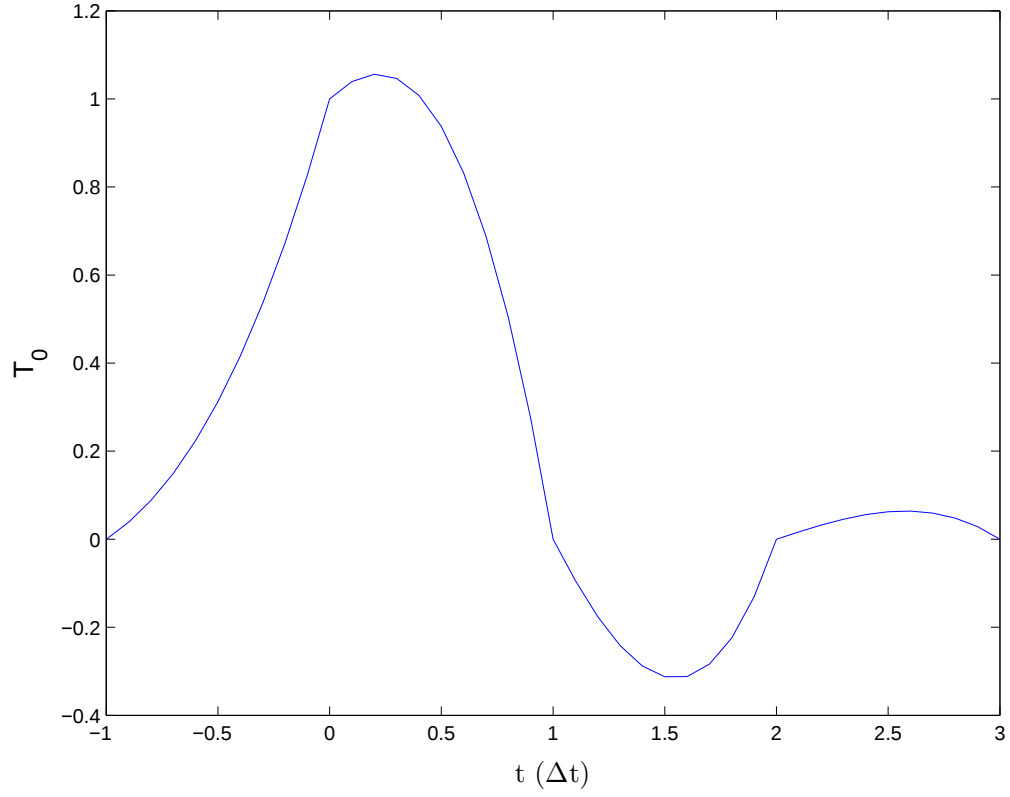


Figuur 10: Plot van de Quadratic Lagrange basisfunctie uitgezet tegen de tijd in tijdstap-
pen Δt .

Cubic Lagrange interpolatie

$$T_i(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6\Delta t^3} + \frac{t^2}{\Delta t^2} + \frac{11t}{6\Delta t} + 1 & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ -\frac{t^3}{2\Delta t^3} - \frac{t^2}{\Delta t^2} + \frac{t}{2\Delta t} + 1 & t_i < t \leq t_i + \Delta t \\ \frac{t^3}{2\Delta t^3} - \frac{t^2}{\Delta t^2} - \frac{t}{2\Delta t} + 1 & t_i + \Delta t < t \leq t_i + 2\Delta t \\ -\frac{t^3}{6\Delta t^3} + \frac{t^2}{\Delta t^2} - \frac{11t}{6\Delta t} + 1 & t_i + 2\Delta t < t \leq t_i + 3\Delta t \\ 0 & \text{rest} \end{cases} \quad (66)$$

$$T_i''(t) = \begin{cases} \frac{t}{\Delta t} + 2 & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ -\frac{3t}{\Delta t} - 2 & t_i < t \leq t_i + \Delta t \\ \frac{3t}{\Delta t} - 2 & t_i + \Delta t < t \leq t_i + 2\Delta t \\ -\frac{t}{\Delta t} + 2 & t_i + 2\Delta t < t \leq t_i + 3\Delta t \\ 0 & \text{rest} \end{cases} \quad (67)$$



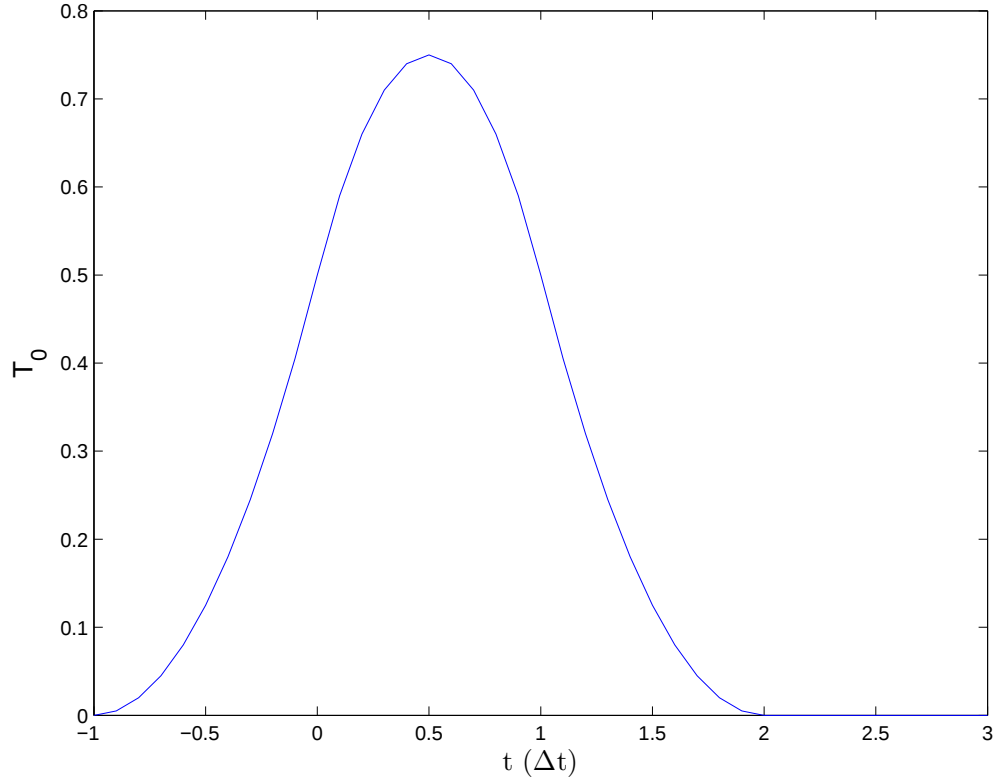
Figuur 11: Plot van de Cubic Lagrange basisfunctie uitgezet tegen de tijd in tijdstappen Δt .

Quadratic Spline interpolatie

$$T_i(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2\Delta t^2} + \frac{t}{\Delta t} + \frac{1}{2} & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ -\frac{t^2}{\Delta t^2} + \frac{t}{\Delta t} + \frac{1}{2} & t_i < t \leq t_i + \Delta t \\ \frac{t^2}{2\Delta t^2} - \frac{2t}{\Delta t} + 2 & t_i + \Delta t < t \leq t_i + 2\Delta t \\ 0 & \text{rest} \end{cases} . \quad (68)$$

$$T_i''(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t^2} & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ -\frac{2}{\Delta t^2} & t_i < t \leq t_i + \Delta t \\ \frac{1}{\Delta t^2} & t_i + \Delta t < t \leq t_i + 2\Delta t \\ 0 & \text{rest} \end{cases} . \quad (69)$$

Weer hetzelfde als (64).

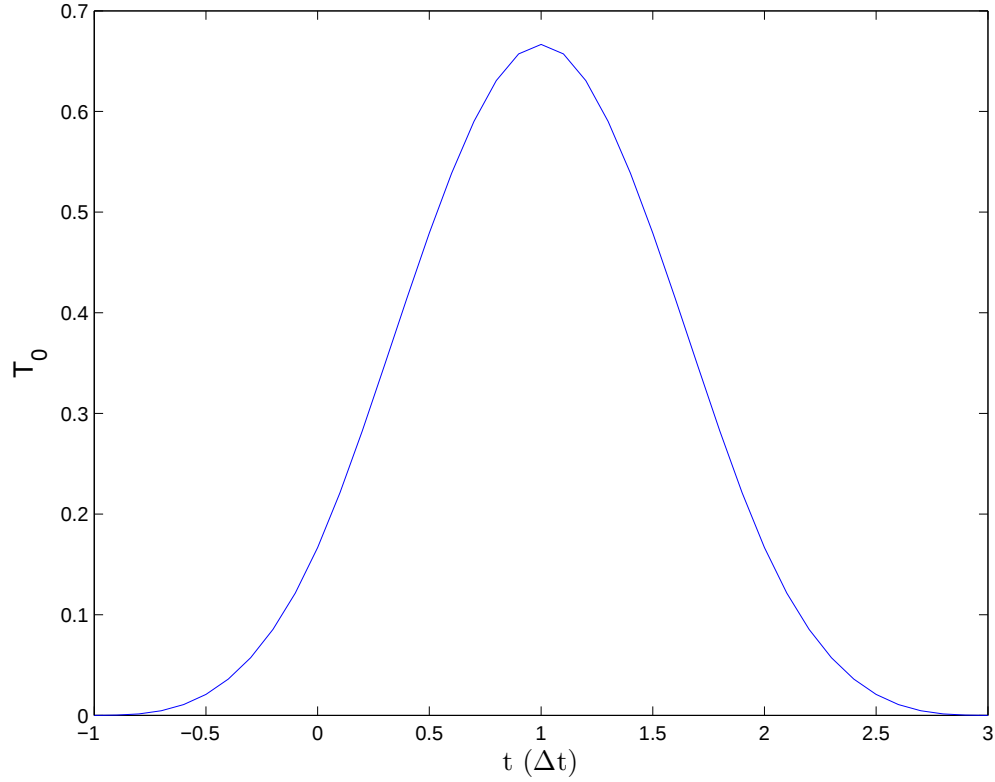


Figuur 12: Plot van de Quadratic Spline basisfunctie uitgezet tegen de tijd in tijdstappen Δt .

Cubic Spline interpolatie

$$T_i(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6\Delta t^3} + \frac{t^2}{2\Delta t^2} + \frac{t}{2\Delta t} + \frac{1}{6} & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ -\frac{t^3}{2\Delta t^3} + \frac{t^2}{2\Delta t^2} + \frac{t}{2\Delta t} + \frac{1}{6} & t_i < t \leq t_i + \Delta t \\ \frac{t^3}{2\Delta t^3} - \frac{5t^2}{2\Delta t^2} + \frac{7t}{2\Delta t} - \frac{5}{6} & t_i + \Delta t < t \leq t_i + 2\Delta t \\ -\frac{t^3}{6\Delta t^3} + \frac{3t^2}{2\Delta t^2} - \frac{9t}{2\Delta t} + \frac{9}{2} & t_i + 2\Delta t < t \leq t_i + 3\Delta t \\ 0 & \text{rest} \end{cases} \quad (70)$$

$$T_i''(t) = \begin{cases} \frac{t}{\Delta t^3} + \frac{1}{\Delta t^2} & t_i - \Delta t < t \leq t_i \\ -\frac{3t}{\Delta t^3} + \frac{1}{\Delta t^2} & t_i < t \leq t_i + \Delta t \\ \frac{3t}{\Delta t^3} - \frac{5}{\Delta t^2} & t_i + \Delta t < t \leq t_i + 2\Delta t \\ -\frac{t}{\Delta t^3} + \frac{3}{\Delta t^2} & t_i + 2\Delta t < t \leq t_i + 3\Delta t \\ 0 & \text{rest} \end{cases} \quad (71)$$



Figuur 13: Plot van de Cubic Spline basisfunctie uitgezet tegen de tijd in tijdstappen Δt .

5.3 Basis -en testfuncties in de ruimte

Voor de basis -en testfuncties in de ruimte kiezen we de RWG lineaire interpolatie. Deze functie is als volgt gedefinieerd:

$$f_k(z) = \begin{cases} \frac{z - (z_k - \Delta z)}{\Delta z} & z_k - \Delta z \leq z \leq z_k \\ \frac{(z_k + \Delta z) - z}{\Delta z} & z_k \leq z \leq z_k + \Delta z \\ 0 & |z| > z_k + \Delta z \end{cases} \quad (72)$$

Omdat we de tijdsbasisfunctie onafhankelijk van de plaats hebben gekozen kunnen we de integralen over de plaats voor $A_{mk,i}$, $B_{mk,i}$ en $F_{m,i}$ bepalen. We zullen zien dat de binnenste integraal nog goed analytisch is op te lossen, maar de buitenste integraal kost veel moeite om te integreren en we zullen deze daarom benaderen met behulp van Gaussian Legendre kwadratuur [4].

5.4 Berekening stijfheids,- massamatrix en stroom

Om de versterkingsmatrix te bepalen, bekijken we het stelsel omgeschreven naar een sommatie over alle oude tijdstappen. Het stelsel ziet er als volgt uit:

$$\sum_{k=1}^M I_{k,i} \left(\frac{1}{c^2} A_{mk,i}(t_i) + B_{mk,i}(t_i) \right) = F_{m,i} - \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=1}^M I_{k,j} \left(\frac{1}{c^2} A_{mk,j}(t_i) + B_{mk,j}(t_i) \right). \quad (73)$$

Voor $m = 1, 2, \dots, M$ en $i = 1, 2, \dots$.

$$\sum_{k=1}^M I_{k,i} Z_{mk,i}(t_i) = F_{m,i} - \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=1}^M I_{k,j} Z_{mk,j}(t_i). \quad (74)$$

Met $Z_{mk,i}(t) = \frac{1}{c^2} A_{mk,i}(t) + B_{mk,i}(t)$.

Het maximum aantal tijdstappen terug is een vaste waarde ω , afhankelijk van Δz en Δt . Dit is gemakkelijk in te zien als we kijken naar figuur (3.1). De maximale afstand tussen de punten die we bekijken is $(M-2)\Delta z$. De tijd die er voor nodig is om deze afstand af te leggen in termen van Δz en Δt is p . Dus $\omega = (M-2)p$. In het geval dat p geen geheel getal is, moet de waarde naar boven worden afgerond.

Stel we hebben een oplossing x en we nemen een kleine verstoring ϵ .

$$Z_0 x^{n+1} = f - \sum_{i=0}^{\omega-1} Z_{i+1} x^{n-i}, \quad (75)$$

$$Z_0 (x + \epsilon)^{n+1} = f - \sum_{i=0}^{\omega-1} Z_{i+1} (x + \epsilon)^{n-i}. \quad (76)$$

Het verschil tussen deze twee waarden is:

$$Z_0 \epsilon^{n+1} = - \sum_{i=0}^{\omega-1} Z_{i+1} \epsilon^{n-i}. \quad (77)$$

Ofwel:

$$\epsilon^{n+1} = [-Z_0^{-1} Z_1 - Z_0^{-1} Z_2 \dots - Z_0^{-1} Z_{\omega-1}] \epsilon^n. \quad (78)$$

Dit is de eerste rij van onze versterkingsmatrix, alle andere rijen bevatten alleen maar eenheidsmatrices. Het stelsel voor alle tijden ziet er als volgt uit:

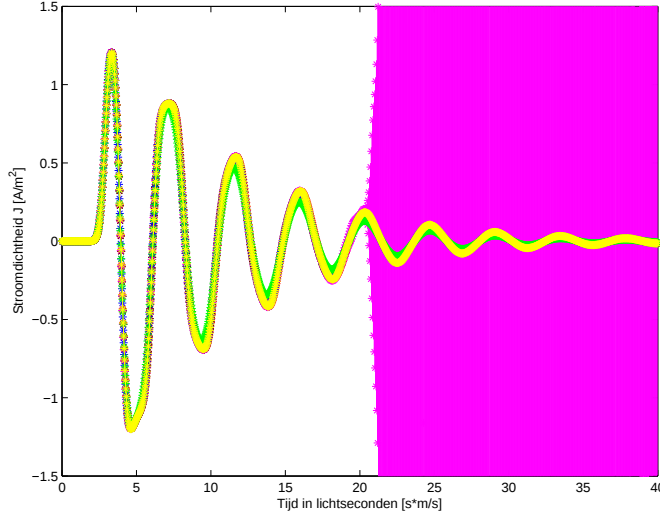
$$\begin{bmatrix} \epsilon^{n+1} \\ \epsilon^n \\ \vdots \\ \epsilon^{n-\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_0^{-1} Z_1 & -Z_0^{-1} Z_2 & \dots & -Z_0^{-1} Z_{\omega-1} \\ I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^n \\ \epsilon^{n-1} \\ \vdots \\ \epsilon^{n-\omega-1} \end{bmatrix}. \quad (79)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{n+1} \\ \epsilon^n \\ \vdots \\ \epsilon^{n-\omega} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \epsilon^n \\ \epsilon^{n-1} \\ \vdots \\ \epsilon^{n-\omega-1} \end{bmatrix}. \quad (80)$$

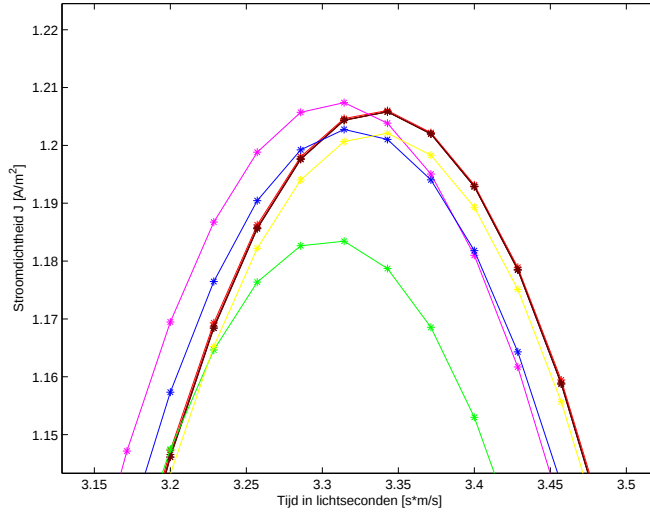
De stabiliteit van de oplossing hangt af van het spectrum van de matrix Q . Deze matrix heet de versterkingsmatrix. Als het spectrum van deze matrix binnen de eenheidscirkel ligt, is het systeem stabiel.

5.5 Verificatie van de oplossing

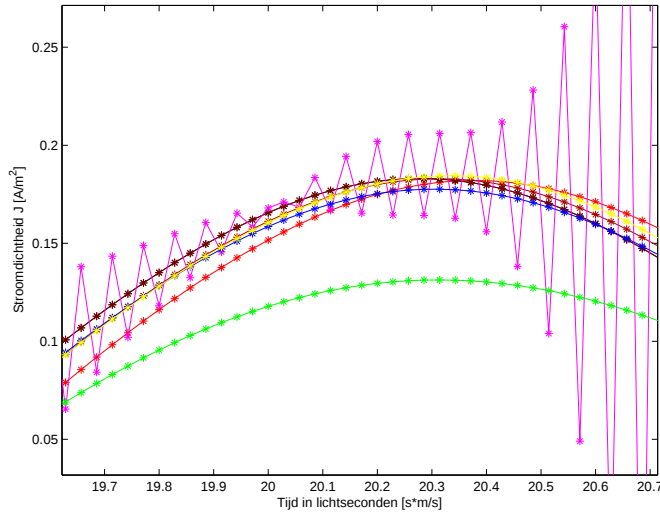
Om te kijken of de oplossing die we vinden ook echt de oplossing is die we zoeken, vergelijken we de oplossing van dit hoofdstuk met de oplossing berekend met de methode gepresenteerd in hoofdstuk 3. Hiervan weten we dat de oplossing klopt omdat deze vergeleken is met de exacte oplossing verkregen met een oplossing uit het frequentiedomein. De figuren hieronder zijn plots van alle methoden in één grafiek met $p = 1, M = 70$. De grafieken zijn de stroomdichtheid J in $[A/m]$ tegen de tijd t in lichtseconden $[s \cdot m/s]$. In figuur 14 zie je de hele grafiek. Hier is duidelijk te zien dat de instabiliteit van de Cubic Spline (magenta) inzet rond de 20 lichtseconden (zie ook figuur 16). Voor hogere p -waarden is de Cubic Spline tijdsbasisfunctie wel stabiel. Zie hiervoor de resultaten bij de analyse. In de tweede grafiek, figuur 15, is de eerste piek van de grafiek te zien. De rode lijn die je ziet, is de referentieoplossing. Alle methoden lijken al met al hetzelfde te lopen. Alleen is te zien dat de methoden iets meer gedempt zijn, zeker Quadratic Lagrange heeft een lagere piek. Dit is terug te zien in de eigenwaarden van de gebruikte methoden. De maximale eigenwaarden liggen meer naar binnen toe dan bij de centrale differentie methode.



Figuur 14: Plot van alle basisfuncties met CFL getal 1, aantal delen op de draad 70 en 1400 tijdstappen. De tijdsbasisfuncties zijn: Cubic Spline (magenta), Quadratic Spline (blauw), Quadratic Lagrange (groen), Cubic Lagrange (geel). Referentieoplossing (rood).



Figuur 15: Plot van alle basisfuncties met CFL getal 1, aantal delen op de draad 70 en 1400 tijdstappen bekeken in de eerste piek van de oplossingen. De tijdsbasisfuncties zijn: Cubic Spline (magenta), Quadratic Spline (blauw), Quadratic Lagrange (groen), Cubic Lagrange (geel). Referentieoplossing (rood).



Figuur 16: Plot van alle basisfuncties met CFL getal 1, aantal delen op de draad 70 en 1400 tijdstappen bekeken op de piek van instabiliteit voor Cubic Spline. De tijdsbasisfuncties zijn: Cubic Spline (magenta), Quadratic Spline (blauw), Quadratic Lagrange (groen), Cubic Lagrange (geel). Referentieoplossing (rood).

6 Analyse van stabiliteit en nauwkeurigheid van de tijdsbasisfuncties

In deze sectie gaan we kijken naar de orde van convergentie. Dit doen we op twee manieren. De eerste is orde bepalen aan de hand van convergentie naar de referentieoplossing. De tweede manier is orde van convergentie bepalen met behulp van Richardson extrapolatie. Ook zullen we kijken naar de stabiliteit van de oplossing. Dit doen we door naar het spectrum te kijken van de versterkingsmatrix Q .

6.1 Convergentie naar referentieoplossing

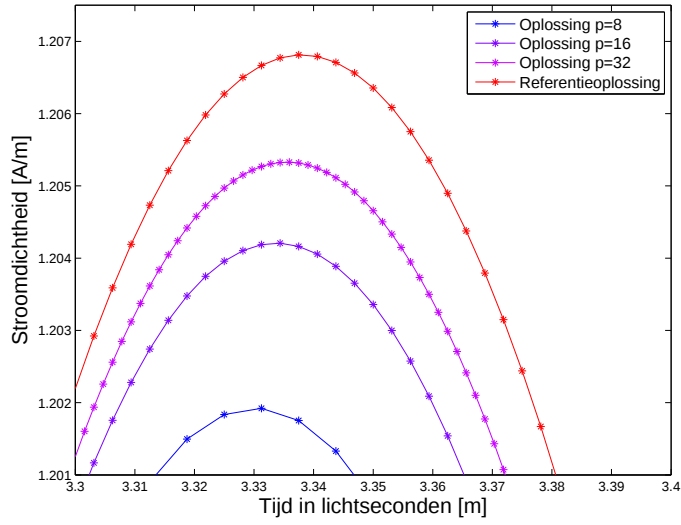
Hieronder in de figuren 17, 18, 19 en 20 kan je zien dat de oplossing met de verschillende tijdsbasisfuncties ook convergeert naar de referentieoplossing (rode lijn). We gebruiken $M = 40$ en $p = 8, 16, 32$ om een zo nauwkeurig mogelijke benadering te krijgen. We bepalen de orde door te kijken naar welke factor twee met macht α er opduikt tussen de fout van de referentieoplossing met de verschillende CFL-waarden. Er blijkt echter dat tussen de pieken in de lijnen niet synchroon lopen, waardoor de referentieoplossing dichterbij de grafiek komt te liggen van een lagere p -waarde. Dit zorgt ervoor dat het verschil tussen de oplossingen met verschillende p -waarden en de referentieoplossing niet de orde resultaten geeft zoals we die verwachten. Als we interval $[2.5, 5]$ LM nemen, waarin de eerste piek en dal liggen, krijgen we de volgende resultaten voor de orde van convergentie:

Basisfunctie	$\ I^{p=8} - I^{\text{ref}}\ _2$	$\ I^{p=16} - I^{\text{ref}}\ _2$	$\ I^{p=32} - I^{\text{ref}}\ _2$
Quadratic Lagrange	0.1672	0.2464	0.1941
Quadratic Spline	0.1196	0.2396	0.1953
Cubic Lagrange	0.0568	0.1671	0.1690
Cubic Spline	0.2221	0.3140	0.2220

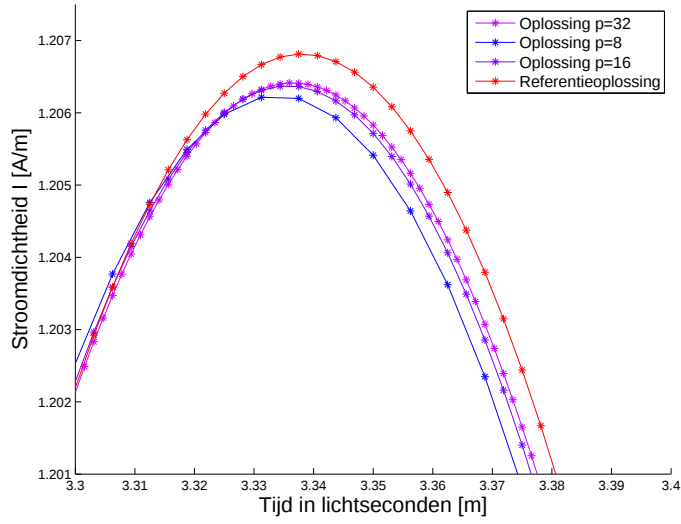
Als we hiermee de orde bepalen met behulp van Richardson, vinden we dus hele andere waarden:

Basisfunctie	α met $p = 8, 16$	α met $p = 16, 32$
Quadratic Lagrange	-0.5598	0.3441
Quadratic Spline	-1.0023	0.2948
Cubic Lagrange	-1.5558	-0.0170
Cubic Spline	-0.4997	0.5001

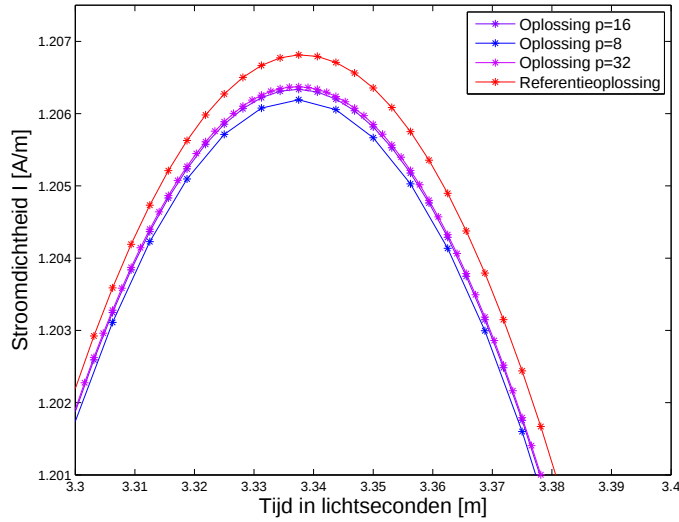
In de grafieken hieronder is de convergentie te zien. Het is duidelijk te zien dat de oplossing convergeert richting de referentieoplossing, maar ook dat de oplossingen niet in fase lopen.



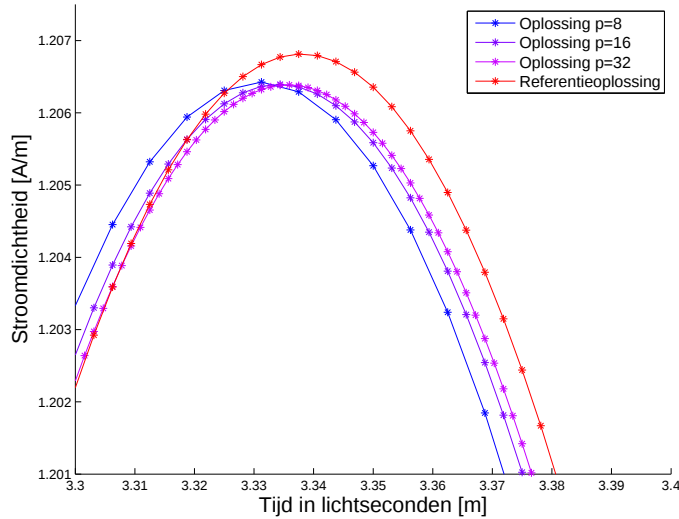
Figuur 17: Grafiek met $p = 8, 16$ en 32 Quadratic Lagrange basisfunctie bekeken op tijdsinterval $(3.3, 3.4)$ lichtseconden waarin de eerste piek van de oplossing ligt.



Figuur 18: Grafiek met $p = 8, 16$ en 32 Quadratic Spline basisfunctie op tijdsinterval $(3.3, 3.4)$ lichtseconden waarin de eerste piek van de oplossing ligt.



Figuur 19: Grafiek met $p = 8, 16$ en 32 Cubic Lagrange basisfunctie op tijdsinterval $(3.3, 3.4)$ lichtseconden waarin de eerste piek van de oplossing ligt.



Figuur 20: Grafiek met $p = 8, 16$ en 32 Cubic Spline basisfunctie op tijdsinterval $(3.3, 3.4)$ lichtseconden waarin de eerste piek van de oplossing ligt.

6.2 Nauwkeurigheid van de oplossing

Om te bepalen hoe nauwkeurig de verschillende tijdsbasisfuncties zijn, gebruiken we Richardson extrapolatie om de orde te bepalen. Deze methode gebruikt drie samples

met verschillende tijdstappen Δt , $\Delta t = \frac{\Delta z}{cp}$. We kiezen bijvoorbeeld $p = 1, 2, 4$, dan bepalen we de orde door te kijken naar het verschil van de oplossingen $p = 1, 2$ en $p = 2, 4$. Hierbij kijken we naar welke factor twee er opduikt in de verhouding tussen deze twee waarden. Ofwel:

$$\frac{\|I^{p=1} - I^{p=2}\|_2}{\|I^{p=2} - I^{p=4}\|_2} = 2^\alpha. \quad (81)$$

α geeft dan de nauwkeurigheid aan. Omschrijven van deze formule geeft:

$$\alpha = \log_2 \left(\frac{\|I^{p=1} - I^{p=2}\|_2}{\|I^{p=2} - I^{p=4}\|_2} \right).$$

Omdat de oplossing afhangt van de plaats en de tijd moeten we de fout in de plaats zo klein mogelijk maken, zodat deze (bijna) geen invloed heeft op de totale fout. Anders is de ordebepaling voor de tijdsbasisfunctie onnauwkeurig. Dit doen we door de draad in zoveel mogelijk stukjes op te breken, zodat je hele kleine Δz waarde hebt. Omdat we een beperkt aantal geheugen hebben, zijn niet altijd dezelfde M -waarden beschikbaar, daarom dat ze zullen variëren.

De orde, in theorie, van de tijdsbasisfuncties zijn [7]:

Basisfunctie	nauwkeurigheid T	nauwkeurigheid T''	totale nauwkeurigheid
Quadratic Lagrange	$\mathcal{O}(\Delta t^3)$	$\mathcal{O}(\Delta t)$	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Quadratic Spline	$\mathcal{O}(\Delta t^3)$	$\mathcal{O}(\Delta t)$	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Cubic Lagrange	$\mathcal{O}(\Delta t^4)$	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$
Cubic Spline	$\mathcal{O}(\Delta t^4)$	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$

Sinds we zowel T als T'' gebruiken, bepaalt de laagste orde de totale nauwkeurigheid. In MATLAB gebruiken we de volgende waarden:

$$M = 45, p = 1, 2, 4.$$

Dit geeft de volgende resultaten:

Basisfunctie	$\ I^{p=1} - I^{p=2}\ _2$	$\ I^{p=2} - I^{p=4}\ _2$	α	Orde
Quadratic Lagrange	0.7859	0.4134	0.9270	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Quadratic Spline	0.3046	0.1241	1.2958	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Cubic Lagrange	0.1646	0.0398	2.0487	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$
Cubic Spline*	0.4341	0.2174	0.9977	$\mathcal{O}(\Delta t)$

*Cubic Spline is instabiel voor $p = 1$, dus voor grote N zal de fout overnemen. De waarden die we gevonden hebben, zijn dus nog een onzekerheid door de instabiliteit. En voor:

$$M = 70, p = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$$

geeft dit de volgende resultaten:

Basisfunctie	$\ I^{p=\frac{1}{4}} - I^{p=\frac{1}{2}}\ _2$	$\ I^{p=\frac{1}{2}} - I^{p=1}\ _2$	α	Orde
Quadratic Lagrange	0.87649	0.4956	0.8224	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Quadratic Spline	0.6466	0.2343	1.4642	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Cubic Lagrange	0.9069	0.1481	2.6144	$\mathcal{O}(\Delta t^3)$
Cubic Spline**	-	-	-	-

**Voor de Cubic Spline-basisfunctie is de oplossing instabiel geworden al na vijf licht-seconden.

Omdat we niet weten of we in het asymptotisch stabiele gebied zitten voor de tijdsbasisfuncties kiezen we ook hele fijne tijdstappen. We gebruiken hierbij $M = 40, p = 8, 16, 32$ zoals ook bij het bepalen van de convergentie. Dit is in verband met geheugen

en rekentijd de meest fijne tijdstap die we kunnen kiezen met de draad opgedeeld in een groot aantal stukken. We zullen in de volgende sectie zien dat de oplossingen stabiel zijn, maar we zien in de grafieken dat de verschillende oplossingen met $p = 8, 16, 32$ uit fase gaat lopen. Dit zorgt voor een onnauwkeurige orde bepaling. Daarom gebruiken we alleen de eerste piek van de oplossing om nauwkeurigheid te bepalen, omdat hier het faseverschil nog niet echt merkbaar is en we wel genoeg datapunten hebben. We nemen het interval $[2.5, 5]$ LM. Dit geeft:

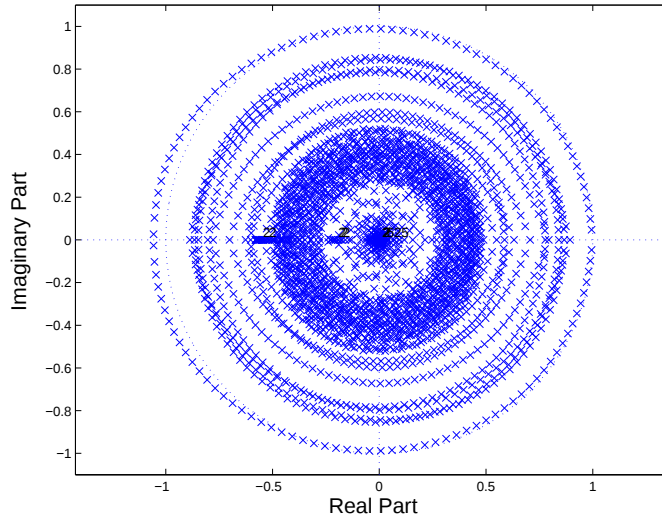
Basisfunctie	$\ I^{p=8} - I^{p=16}\ _2$	$\ I^{p=16} - I^{p=32}\ _2$	α	Orde
Quadratic Lagrange	0.0884	0.0443	0.9961	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Quadratic Spline	0.0538	0.0272	0.9848	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Cubic Lagrange	0.1119	0.0556	1.0077	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Cubic Spline	0.000466	0.000125	1.9032	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$

6.3 Stabiliteit van de oplossing

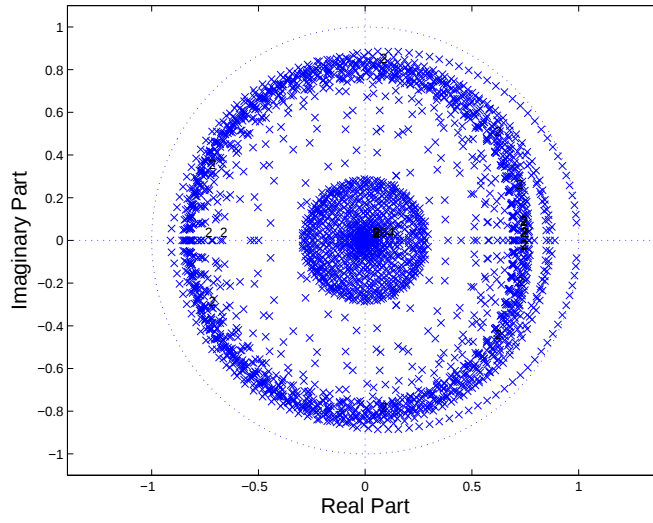
Stabiliteit voor $M = 60, p = 1$

Om stabiliteit van de oplossingen te waarborgen, moet het spectrum van de versterkingsmatrix Q in de cirkel $|z| = 1$ liggen. De Cubic Spline-methode is instabiel voor CFL getal 1 ($p = 1$). Maar de eigenwaarden liggen maar net over de rand, hierdoor ontploft de oplossing niet heel snel en zien we een groot deel van de oplossing terug in de grafieken. Zoals bij het bepalen van geldigheid van de oplossing te zien is.

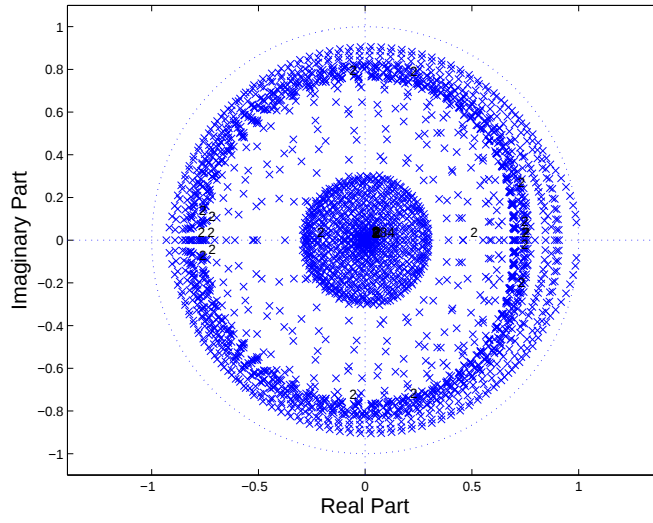
De eigenwaardengrafieken zijn gemaakt met $M = 60$, meer geheugen was niet beschikbaar. De p -waarde is één.



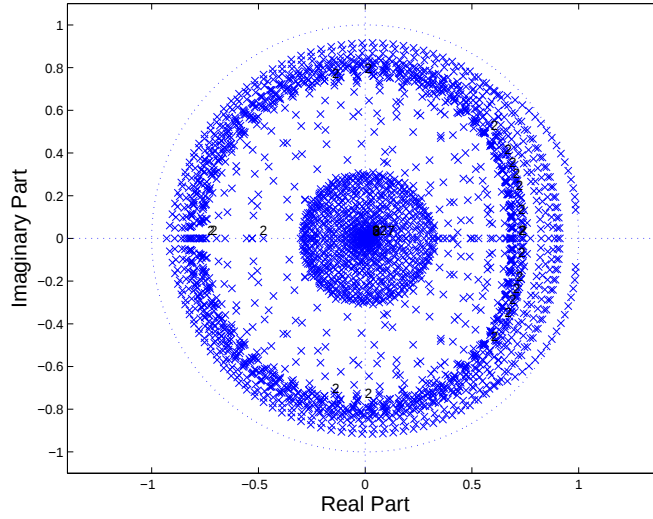
Figuur 21: Eigenwaarden met Cubic Spline basisfunctie met $M = 60, p = 1$.



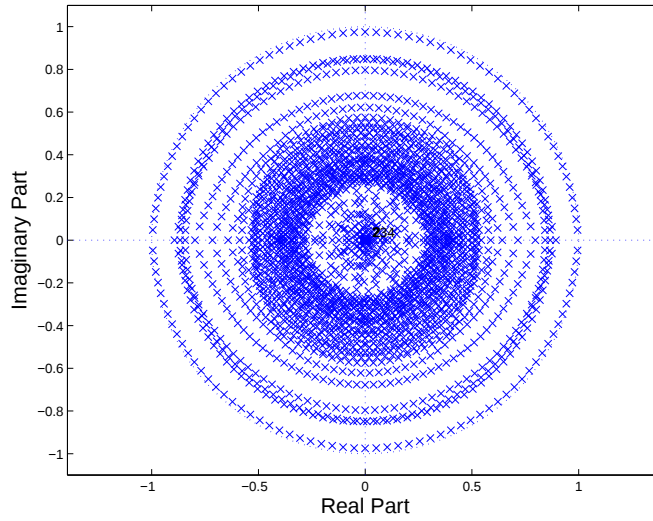
Figuur 22: Eigenwaarden met Quadratic Spline basisfunctie met $M = 60, p = 1$.



Figuur 23: Eigenwaarden met Quadratic Lagrange basisfunctie met $M = 60, p = 1$.



Figuur 24: Eigenwaarden met Cubic Lagrange basisfunctie met $M = 60, p = 1$.



Figuur 25: Spectrum van centrale differentie in plaats en tijd met $M = 60, p = 1$.

Stabiliteit voor $M = 40, p = 8, 16$ en 32

We laten zien dat voor $M = 40$ met $p = 8, 16$ en 32 alle tijdsbasisfuncties stabiel zijn. Bij deze instellingen wordt de matrix Q te groot om volledig op te slaan. We zullen daarom Q zien als een sparse-matrix, waardoor we alleen de maximale eigenwaarden kunnen bepalen. Deze vinden we met een Arnoldi methode van MATLAB.

Basisfunctie	maximale eig $p = 8$	maximale eig $p = 16$	maximale eig $p = 32$
Quadratic Lagrange	0.9952	0.9996	0.9998
Quadratic Spline	0.9992	0.9974	0.9998
Cubic Lagrange	0.9968	0.9996	0.9998
Cubic Spline	0.9968	0.9978	0.9989

6.4 Conclusies

In dit hoofdstuk hebben we kunnen laten zien dat de TDIE methode voor een driedimensionaal model voor een cilindervormige draad vertaald kan worden naar eenzelfde TDIE methode voor het één-dimensionaal probleem, waar de draad een rechte lijn voorstelt. Daarna hebben we onze definitieve methode geanalyseerd aan de hand van de referentieoplossing.

Orde van convergentie

Door de referentieoplossing te vergelijken met drie verschillende CFL waarden konden we de orde van convergentie bekijken. Er bleek echter dat er tussen twee CFL getallen een fase verschil optreedt. Hierdoor liggen de datapunten niet goed op elkaar. Wat zorgde voor onlogische waarden voor orde van convergentie. Met behulp van Richardson extrapolatie vonden we wel nuttige resultaten wat betreft orde van convergentie door een interval vroeg in de tijd te kiezen waar we genoeg datapunten hebben, maar waar het faseverschil nog niet erg merkbaar is. In het onderzoek van van 't Wout staat in de theorie dat de orde van convergentie twee is voor de Cubic basisfuncties en één is voor de Quadratic basisfuncties. Voor lage CFL waarden vonden we bijna dezelfde resultaten. Voor Quadratic Lagrange kwamen we uit op een α waarde 0.9961, dus orde één. Voor Quadratic Spline vonden we $\alpha = 0.9848$, ook orde één. Voor Cubic Lagrange $\alpha = 1.0077$. Dit geeft dus ook orde één, wat volgens de theorie orde twee is. Cubic Spline klopte echter wel weer met de theorie. Hier vonden we $\alpha = 1.9032$, ofwel orde twee. Alleen Cubic Lagrange heeft dus niet de orde zoals theoretisch wordt voorspeld. Het lijkt er dus op dat deze oplossing nog niet in het asymptotisch stabiele gebied ligt.

Stabiliteit

Uit de analyse hebben we gevonden dat de methoden allemaal stabiel zijn indien het CFL getal klein genoeg wordt gekozen. Voor CFL getal 1 was Cubic Spline instabiel. Echter voor CFL getal $\frac{1}{8}$ en lager was hij stabiel. We hebben hiervoor gekeken naar de maximale eigenwaarden van de versterkingsmatrices en zagen dat ze allemaal onder de één lagen, wat stabiliteit aantoont.

7 Conclusies en aanbevelingen

7.1 Centrale differentie voor plaats en tijd

Met behulp van centrale differentie hebben we een stabiele oplossing kunnen geven die overeenkomt met de echte oplossing van onze differentiaalvergelijking. Hierbij hebben we wel de restrictie dat $\Delta t \leq \frac{\Delta z}{c}$. Dit betekent dat je een hele fijne tijdstap hebt en voor het berekenen van een oplossing over een lange tijdsperiode de rekentijd hoog zal uitvallen. Maar we hebben hiermee wel een nauwkeurige referentieoplossing gevonden om de tijdsdiscretisatie met behulp van collocatie te verifiëren.

7.2 Lineaire plaatsbasisfuncties en centrale differentie voor tijd

Als uitbreiding op de centrale differentiemethode hebben we plaatsbasisfuncties geïntroduceerd in plaats van centrale differentie van de plaats. Deze methode vertoont echter veel annulering in de oplossing door de symmetrie in de plaatsbasisfunctie. Dit kan worden voorkomen door de τ -waarden niet in het midden van een plaatsinterval te bekijken, maar op het midden van het plus -en mindomein Ω van de plaatsbasisfuncties. Dit had echter geen prioriteit en daarom hebben we het achterwege gelaten. Dit was meer een opstapje naar de definitieve methode.

7.3 Lineaire basisfuncties voor ruimtelijke discretisatie en tijdsdiscretisatie met behulp van collocatie

Bij deze methode zijn we totaal afgestapt van centrale differentie. De stroom is ontbonden in zowel plaats -als tijdsbasisfuncties. Voor de plaats lineair en verschillende bekende kwadratische en derdegraads basisfuncties voor de tijd. Het doel is om voor de tijdsbasisfuncties conclusies te kunnen trekken met betrekking tot convergentie en stabiliteit. Tevens om te bepalen of het model overeenkomt met het driedimensionale model. Er is gebleken dat voor de Quadratic Lagrange, Quadratic Spline en Cubic Lagrange tijdsbasisfuncties er stabiliteit is voor $p = 1$ en groter. Voor de Cubic Spline is er echter geen stabiliteit voor $p = 1$. Pas voor grotere waarden werd deze stabiel. Dit komt ook overeen met de resultaten van het onderzoek van Van 't Woud voor het driedimensionale geval. Wel zien we dat met fijne plaats -en tijdsstap ook de Cubic Spline de referentieoplossing goed benadert tot ver in de tijd. Pas na uitdoving van de golf komt de instabiliteit door. De orde van convergentie voor de tijdsbasisfuncties komt overeen met de theoretische orde, behalve voor Cubic Lagrange. Deze zijn orde Δt voor Quadratic Lagrange, Quadratic Spline en Cubic Lagrange. Orde Δt^2 voor Cubic Spline. Echter zien we dat de oplossingen niet perfect synchroon lopen met elkaar en de referentieoplossing tussen de pieken van de oplossing, waardoor de berekende orde van de tijdsbasisfuncties niet overeenkomen met de theoretische orde. Het lijkt zelfs onnauwkeuriger te worden met een fijnere tijdsstap.

Discussie

Er zijn nog een paar punten voor verbetering om definitieve conclusies te kunnen trekken. De integraal over z' die voorkomt in de termen van de versterkingsmatrix kunnen analytisch worden bepaald zelfs als de retarded time afhankelijk is van de

plaats. Dit kan als we rekening houden met polynomiale tijdsbasisfuncties. Hiervoor hebben we een afleiding gegeven in de appendix (zie paragraaf 8.4), maar deze methode is nog niet gebruikt voor het trekken van conclusies omdat de implementatie meer aandacht vereist. Dit zou een eventuele fout in de numerieke benadering van deze integralen door middel van Gaussian kwadratuur kunnen voorkomen. Verder is er nog verbetering te vinden als het gaat om geheugen. Om de versterkingsmatrix te berekenen, is er veel geheugen nodig om deze op te slaan en zeker als we stabiliteit willen bepalen door te kijken naar het spectrum. De fijnste benadering die gebruikt is, is met $M = 40$ en CFL getal $\frac{1}{32}$ ($p = 32$). Dit wil zeggen dat we een perfect geleidende stroomdraad van één meter hebben opgedeeld in 41 stukken van ongeveer 0.024 meter en een tijdstap van $\frac{0.024}{32c} \approx 7.6 \cdot 10^{-4} \frac{1}{c}$ seconden hebben, waarbij c de lichtsnelheid is. Dit lijkt heel klein, maar we werken met lichtsnelheden dus relatief is het nog vrij groot. Het is onzeker te zeggen of dit in het asymptotisch stabiele gebied ligt van de basisfuncties. Met een groter geheugen kunnen fijnere plaats -en tijdsstappen gekozen worden voor meer zekere resultaten.

Het is echter nog onduidelijk waar het fase verschil vandaan komt bij de keuze van verschillende CFL-getallen. Misschien dat dit verholpen wordt door de hierboven aangegeven aanmerkingen.

8 Appendix

8.1 Voorbeeld impliciete methode

Stel de draad is één meter lang en opgedeeld in tien stukken. Dan $\Delta z = \frac{2}{10} = 0.2$ meter. Stel $\Delta t = 2 \cdot \frac{\Delta z}{c}$. Dus

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2 \cdot 0.2}{c} & \frac{2 \cdot 0.4}{c} & \frac{2 \cdot 0.6}{c} & \dots \end{bmatrix}.$$

We berekenen $I_{m,3}$:

$$I_{1,3}\kappa_{1,1} = - \left[I \left(z_2, t_3 - \frac{|z_1 - z_2|}{c} \right) \kappa_{1,2} + I \left(z_3, t_3 - \frac{|z_1 - z_3|}{c} \right) \kappa_{1,3} + I \left(z_4, t_3 - \frac{|z_1 - z_4|}{c} \right) \kappa_{1,4} \right] + C_1,$$

$$I_{2,3}\kappa_{2,2} = - \left[I \left(z_1, t_3 - \frac{|z_2 - z_1|}{c} \right) \kappa_{2,1} + I \left(z_3, t_3 - \frac{|z_2 - z_3|}{c} \right) \kappa_{2,3} + I \left(z_4, t_3 - \frac{|z_2 - z_4|}{c} \right) \kappa_{2,4} \right] + C_2,$$

$$I_{3,3}\kappa_{3,3} = - \left[I \left(z_1, t_3 - \frac{|z_3 - z_1|}{c} \right) \kappa_{3,1} + I \left(z_2, t_3 - \frac{|z_3 - z_2|}{c} \right) \kappa_{3,2} + I \left(z_4, t_3 - \frac{|z_3 - z_4|}{c} \right) \kappa_{3,4} \right] + C_3,$$

$$I_{4,3}\kappa_{4,4} = - \left[I \left(z_1, t_3 - \frac{|z_4 - z_1|}{c} \right) \kappa_{4,1} + I \left(z_2, t_3 - \frac{|z_4 - z_2|}{c} \right) \kappa_{4,2} + I \left(z_3, t_3 - \frac{|z_4 - z_3|}{c} \right) \kappa_{4,3} \right] + C_4.$$

Waarbij C_i $i = 1, 2, 3, 4$ alleen maar bekende waarden zijn uit eerdere tijdstappen.

Bekijk nu bijvoorbeeld de term $I \left(z_2, t_3 - \frac{|z_1 - z_2|}{c} \right) \kappa_{1,2}$, $t_3 = \frac{2 \cdot 0.6}{c}$, dus I wordt bekeken op tijdstap $\frac{2 \cdot 0.6}{c} - \frac{|0.2 - 0.4|}{c} = \frac{1.0}{c} = t_{2\frac{1}{2}} = t_3$. Doen we dit voor alle termen in het stelsel dan ziet die er als volgt uit:

$$I_{1,3}\kappa_{1,1} = - [I(z_2, t_3) \kappa_{1,2} + I(z_3, t_2) \kappa_{1,3} + I(z_4, t_2) \kappa_{1,4}] + C_1,$$

$$I_{2,3}\kappa_{2,2} = - [I(z_1, t_3) \kappa_{2,1} + I(z_3, t_2) \kappa_{2,3} + I(z_4, t_2) \kappa_{2,4}] + C_2,$$

$$I_{3,3}\kappa_{3,3} = - [I(z_1, t_3) \kappa_{3,1} + I(z_2, t_2) \kappa_{3,2} + I(z_4, t_2) \kappa_{3,4}] + C_3,$$

$$I_{4,3}\kappa_{4,4} = - [I(z_1, t_3) \kappa_{4,1} + I(z_2, t_2) \kappa_{4,2} + I(z_3, t_2) \kappa_{4,3}] + C_4.$$

Alles op tijdstip t_3 is nog onbekend, brengen we dit naar de linkerkant dan zien we het stelsel verschijnen.

$$\begin{aligned} I_{1,3}\kappa_{1,1} + I_{2,3}\kappa_{1,2} &= - (I_{3,2}\kappa_{1,3} + I_{4,2}\kappa_{1,4}) + C_1, \\ I_{2,3}\kappa_{2,2} + I_{1,3}\kappa_{2,1} + I_{3,2}\kappa_{2,3} &= - I_{4,2}\kappa_{2,4} + C_2, \\ I_{3,3}\kappa_{3,3} + I_{1,3}\kappa_{3,1} + I_{2,2}\kappa_{3,2} &= - I_{4,2}\kappa_{3,4} + C_3, \\ I_{4,3}\kappa_{4,4} + I_{1,3}\kappa_{4,1} &= - (I_{2,2}\kappa_{4,2} + I_{3,2}\kappa_{4,3}) + C_4. \end{aligned}$$

Dit kunnen we schrijven als:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{1,1} & \kappa_{1,2} & 0 & 0 \\ \kappa_{2,1} & \kappa_{2,2} & \kappa_{2,3} & 0 \\ 0 & \kappa_{3,2} & \kappa_{3,3} & \kappa_{3,4} \\ 0 & 0 & \kappa_{4,3} & \kappa_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1,3} \\ I_{2,3} \\ I_{3,3} \\ I_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - (I_{3,2}\kappa_{1,3} + I_{4,2}\kappa_{1,4}) & + C_1 \\ - I_{4,2}\kappa_{2,4} & + C_2 \\ - I_{4,2}\kappa_{3,4} & + C_3 \\ - (I_{2,2}\kappa_{4,2} + I_{3,2}\kappa_{4,3}) & + C_4 \end{bmatrix}$$

Alle onbekende stromen op tijd t_3 kunnen worden berekend door dit stelsel op te lossen. Het aantal onbekende stromen uit $\mathcal{A}_{m,n}$ is afhankelijk van het aantal keer dat er een tijdstap past in een plaatsinterval. Als $\Delta t = \frac{\Delta z}{pc}$, dan is de naar boven afgeronde waarde van $\frac{1}{p}$ het aantal onbekende stromen dat naar links wordt verplaatst en geeft dus het aantal diagonalen van κ aan de linkerkant.

8.2 Gebruikte theorie in de code

Om de MATLAB code sneller te maken, is er gebruik gemaakt van de symmetrie van de coëfficiënten $A_{mk,i}$ en $B_{mk,i}$. Tevens geldt voor $m + d = k + d$ dat er ook gelijke waarden uitkomen voor $A_{(m+d)(k+d),i}$ en $B_{(m+d)(k+d),i}$. Dit zorgt ervoor dat we per Z_v nog maar N berekeningen hoeven te doen in plaats van N^2 . In de volgende twee subparagrafen geven we het bewijs voor deze trucs.

Symmetrie Z_v -matrices

We moeten laten zien dat geldt: $A_{mk,i} = A_{km,i}$. We zullen dit laten zien voor A en het is duidelijk dat het voor $B_{mk,i}$ precies hetzelfde gaat.

$$\begin{aligned}
A_{mk,i} &= \int_{\Omega_m} g_m(z) \int_{\Omega_k} \frac{f_k(z') T_i(\tau_{mk})}{4\pi \sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz' dz = \\
&\int_{\Omega_k} f_k(z') \int_{\Omega_m} \frac{g_m(z') T_i(t - \frac{|z_m - z_k|}{c})}{4\pi \sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz dz' = \\
&\int_{\Omega_k} f_k(z) \int_{\Omega_m} \frac{g_m(z') T_i(t - \frac{|-1||z_k - z_m|}{c})}{4\pi \sqrt{(-1)^2 (z' - z)^2 + a^2}} dz' dz = \\
&\int_{\Omega_k} f_k(z) \int_{\Omega_m} \frac{g_m(z') T_i(t - \frac{|z_k - z_m|}{c})}{4\pi \sqrt{(z' - z)^2 + a^2}} dz' dz = A_{km,i}.
\end{aligned} \tag{82}$$

We gebruiken hier de eigenschappen van de even machten en de absoluutfunctie. Hiermee wisselen we z en z' .

Gelijkwaardige diagonalen van de Z_v -matrices

Om dit aan te tonen, moeten we kijken naar twee dingen, τ_{mk} en de plaatsbasisfunctie $f_k(z)$. Dit zijn de enige functies in de integralen die van m, k afhangen.

$$\tau_{(m+d)(k+d)} = t - \frac{|z_{m+d} - z_{k+d}|}{c} = t - \frac{|z_m + d\Delta z - (z_k + d\Delta z)|}{c} = t - \frac{|z_m - z_k|}{c} = \tau_{mk}. \tag{83}$$

$$f_{k+d}(z) = \begin{cases} \frac{z - (z_{k+d} - \Delta z)}{\Delta z} & z_{k+d} - \Delta z \leq z \leq z_{k+d} \\ \frac{(z_{k+d} + \Delta z) - z}{\Delta z} & z_{k+d} \leq z \leq z_{k+d} + \Delta z \\ 0 & |z| > z_{k+d} + \Delta z \end{cases} . \tag{84}$$

Dit is een verschoven plaatsbasisfunctie die werkt op het interval $(z_{k+d} - \Delta z, z_{k+d} + \Delta z)$. Dus voor z' uit dit interval, zal $f_{k+d}(z')$ dezelfde waarden op gaan leveren als $f_k(z)$, met $z \in (z_k - \Delta z, z_k + \Delta z)$. Dus als we voor z berekenen wat $f_k(z)$ is, dan weten we dat ook voor z' in $f_{k+d}(z')$.

Om de gelijkwaardigheid te krijgen is het dus wel nodig dat M en k gelijk zijn, hierdoor zijn de diagonalen in Z_v gelijk.

8.3 Integralen

Voor het evalueren van de matrixcoëfficiënten $A_{mk,j}$ en $B_{mk,j}$ moeten twee integralen worden berekend. Met $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$ krijg je een integraal van $\frac{(z - z')}{R}$ en een integraal over $\frac{1}{R}$. Elke integraal zal hier op lijken, alleen wisselt er een min-teken en de constanten variëren.

$$\int \frac{(z - z')}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz'. \quad (85)$$

Substitutie met:

$$\begin{aligned} u &= (z - z')^2 \\ du &= 2(z' - z) dz' \end{aligned}$$

geeft:

$$-\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u + a^2}} = -\sqrt{u + a^2} = \quad (86)$$

$$-\sqrt{(z - z')^2 + a^2}. \quad (87)$$

De andere integraal is iets lastiger, maar wel bekend. We laten dus zien dat de afgeleide van de uitkomst precies is wat er geïntegreerd wordt.

$$\int \frac{dz'}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz' = -\ln \left(\sqrt{(z - z')^2 + a^2} + z - z' \right). \quad (88)$$

Afgeleide van een $\ln(f(z'))$ is $f'(z')/f(z')$ vanwege de kettingregel. Met $f(z') = \sqrt{(z - z')^2 + a^2} + z - z'$ geeft een tweede kettingregel en dan volgt:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz'} \ln \left(\sqrt{(z - z')^2 + a^2} + z - z' \right) &= \\ -\frac{\frac{1}{2} \frac{-2(z - z')}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} - 1}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2} + z - z'} &= \\ \frac{\left(\frac{\sqrt{(z - z')^2 + a^2} + z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} \right)}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2} + z - z'} &= \\ \frac{1}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}}. \end{aligned} \quad (89)$$

$A_{mk,i}$ en $B_{mk,i}$

Voor de term $A_{mk,i}$ hebben we de volgende integraal:

$$\int_{\Omega_m} \left\{ g_m(z) \int_{\Omega_k} \frac{1}{4\pi R} f_k(z') dz' \right\} dz. \quad (90)$$

Met de testfunctie $g_m(z)$ en de basisfunctie $f_k(z)$ als lineaire interpolatie (84) wordt dit:

$$\int_{\Omega_m} \left\{ g_m(z) \left[\int_{z'=z_k-\Delta z}^{z_k} \frac{1}{4\pi R} \frac{z' - (z_k - \Delta z)}{\Delta z} dz' + \int_{z'=z_k}^{z_k+\Delta z} \frac{1}{4\pi R} \frac{(z_k + \Delta z) - z'}{\Delta z} dz' \right] \right\} dz \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \int_{z'=z_k-\Delta z}^{z_k} \frac{1}{4\pi R} \frac{z' - (z_k - \Delta z)}{\Delta z} dz' &= - \int_{z'=z_k-\Delta z}^{z_k} \frac{1}{4\pi R} \frac{(z - z') - z + (z_k - \Delta z)}{\Delta z} dz' = \\ &= \int_{z'=z_k-\Delta z}^{z_k} -\frac{1}{4\pi R} \frac{(z - z')}{\Delta z} + \frac{1}{4\pi R} \frac{z - (z_k - \Delta z)}{\Delta z} dz'. \end{aligned} \quad (92)$$

De eerste integraal is als (85) en de tweede als (88). Werken we deze integralen uit dan krijgen we:

$$\frac{1}{4\pi\Delta z} \left[\sqrt{(z - z_k)^2 + a^2} - \sqrt{(z - z_k + \Delta z)^2 + a^2} \right]. \quad (93)$$

De tweede integraal:

$$\frac{z - (z_k - \Delta z)}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z_k - z)^2 + a^2} + z_k - z}{\sqrt{(z_k - \Delta z - z)^2 + a^2} + z_k - \Delta z - z} \right). \quad (94)$$

Dus:

$$\begin{aligned} \int_{z'=z_k-\Delta z}^{z_k} \frac{1}{4\pi R\Delta z} \frac{z' - (z_k - \Delta z)}{\Delta z} dz' &= \frac{1}{4\pi\Delta z} \left[\sqrt{(z - z_k)^2 + a^2} - \sqrt{(z - z_k + \Delta z)^2 + a^2} \right] + \\ &+ \frac{z - (z_k - \Delta z)}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z_k - z)^2 + a^2} + z_k - z}{\sqrt{(z_k - \Delta z - z)^2 + a^2} + z_k - \Delta z - z} \right). \end{aligned} \quad (95)$$

De andere integraal:

$$\int_{z'=z_k}^{z_k+\Delta z} \frac{1}{4\pi R} \frac{(z_k + \Delta z) - z'}{\Delta z} dz' = \int_{z'=z_k}^{z_k+\Delta z} \frac{1}{4\pi R} \frac{(z - z')}{\Delta z} + \frac{1}{4\pi R} \frac{(z_k + \Delta z) - z}{\Delta z} dz'. \quad (96)$$

Hier is de eerste integraal:

$$\frac{1}{4\pi\Delta z} \left[-\sqrt{(z - z_k - \Delta z)^2 + a^2} + \sqrt{(z - z_k)^2 + a^2} \right]. \quad (97)$$

De tweede integraal wordt:

$$\frac{(z_k + \Delta z) - z}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z_k + \Delta z - z)^2 + a^2} + z_k + \Delta z - z}{\sqrt{(z_k - z)^2 + a^2} + z_k - z} \right). \quad (98)$$

Dit geeft voor de binnenste integraal van $A_{mk,i}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi\Delta z} \left[\sqrt{(z-z_k)^2 + a^2} - \sqrt{(z-z_k+\Delta z)^2 + a^2} \right] + \\
& \frac{z-(z_k-\Delta z)}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z_k-z)^2 + a^2} + z_k - z}{\sqrt{(z_k-\Delta z-z)^2 + a^2} + z_k - \Delta z - z} \right) + \\
& \frac{1}{4\pi\Delta z} \left[-\sqrt{(z-z_k-\Delta z)^2 + a^2} + \sqrt{(z-z_k)^2 + a^2} \right] + \\
& \frac{(z_k+\Delta z)-z}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z_k+\Delta z-z)^2 + a^2} + z_k + \Delta z - z}{\sqrt{(z_k-z)^2 + a^2} + z_k - z} \right) = \quad (99) \\
& \frac{1}{4\pi\Delta z} \left[2\sqrt{(z-z_k)^2 + a^2} - \sqrt{(z-z_k-\Delta z)^2 + a^2} - \sqrt{(z-z_k+\Delta z)^2 + a^2} \right] + \\
& \frac{2(z-z_k)}{4\pi\Delta z} \ln \left(\sqrt{(z_k-z)^2 + a^2} + z_k - z \right) - \\
& \frac{z-(z_k-\Delta z)}{4\pi\Delta z} \ln \left(\sqrt{(z_k-\Delta z-z)^2 + a^2} + z_k - \Delta z - z \right) + \\
& \frac{(z_k+\Delta z)-z}{4\pi\Delta z} \ln \left(\sqrt{(z_k+\Delta z-z)^2 + a^2} + z_k + \Delta z - z \right).
\end{aligned}$$

Voor de term $B_{mk,i}$ hebben we de volgende integraal:

$$\int_{\Omega_m} \left\{ g'_m(z) \int_{\Omega_k} \frac{1}{4\pi R} f'_k(z') dz' \right\} dz. \quad (100)$$

Merk op:

$$f'_k(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta z} & z_k - \Delta z \leq z \leq z_k \\ \frac{-1}{\Delta z} & z_k \leq z \leq z_k + \Delta z \\ 0 & |z| > z_k + \Delta z \end{cases}. \quad (101)$$

Dus de integraal wordt:

$$\int_{\Omega_m} \left\{ g'_m(z) \left[\int_{z'=z_k-\Delta z}^{z_k} \frac{1}{4\pi R} \frac{1}{\Delta z} dz' + \int_{z'=z_k}^{z_k+\Delta z} \frac{1}{4\pi R} \frac{-1}{\Delta z} dz' \right] \right\} dz. \quad (102)$$

Beide integralen zijn als (88) en geeft:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z-z_k)^2 + a^2} + z - z_k}{\sqrt{(z-z_k+\Delta z)^2 + a^2} + z - z_k + \Delta z} \right) + \\
& \frac{1}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z-z_k-\Delta z)^2 + a^2} + z - z_k - \Delta z}{\sqrt{(z-z_k)^2 + a^2} + z - z_k} \right). \quad (103)
\end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned}
B_{mk,i} = \mu T_i(\tau) \int_{\Omega_m} \left\{ g'_m(z) \left[-\frac{1}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z-z_k)^2 + a^2} + z - z_k}{\sqrt{(z-z_k+\Delta z)^2 + a^2} + z - z_k + \Delta z} \right) + \right. \right. \\
\left. \left. \frac{1}{4\pi\Delta z} \ln \left(\frac{\sqrt{(z-z_k-\Delta z)^2 + a^2} + z - z_k - \Delta z}{\sqrt{(z-z_k)^2 + a^2} + z - z_k} \right) \right] \right\} dz. \quad (104)
\end{aligned}$$

8.4 Uitwerking integralen met polynomiale tijdsbasisfuncties

Als de tijdsbasisfunctie van de plaats afhangt, moet er rekening gehouden worden gehouden met polynomiale termen van $|z - z'|$ in de teller van de integralen. We kunnen de tijdsbasisfunctie als volgt definiëren:

$$T(t) = a_1 + \frac{a_2 t}{\Delta t} + \frac{a_3 t^2}{\Delta t^2} + \frac{a_4 t^3}{\Delta t^3}. \quad (105)$$

Met tweede afgeleide:

$$T''(t) = \frac{2a_3}{\Delta t^2} + \frac{6a_4 t}{\Delta t^3}. \quad (106)$$

De binnenste integralen voor $A_{mk,i}$, $B_{mk,i}$ zien er dan respectievelijk uit als:

$$\int_{\Omega_k} \frac{T_i''(\tau) f_k(z')}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz', \int_{\Omega_k} \frac{T_i(\tau) f_k'(z')}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz', \text{ met } \tau = t_n - \frac{|z - z'|}{c}. \quad (107)$$

De eerste integraal splitsen we in tweeën, Ω_{k-} en Ω_{k+} en zeggen we dat $t_n = n\Delta t$. We bekijken eerst de integraal over het domein Ω_{k-} :

$$\int_{\Omega_{k-}} \frac{\left(2a_3 + 6a_4 \left(n - i - \frac{|z - z'|}{c\Delta t}\right)\right) (z' - (z_k - \Delta z))}{\Delta t^2 \sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz'. \quad (108)$$

De term die we krijgen door de tijdsbasisfunctie is een gedeelte een constante en een gedeelte afhankelijk van $|z - z'|$. In het geval van de constante is de integraal al eerder bepaald. Dus we hoeven alleen nog de andere integraal te bepalen. De constante term geeft:

$$\left[\frac{2a_3 + 6a_4(n - i)}{\Delta t^2} \left((\Delta z - z_k + z) \log \left(\sqrt{a^2 + (z - z')^2} - (z - z') \right) + \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \right) \right]_{\Omega_{k-}}. \quad (109)$$

Met de term $-|z - z'|$:

$$\left[\frac{6a_4}{c\Delta t^3} \operatorname{sgn}(z - z') \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + (z - z')^2} (2\Delta z - 2z_k + z + z') - a^2 \log \left(\sqrt{a^2 + (z - z')^2} - (z - z') \right) \right) \right]_{\Omega_{k-}}. \quad (110)$$

De sgn-functie is +1 als $z > z'$, -1 als $z < z'$ en 0 als $z = z'$.

Hetzelfde voor Ω_{k+} :

$$\int_{\Omega_{k+}} \frac{\left(2a_3 + 6a_4 \left(n - i - \frac{|z - z'|}{c\Delta t}\right)\right) ((z_k + \Delta z) - z')}{\Delta t^2 \sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz'. \quad (111)$$

Constante term:

$$\left[\frac{2a_3 + 6a_4(n - i)}{\Delta t^2} \left((\Delta z + z_k - z) \log \left(\sqrt{a^2 + (z - z')^2} - (z - z') \right) - \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \right) \right]_{\Omega_{k+}}. \quad (112)$$

Met $-|z - z'|$:

$$\left[\frac{6a_4}{c\Delta t^3} \operatorname{sgn}(z - z') \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + (z - z')^2} (2\Delta z + 2z_k - z - z') + a^2 \log \left(\sqrt{a^2 + (z - z')^2} - (z - z') \right) \right) \right]_{\Omega_{k+}}. \quad (113)$$

Voor $B_{mk,i}$ krijgen we in het Ω_{k-} een plus en in het Ω_{k+} een min :

$$\pm \int_{\Omega_{k\mp}} \frac{a_1 + \frac{a_2(\tau - i\Delta t)}{\Delta t} + \frac{a_3(\tau - i\Delta t)^2}{\Delta t^2} + \frac{a_4(\tau - i\Delta t)^3}{\Delta t^3}}{\Delta z \sqrt{(z - z')^2 + a^2}} dz'. \quad (114)$$

Schrijven we de termen uit, dan krijgen we vier integralen met $|z - z'|^l, l = 0, 1, 2, 3$ in de teller en R in de noemer en een constante ervoor.

Voor $|z - z'|^0$ kennen we de integraal, samen met de constanten wordt dit:

$$\pm \frac{a_1 + a_2(n - i) + a_3(n - i)^2 + a_4(n - i)^3}{\Delta z} \left[\log \left(\sqrt{a^2 + (z - z')^2} - (z - z') \right) \right]_{\Omega_{k\mp}}. \quad (115)$$

Voor de term $-|z - z'|$:

$$\pm \frac{a_2 + 2(n - i)a_3 + 3(n - i)^2 a_4}{c\Delta z} \left[\operatorname{sgn}(z - z') \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \right]_{\Omega_{k\mp}}. \quad (116)$$

Voor $|z - z'|^2$:

$$\pm \frac{a_3 + 3(n - i)a_4}{c^2\Delta z} \left[\frac{1}{2} \left(-(z - z') \sqrt{a^2 + (z - z')^2} - a^2 \log \left(\sqrt{a^2 + (z - z')^2} - (z - z') \right) \right) \right]_{\Omega_{k\mp}}. \quad (117)$$

Voor $-|z - z'|^3$:

$$\pm \frac{a_4}{c^3\Delta z} \left[-\frac{1}{3} \operatorname{sgn}(z - z') (2a^2 - (z - z')^2) \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \right]_{\Omega_{k\mp}}. \quad (118)$$

De waarden die de coëfficiënten $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ aannemen zijn afhankelijk van τ en welke tijdsbasisfunctie er wordt gebruikt.

8.5 MATLAB-code

Centrale differentie voor plaats en tijd.

```

1 %Declaratie constanten en variabelen
2     %lichtsnelheid
3     global c
4     %permeabiliteit in vacuum
5     global u
6     %lengte plaatsintervallen
7     global dz
8     %lengte tijdstap

```

```

9      global dt
10     %dikte draad
11     global a
12     %tijdsvector
13     global t
14     %plaatsvector
15     global z
16     %stroomvector
17     global I
18     %CFL getal 1/p
19     global p
20     %maximaal aantal tijdstappen terug
21     global w
22
23     %tijdsdelay inputsignaal
24     global t0
25     %golf breedte
26     global T
27     %sterkte signaal
28     global E0
29
30     p=4;
31     M=20;N=1000;
32
33     %lengte draad l, aantal stukken M.
34     l=2;
35     dz=l/M;
36     z=0:dz:l;
37     %aantal onbekenden
38     x=length(z)-2;
39
40     c=2.99792458*10^8;
41     u=4*pi*10^-7;
42     dt=dz/(p*c);
43     %straal draad
44     a=.01;
45
46     %aantal tijdstappen N. N>2
47     %N=ceil(4000*p);
48     t=0:dt:N*dt;
49
50     %inkomsttijd golf t0
51     t0=3/c;
52     T=sqrt(2/log(2));
53     E0=120*pi;
54
55     %kappa matrix maken
56     kappa=zeros(M+1,M+1);
57     for i=1:length(z)
58         for j=1:length(z)
59             kappa(i,j)=kappa0(i,j);

```

```

60     end
61 end
62 %kappa matrix [(M-1,M+1) x (M,M)]
63 k3=kappa(1:length(z),2:M);
64 %kappa matrix [(M,M) x (M,M)]
65 k2=diag(diag(kappa(2:M,2:M)));
66 %inverse kappa matrix
67 k0 = k2^-1;
68
69 %Companionmatrix Q
70 %maximaal aantal stappen terug
71 w=ceil((x-1)*p);
72 %de matrix die de matrices Z_i gaat bevatten
73 boven = [];
74 for i=1:w
75     %M,N-1
76     A1=zeros(x,x);
77     %M,N-2
78     A2=zeros(x,x);
79     %M+1,N-1
80     A3=zeros(x,x);
81     %M-1,N-1
82     A4=zeros(x,x);
83     %M,N
84     A0=zeros(x,x);
85
86     for y=1:x
87         for l=1:x
88             if y≠1 && w+1-abs(y-1)*p == w+1-i
89                 A0(y,l)=k3(y+1,l);
90             end
91             if w+1-abs(y-1)*p-1 == w+1-i
92                 A1(y,l)=-2*(1-(1/p)^2)*k3(y+1,l);
93             end
94             if w+1-abs(y-1)*p-2 == w+1-i
95                 A2(y,l)=k3(y+1,l);
96             end
97             if w+1-abs(y+1-1)*p-1 == w+1-i
98                 A3(y,l)=-(1/p)^2*k3(y+2,l);
99             end
100             if w+1-abs(y-1-1)*p-1 == w+1-i
101                 A4(y,l)=-(1/p)^2*k3(y,l);
102             end
103         end
104     end
105     Z=-k0*(A0 + A1 + A2 + A3 + A4);
106     boven=[boven Z];
107 end
108 Q=sparse([boven; [speye(x*(w-1),x*(w-1)) ...
109             sparse(x*(w-1),x,0)]]);
109 I=zeros(M+1,N);

```

```

110
111 %Berekenen stroom mbv versterkingsmatrix
112     for tt=3:N
113         B=zeros(x,1);
114         for i = 0:min(tt-2,w-1)
115             B=B+boven(1:x,i*x+1:(i+1)*x)*I(2:x+1,tt-i-1);
116         end
117         I(2:x+1,tt)=k0*(dt*c)^2*dFdt(2:x+1,tt-1)+B;
118     end

```

Lineaire basisfuncties voor ruimtelijke discretisatie en tijdsdiscretisatie met behulp van collocatie.

We hebben hier dezelfde constanten.

```

1 %Tijdsbasisfunctie Quadratic.Lagrange, Cubic.Lagrange,
2 %Quadratic.Spline, Cubic.Spline, Stapfunctie
3 type = 'Cubic.Spline';
4 %de matrix die de matrices Z_i gaat bevatten
5 boven = [];
6
7 k=1;
8 %integratiedomein opgesplitst met Guassian Quadrature
9 [xxk1,wwk1]=lgwt(100,z(k)-dz,z(k));
10 [xxk2,wwk2]=lgwt(100,z(k),z(k)+dz);
11
12 %Voor de y-richting hebben we een basisdomein en die ...
13     verschuiven we per y
14 [xx1,wwy1]=lgwt(100,z(1)-dz,z(1));
15 [xx2,wwy2]=lgwt(100,z(1),z(1)+dz);
16 %v is het aantal tijdstappen terug
17 for v=w:-1:0
18     %De Z_v matrix
19     Z=zeros(x,x);
20     %y is de loop over de verschillende punten op de lijn. ...
21     Vanwege
22     %symmetrie valt de tweede forloop weg.
23     for y=1:x
24         tau = (w-v)-abs(y-k)*p;
25         %Om te integreren hebben we 4 intervallen nodig:
26         %z(k)-dz tot z(k), z(k) tot z(k) +dz
27         %z(y)-dz tot z(y), z(y) tot z(y)+dz
28         xxy1=xx1+(y-1)*dz;
29         xxy2=xx2+(y-1)*dz;
30
31         %B_yk,v
32         B=0;
33         %de bijdragen over verschillende domeinen
34         %m staat voor min-domein, p voor plus-domein

```

```

33     bmm=zeros(length(xk1),1);
34     bmp=zeros(length(xk2),1);
35     bpm=zeros(length(xk2),1);
36     bpp=zeros(length(xk2),1);
37     for i=1:length(xk1)
38         bmm(i,1)=sum(wk1.*temp_base(w-v-abs(xk1-xy1(i)))/(
39             (c*dt),type)./sqrt((xy1(i)-xk1).^2+a^2));
40         bmp(i,1)=sum(wk1.*temp_base(w-v-abs(xk1-xy2(i)))/(
41             (c*dt),type)./sqrt((xy2(i)-xk1).^2+a^2));
42         bpm(i,1)=sum(-wk2.*temp_base(w-v-abs(xk2-xy1(i)))/(
43             (c*dt),type)./sqrt((xy1(i)-xk2).^2+a^2));
44         bpp(i,1)=sum(-wk2.*temp_base(w-v-abs(xk2-xy2(i)))/(
45             (c*dt),type)./sqrt((xy2(i)-xk2).^2+a^2));
46     end
47     Bmm = sum(wy1.*bmm);
48     Bmp = sum(-wy2.*bmp);
49     Bpm = sum(wy1.*bpm);
50     Bpp = sum(-wy2.*bpp);
51
52     B= u*(Bmm+Bmp+Bpm+Bpp)/(4*pi*dz^2);
53
54     %A_yk,v
55     A=0;
56     amm=zeros(length(xk1),1);
57     amp=zeros(length(xk2),1);
58     apm=zeros(length(xk2),1);
59     app=zeros(length(xk2),1);
60     for i=1:length(xk1)
61         amm(i,1)=sum(wk1.*(xk1-(z(k)-dz)).*
62             (xy1(i)-(z(y)-dz)).*
63             temp_base_deriv(w-v-abs(xk1-xy1(i)))/(c*dt),dt,type)./
64             sqrt((xy1(i)-xk1).^2+a^2));
65         amp(i,1)=sum(wk1.*(xk1-(z(k)-dz)).*
66             (z(y)+dz-xy2(i)).*
67             temp_base_deriv(w-v-abs(xk1-xy2(i)))/(c*dt),dt,type)./
68             sqrt((xy2(i)-xk1).^2+a^2));
69         apm(i,1)=sum(wk2.*(z(k)+dz-xk2).*
70             (xy1(i)-(z(y)-dz)).*
71             temp_base_deriv(w-v-abs(xk2-xy1(i)))/(c*dt),dt,type)./
72             sqrt((xy1(i)-xk2).^2+a^2));
73         app(i,1)=sum(wk2.*(z(k)+dz-xk2).*
74             (z(y)+dz-xy2(i)).*
75             temp_base_deriv(w-v-abs(xk2-xy2(i)))/(c*dt),dt,type)./
76             sqrt((xy2(i)-xk2).^2+a^2));
77     end
78     Amm = sum(wy1.*amm);
79     Amp = sum(wy2.*amp);
80     Apm = sum(wy1.*apm);
81     App = sum(wy2.*app);
82     A = u*(Amm+Amp+Apm+App)/(4*pi*dz^2);
83     %De Z_v matrix maken

```

```

84         if y==1
85             Z= Z+ (diag((B+(A/c^2))*ones(m-y,1),y-1)+ ...
                  diag((B+(A/c^2))*ones(m-y,1),-(y-1)))/2;
86         else
87             Z= Z+ diag((B+(A/c^2))*ones(m-y,1),y-1)+ ...
                  diag((B+(A/c^2))*ones(m-y,1),-(y-1));
88         end
89     end
90     if w==v
91         ZZ=Z^-1;
92     else
93         %S is de matrix die in de versterkingsmatrix komt.
94         S=-ZZ*Z;
95         boven=([boven S]);
96     end
97 end
98
99 Q=sparse([boven; [speye(x*(w-1),x*(w-1)) sparse(x*(w-1),x,0)]]);
100 I=zeros(M+1,N);
101 %Berekenen stroom mbv versterkingsmatrix
102 for tt=3:N
103     E=zeros(x,1);
104     for v = 0:min(tt-2,w-1)
105         E=E+boven(1:x,v*x+1:(v+1)*x)*I(1:x,tt-v-1);
106     end
107     I(1:x,tt)=ZZ*dFdt(2:x+1,tt)*dz+E;
108 end

```

Functies

```

1 function [ dF ] = dFdt( m,n )
2 %dF(z,t)/dt is de bronterm
3 % Gaussian golf met vertraging t0, sterkte E0, golf breedte T
4 global c
5 global t0
6 global T
7 global E0
8 global t
9
10 dF=zeros(length(m),1);
11 gamma = (4/T)*(c*t(n)-c*t0);
12 for i=1:length(m)
13     dF(i,1)=-(1/c).*E0*gamma.*32.*exp(-gamma.^2)./(T^2*sqrt(pi));
14 end
15 end

```

```

1 function [ kappa0 ] = kappa0( i,j )

```

```

2 global u
3 global a
4 global dz
5 global z
6 kappa0=
7 (u/(4*pi))*(log(z(i)-z(j)+dz/2+sqrt((z(i)-z(j)+dz/2)^2+a^2))-
8 log(z(i)-z(j)-dz/2+sqrt((z(i)-z(j)-dz/2)^2+a^2)));
9 end

```

```

1 function y=temp_base(tau,type)
2 TT=zeros(length(tau),1);
3 b=0;
4 if strcmp(type,'Quadratic_Lagrange')
5     for i=1:length(tau)
6         if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
7             TT(i) = tau(i)^2/2+3*tau(i)/2+1;
8
9             elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
10                TT(i) = -tau(i)^2+1;
11
12                elseif tau(i) > 1+b*eps && tau(i) ≤ 2+b*eps
13                    TT(i) = tau(i)^2/2-3*tau(i)/2+1;
14            end
15        end
16    elseif strcmp(type,'Cubic_Lagrange')
17        for i=1:length(tau)
18            if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
19                TT(i) = tau(i)^3/6+tau(i)^2+11*tau(i)/6+1;
20
21                elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
22                    TT(i) = -tau(i)^3/2-tau(i)^2+tau(i)/2+1;
23
24                    elseif tau(i) > 1+b*eps && tau(i) ≤ 2+b*eps
25                        TT(i) = tau(i)^3/2-tau(i)^2-tau(i)/2+1;
26
27                        elseif tau(i) > 2+b*eps && tau(i) ≤ 3+b*eps
28                            TT(i) = -tau(i)^3/6+tau(i)^2-11*tau(i)/6+1;
29                    end
30            end
31        end
32    elseif strcmp(type,'Quadratic_Spline')
33        for i=1:length(tau)
34            if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
35                TT(i) = tau(i)^2/2+tau(i)+1/2;
36
37                elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
38                    TT(i) = -tau(i)^2+tau(i)+1/2;
39
40                    elseif tau(i) > 1+b*eps && tau(i) ≤ 2+b*eps
41                        TT(i) = tau(i)^2/2-2*tau(i)+2;

```

```

42         end
43     end
44
45     elseif strcmp(type, 'Cubic_Spline')
46         for i=1:length(tau)
47             if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
48                 TT(i) = tau(i)^3/6+tau(i)^2/2+tau(i)/2+1/6;
49
50                 elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
51                     TT(i) = -tau(i)^3/2+tau(i)^2/2+tau(i)/2+1/6;
52
53                     elseif tau(i) > 1+b*eps && tau(i) ≤ 2+b*eps
54                         TT(i) = tau(i)^3/2 - 5*tau(i)^2/2 + ...
55                             7*tau(i)/2 - 5/6;
56
57                     elseif tau(i) > 2+b*eps && tau(i) ≤ 3+b*eps
58                         TT(i) = ...
59                             -tau(i)^3/6+3*tau(i)^2/2-9*tau(i)/2+9/2;
60                     end
61                 end
62             elseif strcmp(type, 'Stapfunctie')
63                 for i=1:length(tau)
64                     if -1+b*eps < tau(i) && tau(i) ≤ b*eps
65                         TT(i) = 1;
66                     end
67                 end
68             else
69                 'typefout'
70             end
71         end
72
73     y=TT;

```

```

1     function y=temp_base_deriv(tau,dt,type)
2     %tweede afgeleide tijdsbasisfunctie
3     d2T=zeros(length(tau),1);
4     b=0;
5     if strcmp(type, 'Quadratic_Lagrange')
6         for i = 1:length(tau)
7             if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
8                 d2T(i) = 1/(dt^2);
9
10                elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
11                    d2T(i) = -2/(dt^2);
12
13                    elseif tau(i) > 1+b*eps && tau(i) ≤ 2+b*eps
14                        d2T(i) = 1/(dt^2);
15                end
16            end
17        elseif strcmp(type, 'Cubic_Lagrange')

```

```

18     for i = 1:length(tau)
19         if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
20             d2T(i) = (tau(i)+2)/dt^2;
21
22         elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
23             d2T(i) = (-3*tau(i)-2)/dt^2;
24
25         elseif tau(i) > 1+b*eps && tau(i) ≤ 2+b*eps
26             d2T(i) = (3*tau(i)-2)/dt^2;
27
28         elseif tau(i) > 2+b*eps && tau(i) ≤ 3+b*eps
29             d2T(i) = (-tau(i)+2)/dt^2;
30         end
31     end
32
33     elseif strcmp(type,'Quadratic.Spline')
34         for i = 1:length(tau)
35             if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
36                 d2T(i) = 1/(dt^2);
37
38             elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
39                 d2T(i) = -2/(dt^2);
40
41             elseif tau(i) > 1+b*eps && tau(i) ≤ 2+b*eps
42                 d2T(i) = 1/(dt^2);
43             end
44         end
45
46     elseif strcmp(type,'Cubic.Spline')
47         for i = 1:length(tau)
48             if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
49                 d2T(i) = (tau(i)+1)/dt^2;
50
51             elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
52                 d2T(i) = (-3*tau(i)+1)/dt^2;
53
54             elseif tau(i) > 1+b*eps && tau(i) ≤ 2+b*eps
55                 d2T(i) = (3*tau(i)-5)/dt^2;
56
57             elseif tau(i) > 2+b*eps && tau(i) ≤ 3+b*eps
58                 d2T(i) = (-tau(i)+3)/dt^2;
59             end
60         end
61     elseif strcmp(type,'Stapfunctie')
62         for i=1:length(tau)
63             if tau(i) > -1+b*eps && tau(i) ≤ b*eps
64                 d2T(i) = 1/(dt^2);
65
66             elseif tau(i) > 0+b*eps && tau(i) ≤ 1+b*eps
67                 d2T(i) = -2/(dt^2);
68

```

```
69         elseif tau(i) > 1+b*eps  && tau(i) ≤ 2+b*eps
70             d2T(i) = 1/(dt^2);
71         end
72     end
73 else
74     'typefout'
75 end
76
77 y=d2T;
```

Referenties

- [1] Plaatje titelpagina. <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/duncan/INT13/field.jpg>.
- [2] Richard Williamson en Hale Trotter. *Multivariable Mathematics*, page 410. Pearson Education, Inc., 4e editie edition, 2004.
- [3] S.M. Rao en T.K. Sarkar. *Time Domain Electromagnetics*, chapter 2. Academic Press, 1e editie edition, 1999.
- [4] N.S. Bakhvalov en V.P. Motornyi. Gauss quadrature formula. Encyclopedia of Mathematics. http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Gauss_quadrature_%5Cformula&oldid=11718.
- [5] L. Lorenz. On the identity of the vibrations of light with electrical currents. *Philos. Mag.*, (34):287–301, 1867.
- [6] Elwin Van 't Wout. Integral equation methods for electromagnetic scattering. 2011.
- [7] Elwin Van 't Wout. *Stability, Accuracy, and Robustness of the Time Domain Integral Equation Method for Radar Scattering Analysis*. PhD thesis, TUDelft, 2013.