

HET EFFECT VAN EEN INSTANTAAN
AANGEBRACHTE ZIJWAARTSE
KRACHT OP EEN VRIJ VALLENDE BOL

A.J. Althuisius

Afstudeerverslag

Technische Universiteit Delft
Faculteit der Technische Natuurkunde

Delft, juni 1997

Kramers Laboratorium voor
Fysische Technologie
Prins Bernhardlaan 6
2628 BW Delft

Begeleiders:
Prof.dr.ir. H.E.A. van den Akker
Dr. R.F. Mudde

Voorwoord

Voor u ligt het verslag van het onderzoek, dat is uitgevoerd als afstudeerwerk voor de studie Technische Natuurkunde aan de Technische Universiteit Delft. Het werk is verricht aan het Kramers Laboratorium voor Fysische Technologie binnen de vakgroep Transportverschijnselen onder begeleiding van prof.dr.ir. H.E.A. van den Akker en dr. R.F. Mudde.

De afstudeercommissie voor het afstudeerexamen op 17 juni 1997 is samengesteld uit de volgende personen:

- Prof.dr.ir. H.E.A. van den Akker,
- Dr. R.F. Mudde,
- Dr.ir. G.C.J. Bart,
- Dr.ir. P.M.T. Broersen.

Vanaf deze plaats wil ik een ieder, die op welke manier dan ook heeft bijgedragen aan de tot stand koming van dit verslag, zeer hartelijk danken.

André Althuisius

Delft, 6 juni 1997

Samenvatting

De beschrijving van de omstroming van een deeltje door een fluïdum is complex, vooral wanneer instationaire situaties beschouwd worden. In dit onderzoek is de weerstandskracht op een instationair bewegend stalen bolletje met een diameter van 2 mm beschouwd. De met een éénparige snelheid verticaal vallende bol werd onderworpen aan een instantaan aangebrachte dwarskracht loodrecht op de valbeweging. Het bolletje viel in een bak met water, die op een stilstaande kar geplaatst was. De zijwaartse kracht werd opgewekt door de kar in zijwaartse richting te versnellen.

Aan het begin van het werken van de zijwaartse kracht (tot circa 0.1 s) is er een weerstandsreductie in de zijwaartse richting te verwachten. Dit als gevolg van een relaxatietijd, waarin het zog achter het deeltje, dat aanvankelijk in het verlengde van de bewegingsrichting achter de bol ligt, moet verdraaien, zodat het wederom in het verlengde van de bewegingsrichting komt te liggen.

Van de kar alsmede van de instationair bewegende kogel zijn met behulp van een CCD-camera met een frequentie van 750 Hz opnames gemaakt. Door middel van diverse beeldbewerkingsoperaties zijn uit de opnames van de kar en de bol plaats-tijd data verkregen. Via polynoomfits zijn uit deze data snelheden en versnellingen als functie van de tijd bepaald.

De weerstandskracht van het water op de bol is met diverse coëfficiënten te modelleren. Deze hangen af van de snelheid en de versnelling van de kar en de bol. Door nu de coëfficiënten in de instationaire situatie met behulp van de experimenteel bepaalde snelheden en versnellingen als functie van de tijd te bepalen en te vergelijken met de waarden in de stationaire situatie, kan een uitspraak gedaan worden over een mogelijke reductie van de weerstandskracht.

Ofschoon het exact kwantificeren van de weerstandsreductie niet mogelijk is gebleken, is tijdens dit onderzoek de reductie van de weerstandskracht zowel kwalitatief als kwantitatief gevonden. Voor de omklaptijd van het zog, $\bar{t}_{zog}$, van een stalen bol met een diameter van 2mm is experimenteel gevonden:

$$\bar{t}_{zog} = 46.3 \pm 2.3 \text{ ms.}$$

Deze tijd is een maat voor genoemde relaxatietijd, waarin een weerstandsreductie te verwachten is. De belangrijkste conclusie uit dit onderzoek luidt dan ook, dat er inderdaad sprake is van een weerstandsreductie in zijwaartse richting, indien een éénparig vallende bol instantaan onderworpen wordt aan een zijwaartse kracht.

Summary

The description of the circumfluence of a particle by a fluid is complex, especially when instationary situations are considered. In this research project the drag force on an instationary moving steel sphere with a diameter of 2 mm is considered. The steadily in vertical direction falling sphere was submitted to an instantaneous introduced transverse force perpendicular to the falling motion. The sphere fell in a box filled with water which was placed on a stationary car. The transverse force was generated by accelerating the car in transverse direction.

At the beginning of the acting of the transverse force (until about 0.1 s) a drag force reduction is to be expected. This is caused by a relaxation time in which the wake behind the particle, initially in line with the direction of motion, has to turn so that it becomes in line with the direction of motion again.

The car as well as the sphere were recorded with a CCD-camera at a frame rate of 750 Hz. By performing various image processing operations on the recordings, position-time data of the car and the sphere were obtained. From these data speeds and accelerations as function of time were determined by making use of polynomial fits.

The drag force of the water on the sphere can be modelled using various coefficients. These depend on the speed and acceleration of the car and the sphere. By determining the coefficients in the instationary situation with the help of the experimentally determined velocities and accelerations as a function of time and comparing them with values in the steady situation, one is able to pronounce upon a possible reduction of the drag force. Although it seemed impossible to exactly quantify the drag reduction, the reduction of the drag force has been found qualitatively as well as quantitatively. For the turn-over time of the wake, $\bar{t}_{zog}$ (Dutch: wake=zog), of a steel sphere with a diameter of 2 mm has been found experimentally:

$$\bar{t}_{zog} = 46.3 \pm 2.3 \text{ ms.}$$

This time is a measure for the mentioned relaxation time during which a drag reduction is to be expected. The most important conclusion of this research project reads that a drag reduction in transverse direction indeed occurs in case a steadily falling sphere instantaneously is subjected to a transverse force.

Inhoudsopgave

Voorwoord	i
Samenvatting	iii
Summary	v
Symbolenlijst	xi
Lijst van figuren	xvii
1 Inleiding	1
1.1 Gevoeligheid van een deeltje voor een zijwaartse kracht	1
1.2 De achtergrond van dit onderzoek	2
1.3 Voorgaand onderzoek	3
1.4 Doel van dit onderzoek	4
1.5 De opbouw en inhoud van dit verslag	4
2 Theoretische achtergrond	7
2.1 Bewegingsvergelijkingen	7
2.1.1 Bewegingsvergelijking van de vloeistof	7
2.1.2 Bewegingsvergelijking van het kogeltje	8
2.2 Krachten op omstroomde lichamen: algemeen	9
2.3 Stationair omstroomde bollen	13
2.3.1 Kleine Reynoldsgetallen: kruipstroming	13
2.3.2 Grote Reynoldsgetallen	16
2.3.3 Ontwikkeling van het zog achter een bol	16
2.4 Achtergrond weerstandsreductie	18
2.5 Instationaire omstroming: dimensie-analyse	19

2.6	Instationaire omstroming bij kleine Reynoldsgetallen	20
2.7	Instationaire omstroming bij grote Reynoldsgetallen	21
2.7.1	De vergelijking van Odar en Hamilton	21
2.7.2	Onderzoek door Dohmen	24
2.8	Potentiaalstroming	25
3	Experimentele opzet	29
3.1	Het aanbrengen van een constante zijwaartse kracht	29
3.1.1	Falende methoden	29
3.1.2	Versnellen omgeving	30
3.2	Modellering weerstandskracht	32
3.2.1	Gebruik van een overall weerstandscoefficiënt	32
3.2.2	Gebruik van $C_{D,s}$ en C_A	34
4	Experimentele setup	35
4.1	Meetopstelling en meetmethode	35
4.2	Gedetailleerde beschrijving van enkele onderdelen	37
4.3	Veranderingen aan de voorgaande opstelling	41
5	Beeldbewerking	47
5.1	Inleiding	47
5.2	Bewerkingen op de beelden van de CCD-camera	48
5.2.1	Contrastverhoging en inverteren van de beelden	48
5.2.2	Beeldsegmentatie	49
5.2.3	Wegfilteren van ruis	50
5.2.4	Labelen van de beelden en meten in de beelden	51
5.2.5	IJking	52
6	Resultaten	53
6.1	Externe invloeden	53
6.1.1	Het wandeffect	53
6.1.2	Invloed van de electromagneten	55
6.2	Onnauwkeurigheden ten gevolge van dataverwerking	55
6.3	De versnelling van de kar	57

6.3.1	Karverplaatsing gefit met tweedegraads polynoom	59
6.3.2	Karverplaatsing gefit met derdegraads polynoom	63
6.3.3	Karverplaatsing gefit met vierdegraads polynoom	64
6.3.4	Conclusie voor de karversnelling	65
6.4	Resultaten kogeltjes	65
6.4.1	Trajectorieën	66
6.4.2	Verticale valsnelheid bij start zijwaartse beweging	69
6.4.3	Omklaptijd zog	70
6.4.4	Stationaire snelheid in horizontale en verticale richting	71
6.4.5	Koppeling snelheden en versnellingen	71
6.5	Bepaling overall weerstandscoefficiënt als functie van Reynolds	73
6.5.1	Overall weerstandscoefficiënt met behulp van derdegraads fit	74
6.5.2	Overall weerstandscoefficiënt met behulp van vierdegraads fit	78
6.6	Bepaling overall weerstandscoefficiënt als functie van de versnellingsmodulus	84
6.7	Bepaling virtuele-massa-coëfficiënt C_A als functie van de versnellingsmodulus	89
7	Conclusies en aanbevelingen	91
7.1	Conclusies	91
7.2	Aanbevelingen	92
	Referenties	96
	Bijlagen	B1
A	Achtergrond van de Basset-kracht	B1
A.1	Warmtediffusie in een oneindig medium	B1
A.2	Situaties in een half-oneindig medium	B3
A.2.1	Warmtediffusie in een half-oneindig medium	B3
A.2.2	Impulstransport in een half-oneindig medium; de Basset-kracht	B5
B	Bespreking van enkele onnauwkeurigheden	B7
B.1	De beweging van de kar	B7
B.2	De beweging van de kogel	B9
B.3	De onnauwkeurigheid in de bepaling van de overall weerstandscoefficiënt	B11

B.4	Afschatting Basset-kracht	B14
-----	-------------------------------------	-----

Symbolenlijst

Romeins

Symbool	Betekenis	Eenheid
A	Oppervlakte	m^2
A_p	Oppervlakte van een deeltje	m^2
$A_{\perp}$	Oppervlakteprojectie van een lichaam loodrecht op een stroming	m^2
a	Warmtevereffeningscoëfficiënt	$m^2 \cdot s^{-1}$
a_k	Karversnelling	$m \cdot s^{-2}$
$a_{k,th}$	Maximale theoretische karversnelling	$m \cdot s^{-2}$
$a_{p,x}$	Kogelversnelling in x -richting	$m \cdot s^{-2}$
$a_{p,y}$	Kogelversnelling in y -richting	$m \cdot s^{-2}$
a_{start}	Beginversnelling van kogel in zijwaartse richting	$m \cdot s^{-2}$
B	Breedte vlakke plaat	m
b	Breedte	m
C_A	Virtuele-massa-coëfficiënt	-
C_D	Weerstandcoëfficiënt	-
$C_{D,s}$	Stationaire weerstandcoëfficiënt	-
C_H	Geschiedeniscoëfficiënt	-
c_p	Soortelijke warmte	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
c_0	Fitcoëfficiënt	m
c_1	Fitcoëfficiënt	$m \cdot s^{-1}$
c_1	Integratieconstante	-
c_2	Fitcoëfficiënt	$m \cdot s^{-2}$
c_2	Integratieconstante	-
c_3	Fitcoëfficiënt	$m \cdot s^{-3}$
c_4	Fitcoëfficiënt	$m \cdot s^{-4}$
c_5	Fitcoëfficiënt	$m \cdot s^{-5}$
D	Diameter van een lichaam	m
E	Constante in uitdrukking voor ψ	-
E_k	Kinetische energie	J
F	Kracht	N
F_D	Weerstandskracht	N
$F_{D,Basset}$	Bassetkracht	N

$F_{D,s}$	Stationaire weerstandskracht	N
$F_{D,x}$	Weerstandskracht in de x -richting	N
$F_{D,y}$	Weerstandskracht in de y -richting	N
$F_{D,1}$	Deel van weerstandskracht volgens Odar en Hamilton	N
$F_{D,2}$	Deel van weerstandskracht volgens Odar en Hamilton	N
F_n	Normaalkracht	N
F_{opw}	Opwaartse kracht	N
F_t	Tangentiële kracht	N
F_w	Wrijvingskracht	N
F_z	Zwaartekracht	N
f	Brandpuntsafstand	m
$f(i, j)$	Grijswaarde van pixel (i, j)	-
g	Gravitatieversnelling	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
h	Hoogte	m
i	Pixelnummer in horizontale richting	-
j	Pixelnummer in verticale richting	-
k_w	Wandcorrectiefactor	-
L	Lengte	m
l	Lengte	m
M_v	Toegevoegde massa	kg
m_b	Massa loodblokken	kg
m_k	Massa kar met bak water	kg
$\underline{n}$	Normaalvector	-
n_y	Aantal pixels in de y -richting	-
p	Impuls	$\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
p	Druk	Pa
p_0	Statische druk	Pa
R	Straal van een lichaam	m
r	Straal in bolcoördinaten	m
S	Greense functie	-
T	Temperatuur	K
T_0	Temperatuur	K
t	Tijd	s
$\bar{t}_{zog}$	Omklaptijd zog	s
V_p	Volume van een deeltje	m^3
v_f	Vloeistofsnelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v_{f,x}$	Vloeistofsnelheid in de x -richting	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v_{f,y}$	Vloeistofsnelheid in de y -richting	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
v_p	Deeltjessnelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v_{p,x}$	Deeltjessnelheid in de x -richting	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v_{p,y}$	Deeltjessnelheid in de y -richting	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
v_r	Relatieve snelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
v_{rad}	Radiële snelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
v_x	Snelheid in de x -richting	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
v_y	Snelheid in de y -richting	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

v_z	Snelheid in de z -richting	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
v_θ	Tangentiële snelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
v_∞	Stationaire snelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v_{\infty,corr}$	Stationaire snelheid gecorrigeerd voor wandeffecten	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v_{\infty,x}$	Stationaire horizontale snelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v_{\infty,y}$	Stationaire verticale snelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\bar{v}_{y,b}$	Gemeten verticale valsnelheid bij start meting	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\bar{v}_\infty$	Gemeten stationaire snelheid van kogel	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\bar{v}_{\infty,x}$	Gemeten stationaire horizontale snelheid van kogel	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\bar{v}_{\infty,y}$	Gemeten stationaire verticale snelheid van kogel	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
v_0	Snelheid	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
x	Carthesische coördinaat	m
x	Plaats	m
$\ddot{x}$	Versnelling	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
x_{corr}	Gecorrigeerde plaatscoördinaat van kogel in x -richting	m
x_{gem}	Gemeten plaatscoördinaat van kogel in x -richting	m
Δx	Variatie in x -coördinaat	m of pixel
y	Carthesische coördinaat	m
y_{corr}	Gecorrigeerde plaatscoördinaat van kogel in y -richting	m
y_{gem}	Gemeten plaatscoördinaat van kogel in y -richting	m
z	Carthesische coördinaat	m

Grieks

Symbool	Betekenis	Eenheid
α	Afkorting in weerstandskracht van Stokes	m^{-1}
α	Constante in vergelijking van Karanfilian en Kotas	-
α	Hoek van schietloden met de verticaal	°
β	Constante	-
β	Verhouding tussen deeltjes- en buisdiameter	-
δ	Drempelwaarde bij beeldsegmentatie	-
δ	Hoek tussen snelheden of versnellingen	°
ϵ	Fractie continue fase	-
η_f	Dynamische viscositeit van een fluïdum	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
θ	Hoek in bolcoördinaten	rad
λ	Warmtegeleidingscoëfficiënt	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
μ_d	Dynamische wrijvingscoëfficiënt	-
μ_s	Statische wrijvingscoëfficiënt	-
ρ	Dichtheid	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ρ_{Al}	Dichtheid aluminium	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ρ_{Fe}	Dichtheid ijzer	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ρ_f	Dichtheid fluïdum	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ρ_p	Dichtheid kogel	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

σ	Standaarddeviatie	[-]
τ	Tijd-integratievariabele in Bassetkracht	s
$\tau_{r\theta}$	Schuifspanning in bolcoördinaten	Pa
τ_{xy}	Schuifspanning	Pa
τ_w	Schuifspanning aan een wand	Pa
Φ	Snelheidspotentiaal	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
ϕ	Hoek in bolcoördinaten	rad
ϕ_q''	Warmteflux	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
ψ	Correctiefactor in weerstandskrachtmodel van Van den Akker	-
ω	Hoekfrequentie	s^{-1}

Dimensieloze kentallen

Symbol	Betekenis
Ac	Versnellingsmodulus
Re	Reynoldsgetal
M_D	Verplaatsingsmodulus
γ	Verhouding van dichtheden

Lijst van figuren

1.1	Circulatiestroming in een vat	2
2.1	Vormweerstand bij een vlakke plaat	10
2.2	Wrijvingweerstand bij een vlakke plaat	11
2.3	Stationaire weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal	12
2.4	Oriëntatie van het assenstelsel bij de omstroming van de bol van paragraaf 2.3.1.	13
2.5	Ontwikkeling grenslaag achter een bol	17
2.6	Omklappen zog bij aanbrengen van zijwaartse kracht	18
2.7	Harmonisch trillende bol	22
2.8	Afhankelijkheid van C_A en C_H van de versnellingsmodulus	23
3.1	Krachten op een bol, bewegend (a): in verticale richting en (b): in horizontale richting	31
4.1	Vooraanzicht van de kar	36
4.2	Zij-aanzicht van de kar	36
4.3	Schematische weergave van de experimentele procedure	38
4.4	Dwarsdoorsnede van de nieuwe lagering met twee wieltes onder een hoek van 90 graden op de rail	43
4.5	Zij-aanzicht van het lenzensysteem	46
5.1	Voorbeeld van beeldsegmentatie. Als drempelwaarde is de grijswaarde 128 gekozen.	50
5.2	De twee veel gebruikte connectiviteitsschema's	51
5.3	Lineaal gebruikt voor de ijking van de kogelopnames	52
6.1	Rechthoekig label bevestigd aan de kar	58
6.2	Karverplaatsing als functie van de tijd voor twee verschillende metingen. . .	59

6.3	Karverplaatsing als functie van de tijd met een parabolische fit.	60
6.4	Karverplaatsing als functie van de tijd met een kwadratische fit.	61
6.5	Verloop versnelling als functie van de tijd bij gebruikmaking van een derdegraads polynoom als fitfunctie. Weergegeven is het verloop van de versnelling bij zes verschillende metingen.	63
6.6	Verloop versnelling als functie van de tijd bij gebruikmaking van een derdegraads polynoom als fitfunctie tot $t = 0.09$ s. Weergegeven is het verloop van de versnelling bij zes verschillende metingen.	64
6.7	Karverplaatsing als functie van de tijd met het gefitte vierde graads polynoom.	65
6.8	Verloop versnelling als functie van de tijd bij gebruikmaking van een vierdegraads polynoom als fitfunctie.	66
6.9	Enkele trajectorieën van het kogeltje.	67
6.10	Horizontale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd.	67
6.11	Verticale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd, inclusief rechte referentielijn.	68
6.12	Horizontale en verticale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd in één figuur.	69
6.13	Horizontale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd met een derdegraads fit.	70
6.14	Ontbinding van de bewegingsrichting van de kogel in de horizontale en de verticale component.	72
6.15	De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, bepaald met een globale derdegraads polynoomfit.	75
6.16	De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij tot en na het buigpunt apart met een derdegraads polynoom gefit is.	76
6.17	De weerstandscoefficiënt in het buigpunt, wanneer er een derdegraads polynoom door respectievelijk 7, 21 en 64 datapunten wordt gefit.	77
6.18	De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, bepaald met een globale vierdegraads polynoomfit.	78
6.19	De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij tot en na het buigpunt apart met een vierdegraads polynoom gefit is.	79
6.20	De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij tot en na het buigpunt apart met een vierdegraads polynoom gefit is.	80
6.21	De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij tot, in en na het buigpunt apart met een vierdegraads polynoom gefit is. Aan alle randen van de datasets en in het buigpunt zijn de versnellingen vastgelegd op de theoretische waarden.	82

6.22	De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal volgens vergelijking (eq:Cdy), waarbij tot, in en na het buigpunt apart met een vierdegraads polynoom gefit is. Aan alle randen van de datasets en in het buigpunt zijn de versnellingen vastgelegd op de theoretische waarden.	83
6.23	De versnellingsmodulus als functie van de tijd, bepaald via globale derdegraads polynoomfit.	85
6.24	De versnellingsmodulus als functie van de tijd, bepaald via globale vierdegraads polynoomfit.	85
6.25	De versnellingsmodulus als functie van de tijd, bepaald via vierdegraads polynoomfits met restricties op de fitcoëfficiënten, zoals beschreven in de tekst.	86
6.26	De weerstandscoefficiënt als functie van de versnellingsmodulus, bepaald via vierdegraads polynoomfits met restricties op de fitcoëfficiënten.	87
6.27	De virtuele-massa-coëfficiënt als functie van de versnellingsmodulus bepaald uit de horizontale beweging.	88
6.28	De virtuele-massa-coëfficiënt als functie van de versnellingsmodulus bepaald uit de verticale beweging.	88
A.1	Oriëntatie cartesisch assenstelsel voor impulstransport in een half-oneindig medium	B5
B.1	Verschil tussen de karverplaatsing en de kwadratische fit uitgezet tegen de gefitte karverplaatsing.	B8
B.2	Verticale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd met een derdegraads fit.	B9
B.3	Verschil tussen de horizontale kogelverplaatsing en de globale derdegraads fit uitgezet tegen de gefitte horizontale kogelverplaatsing.	B10
B.4	Verschil tussen de verticale kogelverplaatsing en de globale derdegraads fit uitgezet tegen de gefitte verticale kogelverplaatsing.	B10
B.5	Verschil tussen de horizontale kogelverplaatsing en de vierdegraads fit met restricties uitgezet tegen de gefitte horizontale kogelverplaatsing.	B11
B.6	Verschil tussen de verticale kogelverplaatsing en de vierdegraads fit met restricties uitgezet tegen de gefitte verticale kogelverplaatsing.	B12

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Gevoeligheid van een deeltje voor een zijwaartse kracht

Hoewel de omstroming van een deeltje door een fluïdum op het eerste gezicht eenvoudig lijkt, is er toch betrekkelijk weinig over bekend. Enkele situaties, zoals bijvoorbeeld de stationaire omstroming van een bol en de liftkracht op een bol bij zogenaamde potentiaalstromingen, zijn bekend. Echter zodra men instationaire situaties gaat bekijken, wordt het probleem zeer complex. Zo is er bijvoorbeeld betrekkelijk weinig bekend over het gedrag van een éénparig bewegende bol, indien er plotseling in zijwaartse richting een kracht op wordt uitgeoefend.

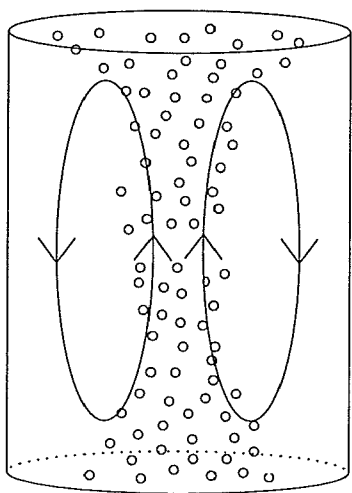
Een deeltje, dat met een (grote) constante snelheid beweegt, zal eenvoudig van zijn baan afwijken, als het onderworpen wordt aan een zijwaartse kracht. Dit heeft te maken met het zog, dat zich bij een éénparige beweging in het verlengde van de bewegingsrichting achter het deeltje bevindt. Door het aanbrengen van de zijwaartse kracht op het deeltje zal het deeltje in een andere richting gaan bewegen, hetgeen tot gevolg heeft, dat het zog moet kantelen om weer in het verlengde van de bewegingsrichting te komen. Dit kantelen, waarin het loslatingspunt (Engels: "separation point") van de grenslaag rond het deeltje verschuift, zal enige tijd duren, de zogenaamde relaxatietijd, aangezien het zog traagheid bezit. Voor Reynoldsgetallen groter dan 270 zal dit kantelproces bemoeilijkt worden door de vorming van wervels achter het deeltje.

Zo lang het zog zich niet in het verlengde van de bewegingsrichting bevindt, is er een gereduceerde vormweerstand in zijwaartse richting te verwachten. De weerstandskracht is de som van de zogenaamde vorm- en wrijvingweerstand en is de kracht, die het omringende medium op het deeltje uitoefent en de beweging van het deeltje dus tegenwerkt. Een reductie van de vormweerstand net na het aanbrengen van de zijwaartse kracht betekent dus, dat er een reductie van de initiële weerstandskracht in die richting te verwachten is. Als de weerstandskracht in zijwaartse richting gereduceerd is, zal een deeltje dus betrekkelijk eenvoudig van zijn baan afwijken indien er een zijwaartse kracht op het deeltje werkt.

De interactiekracht tussen deeltjes en een fluïdum kan op verschillende manieren met coëfficiënten gemodelleerd worden. Door nu experimenteel bepaalde waarden te vergelijken met de bekende waarden van de coëfficiënten voor de stationaire situatie, kunnen uitspraken over een eventuele reductie gedaan worden.

1.2 De achtergrond van dit onderzoek

Dit onderzoek komt voort uit het promotie-onderzoek van Van den Akker [1]. Van den Akker heeft onderzoek gedaan aan vloeistof-vloeistof druppelkolommen. Deze kolommen worden in de procesindustrie veelvuldig gebruikt om chemische reacties in uit te voeren en als warmte- en stofwisselaar. Vaak is het rendement van deze, doorgaans in tegenstroom bedreven, kolommen niet zo hoog. De oorzaak hiervan is te vinden in het feit, dat door een sterke axiale menging in de continue fase bijvoorbeeld de concentratie van een van de reactanten of de drijvende kracht voor het overdrachtsproces verlaagd wordt. Deze axiale menging wordt voornamelijk te weeg gebracht door een circulatiestroming van de continue fase over de gehele hoogte van de kolom. Deze circulatiestroming beweegt in het centrum van de kolom met de druppels mee en langs de wand in tegengestelde richting. Zie de onderstaande figuur, waar bijvoorbeeld luchtbelletjes opstijgen in een visceuze vloeistof.



Figuur 1.1: Circulatiestroming in een vat

Een doel van het onderzoek was het vinden van een methode om deze circulaties te onderdrukken.

In zijn werk beschrijft Van den Akker een eenvoudige methode met het gewenste resultaat. De methode berust op de stabiliserende werking van een dichtheidsgradiënt, waarbij de dichtheid in opwaartse richting afneemt. Een dergelijke negatieve dichtheidsgradiënt kan in het geval van een tegenstroomkolom vloeistof-vloeistof druppelkolom verkregen worden met behulp van een positief temperatuurverschil tussen de fase, die aan de top van de kolom wordt toegevoerd en de fase, die onderaan wordt binnengevoerd. Dit resultaat is als volgt te beredeneren. Het optreden van een circulatiestroming in een isotherme druppelkolom vertoont een sterke gelijkenis met het verschijnsel van convectieve stromingen in fluïda onder invloed van een positieve dichtheidsgradiënt. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een vloeistoflaag of -kolom, die aan de

onderkant verwarmd wordt. Dankzij deze analogie valt eenvoudig in te zien, dat door superpositie van een voldoende grote negatieve dichtheidsgradiënt deze circulatiestroming weer onderdrukt kan worden. Dit resultaat is experimenteel bevestigd; uit metingen aan diverse proefopstellingen is het gunstige effect van een positief temperatuurverschil over de kolom gebleken: de axiale menging nam af en het rendement van de kolom werd hoger.

Om inzicht in het probleem te krijgen voerde Van den Akker een lineaire stabiliteitsanalyse uit aan een toestand van uniforme stroming van beide fasen. Uniforme stroming wordt in deze context gedefinieerd als de toestand, waarbij de deeltjes van de disperse fase gelijkmatig over de dwarsdoorsnede van de kolom verdeeld zijn en beide fasen zich voortbewegen met een snelheid, die constant is over deze dwarsdoorsnede. Bij een lineaire stabiliteitsanalyse worden de snelheid, de fractie disperse fase, de druk en het temperatuurveld van het beschouwde twee-fasensysteem weergegeven door de som van een stationaire waarde en een infinitesimale tijdsafhankelijke verstoring. In feite is een dergelijke kleine verstoring de eerste term van een Taylor-ontwikkeling rond de stationaire waarde van de

velden. De linearisatie heeft verder tot gevolg, dat in de bewegingsvergelijkingen producten van verstoringen en hun afgeleiden verwaarloosd mogen worden. De gelineariseerde vergelijkingen worden nu verkregen door de bewegingsvergelijkingen voor het stationaire veld af te trekken van de corresponderende vergelijking voor de verstoringen. De aldus verkregen gelineariseerde vergelijkingen worden dimensieloos gemaakt, waaruit vervolgens de ontwikkeling van de verstoringen wordt bepaald. Van den Akker baseerde zijn stabiliteitsanalyse op de massa- en impulsbalansen van beide fasen en de thermische energiebalans van de dispersie. Voor de interactiekracht tussen de beide fasen nam Van den Akker twee termen mee, de weerstandsterm ("drag force") en de virtuele-massa term ("added mass"). Omdat er in de beschikbare literatuur over weerstandscoefficienten van instationair bewegende deeltjes in het algemeen een gereduceerde waarde werd vermeld, heeft hij een correctiefactor ψ ingevoerd in de uitdrukking voor de radiële component van de weerstandskracht. Om de resultaten verkregen met de stabiliteitsanalyse in overeenstemming te krijgen met de experimentele resultaten moest de correctiefactor ψ een waarde veel kleiner dan één krijgen. Bovendien bleek deze factor voor verschillende experimentele condities een andere waarde te hebben.

1.3 Voorgaand onderzoek

Om de juistheid van het resultaat van de stabiliteitsanalyse te verifiëren, heeft Leijnse [2] de stabiliteitsanalyse opnieuw uitgevoerd. Ook hij voerde in het mathematische model van de gedispergeerde twee-fase stroming een correctiefactor ψ in en vond ook, dat voor overeenstemming tussen de stabiliteitsanalyse en de metingen ψ veel kleiner dan één moest zijn. Tevens bleek ook bij hem de correctiefactor geen constante waarde te bezitten, maar te verschillen voor verschillende systemen.

Om meer inzicht te krijgen in de fysische achtergrond van deze correctiefactor onderzocht Leijnse de invloed van diverse parameters. Dit resulteerde in de volgende empirische relatie voor ψ :

$$\psi = E \frac{1}{mRe^n} \frac{2L}{D} (1 - \epsilon). \quad (1.1)$$

Hierin is: E = constante [-],
 m, n = parameters [-],
 Re = Reynoldsgetal betrokken op de slipsnelheid tussen
 continue en gedispergeerde fase [-],
 L = hoogte van de druppelkolom [m],
 D = diameter van de druppelkolom [m],
 $1 - \epsilon$ = fractie disperse fase [-].

Uit deze vergelijking blijkt, dat de correctiefactor ψ afhangt van de geometrie van de kolom, het Reynoldsgetal en de fractie disperse fase, maar niet van het over de kolom aan te leggen temperatuurverschil. Leijnse heeft gekeken wat de fysische betekenis van de correctiefactor zou kunnen zijn, maar hoewel hij verschillende hypothesen heeft getest, heeft hij geen oplossing gevonden voor deze vraag. Zijn aanbeveling was om nauwkeurig

naar de stroming rond de deeltjes van de disperse fase te kijken.

Inhakend op deze aanbeveling heeft Talman [3] onderzoek gedaan naar instationaire weerstandskrachten. Zij heeft gekeken hoe de weerstandscoefficiënt van een in water met een éénparige snelheid verticaal vallend bolletje verandert, indien er plotseling een zijwaartse kracht op wordt uitgeoefend. De zijwaartse kracht heeft zij verkregen door de bak water, waarin de kogel viel, op een kar te plaatsen, welke vervolgens in zijwaartse richting versneld werd. Met behulp van een digitale camera werden opnames van de instationair bewegende kogel gemaakt, waaruit zij vervolgens via fitprocedures data voor de berekening van de weerstandskracht verkreeg. De weerstandskracht heeft zij op diverse wijzen gemodelleerd, maar in plaats van een afname van de weerstandskracht in zijwaartse richting constateerde zij eerder een toename. Zij plaatste echter wel de kanttekening bij haar bevindingen, dat ze ten gevolge van onnauwkeurigheden in de meet- en verwerkingsmethode slechts kwalitatieve uitspraken kon doen over haar metingen.

Een zeer grote foutenbron bij Talman was de gebruikte kar. De versnelling van de kar bleek niet reproducebaar te zijn. Daarnaast varieerde de versnelling gedurende één experiment aanzienlijk, waardoor de zijwaartse kracht op de kogel niet constant was, hetgeen Talman in haar berekeningen echter wel veronderstelde. Daarnaast bevond de camera zich los van de kar, hetgeen tot gevolg had, dat zij, om de beweging van de kogel ten opzichte van de vloeistof te verkrijgen, een transformatie diende toe te passen, waarvoor weer de beweging van de kar zeer nauwkeurig bekend diende te zijn. Haar belangrijkste aanbeveling was dan ook om de beweging van de kar te verbeteren en de camera, indien mogelijk, aan de kar te bevestigen.

1.4 Doel van dit onderzoek

Het doel van dit onderzoek was om, evenals bij Talman [3], de weerstandskracht op een bolvormig deeltje te bekijken, indien er een zijwaartse kracht op werkt. In het bijzonder diende gekeken te worden of er een weerstandsreductie in zijwaartse richting optreedt, indien een stationair vallende bol aan een zijwaartse kracht wordt onderworpen. Hierbij was het de opdracht om in te haken op de aanbevelingen van Talman en te zorgen voor een beter gedefinieerde zijwaartse kracht op de kogel. Daarnaast dienden zoveel mogelijk bij haar optredende externe foutenbronnen geëlimineerd te worden.

Om dit te bereiken is de kar, die voor de versnelling van de kogel zorgt, in zijn geheel veranderd en is de camera aan de kar bevestigd, om metingen te verrichten vanuit het oogpunt van een meebewegende waarnemer.

1.5 De opbouw en inhoud van dit verslag

Dit verslag is als volgt opgebouwd. In het volgende hoofdstuk wordt de theoretische achtergrond betreffende weerstandscoefficienten besproken. In hoofdstuk 3 zal vervolgens de experimentele opzet nader toegelicht worden, waarna in hoofdstuk 4 de meetopstelling besproken zal worden. Tevens zal in hoofdstuk 4 toegelicht worden hoe de meetopstelling tot stand is gekomen. Hoofdstuk 5 bevat een bespreking over de toegepaste beeldverwerking,

waarna in hoofdstuk 6 de meetresultaten gepresenteerd worden. Hoofdstuk 7 bevat tot slot de conclusies en aanbevelingen, die uit dit onderzoek naar voren zijn gekomen. Er zijn nog twee appendices toegevoegd, waarin respectievelijk een afleiding van de zogenaamde Bassetkracht en een bespreking van enkele onnauwkeurigheden zijn opgenomen.

Hoofdstuk 2

Theoretische achtergrond

In het nu volgende hoofdstuk zal de theorie aangaande weerstandscoefficienten en weerstandskrachten besproken worden. Allereerst zullen aannames en basisprincipes de revue passeren. Vervolgens zal het probleem van een instationaire beweging van een bolvormig deeltje besproken worden voor kleine en grote Reynoldsgetallen. Tot slot volgt in de laatste paragraaf een korte bespreking over potentiaalstromingen.

2.1 Bewegingsvergelijkingen

Om het probleem aangaande weerstandskrachten op een bolvormig deeltje in een vloeistof goed te kunnen beschrijven, is het handig een aantal eenvoudig te rechtvaardigen aannames betreffende het deeltje en de vloeistof te doen. Aan de hand van deze aannames kunnen dan de bewegingsvergelijkingen voor de vloeistof en het kogeltje afgeleid worden.

2.1.1 Bewegingsvergelijking van de vloeistof

Een belangrijke aanname voor de vloeistof is, dat de vloeistof Newtons is. De reden hiervan is, dat veel van de in de volgende paragrafen af te leiden principes geldig zijn voor Newtonse vloeistoffen. Aangezien in dit onderzoek gewerkt wordt met een in water vallend kogeltje en water zicht gedraagt als een Newtonse vloeistof, is de aanname betreffende het Newtons zijn van de vloeistof geoorloofd. Newtonse vloeistoffen voldoen aan de wet van Newton, die als volgt luidt:

$$\tau_{yx} = -\eta_f \frac{\partial v_{f,x}}{\partial y}. \quad (2.1)$$

Hierin is: τ_{yx} = schuifspanning [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$],
 $v_{f,x}$ = vloeistofsnelheid in de x -richting [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$],
 η_f = dynamische vloeistofviscositeit [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$].

Volgens deze vergelijking is de schuifspanning evenredig met de negatieve gradiënt van de locale vloeistofsnelheid. De evenredigheidsconstante wordt de dynamische viscositeit

genoemd, welke sterk afhankelijk is van de temperatuur T en ruwweg schaalt met $\sqrt{T}$. Verder wordt aangenomen, dat de vloeistof homogeen en incompressibel is. Een gevolg van deze aanname is, dat de dichtheid van de vloeistof constant is. De vergelijkingen, die de vloeistofstroming beschrijven, zijn de continuïteits- en de Navier-Stokesvergelijking en deze vereenvoudigen hier tot:

$$\nabla \cdot \underline{v}_f = 0 \quad (2.2)$$

en

$$\frac{\partial \underline{v}_f}{\partial t} + (\underline{v}_f \cdot \nabla) \underline{v}_f = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \frac{\eta_f}{\rho_f} \nabla^2 \underline{v}_f + \underline{g}, \quad (2.3)$$

waarin: $\underline{v}_f$ = vloeistofsnelheid [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$],
 ρ_f = vloeistofdichtheid [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$],
 p = druk [Pa],
 $\underline{g}$ = gravitatieversnelling [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$].

2.1.2 Bewegingsvergelijking van het kogeltje

In dit project wordt aangenomen, dat de dichtheid en de geometrie van de deeltjes tijdens bewegingen constant blijven. Deze aanname is geoorloofd, aangezien het starre deeltjes betreft. Verder zal er aangenomen worden, dat de deeltjes hydrodynamisch gezien glad zijn.

De bewegingsvergelijking voor het kogeltje kan nu afgeleid worden door een impulsbalans op te stellen volgens de tweede wet van Newton. De balans luidt:

$$\frac{\partial(V_p \rho_p \underline{v}_p)}{\partial t} = - \iint_{A_p} p \underline{n} dA_p - \iint_{A_p} \tau \cdot \underline{n} dA_p + \iiint_{V_p} \rho_p \underline{g} dV_p. \quad (2.4)$$

Hierin is: V_p = volume van het kogeltje [m^3],
 A_p = oppervlak van het kogeltje [m^2],
 $\underline{v}_p$ = snelheid van het kogeltje [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$],
 ρ_p = dichtheid van het kogeltje [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$],
 $\underline{n}$ = eenheidsvector loodrecht op het oppervlak van het kogeltje [-].

Aan de linkerzijde van het gelijkteken staat de tijdsafgeleide van de impuls. Aan de rechterkant van het gelijkteken staan alle krachten, die op het kogeltje werken.

Welke bijdragen aan de totale kracht kunnen onderscheiden worden? De eerste term aan de rechterzijde is de kracht, die loodrecht op het boloppervlak werkt. De kracht per oppervlakte-eenheid loodrecht op het kogeltje is de druk p . De tweede term aan de rechterzijde is de kracht, die in tangentiële richting op het kogeltje werkt. De kracht per oppervlakte-eenheid rakend aan het boloppervlak is de schuifspanning τ . De derde term is de zwaartekracht op het kogeltje. Er wordt hier aangenomen, dat de kogel niet roteert. De krachten ten gevolge van de druk en de schuifspanning vormen samen de weerstandskracht F_D . De kracht veroorzaakt door de druk wordt vormweerstand genoemd en de

kracht ten gevolge van de schuifspanning wrijvingsweerstand.
Vergelijking (2.4) kan nu vereenvoudigd worden tot:

$$V_p \rho_p \frac{dv_p}{dt} = V_p (\rho_p - \rho_f) \underline{g} + \underline{F}_D, \quad (2.5)$$

waarin $\underline{F}_D$ de weerstandskracht is (D van het Engelse “drag”).

Vergelijking (2.5) is de bewegingsvergelijking van het kogeltje, waarvan in dit onderzoek veelvuldig gebruik gemaakt zal worden. In de nu volgende paragrafen zal dieper op de weerstandskracht ingegaan worden en zal hiervoor ook een mathematische uitdrukking afgeleid worden.

2.2 Krachten op omstroomde lichamen: algemeen

In deze paragraaf zal heel algemeen uitgelegd worden hoe de weerstandskracht op een willekeurig omstroomd lichaam gemodelleerd wordt. In de volgende paragrafen zal vervolgens gekeken gaan worden naar de weerstandskracht op omstroomde bollen in het bijzonder.

Een willekeurig object, dat door een fluïdum beweegt, zal hiervan een kracht ondervinden. Dit is ook het geval als het object stilstaat en het fluïdum er omheen stroomt. Het gaat hierbij namelijk om de relatieve beweging van het object ten opzichte van het fluïdum. In deze paragraaf worden alleen stationaire situaties beschouwd. Instationaire situaties zullen vanaf paragraaf 2.5 aan bod komen.

Om inzicht te krijgen in de grootheden, die de weerstandskracht F_D bepalen en hoe F_D van deze grootheden afhangt, kan men een dimensie-analyse uitvoeren [4]. De vraag is dus, van welke grootheden de weerstandskracht zal afhangen?

Allereerst zal de weerstandskracht afhangen van de grootte van de zogenaamde relatieve snelheid v_r . Dit is het verschil tussen de snelheid van het lichaam en de snelheid van de vloeistof op grote afstand van het lichaam, ofwel (geschreven in vectornotatie):

$$\underline{v}_r = \underline{v}_f - \underline{v}_p, \quad (2.6)$$

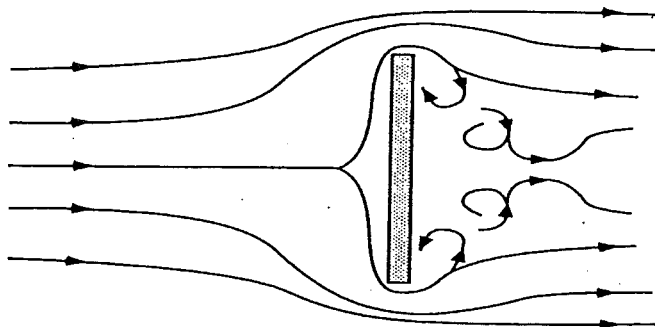
met: $\underline{v}_f$ = vloeistofsnelheid [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$],
 $\underline{v}_p$ = snelheid van het lichaam [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$].

Voorts spelen uiteraard de viscositeit η_f en de dichtheid ρ_f van het fluïdum een rol. Tenslotte is ook de afmeting van het lichaam bepalend voor de kracht. Deze invloed wordt meegenomen door het invoeren van een karakteristieke “diameter” D . In formulevorm kan dit nu geschreven worden als

$$F_D = F(v_r, \eta_f, \rho_f, D). \quad (2.7)$$

De uitkomst van de dimensie-analyse is:

$$\frac{F_D}{\rho_f v_r^2 D^2} = f(Re). \quad (2.8)$$



Figuur 2.1: Vormweerstand bij een vlakke plaat

Hierin is Re het Reynoldsgetal, gedefinieerd als

$$Re \equiv \frac{\rho_f v_r D}{\eta_f}. \quad (2.9)$$

Uit vergelijking (2.8) blijkt, dat voor de weerstandskracht geschreven kan worden:

$$F_D = f(Re) \cdot D^2 \cdot \rho_f v_r^2. \quad (2.10)$$

De functie van het Reynoldsgetal in het rechterlid van deze vergelijking brengt de details van het stromingsveld rondom het lichaam in rekening. De tweede factor in het rechterlid heeft de dimensie van een oppervlak. Dit is niet zo verwonderlijk, daar de weerstandskracht op het oppervlak van het lichaam aangrijpt. De laatste term staat voor de traagheid van de stroming. Deze term wordt meestal geschreven als $\frac{1}{2}\rho_f v_r^2$, hetgeen equivalent is aan de zogenaamde stuwdruk. De gedachte hierbij is, dat er over het lichaam een drukval staat, die te schatten is met behulp van de stuwdruk.

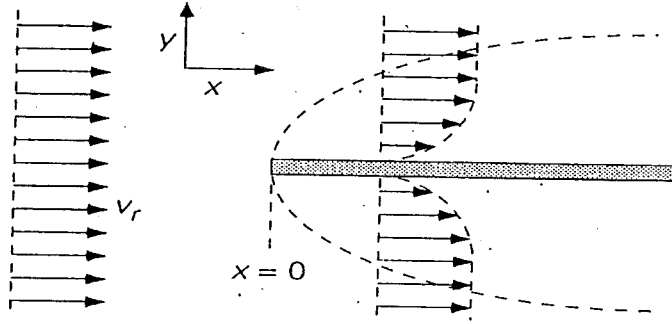
In het algemeen zijn er twee mechanismen, die samen de totale weerstandskracht veroorzaken, namelijk

- de vormweerstand,
- de wrijvingsweerstand.

De vormweerstand is te begrijpen aan de hand van een vlakke plaat met een oppervlakte A , die loodrecht op een vloeistofstroming staat. Zie figuur 2.1 [4]. De vloeistof, die de plaat nadert met een snelheid v_r , zal worden afgeremd en voor de plaat bouwt zich een druk op van de orde van grootte van de stuwdruk ($\frac{1}{2}\rho_f v_r^2$). Aan de rand van de plaat is deze omgezet in extra kinetische energie, die echter door dissipatie en wervelvorming in het “dode water” achter de plaat bij lange na niet weer in druk wordt omgezet. Er is dus een drukval over de plaat. Als gevolg hiervan wordt de kracht op de plaat, wat orde van grootte betreft, gegeven door:

$$F \propto A \cdot \Delta p \approx A \cdot \frac{1}{2}\rho_f v_r^2. \quad (2.11)$$

De wrijvingsweerstand treedt op als de stroming parallel aan het oppervlak van het lichaam verloopt. Ook hiervan is de vlakke plaat een goed voorbeeld, maar nu gaat het om een



Figuur 2.2: Wrijvingweerstand bij een vlakke plaat

plaat parallel aan de stroming. Wederom wordt de plaat aangestroomd met een snelheid v_r . Zie figuur 2.2 [4]. Juist op de plaat is de snelheid van de vloeistof gelijk aan die van de plaat, dus nul. Vanaf het aanstroompunt ($x = 0$) bouwt zich een grenslaag op en in de grenslaag groeit de snelheid in de y -richting van de waarde nul tot de waarde v_r , de waarde van de ongestoorde relatieve snelheid. Dit snelheidsprofiel, dat zowel x - als y -afhankelijk is, kan met behulp van de bewegingsvergelijkingen en grenslaagtheorie berekend worden. Hieruit kan vervolgens de schuifspanning aan de plaat als functie van x afgeleid worden. Het resultaat luidt [4]:

$$\tau_{yx}|_{y=0} \equiv \tau_w = 0,664 \left(\frac{\rho_f v_r x}{\eta_f} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \rho_f v_r^2, \quad \text{mits} \quad \frac{\rho_f v_r x}{\eta_f} < 3 \cdot 10^5. \quad (2.12)$$

De totale kracht op beide zijden van een plaat met lengte L en breedte B is dan:

$$F_{\text{wrijving}} = 2B \int_0^L \tau_w dx = 2.66 \left(\frac{\rho_f v_r L}{\eta_f} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot BL \cdot \frac{1}{2} \rho_f v_r^2. \quad (2.13)$$

De dimensieloze combinatie $\frac{\rho_f v_r L}{\eta_f}$ is een Reynoldsgetal, betrokken op de relatieve snelheid v_r en de lengte-afmeting in de stromingsrichting.

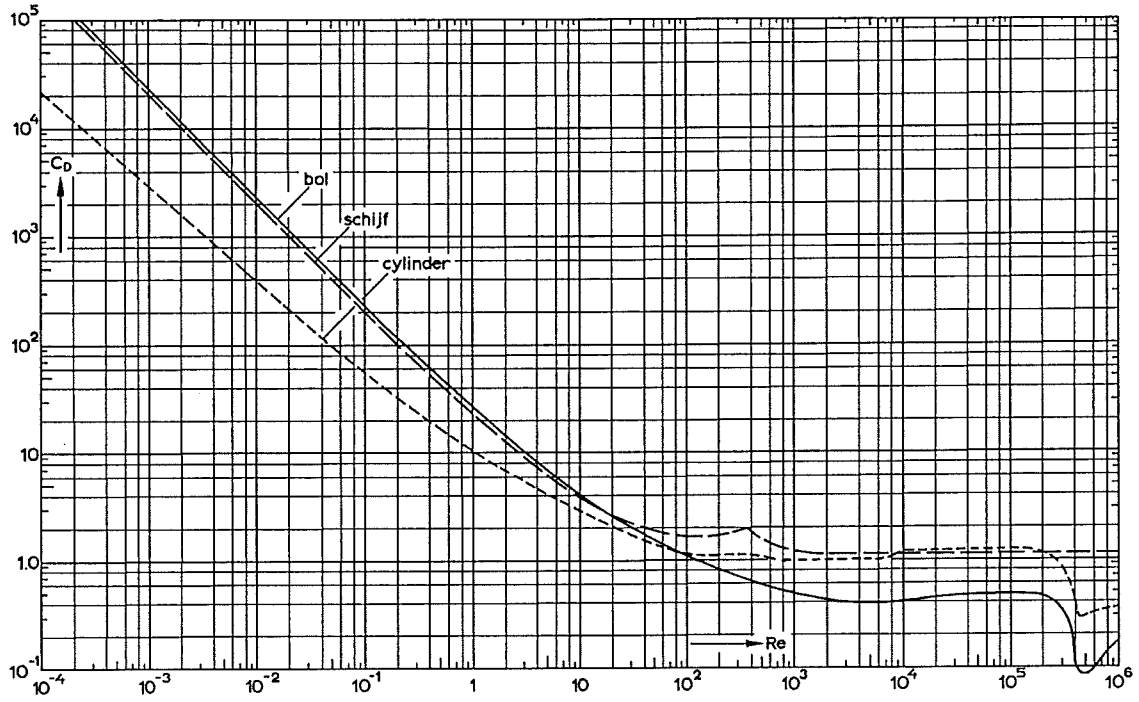
Op grond van bovenstaande overwegingen modelleert men de weerstandskracht op een lichaam als:

$$F_D = C_D(Re) \cdot A_{\perp} \cdot \frac{1}{2} \rho_f v_r^2, \quad (2.14)$$

waarin $A_{\perp}$ de projectie van het oppervlak van het lichaam loodrecht op de stroming is. De parallel aangestroomde plaat valt hier uiteraard niet onder, immers daarvoor geldt $A_{\perp} \rightarrow 0$.

De coëfficiënt C_D wordt de weerstandscoefficiënt genoemd en is, zoals ook uit de dimensie-analyse volgde, een functie van Reynolds. Hierdoor is C_D dus afhankelijk van de vloeistofeigenschappen, de relatieve snelheid en een karakteristieke afmeting van het lichaam. De vorm van de functie $C_D(Re)$ is voor diverse lichamen verschillend. In figuur 2.3 is C_D voor enkele lichamen weergegeven [5].

Slechts in enkele gevallen is de functie $C_D(Re)$ analytisch te bepalen. Dit is bijvoorbeeld het geval voor de omstroming van een bol, indien geldt $Re < 0.2$ en bovendien gesteld wordt, dat het fluïdum incompressibel is. Deze analytische oplossing staat bekend als de



Figuur 2.3: Stationaire weerstandscoëfficiënt als functie van het Reynoldsgetal

wet van Stokes en wordt in de volgende paragraaf afgeleid. Indien geen analytische oplossing voor handen is, dient $C_D(Re)$ op empirische wijze bepaald te worden. Meer hierover komt echter in volgende paragrafen aan de orde.

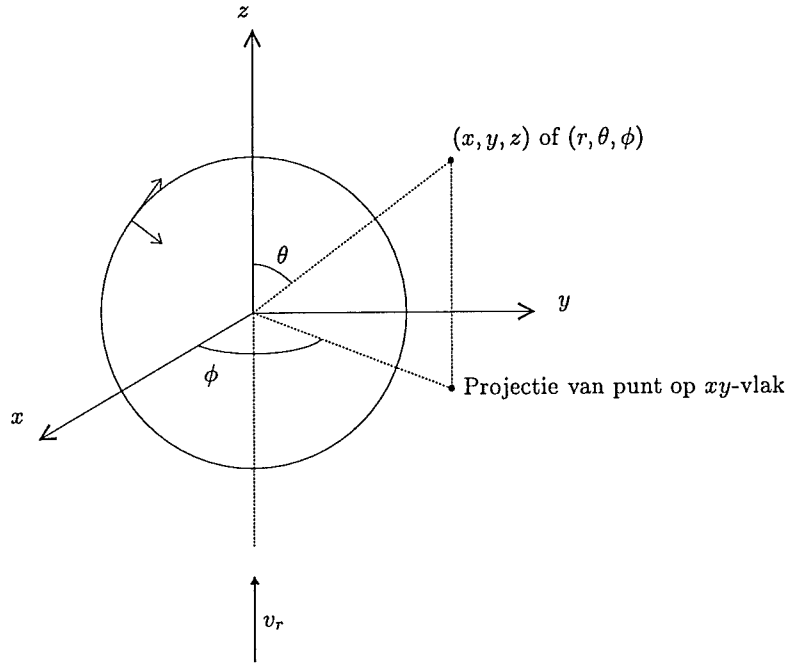
Tot slot nog een opmerking over de richting en het teken van de weerstandskracht. Gedefinieerd volgens formule (2.14) zal de weerstandskracht altijd positief zijn. De weerstandskracht kan echter positief of negatief zijn, afhankelijk of de vloeistofsnelheid groter of kleiner is dan de snelheid van het lichaam, ofwel afhankelijk van het teken van de relatieve snelheid v_r . In formule (2.14) zit dus geen verdere informatie over de richting van de kracht. Deze informatie wordt vaak opgenomen door voor de term v_r^2 te schrijven $|v_r|v_r$. Op deze manier wordt de kracht wel verkregen met het juiste teken en is dus bekend in welke richting de kracht werkt. De aldus verkregen formule luidt:

$$F_D = C_D(Re) \cdot A_{\perp} \cdot \frac{1}{2} \rho_f |v_r| v_r. \quad (2.15)$$

Of in vectornotatie:

$$\underline{F}_D = C_D(Re) \cdot A_{\perp} \cdot \frac{1}{2} \rho_f |\underline{v}_r| \underline{v}_r. \quad (2.16)$$

Uit deze laatste formule blijkt, dat de weerstandskracht op een omstroomd lichaam in een richting parallel aan de relatieve snelheid werkt.



Figuur 2.4: Oriëntatie van het assenstelsel bij de omstroming van de bol van paragraaf 2.3.1.

2.3 Stationair omstroomde bollen

De resultaten uit de vorige paragraaf zijn nu vrij eenvoudig om te zetten naar het geval van een omstroomde bol. Zie eventueel Van den Akker en Mudde [4] of Bird e.a. [6]. Er dient echter een tweedeling gemaakt te worden voor kleine en grote Reynoldsgetallen. Voor lage waarden van het Reynoldsgetal is de bewegingsvergelijking namelijk analytisch oplosbaar, terwijl voor grote Reynolds de empirie uitkomst dient te bieden. Als laatste onderdeel van deze paragraaf zal de ontwikkeling van het zog achter een bol besproken worden.

2.3.1 Kleine Reynoldsgetallen: kruipstroming

De aanwezigheid van de niet-lineaire convectieve term $(\underline{v}_f \cdot \nabla) \underline{v}_f$ in de Navier-Stokesvergelijking (2.3) maakt het erg ingewikkeld om deze vergelijking analytisch op te lossen. Er bestaan echter situaties, waarbij de niet-lineaire term zeer klein is en bij benadering verwaarloosd kan worden. Als daarnaast de stroming ook nog stationair of bij benadering stationair is, zodat $|\partial \underline{v}_f / \partial t|$ niet groter is dan $(\underline{v}_f \cdot \nabla) \underline{v}_f$, is de grootte van de traagheidskracht klein ten opzichte van de druk of wrijvingskracht. In de Navier-Stokesvergelijking vallen beide termen aan de linkerkant van het gelijkteken dan weg en zo wordt een vergelijking verkregen, die wel analytisch oplosbaar is.

Beschouw nu de zeer langzame omstroming van een bol door een incompressibele vloeistof bij $Re < 0.2$. De bol heeft een straal R en een diameter D . De vloeistof heeft een viscositeit η_f en een dichtheid ρ_f en nadert de bol verticaal langs de negatieve z -as met een uniforme snelheid v_r . Zie figuur 2.4. Voor deze specifieke situatie heeft Stokes [7] in 1851

op analytische wijze een uitdrukking voor de weerstandskracht en weerstandscoefficiënt bepaald. Hiertoe heeft hij in de Navier-Stokesvergelijkingen (2.3) de traagheidskracht verwaarloosd ten opzichte van de wrijvingskracht, zoals hierboven geschetst. Hij heeft dit weten te rechtvaardigen door de traagheids- en visceuze krachten af te schatten. De traagheidskrachten schatte hij van de orde $\rho_f v_r^2/D$ en de wrijvingskrachten van de orde $\eta_f v_r/D^2$. De verhouding van deze twee afgeschatte krachten is $\rho_f v_r D/\eta_f$ en dit is gelijk aan het welbekende Reynoldsgetal. Kortom, indien $Re \ll 1$ zijn de traagheidskrachten te verwaarlozen ten opzichte van de wrijvingskrachten. $Re < 0.2$ blijkt een goede grenswaarde te zijn.

Door de convectieve term te verwaarlozen, reduceert de Navier-Stokesvergelijking tot een vorm die eenvoudig op te lossen is. Op deze wijze wordt voor stromingen bij lage Reynoldsgetallen in bolcoördinaten respectievelijk voor de schuifspanning, de drukverdeling en de radiale en tangentiële snelheidscomponenten gevonden [6]:

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\eta_f v_r}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \sin \theta, \quad (2.17)$$

$$p = p_0 - \rho_f g z - \frac{3}{2} \frac{\eta_f v_r}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta, \quad (2.18)$$

$$v_{rad} = v_r \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta, \quad (2.19)$$

$$v_\theta = -v_r \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta. \quad (2.20)$$

In vergelijking (2.18) is p_0 de druk op grote afstand van de bol, brengt $-\rho_f g z$ het hydrostatische effect in rekening en komt de laatste term aan de rechterkant van het gelijkteken voort uit de vloeistofstroming rond de bol. Deze vergelijkingen zijn alleen geldig voor zogenaamde *kruipstromingen*. Dit zijn stromingen, waarbij het Reynoldsgetal waarden kleiner dan 0.2 heeft. Bij dergelijk lage Reynoldsgetallen is de stroming om de bol symmetrisch en ontstaan er nog geen wervels achter de bol.

Nu zullen de krachten, die de vloeistof op de bol uitoefent, uitgerekend worden. Deze worden verkregen door de tangentiële en de normaalkracht over het boloppervlak te integreren.

De tangentiële kracht

Op elk punt van de bol werkt een schuifspanning in tangentiële richting. Deze spanning, $-\tau_{r\theta}$, is de kracht werkend in de θ -richting op een eenheidsoppervlak van de bol. Uit vergelijking (2.17) volgt voor de grootte van deze schuifspanning op het boloppervlak:

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\eta_f v_r}{R} \sin \theta. \quad (2.21)$$

De z -component van deze kracht per oppervlakte-eenheid volgt na vermenigvuldiging met $-\sin\theta$. De uitdrukking, die dan wordt verkregen, dient nu over het boloppervlak geïntegreerd te worden. Dit levert:

$$\begin{aligned} F_t &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 4\pi\eta_f R v_r. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Deze kracht F_t is gelijk aan de wrijvingsweerstand op een omstroomde bol bij lage Reynolds.

De normaalkracht

Op elk punt van de bol werkt ook een kracht per oppervlakte-eenheid loodrecht op het boloppervlak, namelijk de druk p . De z -component van deze kracht is $-p \cos\theta$. Uit vergelijking (2.18) volgt voor de grootte van de druk op het boloppervlak:

$$p|_{r=R} = p_0 - \rho_f g R \cos\theta - \frac{3}{2} \frac{\eta_f v_r}{R} \cos\theta. \quad (2.23)$$

Integratie van de z -component van de druk over het boloppervlak levert:

$$\begin{aligned} F_n &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-p|_{r=R} \cos\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f g + 2\pi\eta_f R v_r. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De eerste term aan de rechterkant van het gelijkteken geeft de opwaartse kracht van de vloeistof op de bol weer. De tweede term staat voor de vormweerstand.

De totale kracht F van de vloeistof op de bol is de som van de tangentiële en de normaalkracht en luidt:

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f g + 6\pi\eta_f R v_r. \quad (2.25)$$

Voor de omstroming van een bol bij kleine Reynoldsgetallen luidt de uitdrukking voor de weerstandskracht dus:

$$F_D = 6\pi\eta_f R v_r. \quad (2.26)$$

Deze uitdrukking staat bekend als de *wet van Stokes*.

De wet van Stokes kan ook in termen van een weerstandscoefficiënt geschreven worden als in formule (2.14). Combinatie van vergelijking (2.14) en (2.26) levert:

$$C_D = \frac{24\eta_f}{\rho_f v_r D} = \frac{24}{Re}, \quad \text{voor } Re < 0.2. \quad (2.27)$$

Uit deze vergelijking blijkt duidelijk, dat, zoals eerder beweerd, C_D een functie is van het dimensieloze Reynoldsgetal.

In de loop der jaren zijn er diverse aangepaste versies van vergelijking (2.27) afgeleid. Eén daarvan is van de hand van Oseen [8]. De wet van Stokes komt goed overeen met

experimenten voor Reynoldsgetallen kleiner dan ongeveer 0.2, maar boven deze waarde wordt verwaarlozing van de niet-lineaire term in de Navier-Stokes (2.3) onhoudbaar en zal er geen overeenstemming meer zijn met experimenten. Oseen heeft een andere benadering van de Navier-Stokes vergelijking toegepast. Hij veronderstelde, dat de traagheidsterm pas op grote afstand van een bol van invloed wordt, waardoor hij de traagheidsterm lineariseerde in plaats van hem geheel te verwaarlozen, zoals Stokes gedaan heeft. Op deze wijze reduceert de Navier-Stokes vergelijking tot een lineaire vorm, de vergelijking van Oseen genaamd. Oplossing van deze vergelijking leidt tot de volgende uitdrukking voor de weerstandscoefficiënt:

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right). \quad (2.28)$$

Deze vergelijking komt tot iets grotere waarden van het Reynoldsgetal, dan de wet van Stokes, overeen met gemeten waarden van de weerstandscoefficiënt. Echter evenals bij andere uitdrukkingen vervalt deze overeenkomst voor waarden van het Reynoldsgetal ruwweg groter dan 4. Voor grotere Reynolds dienen experimentele data gebruikt te worden om waarden voor de weerstandscoefficiënt te verkrijgen. In de volgende paragraaf zal hieraan aandacht besteed worden.

2.3.2 Grote Reynoldsgetallen

Zoals in de vorige paragraaf is opgemerkt, bestaan er slechts analytische oplossingen voor de weerstandscoefficiënt voor kleine Reynoldsgetallen. Voor grote waarden van Reynolds dient de empirie uitkomst te bieden. In de literatuur zijn veel meetdata te vinden van de weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal. Door door deze data een fit te bepalen, wordt de curve in figuur 2.3 voor grote waarden van Reynolds verkregen.

In tabel 2.1 staan correlaties voor de weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal voor verschillende Reynoldsregimes [9]. Het domein van alle Reynoldsgetallen is opgedeeld in tien verschillende intervallen, met voor ieder interval een uitdrukking voor de weerstandscoefficiënt. Twee correlaties van aangrenzende intervallen vallen aan de randen van de intervallen samen met een maximaal verschil van 1%.

Turton en Levenspiel [10] hebben voor het Reynoldsregime $Re < 2 \cdot 10^5$ met behulp van de kleinste kwadraten methode de volgende uitdrukking voor de weerstandscoefficiënt van een bolvormig lichaam als functie van het Reynoldsgetal bepaald:

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.173 Re^{0.675}) + \frac{0.413}{1 + 16300 Re^{-1.09}}. \quad (2.29)$$

Deze vergelijking nadert tot de wet van Stokes voor kleine Reynoldsgetallen en zal in dit onderzoek gebruikt worden als uitdrukking voor de weerstandscoefficiënt voor stationaire situaties.

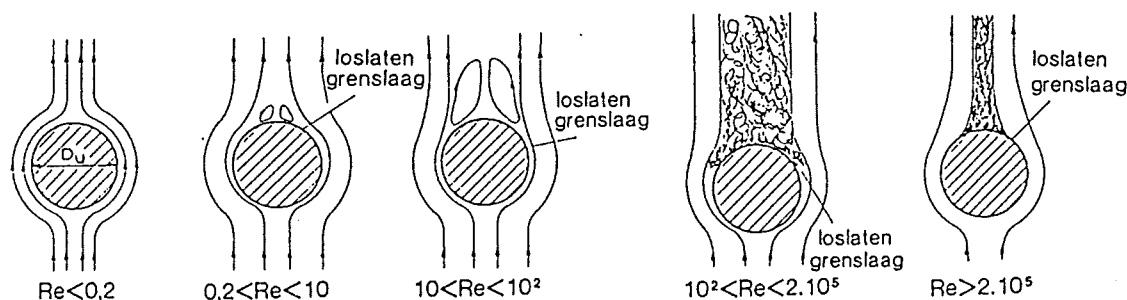
2.3.3 Ontwikkeling van het zog achter een bol

De weerstandscoefficiënt C_D gedefinieerd volgens vergelijking (2.14) legt de koppeling tussen de stuwdruk en de op het lichaam uitgeoefende kracht. Het is duidelijk, dat C_D een functie van de aard van de stroming langs het lichaam moet zijn, ofwel, dat C_D een functie

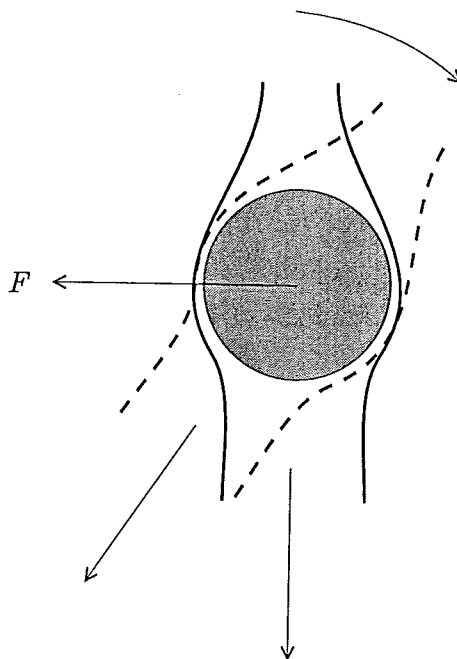
Tabel 2.1: Stationaire weerstandscorrelaties, $w = \log_{10} Re$, Clift et al. [9]

Reynoldsregime	Correlatie
$Re < 0.01$	$C_D = \frac{24}{Re} (1 + \frac{3}{16} Re)$
$0.01 < Re \leq 20$	$\log_{10} [\frac{C_D Re}{24} - 1] = -0.881 + 0.82w - 0.05w^2$ i.e., $C_D = \frac{24}{Re} [1 + 0.1315 Re^{(0.82-0.05w)}]$
$20 \leq Re \leq 260$	$\log_{10} [\frac{C_D Re}{24} - 1] = -0.7133 + 0.6305w$ i.e., $C_D = \frac{24}{Re} [1 + 0.1935 Re^{0.6305}]$
$260 \leq Re \leq 1500$	$\log_{10} C_D = 1.6435 - 1.1242w + 0.1558w^2$
$1.5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 1.2 \cdot 10^4$	$\log_{10} C_D = -2.4571 + 2.5558w - 0.9295w^2 + 0.1049w^3$
$1.2 \cdot 10^4 < Re < 4.4 \cdot 10^4$	$\log_{10} C_D = -1.9181 + 0.6370w - 0.0636w^2$
$4.4 \cdot 10^4 < Re \leq 3.38 \cdot 10^5$	$\log_{10} C_D = -4.3390 + 1.5809w - 0.1546w^2$
$3.38 \cdot 10^5 < Re \leq 4 \cdot 10^5$	$C_D = 29.78 - 5.3w$
$4 \cdot 10^5 < Re \leq 10^6$	$C_D = 0.1w - 0.49$
$10^6 < Re$	$C_D = 0.19 - \frac{8 \cdot 10^4}{Re}$

is van het gedeelte van de mechanische energie van het aanstromende fluidum, dat door energiedissipatie verloren gaat. De vorm van het lichaam speelt hierin een belangrijke rol. Hoe ziet de ontwikkeling van het zog achter een bolvormig deeltje er nu uit voor Reynolds-waarden toenemend van zeer klein tot zeer groot? Omdat in dit onderzoek met bolvormige kogeltjes wordt gewerkt, wordt hier enkel het stromingspatroon rond een bol besproken. Zie figuur 2.5 [4].

**Figuur 2.5:** Ontwikkeling grenslaag achter een bol

Voor lage waarden van het Reynoldsgetal ($Re < 0.2$) is, zoals in de vorige paragraaf is afgeleid, de stroming rond de bol symmetrisch. Desondanks is er toch sprake van vormweerstand, omdat er ten gevolge van dissipatie drukverlies optreedt. Als het Reynoldsgetal groter wordt, zullen er achter de bol wervels ontstaan, waardoor de grenslaag los zal laten van de bol. Er heeft zich dan een zogenaamd zog achter de bol gevormd. In dit zog zullen wervels aanwezig zijn, die bij verder toenemende Reynolds ($Re < 100$) groter zullen worden, waardoor het loslatingspunt meer naar de voorkant van de bol zal schuiven. Bij nog verder toenemende waarden van Reynolds ($100 < Re < 2 \cdot 10^5$), zal het zog onregelmatig en turbulent worden en zullen de ontstane wervels door de stroming worden



Figuur 2.6: Omklappen zog bij aanbrengen van zijwaartse kracht

meegevoerd. Bovendien worden er nu nog steeds nieuwe wervels achter de bol geproduceerd. Uiteindelijk wordt bij zeer hoge Reynolds ($Re > 2 \cdot 10^5$) de grenslaag turbulent en zal het loslatingspunt weer naar de achterzijde van de bol schuiven.

2.4 Achtergrond weerstandsreductie

De vraag is nu waarom er een weerstandsreductie te verwachten is als er een zijwaartse kracht op de bol gaat werken. In de vorige paragraaf is gebleken, dat de weerstandskracht de combinatie is van twee krachten, de vormweerstand en de wrijvingsweerstand. Door de weerstandskracht expliciet op te delen in deze twee componenten, kan begrepen worden, waarom de reductie te verwachten is. Hiertoe dient het zog, dat achter een stationair vallende bol aanwezig is, bekeken te worden. Zie figuur 2.6.

Bij een stationaire beweging ligt het zog altijd in het verlengde van de bewegingsrichting van de bol. Als er een zijwaartse kracht op de bol gaat werken, zal het zog moeten draaien om opnieuw in het verlengde van de nieuwe bewegingsrichting te komen liggen. In paragraaf 2.3 is beschreven, dat integratie van de druk over de bol de zogenaamde vormweerstand oplevert. Indien nu het zog in het verlengde van de bewegingsrichting ligt, zal het drukverschil tussen voor- en achterzijde het grootst zijn. In dat geval zal er dus sprake zijn van de grootste vormweerstand.

Als de zijwaartse kracht op de bol gaat werken, zal de bol ook in zijwaartse richting bewegen, waardoor het zog zal kantelen. Echter op het moment, dat de kracht net werkt, zal het zog nog niet gedraaid zijn, of slechts ten dele. Tot het moment, dat het zog weer in het verlengde van de nieuwe bewegingsrichting ligt, zal er dus in *zijwaartse* richting een kleinere drukval over het kogeltje staan, dan wanneer het zog volledig achter het kogeltje zou liggen. Dit heeft tot gevolg, dat er in zijwaartse richting een kleinere vormweerstand

aanwezig zal zijn. Omdat de weerstandskracht bestaat uit de vormweerstand en de wrijvingsweerstand, zal de weerstandskracht in zijwaartse richting aan het allereerste begin van de zijwaartse beweging gereduceerd zijn.

2.5 Instationaire omstroming: dimensie-analyse

Tot dusverre is er enkel nog over stationaire situaties gesproken. Het probleem wordt ingewikkelder, indien instationaire situaties bekeken worden. Men kan zich voorstellen, dat in dergelijke gevallen bijvoorbeeld de versnelling van het kogeltje de weerstandscoefficiënt zal beïnvloeden.

Clift, Grace en Weber [9] hebben een dimensie-analyse uitgevoerd en bepaald van welke dimensieloze groepen de interactiekracht tussen een deeltje en een fluïdum afhangt bij instationaire bewegingen. Naast de parameters, die in vergelijking (2.7) voorkomen, dienen nu nog twee andere parameters in de analyse meegenomen te worden. Allereerst dient de dichtheid van het deeltje, ρ_p , expliciet beschouwd te worden, aangezien het de traagheid van het deeltje alsmede de netto gravitatiekracht bepaalt. Daarnaast dient er nog een andere parameter ingevoerd te worden, omdat de relatieve snelheid van een deeltje ten opzichte van de vloeistof, v_r , bij een instationaire beweging varieert met de plaats en de tijd. Dit kan bijvoorbeeld de door het deeltje afgelegde afstand vanaf het begin van de beweging zijn, weergegeven met het symbool x . De dimensie-analyse leverde de volgende groepen.

Allereerst blijkt voor instationaire situaties de weerstandscoefficiënt, evenals in de stationaire situatie, af te hangen van het Reynoldsgetal, zoals reeds gedefinieerd in vergelijking (2.9):

$$Re \equiv \frac{\rho_f v_r D}{\eta_f}. \quad (2.9)$$

Een tweede dimensieloze groep die optreedt, is de verhouding van de dichtheden van het instationair bewegende deeltje, ρ_p , en het fluïdum, ρ_f , weergegeven door het symbool γ :

$$\gamma = \frac{\rho_p}{\rho_f}. \quad (2.30)$$

Daarnaast blijkt de weerstandscoefficiënt af te hangen van de zogenaamde verplaatsingsmodulus M_D , welke als volgt gedefinieerd is:

$$M_D = \frac{x}{D}. \quad (2.31)$$

Hierin is: x = door het kogeltje afgelegde afstand vanaf
het begin van de beweging [m],
 D = diameter van het kogeltje [m].

De laatste dimensieloze groep is de versnellingsmodulus of het acceleratiegetal Ac , gedefinieerd als:

$$Ac = \frac{(v_f - v_p)^2 / D}{d(v_f - v_p) / dt}. \quad (2.32)$$

De versnellingsmodulus is een verhouding tussen krachten ten gevolge van convectieve acceleratie en krachten ten gevolge van locale acceleratie. Als de krachten ten gevolge van convectieve versnelling klein zijn ten opzichte van de krachten ten gevolge van locale versnelling, zal de versnellingsmodulus klein zijn. Beneden een bepaalde waarde van het acceleratiegetal is de bijdrage van de convectieve versnelling verwaarloosbaar. Dit is vergelijkbaar met het Reynoldsgetal, waarbij voor kleine waarden ($Re < 0.2$) de traagheidskrachten verwaarloosd mogen worden ten opzichte van de wrijvingskrachten. In het algemeen zijn er twee soorten instationaire bewegingen te onderscheiden, te weten:

Type 1 gekarakteriseerd door een snelle verandering van Re met M_D ,

Type 2 gekarakteriseerd door een langzame verandering van Re met M_D en met het instantane stromingspatroon gelijk aan dat voor stationaire bewegingen bij het instantane Reynoldsgetal.

Voor bewegingen van het type 2 is de weerstand ongevoelig voor versnelling. Voor bewegingen van het type 1 kan de weerstandskracht echter enorm verschillen van de corresponderende stationaire weerstandskracht. In de praktijk corresponderen type 2 bewegingen met deeltjes bewegend door gassen (hoge γ), terwijl type 1 bewegingen de beweging van deeltjes in vloeistoffen beschrijven (γ in de orde van 1 tot 10).

Voor de afleiding van uitdrukkingen voor de weerstandscoefficiënt zal, evenals in de vorige paragraaf, een tweedeling in kleine en grote Reynoldsgetallen gemaakt worden. Allereerst zal de instationaire omstroming van bolvormige lichamen bij kleine Reynolds besproken worden.

2.6 Instationaire omstroming bij kleine Reynoldsgetallen

Stokes [7] was een van de eerste, die een uitdrukking voor de weerstandscoefficiënt bij een instationaire beweging afleidde. Hij beschouwde een bol, die een harmonische en rechtlijnige trilling uitvoerde volgens

$$\underline{v}_p(t) = \underline{v}_p e^{-i\omega t}, \quad (2.33)$$

waarin ω de hoekfrequentie [s^{-1}] van de trilling is. Evenals bij de stationaire situatie verwaarloosde hij de niet-lineaire convectieve term in de Navier-Stokesvergelijking, waardoor hij de volgende analytische oplossing voor de weerstandskracht kon afleiden:

$$\underline{F}_D = 3\pi\eta_f D \left(1 + \frac{1}{2}\alpha D + \frac{1}{36}\alpha^2 D^2\right) \underline{v}_p e^{-i\omega t}, \quad (2.34)$$

met $\alpha = (1 - i)\sqrt{\frac{\omega\rho_f}{2\eta_f}} \quad [m^{-1}]$.

Later hebben Basset [11], Boussinesq [12] en Oseen [8] de rechtlijnige beweging van een bol met een willekeurige versnelling in een visceuze vloeistof bestudeerd. Bij hun afleiding van de weerstandskracht hebben ook zij de convectieve versnellingstermen in de Navier-Stokesvergelijking verwaarloosd. Zij vonden voor de weerstandskracht op een bolletje in

een langzame instationaire rechtlijnige beweging (zie Maxey en Riley [13] voor een recente mathematische afleiding van deze vergelijking):

$$F_D = 3\pi\eta_f D v_r + \frac{1}{2} \frac{1}{6} \pi D^3 \rho_f \frac{dv_r}{dt} + 6 \frac{1}{4} D^2 \sqrt{\pi\eta_f \rho_f} \int_0^t \frac{dv_r/d\tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (2.35)$$

Bovenstaande vergelijking voor de weerstandskracht op de bol bevat drie termen. Te zien is, dat de weerstandskracht niet alleen afhangt van de instantane snelheid en versnelling, maar ook van een integraalterm, die de gehele geschiedenis van de versnelling omvat. De eerste term aan de rechterzijde van het gelijktteken is equivalent aan de wet van Stokes, vergelijking (2.26), en staat dus voor de stationaire weerstandskracht op de bol. De tweede term is de zogenaamde toegevoegde of virtuele massa term. Deze term bevat geen viscositeit en brengt in rekening, dat het fluïdum rond de bol meeverstelt, hetgeen een extra weerstand betekent. De laatste term wordt de geschiedenis- of Bassetterm genoemd en brengt de gehele geschiedenis van de versnelde beweging in rekening. Het is niet zo verwonderlijk, dat de geschiedenis van de beweging ook van invloed blijkt te zijn, want op een bepaald tijdstip komt de bol een gebied binnen, waarin het stromingsveld beïnvloed is door de voorgaande beweging van de bol. De Bassetterm heeft een zelfde achtergrond als de penetratie van warmte in een half-oneindig medium. In bijlage A wordt aan de hand van deze analogie de afleiding van de Bassetterm gepresenteerd.

Indien de vergelijking van Basset, Boussinesq en Oseen, vergelijking (2.35), wordt toegepast op een oscillerende bol en indien de integraal wordt uitgerekend voor zeer lange tijden na de start van de trilling, wordt dezelfde vergelijking verkregen als de vergelijking, die Stokes heeft afgeleid.

2.7 Instationaire omstroming bij grote Reynoldsgetallen

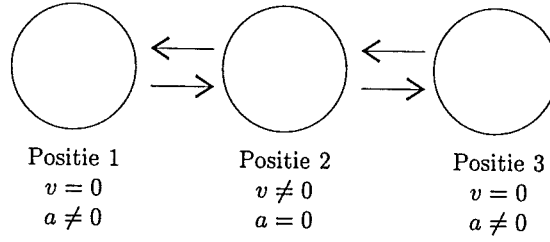
Tot dusverre is er enkel gekeken naar instationaire bewegingen, waarbij het Reynoldsgetal maximaal van de orde 1 was. In dit Reynoldsregime zijn de convectieve versnellingstermen verwaarloosbaar en is de Navier-Stokesvergelijking analytisch oplosbaar. Evenals bij de stationaire situatie dient bij instationaire omstroming bij grote Reynoldsgetallen de empirie uitkomst te bieden ter verkrijging van uitdrukkingen voor de weerstandskracht.

2.7.1 De vergelijking van Odar en Hamilton

Odar en Hamilton [14] hebben een uitdrukking voorgesteld, die afgeleid is van de vergelijking van Basset, Boussinesq en Oseen, vergelijking (2.35). Zij hebben deze vergelijking afgeleid aan de hand van een harmonisch trillende bol in een stilstaande vloeistof. Zie figuur 2.7.

De bol start vanuit rust op positie 1, waar $t = 0$. Een zeer kleine tijdstap Δt later is de snelheid nog bijna gelijk aan nul en zullen de locale versnellingen van de vloeistofdeeltjes overheersen. De weerstandskracht op de bol op dit moment, $F_{D,1}$ genoemd, wordt bepaald door de virtuele massa en luidt

$$F_{D,1} = C_A \frac{1}{6} \pi D^3 \rho_f \frac{dv_r}{dt}, \quad (2.36)$$



Figuur 2.7: Harmonisch trillende bol

met C_A de empirisch te bepalen virtuele-massa-coëfficiënt, welke een functie van dimensioneloze kentallen kan zijn, af te leiden via een dimensie-analyse.

Beschouw vervolgens positie 2, alwaar de snelheid van de bol maximaal is. Aangezien de versnelling hier gelijk aan nul is, is de kracht volgens vergelijking (2.36) voor eindige waarden van C_A ook gelijk aan nul. Experimenten tonen echter aan, dat de kracht op de bol ongelijk aan nul is. Er is dus wel een kracht aanwezig en gelet op de dimensies, kan de kracht in positie 2, weergegeven met $F_{D,2}$, geschreven worden als:

$$F_{D,2} = C_D \frac{1}{4} \pi D^2 \frac{1}{2} \rho_f |v_r| v_r. \quad (2.37)$$

Hierin is C_D de weerstandscoefficiënt, die eveneens empirisch bepaald dient te worden als functie van dimensioneloze groepen.

Om de totale door Odar en Hamilton afgeleide uitdrukking te kunnen presenteren, dient nog één situatie beschouwd te worden.

Veronderstel, dat de bol startte in positie 1, één trilling doorliep, terugkwam in positie 1 en een nieuwe trillingscyclus startte. In dit geval zal de weerstandskracht op de bol ongelijk zijn aan de in de vorige cyclus ondervonden kracht, terwijl de snelheden en de versnellingen in beide situaties wel gelijk zijn. Hieruit blijkt, dat er een derde term, die het effect van de geschiedenis van de beweging in rekening brengt, nodig is voor de beschrijving van de totale weerstandskracht op de bol.

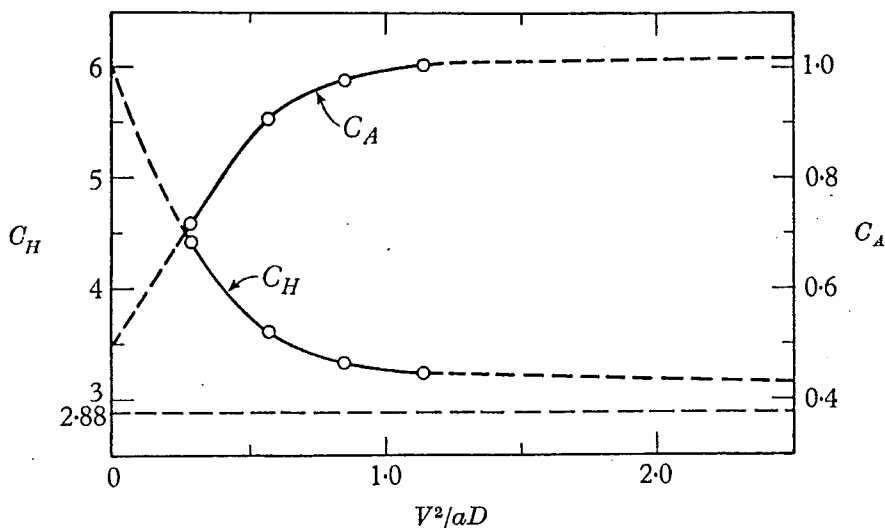
De geschiedenisterm kan worden weergegeven door de laatste term in de vergelijking van Basset, Boussinesq en Oseen (2.35) te vermenigvuldigen met een empirisch nader te bepalen coëfficiënt C_H , de geschiedeniscoëfficiënt.

Door de drie genoemde krachten bij elkaar op te tellen, meenden Odar en Hamilton, dat vergelijking (2.35) voor grotere Reynoldsgetallen kon worden uitgebreid tot:

$$F_D = C_D \frac{1}{4} \pi D^2 \frac{1}{2} \rho_f |v_r| v_r + C_A \frac{1}{6} \pi D^3 \rho_f \frac{dv_r}{dt} + C_H \frac{1}{4} D^2 \sqrt{\pi \eta_f \rho_f} \int_0^t \frac{dv_r/d\tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (2.38)$$

Laten we nu eens bovenstaande vergelijkinging term voor term vergelijken met de vergelijking van Basset. Als de bovenstaande vergelijking ook correct is voor kleine Reynoldsgetallen, dan moeten de termen in bovenstaande vergelijking voor kleine Reynolds gelijk zijn aan de termen in vergelijking (2.35).

In dit limietgeval dient de eerste term aan de rechterkant van vergelijking (2.39) gelijk te zijn aan de stationaire weerstandscoefficiënt. Als bovendien na een willekeurige beweging de versnelling gelijk aan nul blijft voor een lange tijd, moet de vergelijking van Odar en Hamilton naar de uitdrukking voor de stationaire weerstandskracht gaan. Aan deze twee eisen wordt voldaan indien voor C_D de stationaire weerstandscoefficiënt $C_{D,s}$ wordt gekozen.



Figuur 2.8: Afhangelijkheid van C_A en C_H van de versnellingsmodulus

De totale door Odar en Hamilton afgeleide vergelijking luidt dus:

$$F_D = C_{D,s} \frac{1}{4} \pi D^2 \frac{1}{2} \rho_f |v_r| v_r + C_A \frac{1}{6} \pi D^3 \rho_f \frac{dv_r}{dt} + C_H \frac{1}{4} D^2 \sqrt{\pi \eta_f \rho_f} \int_0^t \frac{dv_r/d\tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (2.39)$$

Voor instationaire bewegingen is de waarde van $C_{D,s}$, die in deze vergelijking ingevuld dient te worden, de waarde, die hoort bij het Reynoldsgetal, betrokken op de instantane snelheid.

Gaan we nu verder met het vergelijken van de termen. Te zien is, dat de limietwaarden van C_A en C_H voor kleine Reynoldsgetallen respectievelijk $\frac{1}{2}$ en 6 zijn. Kortom, aan het begin van de beweging van de bol, wanneer de snelheid nog laag is, zal C_A gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$.

Odar en Hamilton hebben bekeken hoe C_A en C_H van het Reynoldsgetal en de versnellingsmodulus afhangen. Dit hebben zij gedaan door de beweging van een in een vloeistof oscillerende bol te bekijken. Zij vonden, dat zowel C_A als C_H enkel van de versnellingsmodulus afhangen en niet van het Reynoldsgetal. De afhangelijkheid van C_A en C_H van de versnellingsmodulus is weergegeven in figuur 2.8 [14]. Alle waarden zijn experimenteel bepaald, behalve de waarden, waarbij de versnellingsmodulus gelijk aan nul is. Hier zijn de waarden respectievelijk $\frac{1}{2}$ en 6, welke verkregen worden door de Navier-Stokes vergelijking op te lossen, met verwaarlozing van de convectieve versnellingstermen. Zie vergelijking (2.35).

Uit de metingen van Odar en Hamilton heeft Odar [15] uitdrukkingen voor de coëfficiënten C_A en C_H afgeleid. Deze empirische uitdrukkingen luiden:

$$C_A = 1.05 - \frac{0.066}{Ac^2 + 0.12}, \quad (2.40)$$

en

$$C_H = 2.88 + \frac{3.12}{(Ac + 1)^3}, \quad (2.41)$$

met Ac de versnellingsmodulus. Indien $Ac = 0$ nemen beide coëfficiënten hun theoretische waarde aan. De situatie $Ac = 0$ correspondeert, gelet op de betekenis van de versnellingsmodulus (zie de bespreking van vergelijking (2.32)), met de situatie, dat de krachten ten gevolge van convectieve versnelling verwaarloosbaar zijn ten opzichte van krachten ten gevolge van locale versnelling.

Wat opvalt in de figuur is, dat voor toenemende waarden van de versnellingsmodulus de virtuele-massa-coëfficiënt eveneens toeneemt, terwijl de geschiedeniscoëfficiënt juist afneemt. Dus als krachten ten gevolge van convectieve versnelling de krachten ten gevolge van locale versnelling gaan overheersen, wordt het virtuele massa effect belangrijker dan het effect van de Bassetkracht.

Odar [15] heeft vergelijking (2.39) samen met de voor een harmonische beweging gevonden uitdrukkingen voor C_A en C_H toegepast op de beschrijving van de verticale val van een bol in een vloeistof. De gevonden beweging is vergeleken met meetresultaten van een vallende bol. De berekende baan kwam zeer goed overeen met de experimentele data. Aangezien een harmonische trilling en een verticale val geheel verschillende bewegingen zijn, suggereerde Odar, dat vergelijking (2.39) in combinatie met de uitdrukkingen voor C_A en C_H een zeer breed toepassingsgebied heeft.

2.7.2 Onderzoek door Dohmen

Dohmen [16] heeft onderzoek gedaan naar de instationaire stromingsweerstand van bollen. Het doel van dit onderzoek was het testen van de vergelijking van Odar en Hamilton [14], vergelijking (2.39), voor andere situaties dan bij Odar en Hamilton en vervolgens voor deze nieuwe situaties uitdrukkingen af te leiden voor de virtuele-massa-coëfficiënt C_A en de geschiedeniscoëfficiënt C_H als functie van het Reynoldsgetal en de versnellingsmodulus. Dohmen bestudeerde de instationaire verticale beweging van bollen in een vloeistof, vallend of opstijgend, afhankelijk van de dichtheid van het deeltje ten opzichte van de dichtheid van de vloeistof. Met een camera maakte hij opnames van de bewegende bollen en via het fitten van polynomen door de plaats-tijd data van de bollen verkreeg hij data over de snelheid en de versnelling.

Het grootste probleem bij het bepalen van uitdrukkingen voor C_A en C_H , is het feit, dat er op een tijdstip twee onbekende coëfficiënten bepaald dienen te worden. Odar en Hamilton [14] hebben dit opgelost door een harmonische trilling te beschouwen, zoals in de vorige paragraaf beschreven is. Gedurende een cyclus van de trilling is er namelijk een moment, waarop de virtuele-massa term gelijk aan nul is en een moment, waarop de geschiedenisterm gelijk aan nul is. Op deze momenten resteert er slechts één onbekende coëfficiënt, welke vervolgens bepaald kan worden. Bij de vrije val van een deeltje komen deze tijdstippen echter niet voor en er dient hier dus gezocht te worden naar een andere benadering.

Dohmen heeft dit probleem opgelost door situaties te zoeken, waarbij òf de virtuele-massa term òf de geschiedenisterm te verwaarlozen is. Aangezien de geschiedenisterm evenredig is met de viscositeit, veronderstelde hij, dat indien de bol door een fluïdum met een lage viscositeit valt de geschiedenisterm verwaarloosbaar is ten opzichte van de virtuele-massa term. Omgekeerd is dan bij een hoog visceuze vloeistof de geschiedenisterm de overheersende factor. Via berekeningen heeft hij deze aanname gevalideerd.

Tabel 2.2: Experimentele waarden voor C_A en C_H als functie van Ac [16]

Ac [-]	C_A [-]	C_H [-]
0.0001	0.5	6
0.001	0.45	5.84
0.01	0.41	6.68
0.03	0.405	5.6
0.1	0.39	5.32
0.2	0.375	5.08
0.5	0.335	4.64
1	0.29	4.16
2	0.245	3.6
4	0.22	2.80
7	0.21	1.96

Door nu experimentele data voor de snelheid en de versnelling in vergelijking (2.39) te substitueren en één van beide termen te verwaarlozen, afhankelijk van de gebruikte viscositeit van het fluidum, worden vergelijkingen verkregen, waarin slechts één onbekende coëfficiënt zit. Door deze vergelijkingen op te lossen worden correlaties voor C_A en C_H verkregen.

Net als Odar en Hamilton [14] vond Dohmen, dat de virtuele-massa-coëfficiënt en de geschiedeniscoëfficiënt enkel afhingen van de versnellingsmodulus Ac . In tabel 2.2 staan de door Dohmen gevonden waarden van C_A en C_H als functie van Ac weergegeven. Vergelijking van deze waarden met de waarden van C_A en C_H , die door Odar en Hamilton zijn gevonden (zie figuur 2.8), laat zien, dat er enkel voor C_H enige overeenstemming is tussen de beide resultaten, zij het dat deze niet overtuigend genoemd kan worden. Dohmen concludeerde dan ook, dat voor elke instationaire beweging andere relaties voor beide coëfficiënten gelden.

2.8 Potentiaalstroming

Tot nog toe is enkel gesproken over stromingen, waarbij de viscositeit van belang was. De viscositeit van vele fluida, zoals lucht en water, is laag. Door van stromingen de viscositeit η_f volledig te verwaarlozen, worden stromingen zonder wrijving verkregen, potentiaalstromingen genaamd.

Het Reynoldsgetal $\rho_f D v_r / \eta_f$ is een maat voor de verhouding van de traagheidskrachten ten opzichte van de visceuze krachten. Wanneer het Reynoldsgetal groot is ten opzichte van één, spelen visceuze krachten in het algemeen een verwaarloosbare rol in de stroming. In dit opzicht is een potentiaalstroming, al is deze stroming niet realistisch, een benadering van een visceuze stroming bij zeer grote Reynoldsgetallen.

In deze paragraaf zal de weerstandskracht op een bol uitgerekend worden, die stationair omstroomd wordt in een niet-visceuze stroming. Daarnaast zal het principe van virtuele massa kort toegelicht worden. Geïnteresseerden kunnen meer over potentiaalstromingen vinden in *An Introduction to Fluid Dynamics* van Batchelor [17].

Berekening weerstandskracht

Onder verwaarlozing van de viscositeit reduceren de Naviër-Stokesvergelijkingen (2.3) tot

$$\frac{\partial \underline{v}_f}{\partial t} + (\underline{v}_f \cdot \nabla) \underline{v}_f = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \underline{g}. \quad (2.42)$$

Samen met de continuïteitsvergelijking (2.2) worden dit de Euler-vergelijkingen genoemd. Potentiaalstromingen zijn rotatievrij. Aan de voorwaarde van rotatievrijheid kan voldaan worden door de keuze

$$\underline{v}_f = \nabla \Phi, \quad (2.43)$$

waarin Φ de snelheidspotentiaal genoemd wordt. Door deze vergelijking in te vullen in vergelijking (2.42) wordt, samen met $\underline{g} = (0, 0, -g)$, de wet van Bernoulli voor een potentiaalstroming verkregen, die als volgt luidt¹:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{v}_f^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constant}. \quad (2.45)$$

Substitutie van vergelijking (2.43) in de continuïteitswet leidt tot

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (2.46)$$

hetgeen bekend staat als de Laplace vergelijking. Op basis van deze vergelijking en de randvoorwaarden kan het snelheidsveld berekend worden. Met dit snelheidsveld en de wet van Bernoulli (2.45) kan vervolgens het drukveld afgeleid worden, waaruit tenslotte de weerstandskracht op het lichaam kan worden bepaald.

Voor het snelheidsveld rond een bol met straal R , die met een snelheid v_r stationair omstroomd wordt, geldt [17]:

$$v_{rad} = -v_r \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right), \quad (2.47)$$

$$v_\theta = v_r \sin \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right). \quad (2.48)$$

Met behulp van de wet van Bernoulli wordt voor de drukverdeling op de bol verkregen:

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho_f v_r^2 \left(1 + \frac{9}{4} \sin^2 \theta\right), \quad (2.49)$$

waarin p_0 de statische druk oneindig ver van de bol is.

Aangezien hier een wrijvingsloos medium wordt beschouwd, zijn er alleen drukkrachten. Er volgt dan voor de resulterende kracht $\underline{F}$ op de bol:

$$\underline{F} = - \iint_{A_p} (p - p_0) \underline{n} dA_p. \quad (2.50)$$

¹Hiertoe is de Eulervergelijking omgeschreven met behulp van de relatie:

$$(\underline{v}_f \cdot \nabla) \underline{v}_f = \frac{1}{2} \nabla (\underline{v}_f \cdot \underline{v}_f) - \underline{v}_f \times (\nabla \times \underline{v}_f), \quad (2.44)$$

waarbij de laatste term vanwege rotatievrijheid vervalt.

De component van de kracht in de richting van de stroming is gelijk aan de weerstandskracht F_D . Integratie over het boloppervlak in deze richting levert voor de kracht [17]:

$$\begin{aligned} F_D &= - \int_0^\pi (p - p_0) \cos \theta 2\pi R \sin \theta R d\theta \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

De weerstandskracht op de bol blijkt gelijk aan nul te zijn. Hetzelfde resultaat geldt voor de stationaire potentiaalstroming rond een *willekeurig* lichaam. Gezien de duidelijke tegenspraak met de praktijk staat dit resultaat bekend als de *paradox van d'Alembert*.

Virtuele massa

Beschouw nu een bol met straal R , die met een snelheid v_f door een stilstaand vloeistof met dichtheid ρ_f beweegt. De snelheidspotentiaal luidt in dit geval [17]:

$$\Phi = -\frac{1}{2}v_f R^3 \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (2.52)$$

Voor deze situatie is de kinetische energie E_k van het fluïdum [17]:

$$\begin{aligned} E_k &= -\frac{1}{2}\rho_f \iint_{A_p} \Phi \underline{v}_f \cdot \underline{n} dA_p \\ &= -\frac{1}{2}\rho_f \int_0^\pi -\frac{1}{2}v_f R \cos \theta v_f 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{3}\rho_f v_f^2 R^3. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Er kunnen nu twee gevallen onderscheiden worden.

- $v_f = \text{constant}$.

In dit geval volgt uit vergelijking (2.53), dat $E_k = \text{constant}$ ofwel $dE_k/dt = 0$. De verandering van de kinetische energie kan geïnterpreteerd worden als de arbeid, die via de bol op de stroming wordt uitgeoefend, mits de bijdrage van de potentiële energie verwaarloosd kan worden. Met andere woorden $dE_k/dt = Fv_f$, waarin F de component van de kracht op de bol in de richting van de voortbewegingssnelheid voorstelt, ofwel de weerstand. Uit het resultaat $dE_k/dt = 0$ volgt, dat de weerstand van de bol gelijk aan nul is. Hier wordt dus de achtergrond van de *paradox van d'Alembert* gevonden. In een potentiaalstroming is geen arbeid nodig om een lichaam met een constante snelheid in beweging te houden. De andere situatie luidt:

- $v_f = v_f(t)$.

Voor deze situatie volgt uit vergelijking (2.53), dat de kinetische energie verandert als functie van de tijd volgens:

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= \frac{2}{3}\pi\rho_f R^3 \frac{dv_f}{dt} v_f \\ &= M_v \frac{dv_f}{dt} v_f. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Hierin is M_v gelijk aan de helft van de verplaatste vloeistofmassa en dit wordt de toegevoegde massa genoemd. Deze toegevoegde massa is te interpreteren als de extra massa, die aan de bol toegekend moet worden, om rekening te kunnen houden met de kinetische energie van de vloeistofstroming. Als de bol versneld wordt, moet er dus een extra kracht uitgeoefend worden om als het ware de omringende vloeistof mee te versnellen. De massa van een voorwerp samen met de toegevoegde massa wordt de virtuele massa genoemd.

De virtuele massa bleek bij instationaire weerstandskrachten ook een rol te spelen. Het is opvallend, dat de virtuele massa bij twee geheel verschillende problemen blijkt op te treden. Enerzijds kwam de virtuele massa bij de mathematische afleiding van de weerstandskracht bij Maxey en Riley [13] naar voren. Anderzijds blijkt de virtuele massa ook van belang bij de hypotetische potentiaalstroming, waarbij de weerstandskracht zelf gelijk aan nul blijkt te zijn.

Hoofdstuk 3

Experimentele opzet

In dit hoofdstuk zal de achtergrond van de gebruikte experimentele procedure besproken worden. Allereerst volgt een uiteenzetting over het aanbrengen van een constante zijwaartse kracht, waarna enkele in dit onderzoek toegepaste modelleringsmethoden voor de weerstandskracht de revue zullen passeren.

3.1 Het aanbrengen van een constante zijwaartse kracht

Om een versnelde beweging in een richting loodrecht op de zwaartekracht te vergelijken met de val van een deeltje onder invloed van de zwaartekracht, is het gewenst, dat er een constante zijwaartse kracht op het deeltje werkt.

Er is een aantal manieren om een zijwaartse kracht te bewerkstelligen, maar de meeste blijken geen *constante* kracht te leveren. In deze paragraaf worden de mogelijke methoden besproken. In de eerste subparagraaf zullen de falende methoden uit de doeken gedaan worden, waarna in de tweede subparagraaf een correcte en de hier gebruikte methode uitgelegd zal worden.

3.1.1 Falende methoden

De meest voor de hand liggende mogelijkheden om een constante zijwaartse kracht te verkrijgen zijn:

- de magnetische kracht,
- de elektrische kracht.

Beide methoden zullen nu besproken worden en het zal blijken, dat deze methoden niet geschikt zijn om een constante kracht te genereren.

De magnetische kracht

Indien een magnetiseerbaar deeltje door een magneetveld valt, zal het een magnetische kracht ondervinden. Hierdoor zal op de reeds bestaande beweging een beweging in de

richting van de kracht gesuperponeerd worden. Indien dus een magnetiseerbaar deeltje verticaal valt, zal het aanleggen van een magneetveld in horizontale richting een zijwaartse kracht op het deeltje tot gevolg hebben, hetgeen een zijwaartse beweging zal induceren. De vraag is nu of met een magneetveld een constante zijwaartse kracht te verkrijgen is. Aangezien de magnetische kracht op een magnetiseerbaar voorwerp evenredig is met de gradiënt van de veldsterkte [18], dienen de magnetische veldlijnen lineair te convergeren of te divergeren om een constane kracht te verkrijgen. Echter, doordat magnetische veldlijnen altijd gesloten zijn, zullen de veldlijnen gekromd zijn en zal er dus op deze manier geen constante kracht gegenereerd kunnen worden. Lokaal is in goede benadering de kracht uiteraard wel constant. Toepassing van deze methode bij grotere ruimtelijke dimensies, levert problemen op ten aanzien van de grootte van de opstelling. De conclusie luidt dus, dat de magnetische kracht niet geschikt is om een constante zijwaartse kracht te genereren.

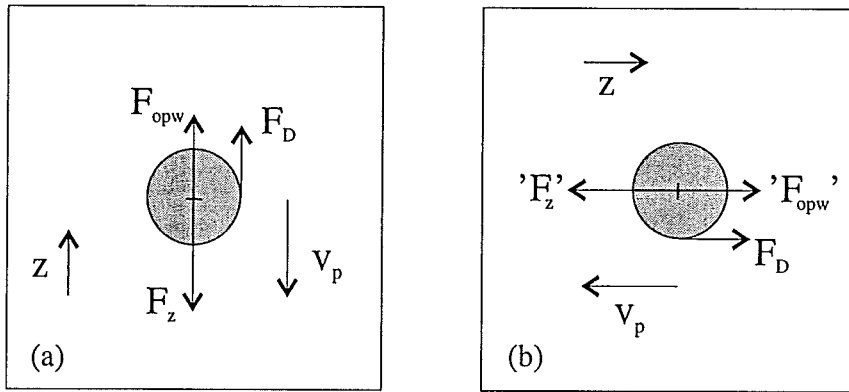
De elektrische kracht

Een andere mogelijkheid is gebruik te maken van de elektrische kracht om een zijwaartse kracht te genereren. Hierbij treden echter ook ongewenste problemen op. Bekijk een geladen deeltje, dat met een constante snelheid v_p door een fluïdum valt en plotseling in een homogeen elektrisch veld komt, dat bijvoorbeeld aanwezig is tussen twee vlakke condensatorplaten. Om een constante zijwaartse kracht te krijgen, dienen de veldlijnen in dit geval evenwijdig te zijn. Aan de randen van de platen zal het veld echter altijd gekromd zijn, hetgeen een niet-constante kracht teweeg zal brengen. Naast dit probleem treedt er nog een andere complicatie op. Voor een constante kracht dient immers ook de lading op het deeltje constant te zijn. Ten gevolge van geleiding echter zal de lading langzaam maar zeker van het deeltje af het fluïdum in gaan, hetgeen ervoor zorgt, dat de lading en dus ook de kracht niet constant is. Alhoewel er niet-geleidende fluïda bestaan, zoals bijvoorbeeld oliën, bevatten deze vaak verontreinigingen van water, hetgeen toch voor geleiding zal zorgen, waardoor het deeltje zijn lading zal verliezen. Tenslotte is het moeilijk om de lading van het deeltje te meten op het moment, dat het de elektrische kracht ondervindt. Uit al deze punten blijkt wel, dat het ook met de elektrische kracht niet mogelijk is om een constante zijwaartse kracht te genereren.

Er dient dus gezocht te worden naar een andere oplossing om een constante zijwaartse kracht op het deeltje te verkrijgen. In plaats van direct een kracht op het deeltje uit te oefenen, is het ook mogelijk om het omringende medium te versnellen, hetgeen een kracht op het kogeltje tot gevolg heeft. Deze methode is in dit onderzoek gebruikt en het principe hiervan zal nu uitgelegd worden.

3.1.2 Versnellen omgeving

Deze methode berust op een geheel ander principe, dan de twee voorgaande methodes, waarbij er op het kogeltje direct een zijwaartse kracht wordt uitgeoefend. Bekijk een kogeltje, dat éénparig verticaal valt in een bak met water. Plotseling wordt deze bak met water in zijwaartse richting versneld. De vloeistof in de bak zal uiteraard ook versneld worden en dit heeft op het kogeltje een zijwaartse kracht tot gevolg. Als de bak éénparig zijwaarts versneld wordt en geheel gevuld is, zodat er in de bak geen stroming kan ontstaan ten



Figuur 3.1: Krachten op een bol, bewegend (a): in verticale richting en (b): in horizontale richting

gevolge van het versnellen, zal er een constante zijwaartse kracht op het kogeltje werken. Indien nu een waarnemer met de bak meebeweegt en de bak éénparig naar rechts versnelt, dan lijkt het vanuit het oogpunt van de meebewegende waarnemer alsof het kogeltje een versnelde beweging naar links uitvoert, mits uiteraard de dichtheid van het kogeltje groter is dan de dichtheid van het fluïdum. Deze versnelde beweging van het kogeltje vindt dus plaats ten gevolge van een *constante* zijwaartse kracht, die op het kogeltje werkt. Dit is nu juist het gewenste en door de omgeving éénparig te versnellen is het beoogde doel derhalve bereikt. Er dient echter wel zorgvuldig voor gezorgd te worden, dat de bak met water perfect luchtvrij is. Eén enkel luchtbelletje zorgt al voor stroming in de bak, hetgeen funest is voor een éénparige zijwaartse versnelling.

Aangezien het kogeltje ook een beweging in horizontale richting gaat uitvoeren, dient ook in die richting de bewegingsvergelijking opgesteld te worden.

Een meebewegende waarnemer bevindt zich niet in een inertiaalstelsel. De zijwaartse versnelling van de kar en dus ook van dit niet-inertiaalstelsel heeft tot gevolg, dat de waarnemer de kogel zijwaarts ziet versnellen onder invloed van een kracht, die hij als een horizontale gravitatiekracht registreert. Deze kracht is echter geen fysisch aanwezige kracht, maar een schijnkracht, die ingevoerd dient te worden bij versnellende coördinatenstelsels. Ten gevolge van het versnellen van het stelsel wordt er ook een schijn-opwaartse kracht waargenomen. Voor een meebewegende waarnemer lijkt de situatie in horizontale richting dus geheel analoog aan de val van een kogeltje onder invloed van de zwaartekracht. In figuur 3.1 is dit schematisch weergegeven.

In verticale richting levert een krachtenbalans voor de bewegingsvergelijking:

$$V_p \rho_p \frac{dv_p}{dt} = V_p (\rho_p - \rho_f) g - F_D. \quad (3.1)$$

In deze vergelijking is dv_p/dt de versnelling, die het kogeltje krijgt, en is de eerste term na het gelijktaken de zwaartekracht verminderd met de opwaartse kracht. Omdat slechts een één dimensionale situatie bekeken wordt, is er geen gebruik gemaakt van vectornotatie.

Door de verticale situatie te “kantelen” kan de horizontale situatie afgeleid worden. Door het versnellen van de vloeistof ontstaat er in de bak een statische drukverschil, hetgeen

een “opwaartse kracht” tot gevolg heeft. In plaats van de zwaartekrachtsversnelling zorgt nu de versnelling van de bak voor de versnelling van de kogel. Geven we de versnelling van de bak weer met a_k , dan wordt de grootte van de “opwaartse kracht” $V_p \rho_f a_k$. De bewegingsvergelijking in horizontale richting luidt dan:

$$V_p \rho_p \frac{dv_p}{dt} = V_p (\rho_p - \rho_f) a_k - F_D. \quad (3.2)$$

Het samenvoegen van deze twee ééndimensionale situaties levert de reeds eerder besproken vergelijking (2.5) en luidt:

$$V_p \rho_p \frac{dv_p}{dt} = V_p (\rho_p - \rho_f) \underline{g} + \underline{F}_D, \quad (2.5)$$

met $\underline{g}$ de vector: $\underline{g} = (a_k, g)^T$.

De weerstandskracht F_D is, zoals in het vorige hoofdstuk is beschreven, enkel een functie van de relatieve snelheid en de relatieve versnelling. Kortom, de bewegingsvergelijking van het deeltje bevat alleen grootheden, die in principe experimenteel bepaald kunnen worden. Rest nu enkel nog de vraag hoe de weerstandskracht F_D te modelleren.

In de nu volgende paragraaf worden de verschillende in dit onderzoek gebruikte modellen uiteen gezet.

3.2 Modelleren weerstandskracht

In dit onderzoek is de weerstandskracht op een aantal manieren gemodelleerd. Allereerst is getracht alle bijdragen aan de weerstandskracht te vangen in één enkele weerstandscoefficiënt C_D . Dit is de meest eenvoudige methode, maar bevat weinig fysische betekenis. Daarnaast is ook getracht de weerstandskracht te modelleren door de virtuele massa expliciet te beschouwen, in combinatie met de stationaire weerstandscoefficiënt. Deze methode komt overeen met het gebruiken van vergelijking (2.39), waarbij de laatste term, de Basset-kracht, verwaarloosd is. De beide methoden zullen in de volgende subparagrafen apart beschreven worden.

De invloed van de Basset-kracht zal in dit gehele onderzoek verwaarloosd worden. De Basset-kracht is namelijk de enige kracht, die afhankelijk is van de vloeistofviscositeit. Aangezien in dit onderzoek een bol in water wordt beschouwd en water een lage viscositeit bezit, zal de Basset-kracht een marginale bijdrage leveren aan de totale weerstandskracht. In bijlage B is een numerieke afschatting van de kracht opgenomen, waaruit blijkt, dat verwaarlozing geoorloofd is.

3.2.1 Gebruik van een overall weerstandscoefficiënt

Indien één enkele coëfficiënt gebruikt wordt om de weerstandskracht te modelleren, luidt de uitdrukking voor de weerstandskracht F_D :

$$\underline{F}_D = C_D A_\perp \frac{1}{2} \rho_f |\underline{v}_r| \underline{v}_r. \quad (3.3)$$

Gezien het feit, dat bij instationaire bewegingen virtuele massa- en geschiedenis effecten een rol gaan spelen, is eenvoudig in te zien, dat het modelleren met een overall weerstandscoefficiënt weinig fysische betekenis heeft. Het beste, dat over C_D in bovenstaande definitie gezegd kan worden, is, dat het de gecombineerde effecten van verschillende vloeistofkrachten combineert, waarvan er een afhangt van de gehele geschiedenis van de beweging van het deeltje.

Geven we de x - en y -componenten van de snelheid van respectievelijk de vloeistof en het kogeltje weer met $v_{f,x}$, $v_{f,y}$, $v_{p,x}$ en $v_{p,y}$, dan luidt de ontbinding van de weerstandskracht in de x -richting:

$$F_{D,x} = C_D A_{\perp} \frac{1}{2} \rho_f |\underline{v}_f - \underline{v}_p| (v_{f,x} - v_{p,x}). \quad (3.4)$$

De vergelijking voor de weerstandskracht in de y -richting luidt geheel analoog, onder verwisseling van x in y :

$$F_{D,y} = C_D A_{\perp} \frac{1}{2} \rho_f |\underline{v}_f - \underline{v}_p| (v_{f,y} - v_{p,y}). \quad (3.5)$$

De weerstandskracht werkt in de richting van de relatieve snelheid, dus het Reynoldsgetal dient ook betrokken te worden op de relatieve snelheid en wordt:

$$Re = \frac{\rho_f |\underline{v}_f - \underline{v}_p| D}{\eta_f} = \frac{\rho_f D}{\eta_f} \sqrt{(v_{f,x} - v_{p,x})^2 + (v_{f,y} - v_{p,y})^2}. \quad (3.6)$$

Zoals te zien is, koppelt het Reynoldsgetal, evenals $|\underline{v}_f - \underline{v}_p|$ in de uitdrukkingen voor de weerstandskracht, de bewegingsvergelijkingen in de x - en y -richting aan elkaar, ondanks dat de twee richtingen loodrecht op elkaar staan. Een fluctuatie in de vloeistofstroming in horizontale richting beïnvloedt dus de verticale valsnelheid van een deeltje.

Door de vergelijkingen (3.4) en (3.5) nu in te vullen in vergelijking (2.5) volgen twee vergelijkingen, waarvan alle grootheden, op C_D na, in principe gemeten kunnen worden. De vergelijkingen luiden:

$$\text{x-richting:} \quad C_D = \frac{4(\rho_p - \rho_f) D a_{p,x} - 4\rho_p D a_{p,x}}{3\rho_f \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2} v_{p,x}}, \quad (3.7)$$

$$\text{y-richting:} \quad C_D = \frac{4(\rho_p - \rho_f) D a_{p,y} - 4\rho_p D a_{p,y}}{3\rho_f \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2} v_{p,y}}. \quad (3.8)$$

In bovenstaande vergelijkingen zijn $a_{p,x}$ en $a_{p,y}$ de versnelling van het kogeltje in respectievelijk de x - en y -richting. Daarnaast is, aangezien in dit onderzoek de bak met water geheel gevuld is en er dus geen stroming in de bak optreedt, de vloeistofsnelheid $\underline{v}_f$ gelijk aan nul gesteld. Door C_D te bepalen als functie van het Reynoldsgetal kan voor de instationaire beweging een vergelijking gemaakt worden met de stationaire weerstandscurve. Daarnaast kan de afhankelijkheid van de versnellingsmodulus Ac bepaald worden, door C_D tegen Ac in een grafiek uit te zetten.

Door enkele onderzoekers zijn correlaties voor het quotiënt van de overall weerstandscoefficiënt en de stationaire weerstandscoefficiënt ($C_D/C_{D,s}$) en het verschil tussen deze

beide coëfficiënten ($C_D - C_{D,s}$) bepaald. De achterliggende gedachte bij deze beide afleidingen is, dat het delen door of het aftrekken van de stationaire weerstandscoefficiënt de invloed van het Reynoldsgetal zou elimineren. Het quotiënt of het verschil zou dan nog enkel een functie zijn van de versnellingsmodulus.

Karanflian en Kotas [19] beschouwden een harmonisch trillende bol in een verder onverstoorde vloeistof. Zij vonden, dat de relatie tussen de overall weerstandscoefficiënt, het Reynoldsgetal en de versnellingsmodulus kon worden weergegeven door:

$$\frac{C_D}{C_{D,s}} = (Ac^{-1} + 1)^\alpha, \quad (3.9)$$

waarbij zij via een kleinste kwadraten fit voor de constante α vonden: $\alpha = 1.2 \pm 0.03$. Het Reynoldsregime bedroeg $10^2 < Re < 10^4$ en de versnellingsmodulus varieerde tussen 0.1 en ∞ .

Tsuji, Kato en Tanaka [20] hebben experimenten uitgevoerd aan een star bevestigde bol, die in een windtunnel met een periodiek wisselende luchtstroom omstroomd werden. Voor het verschil tussen de overall weerstandscoefficiënt en de stationaire weerstandscoefficiënt hebben zij de volgende uitdrukking afgeleid:

$$C_D - C_{D,s} = \frac{2.7}{Ac}. \quad (3.10)$$

De Reynolds- en versnellingsmodulusregimes bedroegen respectievelijk $8 \cdot 10^3 < Re < 16 \cdot 10^3$ en $-\infty < Ac < -12.5$ en $12.5 < Ac < \infty$.

3.2.2 Gebruik van $C_{D,s}$ en C_A

Meer fysische betekenis dan bij het gebruik van een overall weerstandscoefficiënt wordt verkregen door expliciet virtuele massa effecten in rekening te brengen. Dit komt overeen met het gebruik van de vergelijking van Odar en Hamilton, vergelijking (2.39), waarbij de Basset-kracht verwaarloosd wordt. Naast de virtuele-massa-coëfficiënt C_A wordt de instantane stationaire weerstandscoefficiënt $C_{D,s}$ gebruikt. De weerstandskracht in bijvoorbeeld de x -richting ziet er dan als volgt uit:

$$F_{D,x} = C_{D,s} A \perp \frac{1}{2} \rho_f |\underline{v}_f - \underline{v}_p| (v_{f,x} - v_{p,x}) + C_A \frac{1}{6} \pi D^3 \rho_f \frac{d(v_{f,x} - v_{p,x})}{dt}. \quad (3.11)$$

Een geheel analoge uitdrukking geldt voor de weerstandskracht in de y -richting.

Bovenstaande vergelijking voor de weerstandskracht in de x -richting gecombineerd met vergelijking (2.5) levert voor de virtuele-massa-coëfficiënt:

$$C_A = \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} a_k - \frac{3}{4} \frac{C_{D,s}}{D} \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2} v_{p,x} \right) \frac{1}{a_{p,x}} - \frac{\rho_p}{\rho_f}. \quad (3.12)$$

Een gelijksoortige uitdrukking is af te leiden met de uitdrukking van de weerstandskracht in de y -richting. Deze luidt:

$$C_A = \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} g - \frac{3}{4} \frac{C_{D,s}}{D} \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2} v_{p,y} \right) \frac{1}{a_{p,y}} - \frac{\rho_p}{\rho_f}. \quad (3.13)$$

Met behulp van deze uitdrukking kan C_A bepaald worden als functie van de versnellingsmodulus en kan er wederom een vergelijking met de literatuur gemaakt worden.

Hoofdstuk 4

Experimentele setup

In dit hoofdstuk wordt allereerst de gebruikte meetopstelling besproken, waarna van enkele onderdelen een gedetailleerde beschrijving volgt. Tot slot zullen de wijzigingen, die aan de gebruikte opstelling, ten opzichte van de reeds bestaande opstelling, zijn aangebracht, de revue passeren.

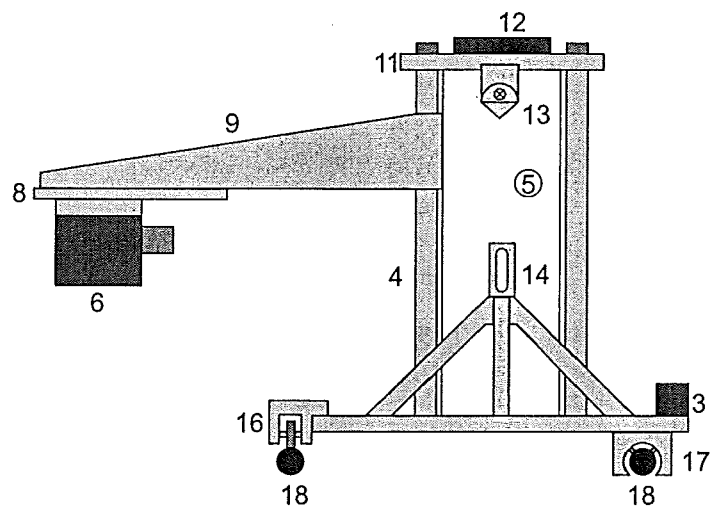
4.1 Meetopstelling en meetmethode

In deze paragraaf wordt een algemene beschrijving van de gebruikte meetopstelling en meetmethode gegeven. In de volgende paragraaf volgt een gedetailleerde beschrijving van enkele onderdelen. De nummers, die in de tekst van deze en de volgende paragraaf voorkomen, refereren naar de nummers, in de hieronder gepresenteerde meetopstelling staan.

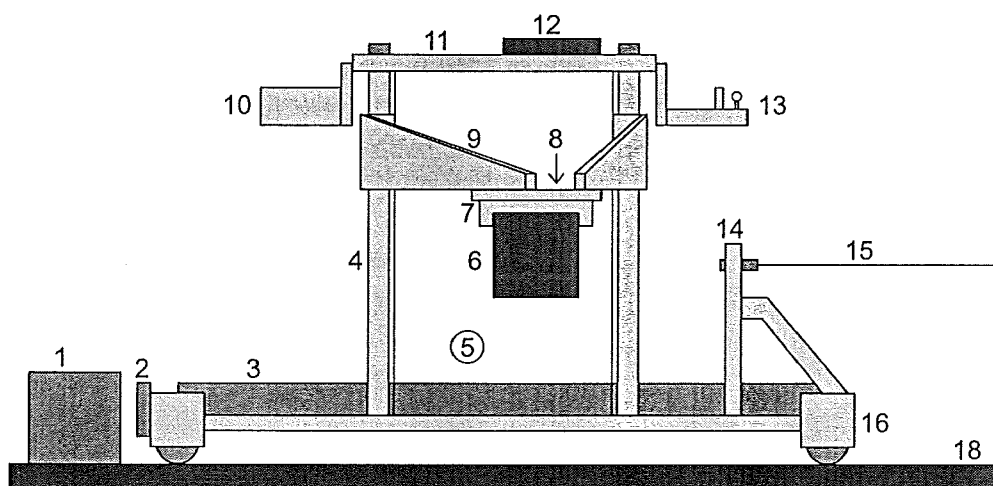
In de figuren 4.1 en 4.2 is de in dit onderzoek gebruikte meetopstelling op schaal door middel van een voor- en zij-aanzicht weergegeven. Het hoofdbestanddeel van de opstelling is een aluminium kar (afmetingen $l \times b \times h = 65 \times 39 \times 35$ cm), die op horizontale ronde rails (18) met een lengte $l = 2.5$ m geplaatst is, en die met gelagerde wieltjes (16 en 17) over deze rails kan bewegen. Op deze kar bevindt zich een polycarbonaten bak (5), gevuld met water, waarin de kogel valt. Deze bak is ingeklemd door een deksel (11), die bevestigd is aan vier aluminium trekstaven (4).

De opstelling bevat twee electromagneten, één aan het begin van de rails (1) en één in de bovenzijde van de bak (12). De electromagneet aan het begin van de baan dient om de kar, voordat deze de versnelde beweging gaat uitvoeren, in zijn beginstand te kunnen positioneren. Hiertoe bevindt zich aan de achterzijde van de kar een ijzeren plaatje (2). De electromagneet aan de bovenzijde van de bak heeft eenzelfde soort functie als de electromagneet aan het begin van de baan en wel om de kogel in de beginstand te bevestigen.

Een meting wordt gestart door de electromagneet van het kogeltje te ontkrachten, waarna de kogel omlaag zal vallen. Op het moment, dat de kogel zijn éénparige verticale snelheid bereikt heeft, dient de electromagneet van de kar ontkracht te worden, waardoor de kar zal gaan versnellen. Deze horizontale versnelling wordt teweeg gebracht door loodblokken, die met een staalkabel (15) aan een steun (14) aan de kar bevestigd zijn. Aan het einde



Figuur 4.1: Vooraanzicht van de kar



- | | |
|--|--|
| 1. Electromagneet aan begin van de baan | 10. Fotodiode van triggermechanisme |
| 2. IJzeren plaatje om kar aan magneet te bevestigen | 11. Deksel voor inklemming bak op kar |
| 3. Contragewicht | 12. Electromagneet voor bevestiging kogel |
| 4. Trekstaven | 13. Lichtbron van triggermechanisme |
| 5. Bak met water | 14. Bevestigingssteun voor kabel |
| 6. Digitale camera | 15. Trekkabel |
| 7. Extra versteviging aan camera | 16. Lagering met 1 wielje loodrecht op rail |
| 8. Plaatje, waaraan camera in horizontale richting verplaatst kan worden | 17. Lagering met twee wieljes onder hoek van 90 graden op rail |
| 9. Verticaal beweegbare arm | 18. Rail |

Figuur 4.2: Zij-aanzicht van de kar

van de baan hangen de loodblokken over een katrol (in de figuur niet weergegeven) en vallen aldaar verticaal omlaag.

Tijdens de in horizontale richting versnelde beweging worden met een digitale camera (6) met hoge frequentie opnames van het kogeltje gemaakt. Deze camera is met twee aluminium armen (9) aan de kar bevestigd en is zowel in verticale als in horizontale richting verstelbaar. In verticale richting kan de camera langs de trekstaven verschoven worden. Voor een verplaatsing in horizontale richting is een aluminium plaatje aan de armen bevestigd met daarin een sleuf, waardoor de camera dichterbij de bak toe of juist van de bak af geschoven kan worden. Uit veiligheidsoverwegingen is de camera bovendien extra verstevigd met behulp van een aluminium plaatje met opstaande randen (7).

Omdat het ontkrachten van de electromagneet aan het begin van de baan en het aansturen van de digitale camera tegelijk dienen te gebeuren, op het moment, dat de kogel met een éénparige snelheid verticaal valt, is er een triggermechanisme ontworpen, waarmee beide handelingen automatisch worden verricht. Het optische deel van dit triggermechanisme is aan de kar bevestigd (10 en 13). De werking van het triggermechanisme zal in de volgende paragraaf aan de orde komen.

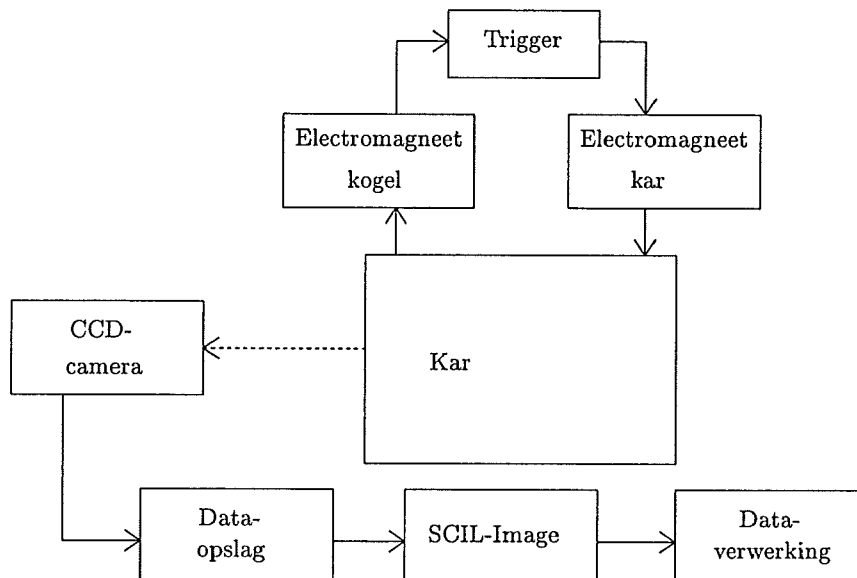
Alle elektronische onderdelen van de opstelling, dat wil zeggen de beide electromagneten, de digitale camera en het triggermechanisme, worden aangestuurd via één elektrische schakeling. Aan het begin van een meting worden met behulp van deze schakeling de beide electromagneten geactiveerd. Hierdoor kunnen de kar en de kogel (in dit onderzoek met een diameter $D = 2$ mm) in de beginstanden gepositioneerd worden. De eigenlijke meting wordt gestart op het moment, dat de electromagneet aan de bovenzijde van de bak wordt ontkracht en de kogel valt.

Op het moment, dat de kar versnelt, werkt er een zijwaartse kracht op de kogel. Met de digitale camera worden nu met een frequentie van 750 Hz opnames van de kogel gemaakt. Om een goed contrast te krijgen tussen de kogeltjes en de achtergrond zijn achter de bak, aan de andere zijde dan de camera, twee grote halogeenlampen achter wit melkglas geplaatst. Dit levert voor de opnames donkere kogeltjes tegen een witte achtergrond. De functie van het melkglas is het verkrijgen van een *homogene* witte achtergrond. Het belang van een homogene achtergrond wordt in hoofdstuk 5 uitgelegd. Aldus wordt als het ware een film van de beweging van de kogel verkregen en deze "filmpjes" worden opgeslagen op een data-acquisitie-systeem. Vervolgens kunnen zij in het beeldbewerkingspakket SCIL-Image [21] ingelezen worden, waarna van de kogel onder meer de plaats als functie van de tijd bepaald kan worden. Er is een C-programma geschreven, dat na executie door SCIL-Image de plaats-tijd datafile als uitvoer geeft. Verschillende fitprocedures toegepast op deze datafile verschaffen diverse data over de beweging van de kogel. In hoofdstuk 5 wordt nader ingegaan op de beeldbewerkingsprocedure.

In figuur 4.3 is schematisch weergegeven hoe de gehele meet- en verwerkingsprocedure verloopt.

4.2 Gedetailleerde beschrijving van enkele onderdelen

In deze paragraaf zal op enkele onderdelen van de opstelling dieper ingegaan worden. Achtereenvolgens zullen de volgende onderwerpen aan bod komen:



Figuur 4.3: Schematische weergave van de experimentele procedure

- De kogeltjes
- De bak
- De kar
- De loodblokken
- Het triggermechanisme
- De digitale camera

De kogeltjes

De in dit onderzoek gebruikte kogeltjes zijn ijzeren kogeltjes van het merk SKF (type RB-2/III), met een diameter van 2 mm. Dergelijke kogels worden veelal gebruikt in kogellagers, hetgeen impliceert, dat de kogeltjes als ideaal rond beschouwd mogen worden. Deze kogeltjes zijn magnetiseerbaar, hetgeen noodzakelijk is, aangezien de kogeltjes als beginpositie bovenaan in de bak moeten hangen aan een electromagneet. De dichtheid van de kogeltjes is experimenteel bepaald, door de massa en de diameter met respectievelijk een substitutiebalans (type *Mettler B5*) en een schuifmaat te bepalen. Dit leverde voor de dichtheid ρ_p van de kogeltjes:

$$\rho_p = 7.80 \pm 0.02 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

en dit is inderdaad gelijk aan de dichtheid van ijzer.

De bak

De experimenten zijn uitgevoerd in een rechthoekige doorzichtige polycarbonaten bak (5). Vaak wordt voor het vervaardigen van doorzichtige bakken perspex gebruikt, maar polycarbonaat is een sterkere stof dan perspex, hetgeen wenselijk is, gelet op de grote krachten, die tijdens het versnellen en het afremmen aan het eind van het experiment op de bak worden uitgeoefend. Tevens is polycarbonaat in hogere mate bestand tegen krassen, hetgeen een goede lichtdoorlatendheid garandeert. De interne afmetingen van de bak zijn: $l \times b \times h = 20 \times 10 \times 30$ cm.

De gebruikte bak is overgenomen uit de opstelling van Talman [3]. De afmetingen van de bak zijn gekozen als een compromis tussen twee overwegingen. Enerzijds dient de bak zo groot mogelijk te zijn om wandinvloeden te minimaliseren. Anderzijds is een kleine bak wenselijk om de massa zo klein mogelijk te houden, hetgeen een grotere versnelling van de kar tot gevolg heeft. Een vuistregel zegt, dat wandinvloeden te verwaarlozen zijn indien een deeltje zich op een afstand van tien of meer maal zijn diameter van de wand bevindt. In dit onderzoek wordt met de afmetingen van de gebruikte bak en het kogeltje met een diameter van 2 mm aan deze vuistregel voldaan.

De kar

Om de massa van de kar zo klein mogelijk te houden is deze gemaakt van aluminium. Ter verkrijging van een verdere reductie van de massa, zijn uit de bodemplaat van de kar grote stukken metaal gefreesd. Op deze bodemplaat bevinden zich vier verticale trekstaven (4), waarop de deksel, die voor de inklemming van de bak op de kar zorgt, wordt bevestigd. Dit is goed zichtbaar in de figuren 4.1 en 4.2. Aan de deksel zijn bovendien de optische componenten van het triggermechanisme bevestigd.

De aluminium trekstaven hebben een diameter van 2 cm. Deze dienen relatief groot te zijn, want aan twee van de vier staven is met behulp van twee aluminium armen de digitale camera bevestigd. Tijdens de versnelde beweging levert dit dan een aanzienlijke kracht op de staven. Om het zwaartepunt van de kar in het midden te houden, is een contragewicht (3) gebruikt om voor het gewicht van de camera te compenseren.

De kar staat op vier punten op de rails (18). Aan een zijde staat bij beide hoekpunten één gelagerd wiel (16) loodrecht op de baan, terwijl aan de andere zijde gebruik is gemaakt van in het totaal vier gelagerde wieltjes. Aan deze zijde staan bij beide hoekpunten twee wieltjes (17) loodrecht op de baan, terwijl de wieltjes onderling ook loodrecht op elkaar staan. Omdat de kar op deze wijze los op de baan komt te staan, zijn er aan de kant, waar vier wieltjes worden gebruikt, twee beveiligingen aangebracht, waardoor de kar niet van de baan kan raken. Het principe van één wiel aan een zijde, twee wieltjes onderling loodrecht aan de andere zijde en de beveiliging zijn zichtbaar in figuur 4.1. Tevens is duidelijk zichtbaar, dat de kar los staat op de rails, waaruit dus de noodzaak voor de beveiliging blijkt.

De loodblokken

In dit onderzoek is gebruik gemaakt van twee loodblokken om de kar en de bak water met de kogel te versnellen. De loodblokken zijn aan de kar bevestigd met een kabel (15) en hangen aan het einde van de baan over een katrol. Hier kunnen zij over een afstand van ongeveer een halve meter vallen, voordat zij op een schuimrubber kussen op de grond vallen. De kar kan dus ook over een afstand van een halve meter versnellen. De totale massa m_b van de beide blokken is:

$$m_b = 23.35 \pm 0.01 \text{ kg.}$$

Gewenst is om het trekpunt op een lijn door het massamiddelpunt van de kar aan te laten grijpen. Aangezien de camera in hoogte verstelbaar is, is ook de katrol alsmede het bevestigingspunt van de kabel aan de kar in hoogte verstelbaar gemaakt.

Het triggermechanisme

De camera moet pas beginnen met het maken van opnames als de kogel een constante verticale snelheid heeft. Dit is ook het moment, waarop de electromagneet de kar los dient te laten. De bak, waarin de kogel valt, is slechts 30 cm hoog, dus handmatig aansturen van de electromagneet en de camera zal niet gaan, aangezien de kogel in nog geen seconde tijd de bodem van de bak bereikt zal hebben. Hiertoe is een triggermechanisme ontworpen, dat beide handelingen automatisch verricht.

Het triggersysteem bestaat uit een licht emitterende diode (LED) aan de voorzijde van de bak, die door de bak op een fotodiode aan de achterkant van de bak schijnt. Tussen de LED en de fotodiode bevinden zich enkele lenzen en een spleetje. Dit spleetje is aangebracht om een lichtsheets te verkrijgen en de lenzen zijn dusdanig ingesteld, dat het lichtsheets gefocuseerd is op een plaats exact onder de startpositie van de kogel. Net nadat de kogel is losgekomen van de electromagneet, doorbreekt hij het lichtsheets en op dat moment zal de fotodiode een afname van de lichtintensiteit registreren. Hierop zal de diode een puls afgeven aan de elektronische schakeling. De schakeling op zijn beurt zal nu de camera aansturen en de magneet van de kar ontkrachten. Het afgeven van deze beide stuurpulsen kan onmiddellijk gebeuren, nadat de puls van de fotodiode ontvangen is. Daarnaast beschikt de schakeling ook over een timer, die het mogelijk maakt om deze pulsen pas na een extern in te stellen vertragingstijd af te geven, dus bijvoorbeeld op het moment, dat de kogel met zijn éénparige verticale snelheid valt. Op deze manier is het doel bereikt, dat de camera en de electromagneet aan het begin van de baan pas aangestuurd worden op het moment, dat de kogel de constante verticale snelheid heeft bereikt. De vertragingstijd is instelbaar van 0 tot 2 seconden met een stapgrootte van 2 milliseconde.

Indien de vertragingstijd ingesteld is, is een druk op de knop om de electromagneet in de deksel te ontkrachten en dus het kogeltje te laten vallen voldoende om een gehele meting te starten.

Om het startmoment van de beweging van de kar te registreren, is aan de kar een LED bevestigd, die gaat branden op het moment, dat de kar loskomt van de magneet. Als de kar tegen de magneet geplaatst is, is een microschakelaar ingedrukt, welke uitspringt bij

het loskomen van de kar van de magneet. In bijlage B is een bespreking over het bepalen van het startmoment en de daarbij optredende fout opgenomen.

De digitale camera

In dit onderzoek is een *Dalsa CA-D1-0128* digitale camera gebruikt. Dit is een zogenaamde CCD (*Charge Coupled Device*) -camera. Deze camera's zijn genoemd naar de chip, die het fotorolletje in normale fotocamera's vervangt. Een CCD-chip bestaat uit een groot aantal minuscule vierkante elementen, *pixels* genaamd, die elk individueel de helderheid van het opvallende licht registreren.

De *Dalsa CA-D1-0128* bezit een vierkante chip van 2.048x2.048 mm, waarop zich 128x128 vierkante pixels bevinden. Dit komt overeen met een pixelgrootte van 16 μm . Deze camera bezit een maximale opnamefrequentie van 750 Hz. De camera, die Talman [3] gebruikte, bezat 256x256 pixels, maar had slechts een maximale opnamefrequentie van 200 Hz. Hieruit blijkt dus, dat het voordeel van een hoge beeldfrequentie ten koste gaat van het aantal pixels, ofwel ten koste van de ruimtelijke discretisatie. De afname van de discretisatie met toenemende beeldfrequentie gaat ongeveer één op één.

De camera is aangesloten op een computer, waarop een besturingsprogramma draait. Hiermee kunnen onder andere de opnamefrequentie worden ingesteld en de opgenomen filmpjes worden bewaard. Het gehele systeem wordt het *IReS*-systeem (*Image Registration System*) genoemd. Met dit systeem kan een filmpje maximaal 1097 opnames bevatten, hetgeen bij een opnamefrequentie van 750 Hz neerkomt op een maximale opnametijd van ongeveer 1.5 seconde.

4.3 Veranderingen aan de voorgaande opstelling

Talman [3] heeft een soortgelijke opstelling gebruikt als in dit onderzoek gebruikt is. Aan het begin van dit onderzoek is geprobeerd om de zijwaartse versnelling van de bak met een robot te bewerkstelligen, maar toen bleek, dat de robot ook niet aan de eis van het constant zijn van de versnelling kon voldoen, is ervoor gekozen om met het principe van de reeds bestaande opstelling verder te werken.

In plaats van een constante versnelling produceerde de robot een zeer hoge startversnelling, waarna de versnelling zeer snel omlaag ging. Dit wordt veroorzaakt, doordat de motoren van de robot onderdeel zijn van een servosysteem. Een dergelijk systeem is in principe geschikt om een éénparig versnelde beweging uit te voeren. De servomotoren dienen echter op een minimaal toerental te draaien. Het vanuit stilstand op dit toerental komen heeft een hoge beginversnelling tot gevolg. Indien dit toerental bereikt is, kan wel een éénparige versnelde beweging uitgevoerd worden. Omdat de verschijnselen in dit onderzoek op zeer kleine tijdschalen plaatsvinden en een constante versnelling gewenst is, is de robot ongeschikt. Er zal in dit verslag verder niet op de robot ingegaan worden.

Omdat Talman met de door haar gebruikte opstelling geen reproduceerbare resultaten ten aanzien van de versnelling van de kar verkreeg en bovendien geen éénparige versnelling vond, diende de bestaande opstelling echter wel op meerdere fronten veranderd en verbeterd te worden. In het wijzigen van de opstelling is veel tijd gestoken en in deze

paragraaf zullen de veranderingen ten opzichte van de oude opstelling besproken worden. De opstelling is op de volgende punten gewijzigd:

- Nieuwe kar
- Nieuwe lagering van de kar
- Nieuwe katrol
- Verhogen trekpunt van de kar
- Meebewegende camera
- Stabiel triggermechanisme

Deze punten zullen nu stuk voor stuk behandeld worden.

Nieuwe kar

De grootste wijziging aan de opstelling was het maken van een geheel nieuwe kar. Zoals in de figuren 4.1 en 4.2 te zien is, wordt er gebruik gemaakt van een meebewegende camera. Talman [3] werkte met een camera, die los stond van de kar en aan de door haar gebruikte kar kon geen camera bevestigd worden. Om deze reden diende er een nieuwe kar gemaakt te worden. Het frame van de kar van Talman bestond uit holle buizen. Gelet op de benodigde starheid, aangezien er een camera aan de kar bevestigd wordt, dient het frame van de nieuwe kar massief zijn. Om de massa van de kar zo klein mogelijk te houden, is deze gemaakt van aluminium, aangezien aluminium een lagere dichtheid heeft dan ijzer ($\rho_{Al} = 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ tegen $\rho_{Fe} = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$).

Een zo klein mogelijke massa van de kar is wenselijk om een zo groot mogelijk versnelling van de kar te verkrijgen. Immers de theoretische haalbare versnelling van de kar volgt uit de volgende formule, die zelf uit een krachtenbalans volgt:

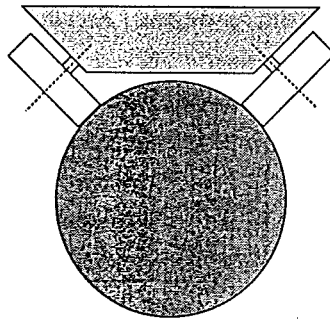
$$a_{k,th} = \frac{m_b}{m_k + m_b} g, \quad (4.1)$$

met: $a_{k,th}$ = de theoretisch haalbare versnelling van de kar [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$],
 m_b = massa van het lood, dat voor de versnelling zorgt [kg],
 m_k = massa van de kar met de bak water [kg],
 g = zwaartekrachtsversnelling [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$].

In deze formule is de massa van de kabel tussen het lood en de kar verwaarloosd. In de formule is te zien, dat er door de massa van de kar gedeeld wordt, dus een kleine massa zorgt voor een grote versnelling. Een zo klein mogelijke massa van de kar is tevens wenselijk met het oog op de wrijvingskracht F_w met de baan, omdat deze wrijvingskracht rechtevenredig is met de normaalkracht F_n op de baan, volgens de formule

$$F_w = \mu F_n, \quad (4.2)$$

met μ de wrijvingscoëfficiënt. Er zijn twee soorten wrijvingscoëfficiënten, te weten de statische wrijvingscoëfficiënt μ_s , die werkt als een voorwerp stilstaat, en de dynamische wrijvingscoëfficiënt μ_d , die aanwezig is bij bewegende voorwerpen. In de regel is de dynamische wrijvingscoëfficiënt kleiner dan de statische wrijvingscoëfficiënt.



Figuur 4.4: Dwarsdoorsnede van de nieuwe lagering met twee wieltjes onder een hoek van 90 graden op de rail

Nieuwe lagering van de kar

De nieuwe kar is voorzien van een ander soort lagering dan de oude kar. De oude kar was op de vier hoekpunten gelagerd. Aan één zijde van de kar zaten twee wieltjes, waardoor de kar aan die zijde los op de rail stond. Aan de andere zijde zaten twee zogenaamde rollagers, waardoor de kar niet los kon komen van de rails. Rollagers zijn lagers, die de omtrek van een rail voor ongeveer tweederde omsluiten en waarin vele kogeltjes zitten, die voor de mechanische geleiding langs de baan zorgen. Door de vele kogeltjes in deze lagers, treedt er een aanzienlijke wrijving op, die een éénparig versnelde beweging van de kar verhindert. Deze rollagers dienden vervangen te worden. Bovendien bleken de vier lageringen onderling niet goed uitgelijnd. Bij het aanbrengen van de nieuwe lageringen diende dus zorgvuldig op de uitlijning gelet te worden.

De rollagers zijn beide vervangen door twee wieltjes, die onderling onder een hoek van 90 graden op de rail staan. In figuur 4.4 is het principe van deze lagering via een dwarsdoorsnede weergegeven. De grijze cirkel is de rail, met daarop de wieltjes. Het massieve vierhoekige blok, waaraan de wieltjes gemonteerd zitten, is aan de bovenzijde bevestigd aan de kar. De gestippelde lijntjes duiden op de assen van de wieltjes.

Met deze lagering komt de kar volledig los te staan op de rails, maar kan door de hoek tussen de wieltjes toch slechts in één richting bewegen, namelijk in de richting evenwijdig aan de rails. Om van zijn baan te geraken moet de lagering een stuk opgetild worden. Bij de start van de versnelde beweging en vooral ook bij het afremmen, zou dit kunnen gebeuren en daarom is er bij elk van deze beide lageringen een veiligheidsring om de rail aangebracht, die de rail bij de rechtlijnige beweging net niet raakt.

Nieuwe katrol

Er is ook een nieuwe katrol aan het einde van de baan geplaatst. De oude katrol was gemaakt van ijzer en bezat een ijzeren as, maar deze as was niet gelagerd. Bovendien was de katrol zodanig bevestigd, dat hij heen en weer kon bewegen. Hierdoor gebeurde het regelmatig, dat de katrol zijwaarts bewoog en tegen de schotten aankwam, waartussen hij ingeklemd zat. Al deze factoren veroorzaakten een aanzienlijke wrijving bij het roteren van de katrol, hetgeen een remmende werking had op de versnelling van de kar.

De nieuwe katrol is gemaakt van kunststof en is gelagerd. Daarnaast is de katrol dusdanig

bevestigd, dat hij niet heen en weer kan bewegen. Hierdoor roteert de katrol zeer soepel en vormt deze geen beperkende factor meer voor de versnelling van de kar. Tot slot is de ophanging van de katrol dusdanig gemaakt, dat de katrol in hoogte verstelbaar is, afhankelijk van de hoogte van het trekpunt van de kar.

Verhogen trekpunt van de kar

Bij de oude kar was het trekpunt onder aan de kar bevestigd. Het trekpunt ging dus duidelijk niet door het zwaartepunt van de kar, hetgeen een éénparige versnelling kon verhinderen. Dit is als volgt in te zien. Indien iemand *plotseling* aan de onderkant van de poten van een stoel met een gewicht erop trekt, zal deze de neiging hebben om achterover te kantelen. De kracht, waarvan de werklijn niet door het massamiddelpunt van de stoel met het voorwerp gaat, veroorzaakt een krachtmoment, hetgeen een rotatie om het massamiddelpunt tot gevolg heeft. De grootte van de hoeksnelheid is afhankelijk van het traagheidsmoment van het object, waarop de kracht werkt. Hierop zal verder niet in gegaan worden. Geïnteresseerden kunnen meer over dit onderwerp vinden in *Inleiding Mechanica* van Roest [22].

Hetzelfde principe geldt voor de kar. Als plotseling aan de onderzijde van de kar getrokken wordt, heeft deze ook de neiging om achterover te kantelen, ofwel te "stijgeren". Dit veroorzaakt een extra druk op de achterste lageringen, hetgeen nadelige gevolgen kan hebben voor het éénparig zijn van de versnelling. Tevens levert dit directe problemen op voor de beweging van de kar, aangezien de kar, zij het met beveiligingen, los staat op de baan. Door nu het trekpunt van de kar op een lijn door het massamiddelpunt te laten vallen, zijn deze problemen verholpen.

Als volgende punt zal de bevestiging van de camera aan de kar besproken worden en zal blijken, dat de camera in hoogte verstelbaar is gemaakt. Om het trekpunt toch steeds op een lijn door het zwaartepunt van de kar te kunnen laten aangrijpen, is het trekpunt ook in hoogte verstelbaar gemaakt.

Meebewegende camera

Talman [3] werkte met een camera, die los van de kar stond. Zij meette dus de beweging van de kogel tegelijk met de beweging van de kar. Om de beweging van de kogel ten opzichte van de bak te verkrijgen, diende de met een eindige nauwkeurigheid te bepalen beweging van de kar afgetrokken te worden van het gemeten beeld van de kogel in de bak. Omdat er op deze manier een extra stap nodig is om de relatieve beweging van de kogel te krijgen, worden er dus extra onnauwkeurigheden ingevoerd.

Om deze extra fouten introducerende stap te voorkomen, is ervoor gekozen om de camera aan de kar te bevestigen, zodat direct de verplaatsing van de kogel gemeten wordt. Er doen zich hierbij een aantal moeilijkheden voor.

Allereerst dient de camera star aan de bak bevestigd te worden. Indien de camera trilt, zal de beweging van de kogel met deze trilling opgenomen worden en aangezien de te meten verschijnselen op zeer kleine schaal plaatsvinden, is een kleine trilling al funest voor nauwkeurige metingen.

Daarnaast dienen veiligheidsmaatregelen ten aanzien van de camera genomen te worden.

Volgens de specificaties mag de camera maximaal een versnelling ter grootte van $3g$ krijgen. De versnellende beweging vormt wat betreft deze limiet geen probleem. In hoofdstuk 6 zal voor de maximale theoretische versnelling van de kar $a_{k,th} = 4.87 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ gevonden worden en dit is vele malen kleiner dan $3g$. Echter bij het afremmen van de kar kan de (negatieve) versnelling de limiet overschrijden. Daarom dient het afremmen van de kar zeer geleidelijk te gebeuren. Berekeningen hebben uitgewezen, dat indien het afremmen over een afstand van ongeveer 20 cm geschiedt, de limiet niet overschreden wordt en er zelfs nog een ruime marge over is.

Een derde moeilijkheid, die zich voordoet, is het bepalen van de lengte van de arm, waarmee de camera aan de kar bevestigd is. De optische chip van de CCD-camera, die 750 beeldjes per seconde kan maken, heeft een afmeting van slechts $2.048 \times 2.048 \text{ mm}$. Om met deze camera een redelijk groot opnamegebied te verkrijgen, dient de camera op grote afstand gepositioneerd te worden of dient een lens met een zeer kleine brandpuntsafstand op de camera geplaatst te worden. Uit veiligheidsoverwegingen is een lange arm ongewenst. Bovendien ontstaan er bij een lange arm problemen ten aanzien van de starheid van de bevestiging van de camera. Dus dient gekeken te worden naar een lens met een kleine brandpuntsafstand. In dit onderzoek is een *Switar H16 RX* lens gebruikt met een brandpuntsafstand $f = 10 \text{ mm}$.

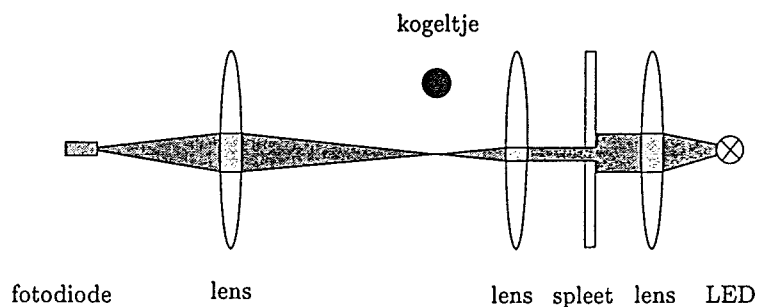
Om de kogel op verschillende plaatsen tijdens zijn val door de bak op te kunnen nemen, is de camera in hoogte verstelbaar gemaakt. Dit is gedaan door twee cilindrische bussen, waaraan de armen met de camera bevestigd waren, met inbusbouten om twee van de vier verticale aluminium staven te bevestigen. Langs deze staven konden de bussen op en neer geschoven worden.

Het laatste punt, dat aandacht verdient, indien de camera aan de kar bevestigd wordt, is de verschuiving van het massamiddelpunt. Aanvankelijk lag het zwaartepunt van de kar en de bak water in het midden van de kar, maar ten gevolge van de camera, die op een relatief grote afstand van het massamiddelpunt zit, verschuift het zwaartepunt in de richting van de camera. Zoals zojuist besproken is, dient voor een stabiele versnelde beweging het trekpunt in een vlak door het zwaartepunt te liggen en om de meetopstelling zo eenvoudig mogelijk te houden, ligt het voor de hand om het zwaartepunt in het midden van de opstelling te laten vallen. Hiertoe dient een contragewicht aan de andere zijde van de kar geplaatst te worden. Deze wordt niet, zoals de camera, aan een grote arm bevestigd, maar aan de rand van de kar geplaatst. De grootte van dit contragewicht is eenvoudig te bepalen met de welbekende hefboomregel.

Stabiel triggermechanisme

In de vorige paragraaf is beschreven hoe het gebruikte triggermechanisme werkt. Talman [3] heeft ook met een triggermechanisme gewerkt, maar het door haar gebruikte systeem was instabiel.

Zij werkte met een laserstraal, die door de bak op een fotodiode scheen. Zowel de laserstraal als de diode stonden los van de bak. De laserstraal was zo uitgelijnd, dat de kogel in zijn beginstand aan de magneet, de laserstraal onderbrak. Zodra de kogel los kwam van de magneet, viel de laserstraal op de diode, waarop een puls aan de timer van een elektronische schakeling afgegeven werd.



Figuur 4.5: Zij-aanzicht van het lenzensysteem

Omdat de laser en de fotodiode zowel los stonden van de kar als van elkaar, gebeurde het regelmatig, dat ten gevolge van trillingen, de uitlijning niet goed was en de laserstraal niet op de fotodiode viel. Hierdoor werd bij het vallen van de kogel vaak geen meting gestart. Daarnaast was de diode niet optimaal geschikt voor de hoge lichtintensiteit van de laser, hetgeen soms tot oversturing van de diode leidde, waardoor de timer ook niet geactiveerd werd. Al deze effecten zorgden ervoor, dat het door Talman gebruikte triggermechanisme niet stabiel was.

Het triggermechanisme, dat in dit onderzoek gebruikt is bleek door de volgende verbeteringen wel stabiel te zijn. Allereerst waren de fotodiode en de LED wel geschikt voor elkaar, waardoor geen oversturing van de diode meer optrad. Daarnaast waren deze beide optische delen van het triggermechanisme aan de kar bevestigd, waarmee het uitlijningsprobleem verholpen was. Een derde positief effect leverde het gebruik van de lenzen om het licht van de LED te focuseren in de baan van de kogel. In figuur 4.5 is het zij-aanzicht van een verticale dwarsdoorsnede van het optische deel van het triggermechanisme weergegeven. Het principe is als volgt. De LED aan de rechterzijde van de figuur zendt licht uit. Door een lens zal dit licht tot een evenwijdige bundel gemaakt worden. Vervolgens valt deze lichtbundel op een smalle spleet welke een lichtsheet met in verticale richting een dikte van ongeveer 1 mm en in horizontale richting een breedte van ongeveer 5 mm produceert. Met behulp van een tweede lens wordt dit lichtsheet gefocuseerd in de baan van de kogel. Tenslotte zorgt een derde lens ervoor, dat de lichtbundel op de fotodiode wordt gefocuseerd.

Doordat het licht onder de kogel gefocuseerd is, hoeft de kogel maar een klein deel van het lichtsheet af te dekken om de lichtintensiteit sterk te doen afnemen. Dit zorgt ervoor, dat de fotodiode, ook indien de kogel slechts gedeeltelijk door het lichtsheet valt of indien de kogel zeer klein is, een sterke afname van de lichtintensiteit registreert, hetgeen de afgifte van een puls aan de timer tot gevolg heeft. Kortom, ook indien zeer kleine kogeltjes gebruikt worden, is dit triggersysteem te gebruiken.

Hoofdstuk 5

Beeldbewerking

In dit hoofdstuk zal de bij dit onderzoek gebruikte beeldbewerking toegelicht worden. Allereerst volgen enkele algemene opmerkingen, waarna de specifieke operaties aan de orde zullen komen.

5.1 Inleiding

Alle handelingen, die op enigerlei wijze het manipuleren van beelden omvatten, behoren tot het vakgebied van de digitale beeldverwerking of beeldbewerking. Het begrip “beeld” dient zeer ruim opgevat te worden als een verzameling punten (pixels) in een plat vlak, waarvan de helderheid en kleur van punt tot punt kunnen verschillen. Voorbeelden hiervan zijn fotografische opnamen, die verkregen zijn met behulp van röntgen- en gammastraling, radar en sonar, electronenmicroscopie of, zoals in dit onderzoek, een digitale camera. Het doel van de beeldverwerking is in het algemeen gericht op een van de volgende deelgebieden:

- beeldcodering: datareductie ten behoeve van het transport en opslag van beeldinformatie,
- beeldreconstructie: het minimaliseren van storende ruisinvloeden en vervorming ten opzichte van een origineel beeld,
- beeldverbetering: het verbeteren van de beeldkwaliteit ten behoeve van een betere interpretatie door een menselijke waarnemer.

Het is nuttig een onderscheid te maken tussen beeldbewerking (*image processing*) en beeldanalyse (*image analysis*). Bij beeldbewerking is het doel een nieuw beeld te produceren door manipulatie (veelal filtering) van het oude beeld. Vaak echter is daarnaast ook het doel uitspraken te doen omtrent de door het beeld gerepresenteerde verschijnselen. Met andere woorden: wat stelt het beeld voor? Wat is er te zien en wat is er in het beeld aan objecten aanwezig? In deze gevallen wil je dus informatie uit het beeld verkrijgen. Dit wordt ook wel patroonherkenning genoemd. De synthese van zuivere beeldbewerking en patroonherkenning omvat het deelgebied der beeldanalyse. Een en ander wordt uitgebreid toegelicht in *Statistische patroonherkenning* door Backer en Duin [23].

5.2 Bewerkingen op de beelden van de CCD-camera

Beeldbewerking kan dus compenseren voor niet-ideale aspecten in de beeldacquisitie. Een geschikt beeldbewerkingspakket, hetgeen tevens in dit onderzoek is gebruikt, is SCIL-Image, ontwikkeld door de medewerkers van de Universiteit van Amsterdam, de Technische Universiteit Delft en TNO [21].

SCIL-Image is een gelaagd opgebouwd programma, dat op verschillende niveau's gebruikt kan worden. Een groot aantal beeldbewerkingsprocedures zijn binnen SCIL-Image direct aan te roepen en uit te voeren. Daarnaast is het mogelijk beeldbewerkingsprocedures in een C-programma te integreren. Een dergelijk programma maakt gebruik van standaard SCIL-opdrachten en kan door SCIL-Image geïnterpreteerd worden. Het gebruiken van een zo'n programma is vooral aantrekkelijk indien dezelfde serie bewerkingen meer dan eens gedaan moeten worden.

Zoals reeds in het voorgaande hoofdstuk is vermeld, zijn de beelden van de CCD-camera opgedeeld in 128 bij 128 pixels. Aan deze pixels worden grijswaarden toegekend, variërend van zwart (grijswaarde 0) tot en met wit (grijswaarde 255). Er vindt dus een ruimtelijke discretisatie plaats (beperkt aantal pixels) als ook een discretisatie in grijswaarden (beperkt aantal grijswaarden per pixel).

Voor de verwerking van de opnames verkregen met de CCD-camera is een C-programma geschreven, die een aantal bewerkingen op de beelden uitvoert. In de nu volgende subparagrafen worden deze beeldbewerkingsoperaties beschreven. Deze handelingen zijn (de termen worden hierna uitgelegd en toegelicht):

- contrastverhoging en inverteren van de beelden
- beeldsegmentatie
- wegfilteren van ruis
- labelen van de beelden en meten in de beelden
- ijking

5.2.1 Contrastverhoging en inverteren van de beelden

Om de bewerking op de beelden verkregen met de CCD-camera te vergemakkelijken, is een optimaal contrast tussen het object, in dit geval het kogeltje, en de achtergrond wenselijk. Dit wordt verkregen met behulp van het SCIL-Image commando *contrast-stretch*. Dit commando schaaft de grijswaarden in het beeld lineair over het maximale bereik, i.e. van 0 tot en met 255, op een dusdanige manier, dat de pixel met de hoogste grijswaarde de waarde 255 krijgt en de pixel met de laagste grijswaarde de waarde 0.

Met de in dit onderzoek gebruikte meetopstelling is het kogeltje donker en de achtergrond licht. Contrastverhoging geeft de achtergrond een grijswaarde van 255. Gewenst is echter, dat de achtergrond donker is en het kogeltje licht. (De reden hiervan zal in de paragraaf over beeldsegmentatie duidelijk worden). Hiertoe dient het beeld geïnverteerd te worden.

Dit wordt bereikt door alle pixels in het beeld met min één te vermenigvuldigen en er vervolgens de waarde 255 bij op te tellen.

5.2.2 Beeldsegmentatie

Tot nog toe beschikken we over beelden, waarbij iedere pixel een bepaalde grijswaarde bezit. De volgende stap in het beeldbewerkingsproces is het opdelen van het beeld in bepaalde betekenisvolle gebieden (objecten) en oninteressante achtergrond: *beeldsegmentatie*.

Er is een groot aantal methoden om tot segmentatie van beelden te komen in de literatuur te vinden (zie bijvoorbeeld Rosenfeld en Kak [24]). Een veel gebruikte techniek is de zogenaamde drempelwaarde-segmentatie, die de segmentatie baseert op de grijswaarden van de pixels. Voorwaarde voor de toepasbaarheid van deze methode is een verschil in de (gemiddelde) grijswaarden van objecten en die van de achtergrond, bijvoorbeeld lichte objecten tegen een donkere achtergrond.

Bij drempelwaarde-segmentatie is het scheidend criterium de grijswaarde van iedere pixel afzonderlijk. In zijn eenvoudigste vorm wordt voor iedere pixel (i, j) de grijswaarde $f(i, j)$ vergeleken met een drempelwaarde δ . Is de grijswaarde groter of gelijk aan de drempelwaarde, dan krijgt de pixel de waarde 1 (wit) en anders de waarde 0 (zwart). In formulevorm ziet dat er als volgt uit:

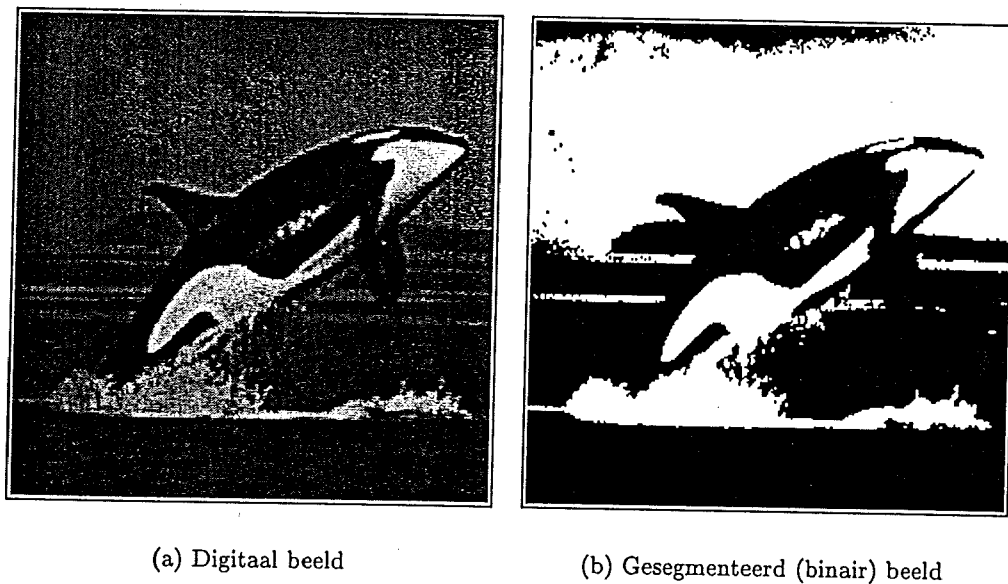
$$f(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{als } f(i, j) \geq \delta, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Het resultaat van deze operatie is een binair beeld: de pixelwaarden zijn 0 of 1. In het Engels wordt drempelwaarde-segmentatie aangeduid met de term *thresholding*.

Aangezien bij deze methode de drempelwaarde voor het hele beeld hetzelfde is, is een voorwaarde voor het gebruik van deze methode, dat de statistische eigenschappen (gemiddelde grijswaarde van de pixels) van achtergrond en objecten over het hele beeld hetzelfde zijn. Als bijvoorbeeld in een beeld de belichting geleidelijk van de bovenkant naar de onderkant verandert, is er geen sprake van een uniforme belichting en wordt aan deze conditie niet voldaan. In dat geval is het gebruik van één enkele drempelwaarde, tenzij de gewenste drempelwaarde duidelijk tussen twee grijswaardepieken van het histogram invalt, derhalve niet toegestaan. Er dient dan gekozen te worden voor een drempelwaarde, die verandert met de positie in het beeld.

De kwaliteit van de segmentatie is uiteraard afhankelijk van de keuze van de drempelwaarde. Bepaling van een geschikte drempelwaarde kan op een aantal manieren. Allereerst kan de gebruiker experimenteel, door een aantal malen te drempelen en de resultaten te beoordelen, een drempelwaarde kiezen. In veel gevallen is het ook mogelijk de drempelwaarde automatisch te selecteren, bijvoorbeeld met behulp van het histogram van de grijswaarden in het beeld. Indien men automatisch een groot aantal beelden wil analyseren, die niet telkens dezelfde intensiteitsverdeling tussen objecten en achtergrond bezitten, is dit uiteraard de te prefereren methode.

In dit onderzoek had de achtergrond een uniforme grijswaarde nul, die in ieder beeld gelijk was. Hierdoor was het gebruiken van één enkele drempelwaarde toegestaan was. Omdat de grijswaarde van de achtergrond gelijk aan nul was, is gekozen om te drempelen op de



Figuur 5.1: Voorbeeld van beeldsegmentatie. Als drempelwaarde is de grijswaarde 128 gekozen.

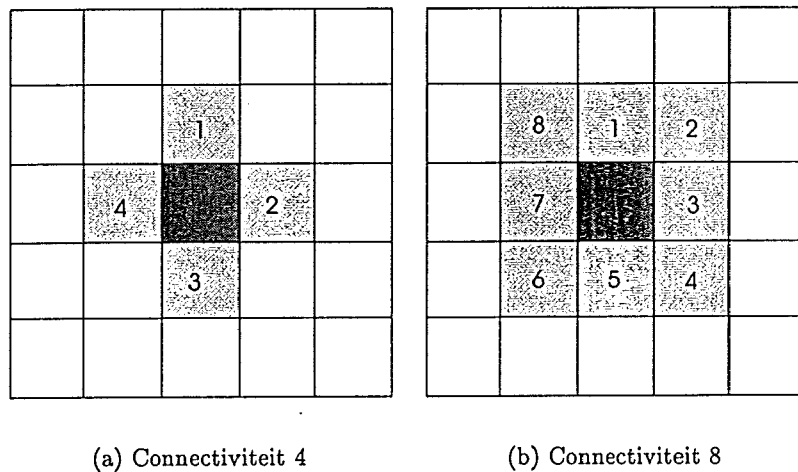
waarde 1. In dit geval krijgt iedere pixel met pixelwaarde groter of gelijk aan 1 de waarde 1 en de overige pixels de waarde 0. De pixels met waarden gelijk aan 1 worden door SCIL-Image als objecten beschouwd en de pixels met waarde 0 als achtergrond. Op deze manier is dus bereikt, dat de betekenisvolle gebieden als objecten worden geclassificeerd en de achtergrond ook daadwerkelijk als achtergrond wordt beschouwd. Nu blijkt dus waarom het beeld geïnverteerd dient te worden. Zonder het inverteren zou immers de achtergrond als object beschouwd worden en zouden de objecten als achtergrond beoordeeld worden. In figuur 5.1 is een voorbeeld gegeven van beeldsegmentatie. In de linkerfiguur staat het digitale beeld van een orka. De figuur is opgebouwd uit 256x256 vierkante pixels. De opbouw uit pixels is duidelijk zichtbaar. Als drempelwaarde voor de segmentatie is de grijswaarde 128 gekozen.

Nu beeldsegmentatie is bereikt, kan er verder gegaan worden met de volgende stap in het beeldbewerkingsproces.

5.2.3 Wegfilteren van ruis

Het resultaat van de beeldsegmentatie is een binair beeld, bestaande uit objecten en achtergrond, waarbij iedere pixel van het originele grijswaardebeeld ingedeeld is bij een van de objecten of de achtergrond. De verkregen binaire beelden zijn veelal niet geschikt om direct verder mee te werken. Soms zijn tengevolge van ruis bepaalde pixels, die gezien de a priori kennis over het beeld tot de achtergrond behoren, boven de drempelwaarde uitgekomen, waardoor ze als objectpixels worden geclassificeerd. Veelal zijn dit geïsoleerde pixels zonder naaste objectpixels. Soms ook dient de contour van een object, indien deze heel onregelmatig verloopt, enigszins afgevlakt te worden.

Het wegfilteren van "ruispixels" en het afvlakken van contouren kan in SCIL-Image zeer eenvoudig gedaan worden met behulp van zogenaamde erosie- en dilatie-operaties. Bij



Figuur 5.2: De twee veel gebruikte connectiviteitsschema's

een erosie-operatie worden objectpixels, waarvan één of meer buurpixels tot de achtergrond horen, ook tot achtergrondpixel gemaakt. Buren kunnen in het algemeen op twee verschillende manieren gedefinieerd worden, afhankelijk van het zogenaamde connectiviteitsschema. In de praktijk wordt veelal gebruik gemaakt van 4- en 8-connectiviteit. In figuur 5.2 wordt dit schematisch weergegeven.

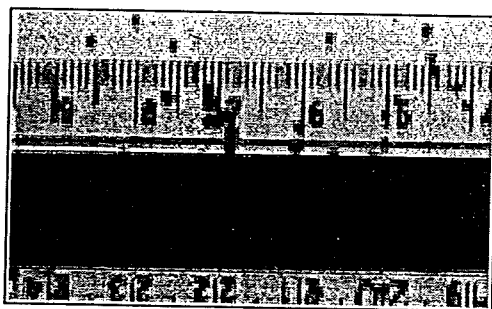
Indien er gebruik wordt gemaakt van 4-connectiviteit, wordt er gekeken naar de vier naaste burenen. Indien één van deze vier burenen een achtergrondpixel is, wordt de centrale objectpixel ook tot achtergrondpixel gemaakt. Hetzelfde principe geldt voor de 8-connectiviteit. Een dilatie-operatie werkt precies tegengesteld aan een erosie-operatie. Hierbij wordt namelijk een achtergrondpixel, die een objectpixel als buur heeft, tot objectpixel gemaakt. Ook bij deze operatie wordt er gewerkt met de genoemde connectiviteitsschema's.

Door eerst de erosie-operatie en vervolgens de dilatie-operatie toe te passen, worden ruispixels weggefilterd en contouren van objecten vereffend.

5.2.4 Labelen van de beelden en meten in de beelden

De beelden, die nu verkregen zijn, bestaan uit een aantal objecten tegen de achtergrond. Voordat er echt in de beelden gemeten kan gaan worden dient nog één kleine handeling verricht te worden, het zogenaamde *labelen* van de diverse objecten. Hierbij wordt aan ieder object een nummer gegeven, waarna van ieder object diverse grootheden gemeten kunnen worden, zoals bijvoorbeeld de oppervlakte en de x - en y -coördinaat van het massamiddelpunt. Er wordt hier expliciet over x - en y -coördinaat gesproken en niet over i en j , omdat de x - en y -coördinaat op subpixelniveau bepaald kunnen worden. Via ijking, hetgeen in de volgende subparagraaf besproken zal worden, kunnen dan nauwkeurige waarden voor de coördinaten bepaald worden.

Binnen SCIL-Image kunnen van een object een aantal grootheden direct gemeten worden, zoals bijvoorbeeld de oppervlakte, de omtrek, de breedte, de hoogte en de x - en y -coördinaat van het zwaartepunt.



Figuur 5.3: Lineaal gebruikt voor de ijking van de kogelopnames

Met het gebruikte C-programma worden in ieder beeld de x - en y -coördinaat van het massamiddelpunt van de objecten bepaald. Aangezien tussen elk beeld dezelfde tijdstap zit, wordt van elk object de plaats als functie van de (bekende) tijd verkregen. De waarden van de coördinaten worden verkregen in pixelafstanden. Door nu de opnames te ijken, dat wil zeggen door de afmetingen van de pixels in het opgenomen beeld te bepalen (eenheid: m/pixel), zijn absolute waarden van de plaatscoördinaten te bepalen. Na het kiezen van het gewenste object (in dit geval de kar en het kogeltje) kan vervolgens de plaats-tijd data ervan in een datafile worden opgeslagen, waarna het direct gebruikt kan worden voor bijvoorbeeld polynoomregressie.

5.2.5 Ijking

Het laatste punt, dat nog aandacht verdient, is de ijking van de opnames. Om te weten welke afstand een kogeltje heeft afgelegd, dienen de afmetingen van de pixels in het beeld bekend te zijn. Voor de bepaling van de versnelling van de kar, is een rechthoekig label aan de kar bevestigd, waarvan het zwaartepunt als functie van de tijd bepaald is. Op deze wijze worden dus de plaats-tijd data van de kar verkregen. Met behulp van dit label kunnen tevens de afmetingen van de pixels bepaald worden, aangezien de ruimtelijke afmetingen als ook de afmetingen in pixels bekend zijn.

Voor de ijking van de opnames van de kogel is een andere methode gebruikt. Hiertoe is een lineaal in de bak gehangen op de plaats, waar het kogeltje valt. Zie figuur 5.3. Op deze wijze zijn ook de afmetingen van de pixels te bepalen.

Hoofdstuk 6

Resultaten

In dit hoofdstuk zullen de resultaten van dit onderzoek gepresenteerd worden. Allereerst volgt een bespreking van een aantal onnauwkeurigheden, die inherent zijn aan de gebruikte meetmethode. Vervolgens zullen de resultaten van de kar getoond worden, gevolgd door de bespreking van de resultaten behaald met de kogeltjes.

6.1 Externe invloeden

De experimentele resultaten kunnen beïnvloed worden door enkele externe factoren, te weten door wandeffecten en door invloeden van de twee gebruikte electromagneten. In deze paragraaf worden deze externe factoren besproken.

6.1.1 Het wandeffect

De theorie van instationaire bewegingen, die tot dusverre gegeven werd, is slechts geldig voor bewegingen in oneindig uitgestrekte media. In dit onderzoek bevindt de vloeistof zich in een afgesloten bak. Het is derhalve van belang om na te gaan of er sprake is van invloed van de beperkte afmetingen van de bak.

Bij de beweging van een kogel in een bak wordt onder *wandeffect* het verschijnsel verstaan, dat als gevolg van de wanden de snelheid van de kogel in de bak lager is dan in een oneindig uitgestrekt medium. In het algemeen kan gesteld worden, dat indien de afmetingen van de bak en van de kogel van gelijke orde van grootte zijn, wandeffecten zullen optreden. De grootte van het wandeffect is een functie van het Reynoldsgetal.

Voor alle stromingsregimes geldt, dat het wandeffect in rekening gebracht kan worden door de berekende stationaire valsnelheid in een oneindig medium te vermenigvuldigen met een correctiefactor k_w , ofwel [25]:

$$v_{\infty,corr} = k_w v_{\infty}, \quad (6.1)$$

met: $v_{\infty,corr}$ = stationaire snelheid gecorrigeerd voor het wandeffect [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$],
 v_{∞} = stationaire snelheid in een oneindig medium [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$],
 k_w = correctiefactor voor wandeffecten [-].

Tabel 6.1: Wandcorrectiefactoren voor starre deeltjes in het Stokesregime [25].

β [-]	k_w [-]
0.0	1.000
0.05	0.885
0.1	0.792
0.2	0.596
0.3	0.422
0.4	0.279
0.5	0.170
0.6	0.0945
0.7	0.0468
0.8	0.0205

De correctiefactor k_w zal voor verschillende stromingsregimes verschillende waarden hebben. In het algemeen is k_w een functie van de verhouding tussen de diameter van de kogel en de diameter van de bak, waar de kogel in valt, aangeduid met het symbool β .

Indien de stroming zuiver laminair is, kan voor de stationaire val van een kogel langs de as van een cilinder de waarde van de correctiefactor gevonden worden in tabel 6.1 [25].

Daarnaast kan voor laminaire stromingen voor $\beta < 0.05$ kan de zogenaamde Ladenburg correctie gebruikt worden, weergegeven door de volgende uitdrukking [25]:

$$k_w = \frac{1}{1 + 2.1\beta}. \quad (6.2)$$

De bovenstaande waarden zijn bepaald voor de val van een bol in een cilinder. Dohmen [16] heeft experimenteel aangetoond, dat de waarden niet alleen geldig zijn voor een cilindergeometrie, maar ook voor een vierkante bak. In dit geval is β de verhouding tussen de kogeldiameter en de breedte van de bak. In dit onderzoek is gebruik gemaakt van een rechthoekige bak en er wordt aangenomen, dat de rechthoekige bak hetzelfde wandeffect veroorzaakt als de vierkante bak, waarbij de lengte van de korte zijde van de rechthoek gebruikt wordt voor de berekening van β .

Voor $Re > 100$ dient de invloed van de wanden met een andere correlatie bepaald te worden. Wederom geldt vergelijking (6.1) voor de val van een kogel in een cilinder, maar nu geldt voor de correctiefactor k_w de volgende uitdrukking [25]:

$$k_w = 1 - \beta^{1.5}. \quad (6.3)$$

Indien weer aangenomen wordt, dat deze vergelijking ook geldig is voor een rechthoekige geometrie, kan de invloed van de wand voor grote Reynoldsgetallen uitgerekend worden.

Tenslotte is voor zeer grote Reynoldsgetallen in het turbulente regime vergelijking (6.1) geldig in combinatie met de volgende uitdrukking [25]:

$$k_w = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 + \beta^4}}. \quad (6.4)$$

In dit onderzoek heeft de bak een breedte van 10 cm en hebben de in water vallende kogeltjes een diameter van 2 mm, hetgeen resulteert in een Reynoldsgetal, dat groter is dan 100, terwijl de stroming rond de kogel nog niet zeer turbulent is. De waarde van β wordt dan $\beta = 0.02$. Gebruikmakend van vergelijking (6.3) levert dit voor de correctiefactor: $k_w = 0.997$. Kortom, de correctie op de eindsnelheid blijkt minder dan 1 % te bedragen. Het begrensde zijn van de bak speelt in dit onderzoek dus geen grote rol.

6.1.2 Invloed van de electromagneten

Voor elke meting worden de beide electromagneten geactiveerd door er een spanning van ongeveer 15 Volt op te zetten. Hierdoor kunnen de kar en de kogel in hun beginposities geplaatst worden. Door de elektronische schakeling, die alle elektronische componenten bestuurd, wordt de spanning van beide magneten plotseling afgezet. Gewenst is, dat op het moment van uitschakeling van de magneten de magnetische kracht onmiddellijk weg is. Door zelfinductie in de spoel (*wet van Lenz*) is het magnetische veld niet onmiddellijk verdwenen, maar neemt geleidelijk af. Het is mogelijk, dat de bewegingen van de kogel en de kar hierdoor beïnvloed worden.

Als we de beweging van de kogel beschouwen, is het niet moeilijk om in te zien, dat deze niet door de magneten beïnvloed wordt. Er wordt immers pas een meting gestart op het moment, dat de kogel een aanzienlijke afstand heeft afgelegd. Daarnaast blijft de kogel pas aan de magneet hangen op het moment, dat deze echt tegen de magneet wordt aangedrukt. Het magnetische veld heeft dus geen groot bereik. Hieruit kan geconcludeerd worden, dat de electromagneet van de kogel de beweging niet beïnvloedt.

De magneet aan het begin van de baan houdt de kar ook pas in z'n beginpositie op het moment, dat de kar tegen de magneet wordt aangeduwd. Als zich tussen de magneet en de kar een luchtspleet van ongeveer 1 cm bevindt, trekt de magneet de kar niet noemenswaardig aan. Hieruit kan dus geconcludeerd worden, dat de magneet aan het begin van de baan de beweging van de kar niet beïnvloedt. Daarnaast bevindt de kogel zich aan het begin van een meting op zo'n halve meter van de magneet, dus de beweging van de kogel zal ook niet beïnvloed worden door de electromagneet voor de bevestiging van de kar.

Dohmen [16] heeft in zijn onderzoek ook een magneet gebruikt om een ijzeren kogel in z'n beginstand te bevestigen en hij concludeerde uit experimentele resultaten, dat de magnetische kracht, zodra de kogel los komt van de magneet, verwaarloosbaar is. De invloed van de magneten zal hier ook verwaarloosd worden.

6.2 Onnauwkeurigheden ten gevolge van dataverwerking

Het gebruik van een digitale camera voor de bepaling van de beweging van de kogel zorgt ervoor, dat er enkele onvermijdbare onnauwkeurigheden in de resultaten geïntroduceerd worden. Immers, er worden enkele discretisaties uitgevoerd. Daarnaast zal ook de positionering van de camera invloed op het opgenomen beeld hebben. Achtereenvolgens zullen in deze paragraaf de volgende punten besproken worden:

- ruimtelijke discretisatie,

- grijswaarde discretisatie,
- positionering van de camera.

Ruimtelijke discretisatie

Elk opgenomen beeld is opgedeeld in een beperkt aantal pixels (128x128 pixels). Aangezien het aantal pixels van de camera vastligt, worden er nauwkeurigere opnames verkregen, naarmate er een kleiner gebied opgenomen wordt. In dit onderzoek is ervan uit gegaan, dat het omklappen van het zog en dus ook het gereduceerd zijn van de weerstandskracht in de eerste 0.1 s plaatsvindt. Gelet op de stationaire verticale snelheid en het feit, dat de lengte van de arm, waaraan de camera hangt, klein dient te blijven, is gekozen voor een opnamegebied van de kogel van ongeveer 6 cm bij 6 cm. In figuur 5.3 is te zien, dat de uiteindelijk verkregen breedte en hoogte van het opnamegebied 5.7 cm zijn geworden. De afmetingen van de pixels bij de kogelopnames worden hiermee ongeveer $0.45 \times 0.45 \text{ mm}^2$. Met behulp van deze pixeldimensies is bij elk filmpje van de kogel de diameter van de kogel bepaald. Deze diameter bedroeg steeds 4 à 5 pixels, waarmee de gevonden waarden goed overeen komen met de werkelijke waarde van 2mm.

Gezien de gevonden overeenkomst tussen gemeten en werkelijke diameter van de kogel is de grootte van de optredende fout ten gevolge van ruimtelijke discretisatie op 1 pixel geschat.

Grijswaarde discretisatie

In paragraaf 5.2 is beschreven hoe uit de opgenomen filmpjes de plaats van de kogel als functie van de tijd bepaald wordt. Samengevat kan gezegd worden, dat aan de hand van een drempelwaarde elk beeld wordt opgedeeld in objecten en achtergrond. Dit wordt op een dusdanige manier gedaan, dat de kogel als een object beschouwd wordt, waarna de x - en y -coördinaat van het zwaartepunt bepaald worden.

Indien de drempelwaarde gewijzigd wordt, zal het aantal pixels, dat tot objectpixels gemaakt wordt, ook veranderen. Het ligt voor de hand, dat verandering van de drempelwaarde (binnen redelijke limieten) bij een bolvormig deeltje tegen een homogeen belichte achtergrond geen invloed zal hebben op de positie van het zwaartepunt van het deeltje. In de opnames van het kogeltje in dit onderzoek is de achtergrond na invertering van het beeld (zie paragraaf 5.2) homogeen met grijswaarde één. Bij enkele opnames is experimenteel geverifieerd of verandering van de drempelwaarde invloed op het zwaartepunt van de kogel heeft. Hiertoe is gedrempeld op de grijswaarde 10 in plaats van 1 en dit bleek geen invloed op het zwaartepunt te hebben.

Aangezien de fout in de experimenteel bepaalde diameter van de kogel in de orde van één pixel ligt, zal de fout in het bepalen van het zwaartepunt van de kogel op subpixelniveau zijn.

Positionering van de camera

Indien de digitale camera niet exact horizontaal geplaatst is, zullen afwijkingen optreden in de gemeten coördinaten van de kogel. Hiervoor kan gecorrigeerd worden door bij elke opname een schietlood op te nemen.

In dit onderzoek is gebruik gemaakt van twee schietloden, die voor elke meting als ijkmeting zijn opgenomen. Gekozen is voor twee loden om zowel voor het niet exact horizontaal gepositioneerd zijn te kunnen corrigeren als ook ter correctie voor verdraaiing van de camera om een verticale as. Deze laatste rotatie is te bepalen door bij elke ijkmeting de afstand tussen de beide schietloden te bepalen.

In iedere ijkopname bleef de afstand tussen de schietloden gelijk, hetgeen betekent, dat er ten opzichte van de voorgaande meting geen rotatie om een verticale as heeft plaatsgevonden.

Indien de camera niet exact horizontaal geplaatst is, zullen de schietloden in een opgenomen beeld een bepaalde hoek α ten opzichte van de verticaal van het beeld hebben. Na bepaling van deze hoek zijn de correcte x - en y -coördinaten, x_{corr} en y_{corr} , uit de gemeten x - en y -coördinaten, x_{gem} en y_{gem} , te berekenen met behulp van de twee onderstaande vergelijkingen:

$$x_{corr} = x_{gem} \cos \alpha + y_{gem} \sin \alpha, \quad (6.5)$$

$$y_{corr} = y_{gem} \cos \alpha - x_{gem} \sin \alpha. \quad (6.6)$$

Indien Δx het verschil in pixels tussen de x -coördinaat van het schietlood aan de boven- en de onderzijde van het beeld weergeeft en indien n_y het aantal pixels in de verticale richting van het beeld voorstelt, is de waarde van α te berekenen met de onderstaande vergelijking:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\Delta x}{n_y}\right). \quad (6.7)$$

Bij elke nieuwe meting is α opnieuw bepaald en deze correctie is in het C-programma, dat de beeldbewerking uitvoert, verwerkt.

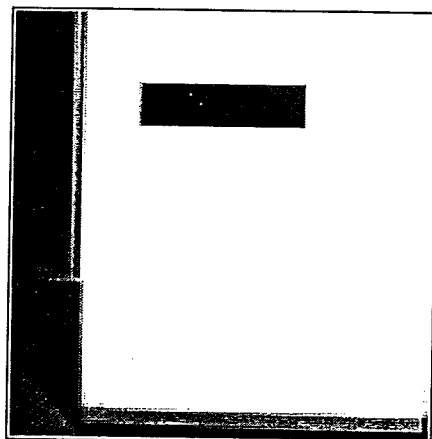
6.3 De versnelling van de kar

Met behulp van vergelijking (4.1) in paragraaf 4.3 kan uitgerekend worden hoe groot de maximaal haalbare theoretische versnelling van de kar is. Hiertoe dienen de massa van de kar met de bak water en de camera, m_k , en de massa van het lood, dat voor de versnelling zorgt, m_b , bekend te zijn. Beide massa's zijn met een *Sartorius 3806 MP* elektronische weegschaal bepaald. De uitkomsten waren respectievelijk:

$$m_k = 23.60 \pm 0.01 \text{ kg},$$

$$m_b = 23.35 \pm 0.01 \text{ kg}.$$

Met behulp van vergelijking (4.1) volgt dan voor de maximale theoretische versnelling, $a_{k,th}$:



Figuur 6.1: Rechthoekig label bevestigd aan de kar

$$a_{k,th} = 4.874 \pm 0.003 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

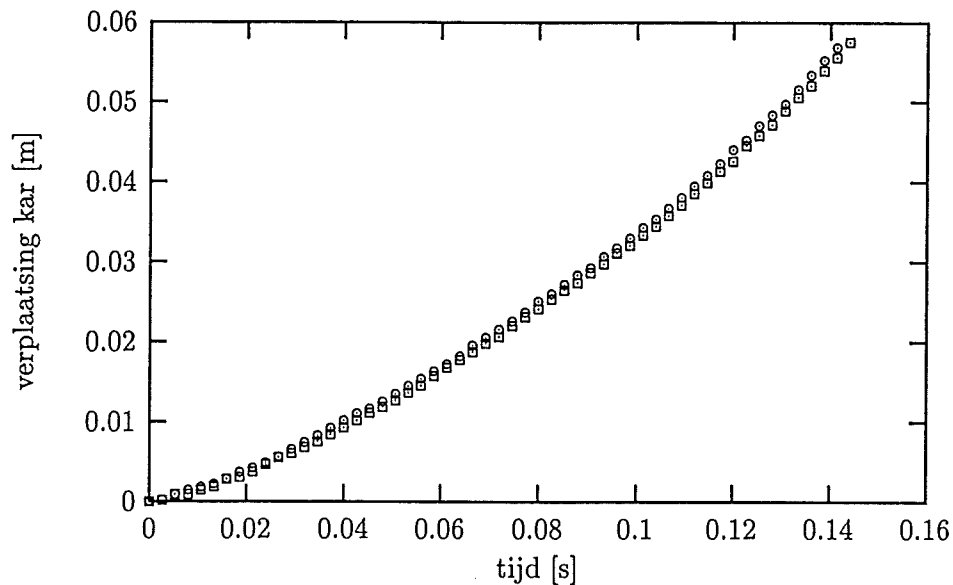
Om de versnelling van de kar experimenteel te bepalen is een rechthoekig label op de kar geplakt, waarvan de plaats als functie van de tijd bepaald is. Zie figuur 6.1. In deze figuur is het rechthoekige label zichtbaar, met aan de linker- en onderzijde nog een stukje van het metalen skelet van de kar. Hier is weer duidelijk de opbouw van het plaatje uit pixels zichtbaar.

Zoals reeds eerder vermeld was de versnelling van de kar bij Talman niet reproduceerbaar. Om tot reproduceerbaarheid te komen zijn de in paragraaf 4.3 besproken wijzigingen aan de opstelling doorgevoerd. Bij Talman bewoog de camera niet mee, zodat bij elke opname van de verplaatsing van de kogel ook de verplaatsing van de kar kon worden opgenomen, waardoor bij iedere meting de versnelling apart kon worden bepaald. Door het bevestigen van de camera aan de kar was dit niet mogelijk. Door de zeer kleine scherptediepte van de lens op de camera was het ook onmogelijk om een vast punt op de achtergrond op te nemen ter bepaling van de karversnelling. Hieruit blijkt de noodzaak voor reproduceerbaarheid. Met de CCD-camera zijn met een opnamefrequentie van 750 Hz opnames gemaakt van het label, terwijl de kar vanuit rust een versnellende beweging uitvoert. Met het programma SCIL-Image is op de in hoofdstuk 5 beschreven wijze in iedere opname het zwaartepunt van het label bepaald. Op deze wijze wordt van de versnellende kar de plaats-tijd data verkregen. Hieruit kan vervolgens de versnelling van de kar bepaald worden.

In figuur 6.2 zijn in één figuur twee opnames van de verplaatsing van de kar tegen de tijd weergegeven. Om de figuur overzichtelijk te houden, is slechts de helft van het aantal punten weergegeven. Tussen twee weergegeven punten bevindt zich dus steeds nog een datapunt. De meetfout is qua orde van grootte gelijk aan de grootte van de symbolen. Daarom zijn de meetfouten niet weergegeven.

Te zien is, dat de lijnen dicht bij elkaar liggen, waaruit reproduceerbaarheid van de metingen blijkt. Er zijn in totaal zes van dergelijke metingen gedaan. In de figuur zijn de twee het verst uit elkaar liggende lijnen geschetst.

Om de versnelling van de kar te verkrijgen, dient er een functie door de datapunten van de karverplaatsing gefit te worden. Twee maal differentiëren van de gefitte functie levert de



Figuur 6.2: Karverplaatsing als functie van de tijd voor twee verschillende metingen.

versnelling van kar. Er zijn drie verschillende functies beschouwd om de plaats-tijd data te fitten, te weten een

- tweedegraads polynoom,
- derdegraads polynoom,
- vierdegraads polynoom.

Om het datafitten uit te voeren is een C-programma volgens het kleinste kwadraten principe geschreven. Er bestaan reeds vele kleinste kwadraten programma's, maar om de regressie-analyse meteen in SCIL-Image te kunnen laten plaatsvinden en aangezien SCIL-Image C-programma's kan uitvoeren, is besloten om zelf een kleinste kwadraten programma te schrijven.

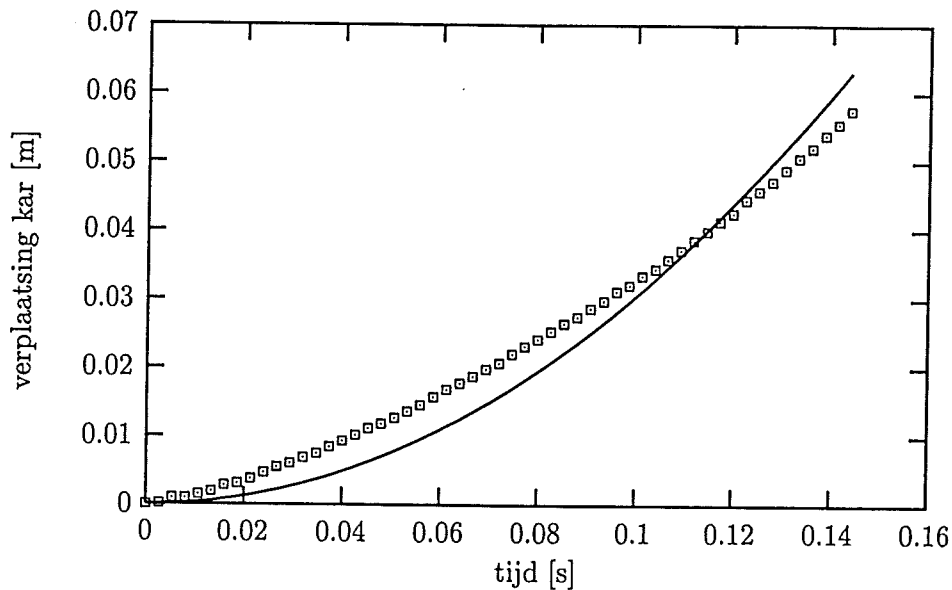
In de volgende drie subparagrafen zullen de resultaten hiervan besproken worden, evenals de motivatie van de keuze van deze fitfuncties. In paragraaf 6.3.4 wordt een conclusie over de versnelling van de kar getrokken en zal de keuze voor het uiteindelijk gebruikte model uitgelegd worden.

6.3.1 Karverplaatsing gefit met tweedegraads polynoom

Omdat er een éénparige versnelling wordt verwacht, is met behulp van het geschreven kleinste kwadraten programma het volgende tweedegraads polynoom door de datapunten gefit:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2. \quad (6.8)$$

Deze polynoom is met en zonder beperkingen ten aanzien van de coëfficiënten op twee manieren gebruikt, te weten:



Figuur 6.3: Karverplaatsing als functie van de tijd met een parabolische fit.

- ‘parabolisch’, dat wil zeggen, $c_0 = c_1 = 0$,
- ‘kwadratisch’, dat wil zeggen, alle coëfficiënten zijn meegefit.

‘Parabolische’ fit

Aangezien de kar vanuit rust vertrekt uit een punt, dat als oorsprong gekozen kan worden (zie bijlage B voor een bespreking van de fout in het startmoment), zijn de fitcoëfficiënten c_0 en c_1 gelijk aan nul gesteld, waardoor er een parabolische fit ontstaat. Dit is uiteraard ook een kwadratische fit, maar om het verschil met de fitmethode, waarbij alle coëfficiënten meegefit worden, uit te laten komen, is gekozen om dit de parabolische fit te noemen.

In figuur 6.3 is het resultaat van één zo’n procedure weergegeven. Ook hier zijn de fouten van gelijke orde van grootte als de gebruikte symbolen. Op deze manier wordt voor de coëfficiënt c_2 gevonden: $c_2 = 3.04 \pm 0.03 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Dit levert voor de éénparige versnelling van de kar:

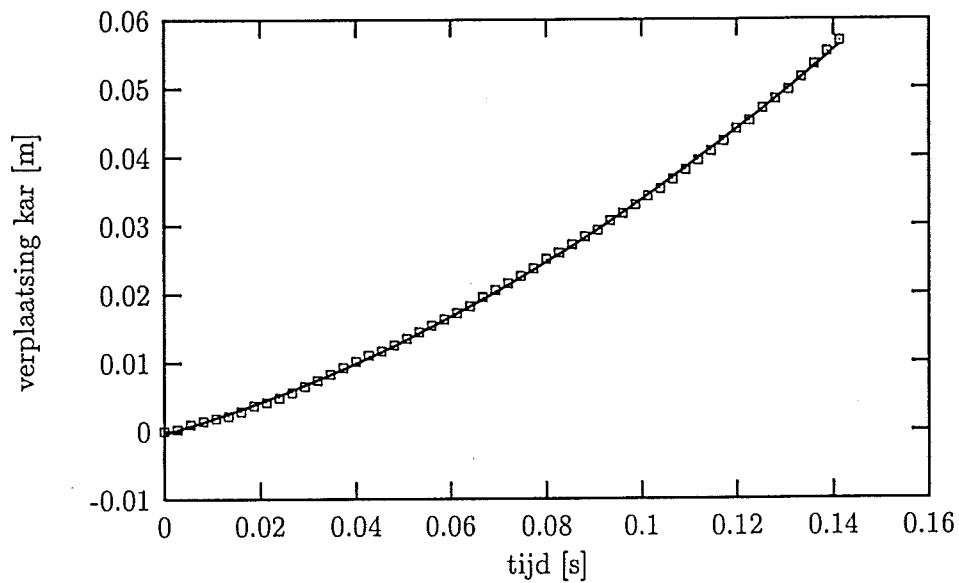
$$a_k = 6.09 \pm 0.04 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Deze waarde is groter dan de theoretisch maximaal haalbare versnelling en te zien is, dat dit model de data niet goed beschrijft en dus niet geschikt is.

Daarom is er gekozen om de coëfficiënten c_0 en c_1 ook mee te fitten.

‘Kwadratische’ fit

Het meefitten van de coëfficiënten c_0 en c_1 doet niets af aan het éénparig zijn van de versnelling, aangezien deze coëfficiënten wegvallen bij het twee maal differentiëren. In figuur 6.4 is weer het resultaat van één berekening weergegeven en in tabel 6.2 staan de gefitte coëfficiënten van alle zes de metingen van de karversnelling.



Figuur 6.4: Karverplaatsing als functie van de tijd met een kwadratische fit.

Tabel 6.2: Gefitte coëfficiënten door de plaats-tijd data van de beweging van de kar voor de zes gedane experimenten.

experiment	fitcoëfficiënten		
	c_0 [mm]	c_1 [m/s]	c_2 [m/s ²]
1	-0.53	0.19	1.41
2	-0.60	0.19	1.43
3	-0.47	0.19	1.43
4	-0.32	0.20	1.45
5	-0.63	0.20	1.41
6	-0.59	0.19	1.44

Te zien is, dat de gefitte lijn nu veel beter bij de datapunten aansluit. Laten we daarnaast naar de coëfficiënten in tabel 6.2 kijken.

De waarde van de coëfficiënt c_0 is ongelijk aan nul, maar wel zeer klein, in de orde van enkele tienden van millimeters. Dit is, rekening houdend met mogelijke meetfouten, best mogelijk. Op basis van de coëfficiënt c_0 kan dus geen uitspraak gedaan worden omtrent het correct zijn van het gekozen kwadratische model.

Anders is het, wanneer de coëfficiënt c_1 beschouwd wordt. Gelet op de opzet van het experiment zou de waarde van c_1 gelijk aan nul dienen te zijn, maar door meetfouten kan deze een zeer kleine waarde ongelijk aan nul krijgen. De waarden van c_1 hebben echter een tamelijk grote waarde van rond de $0.19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Dit is erg merkwaardig en blijkbaar is het kwadratische model niet juist om de meting te beschrijven. Het probleem zit hem echter in het feit, dat het model van de beweging niet bekend is, waardoor er een model gekozen dient te worden, dat de metingen goed beschrijft.

Resteert nog de coëfficiënt c_2 . De waarde van c_2 vermenigvuldigd met twee levert de éénparige versnelling van de kar. In de tabel is te zien, dat deze waarde reproduceerbaar is. Aangezien tijdens opnames van de kogel de versnelling van de kar niet tegelijk gemeten kan worden en reproduceerbaarheid gewenst is, is dit een bevredigend resultaat. Middeling van de verdubbelde waarden van c_2 geeft een gemiddelde waarde van de karversnelling. Het resultaat is:

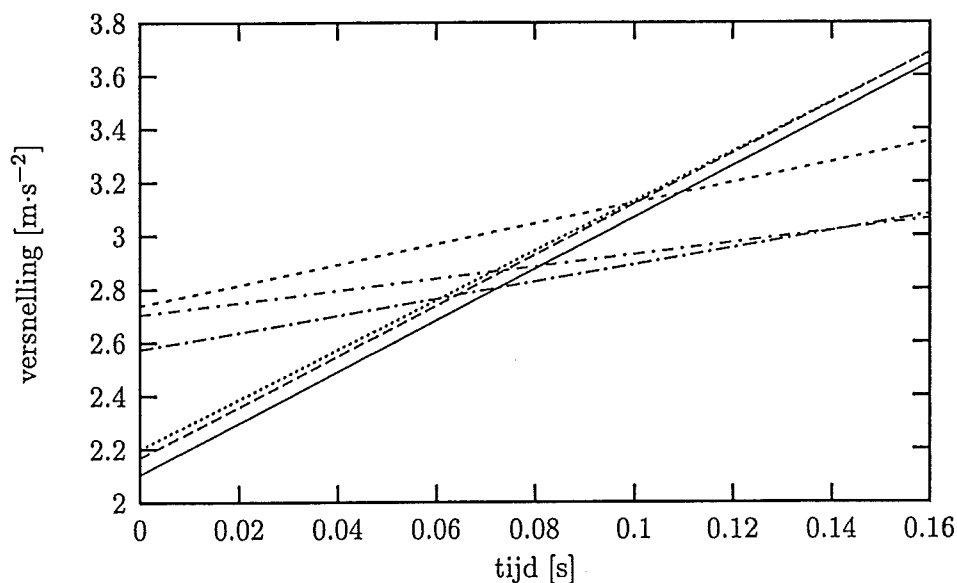
$$a_k = 2.86 \pm 0.03 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Dit is de éénparige versnelling, waarmee de kar versnelt, indien een tweedegraads polynoom door de plaats-tijd grafiek van de kar wordt gefit, zonder restricties ten aanzien van de fitcoëfficiënten.

Het is opvallend, dat deze waarde veel kleiner is dan de theoretisch maximaal haalbare versnelling. Dit resultaat lijkt vreemd, maar is echter heel goed mogelijk. Er dient namelijk goed gelet te worden op de kleine tijdschaal, waarnaar gekeken wordt. Beschouwd wordt het allereerste begin van de beweging van de kar, terwijl daar juist de overgang van statische naar dynamische wrijving plaatsvindt. Hierdoor kunnen allerlei niet-lineariteiten in de beweging plaatsvinden, die de versnelling van de kar doen afwijken van de verwachte éénparige versnelling.

Nog een korte opmerking over de beschouwde tijdschaal. De beweging van de kar is gefit tot $t = 0.144 \text{ s}$. Bij de bespreking van de resultaten behaald met het kogeltje, zal blijken, dat de kogelbeweging beschouwd is tot $t = 0.09 \text{ s}$. De beweging van de kar dient dan ook tot dat tijdstip gefit te worden. Dit is ook gedaan, maar de coëfficiënten veranderen voor deze kortere tijd niet, met als resultaat, dat de versnelling a_k ook niet verandert. Om het geheel van resultaten overzichtelijk te houden, zijn deze resultaten niet apart weergegeven. De hierboven vermelde versnelling kan dus als de éénparige versnelling gezien worden.

Kijkend naar figuur 6.4 lijkt de kwadratische fit een goede beschrijving te geven van de beweging van de kar. De hoge waarde van de gefitte beginsnelheid, weergegeven door coëfficiënt c_1 , doet echter vermoeden, dat het model toch niet representatief is. Daarom is ook gekeken of de data gefit kan worden met een derdegraads polynoom, hetgeen tot resultaat heeft, dat de versnelling van de kar lineair in de tijd kan variëren.



Figuur 6.5: Verloop versnelling als functie van de tijd bij gebruikmaking van een derdegraads polynoom als fitfunctie. Weergegeven is het verloop van de versnelling bij zes verschillende metingen.

6.3.2 Karverplaatsing gefit met derdegraads polynoom

De gebruikte derdegraads polynoom ziet er als volgt uit:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3, \quad (6.9)$$

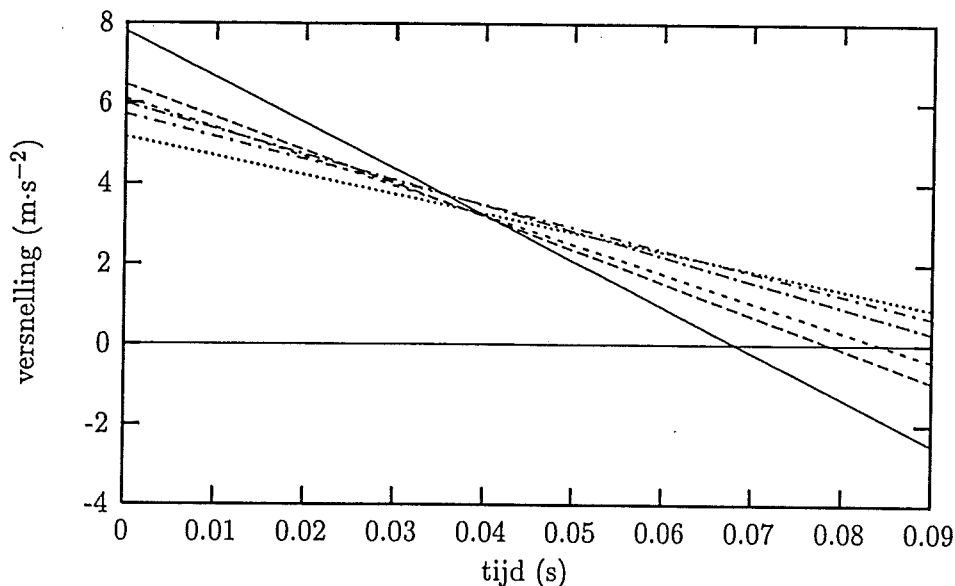
waarbij er geen restricties zijn gesteld ten aanzien van de coëfficiënten, omdat er bij nulstellen van een van de coëfficiënten geen fit uitkwam, die de datapunten goed beschreef.

Na twee maal differentiëren van het polynoom volgt voor de versnelling:

$$\ddot{x}(t) = 2c_2 + 6c_3 t. \quad (6.10)$$

Hieraan is te zien, dat bij het gebruik van een derdegraads polynoom de versnelling lineair in de tijd kan veranderen.

Alle zes de datasets van de karverplaatsing zijn gefit met het derdegraads polynoom. In figuur 6.5 is het verloop van de versnelling als functie van de tijd weergegeven. De overeenkomst tussen de zes weergegeven lijnen is, dat de versnelling toeneemt in de tijd. Dit is zeer goed mogelijk gezien de overgang van statische naar dynamische wrijving. De dynamische wrijvingskracht is lager dan de statische wrijvingskracht, hetgeen tot een toename van de versnelling zou leiden. Dit is dus conform hetgeen in figuur 6.5 gepresenteerd is. De versnelling is echter niet meer, zoals wel het geval was bij de kwadratische fit, reproduceerbaar. Er is een grote spreiding in de verschillende lijnen. Het is dus niet meer mogelijk om te spreken over één versnelling van de kar. Gezien vergelijking (3.7) levert een verandering in de versnelling van de kar een verandering in de waarde van de weerstandscoefficiënt C_D . Aangezien de versnelling van de kar onafhankelijk van de metingen aan de kogel bepaald moet worden, dient de versnelling zeer nauwkeurig bekend te zijn. Hieruit blijkt nogmaals het belang van reproduceerbare metingen.



Figuur 6.6: Verloop versnelling als functie van de tijd bij gebruikmaking van een derdegraads polynoom als fitfunctie tot $t = 0.09$ s. Weergegeven is het verloop van de versnelling bij zes verschillende metingen.

Ook voor deze fitmethode is de versnelling bepaald tot aan $t = 0.09$ s, de tijd tot waar de beweging van de kogel is opgenomen. Het verloop van de versnelling voor dit geval is weergegeven in figuur 6.6.

Voor deze kortere tijd is het verloop van de versnelling geheel anders dan in figuur 6.5. Nu neemt de versnelling af in de tijd en wordt bij drie van de zes metingen zelfs negatief. Voor dergelijk korte tijden is het niet denkbaar, dat de kar al afremt, want de door de kar afgelegde afstand is dan pas enkele centimeters, terwijl de valafstand van de blokken lood, voor zij de grond bereiken en de versnelling negatief kan worden, ongeveer een halve meter is. Hieruit kan dus geconcludeerd worden, dat het derdegraads polynoom een ongeschikt model is om de beweging van de kar mee te beschrijven.

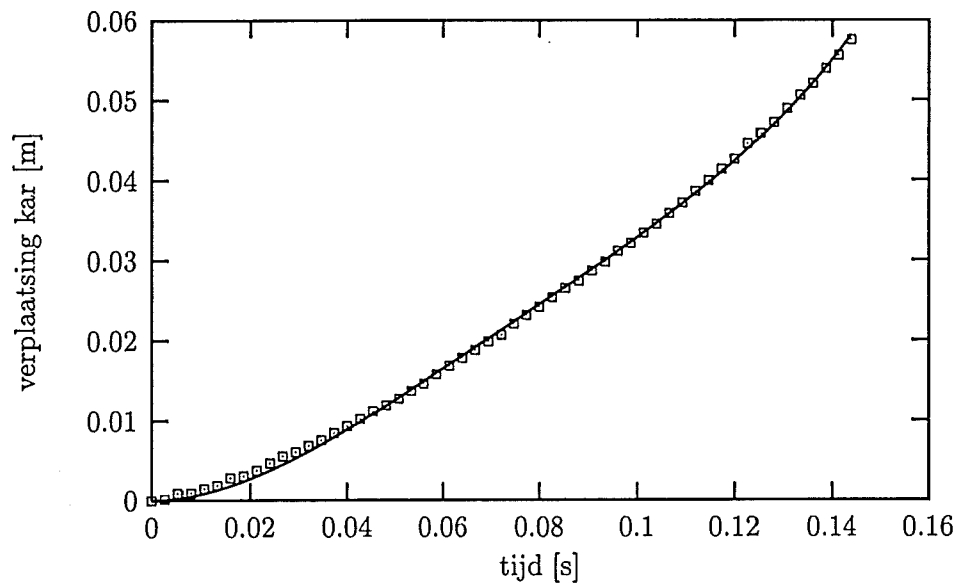
Omdat bij het gebruik van een tweedegraads polynoom de hoge waarde voor de gefitte beginsnelheid vraagtekens oproept en het derdegraads polynoom allerm minst bevredigende resultaten oplevert, is ook getracht om een vierde graads polynoom door de plaats-tijd data van de kar te fitten. Om zoveel mogelijk de a priori fysische kennis te gebruiken, zijn hierbij de coëfficiënten c_0 en c_1 gelijk aan nul gesteld.

6.3.3 Karverplaatsing gefit met vierdegraads polynoom

Het gefitte vierdegraads polynoom, waarbij de eerste twee coëfficiënten gelijk aan nul zijn gesteld, ziet er als volgt uit:

$$x(t) = c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4. \quad (6.11)$$

In dit geval kan de versnelling kwadratisch in de tijd variëren. Een voorbeeld van een dataset met fit staat in figuur 6.7 weergegeven. Op het oog ziet deze fit er goed uit. Enkel



Figuur 6.7: Karverplaatsing als functie van de tijd met het gefitte vierde graads polynoom.

aan het begin van de beweging ligt de fit duidelijk onder de datapunten. Bekijken we echter het verloop van de versnelling, dat wil zeggen, de tweede afgeleide van vergelijking (6.11), dan ziet het resultaat er veel minder fysisch correct uit. Zie figuur 6.8. Volgens dit model is de startversnelling van de kar ongeveer $16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, terwijl eerder uitgerekend is, dat de maximale theoretische versnelling $4.87 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ bedraagt. Het ongelimiteerd toenemen van de versnelling vanaf het tijdstip 0.07 seconde is eveneens onrealistisch. De gebruikte vierdegraads polynoom is dus ook niet geschikt is om de data te beschrijven.

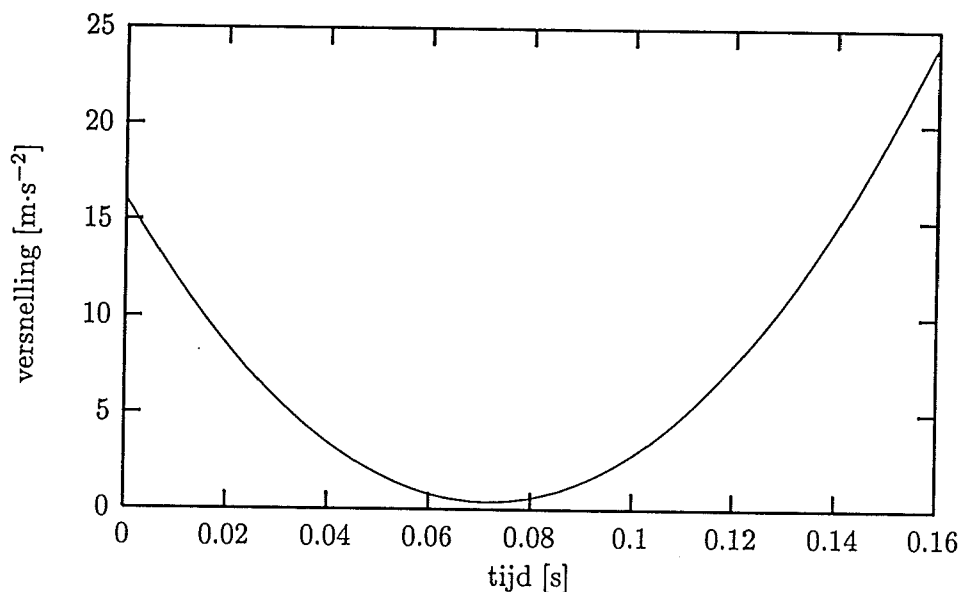
6.3.4 Conclusie voor de karversnelling

Het bepalen van de juiste versnelling van de kar is een lastig probleem, aangezien het model van de beweging niet bekend is. Er is alles aan gedaan om de kar éénparig te laten versnellen. Gelet op de fysica ligt de keuze voor een tweedegraads polynoom dan ook voor de hand. Daarnaast leverde alleen het gebruik van een tweedegraads polynoom, waarbij alle coëfficiënten zijn meegefit, reproduceerbare resultaten op. In de rest van dit onderzoek wordt daarom aangenomen, dat de kar éénparig versnelt met de versnelling, die gevonden is in paragraaf 6.3.1 met de kwadratische fit. Deze versnelling is:

$$a_k = 2.86 \pm 0.03 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

6.4 Resultaten kogeltjes

Naast data van weerstandscoefficienten zijn van de kogel nog verscheidene andere grootheden bepaald. De resultaten betreffende de weerstandscoefficienten zullen in de volgende paragraaf gepresenteerd worden. Deze paragraaf bevat de andere interessante data en is in de volgende subparagrafen opgedeeld:



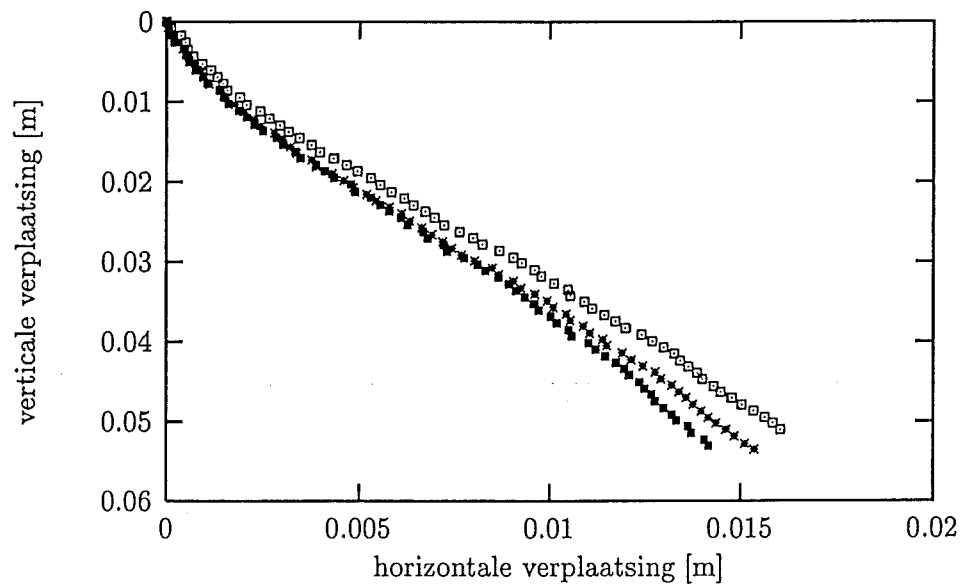
Figuur 6.8: Verloop versnelling als functie van de tijd bij gebruikmaking van een vier-degraads polynoom als fitfunctie.

- Trajectorieën,
- Verticale valsnelheid bij start zijwaartse beweging,
- Omklaptijd zog,
- Stationaire snelheid in horizontale en verticale richting,
- Koppeling snelheden en versnellingen.

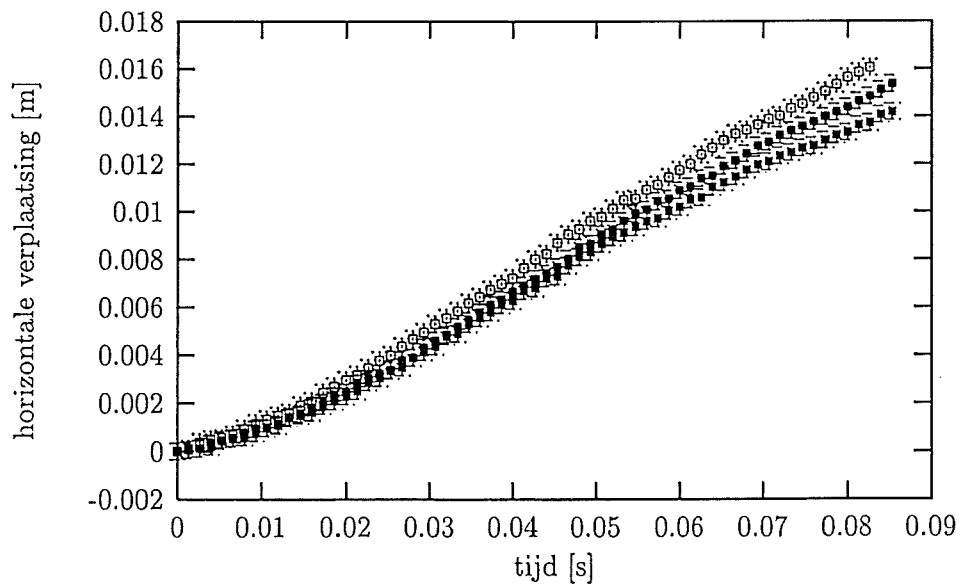
6.4.1 Trajectorieën

In figuur 6.9 zijn enkele trajectorieën van de tweedimensionale beweging van het kogeltje weergegeven. Langs de y -as staat de beweging in verticale richting uitgezet tegen de beweging in horizontale richting langs de x -as. In deze figuur staat dus de echte beweging van de kogel, zoals deze door de camera wordt geregistreerd. De oorsprong bevat het eerste punt en de volgende punten liggen steeds $1/750$ s verder in de tijd. Weergegeven zijn drie trajectorieën, de twee uitersten en een trajectorie, die ongeveer midden tussen de beide uitersten ligt. De andere gemeten trajectorieën vallen eveneens tussen deze beide uitersten. Om de figuur overzichtelijk te houden zijn geen foutenbalken weergegeven.

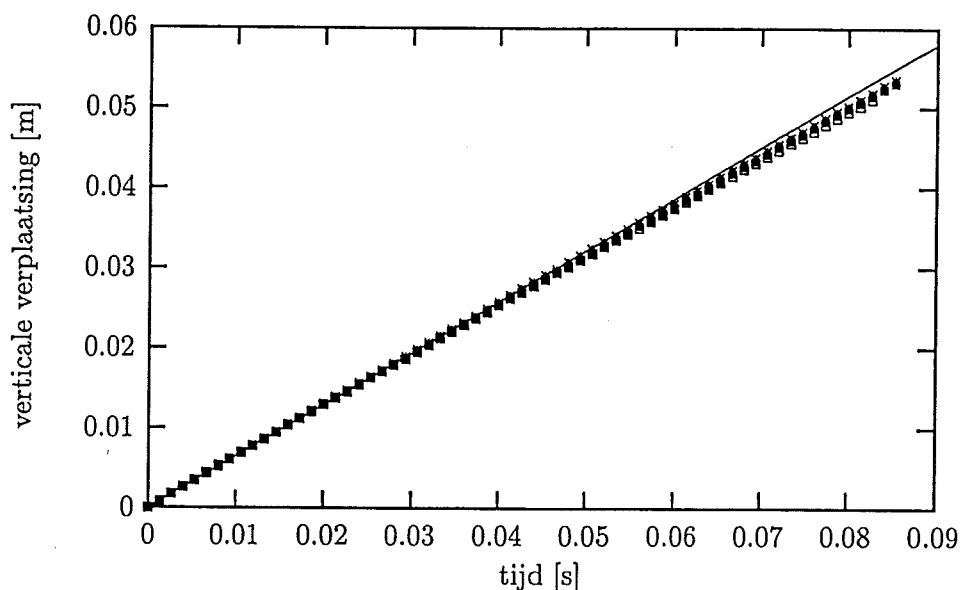
Te zien is, dat de in verticale richting afgelegde afstand groter is dan de afstand die in horizontale richting wordt afgelegd. Dit is niet zo verwonderlijk aangezien de kogel op het moment, dat deze het beeld binnenkomt, al een snelheid in verticale richting heeft. Voor reproduceerbare metingen zouden de lijnen samen dienen te vallen. Dit is hier niet het geval. Uit deze figuur is niet te zien of de afwijking veroorzaakt wordt door een afwijking in horizontale of een afwijking in verticale richting. Dit wordt wel zichtbaar indien de bewegingen in horizontale en in verticale richting apart weergegeven worden als functie van de tijd.



Figuur 6.9: Enkele trajectorieën van het kogeltje.



Figuur 6.10: Horizontale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd.



Figuur 6.11: Verticale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd, inclusief rechte referentielijn.

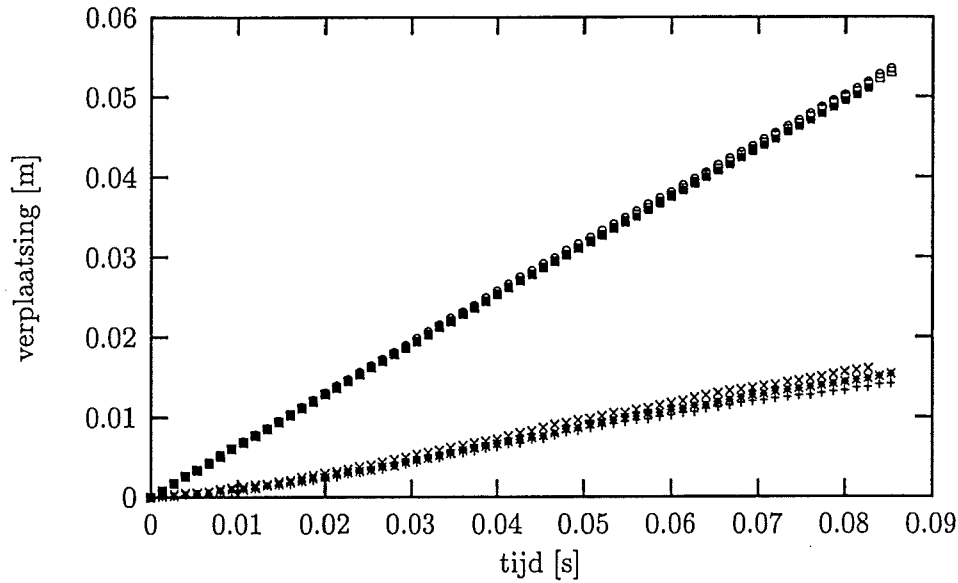
In de figuren 6.10 en 6.11 zijn de verplaatsingen van de kogel in horizontale en in verticale richting afzonderlijk tegen de tijd uitgezet. In figuur 6.12 zijn beide verplaatsingen in één grafiek geplaatst. In deze laatste figuur is zichtbaar, dat de grootste afwijkingen per meting in de horizontale richting optreden.

Wat is er in de grafieken te zien? Als we de horizontale verplaatsing van de kogel tegen de tijd beschouwen, is er, afgezien van de spreiding, een algemene trend zichtbaar. Voor tijden korter dan ongeveer 0.045 s lopen de lijnen convex, waarna er een buigpunt in de grafiek zit, gevolgd door een concaaf deel. Aan het einde van de datasets gaan de lijnen recht lopen. Hoe is dit verloop kwalitatief te verklaren?

Het convexe verloop aan het begin van de grafieken duidt op een versnelling, hetgeen voor de hand ligt. Echter na ongeveer 0.045 s gaan de grafieken concaaf lopen, hetgeen in een plaats-tijd diagram duidt op een afremmende beweging. Dit is op het eerste gezicht vreemd, aangezien er geen remmende kracht wordt opgelegd. Immers de datasets van de karverplaatsing in figuur 6.2 vertonen geen buigpunt rond $t = 0.045$ s (dit is geverifieerd door een derde- en vierdegraads polynoom door de datapunten van de beweging van de kar te fitten en vervolgens het buigpunt te bepalen) en duiden op een continu versnelde beweging. Er moet hier dus een ander proces optreden. Het feit, dat de grafieken aan het einde van de datasets recht gaan lopen, duidt erop, dat er een stationaire snelheid is bereikt. De kogel moet blijkbaar afremmen om de stationaire snelheid te bereiken. De enige verklaring, die hiervoor te geven is, is dat de kogel ten gevolge van weerstandsreductie tijdelijk een hogere snelheid krijgt, dan de uiteindelijke stationaire snelheid, waar hij naar toe dient te gaan.

Kwalitatief is dus een reductie van de weerstandskracht waarneembaar.

Tot het moment, dat het zog, tijdens het werken van de zijwaartse kracht, zich weer in het verlengde van de bewegingsrichting bevindt, zal er in zijwaartse richting een kleinere drukval over de kogel staan, hetgeen een gereduceerde weerstandskracht tot gevolg zal



Figuur 6.12: Horizontale en verticale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd in één figuur.

hebben. Tot dit moment zal de kogel een grotere versnelling ondervinden, dan wanneer het zog zich onmiddellijk in het verlengde van de bewegingsrichting bevindt, hetgeen een hogere snelheid dan de uiteindelijke stationaire snelheid tot gevolg kan hebben. Dit principe is in figuur 6.10 zichtbaar. Het tijdstip van het buigpunt in de grafieken is dus een maat voor de tijd, waarin het zog omgeklapt is. In een volgende subparagraaf zal hier nader op worden ingegaan.

In figuur 6.11 is te zien, dat de snelheid in verticale richting iets afneemt in de tijd. Hiertoe is een referentielijn in de figuur getekend. De helling van deze lijn is gelijk aan de verticale snelheid, waarmee de kogel het opnamegebied binnenkomt.

6.4.2 Verticale valsnelheid bij start zijwaartse beweging

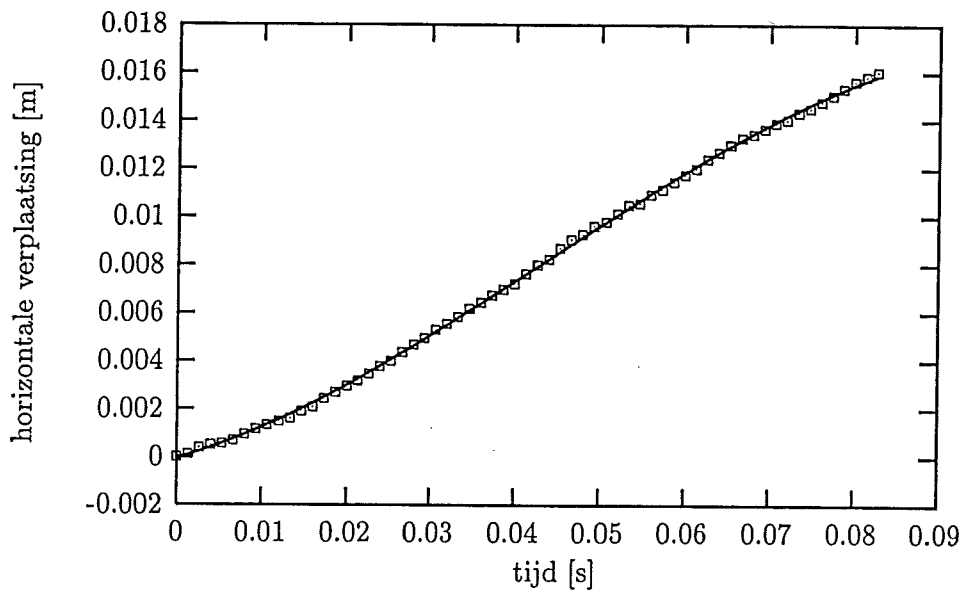
Om in zijwaartse richting een situatie te verkrijgen vergelijkbaar met de val onder invloed van de zwaartekracht, dient, voordat de zijwaartse kracht gaat werken, het kogeltje een stationaire verticale valsnelheid te hebben. Om dit te verifiëren zijn zowel de experimentele als de theoretische verticale valsnelheid bij binnenkomst van het opnamegebied bepaald. De theoretische stationaire valsnelheid $v_{\infty,y}$ is eenvoudig te berekenen uit een krachtenbalans over de kogel. Voor de stationaire situatie luidt de krachtenbalans:

$$0 = \frac{1}{6}\pi D^3(\rho_p - \rho_f)g - C_{D,s}\frac{1}{4}\pi D^2\frac{1}{2}\rho_f v_{\infty,y}^2, \quad (6.12)$$

waaruit voor de verticale valsnelheid volgt:

$$v_{\infty,y} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{D}{C_{D,s}} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} g}. \quad (6.13)$$

Gebruikmakend van de vergelijking van Turton en Levenspiel [10] voor $C_{D,s}$ als functie van het Reynoldsgetal, vergelijking (2.29), volgt voor de stationaire valsnelheid van een ijzeren kogel met een diameter van 2 mm in water:



Figuur 6.13: Horizontale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd met een derdegraads fit.

$$v_{\infty,y} = 0.644 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

De experimentele waarden voor de valsnelheid zijn bepaald aan de hand van de datasets van figuur 6.11. Aangenomen wordt, dat aan het allereerste begin van het werken van de zijwaartse kracht het zog nog niet noemenswaardig verandert. De fout, die hierdoor gemaakt wordt, zal verwaarloosbaar zijn. Om de valsnelheid bij binnenkomst van het opnamegebied te bepalen, weergegeven met $\bar{v}_{y,b}$, is het eerstegraads polynoom

$$y(t) = c_0 + c_1 t \quad (6.14)$$

door de eerste 7 punten van de datafiles gefit. Uitmiddeling over alle datasets levert voor de gemiddelde gemeten waarde:

$$\bar{v}_{y,b} = 0.645 \pm 0.010 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

De gemeten en theoretische waarden komen zeer goed overeen, waardoor geconcludeerd kan worden, dat de kogel inderdaad met de stationaire valsnelheid het opnamegebied binnentreedt.

6.4.3 Omklaptijd zog

Het tijdstip, waarop de kogel in horizontale richting begint af te remmen, is een maat voor de omklaptijd van het zog. Om deze tijd te bepalen zijn door de datasets van de verplaatsing van de kogel in horizontale richting een derde- en een vierdegraads polynoom gefit. Deze beide methodes bleken gelijke resultaten op te leveren en daarom is gekozen om door alle datasets een derdegraads polynoom te fitten. Een voorbeeld van een dataset met derdegraads fit is weergegeven in figuur 6.13.

Nadat voor elke opname het buigpunt bepaald was, zijn de waarden uitgemiddeld, hetgeen voor het buigpunt en dus de gemiddelde omklaptijd van het zog $\bar{t}_{zog}$ oplevert:

$$\bar{t}_{zog} = 46.3 \pm 2.3 \text{ ms.}$$

Deze tijd is dus een maat voor de tijd, die het zog nodig heeft om rond de bol te draaien en in het verlengde van de nieuwe bewegingsrichting te komen. Ofwel, $\bar{t}_{zog}$ is een maat voor de relaxatietijd. Tot ongeveer deze tijd is er in zijwaartse richting dus een weerstandsreductie te verwachten.

6.4.4 Stationaire snelheid in horizontale en verticale richting

De beweging van de kogel in de horizontale richting lijkt stationair te worden, gezien het feit, dat de curves aan het einde van de datasets de neiging hebben om een rechte lijn te gaan beschrijven. Fysisch is het niet moeilijk in te zien, dat de snelheid van de kogel in zijwaartse richting stationair zal worden. Om deze (bij benadering) éénparige snelheid te bepalen is besloten om bij alle datasets door de punten vanaf $t = 0.071$ s een eerstegraads polynoom, volgens vergelijking (6.14), te fitten. Uitmiddeling over alle datasets levert voor de stationaire snelheid in zijwaartse richting $\bar{v}_{\infty,x}$:

$$\bar{v}_{\infty,x} = 0.168 \pm 0.018 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Het ligt in de lijn der verwachting, dat het constant worden van de snelheid aan het einde van de datasets ook in verticale richting het geval zal zijn. Daarom is ook voor de verticale richting een eerstegraads polynoom door de datapunten gefit vanaf $t = 0.071$ s, hetgeen de stationaire verticale valsnelheid oplevert, weergegeven met $\bar{v}_{\infty,y}$. Uitmiddelen levert het volgende resultaat op:

$$\bar{v}_{\infty,y} = 0.602 \pm 0.004 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

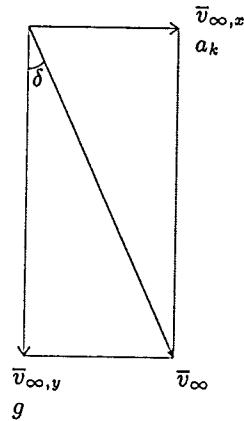
6.4.5 Koppeling snelheden en versnellingen

De vraag rijst nu in hoeverre de gemeten snelheden overeen komen met de theorie. Deze vraag is vrij eenvoudig te beantwoorden. Hierbij wordt tevens een indicatie verkregen omtrent de veronderstelde éénparige versnelling van de kar, $a_k = 2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Bekijk figuur 6.14. In deze figuur staan de snelheden in horizontale en verticale richting weergegeven. De vectoroptelling van beide snelheden geeft de bewegingsrichting van de kogel voor de stationaire situatie weer. Aan de hand van de snelheden kan de waarde van de hoek δ berekend worden. Met behulp van de in de vorige subparagraaf gevonden waarden volgt:

$$\delta = 15.6^\circ.$$

Deze hoek is uiteraard ook te bepalen met behulp van de versnellingen in horizontale en verticale richting, hetgeen ook in figuur 6.14 is weergegeven. Indien voor de horizontale versnelling $a_k = 2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ gebruikt wordt, volgt voor de waarde van de hoek δ :



Figuur 6.14: Ontbinding van de bewegingsrichting van de kogel in de horizontale en de verticale component.

$$\delta = 16.3^\circ.$$

Aangezien de waarden van de beide hoeken redelijk overeen komen, kan geconcludeerd worden, dat de keuze van de éénparige versnelling $a_k = 2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ acceptabel is. Kwadratisch optellen van de beide snelheden levert voor $\bar{v}_\infty$, de snelheid in de bewegingsrichting van de kogel:

$$\bar{v}_\infty = 0.625 \pm 0.006 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Met behulp van vergelijking (6.13), waarbij voor g de kwadratische som van de gravitatieversnelling en de éénparige versnelling van de kar ingevuld worden, in combinatie met de vergelijking van Turton en Levenspiel (2.29) volgt voor de theoretische waarde van v_∞ :

$$v_\infty = 0.659 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Hieruit blijkt, dat de theoretisch en experimenteel bepaalde waarden strijdig zijn. Zodadelijk zal de oorzaak hiervan naar voren komen.

Met de bovenstaande theoretische waarde van v_∞ kunnen ook de in paragraaf 6.4.4 gepresenteerde gemeten snelheden op juistheid gecontroleerd worden. Met behulp van de hoek $\delta = 16.3^\circ$, verkregen via de versnellingen, kunnen de theoretische waarden van de snelheden in horizontale en verticale richting, $v_{\infty,x}$ en $v_{\infty,y}$ berekend worden. In de x -richting luidt het resultaat:

$$v_{\infty,x} = 0.185 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Hieruit volgt, dat de gemeten en theoretisch bepaalde snelheid in horizontale richting niet strijdig zijn. Berekenen we de theoretische stationaire snelheid in de verticale richting, dan vinden we:

$$v_{\infty,y} = 0.633 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

waaruit blijkt, dat de snelheden in verticale richting wel strijdig zijn. De snelheid in verticale richting wordt onderschat. Deze onderschatting zorgt ervoor, dat de experimentele

en theoretische waarden van de éénparige snelheid in de bewegingsrichting van de kogel strijdig zijn.

Aangezien de snelheid in horizontale richting ook onderschat wordt, doet dit het vermoeden ontstaan, dat we hier te maken hebben met een schalingsprobleem. Aangezien de stationaire verticale valsnelheid van de kogel bij binnenkomst in het opnamegebied van de camera wel correct wordt bepaald, duidt dit erop, dat aan de onderzijde een andere schaling van toepassing is dan aan de bovenzijde. De schaling met behulp van de lineaal, zoals in figuur 5.3 zichtbaar is, veronderstelt echter een gelijke schaling over het gehele beeld. Een mogelijke oorzaak van dit schalingsprobleem kan zijn, dat de camera niet exact horizontaal is gepositioneerd.

Met behulp van de gemeten en theoretische verticale snelheid is te berekenen hoe groot de hoek dient te zijn, indien dit de oorzaak is. De cosinus van de hoek is immers gelijk aan de verhouding van de beide snelheden. Berekening levert op, dat deze hoek gelijk is aan 18° . Deze hoek is onrealistisch groot, aangezien een dergelijk grote hoek zou zijn opgevallen. Aangezien de gemeten snelheid bij binnenkomst van het opnamegebied wel met de theorie overeenkomt, zou het kunnen zijn, dat we te kampen hebben met een afbeeldingsfout van de lens op de camera. Hierdoor worden de verplaatsingen van de kogel in horizontale en verticale richting onder in het beeld blijkbaar met dezelfde factor onderschat, hetgeen verklaart, dat de hoeken van 15.6° en 16.3° wel goed overeen komen.

Deze paragraaf samenvattend kan geconcludeerd worden, dat de weerstandsreductie in zijwaartse richting, vlak nadat de zijwaartse kracht op het kogeltje werkt, kwalitatief aangetoond is. Daarnaast is gebleken, dat de keuze van de éénparige versnelling van de kar redelijke resultaten oplevert. Daarom zal verder gewerkt worden met de aanname, dat de kar éénparig versnelt met een versnelling $a_k = 2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. In de volgende paragrafen zullen data voor weerstandscoefficiënten bepaald worden en zal getracht worden om de kwalitatieve bevindingen te kwantificeren.

6.5 Bepaling overall weerstandscoefficiënt als functie van Reynolds

Allereerst zal de beweging van de kogel beschouwd worden met behulp van één enkele weerstandscoefficiënt. Hiertoe zijn de data in de x - en y -richting gefit met derde- en vierdegraads polynomen, hetgeen in deze paragraaf besproken zal worden. In een volgende paragraaf zal ook de toegevoegde massa in de analyse betrokken worden, zoals in hoofdstuk 3 besproken is. Voor een afschatting van de onnauwkeurigheden in de experimenteel bepaalde weerstandscoefficiënten alsmede voor een bespreking van een ordeselectiecriterium voor de fitpolynomen wordt verwezen naar bijlage B.

6.5.1 Overall weerstandscoefficiënt met behulp van derdegraads fit

Om data voor de overall weerstandscoefficiënten te verkrijgen wordt gebruik gemaakt van vergelijking (3.7), welke luidt:

$$C_D = \frac{4(\rho_p - \rho_f)Da_k - 4\rho_p Da_{p,x}}{3\rho_f \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2} v_{p,x}}. \quad (3.7)$$

Om nu data voor de versnelling van het kogeltje, $a_{p,x}$, en de snelheid van het kogeltje in de horizontale en verticale richting, $v_{p,x}$ en $v_{p,y}$, te verkrijgen, zijn door de x - en y -data derdegraads polynomen, zonder restricties ten aanzien van de coëfficiënten, gefit. Dit fitten is op twee verschillende manieren gedaan. Allereerst zijn de datafiles globaal gefit, dat wil zeggen, dat de datasets in hun geheel gefit zijn. Daarnaast zijn de datasets ook opgedeeld in twee stukken, te weten tot en na het buigpunt. Voor de versnelling van de kar is de eerder bepaalde waarde $a_k = 2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ gebruikt.

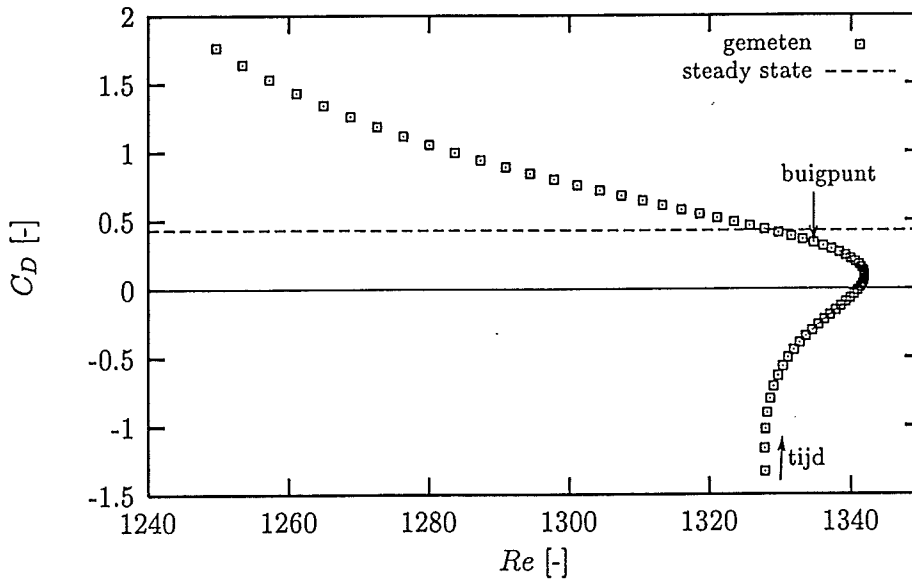
Aangezien ook voor de kogel het model van de beweging onbekend is, dient er een model gekozen te worden. Het ligt dan voor de hand om een zo eenvoudig mogelijk model te kiezen. Polynomen zijn betrekkelijk eenvoudige modellen. Aangezien te verwachten is, dat de kogel geen éénparige versnelde beweging zal uitvoeren, is een tweedegraads polynoom niet adequaat om de beweging van de kogel mee te beschrijven. Een eenvoudig model, dat wel rekening houdt met het tijdsafhankelijke karakter van de versnelde beweging, is een derdegraads polynoom. Om deze reden is voor deze polynoom gekozen.

Globale fit

Indien de na het globaal fitten gevonden data in vergelijking (3.7) gesubstitueerd worden, kan de weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal bepaald worden. Een voorbeeld is weergegeven in figuur 6.15. Hierin is tevens de stationaire curve volgens de vergelijking van Turton en Levenspiel [10], vergelijking (2.29), geschetst. Alle metingen leveren een soortgelijke figuur als deze op. De curve wordt in de tijd doorlopen van kleine waarden van de weerstandscoefficiënt naar grote waarden van C_D .

Een aantal zaken vallen onmiddellijk op in figuur 6.15. Allereerst is het zeer opvallend, dat er negatieve waarden van de weerstandscoefficiënt voorkomen. Dit gebeurt aan het begin van de beweging van de kogel in zijwaartse richting en heeft hoogstwaarschijnlijk te maken met de gebruikte verwerkingsmethode. De gefitte beginversnelling van de kogel valt vele malen hoger uit dan de versnelling van de kar (voor alle metingen rond de $6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), hetgeen fysisch gezien onwaarschijnlijk is. Een negatieve weerstandscoefficiënt is uiteraard niet realistisch en dient te worden opgevat als een kracht, die de zijwaartse beweging helpt in plaats van tegenwerkt. De enige manier, waarop de versnelling van de kogel groter zou kunnen zijn dan de versnelling van de kar, is, wanneer er zich in de bak “vrije” convectie zou voordoen. Aan de hand van in de bak aanwezige stofdeeltjes is dit gecontroleerd, maar “vrije” convectie bleek niet aanwezig te zijn.

Daarnaast is het erg merkwaardig, dat het Reynoldsgetal afneemt in de tijd. Dit is uiterst twijfelachtig, aangezien de totale versnellende kracht op het deeltje toeneemt. Enkel aan het begin van de zijwaartse beweging neem het Reynoldsgetal toe, maar nog voor het buigpunt in de (x, t) -curve neemt het Reynoldsgetal af. Aangezien de snelheid in horizontale



Figuur 6.15: De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, bepaald met een globale derdegraads polynoomfit.

richting toeneemt, kan de afname van het Reynoldsgetal enkel veroorzaakt worden door een afname van de verticale snelheid. In de vorige paragraaf is inderdaad naar voren gekomen, dat de gemeten snelheid in verticale richting lager is dan de theoretische snelheid. Dit zorgt ervoor, dat het Reynoldsgetal te laag uitvalt.

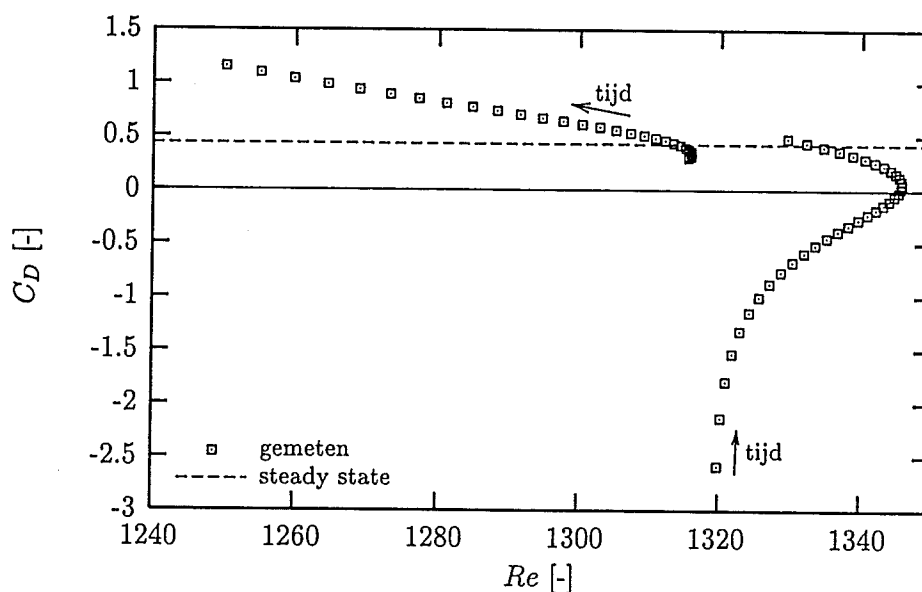
Tot het buigpunt is een gereduceerde weerstandskracht te verwachten en daardoor dient de C_D -curve minimaal tot het buigpunt onder de stationaire curve te liggen. Afgezien van de negatieve waarden van de weerstandscoefficiënt, is duidelijk zichtbaar, dat aan het begin van de beweging de waarden van C_D inderdaad beneden de stationaire curve liggen. Opvallend is ook, dat de weerstandscurve tot ver boven de stationaire curve toeneemt. In een vorige paragraaf is besproken, dat de snelheid in zijwaartse richting constant wordt. Bij het constant worden van de snelheid dient de gemeten curve te naderen tot de stationaire curve, maar dit is allerm minst het geval. Hieruit kan geconcludeerd worden, dat de data niet goed globaal te beschrijven zijn met een derdegraads polynoom.

Daarom is getracht om de data meer lokaal te beschouwen door de datasets voor en na het buigpunt apart te fitten.

Voor en na buigpunt aparte fits

In figuur 6.16 is een figuur weergegeven van de weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij de data voor en na het buigpunt apart met een derdegraads polynoom gefit zijn. De discontinuïteit in figuur 6.16 wordt uiteraard veroorzaakt, doordat de fits bij het buigpunt niet exact aansluiten. De in deze figuur weergegeven curves zijn bepaald, door zowel voor als na het buigpunt geen restricties aan de coëfficiënten op te leggen.

Vergelijking van de figuur 6.16 met figuur 6.15 laat zien, dat het verloop van de C_D -curves in beide figuren ongeveer gelijk is. Het grote verschil zit hem in het feit, dat de C_D -waarde



Figuur 6.16: De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij tot en na het buigpunt apart met een derdegraads polynoom gefit is.

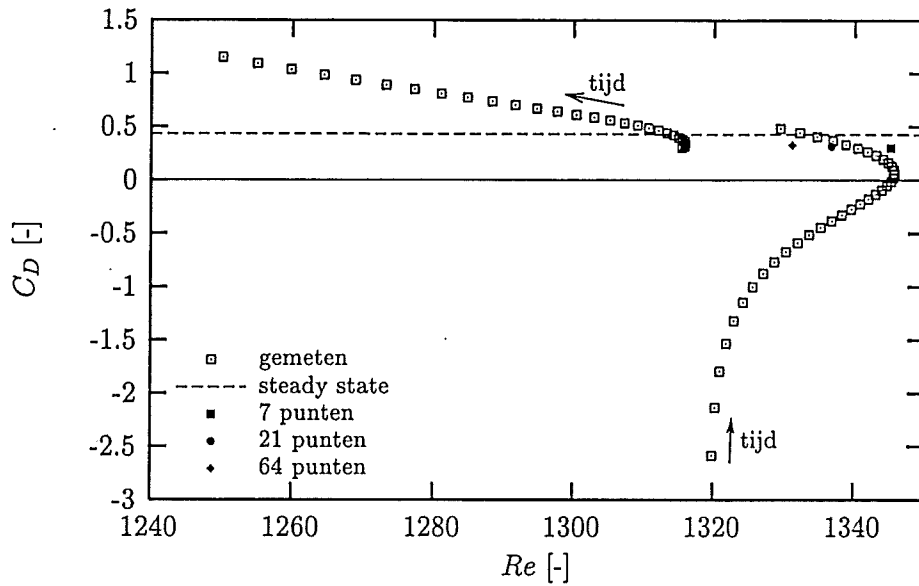
aan het einde van de beweging in figuur 6.16 beduidend lager ligt. Ook loopt de curve daar niet meer duidelijk convex. Het apart fitten tot en na het buigpunt levert resultaten, die gezien de a priori kennis fysisch correcter zijn. Ook is weer duidelijk zichtbaar, dat aan het begin van de zijwaartse beweging de waarden van de weerstandscoefficiënt lager zijn dan de stationaire weerstandscurve, hetgeen dus weer op een reductie van de weerstandskracht duidt.

In figuur 6.16 zit geen informatie omtrent het buigpunt. Het ligt in de lijn der verwachting, dat de C_D -waarde in het buigpunt ergens tussen de discontinuïteit invalt. Om dit te verifiëren is ook in het buigpunt de waarde van de weerstandscoefficiënt bepaald. Hiertoe is door een aantal punten een derdegraads polynoom gefit. Dit is achtereenvolgens gedaan door 7 punten (buigpunt met 3 punten ervoor en erna), 21 punten en door de gehele dataset van de beweging in horizontale richting, bestaande uit 64 datapunten. Bekend is, dat in het buigpunt de versnelling in de richting van de zijwaartse kracht gelijk aan nul is. Met behulp van deze kennis is het mogelijk om een fysisch verantwoorde restrictie aan één van de coëfficiënten op te leggen en de versnelling in het buigpunt gelijk aan nul te stellen. In figuur 6.17 is het resultaat zichtbaar, waarbij tevens de curves van figuur 6.16 nogmaals zijn weergegeven.

Het is duidelijk zichtbaar, dat het aantal punten, dat gebruikt wordt om de waarde van de weerstandscoefficiënt in het buigpunt te bepalen, een grote invloed heeft op het resultaat wat betreft het Reynoldsgetal. Hoe meer datapunten gebruikt worden voor de polynoomfit, des te meer schuift de waarde van C_D naar links in de grafiek. Echter de waarde van C_D valt niet op de plaats van de discontinuïteit. Op de waarde van de weerstandscoefficiënt heeft het aantal gebruikte datapunten weinig invloed. Daarnaast valt de waarde iedere keer onder de stationaire weerstandscurve.

Hieruit blijkt, dat ook kwantitatief een reductie van de weerstandskracht te vinden is.

Dit laatste is uiteraard alleen het geval indien de experimenteel bepaalde versnelling van

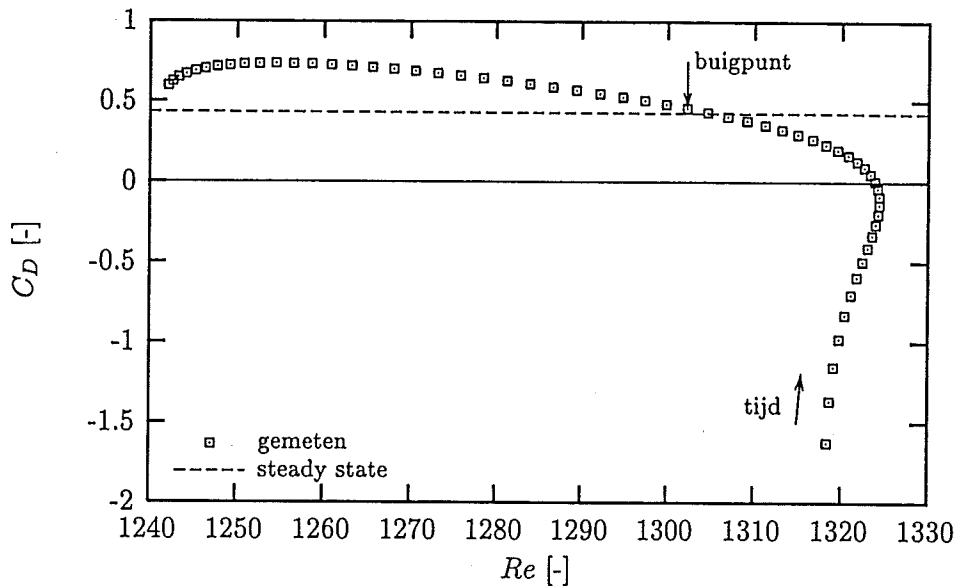


Figuur 6.17: De weerstandscoefficiënt in het buigpunt, wanneer er een derdegraads polynoom door respectievelijk 7, 21 en 64 datapunten wordt gefit.

de kar correct is. In de vorige paragraaf is aangetoond, dat de aanname, dat deze éénparig versnelt met de versnelling $a_k = 2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, acceptabel is. Bovendien valt de C_D -waarde in het buigpunt pas samen met de stationaire weerstandscurve, indien voor de versnelling van de kar $4.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ wordt genomen. Voor alle versnellingen kleiner dan $4.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ valt de waarde van de weerstandscoefficiënt onder de stationaire curve.

Een groot moeilijkheid inherent aan polynoomfitten is het adequaat beschrijven van de grenzen van de datasets. Dit blijkt uit het feit, dat er aan het begin van de zijwaartse beweging negatieve weerstandscoefficiënten gevonden worden en de gemeten curve niet aan de stationaire weerstandscurve nadert aan het einde van de beweging. Tevens komt dit probleem duidelijk naar voren indien voor en na het buigpunt aparte fits gebruikt worden. De fits sluiten rond het buigpunt niet aan, waardoor er een sprong in het Reynoldsgetal optreedt, hetgeen veroorzaakt wordt door verschillende hellingen van de beide polynomen in het buigpunt.

In de vorige paragraaf is gevonden, dat de snelheid van de kogel constant wordt. In dat geval is de versnelling van de kogel weer gelijk aan nul en dient de gemeten curve van de weerstandscoefficiënt te naderen aan de stationaire curve. Dit is niet het geval in figuur 6.16. Dit wordt veroorzaakt, doordat de via de fit bepaalde versnelling negatief is ($-3.4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$) en de snelheid die uit de fit volgt niet gelijk is aan de snelheid, die gevonden wordt indien er een rechte lijn door de laatste datapunten gefit wordt. Indien de versnelling van de kogel gelijk aan nul wordt gesteld en de gevonden constante snelheid in vergelijking (3.7) gesubstitueerd wordt, wordt de waarde van de weerstandscoefficiënt $C_D = 0.43$, hetgeen overeenkomt met de stationaire weerstandscoefficiënt. Zij het met enige spreiding, wordt bij de andere metingen op deze wijze voor de weerstandscoefficiënt aan het einde van de beweging ook een waarde in de buurt van de stationaire curve gevonden. Dit toont aan, dat de in de vorige paragraaf experimenteel bepaalde stationaire snelheden redelijk zijn en dat de in figuur 6.16 optredende afwijkingen te wijten zijn aan incorrecte fitprocedures. De waarden van C_D aan het einde van de beweging vallen over het algemeen wel iets hoger



Figuur 6.18: De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, bepaald met een globale vierdegraads polynoomfit.

uit dan de stationaire waarde, hetgeen weer aantoont, dat de stationaire snelheden wel iets onderschat worden.

Ofschoon de datapunten met de lokalere fits beter beschreven worden dan met de globale fits, dient geconcludeerd te worden, dat derdegraads polynomen niet toereikend zijn om het probleem mee te analyseren. Dit aangezien de waarden van de weerstandscoefficiënt aan het einde van de opnames redelijk overeen komen met de theoretische waarden, indien daar expliciet de versnelling van de kogel gelijk aan nul wordt gesteld. Gezien deze conclusie zijn de data ook met vierdegraads polynomen gefit.

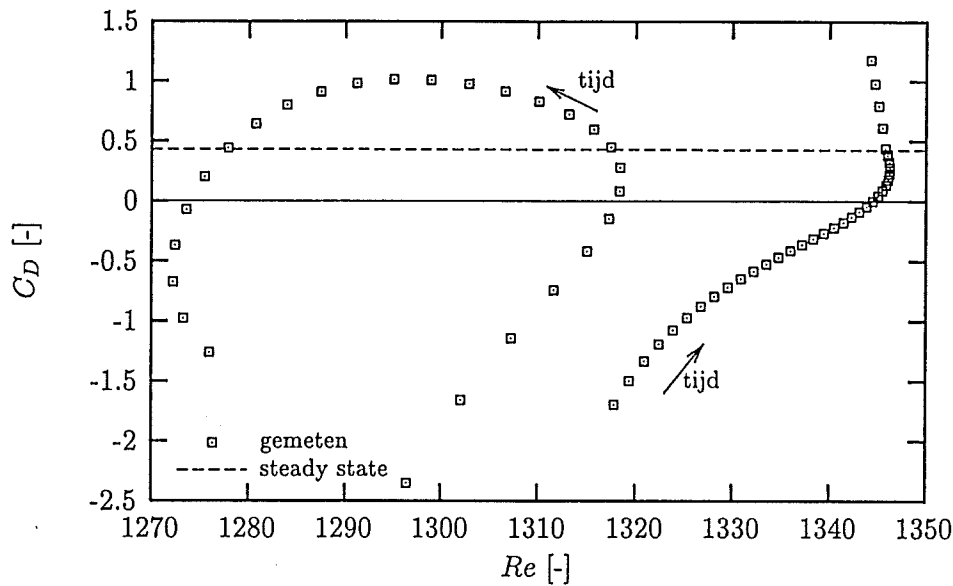
6.5.2 Overall weerstandscoefficiënt met behulp van vierdegraads fit

Wederom wordt gebruik gemaakt van vergelijking (3.7), maar nu worden vierdegraads polynomen door de datapunten van de horizontale en verticale verplaatsing van de kogel gefit om de benodigde data te verkrijgen. Ook hier zullen eerst de data globaal gefit worden, waarna de datasets voor en na het buigpunt apart beschouwd zullen worden.

Globale fit

In figuur 6.18 is voor een meting de weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal uitgezet, waarbij de datasets globaal gefit zijn met een vierdegraads polynoom. Tevens is weer de stationaire curve weergegeven. Ook hier wordt de curve van kleine naar grote waarden van de weerstandscoefficiënt doorlopen. De curves van de andere metingen hebben een soortgelijk verloop, dus daarom is maar één gemeten curve weergegeven.

Wat in deze curve onmiddellijk opvalt, is het feit, dat de curve aan het eind van de beweging, dus voor de kleinste Reynoldsgetalen, alwaar de snelheid stationair wordt, redelijk naar de stationaire curve nadert, hetgeen niet het geval was bij de derdegraads fits. Hieruit



Figuur 6.19: De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij tot en na het buigpunt apart met een vierdegraads polynoom gefit is.

blijkt, dat vierdegraads polynomen de datapunten aan het einde van de beweging beter volgen dan derdegraads polynomen.

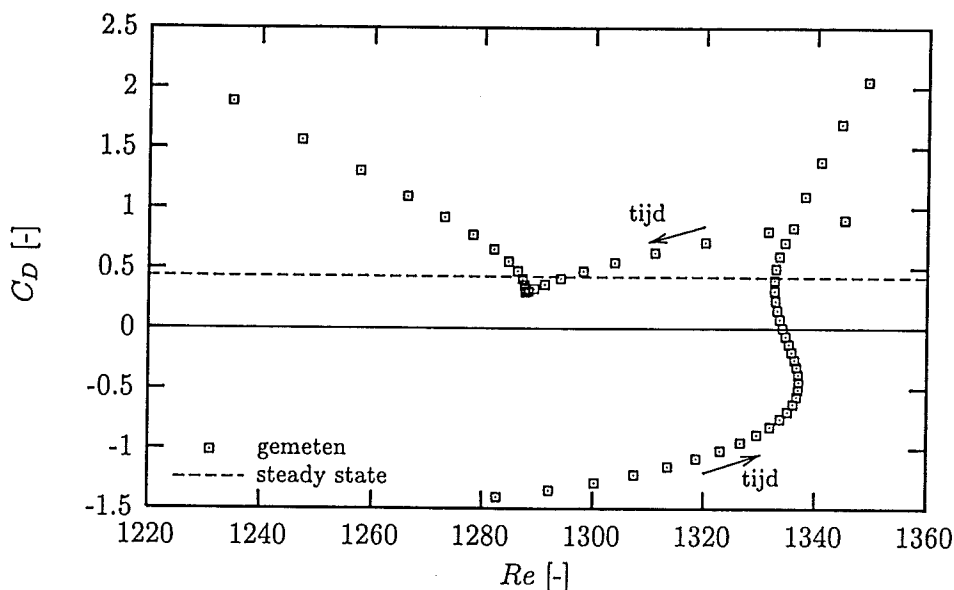
Daarnaast zijn nog steeds de negatieve weerstandscoefficiënten aan het begin van de beweging aanwezig. Hiervoor zijn een aantal oorzaken te bedenken. Allereerst kan het zo zijn, dat het begin van de beweging van de kogel ook niet met een vierdegraads polynoom beschreven kan worden. Daarnaast kan het ook zo zijn, dat voor korte tijden de aanname, dat de kar met een éénparige versnelling van $2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ versnelt, niet correct is. Wel is weer duidelijk zichtbaar, dat de stationaire curve van onderaf genaderd wordt, hetgeen weer duidt op een weerstandsreductie aan het begin van de beweging in zijwaartse richting.

Met globale vierdegraads polynoomfits worden hoopvolle resultaten behaald. Evenals bij de derdegraads fit zullen de datasets nu ook voor en na het buigpunt apart beschouwd worden.

Voor en na buigpunt aparte fits zonder restricties voor de fitcoëfficiënten

In figuur 6.19 is voor een meting de weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij de data voor en na het buigpunt met vierdegraads polynomen apart zijn gefit, weergegeven. In de tijd wordt allereerst de rechts in de figuur gelegen curve van kleine naar grote C_D doorlopen, waarna de meer links gelegen curve van kleine naar grote en vervolgens weer naar kleine C_D wordt doorlopen. Er zijn geen beperkingen aan de fitcoëfficiënten opgelegd. Een aantal zaken in de figuur vallen onmiddellijk op.

Allereerst is de discontinuïteit rond het buigpunt evenals bij de fits met de derdegraads polynomen duidelijk zichtbaar. Merkwaardig is echter, dat nu zowel voor als na het buigpunt negatieve weerstandscoefficiënten gevonden worden en dit is uiteraard onrealistisch. Daarnaast valt op, dat de waarden van C_D aan het einde van de bewegingen ook weer



Figuur 6.20: De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij tot en na het buigpunt apart met een vierdegraads polynoom gefit is.

negatief worden. Dit kan enkel liggen aan de fitmethode. Een vierdegraads polynoom kan immers twee buigpunten bevatten en op zo weinig datapunten van de datasets als er na het buigpunt beschikbaar zijn (± 27 punten) is de fit zeer gevoelig voor de meeton nauwkeurigheden. Dit kan tot gevolg hebben, dat de polynoom aan het einde van de datasets alles behalve een stationaire situatie gaat beschrijven. Dit is inderdaad het geval. De met de fit gevonden versnelling in het laatste punt bedraagt $11.3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ en dit veroorzaakt de negatieve waarden van de weerstandscoefficiënt.

Zoals in de vorige paragraaf is besproken, ligt de waarde van de weerstandscoefficiënt dicht bij de stationaire waarde, indien in het laatste datapunt de versnelling gelijk aan nul wordt gesteld en voor de snelheden de experimenteel bepaalde stationaire waarden gebruikt worden voor de berekening van de weerstandscoefficiënt met vergelijking (3.7). Hieruit blijkt, dat een vierdegraads polynoom niet geschikt is om de data na het buigpunt te beschrijven. Minimaal tot het buigpunt is te verwachten, dat de waarden van de weerstandscoefficiënt beneden de stationaire curve liggen, hetgeen met de vierdegraads polynoom, in tegenstelling tot de derdegraads polynoom, duidelijk niet het geval is. Hieruit kan geconcludeerd worden, dat ook het beschrijven van de datapunten tot het buigpunt met een vierdegraads polynoom niet geschikt is.

In de weergegeven figuur gaat de curve na het buigpunt wel weer richting stationaire curve, voordat de curve onder de stationaire curve doorschiet. Het feit, dat de stationaire curve genaderd wordt is in overeenstemming met de theorie. Echter bij een andere meting is een geheel ander verloop gevonden. Zie figuur 6.20. In deze figuur neemt de weerstandscoefficiënt aan het einde van de beweging toe. Hier blijkt nogmaals hoe gevoelig de fit is voor meetfouten. Deze gevoeligheid wordt versterkt indien de gefitte versnelling wordt bekeken. Twee maal differentiëren van de fit levert uiterst onbetrouwbare resultaten. Indien vóór het laatste punt van de dataset en dus ook vóór het einde van de beweging het polynoom reeds twee buigpunten heeft, zal aan het einde van de gefitte dataset de versnelling van de kogel kwadratisch toe- of afnemen en zeker niet gelijk aan nul

zijn. Dit toont nogmaals aan, dat het apart tot en na het buigpunt fitten met vierdegraads polynomen zonder restricties voor de fitcoëfficiënten een onjuiste methode is en er dient dus gezocht te worden naar een andere fitprocedure.

Aan de randen wijkt de fit het meeste af van gemeten datapunten. Dit geldt zowel voor het begin als voor het einde van de beweging. Aangezien bekend is, dat in het buigpunt en aan het einde van de datasets de versnelling van de kogel gelijk aan nul is, kan de versnelling in deze punten expliciet gelijk aan nul gesteld worden, waarmee bij het fitten na het buigpunt twee fitcoëfficiënten uit het fitprobleem geëlimineerd wordt. Waarschijnlijk zal dit betrouwbaardere resultaten opleveren, dan wanneer er geen restricties aan de fitcoëfficiënten worden opgelegd. Op deze wijze wordt er meer fysische betekenis in de analyse geïntegreerd.

Voor en na buigpunt aparte fits met restricties voor de fitcoëfficiënten

Ook voor het begin van de beweging is een restrictie op te leggen. Theoretisch gezien is de beginversnelling in zijwaartse richting, a_{start} , te bepalen uit de volgende vergelijking:

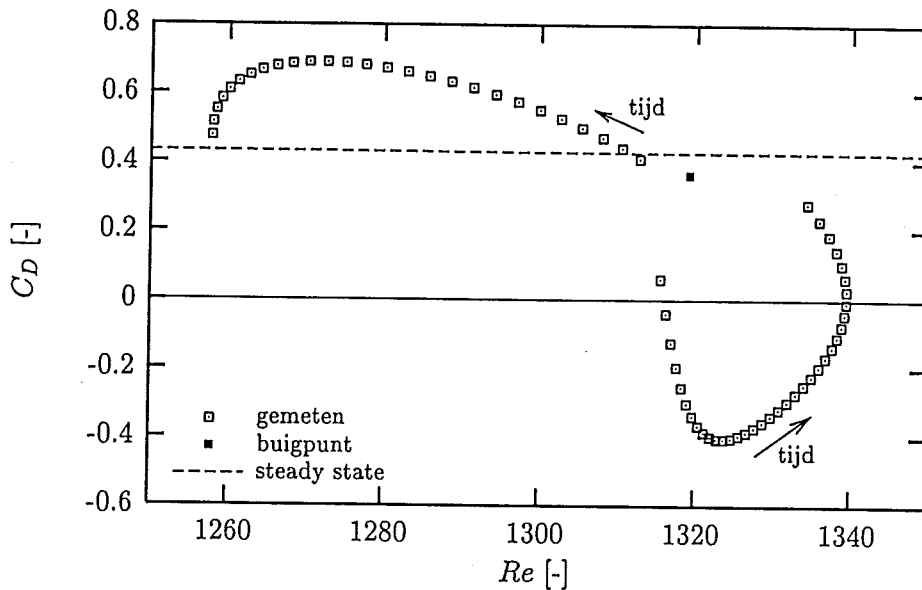
$$a_{start} = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + \frac{1}{2}\rho_f} a_k, \quad (6.15)$$

waarin de “opwaartse” kracht in zijwaartse richting en de toegevoegde massa verdisconteerd zijn. Indien daarnaast in het buigpunt wederom de versnelling gelijk aan nul wordt gesteld, kunnen voor de fit tot het buigpunt ook twee fitcoëfficiënten geëlimineerd worden. Met behulp van $a_k = 2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ volgt uit vergelijking (6.15) voor de beginversnelling van de kogel in zijwaartse richting $a_{start} = 2.34 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

De versnelling van de kogel in verticale richting net voordat de zijwaartse kracht gaat werken is gelijk aan nul, aangezien de kogel aan het begin van de meting ($t = 0$) stationair valt. Omdat aan het einde van de beweging de versnelling wederom gelijk aan nul is, kunnen voor de fit in verticale richting ook twee fitcoëfficiënten geëlimineerd worden. Omdat er in de verticale richting niet duidelijk een buigpunt optreedt, maar de snelheid na het aanbrengen van de zijwaartse kracht geleidelijk begint af te nemen, is de (y, t) -data globaal gefit met de zojuist vermelde restricties voor de fitcoëfficiënten en niet tot en na het buigpunt apart.

Een voorbeeld van de weerstandscoefficiënt tegen Reynolds, waarbij alle vermelde restricties zijn opgelegd, is weergegeven in figuur 6.21. De waarde van C_D in het buigpunt is apart bepaald, door door alle punten van de dataset een vierdegraads polynoom te fitten, waarbij één fitcoëfficiënt geëlimineerd is door de versnelling in het buigpunt expliciet gelijk aan nul te stellen.

Onmiddellijk valt op, dat er nog steeds negatieve waarden voor de weerstandscoefficiënt aan het begin van de beweging gevonden worden. De gevonden negatieve waarden zijn nu echter veel minder negatief, dan de eerder gevonden waarden, waarbij aan de fitcoëfficiënten geen restricties waren opgelegd. Bovendien valt nu het eerste punt wel positief uit. Hieruit blijkt, dat, gelet op de fysische a priori kennis, door het opleggen van de restricties de data beter beschreven worden. Daarnaast wordt de stationaire weerstandscurve weer van onderaf genaderd, hetgeen wederom de reductie van de weerstandskracht naar voren brengt.



Figuur 6.21: De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal, waarbij tot, in en na het buigpunt apart met een vierdegraads polynoom gefit is. Aan alle randen van de datasets en in het buigpunt zijn de versnellingen vastgelegd op de theoretische waarden.

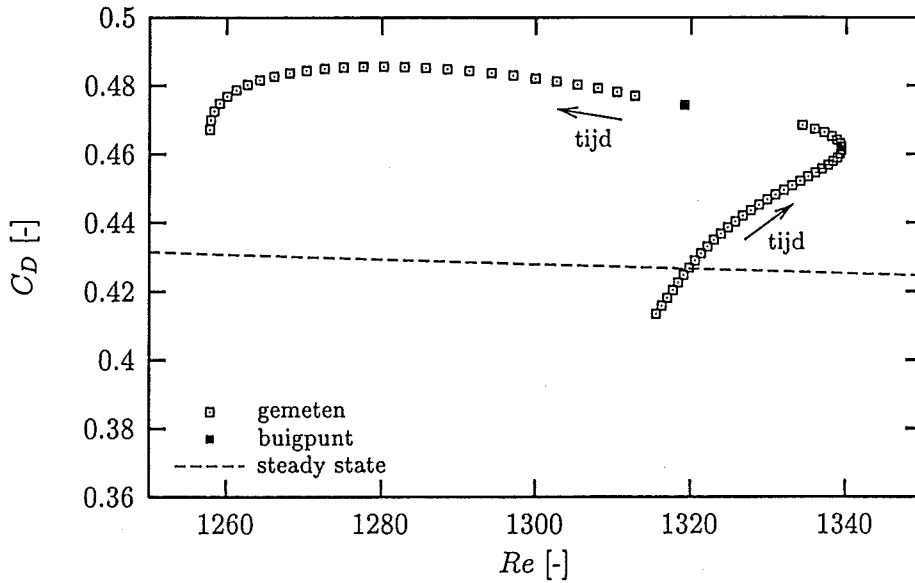
Ook nu treedt er een sprong in het Reynoldsgetal op. Dit is niet verwonderlijk, aangezien in het buigpunt enkel de versnelling en niet de snelheid vastgelegd is. Ook de waarde van de weerstandscoefficiënt in het buigpunt zelf valt onder de stationaire curve, waaruit ook de weerstandsreductie blijkt. In tegenstelling tot de analyse met derdegraads polynomen valt het Reynoldsgetal in het buigpunt nu wel tussen de discontinuïteit in.

De grootste verbetering, die met het vastleggen van de versnelling aan de randen van de datasets wordt behaald, treedt op na het buigpunt. Het is namelijk duidelijk zichtbaar in figuur 6.21, dat de experimenteel bepaalde weerstandscurve aan het einde van de beweging naar de stationaire curve nadert, hetgeen voldoet aan de fysische verwachting. Er zouden meer datapunten, ofwel in de tijd langere datasets, beschikbaar dienen te zijn om te verifiëren of in de stationaire situatie de gemeten curve daadwerkelijk samenvalt met de stationaire curve.

Om te trachten de resultaten tot het buigpunt fysisch correcter te verkrijgen, is de bovenstaande methode met het opleggen van beperkingen aan de fitcoëfficiënten ook toegepast met enkele kleine aanpassingen.

Allereerst is in de bewegingsvergelijking expliciet de toegevoegde massa opgenomen. Hierdoor wordt dus in rekening gebracht, dat de vloeistof rond de versnellende kogel ook meeversneld wordt. Aangezien de dichtheid van het fluïdum veel lager is dan de dichtheid van de kogel, heeft dit weinig invloed op de resultaten. De verandering van de waarden van de weerstandscoefficiënt ligt bij een maximale versnelling van de kogel slechts in de orde van procenten. Daarom is van de resultaten met deze verwerkingsmethode geen aparte curve weergegeven.

Daarnaast is gekeken wat het resultaat is van het opleggen van een andere beginvoorwaarde voor de versnelling van de kogel in zijwaartse richting. Als beginversnelling is



Figuur 6.22: De weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal volgens vergelijking (3.8), waarbij tot, in en na het buigpunt apart met een vierdegraads polynoom gefit is. Aan alle randen van de datasets en in het buigpunt zijn de versnellingen vastgelegd op de theoretische waarden.

opgelegd $a_{start} = a_k(\rho_p - \rho_f)/\rho_p$, hetgeen tot gevolg heeft, dat op $t = 0$ voor de weerstandscoefficiënt geldt $C_D \equiv 0$. Het resultaat van deze verandering is, dat enkel de eerste paar datapunten iets lager (ongeveer 0.02) komen te liggen dan in figuur 6.21. Na de eerste zeven datapunten is het verloop van beide curves identiek. Om deze reden is ook van deze verwerkmethode geen aparte figuur weergegeven.

De beide hierboven uitgeprobeerde wijzigingen hebben geen grote invloed op het resultaat van de weerstandscoefficiënt aan het begin van de zijwaartse beweging. De oorzaak hiervoor zit of in het feit, dat de gekozen verwerkmethode met polynoomfits en het twee maal differentiëren van de polynoom ter verkrijging van de versnelling niet correct is of, dat de datapunten tot het buigpunt niet goed te beschrijven zijn met één overall weerstandscoefficiënt. Daarnaast moet ook de onzekerheid ten aanzien van de beweging van de kar niet als mogelijke boosdoener uit het oog verloren worden.

De weerstandscoefficiënt via de verticale beweging

Tot dusverre is enkel de weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal bepaald met behulp van vergelijking (3.7). Voor de laatste verwerkmethode, waarbij restricties zijn opgelegd aan de fitcoëfficiënten van de vierdegraads polynomen zal C_D ook een keer bepaald worden met vergelijking (3.8):

$$C_D = \frac{4(\rho_p - \rho_f)Dg - 4\rho_p D a_{p,y}}{3\rho_f \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2}}. \quad (3.8)$$

Op de snelheid in de x -richting na, hangt C_D nu enkel af van grootheden in de verticale richting. In figuur 6.22 is het resultaat van een meting weergegeven.

In de figuur zien we, dat de weerstandcurve bepaald aan de hand van de beweging in

verticale richting bijna continu boven de stationaire curve valt. De afwijking van de stationaire curve is echter niet zeer groot, zo'n 10 %. Hieruit is dus te zien, dat de beweging in verticale richting veel meer quasi-statisch plaats vindt, dan de beweging in zijwaartse richting. Dit is op zich niet zo verwonderlijk, aangezien de veranderingen in verticale richting veel minder groot zijn, dan de veranderingen in horizontale richting. Daarnaast gaat de gemeten curve aan het einde van de dataset ook richting de stationaire curve. Dat de gemeten curve de stationaire curve echter niet raakt, kan als volgt verklaard worden. In de vorige paragraaf is gevonden, dat de snelheid in verticale richting onderschat wordt. Aangezien in vergelijking (3.8) gedeeld wordt door de verticale snelheid, resulteert dit in een overschatting van de weerstandscoefficiënt.

Men dient echter niet te vergeten, dat het in principe niet mag uitmaken of de weerstandscoefficiënt nu bepaald wordt aan de hand van vergelijking (3.7) of vergelijking (3.8). Na het buigpunt verlopen de gemeten curves in de figuren 6.21 en 6.22 globaal hetzelfde. Voor het buigpunt en in het buigpunt is het gedrag echter geheel verschillend. Hieruit kan geconcludeerd worden dat deze metingen niet beschreven kunnen worden met één overall weerstandscoefficiënt.

6.6 Bepaling overall weerstandscoefficiënt als functie van de versnellingsmodulus

Naast het bekijken van het verband tussen de weerstandscoefficiënt en het Reynoldsgetal is het ook interessant om te zien hoe C_D afhangt van de versnellingsmodulus.

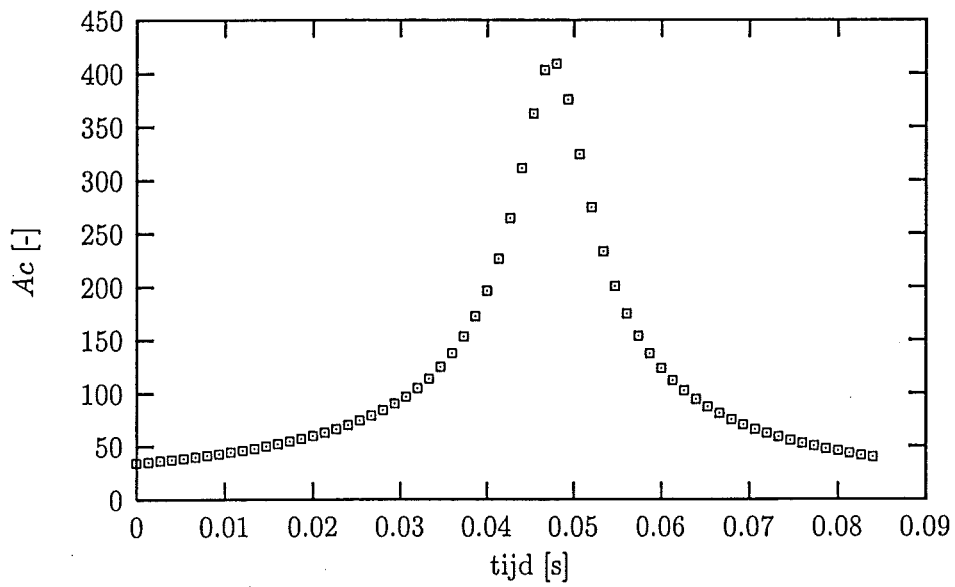
Laten we eerst eens bespreken hoe de versnellingsmodulus theoretisch varieert als functie van de tijd. Uit vergelijking (2.32)

$$Ac = \frac{(v_f - v_p)^2 / D}{d(v_f - v_p) / dt} \quad (2.32)$$

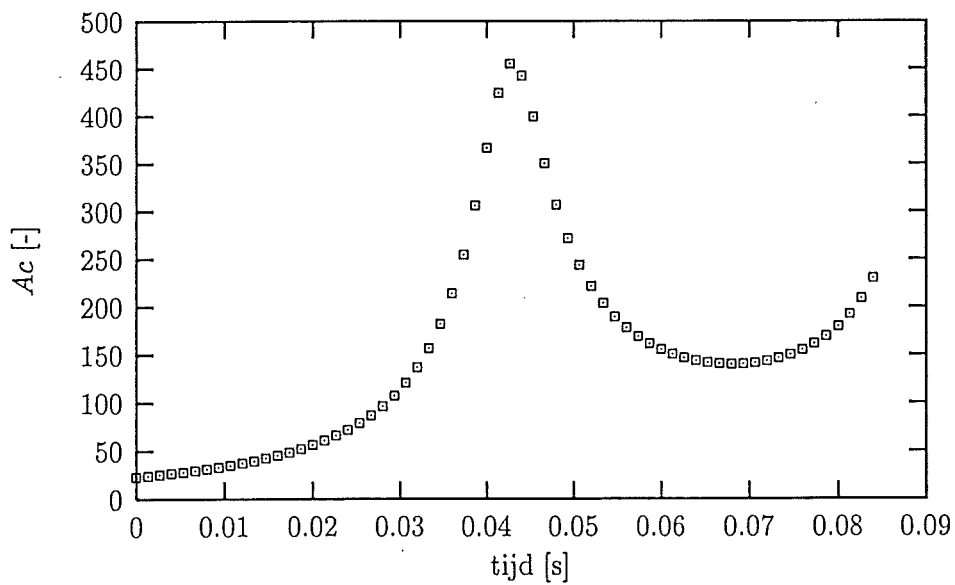
volgt, dat de versnellingsmodulus oneindig is indien de versnelling van de kogel gelijk aan nul is (immers de vloeistofsnelheid en -versnelling zijn gelijk aan nul). Deze situatie doet zich voor, indien de kogel zijn stationaire snelheid bereikt heeft. Indien de versnellingsmodulus tegen de tijd uitgezet wordt, dient de versnellingsmodulus naar oneindig te gaan voor grote tijden. Daarnaast zal in het buigpunt de versnelling in de horizontale richting gelijk aan nul zijn, hetgeen er toe zal resulteren, dat de versnellingmodulus ook een piek zal bezitten rond het buigpunt. Aangezien de versnelling in verticale richting niet noodzakelijkerwijs gelijk aan nul is, hoeft deze piek niet oneindig groot te zijn.

In de figuren 6.23 en 6.24 is de versnellingsmodulus als functie van de tijd weergegeven, waarbij de datasets respectievelijk met een derde- en een vierdegraads polynoom globaal gefit zijn.

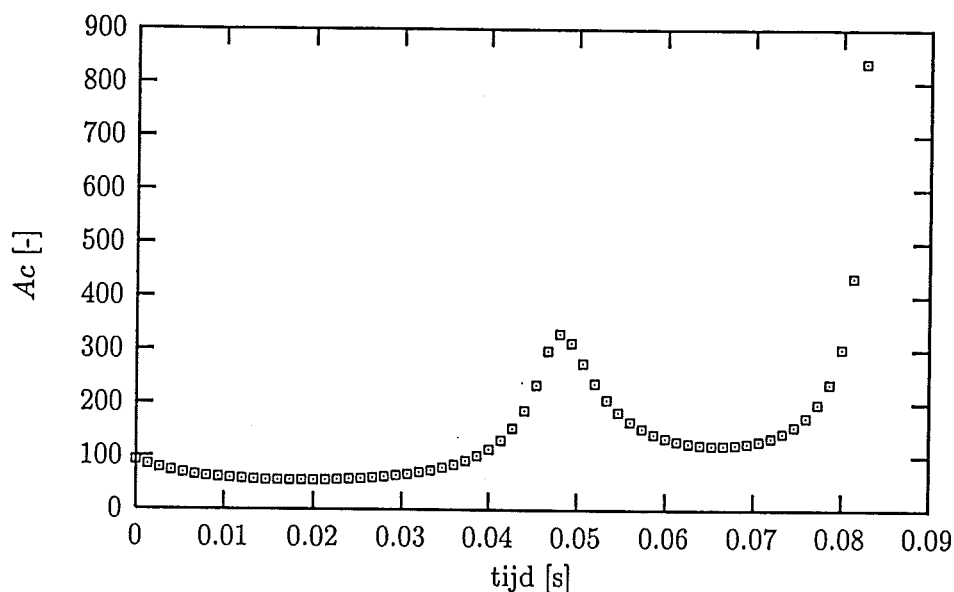
Beide curves bezitten daadwerkelijk een piek rond het buigpunt. Uit figuur 6.23 blijkt, dat een derdegraads polynoom niet toereikend is om de datapunten mee te beschrijven, aangezien er geen piek aanwezig is aan het einde van de dataset. Dit volgt rechtstreeks uit het feit, dat een derdegraads polynoom slechts één buigpunt kan bevatten. Dit in tegenstelling tot de curve in figuur 6.24. Hier is wel een piek in de curve aanwezig aan het einde van de dataset. Een vierdegraads polynoom is dus beter geschikt om de datapunten te beschrijven. Dit kwam ook al naar voren in de figuren 6.15 en 6.18, waar de curve van



Figuur 6.23: De versnellingsmodulus als functie van de tijd, bepaald via globale derdegraads polynoomfit.



Figuur 6.24: De versnellingsmodulus als functie van de tijd, bepaald via globale vierdegraads polynoomfit.



Figuur 6.25: De versnellingsmodulus als functie van de tijd, bepaald via vierdegraads polynoomfits met restricties op de fitcoëfficiënten, zoals beschreven in de tekst.

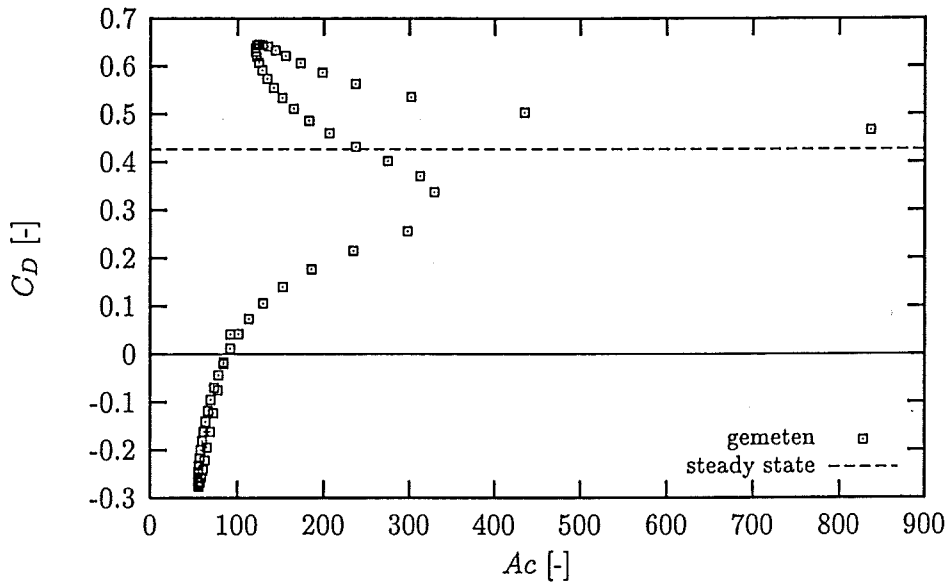
C_D tegen het Reynoldsgetal bepaald met een vierdegraads polynoom de theorie na het buigpunt beter beschreef dan de curve volgend uit de analyse met derdegraads polynomen. De piek in figuur 6.24 is echter niet zeer hoog, hetgeen aantoont, dat de versnelling van de kogel afneemt, maar nog verre van nul is. Daarom dient gekeken te worden naar het gedrag van de versnellingsmodulus in de tijd, indien met vierdegraads polynomen apart tot en na het buigpunt gefit wordt met restricties opgelegd aan de fitcoëfficiënten, zoals besproken in de vorige paragraaf. Zie figuur 6.25.

In de figuur is een piek aanwezig bij het buigpunt en daarnaast gaat de curve naar oneindig aan het einde van de dataset. Het laatste punt is overigens weggelaten, omdat daar de waarde van Ac zo groot is, dat de piek bij het buigpunt dan niet meer zichtbaar is.

Aangezien de curve van figuur 6.25 kwalitatief het beste de theorie beschrijft, zal de analysemethode met vierdegraads polynomen met restricties op de fitcoëfficiënten gebruikt worden om de weerstandscoefficiënt als functie van de versnellingsmodulus te bepalen. Ook bij de bepaling van de weerstandscoefficiënt als functie van het Reynoldsgetal kwam naar voren, dat met deze verwerkingsmethode de theorie het beste beschreven werd. Het resultaat is zichtbaar in figuur 6.26.

Aan het begin van de beweging nemen zowel C_D als Ac af. De afname en het negatief worden van de weerstandscoefficiënt aan het begin van de beweging is al ter sprake gekomen bij de bespreking van C_D als functie van het Reynoldsgetal. Het is duidelijk zichtbaar, dat de piek van de versnellingsmodulus rond het buigpunt onder de stationaire curve valt, hetgeen wederom laat zien, dat in het buigpunt sprake is van een reductie van de weerstandskracht. Tot slot is te zien, dat de waarde van de weerstandscoefficiënt naar de stationaire waarde gaat, indien de versnellingsmodulus naar oneindig gaat. Dit is geheel volgens de verwachting.

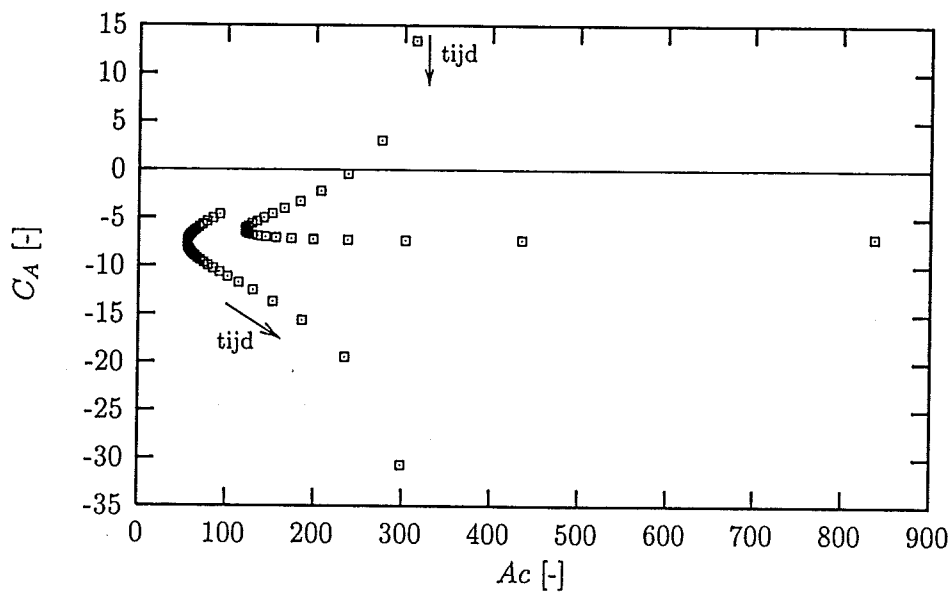
Laten we tot slot de curve in figuur 6.26 nog vergelijken met de uitdrukkingen, die Karanfilian en Kotas [19] en Tsuji et al. [20] hebben afgeleid, respectievelijk de vergelijkingen



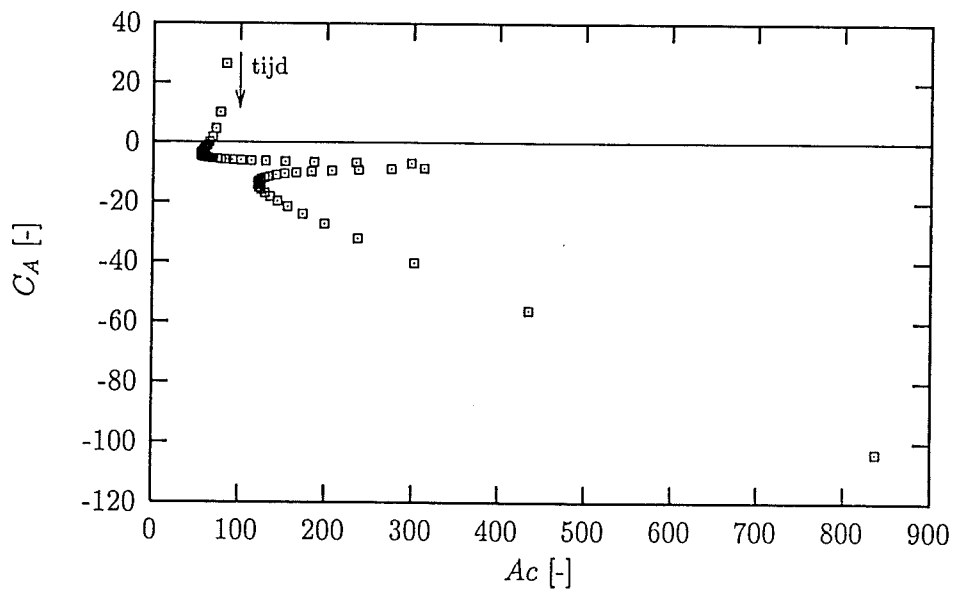
Figuur 6.26: De weerstandscoefficiënt als functie van de versnellingsmodulus, bepaald via vierdegraads polynoomfits met restricties op de fitcoëfficiënten.

(3.9) en (3.10).

Eerst wordt een vergelijking met de uitdrukking van Karanfilian en Kotas gemaakt. Het regime van de versnellingsmodulus in figuur 6.26 is $55 < Ac < \infty$. Indien de versnellingsmodulus naar oneindig gaat, gaat de waarde van de overall weerstandscoefficiënt in vergelijking (3.9) naar de waarde van de stationaire weerstandscoefficiënt. Dit komt overeen met de metingen. Indien de versnellingsmodulus gelijk is aan 55 volgt uit vergelijking (3.9), dat de waarde van de overall weerstandscoefficiënt ongeveer 2 % groter is dan de stationaire waarde. Dit komt niet overeen met de metingen. De vergelijking van Karanfilian en Kotas is dus niet geschikt om deze metingen mee te beschrijven. Hieraan kunnen een aantal oorzaken ten grondslag liggen. Allereerst komen de regimes van de versnellingsmoduli niet overeen en daarnaast zijn de experimentele condities totaal verschillend. Bekijken we vergelijking (3.10), die afgeleid is door Tsuji et al. [20], dan is er voor grote waarden van de versnellingsmodulus wederom sprake van een overeenkomst tussen de metingen en de afgeleide vergelijking. Voor grote Ac gaat de overall weerstandscoefficiënt zowel bij de metingen als in vergelijking (3.10) naar de stationaire weerstandscurve. Indien de versnellingsmodulus 55 is, dient volgens vergelijking (3.10) de overall weerstandscoefficiënt ongeveer 10 % boven de stationaire waarde te liggen. Dit is in figuur 6.26 niet het geval, waaruit blijkt, dat de datapunten ook niet met de door Tsuji et al. [20] afgeleide vergelijking juist beschreven kunnen worden. Ofschoon de regimes van de versnellingsmoduli dit maal overeen komen, vallen de Reynoldsregimes niet samen. Dit kan een mogelijke verklaring zijn voor de afwijking. Bovendien zijn wederom de experimentele condities totaal verschillend.



Figuur 6.27: De virtuele-massa-coëfficiënt als functie van de versnellingsmodulus bepaald uit de horizontale beweging.



Figuur 6.28: De virtuele-massa-coëfficiënt als functie van de versnellingsmodulus bepaald uit de verticale beweging.

6.7 Bepaling virtuele-massa-coëfficiënt C_A als functie van de versnellingsmodulus

De figuren 6.27 en 6.28 bevatten curves van de virtuele-massa-coëfficiënt als functie van de versnellingsmodulus, respectievelijk bepaald uit de horizontale en de verticale beweging van de kogel. De curves zijn bepaald met de vergelijkingen (3.12) en (3.13):

$$x\text{-richting: } C_A = \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} a_k - \frac{3}{4} \frac{C_{D,s}}{D} \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2} v_{p,x} \right) \frac{1}{a_{p,x}} - \frac{\rho_p}{\rho_f}, \quad (3.12)$$

$$y\text{-richting: } C_A = \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} g - \frac{3}{4} \frac{C_{D,s}}{D} \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2} v_{p,y} \right) \frac{1}{a_{p,y}} - \frac{\rho_p}{\rho_f}. \quad (3.13)$$

In figuur 6.27 zijn het laatste en het buigpunt weggelaten en in figuur 6.28 zijn het eerste en het laatste datapunt weggelaten, omdat daar de waarden plus of min oneindig zijn.

Vergelijking van beide figuren met figuur 2.8 laat onmiddellijk zien, dat deze curves niet overeenkomen met de door Odar en Hamilton [14] bepaalde curve. Allereerst start de curve niet op de theoretische waarden van 0.5 en daarnaast gaat de curve voor zeer grote waarden van de versnellingmodulus niet naar de stationaire waarde 1.05, maar naar $-\infty$. Dit is conform de bevinding van Dohmen [16], die in zijn werk concludeerde, dat bij iedere instationaire beweging een andere expressie voor de virtuele-massa-coëfficiënt geldt.

Ofschoon het verloop van de curves in de figuren 6.27 en 6.28 merkwaardig is, is er enkel een bevestiging van de voorgaande resultaten te vinden en in dat opzicht is er in beide figuren niets nieuws onder de zon.

Bekijken we eerst figuur 6.27. Bij het buigpunt treedt er een sprong in de curve van min oneindig naar plus oneindig op. Dit kan als volgt verklaard worden. Tot het buigpunt is de versnelling van de kogel positief, terwijl na het buigpunt de versnelling juist negatief is. In vergelijking (3.12) staat de reciproke waarde van de versnelling van de kogel en aangezien deze versnelling in het buigpunt gelijk aan nul is, gaat de reciproke waarde het buigpunt naderend naar oneindig, terwijl na het buigpunt de reciproke waarde vanaf min oneindig komt. Daarnaast is in het buigpunt $v_{p,x}$ maximaal en de tweede term tussen haken in vergelijking (3.12) groter dan de eerste term. Dit heeft tot gevolg, dat naar het buigpunt toe C_A naar min oneindig gaat en na het buigpunt C_A vanaf oneindig komt.

Tot het buigpunt is C_A negatief, hetgeen op dominantie van de tweede term tussen haken in vergelijking (3.12) duidt. Na het buigpunt wordt C_A na verloop van tijd wederom negatief, maar aangezien de reciproke waarde van de kogelversnelling daar negatief is, betekent dit, dat de eerste term dan dominerend is.

In figuur 6.28 zit er geen sprong in de curve rond het buigpunt. Dit komt, doordat in de beweging van de kogel in verticale richting door de gehele dataset een polynoom globaal gefit is en er geen onderscheid tussen voor en na het buigpunt gemaakt is. Dit aangezien er in verticale richting geen sprake is van een duidelijk aanwezig buigpunt op de plaats, waar deze in horizontale richting aanwezig is. De plaats van het buigpunt is echter wel zichtbaar in figuur 6.28. Het punt, waar de waarden van de versnellingsmodulus gaan afnemen, zit het buigpunt. De eerste paar punten van C_A zijn positief en aangezien de versnelling van de kogel in verticale richting onmiddellijk negatief is, laat dit zien, dat in vergelijking (3.13) de tweede term tussen haken dominerend is, waarna de eerste term in

combinatie met de dichtheidsverhouding gaat overheersen. Het eerste punt is uiteraard oneindig, aangezien daar de versnelling in verticale richting bij benadering gelijk aan nul is.

Naast het feit, dat de curves van de virtuele-massa-coëfficiënt niet overeenkomen met de resultaten van Odar en Hamilton [14] is er ook geen overeenkomst met de meetresultaten van Dohmen [16]. De meest waarschijnlijke verklaring hiervoor is, dat de experimentele condities bij de onderzoeken totaal verschillend waren. Daarnaast omvatten de metingen in dit onderzoek een totaal ander regime van de versnellingsmodulus dan bij Odar en Hamilton en Dohmen. Aan de resultaten in figuren 6.27 en 6.28 zijn verder geen harde conclusies te verbinden. Het beste, dat over de figuren gezegd kan worden is, dat het verloop van de curves conform de verwachting is.

Hoofdstuk 7

Conclusies en aanbevelingen

In dit hoofdstuk volgen allereerst de conclusies, die uit dit onderzoek naar voren kwamen, gevolgd door aanbevelingen voor vervolgonderzoek.

7.1 Conclusies

Uit dit onderzoek kunnen de volgende conclusies getrokken worden.

- De doorgevoerde aanpassingen aan de opstelling hebben hun doel bereikt: de beweging van de kar is reproduceerbaar.
- De onnauwkeurigheden in de plaats-tijd data van zowel de kar als de kogel zijn te groot om deze data numeriek te kunnen differentiëren. Daarom dienen, ter verkrijging van data voor snelheden en versnellingen als functie van de tijd, de plaats-tijd data globaal gefit te worden.
- De keuze om de versnelling van de kar als éénparig te beschouwen is acceptabel. Dit blijkt, indien de bewegingsrichting van de kogel bepaald wordt uit a) de hoek tussen de experimenteel bepaalde stationaire snelheden en b) de hoek tussen de op de kogel werkende versnellingen. De hoeken, die de kogel met de verticaal maakt, zijn bepaald uit de snelheden en de versnellingen, en bedragen respectievelijk 15.6° en 16.3° .
- Indien als éénparig beschouwd, is de grootte van de karversnelling:

$$a_{kar} = 2.86 \pm 0.03 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

- Het tijdstip waarop de kogel in horizontale richting begint af te remmen, is een maat voor de omklaptijd van het zog $\bar{t}_{zog}$. Voor deze relaxatietijd is gevonden:

$$\bar{t}_{zog} = 46.3 \pm 2.3 \text{ ms}.$$

- Kwalitatief is inderdaad een reductie van de weerstandskracht te vinden in de richting, waarin de dwarskracht werkt.

- Ook kwantitatief is de weerstandsreductie te vinden, zij het dat het exacte kwantificeren zeer lastig is. Dit wordt mede veroorzaakt door de gebruikte verwerkingsmethode.
- Derdegraads polynomen zijn niet geschikt om de beweging van de kogel in horizontale richting te beschrijven. Daarentegen leveren vierdegraads polynomen, waarbij fysisch acceptabele restricties aan de coëfficiënten zijn opgelegd, resultaten op, die beter overeen komen met de theoretische verwachting. Zo naderen de gemeten C_D -curves aan het einde van de datasets van de metingen, alwaar de snelheid van de kogel constant wordt, aan de stationaire weerstandscurve.
- Het risico van globaal polynoomfitten is, dat aanwezige informatie kan worden weggefilterd, terwijl daarnaast niet-aanwezige informatie kan worden toegevoegd.
- Aan de randen van de datasets zijn de fits zeer onbetrouwbaar.

7.2 Aanbevelingen

In dit onderzoek is aangetoond, dat indien een stationair vallende bol aan een dwarskracht onderworpen wordt, er een weerstandsreductie in die dwarsrichting optreedt. Het aantonen van deze reductie was een belangrijk doel van dit onderzoek. Er blijven uiteraard aanbevelingen voor vervolgonderzoek.

Aangezien de meetresultaten van de kar een grote invloed hebben op de meetresultaten van de kogel, dient de beweging van de kar zeer nauwkeurig bekend te zijn. Betreffende de kar zijn een aantal aanbevelingen te doen.

- De kar vertrekt vanuit stilstand vanaf de magneet. Bij het fitten van de karbeweging met tweedegraads polynomen zonder restricties opgelegd aan de fitcoëfficiënten kwam echter een tamelijk hoge *reproduceerbare* beginsnelheid naar voren. Een mogelijke oorzaak hiervan kan zijn, dat het gebruikte fitmodel niet toereikend is om de beweging van de kar te beschrijven. Gebleken is, dat de meetonnauwkeurigheid te groot is om de plaats-tijd data van de kar numeriek te differentiëren. Om dit toch mogelijk te maken en niet meer afhankelijk te zijn van globale fitmethoden, dient gekeken te worden of het mogelijk is om met een hogere frequentie de plaats van de kar als functie van de tijd te bepalen. Een optische tringulatiemethode zou hierbij mogelijkterwijs een oplossing kunnen zijn. Tevens valt te denken aan afstandsmetingen via faseverschuivingen van geluidsgolven.
- Een andere mogelijkheid om de versnelling van de kar te bepalen is gebruik te maken van een versnellingsopnemer.
- Het is gewenst, dat er een constante kracht op de kogel werkt. Dit wordt bereikt door de kar éénparig te versnellen. In dit onderzoek is getracht om frictie-effecten bij de beweging van de kar tot een minimum te beperken. Met de meetmethode in dit onderzoek kwam naar voren, dat de keuze om de versnelling van de kar als éénparig te beschouwen, acceptabel is. Indien uit gedetailleerdere metingen blijkt,

dat dit toch niet het geval is, wordt aanbevolen om de kar te laten bewegen over een luchtkussenbaan, aangezien deze banen frictie-effecten tussen de kar en de baan echt tot een minimum beperken.

Overige aanbevelingen zijn:

- Evenals bij de kar dient ook bij de kogel gekeken te worden of het mogelijk is om met een nog hogere frequentie de plaats als functie van de tijd te verkrijgen. Indien dit niet mogelijk is, dient naar een andere fitmethode gezocht te worden om data voor de snelheid en de versnelling van de kogel te bepalen.
- In dit onderzoek is enkel met een metalen bol met een diameter van 2 mm vallend in water gewerkt. Om de invloed van bijvoorbeeld de boldiameter en de vloeistofviscositeit op de weerstandsreductie te onderzoeken, is het aan te bevelen om metingen te doen, waarbij deze parameters gevarieerd worden. Hetzelfde geldt voor de zijwaartse kracht, die op de bol wordt uitgeoefend; deze kan gevarieerd worden door de massa van de loodblokken te variëren.
- Naast het gebruik van een stalen kogel valt ook te denken aan het doen van experimenten met luchtbelletjes, die opstijgen in de bak. Hierbij zullen geheel andere effecten optreden. Zo zal een luchtbel bij het zijwaartse versnellen van de bak in dezelfde richting als de bak gaan bewegen met een hogere versnelling dan de versnelling van de bak.
- Tot nog toe is er enkel experimenteel naar het probleem van een plotselinge zijwaartse kracht op een stationair vallende bol gekeken. Het verdient aanbeveling om dit probleem ook met een Computational Fluid Dynamics pakket (bijvoorbeeld Sepran [26]) te analyseren en de ontwikkeling en de verandering van het zog achter het deeltje te simuleren. De auteur van de code van Sepran, ir. G. Segal, is van mening, dat dit probleem met Sepran aangepakt kan worden.
Om het probleem zo eenvoudig mogelijk te houden is het aan te raden om te beginnen met de simulatie van een stroming rond een cilinder, aangezien dit een tweedimensionale geometrie is. Indien hiermee bevredigende resultaten geboekt worden, kan verder gekeken worden naar een bolgeometrie.

Referenties

- [1] Van den Akker, H. E. A. *Liquid-liquid Spray Columns - Hydrodynamic Stability and Reduction of Axial Mixing*. PhD thesis, Technische Hogeschool Eindhoven, 1978.
- [2] Leijnse, R. *Stabiliteitsanalyse toegepast op gedispergeerde twee-fasen systemen*. Master's thesis, Technische Universiteit Delft, 1991.
- [3] Talman, J. A. *On the Unsteady Drag Coefficients of Single Spherical Particles in Two-dimensional Motion*. Master's thesis, Technische Universiteit Delft, 1994.
- [4] Van den Akker, H. E. A. en Mudde, R. F. *Fysische transportverschijnselen I*. Delftse Universitaire Pers, 1996.
- [5] Janssen, L. P. B. M. en Warmoeskerken, M. M. C. G. *Transport Phenomena Data Companion*. Delftse Uitgevers Maatschappij b.v., 1991.
- [6] Bird, R. B., Stewart, W. E. en Lightfoot, E. N. *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons Inc., 1960.
- [7] Stokes, G. G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9(8), 1851.
- [8] Oseen, C. W. *Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.
- [9] Clift, R., Grace, J. R. en Weber, M. E. *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press Inc., 1978.
- [10] Turton, R. en Levenspiel, O. A short note on the drag correlation for spheres. *Powder Technology*, 47, 83-86, 1986.
- [11] Basset, A. B. *A Treatise on Hydrodynamics*, volume 2. Deighton Bell and Co., 1888.
- [12] Boussinesq, J. *Théorie analytique de la chaleur*, volume 2. Ecole Polytechnique, Paris, 1903.
- [13] Maxey, M. R. en Riley, J. J. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26(4), 883-889, 1983.
- [14] Odar, F. en Hamilton, W. S. Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 18(2), 302-314, 1964.
- [15] Odar, F. Verification of the proposed equation for calculation of the forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 25(3), 591-592, 1966.

- [16] Dohmen, W. H. *De instationaire stromingsweerstand van bollen*. Master's thesis, Technische Hogeschool Eindhoven, 1968.
- [17] Batchelor, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [18] Lorrain, P., Corson, D. R. en Lorrain, F. *Electromagnetic Fields and Waves*. W. H. Freeman and Company, 1988.
- [19] Karanfilian, S. K. en Kotas, T. J. Drag on a sphere in unsteady motion in a liquid at rest. *Journal of Fluid Mechanics*, 87(1), 85–96, 1978.
- [20] Tsuji, Y., Kato, N. en Tanaka, T. Experiments on the unsteady drag and wake of a sphere at high reynolds numbers. *International Journal of Multiphase Flow*, 17(3), 343–354, 1991.
- [21] Van Balen, R. *SCIL-Image Version 1.2 Reference Manual*. Technische Physische Dienst, TNO-TU Delft, 1994.
- [22] Roest, R. *Inleiding Mechanica*. Delftse Uitgevers Maatschappij, 1987.
- [23] Backer, E. en Duin, R. P. W. *Statistische patroonherkenning*. Delftse Uitgevers Maatschappij b.v., 1989.
- [24] Rosenfeld, A. en Kak, A. C. *Digital Picture Processing*, volume 1 and 2. Academic Press Inc., second edition, 1982.
- [25] Perry, J. H. *Chemical Engineers' Handbook*. McGraw-Hill, fifth edition, 1973.
- [26] Segal, G. *SEPRAN manuals*. Ingenieursbureau SEPRA, Leidschendam, The Netherlands, 1993.
- [27] Strauss, W. A. *Partial Differential Equations, An Introduction*. John Wiley & Sons Inc., 1992.
- [28] Broersen, P. M. T. *How to Select Polynomial Models with an Accurate Derivative*. IEEE Instrumentation and Measurement, Technology Conference, Brussels, 4-6 juni 1996.

Bijlage A

Achtergrond van de Basset-kracht

In deze bijlage zal de achtergrond van de Basset-kracht uitgelegd worden. Het zal blijken, dat deze kracht dezelfde achtergrond heeft als de penetratie van warmte in een half-oneindig medium. Allereerst zal hiertoe de warmte-diffusievergelijking opgelost worden voor een oneindig medium, waarna de bespreking van de situatie van het half-oneindige medium volgt.

A.1 Warmtediffusie in een oneindig medium

De ééndimensionale warmte-diffusievergelijking luidt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (\text{A.1})$$

waarin a de zogenaamde warmtevereffeningscoëfficiënt is. De vergelijking dient voorzien te worden van een geschikte beginvoorwaarde. Deze luidt: $T(x, t = 0) = T_0(x) \forall x$. Omdat een oneindig medium beschouwd wordt, zijn er geen randvoorwaarden nodig. Het op te lossen probleem wordt hiermee:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{voor } -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{A.2})$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad \text{voor } -\infty < x < \infty. \quad (\text{A.3})$$

Er zijn verscheidene manieren om dit probleem op te lossen. De methode, die hier gevolgd zal worden, maakt gebruik van de volgende vijf invariantie-eigenschappen van de diffusievergelijking (A.1). Zie eventueel Strauss [27].

1. De translatie $T(x - y, t)$ van een willekeurige oplossing $T(x, t)$ is ook een oplossing, voor iedere vaste y .
2. Iedere afgeleide van een oplossing is weer een oplossing.
3. Een lineaire combinatie van oplossingen van (A.1) is weer een oplossing van (A.1).
4. Een integraal van oplossingen is ook weer een oplossing. Dus als bijvoorbeeld $S(x, t)$ een oplossing van (A.1) is, dan is $S(x - y, t)$ dat ook en zo ook

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) g(y) dy, \quad (\text{A.4})$$

voor iedere functie $g(y)$, zolang deze oneigenlijke integraal convergeert.

5. Als $T(x, t)$ een oplossing is van (A.1), dan is de getransformeerde functie $T(\sqrt{\beta}x, \beta t)$, voor iedere $\beta > 0$, dat ook.

Het doel is nu een afzonderlijke oplossing van (A.2) te vinden en vervolgens alle andere oplossingen te construeren met behulp van eigenschap 4.

De te bepalen afzonderlijke oplossing wordt $Q(x, t)$ genoemd en voldoet aan de beginvoorwaarde

$$Q(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{voor } x > 0, \\ 0, & \text{voor } x < 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

De reden voor deze keus is, dat deze beginvoorwaarde niet verandert onder een transformatie als bij punt 5.

Er wordt gezocht naar een oplossing $Q(x, t)$ met de speciale vorm

$$Q(x, t) = g(p), \quad \text{met } p = \frac{x}{\sqrt{4at}}, \quad (\text{A.6})$$

en g een functie van slechts één variabele. De reden voor deze speciale vorm volgt uit eigenschap 5. Immers de factor $\frac{x}{\sqrt{t}}$ is niet gevoelig voor de bij eigenschap 5 genoemde transformatie.

Met behulp van (A.6) kan, met gebruikmaking van de kettingregel, (A.2) omgevormd worden tot een gewone differentiaalvergelijking. Deze luidt:

$$\frac{d^2g}{dp^2} + 2p \frac{dg}{dp} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen en we vinden:

$$Q(x, t) = g(p) = c_1 \int_0^{x/\sqrt{4at}} e^{-p^2} dp + c_2, \quad (\text{A.8})$$

waarin c_1 en c_2 integratieconstanten zijn, welke met de beginvoorwaarde A.5 te bepalen zijn. Uitwerken levert $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ en $c_2 = \frac{1}{2}$ en hiermee wordt $Q(x, t)$

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4at}} e^{-p^2} dp, \quad \text{voor } t > 0. \quad (\text{A.9})$$

Definieer nu

$$S(x, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \quad \text{en} \quad T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, t) T_0(y) dy, \quad \text{voor } t > 0. \quad (\text{A.10})$$

Gezien eigenschap 2 is $S(x, t)$ een oplossing van (A.2) en wegens eigenschap 3 is $T(x, t)$ dat ook.

De stelling is nu, dat $T(x, t)$ de unieke oplossing van het probleem (A.2) en (A.3) is. Nu dient dus nog de geldigheid van (A.3) aangetoond te worden. Schrijf hiertoe:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x-y, t) T_0(y) dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} [Q(x-y, t)] T_0(y) dy \\ &= + \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y, t) \frac{\partial T_0(y)}{\partial y} dy - Q(x-y, t) T_0(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Onder de aanname, dat $T_0(x)$ naar nul gaat voor grote $|y|$, verdwijnt de laatste term in vergelijking (A.11) en dit levert dan voor $T(x, 0)$:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, 0) \frac{\partial T_0(y)}{\partial y} dy \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\partial T_0(y)}{\partial y} dy = T_0(y) \Big|_{-\infty}^x = T_0(x), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

waarbij gebruik is gemaakt van de beginvoorwaarde voor Q en de aanname $T_0(-\infty) = 0$. Dit is nu juist de beginvoorwaarde (A.3) en hiermee is aangetoond, dat (A.10) de oplossing van het probleem (A.2) en (A.3) is. De vergelijking voor $S(x, t)$ is dus

$$S(x, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-x^2/4at}, \quad \text{voor } t > 0 \quad (\text{A.13})$$

en hiermee luidt de oplossing voor het warmte-diffusieprobleem in een oneindig medium:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4at} T_0(y) dy. \quad (\text{A.14})$$

Tot slot kan nog opgemerkt worden, dat $S(x, t)$ de Greense functie is.

A.2 Situaties in een half-oneindig medium

Het in de vorige paragraaf afgeleide resultaat zal nu gebruikt worden om de oplossing van het warmtediffusieprobleem in een half-oneindig medium af te leiden. Met behulp van deze oplossing zal vervolgens de analogie tussen de Basset-kracht en het half-oneindige warmte-diffusieprobleem aangetoond worden.

A.2.1 Warmtediffusie in een half-oneindig medium

Voor het geval van een half-oneindig medium met het grensvlak op $x = 0$ heb je naast een beginvoorwaarde, zoals bij het oneindige medium, ook een randvoorwaarde op $x = 0$ nodig, die voor elk tijdstip t geldt. Allereerst zal het probleem met als randvoorwaarde een voorgeschreven warmteflux door het vlak $x = 0$ bekeken worden, waarna het geval van een constante temperatuur op $x = 0$ aan de hand hiervan afgeleid zal worden. Vergelijking (A.1) zal nu eerst worden opgelost voor het geval er op $t = 0$ een warmtepuls ter grootte van één joule per oppervlakte-eenheid op $x = 0$ het half-oneindige medium in penetreert. De begin- en randvoorwaarde luiden dan respectievelijk:

- beginvoorwaarde: $T(x, 0) = 0$, voor $x > 0$,
- randvoorwaarde: $\phi_q''(0, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \delta(t)$, voor $x = 0$.

In deze randvoorwaarde is $\delta(t)$ gelijk aan de Dirac deltafunctie. Met de introductie van deze randvoorwaarde wordt het probleem equivalent aan het probleem van een oneindig medium met als beginvoorwaarde $T(x, 0) = 2 - \delta(x)/\rho c_p$, waarin ρ de dichtheid en c_p de

soortelijke warmte van het medium is. Immers in dit geval bevat op $t = 0$ het vlak $x = 0$ een hoeveelheid warmte van twee joule, hetgeen twee warmtefluxen van gelijke grootte tot gevolg heeft, elk penetrerend in een half-oneindige ruimte ($x < 0$ en $x > 0$). De oplossing van dit probleem kan eenvoudig worden verkregen uit vergelijking (A.14) en luidt:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\rho c_p} \delta(y) e^{-(x-y)^2/4at} dy \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi \lambda^2 t}} e^{-x^2/4at}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Als de randvoorwaarde nu wordt voorgesteld door een willekeurige functie $f(t)$ in plaats van de deltafunctie, kan het superpositieprincipe (eigenschap 3 uit de vorige paragraaf) gebruikt worden om de oplossing te vinden. De functie $f(t)$ kan namelijk voorgesteld worden door een oneindige reeks deltafuncties $\delta(t - t_i)$, elk met een specifieke sterkte $f_i = f(t_i)$. Alle pulsen vanaf $t = -\infty$ tot tijdstip t dragen bij aan de ontwikkeling van het temperatuurprofiel en deze afzonderlijke pulsen dienen dus gesommeerd te worden. Deze som kan vervangen worden door een integraal en met behulp van (A.15) volgt dan voor het temperatuurprofiel met een willekeurige functie $f(t)$ als randvoorwaarde:

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{a}{\pi \lambda^2 (t - \tau)}} f(\tau) e^{-x^2/4a(t-\tau)} d\tau. \quad (\text{A.16})$$

Volgens eigenschap 2 uit de vorige paragraaf is iedere afgeleide van bovenstaande oplossing ook weer een oplossing, dus als $T(x, t)$ een oplossing is, dan is $-\lambda \partial T / \partial x$ dat ook. De uitkomst van deze differentiatie is:

$$-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \int_{-\infty}^t \frac{x}{\sqrt{4\pi a(t - \tau)^3}} f(\tau) e^{-x^2/4a(t-\tau)} d\tau. \quad (\text{A.17})$$

De volgende substitutie wordt nu uitgevoerd. Stel:

$$-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \longrightarrow T(x, t). \quad (\text{A.18})$$

Met behulp van deze transformatie wordt de randvoorwaarde op het grensvlak $x = 0$:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = f(t) \longrightarrow T(0, t) = T_0(t). \quad (\text{A.19})$$

Er is nu dus een warmtediffusieprobleem in een half-oneindig medium gecreëerd met als randvoorwaarde een constante temperatuur op het grensvlak $x = 0$. Dit probleem luidt dus:

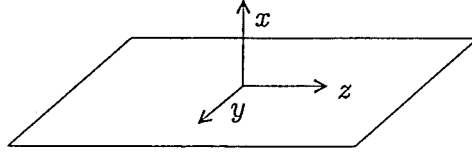
$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{voor } x \geq 0, \quad (\text{A.20})$$

$$T(x, 0) = 0, \quad \text{voor } x > 0, \quad (\text{A.21})$$

$$T(0, t) = T_0(t), \quad (\text{A.22})$$

met als oplossing:

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^t \frac{x}{\sqrt{4\pi a(t - \tau)^3}} T_0(\tau) e^{-x^2/4a(t-\tau)} d\tau. \quad (\text{A.23})$$



Figuur A.1: Oriëntatie cartesisch assenstelsel voor impulstransport in een half-oneindig medium

De warmteflux door het grensvlak $x = 0$ is te vinden door bovenstaande uitdrukking naar x te differentiëren en vervolgens in de verkregen uitdrukking x gelijk aan nul te stellen. Uitwerken van de gehele differentiatie levert:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{\pi a} \int_{-\infty}^t \frac{dT_0(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (\text{A.24})$$

Deze uitdrukking vormt nu de basis voor de Basset-kracht.

A.2.2 Impulstransport in een half-oneindig medium; de Basset-kracht

We gaan nu over van instationaire warmtegeleiding naar instationair impulstransport. Beschouw een oneindig grote vlakke plaat, die op $x = 0$ het grensvlak vormt van een half-oneindig medium, gevuld met een incompressibel fluïdum. Zie figuur A.1 voor de oriëntatie van het cartesische assenstelsel. De plaat beweegt met een éénparige snelheid $v_0(t)$ in het grensvlak. Aanvankelijk staat het fluïdum stil, maar door de beweging van de plaat zal er een beweging in geïnduceerd worden, ofwel er zal impuls het fluïdum in gaan penetreren. Gezien de symmetrie van het probleem zijn de variabelen x en t voldoende om het probleem te beschrijven. De continuïteitsvergelijking reduceert tot:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.25})$$

hetgeen betekent, dat de snelheid v_x constant is en gezien de beginconditie geldt dus, dat $v_x = 0$. Aangezien ook v_z gelijk aan nul is, wordt het snelheidsveld dus bepaald door $v_y(x, t)$. De Navier-Stokes vergelijking voor de y -component van de snelheid luidt:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta_f}{\rho_f} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}, \quad \text{voor } x \geq 0. \quad (\text{A.26})$$

De bijbehorende begin- en randvoorwaarden zijn:

$$\begin{aligned} v_y(x, 0) &= 0, & \text{voor } x > 0, \\ v_y(0, t) &= v_0(t). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Dit probleem is compleet analoog aan het probleem van instationaire warmtediffusie in een half-oneindig medium, (A.20), (A.21) en (A.22), met als randvoorwaarde een constante temperatuur op het grensvlak, zoals hiervoor behandeld. De resultaten kunnen dus overgenomen worden, onder aanpassing van de variabelen. Kortom, de moleculaire impulsflux, die het grensvlak op $x = 0$ binnendringt, is gelijk aan:

$$\tau_{xy} \Big|_{x=0} = -\eta_f \frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sqrt{\frac{\eta_f \rho_f}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{dv_0(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (\text{A.28})$$

Als de beweging van de plaat begint op het tijdstip $t = 0$, dan kan de ondergrens van de integraal gelijk aan nul gesteld worden.

De vergelijking voor de Basset-kracht op een bolvormig deeltje luidt:

$$F_{D,Basset} = 6\sqrt{\frac{\eta_f \rho_f}{\pi}} \frac{1}{4} \pi D^2 \int_0^t \frac{dv_r(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (\text{A.29})$$

waarin v_r de relatieve snelheid is, i.e. het verschil tussen het snelheid van het deeltje en de snelheid van het fluïdum op grote afstand van het deeltje.

Te zien is, dat deze uitdrukking op een constante factor na gelijk is aan vergelijking (A.28), welke uitdrukking afgeleid is van de oplossing van het warmte-diffusieprobleem in een half-oneindig medium. Hieruit volgt, dat de Basset-kracht dezelfde fysische achtergrond heeft als de penetratie van warmte in een half-oneindig medium. Hiermee is de achtergrond van de Basset-kracht achterhaald.

Bijlage B

Bespreking van enkele onnauwkeurigheden

In deze bijlage worden enkele meetonnauwkeurigheden en onzekerheden, die bij de analysemethode naar voren komen, besproken. Allereerst zullen de bewegingen van de kar en de kogel besproken worden. Hierna volgt een afschatting van de onnauwkeurigheid in de experimenteel bepaalde weerstandscoefficiënten, waarna tot slot aangetoond zal worden, dat de Bassetkracht in dit onderzoek een verwaarloosbare bijdrage levert aan de totale weerstandskracht.

B.1 De beweging van de kar

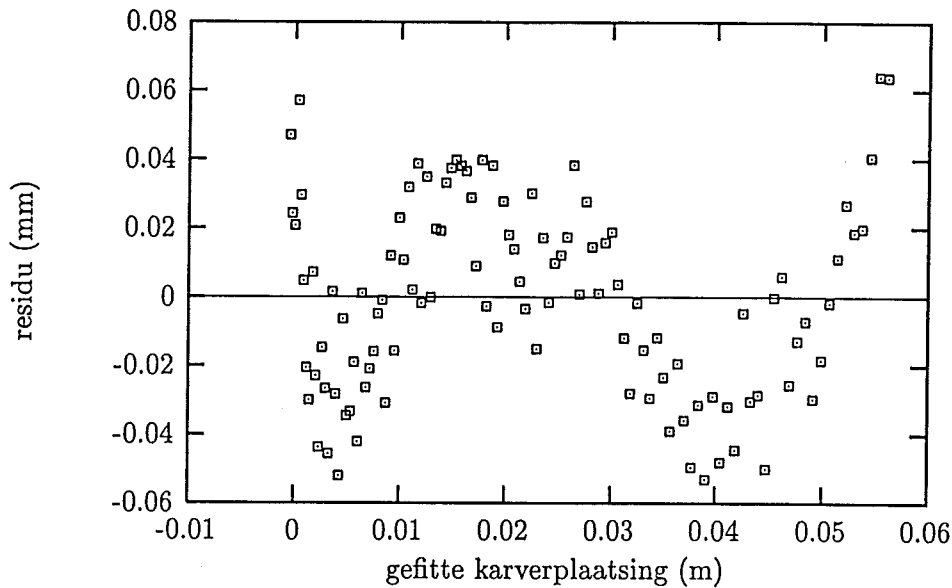
Voor de kar is er alles aan gedaan om frictie-effecten tot een minimum te beperken, waardoor de kar (bij benadering) een éénparig versnelde beweging behoort uit te voeren, indien de kar via de verticale val van de loodblokken versneld wordt. Het ligt daarom voor de hand om als fitfunctie voor de karverplaatsing een tweedegraads polynoom te kiezen.

In figuur 6.3 is te zien, dat de fit $x(t) = c_2 t^2$, waarbij c_2 de helft van de éénparige versnelling is, de datapunten niet goed beschrijft. De fit $x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$, waarbij c_0 en c_1 respectievelijk een beginverplaatsing en een beginsnelheid voorstellen, levert veel betere resultaten, hetgeen zichtbaar is in figuur 6.4. Om echt iets te kunnen zeggen over hoe goed de fit de datapunten beschrijft, dient het verschil tussen de datapunten en de fit, ofwel het residu, tegen de gefitte waarden uitgezet te worden. Dit is gedaan in figuur B.1.

Voor een goede fit dienen de residuen verspreid rond de horizontale as te liggen. Daarnaast dient de grootte van de residuen enkele ordes kleiner te zijn dan de orde van de uit de fit bepaalde datapunten.

Bekijken we figuur B.1, dan liggen de punten niet als ruis rond de horizontale as, maar is er een fluctuerende trend waarneembaar. Daarnaast “scatteren” de residuen wel rond de fluctuerende trend. Gezien het feit, dat er wel scatter aanwezig is en daarnaast de schaal van de residuen vele malen kleiner is, dan de schaal van de datapunten, wordt de kwadratische polynoom geaccepteerd om de datapunten te beschrijven.

Bestudering van tabel 6.2 laat zien, dat, indien de beweging als éénparig versneld beschouwd wordt, de versnelling reproduceerbaar is. Dit is een bevredigend resultaat, aangezien tijdens het maken van opnames van de kogel een constante dwarskracht gewenst is. De waarden van de gefitte beginverplaatsingen zijn ongelijk aan nul, maar wel klein,



Figuur B.1: Verschil tussen de karverplaatsing en de kwadratische fit uitgezet tegen de gefitte karverplaatsing.

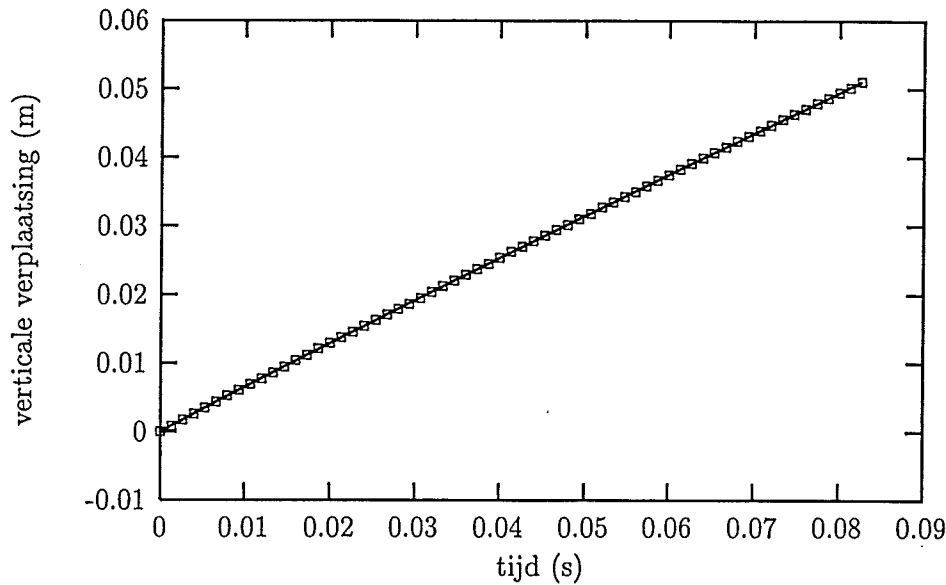
hetgeen verklaard kan worden door meetfouten.

Wat wel vreemd is, is de grootte van de gefitte beginsnelheden, welke ongeveer $0.19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ bedraagt. De kar vertrekt vanuit stilstand van de magneet aan het begin van de baan, dus een beginsnelheid is uitgesloten. De enige manier, waarop een beginsnelheid aanwezig kan zijn, is indien er pas gestart wordt met het maken van de opnames van de kar, terwijl deze reeds met zijn versnelde beweging begonnen is. Ofwel, indien er een fout gemaakt wordt in de detectie van het startmoment van de beweging van de kar.

Het startmoment van de beweging van de kar is bepaald, door op de kar een LED te plaatsen, die gaat branden op het moment, dat de kar loskomt van de magneet. Als de kar tegen de magneet geplaatst is, is een microschakelaar ingedrukt, welke uitspringt bij het loskomen van de kar van de magneet. Daarnaast blijkt, dat op het moment, dat de LED gaat branden, het zwaartepunt van het label op de kar voor het eerst een verplaatsing ondergaat. De eerste keer, dat de kar een verplaatsing ondergaat, verplaatst deze over een afstand van ongeveer $3\cdot 10^{-2} \text{ mm}$. Hieruit blijkt, dat de verplaatsing van de kar tussen twee opnames nauwkeurig te bepalen is.

Men kan de tijd uitrekenen, waarin een vanuit stilstand éénparig met een versnelling van $2.86 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ versnellende kar een snelheid van $0.19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ verkrijgt. Deze tijd bedraagt 0.07 s . In die tijd legt de kar een afstand van 7.0 mm af. Gezien het feit, dat de verplaatsing van de kar nauwkeurig te bepalen is, is het zeer onwaarschijnlijk, dat er bij het bepalen van het startmoment van de kar een dergelijk grote fout gemaakt wordt.

In principe zou het mogelijk kunnen zijn, dat de kar daadwerkelijk vanuit rust vertrekt en in $1/750 \text{ s}$, de tijd tussen twee opnames van de CCD-camera, de snelheid van $0.19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ bereikt. Om deze mogelijkheid te verifiëren is het interessant om de hiertoe benodigde kracht uit te rekenen. Met behulp van het gegeven, dat de massa van de kar gelijk is aan



Figuur B.2: Verticale verplaatsing van de kogel als functie van de tijd met een derdegraads fit.

23.60 kg, wordt voor de kracht gevonden:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{23.6 \cdot 0.19}{1/750} = 3.4 \text{ kN},$$

waarin Δp gelijk is aan de grootte van de impulsverandering. Bovenstaande kracht is groot en het is niet waarschijnlijk, dat een dergelijk grote kracht aan het begin van de karbeweging op de kar werkt.

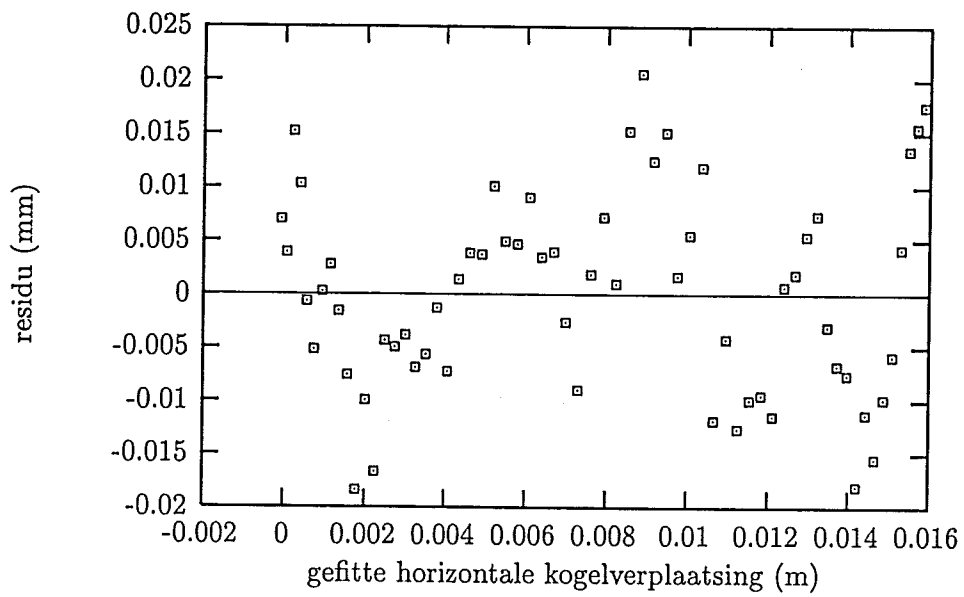
Het mechanisme, dat zorg draagt voor deze hoge beginsnelheid is onduidelijk.

B.2 De beweging van de kogel

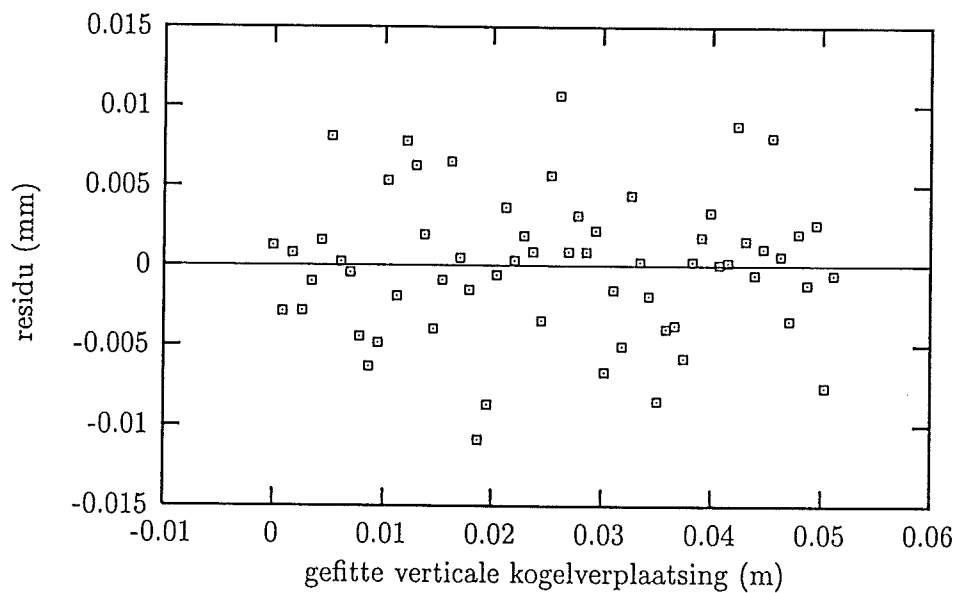
Ook voor de globale derdegraads polynoomfits door de datapunten van de kogelbeweging in de horizontale en de verticale richting zijn de residuen uitgerekend. De horizontale beweging van de kogel samen met de fit is te zien in figuur 6.13. De verticale beweging van de kogel met een derdegraads fit is weergegeven in figuur B.2. Zie de figuren B.3 en B.4 voor de residuen uitgezet tegen de gefitte waarden.

In deze figuren is duidelijk zichtbaar, dat de residuen verspreid liggen rond de tijd-as zonder dat er een duidelijke trend te herkennen is. De ordes van grootte van de residuen in beide figuren zijn kleiner dan de grootte-orde van de metingen. Op grond van deze twee bevindingen is voor de derdegraads polynomen gekozen. In de volgende paragraaf volgt een bespreking van een ordeselectie criterium voor de fitpolynomen.

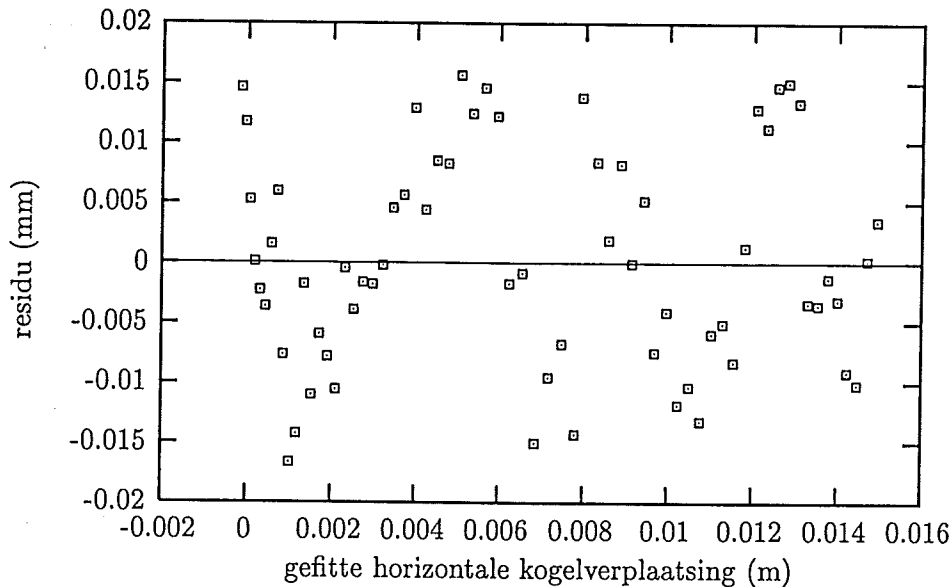
Gezien het feit, dat met het fitten van vierdegraads polynomen tot en na het buigpunt met restricties op de fitcoëfficiënten de beste resultaten zijn behaald, zullen hier ook grafieken van de residuen in deze situaties getoond worden. In figuur B.5 staan de residuen voor de horizontale component van de beweging van de kogel en in figuur B.6 staan de residuen van



Figuur B.3: Verschil tussen de horizontale kogelverplaatsing en de globale derdegraads fit uitgezet tegen de gefitte horizontale kogelverplaatsing.



Figuur B.4: Verschil tussen de verticale kogelverplaatsing en de globale derdegraads fit uitgezet tegen de gefitte verticale kogelverplaatsing.

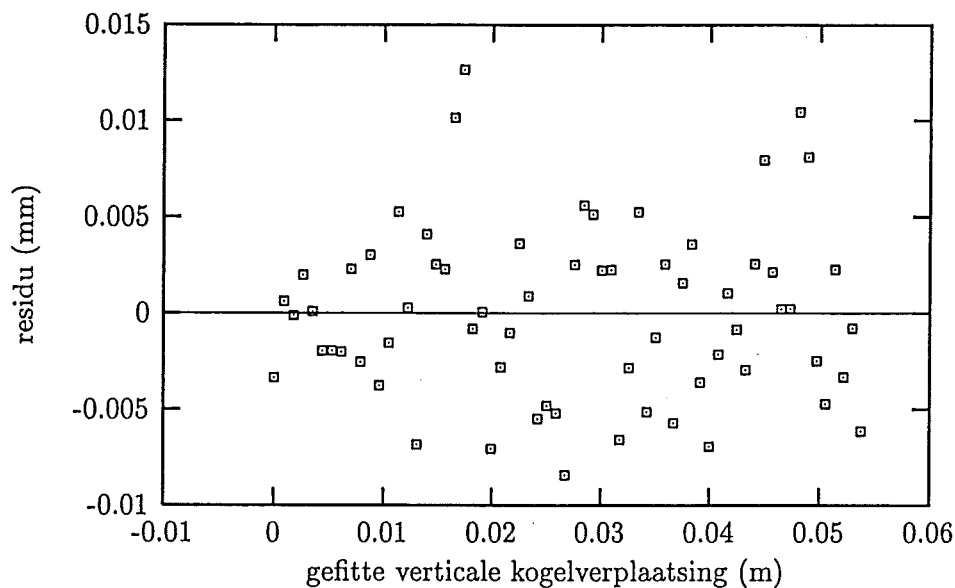


Figuur B.5: Verschil tussen de horizontale kogelverplaatsing en de vierdegraads fit met restricties uitgezet tegen de gefitte horizontale kogelverplaatsing.

de verticale component. Ter herinnering: de verticale beweging is met een vierdegraads polynoom globaal gefit, waarbij twee fitcoëfficiënten geëlimineerd zijn door de versnelling aan het begin en het einde van de meting gelijk aan nul te stellen. Er is hier dus niet apart tot en na het buigpunt gefit. In figuur B.5 is een bepaalde trend waarneembaar, zij het dat dit niet overtuigend te noemen is. In de tijd neemt het residu niet toe, hetgeen een constante variantie inhoudt. Daarnaast is er duidelijk sprake van scattering rond de x -as en is de orde van de residuen aanmerkelijk kleiner dan de orde van de datapunten zelf. Kijken we naar figuur B.6 dan is er duidelijk sprake van scattering rond de x -as zonder dat er een trend waarneembaar is. Daarnaast is de orde van de residuen vele malen kleiner dan de orde van de datapunten en neemt de variantie niet toe in de tijd. Aangezien er evenals bij de beschrijving van de beweging van de kar een model gekozen dient te worden, maken bovenstaande bevindingen het aannemelijk om de datapunten ook met vierdegraads polynomen met restricties te beschrijven.

B.3 De onnauwkeurigheid in de bepaling van de overall weerstandscoefficiënt

De fout in de waarden van de overall weerstandscoefficiënt laat zich niet gemakkelijk schatten. Hiervoor zijn een aantal redenen. Allereerst zijn de weerstandscoefficiënten bepaald door een model voor de beweging van de kogel *aan te nemen*, hetgeen absoluut niet representatief voor de beweging hoeft te zijn. Daarnaast vereist de uitdrukking, waarmee de overall weerstandscoefficiënt bepaald is, vergelijking (3.7), naast de waarde van de versnelling van de kar waarden voor de snelheid en de versnelling van de kogel. Deze data worden verkregen via het differentiëren van gefitte polynomen en een dergelijke handeling is zeer gevoelig voor meetonnauwkeurigheden.



Figuur B.6: Verschil tussen de verticale kogelverplaatsing en de vierdegraads fit met restricties uitgezet tegen de gefitte verticale kogelverplaatsing.

Broersen [28] heeft onderzocht hoe polynoommodellen met een nauwkeurige eerste afgeleide geselecteerd dienen te worden. Hij vond, dat ofschoon polynoommodellen, die geschat worden uit door ruis beïnvloede waarnemingen, een nauwkeurige beschrijving van de data kunnen geven, de afgeleiden van de geschatte modellen slechte modellen kunnen zijn voor de werkelijke afgeleiden van de processen die de data genereren. Daarnaast vond hij, dat de nauwkeurigheid van een afgeleide veel gevoeliger is voor de orde van het model dan voor de nauwkeurigheid van de relatie zelf.

Als ordeselectie criterium van de fitpolynomen stelt Broersen, dat het toevoegen van een extra parameter en dus een extra macht enkel zinvol is, indien het residu van een fit hierdoor minimaal $3\sigma^2$ afneemt. Hierbij is σ gelijk aan de standaarddeviatie van het residu. Voor de afgeleide dient de afname minimaal $5\sigma^2$ te bedragen. Deze vuistregel komt erop neer, dat de waarde van een fitcoëfficiënt minimaal $\sqrt{5}$ maal zo groot dient te zijn als zijn standaarddeviatie, ofwel $c_i > \sqrt{5}\sigma_{c_i}$.

In zijn artikel maakt Broersen geen melding over tweede afgeleiden. Het ligt in de lijn der verwachting, dat bij een tweede afgeleide de afname van het residu nog groter dient te zijn dan de $5\sigma^2$, zoals bij de eerste afgeleide, alvorens het meenemen van extra polynoomtermen zinvol is. Er zal hier verondersteld worden, dat voor de tweede afgeleide het residu minimaal $10\sigma^2$ dient af te nemen. Dit komt grofweg overeen met $c_i > 3\sigma_{c_i}$. Deze keuze is arbitrair en hoeft niet juist te zijn. Het is enkel de bedoeling om een globale indicatie te verkrijgen vanaf welke orde er geen termen meer aan de fitpolynoom toegevoegd dienen te worden.

Aangezien er geen model voor de beweging van de kogel voor handen is, dient er een model gekozen te worden. Op basis van bovenstaande bevindingen kan een keuze voor een polynoom gemaakt worden.

Alle data zijn met behulp van polynomen geschat. Als hoogste graad is een vierdegraads

Tabel B.1: Coëfficiënten en standaarddeviaties van de fits door de plaats-tijd data van de beweging van de kogel in horizontale richting. Er is gefit met een derde-, een vierde-, en een vijfdegraads polynoom.

graad	fitcoëfficiënten en standaarddeviaties					
	c_0 [mm]	σ_{c_0} [mm]	c_1 [m/s]	σ_{c_1} [m/s]	c_2 [m/s ²]	σ_{c_2} [m/s ²]
3	$-9.40 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-6}$	0.0805	$4.2 \cdot 10^{-3}$	3.31	0.12
4	$2.23 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-6}$	0.0502	$6.9 \cdot 10^{-3}$	4.99	0.35
5	$2.21 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-6}$	0.0491	$7.8 \cdot 10^{-3}$	5.17	0.61
	c_3 [m/s ³]	σ_{c_3} [m/s ³]	c_4 [m/s ⁴]	σ_{c_4} [m/s ⁴]	c_5 [m/s ⁵]	σ_{c_5} [m/s ⁵]
3	-23.1	0.95				
4	-54.9	6.3	192.4	37.8		
5	-62.4	22.0	314.1	338.9	-661.6	1819

polynoom gebruikt. De polynomen en de eerste en tweede tijdsafgeleiden luiden:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4, \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{x}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3, \quad (\text{B.2})$$

$$\ddot{x}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2. \quad (\text{B.3})$$

Van een fit door de plaats-tijd data van de kogelbeweging in horizontale richting zijn in tabel B.1 voor een derde-, een vierde- en een vijfdegraads polynoom de waarden van de fitcoëfficiënten almede de standaarddeviaties weergegeven.

Inspectie van de tabel laat zien, dat voor het verkrijgen van een zo nauwkeurig mogelijke tweede afgeleide de data volgens de gekozen regel $c_i > 3\sigma_{c_i}$ het beste met een vierdegraads polynoom beschreven kunnen worden. Het aan de polynoom toevoegen van de vijfde graad heeft geen zin meer. Het wel toevoegen van hogere orde termen resulteert in een overfit, terwijl het fitten zonder vierdegraads term een onderfit tot gevolg heeft. Zowel een onderfit als een overfit resulteert in een toename van de onnauwkeurigheid in de afgeleiden.

Dat een derdegraads polynoom niet toereikend is, blijkt reeds uit de resultaten van de overall weerstandscoefficiënt indien de data met derdegraads polynomen gefit worden. De curve van de experimenteel bepaalde weerstandscoefficiënten nadert immers aan het einde van de metingen niet aan de stationaire weerstandscurve (zie figuur 6.15), hetgeen wel dient te gebeuren, aangezien aan het einde van de meting de snelheid constant wordt en dus een stationaire situatie ontstaat.

Uit de vergelijkingen (B.2) en (B.3) volgt, dat voor de fouten in de snelheid en de versnelling, $\delta\dot{x}(t)$ en $\delta\ddot{x}(t)$, de volgende uitdrukkingen gelden:

$$[\delta\dot{x}(t)]^2 = [\sigma_{c_1} + 2\sigma_{c_2}t + 3\sigma_{c_3}t^2 + 4\sigma_{c_4}t^3]^2, \quad (\text{B.4})$$

$$[\delta\ddot{x}(t)]^2 = [2\sigma_{c_2} + 6\sigma_{c_3}t + 12\sigma_{c_4}t^2]^2, \quad (\text{B.5})$$

waarin σ_{c_1} , σ_{c_2} , σ_{c_3} en σ_{c_4} respectievelijk de standaarddeviaties zijn van de fitcoëfficiënten c_1 , c_2 , c_3 en c_4 .

Aangezien het bepalen van de tweede afgeleide veel grotere onnauwkeurigheden met zich

mee zal brengen dan de eerste afgeleide, kan als schatting voor de fout in de overall weerstandscoefficiënt bepaald via vergelijking (3.7) gesteld worden, dat deze bij benadering gelijk is aan de fout in de versnelling.

Voor een meting, waarbij de data voor snelheden en versnellingen via vierdegraads polynomen verkregen zijn, wordt op $t = 0.05$ s voor de fout in de snelheid en de versnelling gevonden:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= 0.0012 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \\ \delta\ddot{x} &= 0.10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.\end{aligned}$$

Voor dezelfde meting is op $t = 0.082$ s (laatste datapunt) de grootte van de onnauwkeurigheden:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= 0.0065 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \\ \delta\ddot{x} &= 0.44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.\end{aligned}$$

Inderdaad is de fout in de versnelling groter dan de fout in de snelheid.

Er moet niet vergeten worden, dat deze fout enkel bedoeld is om een indicatie over de orde van de fout te verkrijgen en niet geïnterpreteerd dient te worden als zijnde *de* fout, aangezien de polynoom, ofschoon de beste orde gekozen is, niet representatief voor de data hoeft te zijn. We zien dus, dat de onnauwkeurigheden in de weerstandscoefficiënten van gelijke orde zijn als de waarden zelf.

De onnauwkeurigheden bij de derdegraads fits en bij de vierdegraads fits met restricties op de fitcoëfficiënten zijn van gelijke orde als de hierboven gepresenteerde onnauwkeurigheden. Aangezien er aan de getalwaarden van de onnauwkeurigheden op zich weinig betekenis toegekend kan worden en er dus enkel ordes geschat kunnen worden, zijn de waarden hier niet expliciet weergegeven.

Bovenstaande verhaal geldt eveneens voor de fout in de virtuele-massa-coëfficiënt. Hierin komt immers ook de versnelling van het deeltje voor (zie vergelijking (3.12)), welke als belangrijkste foutenbron beschouwd kan worden. De gevonden fout in de versnelling is dus tevens een maat voor de fout in de bepaling van de virtuele-massa-coëfficiënt.

B.4 Afschatting Basset-kracht

In dit onderzoek is de bijdrage van de Basset-kracht aan de totale instationaire weerstandskracht verwaarloosd. In deze paragraaf zal aangetoond worden, dat verwaarlozing geoorloofd is.

De uitdrukking voor de Basset-kracht luidt:

$$F_{D,Basset} = C_H \frac{1}{4} D^2 \sqrt{\pi \eta_f \rho_f} \int_0^t \frac{dv_r/d\tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (\text{B.6})$$

Voor de instationaire rechte lijnige bewegingen van een bol bij kleine Reynoldsgetallen geldt $C_H = 6$. Odar en Hamilton [14] hebben C_H van een oscillerende bol bij hoge Reynoldsgetallen als functie van de versnellingsmodulus bepaald. Zij vonden, dat $C_H = 6$ een maximum is, zoals zichtbaar is in figuur 2.8. Dohmen [16] vond in zijn onderzoek voor

de geschiedeniscoëfficiënt waarden rond de 1. Om de Basset-kracht af te schatten zal hier voor de geschiedeniscoëfficiënt $C_H = 6$ genomen worden.

Vergelijking (B.6) is niet symbolisch oplosbaar. Om toch een grootte van de kracht te kunnen schatten, wordt hier aangenomen, dat $dv_r/d\tau$ constant is. Indien als bovengrens van de integraal $t = 0.1$ s genomen wordt, luidt de oplossing van (B.6):

$$F_{D,Basset} = \frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi \eta_f \rho_f} \frac{dv_r}{d\tau} \int_0^{0.1} \frac{d\tau}{\sqrt{0.1 - \tau}} = 6.7 \cdot 10^{-6} \frac{dv_r}{d\tau} \text{ N.}$$

Deze kracht zal nu vergeleken worden met de stationaire weerstandskracht op de kogel, indien deze met zijn stationaire valsnelheid $v_\infty = 0.64 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ onder invloed van de zwaartekracht valt. Hierbij geldt voor de stationaire weerstandscóëfficiënt $C_{D,s} = 0.43$. De grootte van de stationaire weerstandskracht is:

$$F_{D,s} = C_{D,s} A_\perp \frac{1}{2} \rho_f v_\infty^2 = 2.8 \cdot 10^{-4} \text{ N.}$$

Stel, dat $dv_r/d\tau$ inderdaad constant is, hoe groot dient deze term dan te zijn opdat $F_{D,Basset}$ van gelijke orde is als $F_{D,s}$?

$$\frac{dv_r}{d\tau} \sim \frac{2.8 \cdot 10^{-4}}{6.7 \cdot 10^{-6}} = 42 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Een dergelijk hoge versnelling komt niet voor bij de experimenten in dit onderzoek en is een orde hoger dan de wel voorkomende versnellingen. Dit toont aan, dat de bijdrage van de Basset-kracht aan de totale weerstandskracht marginaal is en rechtvaardigt de verwaarlozing ervan.