

DESTRATIFICATIE VAN BEKKENS MET BEHULP VAN
BELLENZUILEN - DE KOPPELING TUSSEN NEAR
FIELD EN FAR FIELD

dr ir C. Kranenburg

Voortgangsrapport mei 1977
Laboratorium voor Vloeistofmechanica
Afdeling der Civiele Techniek
Technische Hogeschool Delft

DESTRATIFICATIE VAN BEKKENS MET BEHULP VAN
BELLENZUILEN- DE KOPPELING TUSSEN NEAR FIELD
EN FAR FIELD

Voortgangsrapport

dr ir C.Kranenburg
mei 1977

Laboratorium voor Vloeistofmechanica
Afd. der Civiele Techniek
Technische Hogeschool Delft

INHOUD	pagina
Voorwoord	3
1. Inleiding	4
2. Drielagenmodel	5
2.1. Uitgangspunten	
2.2. Vergelijkingen	
2.3. Voortplantingssnelheden van interne golven	
2.4. Dubbel-tweelagenmodel	
3. Koppelingsvoorwaarden op de overgang tussen near field en far field	22
3.1. Uitgangspunten	
3.2. Permanente radiale stroming in een dubbel-tweelagensysteem	
3.3. Overzicht koppelingsvoorwaarden	
3.4. Afstand overgangsdorsnede-bellenzuil	
4. Eenvoudig gekoppeld model voor de menging van een gelaagd bekken	41
4.1. Bergingsbenadering	
4.2. Berekeningsresultaten	
5. Benedengrens voor de grootte van het far field als gevolg van de Corioliskracht	46
6. Conclusies	48
Appendix	49
Literatuur	51

Voorwoord

Dit rapport vormt een onderdeel van het toekomstig rapport nr. 77-1 en behandelt de theorie van het gelaagde far field voor het geval dat er geen verticale uitwisseling plaats vindt. De stroming in het far field wordt gemodelleerd als een drielagenstroming. Een beschouwing van de interne golfsnelheden maakt het mogelijk het benodigd aantal randvoorwaarden vast te stellen. Een belangrijke vereenvoudiging van het probleem wordt verkregen door alleen die gevallen te beschouwen waarin de tussenlaag wel van dikte kan veranderen maar geen verticale verplaatsingen ondergaat (dubbel-tweelagenmodel). Voor de koppeling van near field en far field van de bellenzuil wordt de overgang tussen beide opgevat als een interne overlaat, en wel een korte overlaat in verband met de axiaalsymmetrische stroming.

De verkregen resultaten worden gebruikt voor de berekening van de snelheid van opmengen van een bekken met als parameters het toegevoerde luchtdebiet, de bekkengrootte en -diepte, het initiele dichtheidsverschil, e.d.. De gebruikte near field gegevens zijn ontleend aan publicaties van het Laboratorium voor Fysische Technologie van de Technische Hogeschool Delft. De berekeningsresultaten hebben een enigszins voorlopig karakter, omdat nog geen volledige verificatie met experimentele gegevens heeft plaats gevonden. Het ligt in de bedoeling hierop in het definitieve rapport verder in te gaan.

1. Inleiding

Thermische stratificatie, die in voorjaar en zomer in bekkens op kan treden, kan de waterkwaliteit in het hypolimnion van geëutrofieerde bekkens nadelig beïnvloeden. De waterkwaliteit kan verbeterd worden door het hypolimnion te mengen met het meestal zuurstofrijke epilimnionwater. Een van de methoden hiervoor bestaat uit het injecteren van lucht vanaf de bodem van het bekken. Vindt de injectie lokaal plaats, dan ontstaat een z.g. bellenzuil of bellenpluim.

Bij de door een bellenzuil in een gelaagd bekken opgewekte stroming kan men drie gebieden onderscheiden (fig. 1.1):

- Een gebied met de verticale twee-fasen stroming van opstijgende luchtbellen en meegesleept hypolimnionwater (de bellenzuil (1)).
- Een gebied met radiale turbulente afstroming van dit relatief koude water langs het vrije oppervlak en de toestroming eronder. De impulsie van het afstromende water verdringt het epilimnion totdat evenwicht gemaakt wordt met het drukverschil tengevolge van dichtheidsverschillen en zwaartekracht. Bij de stroomnaad ($r=R$) mengt het afstromende water voor een deel met het epilimnionwater; het gemengde water spreidt zich als een tussenlaag ($r>R$) uit. Het resterende deel van het afstromende water recirculeert. De dichtheid van de tussenlaag ligt in tussen die van epi- en hypolimnion. Als gevolg van de menging is de stroming in zowel epilimnion als hypolimnion naar de bellenzuil toe gericht (het near field (2)).
- Een gebied ($r>R$) met quasi-horizontale stroming in epilimnion, hypolimnion en tussenlaag. De tussenlaag spreidt zich als een intern front uit nadat de luchtinjectie gestart is. Dit front weerkaatst bij de oevers en keert terug als een interne golf. Door golfdemping gaat het golfverschijnsel geleidelijk over in een quasi-permanente stroming, waarbij de tussenlaag dikker wordt. In prototype situaties kan verticale uitwisseling tussen de lagen optreden, waardoor de horizontale reikwijdte van de stroming beperkt kan worden (3)^{*)} (het far field).

*)

Zie ook par. 5.

In de hiernavolgende paragraaf zal nader worden ingegaan op de drielagenstroming in het far field.

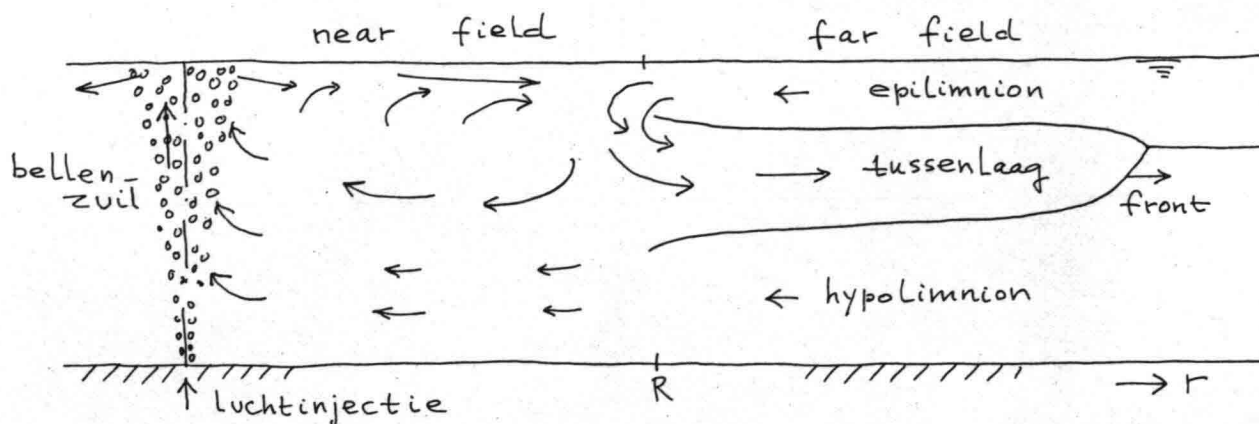


Fig. 1.1. De stroming tengevolge van een bellenzuil bij gelaagde begintoestand

2. Drielagenmodel

2.1. Uitgangspunten

We gaan uit van een lagenmodel (4). Daartoe verwaarlozen we verticale versnellingen ten opzichte van die van de zwaartekracht, zodat de drukverdeling als quasi-hydrostatisch opgevat mag worden. De later te onderzoeken golven hebben daardoor een lange golf karakter (lengte groot ten opzichte van de laagdikten). De stroomsnelheid in een laag veronderstellen we constant over de hoogte van de laag. We verwaarlozen verticale uitwisseling van massa tussen de lagen ten opzichte van de menging in het near field. De dichtheid van een laag wordt daardoor constant in plaats en tijd.

Hoewel de door een bellenzuil opgewekte stroming twee-dimensionaal zal zijn (in het horizontale vlak), beschouwen we in deze paragraaf het een-dimensionale geval.

Dit geval geeft nl. voldoende informatie voor het bepalen van de voortplantingssnelheden van interne golven, de voorwaarde voor kritische stroming (die van centraal belang zal blijken te zijn), e.d.

2.2. Vergelijkingen

Met de uitgangspunten van par. 2.1 vinden we de volgende vergelijkingen voor het drielagenmodel (fig. 2.2.1).

Continuïteitsvergelijkingen

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a_1 v_1 = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a_2 v_2 = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a_3 v_3 = 0 \quad (2.2.3)$$

Bewegingsvergelijkingen

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + g \frac{\partial a_1}{\partial x} + g \frac{\partial a_2}{\partial x} + g \frac{\partial a_3}{\partial x} = f_1 - g \frac{dh_b}{dx} \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial a_1}{\partial x} + g \frac{\partial a_2}{\partial x} + g \frac{\partial a_3}{\partial x} = f_2 - g \frac{dh_b}{dx} \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_3} g \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\rho_2}{\rho_3} g \frac{\partial a_2}{\partial x} + g \frac{\partial a_3}{\partial x} = f_3 - g \frac{dh_b}{dx} \quad (2.2.6)$$

In de rechter leden van (2.2.4) t/m (2.2.6) staan de krachten (f_i) die geen afgeleiden van de afhankelijk variabelen bevatten, zoals wrijving tussen de lagen en met de bodem, Corioliskracht, enz., en de invloed van de bodemhelling. De dichtheden voldoen aan

$$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$$

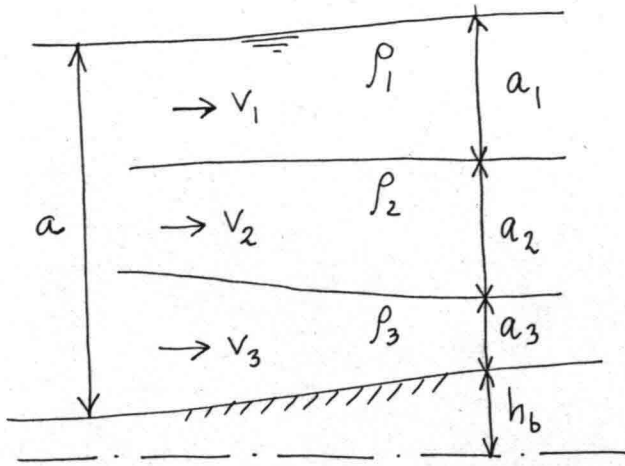


Fig. 2.2.1. Definitieschets drielagenmodel

We nemen aan dat de relatieve dichtheidsverschillen klein zijn:

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2} \quad \text{en} \quad \varepsilon_3 = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2} \quad \text{alle} \ll 1$$

Uit de definities volgt

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon \quad (2.2.7)$$

We zijn hier alleen geïnteresseerd in het interne golfverschijnsel. Omdat de relatieve dichtheidsverschillen klein zijn kunnen we het externe golfverschijnsel (voortplantingssnelheden $\propto \sqrt{ga}$) afsplitsen (5). Vergelijkingen voor uitsluitend interne golven zijn als volgt op te stellen. Verwaarlozing van golven in het vrije oppervlak geeft

$$\frac{\partial}{\partial x} (h_b + a_3 + a_2 + a_1) \approx 0$$

Omdat de bellenzuil bij stationair near field geen netto debiet levert, is in dit geval de waterstand ook geen functie van de tijd, dus

$$h_b + a = \text{constant} \quad (2.2.8)$$

met

$$a = a_1 + a_2 + a_3 \quad (2.2.9)$$

Sommeren van (2.2.1) t/m (2.2.3) geeft met (2.2.8) en $\partial h_b / \partial t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} (a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) = 0$$

Het netto debiet $q = q_1 + q_2 + q_3$ ($q_i = a_i v_i$) hangt dus alleen van de tijd af. In dit geval is het netto debiet gelijk aan nul, dus

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \quad (2.2.10)$$

Bewegingsvergelijkingen voor het interne verschijnsel kunnen we afleiden door de relatief grote hydrostatische druktermen uit (2.2.4) t/m (2.2.6) te elimineren: $[\rho_1 * (2.2.4) - \rho_2 * (2.2.5)] / \rho_2$ en $[\rho_2 * (2.2.5) - \rho_3 * (2.2.6)] / \rho_2$ worden met verwaarlozing van de dichtheidsverschillen in de relatief kleine versnellingstermen en in de krachttermen in de rechter leden

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_1 - v_2) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - \varepsilon_1 g \frac{\partial}{\partial x} (a_2 + a_3) \approx f_1 - f_2 + \varepsilon_1 g \frac{dh_b}{dx} \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_2 - v_3) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{v_2^2 - v_3^2}{2} - \varepsilon_3 g \frac{\partial a_3}{\partial x} \approx f_2 - f_3 + \varepsilon_3 g \frac{dh_b}{dx} \quad (2.2.12)$$

voor de zes onbekenden: $v_1, v_2, v_3, a_1, a_2, a_3$ hebben we weer zes vergelijkingen: twee van de drie continuïteitsvergelijkingen, (2.2.8), (2.2.10), (2.2.11) en (2.2.12).

Door deze bewerking zijn externe golven uit het model verdwenen.

We zullen nog gebruik maken van een derde bewegingsvergelijking uitsluitend betrekking hebbend op interne golven. Deze ontstaat door $\partial a_3 / \partial x$ uit (2.2.11) en (2.2.12) te elimineren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_2 - \frac{\varepsilon_3 v_1 + \varepsilon_1 v_3}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left(v_2^2 - \frac{\varepsilon_3 v_1^2 + \varepsilon_1 v_3^2}{\varepsilon} \right) + \\ + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon} g \frac{\partial a_2}{\partial x} = f_2 - \frac{\varepsilon_3 f_1 + \varepsilon_1 f_3}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

We besteden hier geen aandacht aan vergelijkingen voor het interne front van de zich uitbreidende tussenlaag, maar komen hierop terug in par. 2.5.

Het probleem van het opstellen van een voldoende aantal vergelijkingen ligt daar eenvoudiger.

2.3. Voortplantingssnelheden van interne golven

De vergelijking voor de voortplantingssnelheden kan afgeleid worden met de methode van de karakteristieken, zie b.v. (6). Toepassing op het oorspronkelijke stelsel (2.2.1) t/m (2.2.6) verloopt het eenvoudigst. Voor de voortplantingssnelheid c vinden we zo de relatie

$$\begin{vmatrix} V_1 - c & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 - c & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 - c & 0 & 0 & a_3 \\ g & g & g & V_1 - c & 0 & 0 \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} g & g & g & 0 & V_2 - c & 0 \\ \frac{\rho_1}{\rho_3} g & \frac{\rho_2}{\rho_3} g & g & 0 & 0 & V_3 - c \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3.1)$$

Uitwerking geeft

$$(1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2)(1 - \varphi_3) - \frac{\rho_2}{\rho_3}(1 - \varphi_1) + \frac{\rho_1}{\rho_3}(1 + \varphi_2) - \frac{\rho_1}{\rho_2}(1 - \varphi_3) = 0 \quad (2.3.2)$$

met de Froude getallen

$$\varphi_i = \frac{(V_i - c)^2}{g a_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

De vergelijking voor C is van de zesde graad, er zijn dus zes voortplantingssnelheden. Hiervan hebben er twee betrekking op externe golven.

Een relatie voor de vier voortplantingssnelheden van interne golven vinden we door in (2.3.2) te stellen

$$c - v_i \approx \sqrt{\varepsilon g a} \quad \text{met} \quad \varepsilon \ll 1$$

en hogere orde (kleine) termen te verwaarlozen. We vinden dan de vierdegraadsvergelijking

$$\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_3 + \varphi_3 \varphi_1 - \varepsilon_3 \varphi_1 - \varepsilon \varphi_2 - \varepsilon_1 \varphi_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \approx 0 \quad (2.3.3)$$

Er zijn dus in principe vier interne voortplantingssnelheden. Eventuele complexe wortels wijzen op instabiliteit van het systeem. (2.3.3) kan ook direct uit de benadering voor interne golven, die in de vorige paragraaf uiteengezet is, afgeleid worden.

Alvorens (2.3.3) verder uit te werken bekijken we een aantal noodzakelijke voorwaarden voor het reëel zijn van de wortels (fig. 2.3.1). Omdat

φ_1 , φ_2 en φ_3 bij reële c positief of gelijk aan nul zijn moet gelden

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\leq \varepsilon_1 & \text{of} & & |c - v_1| &\leq \sqrt{\varepsilon_1 g a_1} \\ \varphi_2 &\leq \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon} & \text{of} & & |c - v_2| &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon} g a_2} \\ \varphi_3 &\leq \varepsilon_3 & \text{of} & & |c - v_3| &\leq \sqrt{\varepsilon_3 g a_3} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

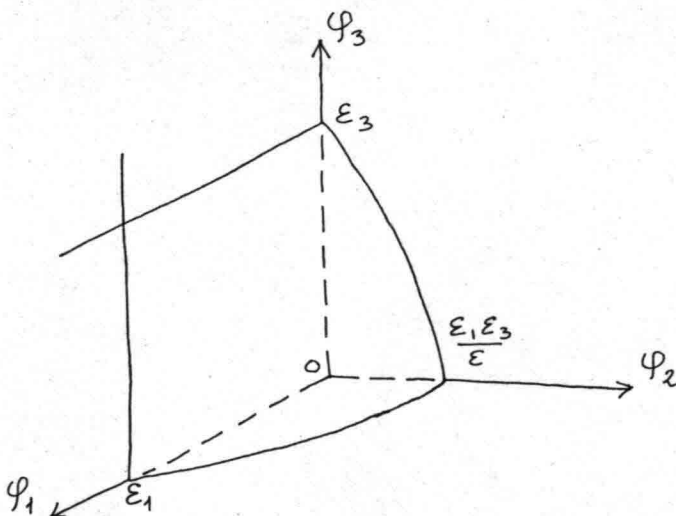


Fig. 2.3.1.

We vinden hieruit voor de snelheidsverschillen als noodzakelijke voorwaarden voor stabiliteit

$$\begin{aligned} |v_1 - v_2| &\leq \sqrt{\varepsilon_1 g a_1} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon} g a_2} \\ |v_2 - v_3| &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon} g a_2} + \sqrt{\varepsilon_3 g a_3} \\ |v_1 - v_3| &\leq \sqrt{\varepsilon_1 g a_1} + \sqrt{\varepsilon_3 g a_3} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Het bovenstaande betreft lange interne golven. Kortere golven kunnen al bij kleinere snelheidsverschillen instabiel worden; zij veroorzaken door breking eindige grensvlakdikten (7).

Verdere analyse van (2.3.3) stuit op algebraïsche moeilijkheden. Uitwerking leidt tot een vorm van de gedaante

$$P(c) \equiv b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + b_3 c^3 + b_4 c^4 = 0 \quad (2.3.6)$$

met

$$\begin{aligned} b_0 &= F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} F_1 - F_2 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} F_3 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon^2} \\ b_1 &= -\frac{2}{\varepsilon g} \left[(F_2 + F_3 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}) \frac{v_1}{a_1} + (F_1 + F_3 - 1) \frac{v_2}{a_2} + (F_2 + F_1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}) \frac{v_3}{a_3} \right] \\ b_2 &= \frac{1}{(\varepsilon g)^2} \left(\frac{v_1^2 + 4 v_1 v_2 + v_2^2}{a_1 a_2} + \frac{v_2^2 + 4 v_2 v_3 + v_3^2}{a_2 a_3} + \frac{v_3^2 + 4 v_3 v_1 + v_1^2}{a_3 a_1} \right) + \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon g} \left(\frac{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}{a_3} \right) \\ b_3 &= -\frac{2}{(\varepsilon g)^2} \left(\frac{v_1 + v_2}{a_1 a_2} + \frac{v_2 + v_3}{a_2 a_3} + \frac{v_3 + v_1}{a_3 a_1} \right) \\ b_4 &= \frac{a}{(\varepsilon g)^2 a_1 a_2 a_3} \\ F_i &= \frac{v_i^2}{\varepsilon g a_i} \quad (\text{interne Froude getallen}), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Wat betreft de ligging van de nulpunten van het polynoom $P(c)$ kunnen we een aantal gevallen onderscheiden. We beschouwen **alleen stabiele** gevallen.

I. Subkritische stroming

Er zijn twee positieve en twee negatieve voortplantingssnelheden (fig. 2.3.2a, met links een grafische voorstelling van het polynoom en rechts een x,t -diagram met karakteristieke richtingen).

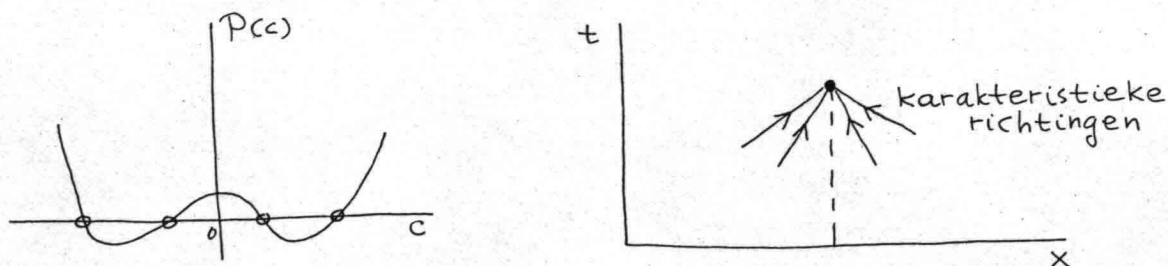


Fig. 2.3.2a.

II. Kritische stroming

Een van de voortplantingssnelheden is gelijk aan nul.
Er zijn vier mogelijkheden, b.v. die van fig. 2.3.2b.
Voorwaarde voor kritische stroming is

$$b_0 = 0$$

(2.3.7)

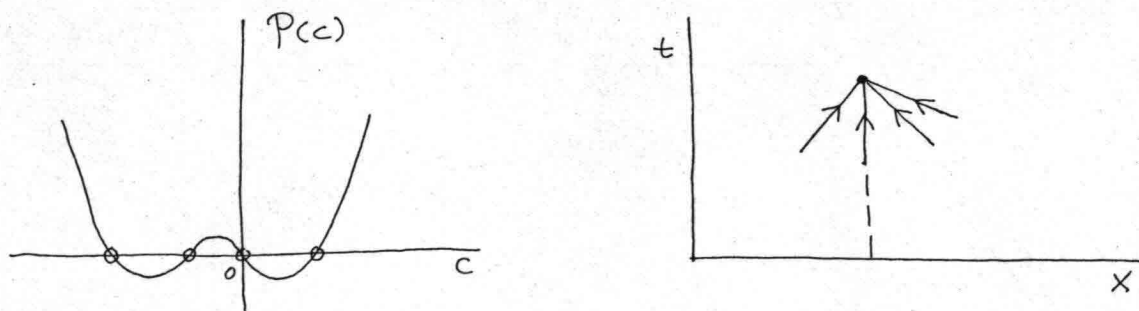


Fig. 2.3.2b.

III Dubbelkritische stroming

Er is een dubbele wortel $c=0$ (drie mogelijkheden), zie b.v. fig. 2.3.2c.

Voorwaarden:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 0 \end{aligned}$$

(2.3.8)

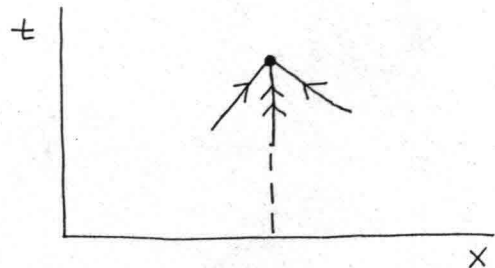
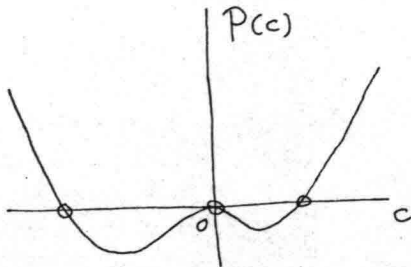


Fig. 2.3.2c.

IV*) Tripelkritische stroming

Er is een drievoudige wortel $c=0$ (twee mogelijkheden), b.v. die van fig. 2.3.2d. Voorwaarden:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$

(2.3.9)

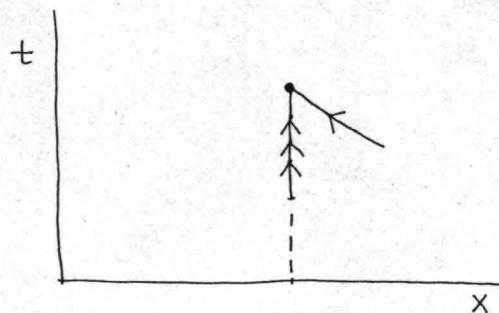
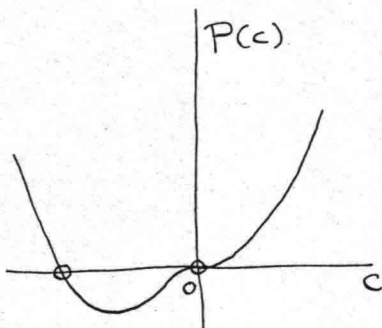


Fig. 2.3.2d.

*) Hier wordt niet ingegaan op de vraag of dit type stroming realiseerbaar is. Het is niet zonder meer duidelijk of de gestelde voorwaarden een fysisch zinvolle oplossing toelaten. Als dit wel zo is, is het nog niet zeker of deze stromingstoestand via stabiele tussenfasen bereikt kan worden.

V*) Quadrupelkritische stroming

De vier wortels vallen samen in de oorsprong (fig. 2.3.2e). Voorwaarden:

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0$$

(2.3.10)

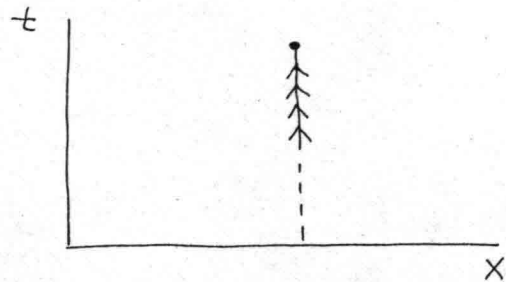
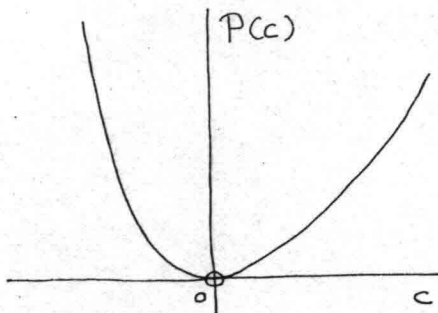


Fig. 2.3.2e.

VI Superkritische stroming A

Er zijn drie voortplantingssnelheden met hetzelfde teken (twee mogelijkheden), b.v. fig. 2.3.2f.

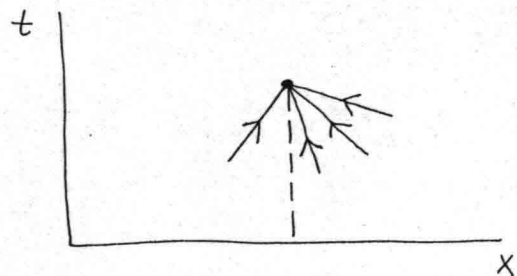
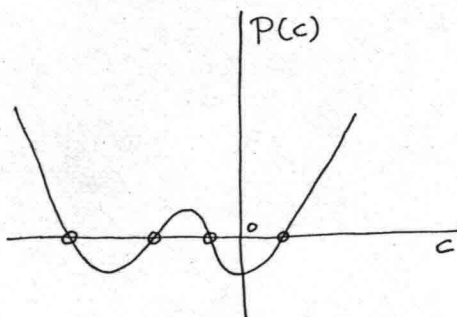


Fig. 2.3.2f.

Superkritische stroming B

Alle vier de voortplantingssnelheden hebben hetzelfde teken (twee mogelijkheden), b.v. fig. 2.3.2g.

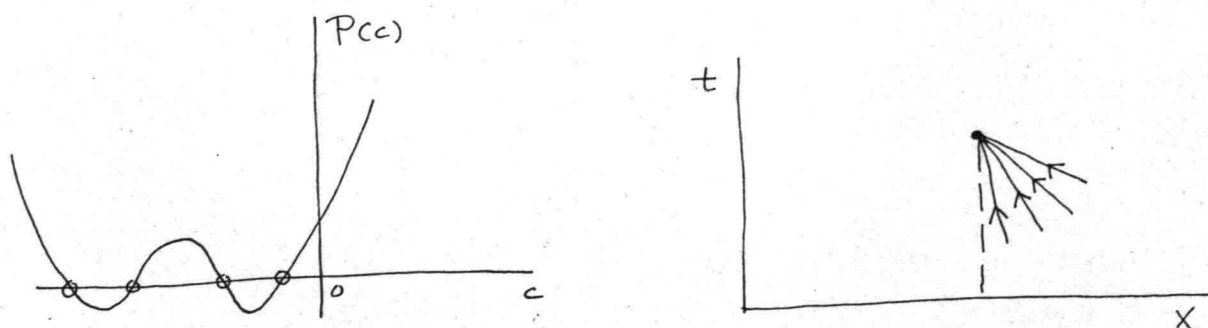


Fig. 2.3.2g.

We kunnen nu met behulp van bovenstaande classificatie het aantal randvoorwaarden aangeven dat in een bepaald geval vereist is om tot een gedetermineerd probleem te komen. Stel het drielagenmodel geldt in het gebied $x \geq x_0$ en moet aangesloten worden op randvoorwaarden op $x = x_0$. Veronderstellen we de dichtheden als gegeven, dan zijn er op de rand $x = x_0$ zes onbekenden: $v_1, v_2, v_3, a_1, a_2, a_3$. Hiervoor hebben we in de eerste plaats de vergelijkingen (2.2.9) en (2.2.10). Verder kunnen we, althans in principe, gebruik maken van de compatibiliteitsrelaties die gelden langs de karakteristieke richtingen. Als er m van deze karakteristieke richtingen vanuit het gebied $x > x_0$ naar de rand toe gericht zijn, of met de rand samenvallen (dus er m niet-positieve golfsnelheden zijn), dan bedraagt het benodigde aantal randvoorwaarden op $x = x_0$ dus $(4 - m)$, zie tabel 2.3.1.

geval	benodigd aantal randvoorwaarden op $x = x_0$
I	$2^{(*)}$
II	$0, 1^{(*)}, 2$ of 3
III	$0, 1^{(*)}$ of 2
IV	$0^{(*)}$ of 1
V	$0^{(*)}$
VI A	$1^{(*)}$ of 3
B	$0^{(*)}$ of 4

$^{(*)}$ in fig. 2.3.2
afgebeeld
geval

Tabel 2.3.1.

2.4. Dubbel-tweelagenmodel

We kunnen een willekeurige golfbeweging van de tussenlaag splitsen in twee componenten: een waarbij deze laag niet van hoogte maar wel van dikte verandert, en een waarbij wel de hoogte maar niet de dikte verandert (fig. 2.4.1)

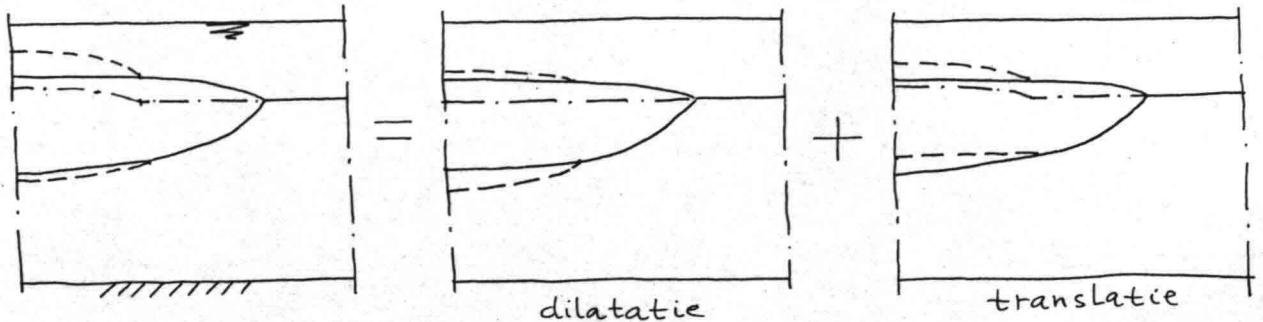


Fig. 2.4.1.

Bij de eerste golfvorm behoudt de tussenlaag steeds dezelfde positie ten opzichte van de thermokline, bij de tweede varieert deze. De tweede bewegingscomponent is van belang als b.v. de thermokline van niveau zou veranderen, of als de tussenlaag gevormd zou worden op een niveau dat afwijkt van dat van de thermokline.

In het geval van de vorming van een tussenlaag door een bellenzuil wordt deze laag echter juist ter hoogte van de thermokline gevormd (fig. 1.1), Nemen we verder aan dat het niveau van de thermokline niet varieert in de tijd, dan is aannemelijk dat de tweede bewegingscomponent buiten beschouwing gelaten mag worden.

Bij de eerste bewegingscomponent varieert de dikte van de tussenlaag, maar vindt geen verticaal transport van vloeistof plaats door het vlak dat samenvalt met de oorspronkelijke thermokline. Dit maakt het mogelijk de stromingen boven en die onder dit vlak op te vatten als twee tweelagensystemen, die gekoppeld zijn door de voorwaarde dat de snelheden in de tussenlaag in beide tweelagensystemen dezelfde is (dit impliceert een gelijk drukverloop juist onder en juist boven het vlak door de thermokline).

Uit het behoud van volume volgt nu, analoog aan (2.2.10), zie ook fig.

2.4.2,

$$a_{11}v_1 + a_{21}v_2 = 0 \quad (2.4.1)$$

$$a_{31}v_1 + a_{22}v_2 = 0 \quad (2.4.2)$$

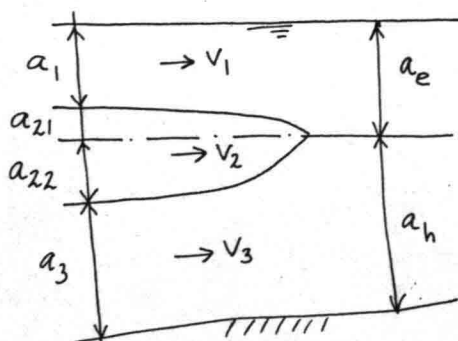


Fig. 2.4.2.

met

$$a_{21} + a_{22} = a_2 \quad (2.4.3)$$

$$a_1 + a_{21} = a_e \quad (2.4.4)$$

$$a_{22} + a_3 = a_h \quad (2.4.5)$$

De grootheden a_e en a_h zijn de epi- en hypolimniondikten in ongestoorde toestand. Voor bovenste en onderste tweelagensysteem gelden verder de continuïteitsvergelijkingen (2.2.1) resp. (2.2.3). Als bewegingsvergelijkingen voor de twee systemen gelden (2.2.11) en (2.2.12). Substitutie van (2.4.1) t/m (2.4.5) in deze vergelijkingen geeft, met (2.2.8) en (2.2.9),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{a_e}{a_1} v_2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a_e}{a_1} \left(\frac{a_e}{a_1} - 2 \right) v_2^2 \right] + g \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 a_1) = f_1 - f_2 \quad (2.4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{a_h}{a_3} v_2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a_h}{a_3} \left(\frac{a_h}{a_3} - 2 \right) v_2^2 \right] + g \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon_3 (h_b + a_3)] = -f_2 + f_3 \quad (2.4.7)$$

Een verandering in $(h_b + a_3)$ is gekoppeld aan een verandering in a_1 zodat $(h_b + a_3)$ op te vatten is als een functie van a_1 . (2.4.7) kan dus, evenals (2.4.6), opgevat worden als een vergelijking voor de afhankelijk variabelen a_1 en v_2 .

Deze vergelijkingen zijn niet strijdig als

$$\frac{\frac{a_e}{a_1}}{\frac{a_h}{a_3}} = \frac{\frac{a_e}{a_1} \left(\frac{a_e}{a_1} - 2 \right)}{\frac{a_h}{a_3} \left(\frac{a_h}{a_3} - 2 \right)} = \frac{\varepsilon_1 a_1}{\varepsilon_3 (h_b + a_3)} = \frac{f_1 - f_2}{-f_2 + f_3} \quad (2.4.8.)$$

Uitwerking geeft

$$\frac{a_1}{a_e} = \frac{a_3}{a_h} \quad (2.4.9.)$$

$$\frac{a_1}{h_b + \frac{a_h}{a_e} a_1} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \quad (2.4.10)$$

$$f_1 = f_3 \quad (2.4.11)$$

Omdat ε_1 en ε_3 constanten zijn, blijkt uit (2.4.10) dat de bodem horizontaal moet zijn voor de geldigheid van het dubbel-tweelagenmodel (dan is ook a_h een constante):

$$h_b = 0$$

zodat

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{a_e}{a_h} \quad (2.4.12)$$

Met (2.2.7) vinden we ($a = a_e + a_h = a_1 + a_2 + a_3$)

$$\varepsilon_1 = \frac{a_h}{a} \varepsilon \quad \text{en} \quad \varepsilon_3 = \frac{a_e}{a} \varepsilon \quad (2.4.13)$$

De tussenlaag moet dus, wil het dubbel-tweelagenmodel van toepassing zijn, juist de dichtheid na volledige menging over de verticaal hebben ($\rho_2 a = \rho_1 a_e + \rho_3 a_h$)

Aan (2.4.11) zal in het algemeen niet voldaan worden.

We beschouwen daarom voorlopig alleen gevallen waarin wrijving tussen de lagen, Corioliskracht, e.d. van ondergeschikt belang zijn. In (3) wordt aangetoond dat de Corioliskracht een sterk effect heeft op de tangentiële snelheidscomponenten. De invloed op de laaghellingsen wordt nagegaan in par. 5. Er is geen invloed op de voortplantingssnelheden, omdat in de Coriolistermen geen afgeleiden van de afhankelijk variabelen voorkomen. Er is dus ook geen invloed op de voorwaarde voor kritische stroming, enz. Uit (2.4.4), (2.4.5) en (2.4.9) volgt

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{a_e}{a} a_2 & a_{22} &= \frac{a_h}{a} a_2 \\ a_1 &= \frac{a_e}{a} (a - a_2) & a_3 &= \frac{a_h}{a} (a - a_2) \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Uit (2.4.1) en (2.4.2) volgt hiermee

$$V_1 = V_3 = - \frac{a_2}{a - a_2} V_2 \quad (2.4.15)$$

De snelheden in epi- en hypolimnion zijn dus gelijk. De bewegingsvergelijking (2.2.13) voor de tussenlaag wordt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a - 2a_2}{a - a_2} V_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a(a - 2a_2)}{2(a - a_2)^2} V_2^2 \right] + \frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g \frac{\partial a_2}{\partial x} = 0 \quad (2.4.16)$$

Samen met de continuïteitsvergelijking (2.2.2) hebben we zo twee vergelijkingen voor de twee afhankelijk variabelen V_2 en a_2 verkregen. De voortplantingssnelheden van interne golven in het dubbel-tweelagenmodel volgen uit (2.2.2) en (2.4.16):

$$c = \frac{(1 - 2 \frac{a_2}{a}) V_2 \pm \sqrt{\frac{a_2}{a} (1 - \frac{a_2}{a}) \left[\frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g a (1 - \frac{a_2}{a})^2 - V_2^2 \right]}}{1 - \frac{a_2}{a}} \quad (2.4.17)$$

Door de overgang van het algemene drielagenmodel op het dubbel-tweelagenmodel zijn twee golfsnelheden geëlimineerd. Dit hangt samen met het feit dat de golven die de tussenlaag in verticale richting verplaatsen, buiten beschouwing gelaten zijn.

De stroming is kritisch als

$$v_2^2 = \frac{aeah}{a^2} \varepsilon g a \frac{\frac{a_2}{a} \left(1 - \frac{a_2}{a}\right)^3}{\left(1 - \frac{a_2}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_2}{a}\right)^3} \quad (2.4.18)$$

De tweede voortplantingssnelheid is dan

$$c = 2 \left(1 - 2 \frac{a_2}{a}\right) \sqrt{\frac{aeah}{a^2} \varepsilon g a \frac{\frac{a_2}{a} \left(1 - \frac{a_2}{a}\right)^3}{\left(1 - \frac{a_2}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_2}{a}\right)^3}} \quad (2.4.19)$$

Deze voortplantingssnelheid wisselt van teken bij $a_2 = \frac{1}{2}a$
De stroming is dubbelkritisch als

$$\frac{a_2}{a} = \frac{1}{2}, \quad v_2^2 = \frac{1}{4} \frac{aeah}{a^2} \varepsilon g a \quad (2.4.20)$$

Beide voortplantingssnelheden volgens (2.4.17) zijn dan gelijk aan nul.
De twee overige voortplantingssnelheden moeten volgen uit (2.3.6). We vinden voor dit geval, zie fig. 2.4.3,

$$c = \begin{cases} -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{aeah}{a^2} \varepsilon g a} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{aeah}{a^2} \varepsilon g a} \end{cases} \quad (2.4.21)$$

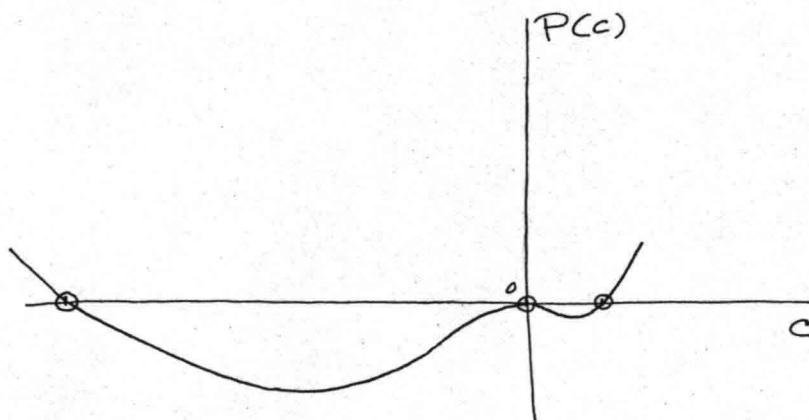


Fig. 2.4.3.

Er zijn vier reële voortplantingssnelheden waarvan twee samenvallend, dus deze toestand is nog juist stabiel.

Met behulp van (2.3.5), de noodzakelijke (maar niet voldoende) voorwaarden voor stabiliteit van het drielagensysteem, kunnen we een indruk krijgen van de stabiliteit tegen verticale bewegingen van de tussenlaag. Substitueren van (2.4.9), (2.4.13) en (2.3.15) geeft als stabiliteitseis

$$v_2 < \sqrt{\frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g a} \left(1 - \frac{a_2}{a}\right) \left(\sqrt{1 - \frac{a_2}{a}} + \sqrt{\frac{a_2}{a}}\right) \quad (2.4.22)$$

(2.4.18) voldoet hieraan voor $0 < a_2 < a$.

Tot slot van deze paragraaf besteden we aandacht aan interne fronten in het dubbel-tweelagensysteem. De uitbreiding van een tussenlaag tussen het ongestoorde epi- en hypolimnion gaat gepaard met de vorming van een front aan de voorzijde (9, 10), dat binnen het kader van een lagenmodel opgevat kan worden als een discontinuïteit. Voor het opstellen van vergelijkingen voor zo'n discontinuïteit maken we gebruik van de aanpak van Benjamin (11), en Wilkinson en Wood (12) voor tweelagensystemen. Toepassing op bovenste resp. onderste tweelagensysteem geeft voor de voortplantings-snelheid c_f van het front (fig. 2.4.4.)

$$c_f^2 = \varepsilon_1 g \frac{a_{21}}{a_e} \frac{(a_e - a_{21})(2a_e - a_{21})}{a_e + a_{21}} \quad (2.4.23)$$

$$c_f^2 = \varepsilon_3 g \frac{a_{22}}{a_h} \frac{(a_h - a_{22})(2a_h - a_{22})}{a_h + a_{22}}$$

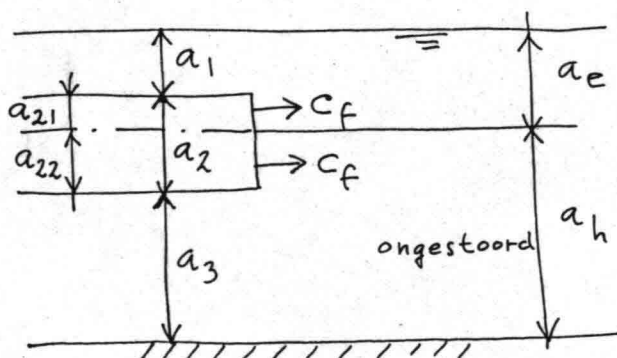


Fig. 2.4.4.

Substitutie van (2.4.3), (2.4.4), (2.4.5.), (2.4.9.) en (2.4.13) levert

$$C_f^2 = \frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g a \frac{\frac{a_2}{a} \left(1 - \frac{a_2}{a}\right) \left(2 - \frac{a_2}{a}\right)}{1 + \frac{a_2}{a}} \quad (2.4.24)$$

Dit resultaat wordt voor beide tweelagensystemen gevonden, zoals ook vereist is voor een consistent model (het front kan maar één voortplantingssnelheid hebben). C_f is maximaal voor $a_2 \approx 0,347 a$ en

$$(C_f)_{\max} \approx 0,527 \sqrt{\frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g a} \quad (2.4.25)$$

$(C_f)_{\max}$ is dus wat groter dan de dubbelkritische stroomsnelheid volgens (2.4.20). Het front kan, omdat in andere gevallen afvlakking optreedt, slechts bestaan als

$$a_2 < 0,347 a \quad (2.4.26)$$

3. Koppelingsvoorwaarden op de overgang tussen near field en far field

3.1. Uitgangspunten

Alvorens in te gaan op het probleem van de koppelingsvoorwaarden op de overgang, beschouwen we twee eenvoudiger problemen. Hierbij is de stroming radiaal in verband met toepassing op de bellenzuil.

Probleem 1 - Permanente radiale afstroming over een drempel in een éénlaagsysteem

We gaan uit van de continuïteitsvergelijking

$$r a v = Q \quad (3.1.1)$$

waarin r de radiale coördinaat is, en de vergelijking van Bernoulli (geen wrijving)

$$a + \frac{v^2}{2g} = H \quad (3.1.2)$$

Er zijn twee typen verhanglijnen: een subkritische en een superkritische tak (fig. 3.1.1). De twee voortplantingssnelheden van lange golven zijn in het eerste geval van verschillend teken, in het tweede geval van hetzelfde teken.

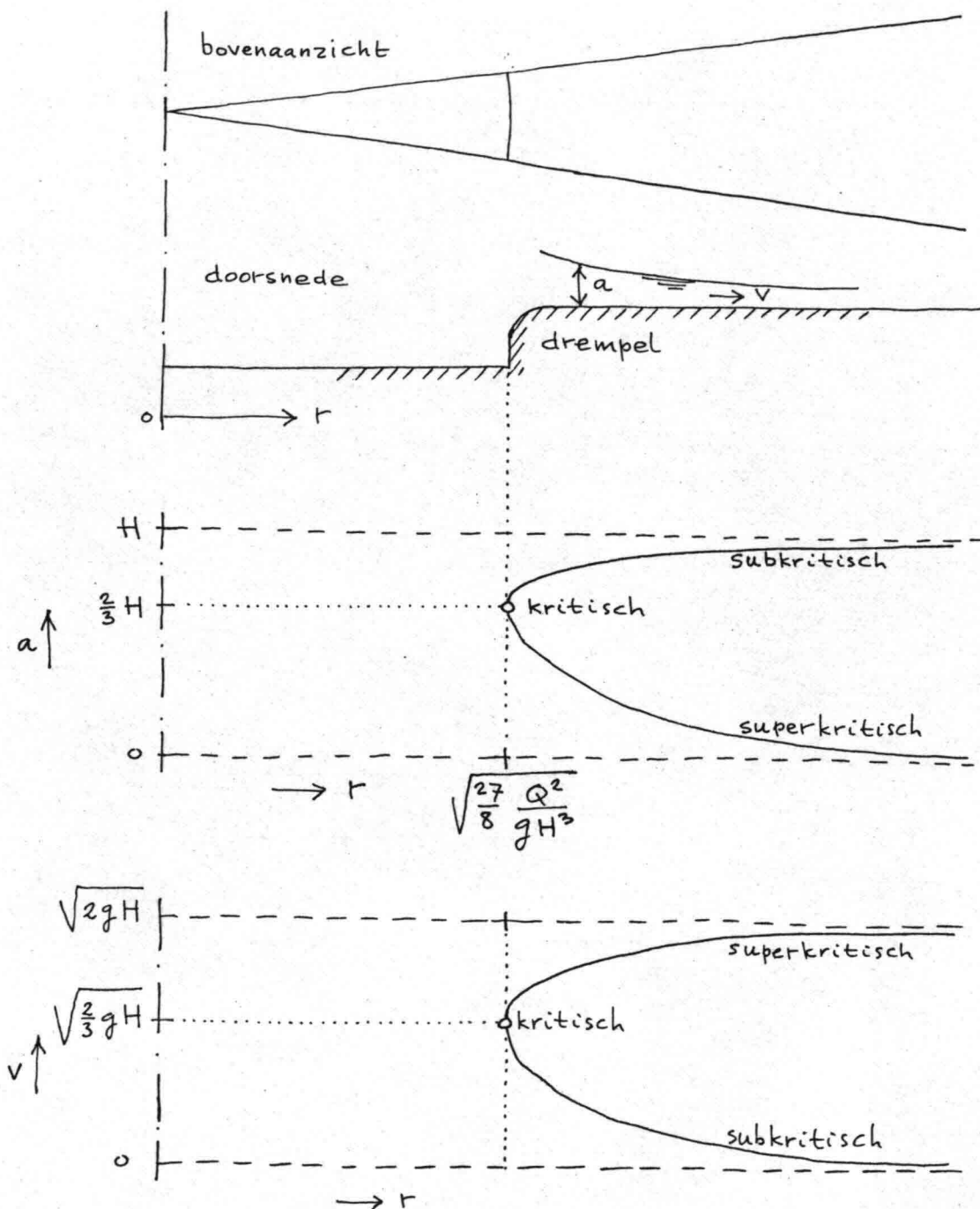
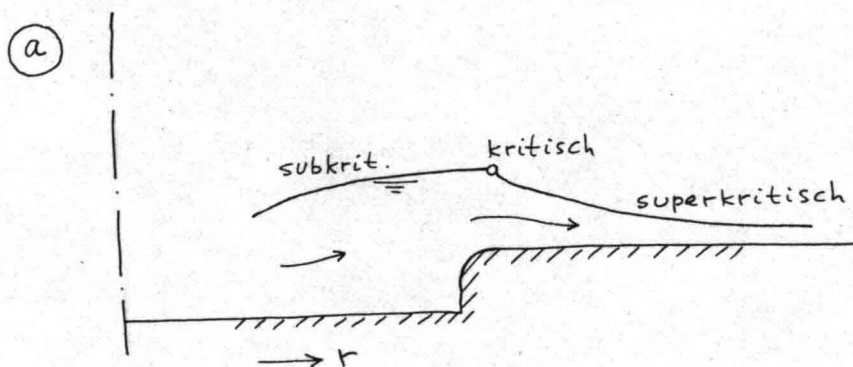


Fig. 3.1.1.

De superkritische tak treedt op als er benedenstrooms van de drempel geen hindernissen aanwezig zijn. Ter plaatse van de drempel heerst dan kritische stroming. Het debiet is dan, bij gegeven energiehogte, maximaal en één van de voortplantingssnelheden is dan gelijk aan nul. Het geheel werkt als een korte overlaat als gevolg van de radiale stroming. In het geval van superkritische afstroming is de overlaat volkomen.

We kunnen nog onderscheid maken tussen subkritische en superkritische aanstroming (fig. 3.1.2). In het tweede geval zal, bij voldoende geprononceerde drempel, ervoor een watersprong optreden.

Subkritische aanstroming



Superkritische aanstroming

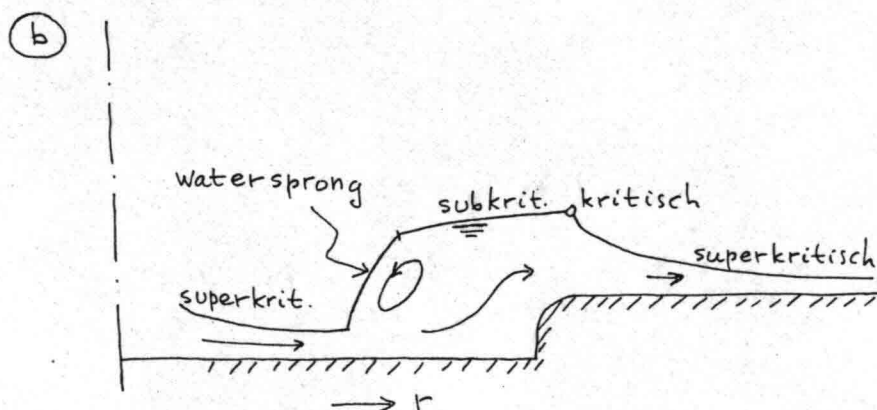


Fig. 3.1.2.

Probleem 2 - Maximale menging in een tweelagensysteem met
permanente radiale stroming

We beschouwen het geval dat (fig. 3.1.3)

$$\rho_0 < \rho_2$$

Hier werkt de zwaardere onderlaag als 'drempel'. Het aanstromende water (q_0, ρ_0) stroomt niet langs de bodem, maar over de zwaardere onderlaag af. Vergelijk fig. 3.1.2b. Het verschil met probleem 1

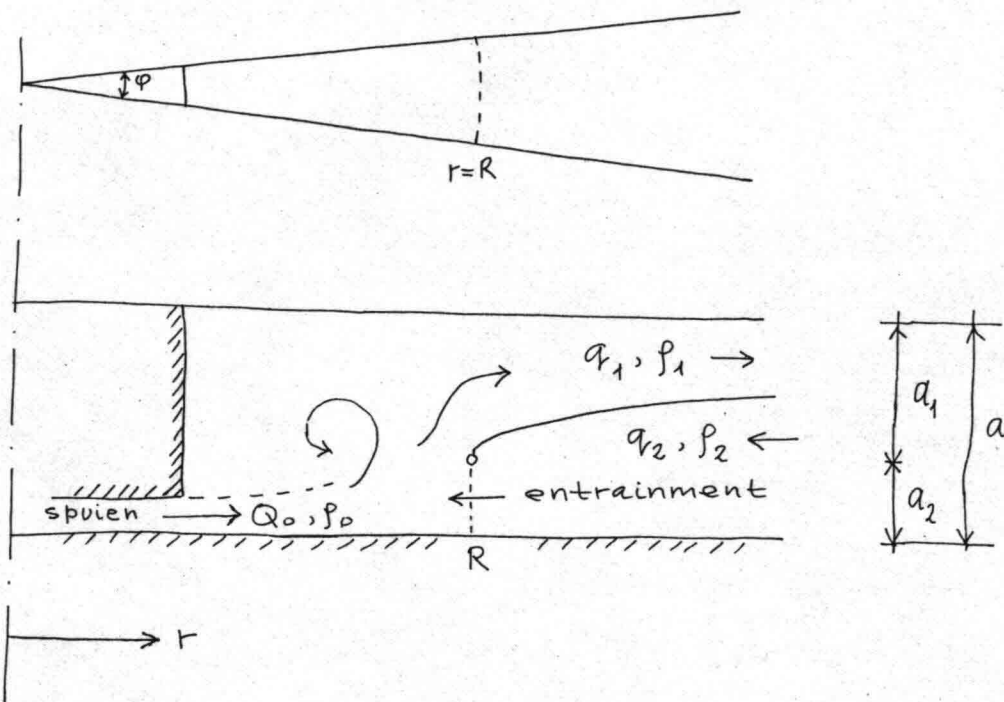


Fig. 3.1.3.

is, dat door de turbulentie van de spuistroom water uit de onderlaag wordt meegesleurd en gemengd met het gespuide water ($\rho_0 < \rho_1 < \rho_2$). We nemen eens aan dat de straal voldoende turbulent is om een maximaal mengdebiet q_2 mee te sleuren. De stroming in de doorsnede $r=R$ zal dan kritisch moeten zijn.

Eén interne golfsnelheid is dan gelijk aan nul, de andere is negatief.
De voorwaarde voor kritische stroming is in dit geval (13)

$$\frac{q_1^2}{\varepsilon g a_1^3} + \frac{q_2^2}{\varepsilon g a_2^3} = 1 \quad \left(\varepsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right) \quad (3.1.3)$$

Behoud van volume (geldt mits $\varepsilon \ll 1$) geeft

$$q_1 + q_2 = \frac{Q_0}{\varphi R} = q_0 \quad (3.1.4)$$

met $q_i = a_i v_i$. We beschouwen alleen interne verschijnselen,
dus

$$a_1 + a_2 = a \quad (3.1.5)$$

Het behoud van massa: $\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2 = \rho_0 q_0$ geeft
met (3.1.4)

$$\varepsilon = \frac{q_0}{q_1} \varepsilon_0 \quad \text{met} \quad \varepsilon_0 = \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2} \quad (3.1.6)$$

We kunnen nu het geval bekijken, dat de afvoer van gemengd water ongehinderd verloopt, dus de doorsnede $r=R$ a.h.w. een volkomen overlaat is. Door de radiale stroming werkt deze doorsnede als een korte overlaat. Er kunnen nu ook geen verstoringen in negatieve r -richting lopen: beide interne golfsnelheden zijn gelijk aan nul. De stroming is nu dubbelkritisch. Het gelijk aan nul stellen van beide interne voortplantingssnelheden geeft als extra voorwaarde (13)

$$\frac{q_1}{a_1^2} + \frac{q_2}{a_2^2} = 0 \quad (3.1.7)$$

(3.1.3) t/m (3.1.7) vormen vijf vergelijkingen met vijf onbekenden:

$a_1, a_2, q_1, q_2, \varepsilon$ zodat de toestand in de doorsnede $r=R$ nu bepaald is. Wat zich rechts van deze doorsnede ($r > R$) afspeelt, heeft nu geen invloed meer.

Probleem 2 lijkt veel op dat van Rigter (14). Deze beschouwde echter parallelle afstroming over een lange overlaat (een spuikanaal), waardoor een wat andere oplossing ontstaat (kritische stroming aan beide einden van het spuikanaal).

Het probleem van Rigter gaat over in het hier beschouwde, als de lengte van het spuikanaal gelijk aan nul gesteld wordt.

Oplossingen van (3.1.3) t/m (3.1.7)

$$\frac{a_2}{a} = \frac{1}{2}(1-F), \quad \frac{v_2}{\sqrt{\varepsilon g a}} = -\frac{1}{2}(1-F)$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{1}{2}(1+F), \quad \frac{v_1}{\sqrt{\varepsilon g a}} = \frac{1}{2}(1+F) \quad (3.1.8)$$

waarin $F = \frac{q_0}{\sqrt{\varepsilon g a^3}}$, ε volgt uit:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} + 2F_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + F_0^2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} - 4F_0 = 0 \quad (3.1.9)$$

met

$$F_0 = \frac{q_0}{\sqrt{\varepsilon_0 g a^3}}$$

Er is alleen een zinvolle oplossing als $F < 1$. Dan moet ook gelden $F_0 < 1$. Rigter vond redelijk tot goede overeenstemming met experimentele resultaten.

De aanpak van het koppelingsprobleem tussen near field en far field van een bellenzuil vertoont overeenkomsten met die van probleem 2. De situatie is echter gecompliceerder, doordat het far field hier uit drie lagen bestaat. Ook zal de bellenzuil in praktisch voorkomende gevallen niet een zodanig sterke menging tengevolge hebben, dat op de overgang met dubbelkritische stroming gerekend kan worden (zie hiervoor het laatste gedeelte van par. 3.4). Het lijkt zelfs aanbevelenswaardig dubbelkritische stroming niet op te laten treden, in verband met mogelijke instabiliteit van de stroming in het far field (zie ook par. 3.2, geval 2). Voor het far field maken we gebruik van het dubbel-tweelagenmodel. We nemen dus aan dat de bellenzuil de tussenlaag vormt ter hoogte van de oorspronkelijke thermokline. We zullen zien dat de overgang tussen near field en far field weer opgevat mag worden als een overlaat (kort in verband met de radiale stroming). Kritische stroming zal blijken mogelijk te zijn in twee gevallen (zie Appendix):

- het mengdebiet q_2 is maximaal. Dit is het geval als er na het aanzetten van de bellenzuil nog geen invloed van de oevers merkbaar is. Bij recirculatie in het far field (3) kan een situatie optreden waarbij de oevers blijvend geen invloed hebben.
- het epilimniondebiet $-q_1$ is maximaal. Dit kan het geval zijn in een latere fase van het mengproces, als de dikte van het epilimnion beneden een zekere waarde komt.

In deze gedachtengang is het hypolimniondebiet q_3 gekoppeld aan het debiet dat door de bellenzuil in het near field wordt aangezogen (fig. 3.1.4, gebaseerd op modelexperimenten). In het hierboven genoemde geval van extreme q_1 (en in het geval van dubbelkritische stroming) is het debiet in het near field groter dan nodig is om de toestand van kritische stroming op de overgang in stand te houden. Er treedt dan in het near field een versterkte recirculatie op.

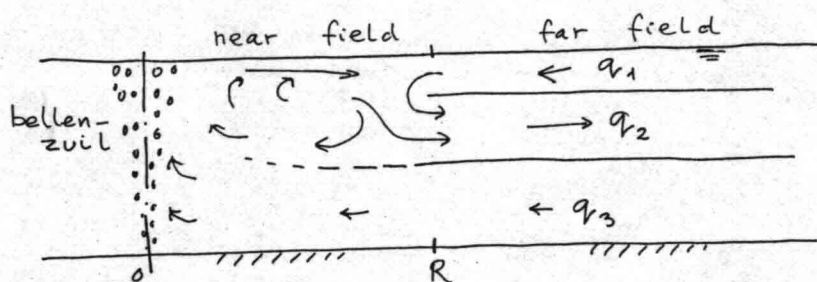


Fig. 3.1.4.

We beschouwen in het resterende deel van deze paragraaf:

- permanente stroming in het dubbel-tweelagensysteem om te laten zien dat de overgang opgevat mag worden als een "interne" korte overlaat
- de voorwaarden voor het optreden van de twee vormen van kritische stroming
- een aanname voor het door de bellenzuil aangezogen debiet
- de bepaling van de straal R van de overgangsdorsnede
- de voorwaarde voor het optreden van dubbelkritische stroming.

Voor de bepaling van het door de bellenzuil aangezogen debiet nemen we in eerste instantie aan dat het near field zich gedraagt als het overeenkomstige deel ervan in de isotherme situatie. De gegevens zijn ontleend aan publicaties van het Laboratorium voor Fysische Technologie van de Technische Hogeschool Delft (2). De resultaten van par. 3 worden in par. 4 gebruikt voor het opzetten van een gekoppeld model voor de menging van een gelaagd bekken door een bellenzuil.

Voor de overzichtelijkheid vatten we de nu bekende relaties samen, die gelden op de overgang (superscript $\mathcal{R}$), zie par. 2.4,

$$\varepsilon_1 = \frac{a_h}{a} \varepsilon \quad \varepsilon_3 = \frac{a_e}{a} \varepsilon \quad (3.1.10)$$

$$a_1^{\mathcal{R}} = \frac{a_e}{a} (a - a_2^{\mathcal{R}}) \quad a_3^{\mathcal{R}} = \frac{a_h}{a} (a - a_2^{\mathcal{R}}) \quad (3.1.11)$$

$$V_1^{\mathcal{R}} = V_3^{\mathcal{R}} = - \frac{a_2^{\mathcal{R}}}{a - a_2^{\mathcal{R}}} V_2^{\mathcal{R}}$$

$$q_1^{\mathcal{R}} = - \frac{a_e}{a} q_2^{\mathcal{R}} \quad q_3^{\mathcal{R}} = - \frac{a_h}{a} q_2^{\mathcal{R}} \quad (3.1.12)$$

(3.1.10) blijkt met (3.1.12) te voldoen aan de voorwaarde voor het behoud van massa op de overgang:

$$\rho_1 q_1^{\mathcal{R}} + \rho_2 q_2^{\mathcal{R}} + \rho_3 q_3^{\mathcal{R}} = 0 \quad (3.1.13)$$

Er zijn nu nog twee onbekenden: $a_2^{\mathcal{R}}$ en $q_2^{\mathcal{R}}$. Het debiet $q_3^{\mathcal{R}}$ koppelen we aan het door de bellenzuil aangezogen debiet, Q_b , dat nog een functie is van de straal $\mathcal{R}$ tengevolge van entrainment samenhangend met de langs het vrije oppervlak afstromende radiale straal. Aanzuiging vindt plaats over het deel van de verticaal dat onder deze afstromende straal ligt. De hoogte, a_b , van het gebied met toestroming hangt daardoor af van de straal $\mathcal{R}$:

$$a_b = a \gamma\left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right), \quad \gamma < 1 \quad (3.1.14)$$

Volgens Goossens en Van Pagee (2) kan de grootheid γ bepaald worden uit

$$k \frac{\mathcal{R}}{a} \tanh\left(\frac{1}{k \frac{\mathcal{R}}{a}}\right) \cosh^2\left(\frac{1-\gamma}{k \frac{\mathcal{R}}{a}}\right) = 1 \quad (3.1.15)$$

waarin k een constante is, $k \approx 0,07$ à $0,08$. In de isotherme situatie blijkt de toestroomsnelheid nauwelijks over de hoogte te variëren. Experimenteel blijkt dat dit in de gelaagde situatie wel het geval is: de toestroomsnelheid nabij de bodem is lager dan die ter hoogte van de tussenlaag in het far field. Toch gaan we hier voor de eenvoud uit van een uniforme toestroomsnelheid.

In par. 4 zullen we hiervoor een correctie uitvoeren. We vinden zo voor het hypolimniondebiet

$$Q_3^R = 2\pi R q_3^R = - \frac{a_3^R}{a_b} Q_b \quad (3.1.16)$$

Q_b wordt gegeven door

$$Q_b = 2\pi R m \left[\tanh\left(\frac{1-\delta}{k \frac{R}{a}}\right) - (1-\delta) \tanh\left(\frac{1}{k \frac{R}{a}}\right) \right] \quad (3.1.17)$$

waarin m een aan het toegevoerde luchtdebiet, Q_a , gekoppelde grootte is,

$$m = \alpha \sqrt{k} a \left(\frac{g Q_a}{a} \right)^{1/3} \quad (3.1.18)$$

waarin α een coëfficiënt is, $\alpha \approx 0,21$ in de isotherme situatie. Met bovenstaande vergelijkingen is het mengdebiet q_2^R op te vatten als een functie van de tussenlaagdikte a_2^R . Er is nu dus nog maar één onbekende. Is de stroming in het far field subkritisch, dan moet deze onbekende bepaald worden door het far field in de beschouwing te betrekken. Als de stroming op de overgang kritisch is (zie par. 3.3), geldt

$$(v_2^R)^2 = \frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g a \frac{\frac{a_2^R}{a} \left(1 - \frac{a_2^R}{a}\right)^3}{\left(1 - \frac{a_2^R}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_2^R}{a}\right)^3} \quad (3.1.19)$$

Is de stroming op de overgang kritisch en in het far field superkritisch (volkomen overlaat), dan is met (3.1.19) de toestand op de overgang bepaald. Is de stroming in het far field subkritisch (invloed begrenzingen) en op de rand kritisch ($-q_1^R$ maximaal), dan zal blijken dat (3.1.16) moet komen te vervallen. Dit is ook zo als dubbelkritische stroming zou optreden. (de stroming in het far field is dan superkritisch). Dan geldt

$$\frac{a_2^R}{a} = \frac{1}{2} \quad (3.1.20)$$

$$(v_2^R)^2 = \frac{1}{4} \frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g a \quad (3.1.21)$$

3.2. Permanente stroming in een dubbel-tweelagensysteem

Een beschouwing van permanente stroming verschaft inzicht over de mogelijke interne verhanglijnen en daarmee over de wijze waarop randvoorwaarden (hier: koppelingsvoorwaarden) zinvol opgelegd kunnen worden. Ook in niet-permanente situaties is deze beschouwing van belang. In de beginfase, waarin de tussenlaag zich uitbreidt als een intern front, ontstaat namelijk in een zeker gebied bij de overgang (maar $r > R$) al een permanentie, terwijl dichterbij het front de toestand nog niet-permanent is (dit blijkt uit waarnemingen in een model en numerieke berekeningen met betrekking tot het ontstaan van de tussenlaag). De continuïteits- en bewegingsvergelijkingen zijn hier, zie o.a. (2.4.16)

$$r a_2 v_2 = R q_2^R \quad (3.2.1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{a(a-2a_2)}{(a-a_2)^2} v_2^2 + \frac{ae a_h}{a^2} \varepsilon g a_2 = g H_2 \quad (3.2.2)$$

waarin H_2 het equivalent van de energiehogte voor de interne stroming is. De laagdikte a_2 kan ten hoogste gelijk worden aan de totale diepte a . Dit geeft met (3.1.19) en (3.2.2) als voorwaarde voor H_2 :

$$H_2 \leq \frac{ae a_h}{a^2} \varepsilon a \quad (3.2.3)$$

Voor de vorm van de interne verhanglijnen vinden we de relatie

$$\frac{r}{R} = \frac{q_2^R}{a_2(a-a_2)} \sqrt{\frac{a}{2g} \frac{a-2a_2}{H_2 - \frac{ae a_h}{a^2} \varepsilon a_2}} \quad (3.2.4)$$

De energiehogte H_2 is verschillend voor de verschillende fasen van het mengproces, doordat de bellenzuil arbeid verricht. We moeten drie gevallen onderscheiden wat betreft de grootte van H_2 .

$$1. \quad 0 < \frac{H_2}{a} < \frac{1}{2} \frac{ae a_h}{a^2} \varepsilon$$

De vorm van de verhanglijnen is schetsmatig weergegeven in fig. 3.2.1.

De met een gestreepte lijn aangegeven tak is hier niet van belang.
Tak I (subkritische stroming) gaat via een punt met kritische stroming over in tak II (superkritische stroming, beide voortplantings-snelheden positief).

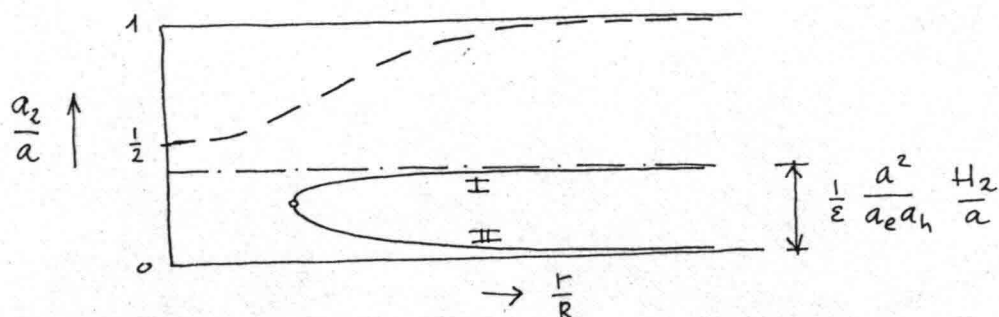


Fig. 3.2.1.

$$2. \quad \frac{H_2}{a} = \frac{1}{2} \frac{ae ah}{a^2} \varepsilon$$

Naast de hier niet van belang zijnde oplossing $a_2 = \frac{1}{2} a$ geven (3.2.4) en (3.2.1) met (3.1.20) en (3.1.21)

$$\frac{a_2}{a} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{R}{r}} \right) \quad (3.2.5)$$

$$\frac{v_2}{\sqrt{\frac{ae ah}{a^2} \varepsilon g a}} = \frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{R}{r}} \right) \quad (3.2.6)$$

Zie fig. 3.2.2. De uitdrukking voor beide voortplantingssnelheden luidt hier, zie (2.3.17),

$$c = \left(1 - 2 \frac{a_2}{a} \right) \sqrt{\frac{ae ah}{a^2} \varepsilon g a} \quad (3.2.7)$$

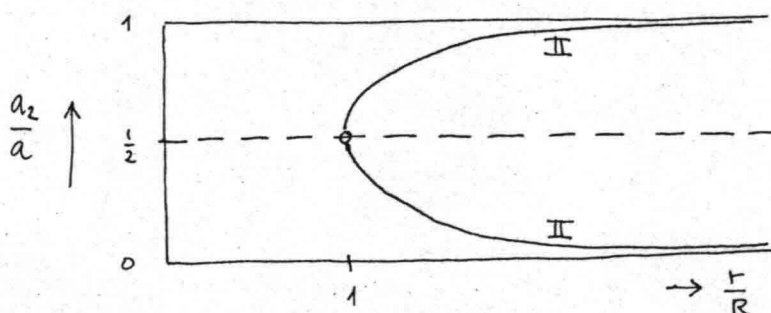


Fig. 3.2.2.

Beide takken zijn nu dus superkritisch, onderste tak: beide voortplantingssnelheden positief, bovenste tak: beide voortplantingssnelheden negatief. De overgang tussen de twee takken is nu een punt van dubbelkritische stroming. Uit (3.2.7) blijkt dat de twee voortplantingssnelheden in dit geval gelijk zijn. Het polynoom $P(c)$ heeft dus twee samenvallende wortels (zie par. 2.3); de stroming voor alle $r > R$ is dus op de grens van instabiliteit. Praktisch betekent dit, dat er niet onaanzienlijke menging tussen de lagen zal optreden en er als gevolg daarvan recirculatie in het far field kan optreden. Vermoedelijk neemt de horizontale reikwijdte van het far field daardoor sterk af, hetgeen een ongewenste situatie is voor menging van het gehele bekken.

$$3. \quad \frac{1}{2} \frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon < \frac{H_2}{a} < \frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon$$

Dit geval is analoog aan geval 1, maar is gespiegeld ten opzichte van de halve diepte (fig. 3.2.3). Voor tak II, superkritische stroming, geldt dat beide voortplantingssnelheden negatief zijn. De overgang tussen de takken is weer een punt van kritische stroming.

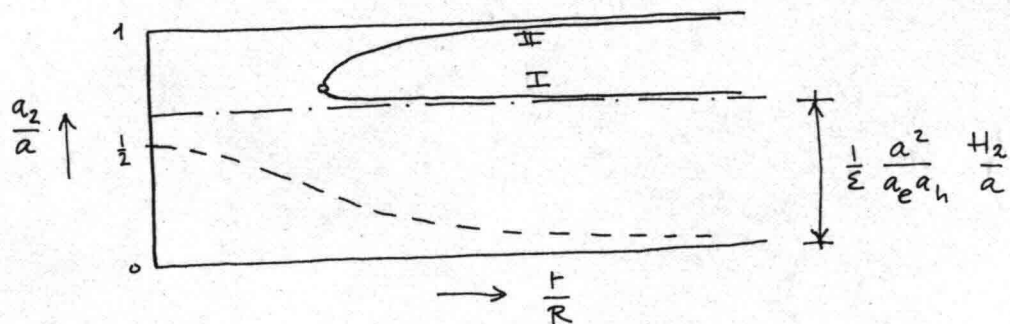


Fig. 3.2.3.

3.3. Overzicht koppelingsvoorwaarden

De resultaten van de vorige paragraaf stellen ons in staat aan te geven welke stromingsvormen (subkritisch, kritisch of dubbelkritisch) tijdens het mengproces op de overgang optreden. We onderscheiden drie fasen.

Fase I

Deze fase sluit aan op het starten van de bellenzuil in het gelaagde bekken. Het afstromen van het mengdebiet q_2^R kan ongehinderd plaatsvinden, omdat nog geen invloed van de begrenzings van het far field merkbaar is bij de overgangsdorsnede.

Zie ook de opmerking in par. 3.1 betrekking hebbend op (3). Mede door de radiale afstroming werkt de overgang, evenals bij de problemen 1 en 2 in par. 3.1, als een korte volkomen overlaat. De stroming op de overgang is kritisch (het mengdebiet q_2^R is maximaal, zie de Appendix), die in het far field superkritisch. Beide golfsnelheden zijn positief, zie ook (2.4.19). We hebben te maken met tak II van fig. 3.2.1 (eventueel een gedeelte ervan in de omgeving van de overgang, zie de opmerking aan het begin van par. 3.2). De debieten volgen uit (3.1.12) en (3.1.16),

$$\begin{aligned} q_1^R &= - \frac{a_e}{a_b} \left(1 - \frac{a_2^R}{a}\right) \frac{Q_b}{2\pi R} \\ q_2^R &= \frac{a}{a_b} \left(1 - \frac{a_2^R}{a}\right) \frac{Q_b}{2\pi R} \\ q_3^R &= - \frac{a_h}{a_b} \left(1 - \frac{a_2^R}{a}\right) \frac{Q_b}{2\pi R} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

De laagdikte a_2^R op de overgang volgt dan uit de voorwaarde voor kritische stroming (3.1.19) en

$$a_2^R v_2^R = q_2^R \quad (3.3.2)$$

Dit geeft met (3.3.1) de relatie

$$\sqrt{\frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g a^3 \frac{\left(\frac{a_2^R}{a}\right)^3 \left(1 - \frac{a_2^R}{a}\right)^3}{\left(\frac{a_2^R}{a}\right)^3 + \left(1 - \frac{a_2^R}{a}\right)^3}} = \frac{a}{a_b} \left(1 - \frac{a_2^R}{a}\right) \frac{Q_b}{2\pi R} \quad (3.3.3)$$

waaruit a_2^R volgt. Deze laagdikte ter plaatse van de overgang is in fase I een constante. Die in het far field neemt toe in de tijd. Er is echter niet altijd een reële oplossing. In fig. 3.3.1a en b zijn linker en rechter lid van (3.3.3) als functie van a_2^R uitgezet.

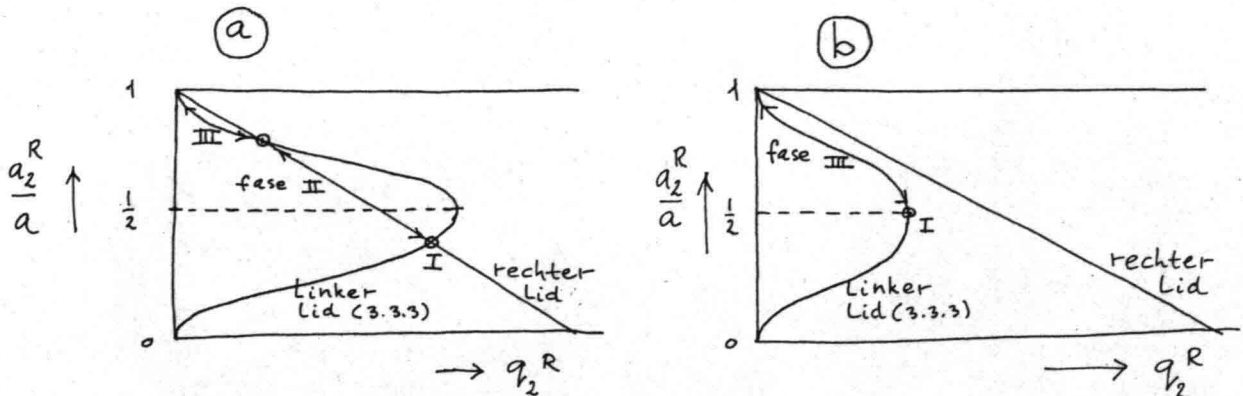


Fig. 3.3.1.

Er zijn twee oplossingen voor a_2^R mits

$$\frac{a}{a_b} \frac{Q_b}{2\pi R} < 0,556 \sqrt{\frac{aeah}{a^2} \varepsilon g a^3} \quad (3.3.4)$$

Er is dan een wortel $a_2^R > 0,616 a$ en een wortel $a_2^R < 0,616 a$. Is er een oplossing met $a_2^R < \frac{1}{2} a$, dan heeft deze betrekking op tak II van fig. 3.2.1. De tweede hierbij behorende oplossing voor a_2^R komt nog ter sprake. Laten we nu in gedachten het debiet toenemen dan wordt de kleinste wortel op zeker moment gelijk aan $\frac{1}{2} a$. De stroming op de overgang is dan dubbelkritisch. Verdere verhoging van Q_b heeft geen invloed meer ter plaatse van de overgang (wel kan nog de straal R en dus het totale mengdebiet $Q_2^R = 2\pi R q_2^R$ veranderen, zie par. 3.4), omdat nu beide golfsnelheden gelijk aan nul zijn. In fase I hebben we dus dubbelkritische stroming op de overgang als (zie (3.1.22) en (3.3.3))

$$\frac{a}{a_b} \frac{Q_b}{2\pi R} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{aeah}{a^2} \varepsilon g a^3} \quad (3.3.5)$$

Fase II

Deze fase komt alleen voor als in fase I de stroming kritisch is (fig. 3.3.1a) en sluit dan direct op deze laatste fase aan. Door het opvullen van de tussenlaag in het far field tengevolge van de eindige bekkenafmetingen is de tussenlaagdikte a_2^R nu te groot geworden om nog kritische stroming mogelijk te maken: de stroming op de overgang is nu subkritisch. De debieten volgen weer uit (3.3.1). De laagdikten moeten volgen uit een far field berekening, in principe met de bewegingsvergelijking (2.4.16) en de continuïteitsvergelijking

$$r \frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} r a_2 v_2 = 0 \quad (3.3.6)$$

waarbij de vergelijkingen (3.3.1) als randvoorwaarden fungeren. In par. 4 wordt deze berekening vereenvoudigd tot een bergingsbenadering.

Fase III

Deze fase breekt aan als a_2^R groter wordt dan de tweede oplossing van (3.3.3) (fig. 3.3.1a) of, in het geval dat (3.3.5) geldt, als $a_2^R > \frac{1}{2} a$ (fig. 3.3.1b). De stroming op de overgang is weer kritisch, maar nu omdat een maximaal epilimniondebiet $-q_1^R$ wordt aangezogen. Blijkens (2.4.19) is nu de voortplantingssnelheid die ongelijk aan nul is, dan ook negatief. De stroming in het far field blijft subkritisch (tak I in fig. 3.2.3). Tijdens het verder opvullen van de tussenlaag (a_2 neemt toe), komt het punt met kritische stroming in fig. 3.2.3 steeds hoger te liggen, evenals in fase II neemt in fase III a_2^R dus toe,, zie fig. 3.3.1a en b. Het mengdebiet q_2^R is nu kleiner dan uit (3.3.1) zou volgen. Dit betekent dat in deze fase een toenemende recirculatie in het near field zal optreden. Evenals in fase II is koppeling aan de far field oplossing noodzakelijk om tot een volledige oplossing te komen. Aan het einde van fase III ($a_2^R \rightarrow a$) is het bekken isotherm geworden (aangenomen dat het far field het gehele bekken bestrijkt).

3.4. Afstand overgangsdorsnede - bellenzuil

Voor het bepalen van de afstand tussen overgangsdorsnede en bellenzuil (de straal R) passen we de integrale impulsiebalans, massabalans en volumebalans toe op een volume element dat de dorsnede $r=R$ bevat (15, 16).

We volgen weer de aanpak van Benjamin (11) en Wilkinson en Wood (12). Voor de snelheidsverdeling in het near field gaan we uit van de isotherme situatie (2). Voor de stroming in het far field maken we gebruik van de resultaten van par. 3.3. We veronderstellen een quasi-permanente toestand. Door de dikte van het volume element in radiale richting klein te veronderstellen, kan het effect van het feit dat de stroming radiaal is, verwaarloosd worden. We krijgen nu de vergelijkingen (fig. 3.4.1, de superscript R is weggelaten)

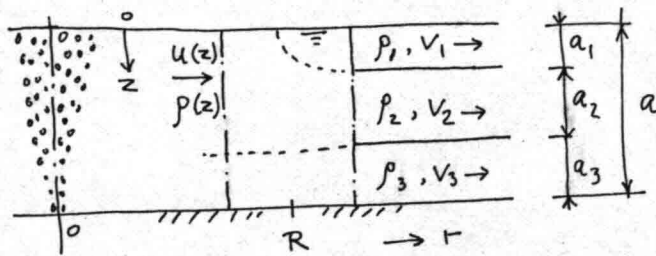


Fig. 3.4.1.

massabalans

$$\int_0^a dz \, u(z) \rho(z) + \rho_1 v_1 a_1 + \rho_2 v_2 a_2 + \rho_3 v_3 a_3 = 0$$

of met (3.1.13),

$$\int_0^a dz \, u(z) \rho(z) = 0 \quad (3.4.1)$$

volumebalans

$$\int_0^a dz \, u(z) + v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 = 0$$

of, met (3.1.12),

$$\int_0^a dz \, u(z) = 0 \quad (3.4.2)$$

impulsiebalans

$$\begin{aligned}
 g \int_0^a dz \int_0^z dz_1 \rho(z_1) + \int_0^a dz u^2(z) \rho(z) &= \Delta p a + \\
 + \frac{1}{2} \rho_1 g a^2 + \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g (a_2 + a_3)^2 + \frac{1}{2} (\rho_3 - \rho_2) g a_3^2 + \\
 + \rho_1 v_1^2 a_1 + \rho_2 v_2^2 a_2 + \rho_3 v_3^2 a_3
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Hierin is Δp een niet-verwaarloosbaar drukverschil tussen near field en far field, ontstaan door de veronderstelling dat verstoringen in het vrije oppervlak verwaarloosbaar mogen worden. Dit drukverschil kan met de vergelijking van Bernoulli, toegepast langs het vrije oppervlak, bepaald worden:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho(0) u(0)^2 - \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 \tag{3.4.4}$$

In de snelheidstermen zijn de dichtheidsverschillen verwaarloosbaar. Dit geeft, met gebruikmaking van de resultaten van par. 3.1,

$$\begin{aligned}
 g \int_0^a dz \int_0^z dz_1 \rho(z_1) + \rho_2 \left[\int_0^a dz u^2(z) - \frac{1}{2} a u(0)^2 \right] = \\
 \frac{1}{2} \rho_1 g a^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \rho_2 g (a_1^2 + \frac{a \varepsilon a_1}{a^2} a_2^2) + \\
 + \rho v_2^2 a_2 a \frac{2a - 3a_2}{2(a - a_2)^2}
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Uit (2) valt af te leiden dat de term $\int_0^a dz u^2(z)$ te verwaarlozen is ten opzichte van de term $\frac{1}{2} a u(0)^2$, mits de straal R niet te groot wordt, b.v. $R < 3a$. In par. 4 zal blijken dat hieraan meestal voldaan wordt. Voor de dichtheidsverdeling in het near field wijken we af van de aanname dat het near field isotherm is. Over de hoogte van het hypolimnion nemen we aan: $\rho(z) = \rho_3$ omdat het water hier vanuit het far field direct het near field binnenkomt. Daarboven nemen we een gebied aan met:

$\rho(z) = \rho_2$ om te bereiken dat naarmate het mengproces vordert de dichtheid in het near field steeds meer nadert tot de eindwaarde ($\rho(z) = \rho_2$ over de gehele hoogte). Om aan (3.4.1) te voldoen, moeten we bij het vrije oppervlak weer een grotere dichtheid aannemen. Dit verschijnsel is ook in een prototype situatie geconstateerd^{*)} (17) en kan worden verklaard uit het feit dat de bellenzuil voornamelijk hypolimnionwater aanzuigt en dit vervolgens langs het oppervlak doet afstromen.

^{*)} inmiddels ook in het later genoemde fysische model.

Door het omgekeerde dichtheidsverloop is deze situatie **instabiel**. Voor deze grotere dichtheid nemen we weer ρ_3 . Aannemende dat de dikte, a_0 , van deze laag met grotere dichtheid relatief klein is, vinden we voor de dichtheidsverdeling in het near field

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_3 & 0 < z < a_0 \\ \rho_2 = \frac{a_0}{a} \rho_1 + \frac{a_1}{a} \rho_2 & a_0 < z < a - a_3 \\ \rho_3 & a - a_3 < z < a \end{cases} \quad (3.4.6)$$

met

$$a_0 = \frac{Q_b}{2\pi R a_b u(0)} a_3 \quad (3.4.7)$$

Voor $u(0)$ geldt, zie (2),

$$u(0) = \frac{\alpha}{\sqrt{k}} \left(\frac{g Q_a}{a} \right)^{1/3} \frac{a}{R} \quad (3.4.8)$$

Voor de ingevoerde beperking $R < 3a$, geldt

$$Q_b \approx 2\pi R a_b \propto \sqrt{k} \left(\frac{g Q_a}{a} \right)^{1/3} \quad (3.4.9)$$

zodat

$$a_0 = k \frac{R}{a} a_3 \quad (3.4.10)$$

Voor verdere uitwerking moeten we onderscheid maken tussen gevallen met kritische of dubbelkritische stroming op de overgang enerzijds en gevallen met subkritische stroming (fase II) anderzijds.

In het eerste geval geldt (3.1.19) en is v_2 onafhankelijk van R , zie ook fig. 3.3.1a en b. Met (3.4.6), (3.4.8), (3.4.10) en een aantal kleine verwaarlozingen wordt (3.4.5) nu

$$\varepsilon g a \frac{a_e a_h}{a^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{a_2}{a}\right) \left[1 + \frac{a_h}{a} + \frac{a_e}{a} \frac{a_2}{a} + 2k \frac{R}{a} + \right. \\ \left. + \frac{3 \frac{a_2}{a} - 2}{\left(1 - \frac{a_2}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_2}{a}\right)^3} \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 \right] = \frac{\alpha^2}{k} \left(\frac{g Q a}{a}\right)^{2/3} \quad (3.4.11)$$

waarmee een verband tussen de straal R en de tussenlaagdikte a_2 gevonden is. In het geval van subkritische stroming geldt, zie (3.3.1),

$$V_2 = \frac{a}{a_b} \left(1 - \frac{a_2}{a}\right) \frac{Q_b}{2\pi R a_2} \quad (3.4.12)$$

Met (3.4.9) vinden we

$$V_2 = \alpha \sqrt{k} \left(\frac{a}{a_2} - 1\right) \left(\frac{g Q a}{a}\right)^{1/3} \quad (3.4.13)$$

(3.4.5) geeft hiermee en met (3.4.6), (3.4.8) en (3.4.10) voor de straal R

$$\left(\frac{R}{a}\right)^2 \left[\varepsilon g a \frac{a_e a_h}{a^2} \left(1 - \frac{a_2}{a}\right) \left(1 + \frac{a_h}{a} + \frac{a_e}{a} \frac{a_2}{a} + 2k \frac{R}{a}\right) + \right. \\ \left. + \left(3 - 2 \frac{a}{a_2}\right) \alpha^2 k \left(\frac{g Q a}{a}\right)^{2/3} \right] = \frac{\alpha^2}{k} \left(\frac{g Q a}{a}\right)^{2/3} \quad (3.4.14)$$

We gaan nu na in welke gevallen in fase I dubbelkritische stroming op kan treden. Hiertoe substitueren we (3.1.17) en (3.1.18) in (3.3.5). Dit geeft als voorwaarde voor dubbelkritische stroming

$$\frac{\left(\frac{g Q a}{a}\right)^{1/3}}{\sqrt{\frac{a_e a_h}{a^2} \varepsilon g a}} \geq \frac{1}{2\alpha \sqrt{k}} \frac{\gamma}{\tanh\left(\frac{1-\gamma}{k \frac{R}{a}}\right) - (1-\gamma) \tanh\left(\frac{1}{k \frac{R}{a}}\right)} \approx 16 \quad (3.4.15)$$

De numerieke waarde geldt voor $\alpha = 0,21$ en $k = 0,07$. Aan (3.4.15) zal in parktisch voorkomende gevallen meestal **niet** voldaan worden (gevallen met zeer dun epi- of hypolimnion uitgezonderd).

Voorbeeld: voor

$$\frac{ae}{a} = 0,1 \quad \varepsilon = 7 \cdot 10^{-4} \quad a = 15 \text{ m} \quad \text{en}$$

$$Q_a = 0,2 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{maximaal luchtdebiet Brabantse Biesbosch bekkens})$$

vinden we voor de parameter in het linker lid van (3.4.15) de waarde 5,3. Zoals opgemerkt in par. 3.2 is het vermoedelijk raadzaam een toestand met dubbelkritische stroming te vermijden.

4. Eenvoudig gekoppeld model voor de menging van een gelaagd bekken

4.1. Bergingsbenadering

Na het aanzetten van de bellenzuil breidt de tussenlaag zich uit in de vorm van een intern front. Golfreflectie treedt op na aankomst van het front bij de begrenzingen (oevers). Na een zekere tijd zal het golfverschijnsel door wrijving tussen de lagen uitdempen. Mede omdat de mengtijd in het algemeen groot zal zijn ten opzichte van de looptijd van interne lange golven, kunnen we uitgaan van een bergingsverschijnsel in het far field. De hellingen van de lagen verwaarlozen we hier. Zie echter ook par. 5. Het krachtenevenwicht blijft zo buiten beschouwing, alleen het behoud van volume en massa speelt een rol. We verwaarlozen hier ook de uitwisseling van massa tussen de lagen ten opzichte van de menging in het near field. We hebben dan alleen te maken met het behoud van volume,

$$(A_i - \pi R^2) \frac{da_i}{dt} = 2\pi R q_i^R \quad (4.1)$$

waarin A_i de oppervlakte van het far field (i^{de} laag) is. In het algemeen is A_i groot ten opzichte van πR^2 . Er wordt uitgegaan van het dubbel-tweelagenmodel. De debieten zijn dan bekend uit par. 3.1 en 3.3, de straal R uit par. 3.4. Met (4.1) kunnen dan de laagdikten als functie van de tijd berekend worden.

In fase I is $a_2 < a_2^R$, a_2^R is constant en is de kleinste wortel van (3.3.3); zodra $a_2 = a_2^R$ treedt fase II in werking, gevolgd door fase III zodra a_2^R groter wordt dan de grootste wortel van (3.3.3), zie ook fig. 3.3.1. In de fasen II en III geldt $a_2 = a_2^R$. In fase I neemt a_2 linear in de tijd toe (het golfverschijnsel is uitgeschakeld); daarna verloopt de groei langzamer, om tot stilstand te komen als a_2 nadert tot a .

Met behulp van het hierboven beschreven bergingsmodel zijn een aantal berekeningen uitgevoerd voor het in het Laboratorium voor Vloeistofmechanica gebouwde fysische model (ronde bak, straal 2,5 m, diepte tot 0,30 m, luchtinjectie ($20 - 56 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$) in het middelpunt). Voorlopige metingen hebben aangetoond, dat het rekenmodel de waargenomen verschijnselen kwalitatief goed weergeeft. Om kwantitatieve overeenkomst te verkrijgen moet de waarde van de coëfficiënt α , zie (3.1.17) en (3.1.18), verlaagd worden van de in (2) gegeven waarde 0,21 tot (voorlopig) ongeveer 0,16. Deze lagere waarde wordt vermoedelijk veroorzaakt door het feit dat in de gelaagde situatie de stroomsnelheid nabij de bodem in het near field lager is dan die ter hoogte van de tussenlaag, zie de opmerking bij (3.1.16). De numerieke waarde in (3.4.15) wordt hierdoor nog groter.

Over de experimenten zal later uitvoeriger gerapporteerd worden.

Punten waarop overeenstemming tussen meting en theorie gevonden is, zijn (zie fig. 4.1)

- De geringe invloed van de oorspronkelijke ligging van de thermokline op de mengsnelheid
 - De grootte van de tussenlaagdikte in Fase I
 - De straal R . Deze neemt, afhankelijk van het beschouwde geval, toe van 1 à 1,5 maal de diepte in fase I tot ca. 3 maal de diepte bij $a_2 = 0,9 a$ (90% destratificatie)
 - Het verloop van de mengsnelheid: constant in fase I, daarna geleidelijk afnemend
 - De afhankelijkheid van de mengsnelheid van het toegevoegde luchtdebiet.
- Het dubbel-tweelagenmodel blijkt te voldoen, hoewel er afwijkingen zijn. Zo heeft de dichtheid van de tussenlaag niet onmiddellijk de waarde volgens (2.4.13), maar benadert deze meer geleidelijk.

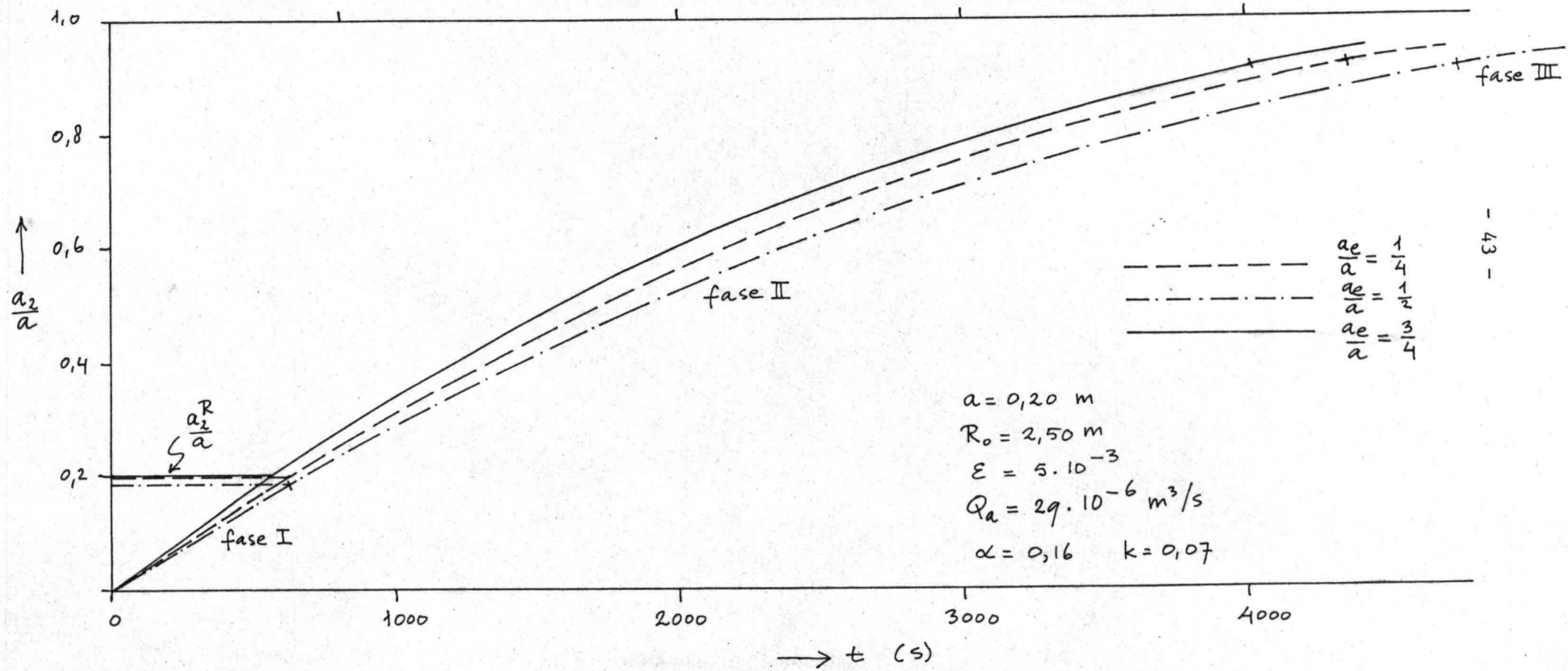


Fig. 4.1. Berekende verlopen van de tussenlaagdicken als functie van de tijd (model Laboratorium voor Vloeistofmechanica).

Hiermee samen hangt het verschijnsel dat in fase I de snelheid in het hypolimnion lager is dan die in het epilimnion. (2.4.15) **is hiermee** in strijd. Niettemin bestaat de indruk dat het overall karakter goed wordt weergegeven. Uit de berekeningen bleek dat fase III pas op ging treden als de tussenlaagdikte al dicht tot de totale diepte genaderd is ($a_2 > 0,9 a$). In het fysisch model kon fase III dan ook niet worden waargenomen. Vermoedelijk speelt de eindige grensvlakdikte voor het aanzetten van de bellenzuil hierbij een rol. Er bleek in dit stadium recirculatie van mengwater uit de tussenlaag op te treden: de tussenlaag ging zich als "nieuw" epilimnion ($a_e < \frac{1}{2} a$) of nieuw hypolimnion ($a_e > \frac{1}{2} a$) gedragen. In deze toestand werd ook een nieuwe tussenlaag gevormd. Er is geen poging gedaan dit verschijnsel in het rekenmodel op te nemen.

Een berekening is ook uitgevoerd voor de prototypemeting van 1976 in het Biesbosch bekken "Honderd en dertig" (17). De meetresultaten lieten slechts orde van grootte schattingen toe wat betreft de debieten in het far field, de grootte van het far field, de straal R en de laagdikten. De berekeningsresultaten gaven vergelijkbare orden van grootte voor de verschillende grootheden in fase I. De overige fasen konden niet door- gerekend worden, omdat tijdens de meting zoninstraling en uitwisseling tussen de lagen plaatsvond.

4.2. Berekeningsresultaten

Met het rekenmodel zijn een aantal vergelijkende berekeningen uitgevoerd voor twee prototype bekkens, het eerste met een oppervlak van 10^6 m^2 (ongeveer overeenkomend met het Biesbosch bekken Petrusplaat), het tweede met een oppervlak van $3 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ (ongeveer het toekomstige bekken Gijster). Er is uitgegaan van de volgende toestand:

temperatuur hypolimnion 13° C

temperatuur epilimnion 18° C

diepte 15 m

initiale dikte epilimnion 7,50 m

$$(\varepsilon \approx 8 \cdot 10^{-4})$$

$$\alpha = 0,16 \quad k = 0,07$$

De luchtdebieten per injectiepunt en het aantal injectiepunten is gevarieerd. De tabellen 4.2.1 t/m 4.2.4 bevatten achtereenvolgens:

Tabel 4.2.1. Totale luchtdebieten (m^3/s) Petrusplaat

$\begin{matrix} n^*) \\ Qa_3 \\ (\text{m}^3/\text{s}) \end{matrix}$	1	2	3
0,18	0,18	0,36	0,54
0,09	0,09	0,18	0,27
0,06	0,06	0,12	0,18

Tabel 4.2.2. Berekende mengtijden (dagen) Petrusplaat, 50% (90%) destratificatie

$\begin{matrix} n^*) \\ Qa_3 \\ (\text{m}^3/\text{s}) \end{matrix}$	1	2	3
0,18	2,8 (6,8)	1,4 (3,4)	0,9 (2,3)
0,09	4,3 (10,6)	2,2 (5,3)	1,4 (3,5)
0,06	5,6 (13,8)	2,8 (6,9)	1,9 (4,6)

Tabel 4.2.3. Totale luchtdebieten (m^3/s) Gijster

$\begin{matrix} n^*) \\ Qa_3 \\ (\text{m}^3/\text{s}) \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9
0,18	0,54	0,72	0,90	1,08	1,26	1,44	1,62
0,09	0,27	0,36	0,45	0,54	0,63	0,72	0,81
0,06	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54

Tabel 4.2.4. Berekende mengtijden (dagen) Gijster, 50% (90%) destratificatie

$\begin{matrix} n^*) \\ Qa_3 \\ (\text{m}^3/\text{s}) \end{matrix}$	3	4	5	6	7	8	9
0,18	2,8 (6,8)	2,1 (5,1)	1,7 (4,1)	1,4 (3,4)	1,2 (2,9)	1,0 (2,5)	0,9 (2,3)
0,09	4,3 (10,6)	3,2 (8,0)	2,6 (6,4)	2,2 (5,3)	1,9 (4,5)	1,6 (4,0)	1,4 (3,5)
0,06	5,6 (13,8)	4,2 (10,3)	3,4 (8,3)	2,8 (6,9)	2,4 (5,9)	2,1 (5,2)	1,9 (4,6)

$n^*)$ = aantal injectiepunten

- de totale luchtdebieten (in m^3/s) voor het bekken Petrusplaat
- mengtijden Petrusplaat (in dagen) voor 50%, resp. 90% destratificatie ($a_2 = 0,5a$, resp. $0,9a$)
- de totale luchtdebieten (in m^3/s) voor de Gijster
- mengtijden Gijster (in dagen) voor 50%, resp. 90% destratificatie

Het minimale aantal injectiepunten voor de Gijster is gesteld op drie, omdat het bij een lager aantal onzeker is of het gehele bekken bestreken wordt, zie par. 5.

Uit de tabellen kan geconcludeerd worden dat de mengtijd kleiner wordt als de totale hoeveelheid toegevoerde lucht verdeeld wordt over meer injectiepunten. Dit wordt veroorzaakt door het niet-lineaire verband tussen toegevoerd luchtdebiet en mengdebiet (voor de hier weergegeven gevallen geldt bij benadering $Q_2^R :: Q_a^{0,65}$).

5. Benedengrens voor de grootte van het far field als gevolg van de Corioliskracht

De Corioliskracht wekt in een prototype situatie belangrijke tangentiële snelheden op (3, 17). Voor de maximale waarden, die optreden als a_2 nadert tot a , vindt men voor axiaalsymmetrische stroming

$$v_{\varphi 1} = v_{\varphi 3} = \frac{f}{2r} (R_o^2 - r^2) \quad (5.1)$$

$$v_{\varphi 2} = -\frac{1}{2} f r \quad (5.2)$$

waarin $v_{\varphi i}$ de tangentiële snelheid in de i^{de} laag is, f de Coriolisparameter en R_o de straal van het cirkelvormig veronderstelde bekken. Voor de krachten in (2.2.13) vinden we hiermee ($f_i = v_{\varphi i}^2/r + f v_{\varphi i}$)

$$f_1 = f_3 = \frac{1}{4} f^2 r \left[\left(\frac{R_o}{r} \right)^4 - 1 \right] \quad (5.3)$$

$$f_2 = -\frac{1}{4} f^2 r \quad (5.4)$$

(5.3) voldoet aan (2.4.11), een eis voor de geldigheid van het dubbel-tweelagenmodel. Aangetoond kan worden dat de traagheidstermen in (2.2.13) op enige afstand van de bellenzuil (b.v. $r > 2R$) verwaarloosbaar zijn (8). Ook wrijvingstermen zijn in het algemeen van ondergeschikt belang. (2.2.13) wordt dan met (5.3), (5.4) en de resultaten voor het dubbel-tweelagenmodel

$$\frac{ae a_h}{a^2} \varepsilon g \frac{\partial a_2}{\partial r} \approx - \frac{1}{4} f^2 \frac{R_0^4}{r^3} \quad (5.5)$$

Integratie naar r en gebruikmaken van de randvoorwaarde $a_2 \approx a$ op $r = R$ (zie boven) geeft voor het verloop van de tussenlaagdikten tegen het einde van het mengproces

$$a_2 = a - \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{f^2 R_0^4}{8 \frac{ae a_h}{a^2} \varepsilon g} \quad (5.6)$$

De tussenlaagdikte a_2 neemt af met toenemende straal r en is dus kleiner dan a voor $r > R$. De tangentiële snelheden in epi- en hypolimnion zullen daarom kleiner zijn dan (5.1) aangeeft. Het Corioliseffect is in (5.6) dus te sterk aanwezig. De tussenlaagdikte bereikt voor een bepaalde waarde R_f van de straal de waarde nul. We beschouwen nu het geval dat de afstanden van de bellenzuil tot de oevers groter zijn dan R_f . Dan zal R_0 de straal van het invloedsgebied van de bellenzuil zijn, dus dan kunnen we stellen $R_0 = R_f$. (5.6) geeft hiermee voor $a_2 = 0$:

$$\frac{R_f}{R} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 32 \frac{ae a_h}{a^2} \frac{\varepsilon g a}{f^2 R^2}}} \quad (5.7)$$

Dit is om twee redenen een benedengrens voor de grootte van het far field:

- het Corioliseffect is in (5.6) te sterk aanwezig omdat $a_2 < a$ (zie boven)
- (5.7) geeft de grootte van het far field als $a_2^R = a$. In eerdere fasen van de destratificatie zijn de tangentiële snelheden in epi- en hypolimnion lager dan die volgens (5.1). Het far field zal dan groter zijn dan (5.7) aangeeft.

Voor het prototypegeval waarop par. 4.2 betrekking heeft, dus

$$a = 15 \text{ m}$$

$$a_e = 7,5 \text{ m}$$

$$\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$$

en

$$R \approx 45 \text{ m (ongeveer de berekende waarde bij 90% destratificatie)}$$

geeft (5.7) met $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$: $R_f = 470 \text{ m}$.

Deze waarde is van dezelfde orde van grootte als die geschat uit een prototype meting (3). In (3) werd de eindige grootte van het far field echter toegeschreven aan de uitwisseling van massa tussen de lagen. Het is op dit moment niet duidelijk welk van de twee mechanismen in dit geval overheersend is geweest.

Het eindig zijn van het far field houdt beperkingen in voor de maximale onderlinge afstand tussen twee bellenzuilen en de afstanden tot de oevers.

6. Conclusies

- De resultaten voor de isotherme situatie (2) zijn, met enkele kleine wijzigingen, bruikbaar voor de stroming in het near field in de gelaagde situatie.
- Het dubbel-tweelagenmodel, gecombineerd met een bergingsbenadering, geeft bruikbare resultaten voor het simuleren van de menging in een fysisch model. Voor fase I is, voor wat betreft orden van grootte, ook overeenstemming met een prototypemeting verkregen.
- Voor het verkrijgen van een grote horizontale invloedssfeer van de bellenzuil is het aan te bevelen het luchtdebiet niet zo groot te kiezen dat op de overgang tussen near field en far field dubbelkritische stroming optreedt.
- De mengtijd van een bekken neemt, bij gelijkblijvend totaal luchtdebiet, af met een toenemend aantal injectiepunten.
- De invloed van de Corioliskracht kan tot een eindige grootte van het far field leiden. Bij het bepalen van het aantal injectiepunten in een bekken moet hiermee rekening gehouden worden.

Appendix - Extreme debieten en kritische stroming

We gaan uit van de vergelijkingen (2.2.8) t/m (2.2.12). Voor horizontale bodem en verwaarloosbare termen in het rechter lid van (2.2.11) en (2.2.12) vinden we, na integratie,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{a_1^2} - \frac{q_2^2}{a_2^2} \right) - \varepsilon_1 g (a_2 + a_3) = g H_1 \quad (A.1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{q_2^2}{a_2^2} - \frac{q_3^2}{a_3^2} \right) - \varepsilon_3 g a_3 = g H_3 \quad (A.2)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a \quad (A.3)$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \quad (A.4)$$

H_1 en H_3 zijn integratieconstanten. We hebben vier vergelijkingen voor de vijf onbekenden: a_1, a_2, a_3, q_1, q_2 (het debiet q_3 beschouwen we, zoals uiteengezet in par. 3.1, als gegeven). We kunnen dus nog een voorwaarde opleggen. We beschouwen hier het geval dat het debiet q_i ($i=1$ of 2) extreem is. (A.1) t/m (A.4) vormen tesamen een relatie van de vorm

$$f(q_i, a_2) = 0 \quad (A.5)$$

Differentiatie van (A.5) naar a_2 geeft

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{da_2} = 0 \quad (\text{geen sommatie})$$

Als q_i extreem is, is $dq_i/da_2 = 0$ en vinden we

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = 0 \quad (A.6)$$

(A.6) is onafhankelijk van de index i . Differentiatie van (A.1) t/m (A.3) naar a_2 - (A.4) blijft buiten beschouwing omdat deze vergelijking onafhankelijk van a_2 is - geeft met met (A.6)

$$\begin{aligned}
 - \frac{q_1^2}{a_1^3} \frac{\partial a_1}{\partial a_2} + \frac{q_2^2}{a_2^3} - \varepsilon_1 g \left(1 + \frac{\partial a_3}{\partial a_2} \right) &= 0 \\
 - \frac{q_2^2}{a_2^3} + \frac{q_3^2}{a_3^3} \frac{\partial a_3}{\partial a_2} - \varepsilon_3 g \frac{\partial a_3}{\partial a_2} &= 0
 \end{aligned}$$

Elimineren van $\partial a_1 / \partial a_2$ en $\partial a_3 / \partial a_2$ geeft

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} F_1 - F_2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} F_3 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon^2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Dit is juist de voorwaarde voor kritische stroming, zie (2.3.6) en (2.3.7). Als een van de debieten extreem is, is de stroming dus kritisch en omgekeerd.

In tegenstelling tot wat het geval is bij een tweelagensysteem, komt de toestand van dubbelkritische stroming ^{i.h.a.} niet overeen met het extreem zijn van meerdere debieten. Een uitzondering vormt het dubbel-tweelagenmodel.

Literatuur

1. L.H.J. Goossens en J.M. Smith, The hydrodynamics of unconstrained bubble columns for mixing lakes and reservoirs, *Chemie Ingenieur Technik*, 47, 1975, p. 951.
2. L.H.J. Goossens en J.A. van Pagee, Modelling of the near field due to air injection in big reservoirs, 17^{de} Congres IAHR, 1977 (nog te verschijnen).
3. C. Kranenburg, Destratification of lakes and reservoirs using bubble columns - a preliminary analysis of the far field, 17^{de} Congres IAHR, 1977 (nog te verschijnen).
4. J.B. Schijf en J.C. Schönfeld, Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water, *Proc. Minnesota Int. Hydr. Conv.*, 1953.
5. C.B. Vreugdenhil, Computation of gravity currents in estuaries, proefschrift Technische Hogeschool Delft, 1970.
6. M.B. Abbott, An introduction to the method of characteristics, 1966.
7. S.A. Thorpe, Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids, *J. Fluid Mech.*, 46, 1971, p. 299.
8. C. Kranenburg, Destratification of lakes and reservoirs using bubble columns, rapport nr. 77-1, Lab. voor Vloeistofmechanica, Afd. der Civiele Techniek, Technische Hogeschool Delft (nog te verschijnen).
9. S.A. Thorpe, Turbulence in stably stratified fluids: a review of laboratory experiments, *Boundary-Layer Meteorology*, 5, 1973, p. 95.
10. P.C. Manins, Intrusion into a stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, 74, 1976, p. 547.
11. T.B. Benjamin, Gravity currents and related phenomena, *J. Fluid Mech.*, 31, 1968, p. 209.

12. D.L. Wilkinson en I.R. Wood, Some observations on the motion of the head of a density current, J.Hydr. Res., 10, 1972, p. 305.
13. G.S. Benton, The occurrence of critical flow and hydraulic jumps in a multi-layered fluid system, J. Meteorology, 11, 1954, p. 139.
14. B.P. Rigter, Density induced return currents in outlet channels, J. Hydr. Div., Proc. ASCE, 96, 1970, p. 529.
15. C. Kranenburg, Voorlopig model voor het ontstaan van een menglaag, interne notitie, 1976.
16. J.A. van Pagee, Afstromende laag van een bellenzuil onder isotherme en gestratificeerde omstandigheden, afstudeerverslag, Lab. voor Fysische Technologie, Afd. Technische Natuurkunde, Technische Hogeschool Delft, 1977.
17. H. Römgers, Snelheids- en temperatuurmetingen in het Biesbosch-bekken Honderd en dertig, Juni 1976, rapport nr. R 1976 10D, vakgroep Vloeistofmechanica, Afd. Civiele Techniek, Technische Hogeschool Delft.

