

Het belang van \leq Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Lunteren, 14 Augustus, 2007

Overzicht

- 1 Vragen
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Gemiddelden
 - Twee rijen
- 2 Antwoorden
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Blokken
 - Een bewijs
 - Driehoeken
 - Gemiddelden
 - Rijen

Overzicht

- 1 Vragen
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Gemiddelden
 - Twee rijen
- 2 Antwoorden
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Blokken
 - Een bewijs
 - Driehoeken
 - Gemiddelden
 - Rijen

Maximaliseren/minimaliseren

- Welke van alle rechthoeken met omtrek 100 heeft de grootste oppervlakte en waarom?

Maximaliseren/minimaliseren

- Welke van alle rechthoeken met omtrek 100 heeft de grootste oppervlakte en waarom?
- Welke van alle rechthoeken met oppervlakte 100 heeft de kleinste omtrek en waarom?

Maximaliseren/minimaliseren

- Welke van alle rechthoekige blokken met oppervlakte 216 heeft het grootste volume en waarom?

Maximaliseren/minimaliseren

- Welke van alle rechthoekige blokken met oppervlakte 216 heeft het grootste volume en waarom?
- Welke van alle rechthoekige blokken met volume 216 heeft de kleinste oppervlakte en waarom?

Maximaliseren/minimaliseren

- Welke van alle rechthoekige blokken met oppervlakte 216 heeft het grootste volume en waarom?
- Welke van alle rechthoekige blokken met volume 216 heeft de kleinste oppervlakte en waarom?
- Welke van alle driehoeken met omtrek 30 heeft de grootste oppervlakte en waarom?

Overzicht

1 Vragen

- Maximaliseren/minimaliseren
- **Gemiddelden**
- Twee rijen

2 Antwoorden

- Maximaliseren/minimaliseren
- Blokken
- Een bewijs
- Driehoeken
- Gemiddelden
- Rijen

Gemiddelden

- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm in serie geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?

Gemiddelden

- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm in serie geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?
- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm in parallel geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?

Gemiddelden

- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm in serie geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?
- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm in parallel geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?
- Je hebt een rechthoek van 2×3 ; wat is de gemiddelde lengte van de zijden?

Overzicht

1 Vragen

- Maximaliseren/minimaliseren
- Gemiddelden
- Twee rijen

2 Antwoorden

- Maximaliseren/minimaliseren
- Blokken
- Een bewijs
- Driehoeken
- Gemiddelden
- Rijen

Twee rijen

- Wat kun je zeggen over het gedrag van de getallenrij $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$?

Twee rijen

- Wat kun je zeggen over het gedrag van de getallenrij $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$?
- Hoe zit het met $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{24}, \dots, \sqrt[n]{n!}, \dots$?

Overzicht

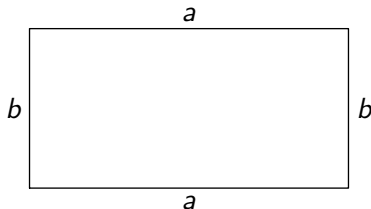
- 1 Vragen
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Gemiddelden
 - Twee rijen
- 2 Antwoorden
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Blokken
 - Een bewijs
 - Driehoeken
 - Gemiddelden
 - Rijen

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek **100** en zijden a en b .

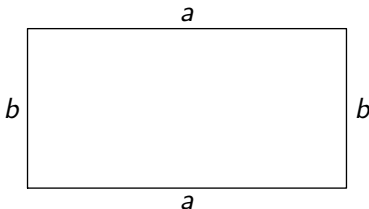
Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek 100 en zijden a en b .



Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

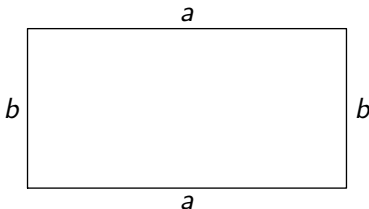
Neem een rechthoek met omtrek 100 en zijden a en b .



Dan geldt $a + b =$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

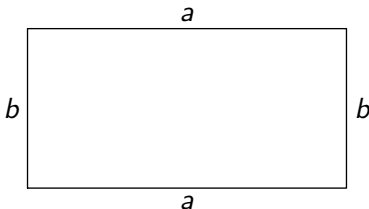
Neem een rechthoek met omtrek 100 en zijden a en b .



Dan geldt $a + b = 50$.

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek 100 en zijden a en b .

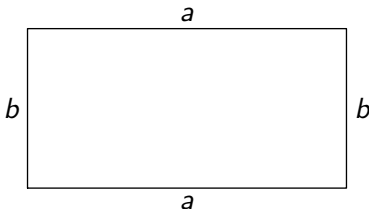


Dan geldt $a + b = 50$.

En $ab =$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek 100 en zijden a en b .

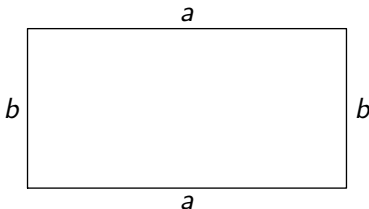


Dan geldt $a + b = 50$.

En $ab = \dots?$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek 100 en zijden a en b .



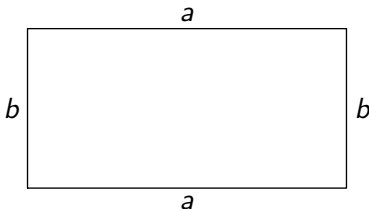
Dan geldt $a + b = 50$.

En $ab = \dots?$

Beter: $ab \leq$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek **100** en zijden a en b .



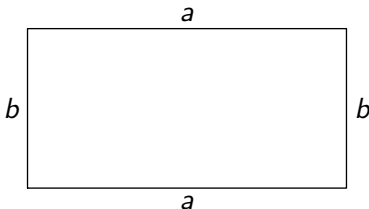
Dan geldt $a + b = 50$.

En $ab = \dots?$

Beter: $ab \leq \dots$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek **100** en zijden a en b .



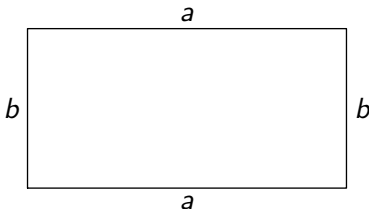
Dan geldt $a + b = \mathbf{50}$.

En $ab = \dots?$

Beter: $ab \leq \mathbf{625}$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek 100 en zijden a en b .



Dan geldt $a + b = 50$.

En $ab = \dots$?

Beter: $ab \leq 625$ want ...

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... midden tussen a en b ligt **25**

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... midden tussen a en b ligt 25



Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... midden tussen a en b ligt 25



Dus: $a = 25 + x$ en $b = 25 - x$ en daarmee ...

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... vinden we ab

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... vinden we $ab = (25 + x)(25 - x)$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... vinden we $ab = (25 + x)(25 - x) = 625 - x^2$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... vinden we $ab = (25 + x)(25 - x) = 625 - x^2 \leq 625$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... vinden we $ab = (25 + x)(25 - x) = 625 - x^2 \leq 625$

Conclusie 1: altijd geldt $ab \leq 625$

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... vinden we $ab = (25 + x)(25 - x) = 625 - x^2 \leq 625$

Conclusie 1: altijd geldt $ab \leq 625$

Conclusie 2: alléén als $a = b = 25$ geldt $ab = 625$

Dus: van alle rechthoeken met omtrek **100** heeft het **vierkant** van 25×25 de maximale oppervlakte.

Omtrek L

Bij omtrek L krijgen we niet 25 maar

Omtrek L

Bij omtrek L krijgen we niet 25 maar $\frac{1}{4}L$.

Omtrek L

Bij omtrek L krijgen we niet 25 maar $\frac{1}{4}L$.
Dus voor de oppervlakte O geldt $O \leq$

Omtrek L

Bij omtrek L krijgen we niet 25 maar $\frac{1}{4}L$.
Dus voor de oppervlakte O geldt $O \leq \frac{1}{16}L^2$.

Omtrek L

Bij omtrek L krijgen we niet 25 maar $\frac{1}{4}L$.
Dus voor de oppervlakte O geldt $O \leq \frac{1}{16}L^2$.
Dit is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor rechthoeken;

Omtrek L

Bij omtrek L krijgen we niet 25 maar $\frac{1}{4}L$.
Dus voor de oppervlakte O geldt $O \leq \frac{1}{16}L^2$.
Dit is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor rechthoeken;
gelijkheid geldt alléén voor vierkanten.

Iso = gelijk en perimeter = omtrek

Vaste oppervlakte $O = 100$

De Isoperimetrische Ongelijkheid, $O \leq \frac{1}{16} L^2$, beantwoordt meteen de tweede vraag.

Vaste oppervlakte $O = 100$

De Isoperimetrische Ongelijkheid, $O \leq \frac{1}{16}L^2$, beantwoordt meteen de tweede vraag.

Immers: $O = 100$, dus $L^2 \geq 1600$, of $L \geq$

Vaste oppervlakte $O = 100$

De Isoperimetrische Ongelijkheid, $O \leq \frac{1}{16}L^2$, beantwoordt meteen de tweede vraag.

Immers: $O = 100$, dus $L^2 \geq 1600$, of $L \geq 40$

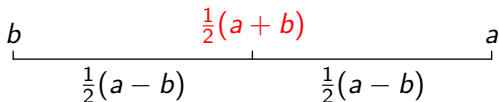
Vaste oppervlakte $O = 100$

De Isoperimetrische Ongelijkheid, $O \leq \frac{1}{16}L^2$, beantwoordt meteen de tweede vraag.

Immers: $O = 100$, dus $L^2 \geq 1600$, of $L \geq 40$
met gelijkheid alléén voor een vierkant van 10×10 .

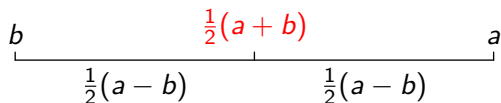
Nog een ongelijkheid

Bekijk dit plaatje nog eens



Nog een ongelijkheid

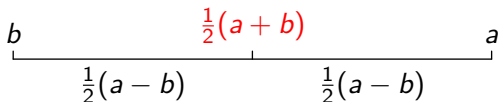
Bekijk dit plaatje nog eens



Denk aan de 25 en de x .

Nog een ongelijkheid

Bekijk dit plaatje nog eens

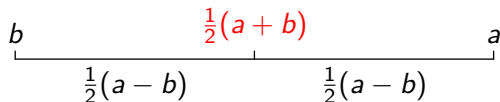


Denk aan de 25 en de x .

$$a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \text{ en } b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$$

Nog een ongelijkheid

Bekijk dit plaatje nog eens



Denk aan de 25 en de x .

$$a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \text{ en } b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$$

en dus ...

Nog een ongelijkheid

... kunnen we ab schrijven als verschil van kwadraten:

Nog een ongelijkheid

... kunnen we ab schrijven als verschil van kwadraten:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Nog een ongelijkheid

... kunnen we ab schrijven als verschil van kwadraten:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

en dus

Nog een ongelijkheid

... kunnen we ab schrijven als verschil van kwadraten:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

en dus

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Nog een ongelijkheid

... kunnen we ab schrijven als verschil van kwadraten:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

en dus

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

en er geldt alléén gelijkheid als $a = b$

Nog een ongelijkheid

We schrijven ook wel

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

met gelijkheid alléén als $a = b$.

Nog een ongelijkheid

We schrijven ook wel

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

met gelijkheid alléén als $a = b$.

De *Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde*

Overzicht

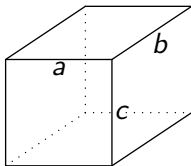
- 1 Vragen
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Gemiddelden
 - Twee rijen
- 2 Antwoorden
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - **Blokken**
 - Een bewijs
 - Driehoeken
 - Gemiddelden
 - Rijen

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Bekijk een blok met zijden a , b en c en oppervlakte 216.

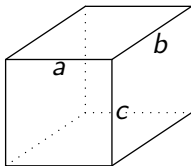
Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Bekijk een blok met zijden a , b en c en oppervlakte 216.



Vaste oppervlakte ($O = 216$)

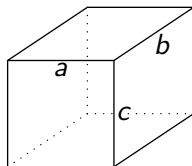
Bekijk een blok met zijden a , b en c en oppervlakte 216.



Oppervlakte: $O = 2(ab + ac + bc)$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Bekijk een blok met zijden a , b en c en oppervlakte 216.

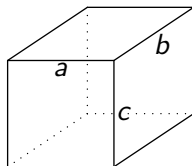


Oppervlakte: $O = 2(ab + ac + bc)$

Volume: $V = abc$.

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Bekijk een blok met zijden a , b en c en oppervlakte 216.



Oppervlakte: $O = 2(ab + ac + bc)$

Volume: $V = abc$.

Is er een relatie tussen V en O ?

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Net als bij twee getallen hebben we voor drie getallen ook een ongelijkheid.

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Net als bij twee getallen hebben we voor drie getallen ook een ongelijkheid.

Voor drie positieve getallen p , q , en r geldt

$$\sqrt[3]{pqr} \leq \frac{p + q + r}{3}$$

met gelijkheid alléén als $p = q = r$.

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Net als bij twee getallen hebben we voor drie getallen ook een ongelijkheid.

Voor drie positieve getallen p , q , en r geldt

$$\sqrt[3]{pqr} \leq \frac{p + q + r}{3}$$

met gelijkheid alléén als $p = q = r$.

Straks: een *bewijs*

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p =$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$,

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q =$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r =$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leq$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{6}O =$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{6}O = 36$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{6}O = 36$$

of

$$V \leq$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{6}O = 36$$

of

$$V \leq \left(\frac{1}{6}O\right)^{\frac{3}{2}} =$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{6}O = 36$$

of

$$V \leq \left(\frac{1}{6}O\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36}^3 =$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{6}O = 36$$

of

$$V \leq \left(\frac{1}{6}O\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36}^3 = 216$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.

Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leq \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{6}O = 36$$

of

$$V \leq \left(\frac{1}{6}O\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36}^3 = 216$$

en ...

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

... het enige blok met oppervlakte $O = 216$ waarvan het volume gelijk is aan 216 is het blok dat voldoet aan

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

... het enige blok met oppervlakte $O = 216$ waarvan het volume gelijk is aan 216 is het blok dat voldoet aan

$$ab = ac = bc$$

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

... het enige blok met oppervlakte $O = 216$ waarvan het volume gelijk is aan 216 is het blok dat voldoet aan

$$ab = ac = bc$$

hieruit volgt heel snel dat

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

... het enige blok met oppervlakte $O = 216$ waarvan het volume gelijk is aan 216 is het blok dat voldoet aan

$$ab = ac = bc$$

hieruit volgt heel snel dat $a = b = c$,

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

... het enige blok met oppervlakte $O = 216$ waarvan het volume gelijk is aan 216 is het blok dat voldoet aan

$$ab = ac = bc$$

hieruit volgt heel snel dat $a = b = c$, dus bij vaste oppervlakte heeft de **kubus** maximaal volume

Vast volume ($V = 216$)

De ongelijkheid geeft (net als bij rechthoeken) meteen een antwoord op de omgekeerde vraag.

Vast volume ($V = 216$)

De ongelijkheid geeft (net als bij rechthoeken) meteen een antwoord op de omgekeerde vraag.

Even opknappen

Vast volume ($V = 216$)

De ongelijkheid geeft (net als bij rechthoeken) meteen een antwoord op de omgekeerde vraag.

Even opknappen

$$V^2 \leq \frac{1}{216} O^3$$

Vast volume ($V = 216$)

De ongelijkheid geeft (net als bij rechthoeken) meteen een antwoord op de omgekeerde vraag.

Even opknappen

$$V^2 \leq \frac{1}{216} O^3$$

Dus: als $V = 216$ dan $216^3 \leq O^3$ met gelijkheid alléén als het een kubus is.

Overzicht

- 1 Vragen
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Gemiddelden
 - Twee rijen
- 2 **Antwoorden**
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Blokken
 - **Een bewijs**
 - Driehoeken
 - Gemiddelden
 - Rijen

Twee getallen

We weten:

Twee getallen

We weten: als $a, b \geq 0$ dan

Twee getallen

We weten: als $a, b \geq 0$ dan

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Twee getallen

We weten: als $a, b \geq 0$ dan

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

met gelijkheid alléén als $a = b$.

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} =$$

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$$

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq$$

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right)$$

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right)$$

en

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right)$$

en

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right) \leq$$

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right)$$

en

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right)$$

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right)$$

en

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) =$$

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right)$$

en

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geq 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right)$$

en

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) = \frac{a+b+c+d}{4}$$

dus ...

Vier getallen

... vinden we

Vier getallen

... vinden we

$$\sqrt[4]{abcd} \leq$$

Vier getallen

... vinden we

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4}$$

met gelijkheid alléén als

Vier getallen

... vinden we

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4}$$

met gelijkheid alléén als $a = b = c = d$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij:

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4}$$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} =$$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4}$$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4} =$$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4} = d$$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4} = d$$

of

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4} = d$$

of

$$abcd \leq d^4$$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4} = d$$

of

$$abcd \leq d^4$$

en dus $abc \leq d^3$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4} = d$$

of

$$abcd \leq d^4$$

en dus $abc \leq d^3$ ofwel $\sqrt[3]{abc} \leq d$

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4} = d$$

of

$$abcd \leq d^4$$

en dus $abc \leq d^3$ ofwel $\sqrt[3]{abc} \leq d$ en hier staat

Drie getallen

Neem $a, b, c \geq 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$

Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{3d + d}{4} = d$$

of

$$abcd \leq d^4$$

en dus $abc \leq d^3$ ofwel $\sqrt[3]{abc} \leq d$ en hier staat

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

met gelijkheid alléén als $a = b = c$

Overzicht

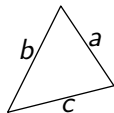
- 1 Vragen
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Gemiddelden
 - Twee rijen
- 2 Antwoorden
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Blokken
 - Een bewijs
 - **Driehoeken**
 - Gemiddelden
 - Rijen

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben een driehoek met zijden a , b en c en omtrek $L = 30$.

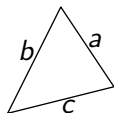
Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben een driehoek met zijden a , b en c en omtrek $L = 30$.



Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben een driehoek met zijden a , b en c en omtrek $L = 30$.

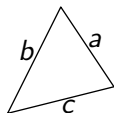


Formule van Heron voor de oppervlakte:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben een driehoek met zijden a , b en c en omtrek $L = 30$.



Formule van Heron voor de oppervlakte:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

met $s = \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{0}$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{0} =$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O}$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leq$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leq \frac{1}{4}(4s - 2s)$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leq \frac{1}{4}(4s - 2s) =$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leq \frac{1}{4}(4s - 2s) = \frac{1}{4}L$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leq \frac{1}{4}(4s - 2s) = \frac{1}{4}L =$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leq \frac{1}{4}(4s - 2s) = \frac{1}{4}L = 7\frac{1}{2}$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leq \frac{1}{4}(4s - 2s) = \frac{1}{4}L = 7\frac{1}{2}$$

met gelijkheid als $s = s - a = s - b = s - c$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{4}(s + s - a + s - b + s - c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leq \frac{1}{4}(4s - 2s) = \frac{1}{4}L = 7\frac{1}{2}$$

met gelijkheid als $s = s - a = s - b = s - c$ dat wil zeggen als
 $a = b = c = 0 \dots$??????

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c)$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) =$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s)$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) =$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2 =$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s \times \frac{1}{27}s^3$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s \times \frac{1}{27}s^3 = \frac{1}{27}s^4$$

met gelijkheid alléén als $s - a = s - b = s - c$.

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s \times \frac{1}{27}s^3 = \frac{1}{27}s^4$$

met gelijkheid alléén als $s - a = s - b = s - c$.

Met worteltrekken ...

Vaste omtrek ($L = 30$)

... komt er

$$0 \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} s^2$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

... komt er

$$0 \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} s^2 =$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

... komt er

$$0 \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}L^2 = \frac{900}{12\sqrt{3}}$$

Vaste omtrek ($L = 30$)

... komt er

$$O \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}L^2 = \frac{900}{12\sqrt{3}}$$

Dus de oppervlakte is, bij omtrek 30, nooit groter dan $\frac{900}{12\sqrt{3}}$

Vaste omtrek ($L = 30$)

... komt er

$$O \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}L^2 = \frac{900}{12\sqrt{3}}$$

Dus de oppervlakte is, bij omtrek 30, nooit groter dan $\frac{900}{12\sqrt{3}}$ en als alle zijden gelijk aan 10 zijn is de oppervlakte precies zo groot.

Vaste omtrek ($L = 30$)

... komt er

$$O \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}L^2 = \frac{900}{12\sqrt{3}}$$

Dus de oppervlakte is, bij omtrek 30, nooit groter dan $\frac{900}{12\sqrt{3}}$ en als alle zijden gelijk aan 10 zijn is de oppervlakte precies zo groot. Bij vaste omtrek heeft een *gelijkzijdige driehoek* de maximale oppervlakte.

Vaste omtrek

De ongelijkheid

$$O \leq \frac{1}{12\sqrt{3}} L^2$$

is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor driehoeken.

Vaste omtrek

De ongelijkheid

$$O \leq \frac{1}{12\sqrt{3}} L^2$$

is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor driehoeken.

Wat heeft de grootste oppervlakte?

Een gelijkzijdige driehoek met omtrek 30

Vaste omtrek

De ongelijkheid

$$O \leq \frac{1}{12\sqrt{3}} L^2$$

is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor driehoeken.

Wat heeft de grootste oppervlakte?

Een gelijkzijdige driehoek met omtrek 30
of

Vaste omtrek

De ongelijkheid

$$O \leq \frac{1}{12\sqrt{3}} L^2$$

is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor driehoeken.

Wat heeft de grootste oppervlakte?

Een gelijkzijdige driehoek met omtrek 30

of

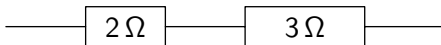
een vierkant met omtrek 30?

Overzicht

- 1 Vragen
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Gemiddelden
 - Twee rijen
- 2 Antwoorden
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Blokken
 - Een bewijs
 - Driehoeken
 - **Gemiddelden**
 - Rijen

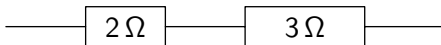
Gemiddelde weerstand (in serie)

Twee weerstanden in serie



Gemiddelde weerstand (in serie)

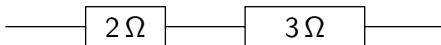
Twee weerstanden in serie



De totale weerstand is ...

Gemiddelde weerstand (in serie)

Twee weerstanden in serie

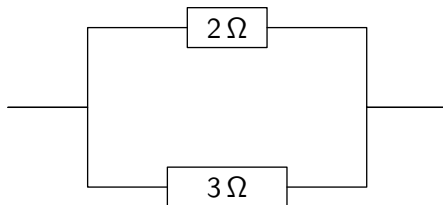


De totale weerstand is ...

Dus de gemiddelde weerstand is ...

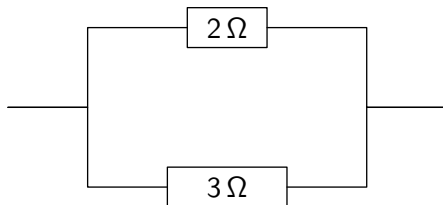
Gemiddelde weerstand (parallel)

Twee weerstanden parallel



Gemiddelde weerstand (parallel)

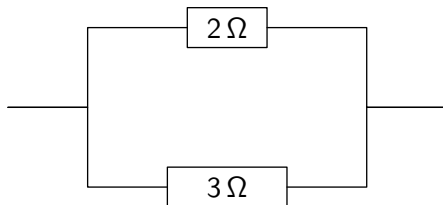
Twee weerstanden parallel



De totale weerstand is ...

Gemiddelde weerstand (parallel)

Twee weerstanden parallel



De totale weerstand is ...

Dus de gemiddelde weerstand is ...

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

In serie: totale weerstand is

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

In serie: totale weerstand is de som,

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

In serie: totale weerstand is de som,
de gemiddelde weerstand, ρ_s , is $\frac{1}{2}(2 + 3)$.

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

In serie: totale weerstand is de som,
de gemiddelde weerstand, ρ_s , is $\frac{1}{2}(2 + 3)$.

Parallel: de totale weerstand R voldoet aan

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

In serie: totale weerstand is de som,
de gemiddelde weerstand, ρ_s , is $\frac{1}{2}(2 + 3)$.

Parallel: de totale weerstand R voldoet aan $\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

In serie: totale weerstand is de som,
de gemiddelde weerstand, ρ_s , is $\frac{1}{2}(2 + 3)$.

Parallel: de totale weerstand R voldoet aan $\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
De gemiddelde weerstand, ρ_p , moet voldoen aan

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

In serie: totale weerstand is de som,
de gemiddelde weerstand, ρ_s , is $\frac{1}{2}(2 + 3)$.

Parallel: de totale weerstand R voldoet aan $\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
De gemiddelde weerstand, ρ_p , moet voldoen aan

$$\frac{1}{\rho_p} + \frac{1}{\rho_p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Gemiddelde weerstand

Dus twee verschillende gemiddelden!

Gemiddelde weerstand

Dus twee verschillende gemiddelden!

$$\text{In serie: } \rho_s = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$$

Gemiddelde weerstand

Dus twee verschillende gemiddelden!

In serie: $\rho_s = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$

Parallel: $\frac{1}{\rho_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, dus

Gemiddelde weerstand

Dus twee verschillende gemiddelden!

In serie: $\rho_s = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$

Parallel: $\frac{1}{\rho_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, dus

$$\rho_p = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Nog een gemiddelde

Als a en b zijden van een rechthoek zijn dat heeft een vierkant met zijden \sqrt{ab} dezelfde oppervlakte als die rechthoek.

\sqrt{ab} is ook een gemiddelde.

Drie gemiddelden

We hebben voor twee positieve getallen a en b drie gemiddelden

Drie gemiddelden

We hebben voor twee positieve getallen a en b drie gemiddelden

Rekenkundig $R(a, b) = \frac{1}{2}(a + b)$

Drie gemiddelden

We hebben voor twee positieve getallen a en b drie gemiddelden

Rekenkundig $R(a, b) = \frac{1}{2}(a + b)$

Meetkundig $M(a, b) = \sqrt{ab}$

Drie gemiddelden

We hebben voor twee positieve getallen a en b drie gemiddelden

Rekenkundig $R(a, b) = \frac{1}{2}(a + b)$

Meetkundig $M(a, b) = \sqrt{ab}$

Harmonisch $H(a, b) = 2/(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$

Drie gemiddelden

We hebben gezien: $M(a, b) \leq R(a, b)$

Drie gemiddelden

We hebben gezien: $M(a, b) \leq R(a, b)$

Ook: $M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = 1/M(a, b)$ en $H(a, b) = 1/R\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$

Drie gemiddelden

We hebben gezien: $M(a, b) \leq R(a, b)$

Ook: $M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = 1/M(a, b)$ en $H(a, b) = 1/R\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ dus

Drie gemiddelden

We hebben gezien: $M(a, b) \leq R(a, b)$

Ook: $M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = 1/M(a, b)$ en $H(a, b) = 1/R\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ dus

$$\frac{1}{M(a, b)} = M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \leq R\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{H(a, b)}$$

Drie gemiddelden

We hebben gezien: $M(a, b) \leq R(a, b)$

Ook: $M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = 1/M(a, b)$ en $H(a, b) = 1/R\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ dus

$$\frac{1}{M(a, b)} = M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \leq R\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{H(a, b)}$$

Conclusie

$$H(a, b) \leq M(a, b) \leq R(a, b)$$

Drie gemiddelden

Je kunt dit gebruiken om wortels af te schatten

$$5\frac{5}{11} \leq \sqrt{30} \leq 5\frac{5}{10}$$

Drie gemiddelden

Je kunt dit gebruiken om wortels af te schatten

$$5\frac{5}{11} \leq \sqrt{30} \leq 5\frac{5}{10}$$

(a en b slim kiezen)

Drie gemiddelden

Je kunt dit gebruiken om wortels af te schatten

$$5\frac{5}{11} \leq \sqrt{30} \leq 5\frac{5}{10}$$

(a en b slim kiezen)

Je kunt veel met deze (en andere) ongelijkheden doen

Overzicht

- 1 Vragen
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Gemiddelden
 - Twee rijen
- 2 Antwoorden
 - Maximaliseren/minimaliseren
 - Blokken
 - Een bewijs
 - Driehoeken
 - Gemiddelden
 - Rijen

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit):

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! =$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

Schrijf dat heel ingewikkeld op:

$$\sqrt{1 \times n \times \cdots \times n}$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

Schrijf dat heel ingewikkeld op:

$$\sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

Schrijf dat heel ingewikkeld op:

$$\sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times \sqrt{3 \times (n-2)} \times$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

Schrijf dat heel ingewikkeld op:

$$\sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times \sqrt{3 \times (n-2)} \times \cdots \times$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

Schrijf dat heel ingewikkeld op:

$$\sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times \sqrt{3 \times (n-2)} \times \cdots \times \sqrt{n \times 1}$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

Schrijf dat heel ingewikkeld op:

$$\sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times \sqrt{3 \times (n-2)} \times \cdots \times \sqrt{n \times 1}$$

voor elke factor

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n -faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

Schrijf dat heel ingewikkeld op:

$$\sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times \sqrt{3 \times (n-2)} \times \dots \times \sqrt{n \times 1}$$

voor elke factor $\sqrt{k \times (n-k+1)}$ krijgen we ...

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... een afschatting:

$$\sqrt{k \times (n - k + 1)} \leq$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... een afschatting:

$$\sqrt{k \times (n - k + 1)} \leq \frac{1}{2}(k + n - k + 1) =$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... een afschatting:

$$\sqrt{k \times (n - k + 1)} \leq \frac{1}{2}(k + n - k + 1) = \frac{n + 1}{2}$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... een afschatting:

$$\sqrt{k \times (n - k + 1)} \leq \frac{1}{2}(k + n - k + 1) = \frac{n + 1}{2}$$

Dus

$$n! \leq$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... een afschatting:

$$\sqrt{k \times (n - k + 1)} \leq \frac{1}{2}(k + n - k + 1) = \frac{n + 1}{2}$$

Dus

$$n! \leq \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n =$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... een afschatting:

$$\sqrt{k \times (n - k + 1)} \leq \frac{1}{2}(k + n - k + 1) = \frac{n + 1}{2}$$

Dus

$$n! \leq \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n = \frac{(n + 1)^n}{2^n}$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... een afschatting:

$$\sqrt{k \times (n - k + 1)} \leq \frac{1}{2}(k + n - k + 1) = \frac{n + 1}{2}$$

Dus

$$n! \leq \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n = \frac{(n + 1)^n}{2^n}$$

of ...

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... voor de n -demachtswortel:

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... voor de n -demachtswortel:

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

Een heel makkelijke afschatting van een lastige uitdrukking.

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... voor de n -demachtswortel:

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

Een heel makkelijke afschatting van een lastige uitdrukking.

Opgave: toon aan $n! \leq \frac{n^n}{2^{n-1}}$.

Hint: zet de n -en apart en bekijk de factoren $k(n-k)$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

Er is ook een onderschatting:

De rij $\sqrt[n]{n!}$

Er is ook een onderschatting:

Eerst: voor $1 \leq k \leq n$ geldt $k(n - k + 1) - n =$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

Er is ook een onderschatting:

Eerst: voor $1 \leq k \leq n$ geldt $k(n - k + 1) - n = (k - 1)(n - k) \geq$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

Er is ook een onderschatting:

Eerst: voor $1 \leq k \leq n$ geldt $k(n - k + 1) - n = (k - 1)(n - k) \geq 0$.

De rij $\sqrt[n]{n!}$

Er is ook een onderschatting:

Eerst: voor $1 \leq k \leq n$ geldt $k(n - k + 1) - n = (k - 1)(n - k) \geq 0$.

Dus $k(n - k + 1) \geq n$ ofwel $\sqrt{k(n - k + 1)} \geq \sqrt{n}$

En dus:

De rij $\sqrt[n]{n!}$

Er is ook een onderschatting:

Eerst: voor $1 \leq k \leq n$ geldt $k(n - k + 1) - n = (k - 1)(n - k) \geq 0$.

Dus $k(n - k + 1) \geq n$ ofwel $\sqrt{k(n - k + 1)} \geq \sqrt{n}$

En dus:

$$n! \geq (\sqrt{n})^n$$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

Er is ook een onderschatting:

Eerst: voor $1 \leq k \leq n$ geldt $k(n - k + 1) - n = (k - 1)(n - k) \geq 0$.

Dus $k(n - k + 1) \geq n$ ofwel $\sqrt{k(n - k + 1)} \geq \sqrt{n}$

En dus:

$$n! \geq (\sqrt{n})^n$$

conclusie

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Er is een algemene stelling voor n -tallen positieve getallen:

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} \leq$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Er is een algemene stelling voor n -tallen positieve getallen:

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Er is een algemene stelling voor n -tallen positieve getallen:

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

de algemene *Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde*.

De rij $\sqrt[n]{n}$

Er is een algemene stelling voor n -tallen positieve getallen:

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

de algemene *Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde*.

Bewijs: eerst voor $n = 8$, dan $n = 7$, $n = 6$, $n = 5$, vervolgens $n = 16$, dan $n = 15$, $n = 14$, ...

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_j slim: $a_1 = n$ en $a_2 = \dots = a_n = 1$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_j slim: $a_1 = n$ en $a_2 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_j slim: $a_1 = n$ en $a_2 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(n + n - 1)$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_j slim: $a_1 = n$ en $a_2 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(n + n - 1) =$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_j slim: $a_1 = n$ en $a_2 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(n + n - 1) = 2 - \frac{1}{n}$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i slim: $a_1 = n$ en $a_2 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(n + n - 1) = 2 - \frac{1}{n}$$

Dus, voor alle n geldt

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i slim: $a_1 = n$ en $a_2 = \cdots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(n + n - 1) = 2 - \frac{1}{n}$$

Dus, voor alle n geldt

$$\sqrt[n]{n} < 2$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer:

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer: $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \dots = a_n = 1$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer: $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer: $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2)$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer: $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) =$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer: $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}$$

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer: $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}$$

Dus, voor alle n geldt

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer: $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \dots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}$$

Dus, voor alle n geldt

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$