Technische Universiteit Delft Faculteit der Scheikundige Technologie en der Materiaalkunde Vakgroep: Toepassingen van Materialen in Constructies Sectie: Plasticiteit en Lange Duur Gedrag van Materialen

Taaie Breuk Simulatie met behulp van de Eindige Elementenmethode

A. H. M. Krom



Delft augustus 1993

Technische Universiteit Delft

Laboratorium voor Materiaalkunde Sectie TMC2

VOORWOORD

De eindige elementenmethode speelt een steeds grotere rol in de breukmechanica. Waren de eerste berekeningen nog gebaseerd op eenvoudig, lineair elastisch materiaalgedrag, tegenwoordig kan men zelfs scheurgroei simuleren. Deze zogenaamde schade berekeningen zijn echter nog in een ontwikkelingsfase. De bedoeling van de schade berekeningen is niet alleen simuleren van scheurgroei maar ook voorspellen van scheurgroei zodat het gebruikt kan worden in veiligheidschattingen van constructies.

In dit afstudeerverslag worden eerst elastisch eindige elementenberekeningen behandeld die vervolgens worden uitgebreid met plastisch materiaalgedrag. Als laatste worden de schade berekeningen besproken waarin het taai breuk mechanisme is ingebracht. Het afstudeerverslag is het laatste onderdeel van de opleiding tot Materiaalkundig Ingenieur. Het onderzoek is uitgevoerd in de vakgroep Toepassingen van Materialen in Constructies, sectie Plasticiteit en Lange Duur Gedrag van Materialen, van de faculteit der Scheikundige Technologie en der Materiaalkunde.

Alleen had ik het onderzoek niet kunnen doen. Ik wil daarom professor Bakker bedanken voor de begeleiding, Bart Wiersma voor het helpen met de computers en Ronald Koers voor enkele nuttige discussies. Ook wil ik de leden van de sectie TMC II bedanken voor een plezierige tijd in het Laboratorium voor Materiaalkunde.

Alfons Krom

figuur op de voorpagina: scheurgroei in een eindige elementenverdeling, de gescheurde elementen zijn in het onderste gedeelte geheel geel gekleurd.

2

INHOUDSOPGAVE

	;							
	Voor	woord		2				
	Samenvatting							
	Summary							
	Symt	oolen en	Afkortingen	7				
1	Inleic	leiding						
2	Theorie							
	2.1	Spann	ingen en Verplaatsingen rond een Scheur	9				
		2.1.1 2.1.2 2.1.3 2.1.4	de exacte oplossing en Irwin's oplossing het begrip small scale yielding de <i>T</i> -spanning de <i>J</i> -integraal en de scheurtipopeningsverplaatsing	9 11 12 13				
	2.2	Besch	rijving van Plastisch Gedrag	15				
		2.2.1 2.2.2 2.2.3	de trekkromme vloeicriterium en vloeiregel het taaie breukmechanisme en het Gurson model	15 17 17				
3	Opzet Eindige Elementenberekeningen							
	3.1	Het Gebruikte Element						
	3.2	De Eindige Elementverdeling						
	3.3	De Eindige Elementenberekening, Nauwkeurigheid en Convergentie						
	3.4	Comp	uters en Programma's	23				
4	Resu	taten		24				
	4.1 Elastische Eindige Elementenberekenin		che Eindige Elementenberekeningen	24				
		4.1.1 4.1.2 4.1.3	de berekeningen invloed aantal elementen verschil voorgeschreven krachten en verplaatsingen	24 24 25				
	4.2	4.2 Plastische Eindige Elementenberekeningen		25				
		4.2.1 4.2.2 4.2.3 4.2.4 4.2.5 4.2.6	de berekeningen verschil voorgeschreven krachten en verplaatsingen kleine geometrieverandering berekeningen grote geometrieverandering berekeningen het modeleren van de scheurtip de <i>T</i> -spanning	25 26 27 27 29 29				

i

	4.3	Schade Eindige Elementenberekeningen		30
		4.3.1 4.3.2 4.3.3	de berekeningen de scheurweerstand kromme invloed van de <i>T</i> -spanning	30 31 33
5	Conclusies			34
	Litera	<u>tuur</u>		35
	bijlage 1 berekening voorgeschreven krachten			37
	bijlage 2 voorbeeld HRR-oplossing			38
	bijlage 3 gegevens elementenverdelingen			39

:

·

SAMENVATTING

Er zijn gedetailleerde eindige elementenberekeningen uitgevoerd om scheurweerstand krommen (J_R -curven) te bepalen in een small scale yielding model.

Het small scale yielding model is een vervanging voor een proefstuk met een plastische zone rond de scheurtip door een geometrie-onafhankelijke randvoorwaardenformulering waarin de spanningen, rekken en verplaatsingen geheel bepaald worden door de spanningsintensiteitfactor K_I . De geometrie kan echter in rekening worden gebracht door het inbrengen van de zogenaamde T-spanning die positief is voor buigproefstukken en negatief voor trekproefstukken.

Scheurgroei is gebaseerd op het gemodificeerde Gurson model waarin de volumefractie van de microholten de belangrijkste parameter is. Scheurgroei treedt op als in een element de holtevolumefractie een critische waarde heeft bereikt. Dit betekent dat scheurgroei afhankelijk is van de elementgrootte. Uit de berekeningen volgt dat er een recht evenredig verband bestaat tussen de elementgrootte en de initiatie *J*-integraal, dat is de *J*-integraal waarbij het eerste element gescheurd is. Bij stijgende belasting groeit de scheur recht door in het ligament. Het is mogelijk om dan de *J*-integraal als functie van de scheurgroei te bepalen. Zo kan een scheurweerstand kromme worden bepaald. De helling van de scheurweerstand kromme blijkt weinig afhankelijk te zijn van de elementgrootte. Als zowel de *J*-integraal als de scheurgroei geschaald wordt door de elementgrootte dan vallen de scheurweerstand krommen op één lijn.

De invloed van een negatieve *T*-spanning (simulatie van trekproefstukken) is dat de initiatie *J*-waarde en de scheurweerstand hoger zijn, wat overeenkomt met experimenten. De invloed van een positieve *T*-spanning (simulatie van buigproefstukken) is tegengesteld maar veel minder. Ook dit komt overeen met experimenten.

5

.

SUMMARY

Detailed finite element calculations have been carried out to determine crack resistance curves (J_R -curves) in a small scale yielding model. The influence of element size and T-stress has been investigated.

The small scale yielding model is a replacement of a cracked body with a plastic zone around the crack tip by a geometry independent boundary layer formulation. Stresses, strains and displacement are controlled by the stress intensity factor. However the geometry can be taken into account through the *T*-stress. The *T*-stress is negative for tensile specimens and positive for bend specimens.

Crack growth predictions are based on the modified Gurson model. In the modified Gurson model the void volume fraction plays an important role. When the void volume fraction reaches a critical value, the element is considered to be cracked. So crack growth will depend on the element size.

It's observed that the *J*-integral at initiation, that is when the first element is cracked, is directly proportional to the element size. The slope of the crack resistance depends little on the element size. When the *J*-integral is scaled by the element size and reference stress and the crack growth by the element size, the crack resistance curves fall on one line. So crack resistance curves in small scale yielding are self similar.

The effect of a negative T-stress (simulating specimens loaded in tension) is to give higher initiation J-values and higher resistance to crack growth, which corresponds with experiments. The effect of a positive T-stress (simulating bend specimens) is opposite but less pronounced. Also this corresponds with experiments. :

SYMBOLEN EN AFKORTINGEN

Latijnse symbolen

:

а	-	scheurlengte
b	-	proefstukdikte
В		biaxialiteit
Δl		elementgrootte
f_c		kritische holtevolumefractie
<i>fF</i>	=	holtevolumefractie bij breuk
E	-	elasticiteitsmodulus
G	-	glijdingsmodulus
KI	=	spanningsintensiteitsfactor
J^{-}	inner Kinner	<i>J</i> -integraal
J _{dim}	=	dimensieloze J-integraal
J_{ff}	=	verre veld J-integraal
n	=	verstevigingsexponent
q		constante in gemodificeerd Gurson's vloeicriterium
R	مانتان منتقل	straal van de elementenverdeling (spinneweb)
Т	Ξ	T-spanning
T _i		tractievector
ui		verplaatsingsvector
w		proefstukbreedte
W	*	rek-energiedichtheid

Griekse symbolen

α	=	constante in Ramberg-Osgood vergelijking
E _{ij}	=	rektensor
δ_{ii}	=	Kronecker delta, $\delta_{ij} = 0$ voor $i = j$
δ_t		scheurtipopeningsverplaatsing
Φ		vloeifunctie
v		constante van Poisson
Π		potentiële energie
σ	=	opgelegde spanning
σ_m	=	gemiddelde of hydrostatische spanning
σ_M		matrixspanning
σ_{v}		vloeispanning
σ_{ij}		spanningstensor
-		

afkortingen

=	American Society for Testing Materials
=	scheuropeningsverplaatsing
	compact tension proefstuk
-	centraal gekerfde plaat onder trekspanning
	dubbelzijdig gekerfde plaat onder trekspanning
000	Hutchinson, Rice en Rosengren
900 100	éénzijdig gekerfde buigbalk
	éénzijdig gekerfde plaat onder trekspanning
	small scale yielding

1 INLEIDING

Micromechanische schade modellen worden de laatste tijd steeds vaker gebruikt voor het simuleren van taaie breuk in metalen. Het schademechanisme van taaie breuk in metalen wordt bepaald door de nucleatie, groei en coalescentie van microholten. Dit materiaalgedrag kan worden beschreven met het schade model van Gurson. In het Gurson model is de belangrijkste parameter de holtevolumefractie.

In dit afstudeerverslag worden eindige elementenberekeningen beschreven die gebaseerd zijn op het Gurson model. Berekeningen zijn uitgevoerd in de 'small scale yielding' benadering. Deze benadering is een vervanging van een gescheurd lichaam met een plastische zone rondom de scheurtip door een randvoorwaardenformulering. Het doel is na te gaan wat de invloed in van de elementgrootte op de scheurweerstand krommen, de zogenaamde J_R curven, die de J-integraal als functie van de scheurgroei weergeven.

Als voorbereiding worden berekeningen uitgevoerd zonder scheurgroei. Voor een groot deel zijn deze berekeningen al eens beschreven in de literatuur. Vaak echter zijn ze uitgevoerd met een ander eindig elementenprogramma dan in het onderzoek wordt gebruikt. Eerst zijn eindige elementenberekeningen uitgevoerd met lineair elastisch materiaalgedrag. Vervolgens wordt het materiaalgedrag uitgebreid met plastisch gedrag. In de 'plastische' berekeningen wordt nog het onderscheid gemaakt tussen kleine en grote geometrieverandering berekeningen. Tenslotte worden de grote geometrie verandering berekeningen uitgebreid met het materiaalgedrag volgens het schade model van Gurson. Uit deze berekeningen zijn scheurweerstand kromme bepaald. De schade berekeningen in de small scall yielding benadering zijn voor zover bekend nog niet in de literatuur beschreven.



ð

figuur 2.1: De 'oneindig grote' twee-assige belaste, vlakke plaat met een centrale scherpe scheur

2 THEORIE

2.1 Spanningen en Verplaatsingen rond een Scheur

2.1.1 de exacte oplossing en Irwin's oplossing

Voor een breukcriterium is het noodzakelijk dat we de spannings- en rektoestand rond een scheur kunnen beschrijven. Op basis van een twee-assig belaste plaat met een centrale, scherpe scheur, zie figuur 2.1, hebben Evans en Luxmoore [1] een exacte oplossing voor de spanningen afgeleid, ook voor de meer gangbare éénassig belaste plaat. Daarnaast is het volgende gesteld: 1) de plaat is vlak, twee dimensionaal en oneindig groot, 2) de scheur is stabiel, oneindig scherp, waardoor de scheurtip een singulier punt is, en ligt in het midden, 3) de belasting opent de scheur (modus *I*) en is symmetrisch ten opzichte van het midden van de scheur, 4) het materiaalgedrag is lineair elastisch en 5) de (scheur)geometrie verandert niet ten gevolge van de belasting. De spanningen in de twee-assige belaste plaat zijn:

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma r}{(r_1 r_2)^{1/2}} \cos(\theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}) - \frac{\sigma a^2 y}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin(\frac{3\theta_1}{2} + \frac{3\theta_2}{2})$$
(2.1)

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma a^2 y}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos(\frac{3\theta_1}{2} + \frac{3\theta_2}{2})$$
(2.2)

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma r}{(r_1 r_2)^{1/2}} \cos(\theta - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}) + \frac{\sigma a^2 y}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin(\frac{3\theta_1}{2} + \frac{3\theta_2}{2})$$
(2.3)

waarin σ de aangelegde belasting is, (r, θ) , (r_1, θ_1) en (r_2, θ_2) polaire coördinatenassen zijn, zie figuur 2.1 en $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$. Voor de éénassig belaste plaat hoeft alleen in het rechterlid van formule 2.1 de term - σ worden toegevoegd. In de vlakke spanningstoestand ('plane stress') geldt voor de spanning in de dikterichting of z-richting: $\sigma_{33} = 0$ en in de vlakke rektoestand ('plane strain'): $\sigma_{33} = v(\sigma_{11}+\sigma_{22})$.

De verplaatsingen in de twee-assige belaste plaat in plane strain zijn [1]:

$$u_{1} = \frac{(1+\nu)}{E} \{ (1-2\nu)\sigma(r_{1}r_{2})^{1/2}\cos(\frac{\theta_{1}}{2} + \frac{\theta_{2}}{2}) - \frac{\sigma yr}{(r_{1}r_{2})^{1/2}}\sin(\theta - \frac{\theta_{1}}{2} - \frac{\theta_{2}}{2}) \}$$
(2.4)
$$u_{2} = \frac{(1+\nu)}{E} \{ (2-2\nu)\sigma(r_{1}r_{2})^{1/2}\sin(\frac{\theta_{1}}{2} + \frac{\theta_{2}}{2}) - \frac{\sigma yr}{(r_{1}r_{2})^{1/2}}\cos(\theta - \frac{\theta_{1}}{2} - \frac{\theta_{2}}{2}) \}$$
(2.5)

In plane strain geldt: $u_3 = 0$. Voor de éénassig belaste plaat moeten de verplaatsingen door een spanning in de x-richting worden toegevoegd. In het rechterlid van formule 2.4



figuur 2.2: De spanning in de x-richting in het ligament als functie van de afstand tot de scheurtip volgens de exacte oplossing en Irwin's oplossing



figuur 2.3: De spanning in de x-richting en y-richting in het ligament als functie van de afstand tot de scheurtip volgens de analytische oplossing en de eindige elementenoplossing

is dat de term $-x\sigma(1-v^2)/E$ en in het rechterlid van formule 2.5 de term $+y\sigma v(1-v)/E$.

Als de afstand tot één van de twee scheurtippen zeer klein is in verhouding tot de scheurlengte (bijvoorbeeld $r_1 \ll a$), dan kan het volgende gesteld worden: $r_2 = 2r = 2a$ en $\theta = \theta_2 = 0$. Invullen in formule (2.1) tot en met (2.5) met $y = r_1 \sin \theta_1$ en de modus *I* spanningsintensiteitfactor, $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$, geeft de bekende oplossing van Irwin [2] (r_1 is vervangen door r en θ_1 door θ):

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \right)$$
(2.6)

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}$$
(2.7)

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \right)$$
(2.8)

$$u_1 = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (3 - 4\nu - \cos\theta) \cos\frac{\theta}{2}$$
(2.9)

$$u_2 = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (3 - 4\nu - \cos\theta) \sin\frac{\theta}{2}$$
(2.10)

waarin G de glijdingsmodulus is: G = E/2(1 + v). Voor de éénassig belaste plaat moeten in formules (2.6), (2.9) en (2.10) dezelfde termen worden toegevoegd als in respectievelijk formules 2.1, 2.4 en 2.5. De spanningstoestand in proefstukken met eindige afmetingen kan ook met bovenstaande formules beschreven. Er wordt dan wel een correctiefactor f(a/W) aangebracht in de formule voor de spanningsintensiteitsfactor K_I . Hiermee is ook de essentie weergegeven van Irwin's oplossing: de spanningstoestand bij de scheurtip in een willekeurige geometrie laat zich geheel beschrijven door één parameter: de spanningsintensiteitsfactor.

Tot $r/a \approx 0,01$ is het verschil tussen de benaderingsoplossing en de exacte oplossing zeer klein, zie figuur 2.2. Bij $r/a \approx 0,1$ is het verschil tussen de benaderingsoplossing en de exacte oplossing ongeveer 10%. In figuur 2.3 is de exacte oplossing van de éénassig belaste plaat vergeleken met een eindige elementenoplossing van een centraal gescheurde plaat met een verhouding tussen de scheurlengte en breedte van 0,1. De eindige elementenoplossing komt zeer goed overeen met de exacte oplossing. Uit figuur 2.3 volgt ook dat alleen de spanningsintensiteitsfactor de spanningstoestand in een centraal gescheurd proefstuk niet kan beschrijven. Uitbreiding met een tweede, geometrie-afhankelijke parameter is dus noodzakelijk.



••

figuur 2.4: a) Small scale yielding bij een scheur b) De actuele configuratie is vervangen door een scheur in een oneindige plaat: de actuele randvoorwaarden zijn vervangen door het asymptotisch lineair elastische spanningsveld (Rice [3])

2.1.2 het begrip small scale yielding

De tot nu toe besproken formules zijn alleen geldig voor lineair elastisch materiaalgedrag. De meeste materialen vertonen echter elastisch-plastisch materiaalgedrag. Aan de scheurtip is door de hoge spanningen altijd een plastische zone aanwezig. Door plastische vervormingen zal de scherpe scheur afronden ('blunting'). Daarom zijn bovenstaande formules in principe niet van toepassing in een proefstuk. Om Irwin's oplossing toch te kunnen gebruiken is het begrip small scale yielding geformuleerd door Rice [3]: als de elastische zone rond de scheurtip groot is ten opzichte van de plastische zone maar klein is ten opzichte van de scheurlengte en andere geometrische dimensies dan kunnen we het proefstuk vervangen door een half oneindig grote plaat met een scheur, zie figuur 2.4. Het proefstuk met de plastische zone kan vervangen worden door een randvoorwaarden formulering ('boundary layer formulation'):

$$\sigma_{ij} = \lim_{r \to \infty} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$
(2.11)

waarin $f_{ij}(\theta)$ de functies voorstellen uit formules 2.6, 2.7 en 2.8. De randvoorwaarden formulering wordt ook in de eindige elementenmethode toegepast om de processen die rond de scheurtip plaatsvinden te simuleren. Voordeel van de randvoorwaarden formulering is dat slechts een gebiedje rond de scheurtip hoeft te worden gemodelleerd. Nadeel is dat de randvoorwaarden formulering een benadering voor een proefstuk is zoals al bleek uit figuur 2.3. De randvoorwaarden kunnen natuurlijk ook de verplaatsingen zijn, dus:

$$u_i = \lim_{r \to \infty} K_I \sqrt{2\pi r} g_i(\theta)$$
(2.12)

waarin $g_i(\theta)$ de functies voorstellen uit formules 2.9 en 2.10. In de eindige elementenmethode genieten de voorgeschreven verplaatsingen de voorkeur omdat deze direct kunnen worden ingevoerd. Voorgeschreven spanningen moeten echter eerst in tracties worden omgezet en vervolgens in equivalente knooppuntskrachten, zie *bijlage 1*. Deze bewerkingen geven een extra fout.

Op basis van experimenteel werk zijn de volgende eisen door de ASTM gesteld aan de proefstukafmetingen voor de SSY benadering (plane strain):

$$a, b \ge 2, 5 \left(\frac{K_I}{\sigma_v}\right)^2$$
 en $w \ge 5, 0 \left(\frac{K_I}{\sigma_v}\right)^2$ (2.13)

waarin b de dikte en w de breedte van het proefstuk.



Centre-cracked specimen Double edge-cracked specimen Bend specimen Compact tension specimen Boundary layer approach

figuur 2.5: Plastische zonegrootte in verschillende proefstukken en in de randvoorwaarden formulering van de small scale yielding benadering, de assen zijn geschaald door $(K_I/\sigma_v)^2$ (Larsson en Carlsson [5])

2.1.3 de T-spanning

Williams vindt als algemene oplossing voor de spannningen de reeksontwikkeling [4]:

$$\sigma_{ij} = A_{ij}r^{-1/2} + B_{ij}r^0 + C_{ij}r^{+1/2} + \dots$$
(2.14)

waarin r en θ polaire coördinaten met de scheurtip als oorsprong en A_{ij} , B_{ij} en C_{ij} functies die afhankelijk zijn van de scheurlengte a, θ en σ . Uit formule 2.14 volgt dat als r nadert tot nul de reguliere termen ten opzichte van de singuliere term zijn te verwaarlozen. De spanningstoestand wordt dan beschreven met Irwin's oplossing.

Larsson en Carlsson [5] hebben de plastische zones, bepaald met elastisch-plastische eindige elementen-berekeningen, van verschillende proefstukken vergeleken met de plastische zone van een randvoorwaardenformulering bij een belasting volgens de ASTM limiet voor SSY. Hieruit volgde dat alleen de plastische zone van een SENB-proefstuk nagenoeg gelijk is aan die van de randvoorwaarden formulering, zie figuur 2.5. De spanningstoestand in een SENB-proefstuk komt dus goed overeen met de twee-assig belaste plaat. Door het aanbrengen van een tweede term, de T-spanning, komt de plastische zone van de randvoorwaarden formulering overeen met de plastische zone van de andere proefstukken. De T-spanning blijkt afhankelijk te zijn van de verhouding tussen trekbelasting en buigbelasting in het ligament. Proefstukken waarvan in het ligament voornamelijk een buigbelasting aanwezig is ('buigproefstukken') zoals een CT- en SENB-proefstuk hebben een T-spanning van groter of gelijk aan nul. Proefstukken waarvan in het ligament voornamelijk een trekbelasting aanwezig is ('trekproefstukken') zoals een CNT-proefstuk hebben een T-spanning kleiner dan nul. In dat geval is de randvoorwaardenformulering zoals die door Rice is gedefinieerd geen goede vervanging van het proefstuk. Echter door het inbrengen van de T-spanning kan de randvoorwaarden formulering een vervanging zijn voor het proefstuk. De gemodificeerde randvoorwaarden formulering luidt nu:

$$\sigma_{ij} = \lim_{r \to \infty} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{1i} \delta_{1j} \right)$$
(2.15)

waarin δ_{ij} de Kroneckerdelta is en $B_{ij} = T\delta_{1i}\delta_{1j}$. We kunnen de T-spanning niet onafhankelijk van de modus I spanningsintensiteit factor nemen. Beide zijn immers termen uit de spanningsreeks. De T-spanning is via de biaxialiteitsparameter B gerelateerd aan de spanningsintensiteitsfactor volgens (Leevers en Radon [6])

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} \tag{2.16}$$



figuur 2.6: De biaxialiteit als functie van de verhouding tussen de scheurlengte en breedte voor verschillende proefstukken (Bilby e.a. [5]) a) CCT = CNT, b) SECB = SENB, c) SECT = SENT d) DECT = DENT e) CTS = CT

In figuur 2.6 zijn verschillende proefstukken afgebeeld met de bijbehorende biaxialiteit als functie van de verhouding tussen de scheurlengte en breedte a/W. Voor de éénassig belaste oneindige plaat geldt: $B = T/\sigma = -1$.

2.1.4 de J-integraal en de scheurtipopeningsverplaatsing

Als plasticiteit niet te verwaarlozen is dan kunnen we K_I niet meer gebruiken. We moeten dan overgaan tot een niet-lineair elastische breukparameter, bijvoorbeeld de *J*-integraal. We beschouwen plastisch materiaalgedrag als niet-lineair elastisch gedrag. Dit is bij benadering correct zolang er geen ontlasting optreedt. Ontlasting treedt bijvoorbeeld op bij scheurgroei. De *J*-integraal is een twee-dimensionale energie lijnintegraal en als volgt gedefinieerd (Rice [3]):

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds)$$
(2.17)

waarin Γ een willekeurig integratiepad is, W de rek-energiedichtheid, T_i de componenten van de tractievector volgens de naar buiten gerichte normaal n_i op Γ , $T_i = \sigma_{ij} n_j$ en s de booglengte langs Γ . Bij het afleiden is gesteld dat de rek-energiedichtheid W een functie van de rek ε_{ij} alleen. Dit is alleen gegarandeerd bij een totale of deformatie beschrijving van plasticiteit. In geval van de (meer realistische) incrementele plasticiteitsbeschrijving kan dit niet gegarandeerd worden. Gebleken is dat zolang belastingen proportioneel aangroeien, wel bij benadering aan deze voorwaarde wordt voldaan. De *J*-integraal van een gesloten intergratiepad in een homogeen materiaal zonder scheuren is gelijk aan nul. De *J*-integraal van een pad rond een singulier punt, bijvoorbeeld een scheurtip, is ongelijk aan nul. Een belangrijke eigenschap van de *J*-integraal is de padonafhankelijkheid. Hiermee kunnen we informatie krijgen over de spanningstoestand bij de scheurtip door de *J*-integraal te bepalen langs een integratiepad verweg van de scheurtip. De *J*-integraal is daarom een globale breukparameter.

Met formule 2.17 is te bewijzen dat de *J*-integraal voor elastische materialen gelijk is aan de energie die vrijkomt voor het optreden van scheurgroei (Rice [8]):

$$J = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \tag{2.18}$$

waarin $\partial \Pi$ de potentiële energie-afname is van het lichaam plus de daarop werkende tracties en ∂a de scheurlengtetoename. Voor plastische materialen is formule 2.18 niet toe te passen omdat energie is opgenomen voor niet omkeerbare, plastische vervormingen Toch wordt formule 2.18 gebruikt om experimenteel een scheurweerstand kromme te bepalen, ook wel J_R -curve genoemd waaruit de kritische J-integraal J_{Ic} kan worden gehaald. In de eindige elementenmethode kan zowel formule 2.17 als 2.18 worden

-

:

.

.

toegepast. Echter op basis van formule 2.18 kan handig gebruik worden gemaakt van het eindige elementenresultaat. Deze methode wordt de virtuele scheuruitbreidingsmethode genoemd (Parks [9,10] en DeLorenzi [11]). Bakker [12] heeft aangetoond dat toepassing van de virtuele scheuruitbreidingsmethode volkomen gelijkwaardig is aan de berekening van de lijnintegraal volgens formule 2.17.

Voor lineair elastische materialen kan de modus I spanningsintensiteitsfactor K_I worden omgezet in de J-integraal via (Rice [3]):

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \tag{2.19}$$

waarin $E' = E/(1-v^2)$ is voor plane strain en E' = E voor plane stress.

De *J*-integraal kan gebruikt worden in een beschrijving van de spanningstoestand in een niet-lineair elastisch materiaal zoals de spanningsintensiteitsfactor dat doet in een lineair elastisch materiaal. De oplossing van Hutchinson [13,14], Rice en Rosengren [15] geeft een beschrijving van spanningen, rekken en verplaatsingen oplossing bij een stationaire, scherpe scheur in een niet-lineair elastisch materiaal onder een symmetrische openingsbelasting (modus *I*). Het niet-lineair elastisch materiaal gedrag is gebaseerd op een gedeelte van de vergelijking Ramberg-Osgood: $\varepsilon/\varepsilon_v = \alpha(\sigma/\sigma_v)^n$. Bij de scheur zijn de lineair elastische rekken verhouding tot de plastische rekken erg klein en worden daarom verwaarloosd . De spanningen en verplaatsingen volgens de HRRoplossing zijn (McClintock [16]):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{\nu} \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_{\nu} \sigma_{\nu} I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$$
(2.20)

$$u_{i} = \alpha \varepsilon_{v} r \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_{v} \sigma_{v} I_{n} r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{u}_{i}(\theta, n)$$
(2.21)

waarin J de J-integraal is, n de verstevigingsexponent, r en θ polaire coördinaten zijn met de scheurtip als oorsprong, I_n en $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ bekende functies, waarvan de waarden getabuleerd zijn voor plane stress en plane strain door Shih [17]. Merk op dat formule 2.20 en 2.21 nog steeds singulier in de scheurtip zijn en dat de spanningstoestand geheel bepaald wordt door de J-integraal. Met andere woorden de J-integraal is de amplitude van de HRR-singulariteit.

De HRR-oplossing kunnen we beter begrijpen als we de vorm van de limietgevallen bekijken. Als de versteviging maximaal is dan is het materiaalgedrag lineair elastisch. Substitutie van n = 1 en formule 2.17 geeft Irwin's oplossing. Is het materiaalgedrag ideaal plastisch dan is er geen versteviging. Substitutie van $n = \infty$ in formule 2.20 levert de slipline-oplossing: $\sigma_{ij} = \sigma_v / \sqrt{3} h_{ij}(\theta)$. In de slipeline-oplossing komt geen J-integraal



:



(b) DEFORMED PROFILE

figuur 2.7: Een scherpe scheur en een afgeronde scheur ter illustratie van de definitie van de scheurtipopeningsverplaatsing (Shih [18]) meer voor: de spanningstoestand is niet meer uniek voor een bepaalde opgelegde belasting. De J-integraal verliest zijn invloed als het materiaal minder versteviging toont, dus als n groter wordt (Rice [4]). In *bijlage 2* is een HRR-oplossing uitgewerkt.

Een andere veel gebruikte parameter in de elastisch-plastisch breukmechanica is de scheurtip openingsverplaatsing die is gedefiniëerd volgens figuur 2.7. Voor het snijpunt op de scheurflank geldt dat de verplaatsing in de x-richting u_1 plus de afstand tot de scheurtip r gelijk is aan de halve scheuropeningsverplaatsing u_2 . Shih [18] heeft met de HRR-oplossing (2.21) afgeleid dat er de volgende lineaire relatie bestaat tussen de scheurtip openingsverplaatsing δ_t en de J-integraal:

$$\delta_t = d_n \frac{J}{\sigma_v} \tag{2.22}$$

waarin

$$d_n = \left(\frac{\alpha \sigma_v}{E} \left(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2\right)\right)^{1/n} \frac{2\tilde{u}_2}{I_n}$$

 d_n varieert van 0,1 tot 0,7 voor *n* tussen 3 en 20 in plane strain (Shih [17]).

2.2 Beschrijving van Plastisch Gedrag

2.2.1 de trekkromme

Als we het niet-lineair elastisch of plastische materiaalgedrag willen beschrijven dan is een vergelijking van de trekkromme noodzakelijk . Een trekkromme geeft een verband aan tussen een verlenging en de kracht die nodig is voor die verlenging. De kracht wordt omgezet in een (ware) spanning en de verlenging in een (ware) rek. De totale rek bestaat uit een lineair en niet-lineair gedeelte:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{pl} \tag{2.23}$$

Voor het lineaire gedeelte geldt:

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E} \tag{2.24}$$

waarin $E = (d\sigma/d\varepsilon)_{\varepsilon=0}$.

Metalen vertonen vaak een lineair elastisch gedeelte in de trekkromme voordat er plastische vervormingen optreden. Het verloop van de trekkromme is dan discontinu. Een beschrijving voor zo'n trekkromme kan zijn: :

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} & \text{als } \varepsilon \leq \frac{\sigma_{\nu}}{E} \\ \frac{\sigma_{\nu}}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\nu}}\right)^{n} & \text{als } \varepsilon > \frac{\sigma_{\nu}}{E} \end{cases}$$
(2.25)

waarin σ_{ν} de vloeispanning is, dat is de spanning waarbij plasticiteit begint. Experimenteel is het bepalen van de vloeispanning nog lastig, vooral in bepaalde staalsoorten. In analytische oplossingen geeft men de voorkeur aan een continue vergelijking van de hele trekkromme bijvoorbeeld de functie, zoals de Ramberg-Osgoodvergelijking:

7

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^{n-1} \right)$$
(2.26)

Voor metalen kunnen we de referentiespanning gelijk stellen aan de vloeispanning. De Ramberg-Osgood-vergelijking wordt dan:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma_{\nu}}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\nu}}\right)^n \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\nu}} = \frac{\sigma}{\sigma_{\nu}} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\nu}}\right)^n$$
(2.27)

Het niet-lineaire gedeelte van de Ramberg-Osgood-vergelijking wordt toegepast in de HRR-oplossing. In de eindige elementenmethode is een discontinue vergelijking zoals formule 2.25 juist heel goed toe te passen omdat de belasting toch al stapsgewijs wordt aangebracht. Daarnaast is in de eindige elementenmethode een vergelijking voor de plastische rek nodig. Met behulp van formule 2.25 volgt:

$$\varepsilon_{pl} = \frac{\sigma_{\nu}}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\nu}}\right)^{n} - \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_{\nu}}{E} \left\{ \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\nu}}\right)^{n} - \frac{\sigma}{\sigma_{\nu}} \right\}$$
(2.28)

De spanning bij een gegeven rek moet numeriek uit formule 2.28 worden bepaald. Daarvoor wordt een iteratieve relatie gebruikt:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \left(\varepsilon_{pl,\text{doel}} - \varepsilon_{pl}(\sigma_i)\right) \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{pl}}(\sigma_i)$$
(2.29)

waarin $\varepsilon_{pl,doel}$ de rek is waarbij de spanning moet worden berekend en

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon_{pl}} = \frac{E}{n\left(\frac{\sigma}{\sigma_{v}}\right)^{n-1} - 1}$$
(2.30)



figuur 2.8: De zones rond een scheur (Steenkamp [19]) process zone = breukproceszone

•



figuur 2.9: Schematische weergave van het taaie breukmechanisme - vorming, groei en samenklontering van microholtes -(Ewalds en Wanhill [20])

Een schatting voor $\varepsilon_{pl}(\sigma_i)$ kan worden verkregen door de lineaire term in formule 2.28 gelijk te stellen aan σ_v/E . Formule 2.28 is dan analytisch oplosbaar.

2.2.2 vloeicriterium en vloeiregel

Om plasticiteit in een continuum te kunnen beschrijven is een vloeicriterium en een constitutieve vergelijking nodig. Een vloeicriterium geeft een relatie tussen een meerassige spanningstoestand en éénassige spanningstoestand tijdens plastische vervormingen. Een veel gebruikt vloeicriterium is het Von Mises criterium:

$$\Phi = \sigma_e^2 - \sigma_M^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \right\} - \sigma_M^2 = 0 \quad (2.31)$$

waarin Φ de vloeifunctie is, σ_e de effectieve spanning en σ_M de (matrix) spanning volgens de éénassige trekproef, zoals bijvoorbeeld in formule 2.25. Op het moment dat de plastische vervorming begint is σ_M gelijk aan de vloeispanning σ_v . Met een vloeicriterium en de normaliteit regel kan een relatie tussen spanningen en rekken worden afgeleid. Deze relatie is de constitutieve vergelijking van het materiaal. Met het Von Mises criterium kunnen de incrementele Prandtl-Reuss-vergelijkingen worden afgeleid. In het geval van proportionele belasting is de incrementele plasticiteitstheorie van Prandtl-Reuss bij benadering gelijk aan de totale deformatietheorie. De totale deformatietheorie wordt onder meer gebruikt in de *J*-integraal theorie.

2.2.3 het taaie breukmechanisme en het Gurson model

In de plastische zone rond de scheurtip kan bij taaie breuk nog een zone worden onderscheiden waarin zeer grote vervormingen plaatsvinden. Deze zone wordt de breukproceszone (BPZ) genoemd, zie figuur 2.8. Hierin vindt het taaie breukmechanisme plaats dat uit de volgende drie stappen bestaat: holtevorming, holtegroei en holtecoalescentie ('void nucleation', 'void growth' en 'void coalescence'). In figuur 2.9 is het schademechanisme schematisch weergegeven. Microholten kunnen ontstaan bij insluitsels en tweede fase deeltjes. Als de spanning of rek een kritische waarde heeft bereikt dan kan het insluitsel breken of loslaten van het omringende materiaal (matrix). Daarvoor is een hydrostatische (trek) spanningstoestand nodig. Het Von Mises criterium (2.31) is onafhankelijk van de hydrostatische spanning. Immers tijdens plastische vervormingen blijft het volume op macroschaal constant en een hydrostatische spanning kan alleen volume veranderingen veroorzaken. Echter op microschaal verandert het volume wel.

Gurson [21] heeft uitgaande van een continuum met bolvormige microholten, die worden vertegenwoordig door een volumefractie f, een vloeicriterium opgesteld.



figuur 2.10: Vloeicriterium afhankelijkheid van de hydrostatische spanning voor verschillende waarden van f^* (Koers [24])



figuur 2.11: De gemodificeerde volumefractie (Koers [24])

$$\Phi = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_M^2} + 2f \cosh\left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma_M}\right) - \left(1 + f^2\right) = 0$$
(2.32)

waarin $\sigma_e = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{1/2}$, de macroscopische effectieve spanning is, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$, de spanningsdeviator en $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$, de gemiddelde of hydrostatische spanning. De echte microscopische spanningstoestand in de matrix wordt vertegenwoordig door σ_M . Door in formule 2.32 f = 0 te nemen wordt het Von Mises criterium verkregen. Tvergaard [22] heeft Gurson's vloeicriterium aangepast met een constante q op basis van eindige elementenberekeningen. In deze elementenberekeningen zijn de microholten ook daadwerkelijk gemodeleerd. Tvergaard gebruikte nog twee constanten maar die worden altijd gelijk gesteld aan één. Tvergaard en Needleman [23] hebben de holtevolumefractie f vervangen door een functie f^* die de coalescentie van microholten in rekening brengt. Het gemodificeerde Gurson vloeicriterium luidt nu:

$$\Phi = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_M^2} + 2qf^* \cosh\left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma_M}\right) - \left\{1 + \left(qf^*\right)^2\right\} = 0$$
(2.33)

Een twee-dimensionale weergave van het vloeioppervlak wordt gegeven in figuur 2.10. Het materiaal kan geen spanning meer opnemen als het vloeioppervlak tot een punt is reduceerd. Dit gebeurt bij $f_u^* = 1/q$. De functie f^* wordt gegeven door;

$$f^{*} = \begin{cases} f & \text{als } f \leq f_{c} \\ f_{c} + \frac{f_{\mu}^{*} - f_{c}}{f_{F} - f_{c}} (f - f_{c}) & \text{als } f > f_{c} \end{cases}$$
(2.34)

waarin f_c de kritische holtevolumefractie, f_F de holtevolumefractie bij breuk, en: $f_u^* = f^*(f_F) = 1/q$. In figuur 2.11 is de gemodifeerde functie van de holtevolumefractie weergegeven. Volgens Koplik en Needleman [25] is f_c afhankelijk van f_o de initiële volumefractie van de microholten. De verandering in de holtevolumefractie tijdens een belastingstap bestaat uit twee bijdragen: één ten gevolge van de groei van bestaande holten en één ten gevolge van nucleatie van holten:

$$\dot{f} = \dot{f}_{groei} + \dot{f}_{nucleatie} \tag{2.35}$$

waarin

$$\dot{f}_{groei} = (1 - f)\dot{\varepsilon}_{kk}^p \tag{2.36}$$

en

$$\dot{f}_{nucleatie} = A\dot{\sigma}_M + B\dot{\sigma}_{kk} / 3 \tag{2.37}$$

De parameters A en B zijn afhankelijk van het nucleatiemechanisme. Voor spanning gecontroleerde nucleatie worden A en B gegeven door (Chu en Needleman [26]):

. .
$$A = B = \frac{f_{N\sigma}}{s_{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\sigma_{M} + \frac{\sigma_{kk}}{3}\right) - \sigma_{N}}{s_{\sigma}}\right\}^{2}\right]$$

$$(2.38)$$

$$\operatorname{voor} \sigma_{M} + \frac{\sigma_{kk}}{3} = \left(\sigma_{M} + \frac{\sigma_{kk}}{3}\right)_{\max} \operatorname{en}\left(\dot{\sigma}_{M} + \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3}\right) > 0$$

waarin σ_N de gemiddelde maximale spanning voor nucleatie is, s_σ de standaarddeviatie van de spanning en $f_{N\sigma}$ de volumefractie van de deeltjes die door de spanning nucleëren. Voor rek gecontroleerde nucleatie geldt: B = 0 en A wordt gegeven door (Chu en Needleman [26]):

$$A = \frac{1}{E_t} \frac{f_{N\varepsilon}}{s_{\varepsilon} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s_{\varepsilon}} \right\}^2 \right]$$
voor $\varepsilon_M^p = \left(\varepsilon_M^p \right)_{\text{max}} \exp \left(\dot{\varepsilon}_M^p \right) > 0$

$$(2.39)$$

waarin E_t de afgeleide is van de spanning/rek kromme, ε_N de gemiddelde maximale plastische rek waarbij nucleatie plaats vindt s_{ε} de standaard deviatie van de plastische rek en $f_{N\varepsilon}$ de volumefractie van de deeltjes die door de plastische rek nucleëren. Het is mogelijk dat beide mechanismen voorkomen. Het is nog niet duidelijk welke deeltjes rek en welke spanning gecontroleerd zijn. Zowel in formule 2.38 als in 2.39 komt een normale verdeling voor. Dit is om het statistische gedrag van breuk in het Gurson model in te brengen. De parameters in het Gurson model kunnen in principe worden bepaald met zeer nauwkeurige éénassige trekproefen, metallografisch onderzoek en eindige elementenberekeningen.



.

figuur 3.1: Een 'spinneweb' elementenverdeling

3.1 Het Gebruikte Element

In alle berekeningen wordt een plane strain isoparametrisch bilineair 4-knooppuntselement gebruikt. Omdat het element isoparametrisch is, kan het een willekeurige vorm kan aannemen. Om bijvoorbeeld een scherpe scheur te modelleren kunnen we een vierhoekig element laten instorten tot een driehoek door knooppunten op een rand dezelfde coördinaten te geven. Het element is geschikt voor berekeningen met grote geometrieveranderingen door een speciale optie (constant dilation). In de literatuur wordt voor deze berekeningen vaak het lineaire driehoekselement genomen. Dit is het eenvoudigste vlakke element omdat de rekken in het element constant zijn waardoor de berekeningen relatief eenvoudig zijn. Het driehoekselement is echter minder geschikt voor de schadeberekeningen. De verschillen tussen beide elementen zijn overigens minimaal. Kwadratische en hogere orde elementen zijn niet geschikt voor grote geometrieverandering berekeningen (DeLorenzi [27] en Nagtegaal en De Jong [28]).

3.2 De Eindige Elementenverdeling

De randvoorwaarden formulering volgens small scale yielding stelt geen eisen aan de geometrie van de elementenverdeling (mesh). Om het aantal elementen minimaal te houden wordt voor een vlakke schijf gekozen. In de literatuur wordt bijna altijd deze geometrie genomen. Vanwege symmetrie in het scheurvlak ($\theta = 0$) wordt alleen één helft van de schijf gemodelleerd. De scheurtip ligt in het midden van de schijf. De straal van de schijf is gelijk aan de scheurlengte *a*. De knooppunten op de scheurflank krijgen geen voorgeschreven verplaatsing of kracht ($0 < r < a \text{ en } \theta = \pi$). De knooppunten in het ligament krijgen een voorgeschreven verplaatsing van nul in de *y*-richting ($u_2 = 0$ voor $0 < r < a \text{ en } \theta = 0$). In de *x*-richting krijgen deze knooppunten geen voorgeschreven verplaatsing of kracht. De knooppunten op de rand krijgen een kracht (tractie) voorgeschreven volgens (B1.3) of een verplaatsing volgens formule 2.9 en 2.10 ($r = a \text{ en } 0 \le \theta \le \pi$). Bij de rand zijn de gradiënten veel kleiner dan bij de scheurtip. Om zo min mogelijk elementen te gebruiken worden daarom de elementen van de scheurtip af naar de rand steeds groter genomen. Op deze wijze ontstaat een half 'spinneweb', zie figuur 3.1.

De scheurtip kan op twee op manieren worden gevorm. De eerste manier is door een scherpe scheuren de tweede door een afgeronde scheurtip. Bij een scherpe scheur kan dan nog een onderscheid worden gemaakt tussen een reguliere en een singuliere scheurtip. Bij een reguliere scheurtip wordt de scheurtip door één knooppunt vertegenwoordigd. Dit knooppunt behoort tot alle er om heen liggende elementen. De verplaatsing in de



figuur 3.2: Detail van een elementenverdeling met een scherpe scheurtip (de pijl geeft de scheurtip aan)

:



figuur 3.3: Detail van een elementenverdeling met een afgeronde scheurtip (de pijl geeft de scheurtip aan) De verplaatsing van knooppunt A (COD) wordt gebruikt voor het nagaan van een stationaire oplossing.

elementen is lineair met de afstand tot de scheurtip r. Bij een singuliere scheurtip wordt de scheurtip door meerdere knooppunten gevormd. Hierdoor wordt er een 1/rreksingulariteit verkregen (Barsoum [29]). Het aantal knooppunten is afhankelijk van het aantal elementen in de omtrekrichting. Bij ideaal plastische materiaalgedrag heerst er een 1/r reksingulariteit. Materialen met versteviging hebben een $1/r^{n/(n+1)}$ reksingulariteit. De elementenverdeling rond de scheurtip is weergegeven in figuur 3.2. De afgeronde scheurtip is weergegeven in figuur 3.3. De afgeronde scheurtip heeft natuurlijk invloed op de eindige elementen berekening. Daarom mag de afronding niet te groot zijn. Daarnaast moet de berekening onafhankelijk zijn van de afronding. Dat betekent dat de afronding door plastische vervormingen zo groot moet zijn dat het lijkt als of de begin scheurgeometrie een scherpe scheur is. Als deze situatie bereikt, dan is de berekening een stationaire oplossing. Deze aanpak is toegepast door McMeeking [30]

Voor de schade berekeningen wordt de spinneweb elementenverdeling rond de scheurtip vervangen door een rechthoekige elementenverdeling, zie figuur 3.4a, omdat scheurgroei afhankelijk is van de grootte van elementen. Hoe kleiner een element is, des te hoger de spanningen zijn en des te sneller de holtevolumefractie bij breuk bereikt wordt. De elementenverdeling van figuur 3.4a heeft voor de scheurtip uit 20 vierkante elementen met een zijde van $0,2x10^{-3}R$ (*R* is straal van de 'spinneweb' elementenverdeling). Verfijningen van deze elementenverdeling worden gebruikt om de invloed van de elementgrootte te onderzoeken, zie figuur 3.4b en c. Voor de scheurtip uit zijn nu respectievelijk 36 vierkante elementen met een zijde van $0,05x10^{-3}R$.

3.3 De Eindige Elementenberekening, Nauwkeurigheid en Convergentie

De nauwkeurigheid van een eindige elementenberekening kan worden verhoogd door simpelweg meer elementen te nemen. Maar hoeveel elementen zijn er nodig opdat het resultaat niet noemenswaardig afwijkt als er meer elementen worden genomen? Dus wanneer is er een geconvergeerde oplossing?

Lineair elastische berekeningen zijn relatief kort omdat er geen iteraties worden uitgevoerd. De nauwkeurigheid wordt alleen bepaald door het aan elementen. We kunnen de nauwkeurigheid controleren met behulp van de J-integraal. De belasting wordt geheel bepaald door de spanningsintensiteitsfactor K_I die via formule 2.19 kan worden omgezet in een J_{app} . In een spinneweb elementenverdeling kunnen evenveel J-integralen worden bepaald als er elementen in de radiale richting zijn. Als de elementenverdeling goed is dan is de berekende J-integraal voor elk pad gelijk aan J_{app} . Dit komt neer op: 'Wat je erin stopt moet er ook weer uitkomen'.

Plastische berekeningen duren vrij lang. De berekende spanningen en rekken moeten het verloop van een opgeven trekkromme volgen. Daarvoor wordt de belasting



figuur 3.4: Details van de gebruikte elementenverdelingen in schade berekeningen a) elementgrootte voor de scheurtip van $0.2x10^{-3}R$ b) elementgrootte voor de scheurtip van $0.1x10^{-3}R$ c) elementgrootte voor de scheurtip van $0.05x10^{-3}R$ (de pijl geeft de scheurtip aan)

stapsgewijs (incrementeel) aangebracht. Per increment vinden er iteraties plaats om tot de gewenste nauwkeurigheid te komen. Deze moet zo worden ingesteld dat bij het verhogen van die nauwkeurigheid het resultaat relatief weinig verandert. Het aantal iteraties is niet alleen afhankelijk van de vereiste nauwkeurigheid maar ook van de belastingstappen. Hoe kleiner de stapgrootte, hoe minder iteraties. De uitvoer en de rekentijd nemen echter wel toe als de stapgrootte kleiner wordt. Convergentie wordt bepaald met de residuele krachtmethode. Dat houdt in dat de elementenverdeling in evenwicht moet zijn.

In de plastische berekeningen maken we nog een onderscheid tussen kleine en grote geometrieveranderingen. In een eindige elementenberekening met kleine geometrieveranderingen worden de knooppunten niet aangepast aan de de verplaatsing zoals die na elk increment wordt berekend. Een oplossing gebaseerd op kleine geometrieveranderingen kan dus worden gebruikt om te worden vergeleken met een analytische oplossing zoals de HRR-oplossing. Bij een oplossing gebaseerd op grote geometrieveranderingen worden de knooppunten wel aangepast aan de verplaatsing. Voor het afronden van de scheurtip moet een eindige elementenberekening dus gebaseerd zijn op grote geometrieveranderingen. De controle voor een stationaire oplossing in grote geometrieveranderingen wordt gedaan met behulp van de verplaatsing van bijvoorbeeld knooppunt A als functie van de J-integraal, zie figuur 3.3. Voor een stationaire oplossing moet dit een rechte lijn opleveren.

In de schadeberekeningen wordt scheurgroei gesimuleerd met het gemodificeerde Gurson model. Een element is gescheurd als de holtevolumefractie in één van de vier integratiepunten 90 % van de holtevolumefractie bij breuk heeft bereikt. Deze grens is genomen omdat instabiliteit optreedt als de holtevolumefractie de fractie bij breuk nadert. Een 'gescheurd' element wordt niet uit de elementenverdeling verwijderd maar krijgt een stijfheid nul. De scheurgroeistap is gelijk aan de lengte van de elementzijde. De *J*-integraal wordt genomen in het increment waarin de voidvolumefractie bij breuk is bereikt. In de schade berekeningen kunnen we de nauwkeurigheid niet opvoeren door meer elementen nemen omdat de scheurgroei afhankelijk is van de elementgrootte.

3.4 Computers en Programma's

De meeste eindige elementenberekeningen zijn uitgevoerd met programma MARC [31] op een Digital 3100 werkstation met het besturingssysteem Ultrix versie 4.3. Enkele schade berekeningen zijn uitgevoerd op een Digital 'Alpha' 3000/400 werkstation met het besturingssysteem OSF/1 versie 1.2. Een schade berekening is ook uitgevoerd op een Convex supercomputer. Verschillen waren er alleen in rekentijd. De Convex is ongeveer 8 keer zo snel als de Digital 3100. De Alpha is iets sneller dan de Convex.

MARC is gebaseerd op de verplaatingsmethode en is geschikt voor geometrische, materiële en rek niet-lineairiteiten. Hiermee kunnen respectievelijk grote rotaties, :

versteviging en grote rekken worden beschreven. De elastische berekeningen en enkele plastische kleine geometrieverandering berekeningen zijn uitgevoerd met MARC versie K4.2. De andere, plastische berekeningen zijn uitgevoerd met versie K5.1. Deze versie is in tegenstelling tot K4.2 geheel in dubbele precisie. Dit maakte voor de berekeningen relatief weing uit. Voor het onderzoek zijn in overleg met de MARC Analysis Research Corporation verbeterde versies van de schadesubroutines ingebracht. De laatste schade berekeningen zijn uitgevoerd met MARC K5.2 waarin de verbeterde versies geïmplementeerd zijn.

Elementenverdelingen worden gemaakt met een fortran 77 mesh generatie programma. Voor de schade berekeningen worden de elementenverdelingen aangepast met behulp van *MENTAT II 1.2.0*, de pre- en postprocessor van *MARC*. Het programma *history* [32] wordt gebruikt om een bepaalde grootheid, bijvoorbeeld een spanningscomponent, als functie van de belasting uit de uitvoer te halen. Het programma *section* [33] wordt gebruikt om een bepaalde grootheid langs een pad door de elementenverdeling uit de uitvoerfile te halen. Het virtuele scheuruitbreidingsprogramma, *vce* [34], dat gebruikt wordt om de *J*-integraal te berekenen, is gebaseerd op de methode van DeLorenzi.



figuur 4.1: De J-integraal als functie van de afstand tot de scheurtip in verschillende elementenverdelingen (elastische berekening), bias = verhouding tussen opeenvolgende elementen Δl = grootte van het element bij de scheurtip, R = straal 'spinneweb'



figuur 4.2: Verschil in de J-integraal tussen een reguliere en een singuliere scheurtip

4 RESULTATEN

4.1 Elastische Eindige Elementenberekeningen

4.1.1 de berekeningen

De in deze paragraaf beschreven eindige elementenresultaten zijn gebaseerd op lineair elastisch materiaalgedrag. Gegevens over het aantal elementen in de omtrekrichting en radiale richting, de verhouding tussen opeenvolgende elementen, de grootte (lengte) van de elementen rond de scheurtip, de afrondingsstraal, de aanwezigheid van een 1/rreksingulariteit zijn vermeld in *bijlage 3*. De elasticiteitsmodulus *E* is 500 en de constante van Poisson v is 0,3. De scheurlengte van de elementenverdeling is 1000. De scheurlengte heeft in de randvoorwaarden formulering echter geen betekenis want de belasting schaalt met de opgelegde K_I . De berekeningen zijn uitgevoerd in plane strain.

Omdat de eindige elementenberekeningen gebaseerd zijn op een kleine geometrieverandering en lineair elastisch materiaalgedrag kan de belasting, in de vorm van een spanningsintensiteitsfactor K_I , willekeurig gekozen worden. De met de virtuele scheuruitbreidingsmethode bepaalde J-integraal wordt geschaalt met J_{app} . De afstand tot de scheurtip r wordt geschaalt met de scheurlengte a.

4.1.2 aantal elementen

Uit figuur 4.1 volgt dat de eindige elementen oplossing de exacte oplossing steeds beter benadert naarmate er meer elementen worden genomen. Dit geldt zowel voor het aantal elementen in de omtrekrichting als in de radiale richting. Maar altijd blijven de eerste twee tot drie paden vanaf de scheurtip sterk afwijken van de exacte oplossing (= J_{app}). De spannings- en rekgradiënten zijn te groot om te kunnen worden gemodelleerd. Afgezien van gebied r/a < 0,01 zijn de verschillen tussen 900 elementen en 1500 niet groter dan 1%.

Figuur 4.2 laat het verschil zien tussen een reguliere scheurtip en een singuliere scheurtip. We zien dat de singuliere scheurtip vooral in de eerste twee paden een verbetering geeft. Daarnaast worden bij de overige paden iets hogere waarden gekregen.

Bij constant aantal elementen is de verhouding tussen opeenvolgende elementen (bias), gezien van de scheurtip gevariëerd. Het verloop van J tegen r wordt steiler naarmate die verhouding groter wordt genomen, zie figuur 4.3, en daarmee de afwijking ten opzichte van de exacte oplossing (horizontale lijn). Hoe groter het randelement des te slechter de randvoorwaarden kunnen worden overgebracht op de overige elementen. De verhouding tussen opeenvolgende elementen mag dus niet te groot worden genomen.

Voor de plastische berekeningen met een grote geometrieverandering formulering gaan we uit van een afgeronde scheurtip. De afrondingsstraal mag niet te groot worden genomen wat in figuur 4.4 is weergegeven. Een afrondingsstraal van $0.01 \times 10^{-3}R$ heeft



figuur 4.3: De J-integraal als functie van de afstand tot de scheurtip bij verschillende verhoudingen tussen opeenvolgende elementen (bias) $\Delta l = grootte$ van het element bij de scheurtip, R = straal 'spinneweb'



figuur 4.4: Verschil in de J-integraal ten gevolge van de afrondingsstraal R = straal 'spinneweb'



figuur 4.5: Verschil in de J-integraal tussen voorgeschreven krachten en verplaatsingen (elastische berekening)



figuur 4.6: Verschil in potentiële (elastische) energie tussen de exacte oplossing en de eindige elementenoplossing



figuur 4.7: Verschil in de J-integraal tussen voorgeschreven krachten en verplaatsingen (plastische berekening)



figuur 4.8: Verschil in potentiële (plastische) energie tussen de exacte oplossing en de eindige elementenoplossing

weinig invloed. Een tien keer zo grote afrondingsstraal geeft duidelijk een verslechtering van het resultaat. De afrondingsstraal staat in relatie met de scheurlengte a of straal R van de eindige elementenverdeling (spinneweb). Wordt de straal of scheurlengte van de elementenverdeling groter genomen dan kan ook de afrondingsstraal groter worden.

4.1.3 verschil voorgeschreven krachten en verplaatsingen

In figuur 4.5 laat het verschil zien in de *J*-integraal tussen een berekening met voorgeschreven verplaatsingen en een berekening met voorgeschreven krachten. Met voorgeschreven verplaatsingen zijn de berekende *J*-waarden hoger dan met met voorgeschreven krachten. Dit kan als volgt verklaard worden: een eindige elementenverdeling gedraagt zich altijd 'stijver' dan de exacte oplossing omdat het aantal vrijheidsgraden (lees: elementen en/of knooppunten) die beschreven worden, eindig is. Terwijl de exacte, analytische oplossing oneindig veel vrijheidsgraden beschrijft. Hierdoor is ook het aantal 'mogelijkheden' om te vervormen beperkt. Bij voorgeschreven verplaatsingen is dan de hoeveelheid potentiële energie groter dan in de exacte oplossing, zie figuur 4.6. Dit levert hogere waarden op voor de *J*-integraal. Bij voorgeschreven krachten is het precies andersom. De stijfheid van de elementenverdeling nadert de exacte oplossing naarmate er meer vrijheidsgraden worden genomen.

4.2 Plastische Eindige Elementenberekeningen

4.2.1 de berekeningen

De in deze paragraaf beschreven eindige elementen resultaten zijn gebaseerd op lineair elastisch-plastisch materiaalgedrag. In *bijlage 3* zijn de gegevens vermeld over de verschillende eindige elementenverdelingen. Voor de trekkromme wordt formule 2.25 en 2.28 genomen, waarin n = 5. Er is ook een berekening voor n = 10 uitgevoerd. De verhouding tussen de elasticiteitsmodulus en de vloeispanning is 300. De vloeispanning krijgt de waarde 1. De afstand tot de scheurtip wordt geschaald door de scheurlengte a, door de straal van de 'spinneweb' elementenverdeling R, of door de 'verre veld' *J*-integraal J_{ff} en de vloeispanning σ_v . De verre veld *J*-integraal is de waarde van de *J*-integraal van het tweede pad vanaf de rand. De berekende spanningen worden geschaald door de vloeispanning en de berekende *J*-integraal wordt geschaald door J_{app} . De opgelegde *J*-integraal, J_{app} , wordt weer door de vloeispanning en de scheurlengte dimensieloos gemaakt. Deze *J*-integraal krijgt het symbool J_{dim} .

De belasting wordt stapsgewijs opgevoerd. De eerste belastingstap is zo hoog dan de vloeispanning net in één van de elementen wordt bereikt. De volgende belastingstappen zijn ongeveer even groot. Na een aantal stappen wordt de belasting verhoogd en blijft weer een aantal stappen constant. Vervolgens wordt de belastingstap verhoogd en weer een aantal stappen constant gehouden, et cetera. In sommige gevallen is het opvoeren van



figuur 4.9: De J-integraal als functie van de afstand tot de scheurtip bij verschillende belastingen in een plastische berekening (ssysgcp50)



figuur 4.10: De normaalspanning als functie van de afstand tot de scheurtip in een kleine geometrieverandering berekening bij verschillende belastingen (ssysgcp50)

de belasting aan *MARC* overgelaten (auto increment optie). De ASTM limiet voor small scale yielding stel eisen voor de maximale K_I . Substitutie van a = 1000 en $\sigma_v = 1$ in formule 2.13 levert: $K_I \le 20$. Met formule 2.19 volgt dan: $J_{app} \le 1,2$ en dus $J_{dim} \le 1,2x10^{-3}$. De ASTM limiet is echter geen beperking voor de eindige elementenberekening. De berekeningen zijn in de meeste gevallen doorgegaan tot een belasting van $J_{dim} = 2,7x10^{-3}$. De berekeningen gebaseerd op grote geometrieveranderingen zijn niet tot die belasting gekomen omdat de vervormingen bij de scheurtip te groot zijn. Dit probleem kan verholpen worden door de elementen bij de scheurtip groter te nemen.

Alle berekeningen zijn uitgevoerd met een convergentiewaarde van 10⁻⁵ (verhouding tussen de maximale residuele kracht en de maximale reactiekracht) voor het benaderen van de trekkromme. Het blijkt dat voor een convergentiewaarde van 10⁻⁴ de resultaten niet noemenswaardig verschillen met die voor een convergentiewaarde van 10⁻⁵. Bij deze convergentiewaarde kunnen we dus zeker spreken van een convergeerde oplossing ten opzichte van de trekkromme.

Naast de *J*-integraal wordt nu ook de spanning in de *y*-richting in het ligament bekeken. Deze wordt verder de normaalspanning genoemd. Ervaring heeft geleerd dat de gemiddelde elementspanning het nauwkeurigst is. Dit betekent dat niet de spanning in het ligament wordt berekend maar de spanning in het vlak onder een hoek van 180° gedeeld door twee keer het aantal elementen in de omtrek richting. In geval van 20 elementen is dat dus 4,5°. Door middel van extrapolatie naar de knooppunten is wel mogelijk om de spanning in het ligament te krijgen, maar dit is in het algemeen minder nauwkeurig.

4.2.2 verschil voorgeschreven krachten en verplaatsingen

Om het verschil te onderzoeken tussen voorgeschreven krachten en verplaatsingen worden er twee dezelfde elementenverdelingen gebruikt waarvan alleen de randvoorwaarden verschillen (ssysgcp11 en ssysgcp14). Voorgeschreven krachten zorgen voor een grotere afwijking ten opzichte van de aangebrachte *J*-integraal dan voorgeschreven verplaatsingen, zie figuur 4.7. De afwijking is positief bij voorgeschreven krachten en negatief bij verplaatsingen. In elastische berekeningen is de 'stijfheid' van de elementenverdeling hoger dan de exacte oplossing. Door plasticiteit wordt de stijfheid van de elementenverdeling echter weer verlaagd zodat de stijfheid op een gegeven moment kleiner wordt dan de exacte, elastische oplossing. Dat is bij punt *X* in figuur 4.8. Vanaf dat punt is de afwijking van de potentiële energie bij voorgeschreven verplaatsingen ten opzichte van de stijfheid van de exacte, lineaire elastische oplossing kleiner dan de afwijking van de potentiële energie bij voorgeschreven krachten ten opzichte van de exacte oplossing. Dit betekent dat in plastische berekeningen het beter is om de voorgeschreven verplaatsingen als randvoorwaarden te nemen.



 $r/(J/\sigma_v)$

figuur 4.11: De normaalspanning als functie van de afstand tot de scheurtip geschaald door J/σ_v in kleine geometrieverandering berekening bij verschillende belastingen (ssysgcp50)



figuur 4.12: Verschil in de berekende J-integraal tussen 600 en 1500 elementen bij $J_{dim} = 1, 1x 10^{-3}$

4.2.3 kleine geometrieverandering berekeningen

De *J*-integraal als functie van de afstand tot de scheurtip bij verschillende belastingen in een kleine geometrieverandering berekening (ssysgcp50) is weergegeven in figuur 4.9. Met stijgende belasting groeit de plastische zone en wijken de paden in de plastische zone sterk af van de overige paden in de elastische zone. Diep in de plastische zone bij hogere belastingen ziet het er naar uit dat de *J*-integraal weer constant wordt. Er is dus geen padonafhankelijkheid in de overgang van de elastische zone naar de plastische zone. De oorzaak ligt in verschil tussen de totale deformatietheorie waarop de *J*-integraal is gebaseerd en incrementele plasticiteitstheorie waarop de eindige elementenberekening is gebaseerd. De twee theorieën zijn alleen gelijk in geval van een proportionele belasting. Blijkbaar is er geen proportionele belasting in het overgangsgebied. Dit resultaat is ook gevonden door Stump en Zywicz [35]. Merk op dat het element bij de scheurtip in berekening ssysgcp50 te klein is genomen waardoor de *J*-integraal als functie van de afstand tot de scheurtip in de elastische zone schuin verloopt, zie paragraaf 4.1.2.

Bekijken we normaalspanningsverdeling in figuur 4.10 dan zien we dat de spanning bij de scheurtip sterk omhoog gaat en dat de spanning steeds groter wordt naarmate de belasting hoger wordt. De scheurtip is dus nog steeds een singulier punt. In figuur 4.11 is de normaalspanning weergegeven als functie van $r/(J/\sigma_v)$, waarin voor J de verre veld J-integraal is genomen. De spanningen voor alle belastingniveaus vallen nu op één lijn. Dit is een bevestiging van het uitgangspunt van de J-integraal theorie dat de spanningstoestand bij de scheurtip volledig wordt bepaald door één enkele parameter, namelijk de J-integraal, zie HRR-oplossing paragraaf 1.2.4. Een spanningstoestand die deze eigenschap heeft, wordt 'self similar' genoemd. De spanningen in de eerste elementen vanaf de scheurtip wijken nog wel iets af van de lijn vanwege de onnauwkeurigheid, zie ook paragraaf 4.1.2.

4.2.4 grote geometrieverandering berekeningen

In figuur 4.12 is de *J*-integraal als functie van de afstand tot scheurtip *r* van twee elementenverdelingen bij $J_{dim} = 1,1 \times 10^{-3}$. De afstand tot de scheurtip wordt genomen in de onvervormde elementenverdeling. Uit de figuur volgt dat het verschil tussen 600 elementen en 1500 elementen relatief klein is.

Het nagaan van een stationaire oplossing wordt gedaan met behulp van de verplaatsing in de y-richting van knooppunt A, zie figuur 3.3. Deze verplaatsing willen we vergelijken met de scheurtipopeningsverplaatsing uit paragraaf 2.1.4. Daarom wordt deze verplaatsing met een factor twee vermenigvuldigd. Dit wordt de scheuropeningsverplaatsing (COD) van knooppunt A genoemd. In figuur 4.13a de COD als functie van J_{ff} weergegeven. De afgeleide van de scheuropeningsverplaasting naar J_{ff} verandert nog maar weinig als $J_{dim} = 0.3 \times 10^{-3}$, zie figuur 4.13b. Er is dan een lineaire relatie tussen de scheuropeningsverplaatsing en de J-integaal. De helling van de







figuur 4.14: De contour van de 'onvervormde' elementenverdeling en de 'vervormde' elementenverdeling op het moment van een stationaire oplossing (ssylgcf71)

grafiek is ongeveer 0,26. De helling volgens formule 2.22 is 0,34 (Shih [17]). Het verschil tussen wordt niet alleen veroorzaakt doordat het een grote geometrieverandering formulering is gebruikt maar ook omdat de scheuropeningsverplaatsing van knooppunt *A* niet gelijk is aan de scheur<u>tip</u>openingsverplaatsing. Dat punt is afhankelijk van de belasting. We kunnen hiervoor geen 'vast' punt nemen zoals knooppunt *A*. Als $J_{dim} = 0.3 \times 10^{-3}$ dan is er stationaire oplossing bereikt. De 'vervormde' elementenverdeling bij $J_{dim} = 0.3 \times 10^{-3}$ en de 'onvervormde' elementenverdeling is weergegeven in figuur 4.14. In de figuur is goed te zien dat de eerste ring elementen om de scheurtip zeer sterk vervormd zijn. De rekken zijn daar ongeveer 100%! De afrondingsstraal is ongeveer 4,5 maal zo groot geworden ten opzichte van de oorspronkelijke afrondingsstraal. Dit komt overeen met de resultaten van McMeeking [30].

In figuur 4.15 is de normaalspanningsverdeling weergegeven voor n = 5(ssylgcf71). In figuur 4.16 is de afstand tot de scheurtip geschaalt door J/σ_v . Door het afronden van de scheurtip is er een maximum in de spanningsverdeling gekomen. De spanning in de x-richting is nul bij de scheurtip. Van de scheurtip af zal de spanning in x-richting in het ligament toenemen vanwege de scheur. Vervolgens zal de spanning weer afnemen omdat de invloed van de scheur minder wordt. Via het Von Mises criterium zijn de spanningscomponenten aan elkaar gekoppeld. Daardoor heeft de spanning in de y-richting ook een dergelijk verloop. Het maximum blijft constant zodra er een stationaire oplossing is bereikt. De plaats van het maximum is wel steeds verder weg van de scheurtip maar geschaald met J/σ_v is de plaats ongeveer 0,5. De grootte en plaats van het maximum komt overeen met de resultaten van McMeeking [30]. In figuur 4.17 is de normaalspanningsverdeling voor een versteviging van n = 10 weergegegeven. De plaats van het maximum in de spanning is verschoven naar $1 J/\sigma_v$. De grootte van het maximum omlaag gegaan. Dus het maximum is afhankelijk van de versteviging. Het maximum zal groter worden als de versteviging toeneemt en geheel verdwenen zijn bij n = 1. Het maximum zal afvlakken als de versteviging afneemt.

Bij de scheurtip gaat de spanning in y-richting weer iets omhoog ten gevolge van de hoge rekken, meer dan 150%. Dit is fysische niet correct. De scheur is al lang gegroeid voordat dit verschijnsel kan plaats vinden. Dit effect is ook gevonden door McMeeking [30]. Bij minder verstevinging verdwijnt de 'krul' in het spanningsverloop. Dit gebeurt ook als de elementen rond de scheurtip te groot worden genomen. Het effect van versteviging op de verre veld J-integraal wordt geïllustreerd in figuur 4.18. Minder versteviging zorgt voor een grotere afwijking ten opzichte van de aangebrachte J-integraal. Dit kan weer verklaard worden met de 'stijfheid' van de elementenverdeling zoals is gedaan in paragraaf 4.2.2. De kleinere verstevigingexponent zorgt voor grotere plastische vervormingen en dus voor een lagere stijfheid.



figuur 4.15: De spanning in de y-richting in het ligament als functie van de afstand tot de scheurtip in een grote geometrieverandering berekening bij verschillende belastingen (ssylgcf71)



figuur 4.16: De spanning in de y-richting in het ligament als functie van de afstand tot de scheurtip geschaald door J/σ_v in grote geometrieverandering berekening bij verschillende belastingen (ssylgcf71)



figuur 4.17: De spanning in de y-richting in het ligament bij n = 10 als functie van de afstand tot de scheurtip geschaald door J/σ_v in grote geometrieverandering berekening bij verschillende belastingen (ssylgcf74)



figuur 4.18: Verschil in de verre veld J-integraal tussen n = 5 en 10



figuur 4.19: Verschil in de spanning in de y-richting in het ligament door verschillende manieren van modeleren van de scheurtip bij $J_{dim} = 0.90 \times 10^{-3}$



figuur 4.20: De normaalspanningverdeling als functie de T-spanning, $T = -K_I/\sqrt{\pi a} = 0,09, 0,23, 0,36$ en $0,44\sigma_v$ (grote geometrieverandering berekening, ssylgcf72)

4.2.5 het modeleren van de scheurtip

Een kleine geometrie berekening met een reguliere elementenverdeling, een kleine geometrieverandering berekening een singuliere elementenverdeling en een grote geometrieverandering berekening zijn met elkaar vergeleken en met de HRRoplossing in figuur 4.19. De verstevigingsexponent n is 5. Op dubbel logaritmische schaal kunnen we twee rechte in elk van de normaalspanningsverdelingen herkennen. In de elastische zone heeft deze rechte een helling van -1/2 en in de plastische zone een helling van -1/6, zie formule 2.20. Het snijpunt van deze twee lijnen zal steeds verder van de scheurtip af liggen naarmate de plastische zone groeit. Het verschil tussen een reguliere elementenverdeling en een singuliere elementenverdeling is niet zo groot omdat de versteviging te groot is om het effect van 1/r te zien. De twee kleine geometrieverandering oplossingen benaderen de HRR-oplossing als r erg klein wordt. De afwijking verder weg van de scheurtip is te wijten aan het verschil tussen de totale en incrementele plasticiteitstheorie. Daarnaast bevat de HRR-oplossing geen lineair elastische bijdrage. De spanningen in een grote geometrieverandering oplossing vallen na het maximum samen met de spanningen in een kleine geometrieverandering oplossing. De grootte van de zone waarin grote vervormingen plaats vinden, komt overeen met de plaats van het maximum in de spanning. Volgens de resultaten in paragraaf 4.2.4 is deze zone afhankelijk van de versteviging. Er kan echter gesteld worden dat alle grote vervormingen ongeacht de vervormingen plaatsvinden in gebied dat kleiner is dan $2 J/\sigma_v$. In deze zone vindt het taaie breukproces plaats.

4.2.6 de T-spanning

Het toevoegen van de *T*-spanning in de SSY randvoorwaarden formulering heeft tot gevolg dat de eindige elementenberekening geometrie-afhankelijk wordt. Immers de *T*-spanning is via de biaxialiteit geralateerd aan de proefstukgeometrie, zie figuur 2.6. Dat betekent dat de scheurlengte nu wel een betekenis heeft. De tweede term is in de verplaatsingen in de *x*-inrichting is: $-xT(1-v^2)/E$ en in de *y*-richting: $yT(1-v^2)/E$. Er wordt gekozen voor de centraal gescheurde éénassig belaste 'oneindige' plaat. Deze proefstukgeometrie heeft een biaxialiteit van -1, zie figuur 2.6. In figuur 4.20 is de normaalspanning als functie van $r/(J/\sigma_v)$ weergegeven. Vergeleken met figuur 4.16 zijn er twee verschillen. Het eerste, belangrijkste verschil is dat de self similarity niet meer aanwezig is. Dat houdt dat *J*-integraal als één parameter niet meer de spanning iets lager is. De verschillen zijn niet echt opzienbarend. Dit komt omdat de *T*-spanning nog erg klein is. Bij K = 20 en a = 1000 volgt: $\sigma = 0.3 \sigma_v$ en $T = -0.3 \sigma_v$. Uit de literatuur is bekend dat positieve *T*-spanningen een kleine verhoging van de spanningen opleveren.



figuur 4.21: Scheurweerstand krommen bij verschillende belastingstappen $\Delta l/R = 0.2x10^{-3}$, * deactiveren element voor scheurtip (lgcv201, lgcv202, lgcv204 en lgcv209)



figuur 4.22: Scheurweerstand krommen bij verschillende belastingstappen, $\Delta l/R = 0.1 \times 10^{-3}$, * deactiveren element voor scheurtip (lgcv303, lgcv306, lgcv308 en lgcv309)

4.3 Schade Eindige Elementenberekeningen

4.3.1 de berekening

De in deze paragraaf beschreven eindige elementen resultaten zijn gebaseerd op lineair elastisch-plastisch materiaalgedrag met het gemodificeerde schade model van Gurson (grote geometrieverandering berekeningen). Gegevens over de elementenverdelingen staan in *bijlage* 3 vermeld. In deze schade berekeningen worden alleen de belastingstap en de elementgrootte voor de scheurtip uit gevariëerd. De scheurtip is iets uit het midden verschoven om het blok vierkante elementen in te kunnen passen. Hierdoor is de scheurlengte 998,4 geworden.

Materiaalgegevens voor het Gurson model zijn gebaseerd op het werk van Koers [24] en komen overeen met het constructie staal *Fe 510*. Er is een vermoeden dat het nucleatiemechanisme in *Fe 510* door spanning gecontroleerd wordt. Sterke bewijzen zijn sowieso nog niet te geven met betrekking tot het nucleatiemechanisme. De volumefractie van de nucleërende deeltjes $f_{N\sigma} = 0,001$, $f_F = 0,15$, $\sigma_N = 4\sigma_v$ en $s_{\sigma} = 0,5\sigma_v$, zie formule 2.38. Op basis van het werk van Koplik en Needleman [25] wordt gekozen voor $f_c = 0,03$ en q = 1,25. Overige gegevens zijn: $E/\sigma_v = 500$, de trekkromme is volgens formule 2.25 en 2.28 waarin n = 5. De maximale opgelegde *J*-integraal volgens de ASTM limiet voor small scale yielding is nu: $J_{dim} \leq 7,3x10^{-4}$.

De eerste schade berekeningen (lgcv202 en lgcv303) zijn eerst uitgevoerd met dezelfde relatieve convergentiewaarde (verhouding tussen de maximale residuele kracht en de maximale reactiekracht) van 10⁻⁵ als toegepast tot de plastische berekeningen. Na enkele elementen scheurgroei kon echter de vereiste convergentie niet gehaald worden binnen 20 iteraties. Dit wordt veroorzaakt door het deactiveren van de gescheurde elementen. Na het deactiveren is er plotseling een grote afwijking met het vloeicriterium. Het verhogen van het aantal iteraties helpt dan vaak ook niet. Bij deze berekeningen is dit probleem verholpen door de relatieve convergentiewaarde te verhogen naar 10-2 en het minimum aantal uit te voeren iteraties per belastingstap te verhogen naar 5. Hierdoor is de berekening nauwkeurig genoeg behalve na scheurgroei. In sommige berekeningen is de convergentiewaarde verhoogd op het moment dat het probleem zich voordeed. Bij kleinere elementen en belastingstappen verdween het probleem en kon de convergentie weer worden opgevoerd naar een relatieve waarde van 10⁻⁵. In latere berekeningen is de convergentie op een absolute waarde (alleen residuele kracht) van 10⁻⁴ ingesteld. Dit is gedaan omdat bij stijgende belasting de reactiekrachten ook stijgen. Dit betekent dat bij een relatieve convergentie de onnauwkeurigheid absoluut gezien na elk increment scheurgroei groter wordt.

Na een nauwkeurigere bestudering van de berekening met de kleinste elementen is vastgesteld dat het scheurtipknooppunt niet 'loslaat' nadat het eerste element gescheurd en gedeactiveerd (stijfheid nul) is. Immers dit knooppunt behoort ook tot het element achter



figuur 4.23: Scheurweerstand krommen bij verschillende belastingstappen $\Delta l/R = 0.05 \times 10^{-3}$, * 'loslaten' scheurtipknooppunt (lgcv501, lgcv502 en lgcv503)



figuur 4.24: Scheurweerstand krommen bij verschillende elementgrootten (lgcv209, lgcv309, lgcv503)

de scheurtip. Pas na enkele elementen scheurgroei was de volumefractie in het element achter de scheurtip zo groot dat het ook gedeactiveerd werd. Hierdoor wordt automatisch het scheurtipknooppunt 'losgelaten'. Het loslaten van de scheurtip direct na het deactiveren van het eerste element is natuurlijk realistischer. Dit bleek zich ook voor te doen bij de andere elementenverdelingen. De laatste geconvergeerde berekeningen zijn daarom opnieuw uitgevoerd. Het loslaten van het scheurtip kan op drie manieren gebeuren. De eerste is door de voorgeschreven verplaatsing van het scheurtipknooppunt te verwijderen en eventueel te vervangen door een kracht die tegengesteld is aan de reactiekracht in dat knooppunt en vervolgens die kracht stapsgewijs te verminderen tot nul. De tweede manier is door het element achter de scheurtip te deactiveren zodra het eerste element voor de scheurtip ook is gedeactiveerd. De derde manier is om in plaats van een scherpe scheurtip een afgeronde scheurtip te modeleren. Hiervoor is echter een andere elementenverdeling nodig. De eerste manier heeft de voorkeur. Echter de scheurtipknooppunten van de elementenverdelingen met elementgrootte van $0.2 \times 10^{-3} R$ en $0,1\times10^{-3}R$ konden niet met behulp van de eerste manier worden losgelaten. In de berekeningen met deze elementenverdelingen is dus gekozen voor de tweede manier. Maar dan moest ook de convergentiewaarde groter worden genomen, zie verder bijlage 3. In de scheurweerstand kromme wordt de verre veld J-integraal uitgezet tegen de scheurgroei Δa . De verre veld J-integraal wordt geschaald door de vloeispanning én de elementgrootte en de scheurgroei door de elementgrootte Δl .

4.3.2 de scheurweerstand kromme

Het resultaat van de schade berekeningen is dat er scheurgroei plaats vindt door de eerst rij elementen voor de scheurtip uit, zie de figuur op de voorpagina. In het ligament zijn immers de spanningen maximaal omdat daar de grootste hydrostatische spanning heerst, met als gevolg dat daar ook het eerst nucleatie van microholten plaatsvindt. In figuur 4.21 zijn de J_R -curven bij verschillende stapgrootten weergeven van de elementenverdeling met elementgrootte van $0.2 \times 10^{-3} R$ voor de scheurtip uit, in figuur 4.22 met elementgrootte van $0,1 \times 10^{-3}R$ en in figuur 4.23 met elementgrootte van 0,05x10-3R. Pas bij de kleinste stapgrootten kan geconstateerd worden dat de berekening geconvergeerd is. De stapgrootte moet steeds kleiner worden gekozen bij kleinere elementen. De grote gevoeligheid voor de belastingsstap kan als volgt verklaard worden. De volumefractie van de microholten wordt volgens formule 2.38 berekend. Daar de spanning aan het eind van de belastingstap niet bekend is, moet de spanning geschat worden. Deze schatting is afhankelijk van de stapgrootte. Bij te grote stappen wordt de volumefractie te laag berekend waardoor de scheurweerstand hoger is. Tussen twee gescheurde elementen moeten voldoende stappen liggen om de holtevolumefractie goed te kunnen bepalen. Bij het kleinste element is het begin van de kromme nogal vreemd.

31



figuur 4.25: Normaalspanningverdeling na verschillende scheurgroeistappen (lgcv309)



figuur 4.26 Microholtevolumefractie in het ligament bij verschillende stappen scheurgroei (lgcv309)

Waarschijnelijk wordt dit veroorzaakt door het verschil in de elementenverdeling achter de scheurtip, zie figuur 3.4. In de figuren zijn ook de J_R -curven weergeven van de berekeningen waarbij het scheurtipknooppunt is 'losgelaten'. Het effect hiervan is dat de scheurweerstand na de initiatie iets lager is. Bij een elementgrootte van $0,2x10^{-3}R$ ligt de kromme vervolgens iets boven de scheurweerstand kromme zonder het deactiveren van het element achter de scheurtip. Bij een elementgrootte van $0,1x10^{-3}R$ is het effect tegengesteld. Bij de kleinste element is het gevolg van het loslaten van het scheurtipknooppunt dat al heel snel het tweede element scheurt in tegenstelling tot de andere berekeningen met grotere elementen. Het verloop van de curve direct na de het tweede gescheurde element is nu wel verbeterd. Verder is er geen verschil met de berekening zonder het loslaten van het scheurtipknooppunt. Merk op dat gedeelten van de J_R -curven buiten de ASTM limiet voor SSY liggen.

De initiatie waarden van de J-integraal, dat is de J-integraal op het moment dat het eerste element gescheurd is, is evenredig met de elementgrootte. Schaling door de elementgrootte ΔI en de vloeispanning levert dan één waarde op. In figuur 4.24 zijn de geconvergeerde J_R curven weergegeven (met het loslaten van het scheurtipknooppunt). We zien dat door de schaling met de elementgrootte ΔI de J_R -curven op één lijn vallen! Dus in small scale yielding zijn scheurweerstand krommen 'self similar'. De helling van de scheurweerstand kromme is weinig afhankelijk is van de elementgrootte. De trend is wel dat het verloop van de scheurweerstand kromme steeds vlakker wordt bij kleiner wordende elementen.

De spanning in de y-richting door de eerste rij elementen in het ligament bij verschillende scheurgroeistappen is weergegeven in figuur 4.25 (lgcv309). De afstand tot de scheurtip x is gecorrigeerd voor scheurgroei Δa . De elementgrootte voor de scheurtip uit is $0,1x10^{-3}R$. Vergelijking met figuur 4.15 geeft een aantal verschillen en overeenkomsten. Voordat er scheurgroei heeft plaatsgevonden, is het maximum in de normaalspanningverdeling iets hoger dan 5 σ_v . Na scheurgroei daalt het maximum iets onder de 5 σ_v en blijft constant. Voor het maximum gaat de spanning nu naar nul. De plaats van het maximum is bijna altijd in het vijfde element voor de scheurtip. De plaats van het maximum verandert dus niet door de scheurgroei wat wel zo is in het plastische resultaat, zie figuur 4.15. Figuur 4.26 laat zien dat holtevolumefractieverdeling hetzelfde blijft na scheurgroei. En dat de volumefractie zich voornamelijk ontwikkeld heeft in de eerste 5 elementen. Buiten die elementen is voidvolumefractie erg laag. Het breukproces vindt dus plaats voor het maximum.



figuur 4.27 Scheurweerstand krommen voor $B = T/\sigma = -1, 0 en + 1$ (lgcv206, lgcv204, lgcv208)

4.3.3 de invloed van T-spanning

De elementenverdeling met de grootste elementen bij de scheurtip is uitgevoerd met een biaxialiteit van -1 en +1. De elementenverdeling met de grootste elementen is genomen omdat de initiatie vrij hoog ligt. Hierdoor is het effect van de *T*-spanningen het grootst. Door negatieve *T*-spanningen is de initiatiewaarde van de *J*-integraal verhoogd van 5,6 naar 6,1 $J/(\sigma_v/\Delta l)$. Daarnaast is het verloop van de J_R -curve steiler dan zonder *T*-spanning. Dit komt overeen met experimentele resultaten. Positieve *T*-spanningen verlagen de waarde van de initiatie *J*-integraal van 5,6 naar 5,2 $J/(\sigma_v/\Delta l)$. Het verloop van de J_R curve verschilt weinig met de J_R curve zonder *T*-spanningen. Dit komt ook overeen met experimentele resultaten. Negatieve *T*-spanningen zorgen voor een verlaging van de hydrostatische spanning en vertragen daardoor het holtegroeiproces. De verhoging van de hydrostatische spanning ten gevolge van positieve *T*-spanningen is relatief kleiner, waardoor ook de invloed op het holtegroeiproces geringer is.

.

.

.

.

5 CONCLUSIES

Plastische berekeningen gebaseerd op een kleine geometrieverandering formulering vertonen asymptotisch gedrag in de spanningen zoals ook wordt voorspeld in de HRR-oplossing. De spanningen in de small scale yielding situatie worden geheel gekarakteriseerd door de verre veld *J*-integraal.

Plastisch berekeningen gebaseerd op grote geometrieveranderingen laten een maximum in de spanningen zien. De plaats en grootte van het maximum is afhankelijk van de versteviging. De plaats kan geschaald worden door de *J*-integraal. Het maximum geeft de overgang aan van grote vervormingen naar kleine vervormingen. Het maximum is ook afhankelijk van de *T*-spanning (geometrie). Negatieve *T*-spanningen verlagen het maximum. Door de *T*-spanning laat de spanningstoestand zich niet meer schalen door de *J*-integraal. Positieve *T*-spanningen hebben weinig invloed.

Met de schade berekeningen is scheurgroei gesimuleerd. De initiatie van scheurgroei is afhankelijk van de elementgrootte. Er is echter een recht evenredig verband tussen de elementgrootte Δl en de initiatie *J*-integraal, dat is de *J*-integraal waarbij het eerste element gescheurd is. Bij stijgende belasting groeit de scheur recht door in het ligament. De helling van de scheurweerstand kromme blijkt weinig afhankelijk te zijn van de elementgrootte. Als de *J*-integraal geschaald wordt door de vloeispanning én de elementgrootte en de scheurgroei door de elementgrootte dan vallen de scheurweerstand krommen op één lijn. De spanningen in het ligament vertonen ook een maximum. Het maximum verandert nu niet van plaats. Het maximum geeft het gebied aan waar de holtevolumefractie verdeling zeer sterk stijgt. In dit gebied vindt dus het breukproces plaats.

De invloed van een negatieve *T*-spanning (simulatie van trekproefstukken) is dat de initiatie *J*-waarde en de scheurweerstand hoger zijn, wat overeenkomt met experimenten. De invloed van een positieve *T*-spanning (simulatie van buigproefstukken) is tegengesteld maar veel minder. Ook dit komt overeen met experimenten.

Het gemodificeerde Gurson model is geschikt voor het simuleren van scheurgroei. Er zouden nog berekeningen moeten worden uitgevoerd met een afgeronde scheurtip waardoor het probleem met het 'loslaten van de scheurtip' wordt verholpen. Verder is er nog een studie nodig naar de invloed van de verschillende parameters in het Gurson model. Daarnaast zouden er eindige elementenberekeningen moeten worden uitgevoerd met proefstukken. Tenslotte zouden de resultaten van die berekeningen gerelateerd moeten worden aan experimenten. ۱.
LITERATUUR

- Evans, W. T. en Luxmoore, A. R., 'Limitations of the Westergaard equations for [1] experimental evaluations of stress intensity factors', Journal of Strain Analysis, vol 11 no 3 (1976) 177-185.
- [2] Irwin, G. R., 'Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate', Journal of Applied Mechanics, vol 24 (1957) 361-364.
- Rice, J. R., 'A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks', *Journal of Applied Mechanics*, vol 35 (1968) [3] 379-386.
- Williams, M. L., 'On the stress distribution at the base of a stationary crack', [4] Journal of Applied Mechanics, vol 24 (1957) 109-114.
- [5] Larsson, S. G. en Carlsson, A. J., 'Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials', Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol 21 (1973) 263-277. Leevers, P. S. en Radon, J. C., 'Inherent stress biaxiality in various fracture
- [6] specimen geometries', International Journal of Fracture, vol 19 (1982) 311-325.
- [7] Bilby, B. A., Cardew, G. E., Goldthorpe, M. R. en Howard, I. C., 'A finite element investigation of the effect of specimen geometry on the fields of stress and strain at the tips of stationary cracks', Size Effects in Fracture, Mechanical Engineering, London, (1986) 37-46.
- Rice, J. R., 'Mathematical analysis in the mechanics of fracture', Fracture: An [8] Advanced Treatise, vol 2, ed. H. Liebowitz, Academic Press, New York (1968) 191-213.
- [9] Parks, D. M., 'A stifness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors', International Journal of Fracture, vol 10 (1974) 487-501.
- [10] Parks, D. M., 'Virtual crack extension: a general finite element technique', Numerical methods in fracture mechanics, eds. Luxmoore en Owen, University of Wales, Swansea (1978).
- [11] DeLorenzi, H. G., 'On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations', International Journal of Fracture, vol 19 (1982) 183-193.
- [12] Bakker, A., 'An analysis of the numerical path dependence of the J-integral', International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol 14 (1983) 153-179.
- [13] Hutchinson, J. W., 'Singular behavior at end of a tensile crack in a hardening material', Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol 16 (1968) 13-31.
- [14] Hutchinson, J. W., 'Plastic stress and strain fields at a crack tip', Journal of the
- Mechanics and Physics of Solids, vol 16 (1968) 337-347.
 [15] Rice, J. R. en Rosengren, G. F., 'Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material', Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol 16 (1968) 1-12.
- [16] McClintock, F. A., 'Plasticity Aspects of Fracture', Fracture: An Advanced Treatise, vol 3, ed. H. Liebowitz, Academic Press, New York (1971) 47-225.
- [17] Shih, C. F., Tables of Hutchinson-Rice-Rosengren Singular Field Quantities, Brown University Report MRL E-147, Division of Engineering, Brown University, (1983).
- [18] Shih, C. F., 'Relationships between the J-integral and the crack opening displacement for stationary cracks and extending cracks', Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol 29 no 4 (1981) 305-326.
- [19] Steenkamp, P. J. A. M., Investigation into the validity of J-based methods for the prediction of ductile tearing and fracture, proefschrift, Technische Universiteit Delft (1986).
- [20] Ewalds, H. L. en Wanhill, R. J. H., Fracture Mechanics, Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, derde druk (1983)
- [21] Gurson, A. L., 'Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part I Yield criteria and flow rules for porous ductile media', *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol 99 (1977) 2-15.

:

- [22] Tvergaard, V., 'Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions', International Journal of Fracture, vol 17 (1981) 389-407.
- [23] Needleman, A en Tvergaard, V., 'An analysis of ductile rupture in notched bars', Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol 32 (1984) 461-490.
- [24] Koers, R. W. J., 'Micromechanics based cleavage and ductile fracture', Ph.D thesis, (wordt uitgegeven in eind 1993?).
- [25] Koplik, J. en Needleman, A., 'Void growth and coalescence in porous plastic solids', International Journal of Solids and Structures, vol 24 (1988) 835-853. Chu, C.-C. en Needleman, A., 'Void nucleation effects in biaxially stretched
- [26] Sheets', Engineering Materials and Technology, vol 102 (1980) 249-256.
- [27] DeLorenzi, H. G., 'On the use of 2D isoparametric elements for calculations in the fully plastic range', International Journal of Fracture, vol 13 (1977) 507-511.
- [28] Nagtegaal, J. C. en Jong, J. E. De, 'Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis', International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 17 (1981) 15-41.
- [29] Barsoum, R. S., 'Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly plastic crack tip elements', International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 11 (1977) 85-98.
- [30] McMeeking, R. M., 'Finite deformation analysis of crack tip opening in elasticplastic materials and implications for fracture', Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol 25 (1977) 357-381.
- [31] The General Purpose Finite Element System MARC (1992) MARC Analysis Corporatio, Palo Alto, Verenigde Staten.
- [32] Bakker, A., 'Finite Element History Reporter Input Description', handleiding versie 2.1, Laboratorium voor Materiaalkunde, Delft (1991).
- [33] Bakker, A., 'Finite Element Mesh Section Reporter Input Description', handleiding versie 2.1, Laboratorium voor Materiaalkunde, Delft (1992).
- [34] Bakker, A., The Virtual Crack Extension (VCE) Post Processor Input Description, handleiding versie 2.2, Laboratorium voor Materiaalkunde, Delft (1991).
- [35] Stump, D. M. en Zywicz, E., 'J-integral computations in the incremental and deformation plasticity analysis of small-scale yielding', Engineering Fracture Mechanics, vol 45 (1993) 61-77.

1 . De spanningen volgens Irwin's oplossing plus de T-spanning zijn, zie paragraaf 2.1.2:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$
(B1.1)

waarin K_I de modus I spanningsintensiteitsfactor is, r de afstand tot de scheurtip en θ de hoek. Om als randvoorwaarde gebruikt te kunnen worden, moeten deze spanningen worden omgezet in knooppuntskrachten. Daartoe worden de spanningen eerst getransformeerd in tracties in de x- en y-richting:

$$T_1 = \sigma_{11} \cos \theta + \sigma_{12} \sin \theta$$

$$T_2 = \sigma_{12} \cos \theta + \sigma_{22} \sin \theta$$
(B1.2)

Vervolgens worden deze tracties getransformeerd in een spanning loodrecht op de rand (normaalspanning) en een spanning langs de rand (schuifspanning):

$$\sigma_n = T_1 \cos \theta + T_2 \sin \theta$$

$$\tau = -T_1 \sin \theta + T_2 \cos \theta$$
(B1.3)

 σ_n en τ worden omgezet in equivalente knooppuntskrachten via het virtuele arbeidsprincipe. Hiervoor moet in twee dimensionale gevallen een lijnintegraal worden berekend. Dit wordt gedaan door het eindige elementen programma *MARC*. Bij elementen met een rechte rand is een kleine correctie voor de hoek θ in (B1.2) en (B1.3) nodig. De correctie is afhankelijk van het aantal elementen dat wordt gebruikt in de hoekrichting. De hoek die de normaal van een rand van een randelement maakt met het ligament, is niet gelijk aan θ die wordt gebruikt voor de berekening van de spanningen in de steunpunten.



figuur B2.1: σ_{22}/σ_v volgens de HRR-oplossing als functie van $r/(J/\sigma_v)$ bij verschillende verstevigingsexponenten

Gegevens zijn: plane strain, $\alpha = 1$, $\sigma_v = 1$, $\varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{E} = \frac{1}{300}$, $\theta = 3^\circ$. (2.20) wordt dan:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{300J}{I_n r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(3,n) \tag{B2.1}$$

In de tabellen van Shih [16] zijn de functies $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ voor $\theta = 3^{\circ}$ niet gegeven. Er wordt daarom lineair geïnterpoleerd tussen $\theta = 2^{\circ}$ en 4° .

	n=3	n=5	<i>n</i> =12
I _n	5,51	5,02	4,44
σ _e	0,25835	0,46315	0,99585
σ _{rr}	1,65085	1,68765	0,61760
$ ilde{\sigma}_{ heta heta}$	1,93885	2,21490	1,14700
$ ilde{\sigma}_{r heta}$	0,03685	0,04250	0,03025
σ _m	1,79	1,95	0,88
σ_m / σ_e	6,95	4,21	0,89

tabel B1 Gegevens voor de HRR-oplossing bij verschillende verstevigingsexponenten

tabel B2 De HRR-oplossing volgens de waarden van tabel B1

	n=3	n=5	<i>n</i> =12
σ _{rr}	$4,4844\left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{4}}$	$3,3370\left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{6}}$	$0,8540\left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{13}}$
$\sigma_{ heta heta}$	$5,2667 \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{4}}$	$4,3795 \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{6}}$	$1,5860 \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{13}}$
$\sigma_{r heta}$	$0,1001 \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{4}}$	$0,0840\left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{6}}$	$0,0418 \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{13}}$

Om de spanningen in xy-coördinatenstelsel te krijgen moeten de berekende spanningen worden getransformeerd. De transformatieformules zijn:

$$\sigma_{11} = \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta + 2\sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta$$
(B2.2)

$$\sigma_{22} = \sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta - 2\sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta$$
(B2.3)

In figuur B2.1 is de spanning in de y-richting volgens tabel B2 en formule B2.2 weergegeven.

,

.

mesh		elementen ²⁾	bias ³⁾	tipelement	rand ⁴⁾	MARC
ssysgce14	regulier	30x30	30x30 1,2 0,8		kracht	K4.2
ssysgce15	regulier	30x30	1,5	2,6e-3	kracht	K4.2
ssysgce16	regulier	30x30	1,3	0,11	kracht	K4.2
ssysgce18	ssysgce18 regulier		1,15	0,562	kracht	K4.2
ssysgce18v	regulier	30x40	1,15	0,562	verplaatsing	K4.2
ssysgcefa18	0,01 ¹⁾	30x40	1,15	0,562	kracht	K4.2
ssysgcefb18	0,11)	30x40	1,15	0,562	kracht	K4.2
ssysgces18	singulier	30x40	1,15	0,56	kracht	K4.2
ssysgces19	singulier	30x50	1,105	0,72	kracht	K4.2
ssysgces22	singulier	15x40	1,15	0,56	kracht	K4.2

tabel 1 Gegevens van elementeverdelingen voor lineair elastische berekeningen

afrondingsstraal
 in de omtrekrichting en radiale richting
 verhouding tussen opeenvolgende elementen
 voorgeschreven verplaatsing of kracht

F

; . .

me	sh	elementen ²⁾	bias ³⁾	tipelement	n	tolerantie	belastingstap	rand ⁴⁾	MARC
ssylgcf29	0,011)	30x50	1,20	0,02	5	10-5	auto tot K=19	verplaatsing	K5.1
ssylgcf33	0,011)	20x30	1,385	0,02	5	10-5	1	verplaatsing	K5.1
ssylgcf71	0,011)	20x30	1,345	0,01	5	10-5	2	verplaatsing	K5.1
ssylgcf72	0,011)	20x30	1,345	0,01	5	10-5	2	verplaatsing	K5.1
ssylgcf74	0,011)	20x30	1,345	0,01	10	10-5	2	verplaatsing	K5.1
ssysgcp11	singulier	30x36	1,25	0,08	3	10-4	auto tot K=40	kracht	K4.2
ssysgcp14	singulier	30x36	1,25	0,08	3	10-4	auto tot K=40	verplaatsing	K4.2
ssysgcp33	regulier	20x30	1,385	0,02	5	10-5	3	verplaatsing	K5.1
ssysgcp50	singulier	20x30	1,385	0,02	5	10-5	4	verplaatsing	K5.1

tabel 2 Gegevens van elementenverdelingen voor lineair elastisch-plastische berekeningen

1) afrondingsstraal

2) in de omtrekrichting en radiale richting

3) verhouding tussen opeenvolgende elementen

4) voorgeschreven verplaatsing of kracht

belastingstap 1: 1/4,67+(0,25-1/4,67)+19x0,25+20x0,50+6x0,75=17,25, totaal 47 incrementen belastingstap 2: 1/3,34+(0,5-1/3,34)+18x0,25+20x0,50+17x0,75=25,25, totaal 61 incrementen belastingstap 3: 1/3,40+(0,25-1/3,40)+19x0,25+20x0,50+20x0,75=30, totaal 61 incrementen belastingstap 4: 1/5,42+(0,25-1/5,42)+19x0,25+20x0,50+20x0,75=30, totaal 61 incrementen

40

mesh	elementen1)	Δι	biaxialiteit	ΔK	tolerantie ²⁾	MARC
lgcv201	130	0,2	0	0,25	minimaal 5 iteraties, relatief 10 ⁻²	K5.1
lgcv202	130	0,2	0 [°]	0,125	relatief 10 ⁻⁵ na inc. 260 10 ⁻⁴ er zijn dan 7 elem, gescheurd	K5.1
lgcv204	130	0,2	0	0,0625	relatief 10-5	K5.1
lgcv206	130	0,2	1	0,0625	absol. 10 ⁻⁴ na inc. 651 10 ⁻³ er zijn dan 12 elem. gescheurd	K5.2
lgcv208	130	0,2_	-1	0,03125	absoluut 10 ⁻⁴	K5.2
lgcv209	130	0,2	0	0,0625	absol 10^4 , na inc 384 relatief 10^4 , na inc 385 relatief 10^5	K5.2
lgcv303	302	0,1	0	0,125	minimaal 5 iteraties, relatief 10 ⁻²	K5.1
lgcv306	302	0,1	0	0,0625	relatief 10-4	K5.1
lgcv308	302	0,1	0	0,03125	relatief 10-4	K5.2
lgcv309	302	0,1	0	0,03125	absoluut 10 ⁻⁴ , na inc 816 relatief 10 ⁻⁵	K5.2
lgcv501	499	0,05	0	0,03125	absoluut 10 ⁻⁴	K5.2
lgcv502	499	0,05	0	0,015625	absoluut 10 ⁻⁴	K5.2
1gcv503	499	0,05	0	0,015625	absoluut 10 ⁻⁴	K5.2

tabel 3 Gegevens van elementenverdelingen voor lineair elastisch-plastische berekeningen met het gemodificeerde Gurson model

blok vierkante elementen, zie figuur 3.4 het basis spinneweb bestaat uit 24x27=648 elementen, bias 1,385 met voorgeschreven verplaatsingen.
 absol = absoluut: residuele kracht relatief: residuele kracht gedeeld door restkracht