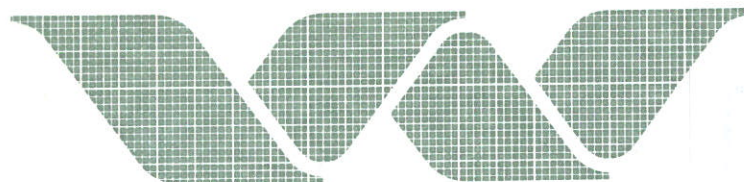


R 775-XI/R 1770



waterloopkundig laboratorium  
delft hydraulics laboratory

schepen in dwarsstroom

de optimale vaarbaan

AFGEHANDELD

verslag wiskundige berekeningen

R 775 deel XI  
R 1770

december 1983

F26

**tow**

toegepast onderzoek  
waterstaat

16.MRT1987

BIBLIOTHEEK  
Waterloopkundig Laboratorium  
Postbus 177 - DELFT

---

schepen in dwarsstroom

de optimale vaarbaan

verslag wiskundige berekeningen

---

R 775 deel XI  
R 1770

december 1983

F26

**tow**

toegepast onderzoek  
waterstaat



## INHOUD

	blz.
1. <u>Inleiding</u> .....	1
2. <u>Theorie van de optimale besturing</u> .....	3
3. <u>Toepassing van de optimaliseringstheorie op de algemene manoeuvreer- vergelijkingen</u> .....	6
4. <u>Numerieke oplostechiek</u> .....	12
5. <u>De uitvoering van numerieke experimenten</u> .....	16
6. <u>Toepassing op een eenvoudig manoeuvreermodel</u> .....	19
7. <u>Slotopmerkingen</u> .....	23

LITERATUUR

TABELLEN

FIGUREN

APPENDIX: Afleiding van de optimalisering

## TABELLEN

1. Eigenschappen van de beproefde tanker

## FIGUREN

- 1 Definitieschets
- 2 Karakteristieke vaarbaan
- 3 Snelheidsverdeling van de dwarsstroom
- 4 Optimalisatie van de vaarbaan voor het Nomoto-model



## SYMBOLLEN

A	Matrix (m x m) met constante coëfficiënten
$a_i$	De waarde van de $i^e$ toestandsgrootte op het begintijdstip
$b_i$	De waarde van de $i^e$ toestandsgrootte op het eindtijdstip
C	Roerconstante in het Nomoto model
F	Een kostenfunctie
$\underline{f}$	De relatie tussen de toestand van de toestandsverandering
$f_j$	De $j^e$ component uit $\underline{f}$
$\underline{f}^*$	Een vector met constante kentallen
g	Een gewichtsfunctie
H	De Hamiltonfunctie
$H_u$	De afgeleide van de Hamiltonfunctie naar u
$I_z$	Het polair massatraagheidsmoment
i	Een index
J	Een optimaliseringsfunctie
j	Een index
K	Een traagheidsconstante
M	De massa van het schip
$N_r, N_v$	Toegevoegde traagheidsmomenten
$N_T$	Een op het schip werkend moment
n	Het toerental
$\underline{p}$	Vector van hulpgrootheden
p	Een index
$p_i$	De $i^e$ component van $\underline{p}$
r	De koershoeknelheid
$r_r$	De relatieve koersnelheid
$S_i$	De $i^e$ component van de richting waarin het minimum gezocht wordt
T	De tijdsconstante in het Nomoto model
$T_s$	De totale vaartijd van het schip
t	De tijd
$t_0$	De begintijd
$t_1$	De eindtijd
$\underline{u}$	De besturingsvector
U	De scheepssnelheid

SYMBOLLEN (vervolg)

$\underline{u}^0$	De optimale besturingsvector
$(u, v)$	De sloopssnelheid in het midden van het sloop
$(u_r, v_r)$	De relatieve sloopssnelheid
$(\dot{u}_c, \dot{v}_c)$	Een versnelling afgeleid uit het stroomveld
$u_i$	De $i^e$ iteratie van het stuursignaal
$X_u$	Een toegevoegde massa
$X_T$	Een kracht in x-richting werkend op het sloop
$(x, y)$	De coördinaten van het midden van het sloop in een ruimtevast assenstelsel
$\underline{x}$	De toestandsvector
$\underline{x}_0$	De toestandsvector op het begintijdstip
$\underline{x}_1$	De toestandsvector op het eindtijdstip
$x_G$	De afstand van het zwaartepunt tot het midden van het sloop
$x_i$	De $i^e$ component van de vector $\underline{x}$
$x_i^{(j)}$	De $i^e$ component van de $j^e$ vector $\underline{x}$
$Y_T$	Een kracht in y-richting werkend op het sloop
$y_v, y_f$	Toegevoegde massa en moment van het sloop
$y_g$	De gewenste baan
$y_s$	De y positie van het sloop bij de start
$\alpha, \alpha_j, \gamma$	Coëfficiënten
$\delta$	De roerhoek
$\delta_g$	De gewenste roerhoek
$\delta_{max}$	De maximaal toelaatbare roerhoek
$\psi$	De koershoek

De optimale vaarbaan

1. Inleiding

In het kader van het T.O.W. onderzoek "Schepen in dwarsstroom" is een gevoeligheidsonderzoek uitgevoerd naar de invloed van diverse effecten op de hinder die tijdens het varen door een dwarsstroom ervaren wordt. Dat onderzoek werd uitgevoerd op een manoeuvreersimulator, in een schaalmodel [9] en met een volledig wiskundig model [10]. De bij het onderzoek uitgevoerde proeven betroffen manoeuvres van een schip, waarbij via een vaargeul een haven binnen gevaren wordt bij aanwezigheid van een dwarsstroom. Bij de simulatorproeven werd gestuurd door een loods en bij het schaalmodel en het wiskundig model werd gebruik gemaakt van een stuurautomaat.

Een onderdeel van de vraagstelling in bovenstaand onderzoek is de vraag in hoeverre de gestuurde baan afhankelijk is van de fysische omstandigheden als vorm en sterkte van de dwarsstroom en de scheepseigenschappen en in hoeverre afhankelijkheid van het stuurgedrag van loods of stuurautomaat aanwezig is. Een manier om het stuurgedrag en de fysische omstandigheden te kunnen beoordelen is gebruik te maken van een optimale vaarbaan. Een optimale vaarbaan is de baan die bij de gegeven fysische omstandigheden wordt gevolgd bij een zo goed mogelijk stuurgedrag. In het algemeen kan een dergelijke optimale vaarbaan als referentiebaan dienen ter beoordeling van uitgevoerde manoeuvres. Voorts kan in ontwerpstudies met dergelijke vaarbanen al een indruk verkregen worden van de minimale noodzakelijke breedte.

In dit verslag wordt ingegaan op de bepaling van een dergelijke optimale baan.

De bepaling van de optimale baan kan uitgevoerd worden met behulp van de optimale besturingstheorie van dynamische systemen. Door Pontryagin [6] is deze theorie ontwikkeld en sindsdien wordt deze theorie frequent toegepast. Uitgaand van een optimaliseringscriterium wordt naast het stelsel manoeuvreervergelijkingen een stelsel hulpvergelijkingen ingevoerd. Voor deze gekoppelde stelsels wordt een randwaardeprobleem gedefinieerd, dat iteratief opgelost moet worden. Oplostechnieken daarvoor worden beschreven door Bryson en Yu-chi-Ho [1] en Sage en White [8]. Toepassing van deze theorie op de manoeuvreervergelijking bij afwezigheid van stroom is uitgevoerd door Carpenter and Falco [2].



In hoofdstuk 2 wordt de theorie van de optimale besturing beschreven. In hoofdstuk 3 wordt de toepassing op een manoeuvreerprobleem besproken. In hoofdstuk 4 wordt ingegaan op de gebruikte oplostechniek en in hoofdstuk 5 op de toepassing van de oplostechniek op het algemene stelsel manoeuvreervergelijkingen. In hoofdstuk 6 wordt de oplostechniek toegepast op een eenvoudig manoeuvreermodel en in hoofdstuk 7 worden de complicaties besproken, die optreden bij de bepaling van de optimale baan.

Het onderzoek is uitgevoerd in het kader van het T.O.W. onderzoek 'Schepen in dwarsstroom', door ir. C. Flokstra, die ook het verslag samenstelde.

## 2. Theorie van de optimale besturing

In dit hoofdstuk zal nader ingegaan worden op de theorie die toegepast wordt bij het optimaliseren van de vaarbaan van een schip onder gegeven condities. Het optimaliseringsprobleem is op te vatten als een besturingsprobleem waarop de theorie van Pontryagin [7] toepasbaar is.

In deze theorie wordt van de volgende probleemstelling uitgegaan:  
Bestuur een dynamisch systeem zo dat de toestand op het tijdstip  $t_0$  overgaat in een gegeven toestand op het tijdstip  $t_1$ , zodanig dat een bepaalde maat minimaal wordt.

Het dynamische systeem wordt gegeven door een stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (1)$$

waarin:

$t$  = tijd

$\underline{x}$  = de toestandsvector

$\underline{u}$  = de besturingsvector

$\underline{f}$  = relatie tussen de grootte van de toestandsveranderingen en de toestand op het tijdstip  $t$

Op het begintijdstip wordt de toestand gegeven door

$$t = t_0; \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (2)$$

en op het eindtijdstip door

$$t = t_1; \underline{x}(t_1) = \underline{x}_1 \quad (3)$$

Nu moet zo gestuurd worden dat de grootte

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_1} F(\underline{x}, \underline{u}, t) dt \quad (4)$$

minimaal is. Deze functie wordt de kostenfunctie genoemd.

Om de optimale besturing  $\underline{u}$  te bepalen wordt gebruik gemaakt van hulpfuncties  $\underline{p}$  die voldoen aan:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i=1, n \quad (5)$$

In de appendix wordt dit nader toegelicht. Voor de optimale besturing  $\underline{u}^0$  geldt dan dat de Hamiltonfunctie H:

$$H = F(\underline{x}, \underline{u}, t) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (6)$$

maximaal wordt voor:

$$\underline{u} = \underline{u}^0 \quad (7)$$

Om de optimale baan  $\underline{x}(t)$  te bepalen worden de stelsels (1) en (5) simultaan opgelost en wordt op elk tijdstip  $\underline{u}_0$  bepaald uit:

$$\max H = H(\underline{x}, \underline{u}_0, t) \quad (8)$$

Indien een oplossing van het bovenstaande stelsel bestaat dan kan onder de volgende condities aangetoond worden dat  $\underline{u}_0$  de optimale oplossing is:

- f en F zijn continue in alle grootheden
- f en F zijn tweemaal continue differentieerbaar in  $x_i$
- f en F zijn lipschitz-continue in  $u_i$

Impliciet wordt in het bovenstaande verondersteld dat toestand  $\underline{x}_1$  bereikbaar is vanuit  $\underline{x}_0$  in de gespecificeerde tijd.

Het bepalen van de optimale baan wordt met de bovenstaande theorie gereduceerd tot een randwaardeprobleem voor de stelsels vergelijkingen (1) en (5).

In het bovenstaande wordt uitgegaan van een gegeven eindtoestand  $\underline{x}_1$  en wordt voorbijgegaan aan mogelijke beperkingen die aan de besturingsgrootte  $\underline{u}$  opgelegd kunnen worden. Een beperking in  $\underline{u}$  is toelaatbaar binnen de huidige theorie:  $\underline{u}_0$  mag ook een randextreem zijn van de Hamiltonfunctie H.



Voor het eindpunt  $\underline{x}_1$  geldt voor  $\underline{p}$ :

$$p_i(t_1) = \frac{\partial J}{\partial x_i} \quad (9)$$

Indien het eindpunt  $\underline{x}_1$  vrijgelaten wordt zodanig dat J minimaal wordt, geldt

$$p_i(t_1) = 0 \quad (10)$$

Voor het bepalen van de optimale baan met een vrij eindpunt wordt de eindconditie (3) vervangen door (10).

De eindconditie (10) kan alleen toegepast worden indien  $\underline{x}_1$  die daarbij wordt verkregen een intern punt is van alle bereikbare waarden voor  $t = t_1$ . Indien  $\underline{x}_1$  waarvoor J minimaal wordt niet een intern punt is kan een deel van  $p_i(t_1)$  niet gespecificeerd worden en moet aanvullende informatie over de overeenkomstige  $x_i(t_1)$  opgegeven worden.

### 3. Toepassing van de optimaliseringstheorie op de algemene manoeuvreer vergelijkingen

De in het vorige hoofdstuk besproken theorie van optimaal stuurgedrag zal nu nader uitgewerkt worden voor de dwarsstroomproblematiek zoals bij het gevoeligheidsonderzoek "Schepen in dwarsstroom" aan de orde is geweest.

Bij het gevoeligheidsonderzoek "Schepen in dwarsstroom" is nagegaan in hoeverre diverse factoren de hinder beïnvloeden die bij het varen door een dwarsstroom ervaren wordt. Bij dit onderzoek is de aandacht gericht op een specifieke manoeuvre, namelijk het binnenvaren van een haven via een toegangsheul nagenoeg loodrecht op deze toegangsheul een stroom aanwezig is. Bij de manoeuvreproeven uitgevoerd op een simulator [6] kregen de deelnemende loodsen de opdracht de vaarbaan van het schip te beperken tot een van te voren aangegeven gedeelte van de vaargeul (bovenstrooms gedeelte, de geulas zo nauwkeurig mogelijk volgen). Bij proeven met een schaalmodel en bij het volledig wiskundig model werd gebruik gemaakt van een stuurautomaat, waarbij een gewenste baan werd aangegeven (midden van de bovenstroomse geul of midden van de geul). Het volgen van de opgegeven gewenste vaarbaan onder variabele dwarsstroom-omstandigheden leidt tot afwijkingen ervan waarvan niet duidelijk is in hoeverre deze afwijkingen worden bepaald door de fysische omstandigheden en de begrenzingen van de roeruitslag enerzijds en het niet adequaat sturen van stuurautomaat of de loods. De in hoofdstuk 2 besproken theorie biedt een mogelijkheid om deze effecten te kunnen analyseren.

In bovenstaande worden kwalificaties gebruikt als adequaat sturen en de geulas zo nauwkeurig mogelijk volgen die, om in de bovenstaande theorie toegepast te kunnen worden, exact gespecificeerd moeten worden. De keuze van de specificatie bevat een grote mate van vrijheid, waarbij de optimale vaarbaan van deze keuze afhangt. De interpretatie door een loods aan een in algemene termen gesteld vaarvoorschrift bepaalt deze keuze, zodat per loods de optimale vaarbaan kan variëren. Om de theorie toe te kunnen passen moet het optimaliseringskriterium de volgende vorm bezitten:

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_1} F(\underline{x}, \underline{u}, t) dt \quad (11)$$

waarbij:

$\underline{x}$  = de toestandsvector van het schip

$\underline{u}$  = de stuurvector

F = een te specificeren functie

In het onderstaande wordt verondersteld dat de kwadratische afwijking tussen de gewenste baan en de gestuurde baan over het gehele traject minimaal moet zijn:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \{y(t) - y_g(x(t))\}^2 dt \quad (12)$$

waarin:

$(x(t), y(t))$  = de baan van het schip

$y_g(x)$  = de gewenste baan

$(t_0, t_1)$  = het tijdsinterval waarover gevaren wordt.

In de bovenstaande formulering wordt aan elke afwijking van de gewenste baan hetzelfde gewicht toegekend. In principe kan een gewichtsfunctie worden toegevoegd:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t)) \{y(t) - y_g(x(t))\}^2 dt \quad (13)$$

waarin:

$g(x)$  = een gewichtsfunctie

Ter plaatse van de haveningang kan dan bijvoorbeeld een relatief groter gewicht aan de afwijking toegekend worden dan in de geul.

Naast de baanafwijking kan ook de roerinspanning en de verbruikte hoeveelheid brandstof in het optimaliseringscriterium worden meegenomen.

In het onderstaande wordt als optimaliseringscriterium aangehouden:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} y^2 dt \quad (14)$$

waarbij  $y_g(t) \equiv 0$  de gewenste baan is.



Het stelsel toestandsvergelijkingen kan afgeleid worden van de manoeuvreer-  
vergelijkingen:

$$(M - X_{\dot{u}}) \dot{u} = X_T(u_r, v_r, r_r, \delta, n) - X_{\dot{u}} \dot{u}_c + Mvr \quad (15)$$

$$(M - Y_{\dot{v}}) \dot{v} + (Mx_G - Y_{\dot{r}}) r = Y_T(u_r, v_r, r_r, \delta, n) - Mur + Y_{\dot{v}} \dot{v}_c \quad (16)$$

$$(Mx_G - N_{\dot{v}}) \dot{v} + (I_z - N_{\dot{r}}) \dot{r} = N_T(u_r, v_r, r_r, \delta, n) - Mx_G ur + N_{\dot{v}} \dot{v}_c \quad (17)$$

waarin:

M	=	de massa van het schip
$X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Y_{\dot{r}}, N_{\dot{r}}, N_{\dot{v}}$	=	toegevoegde massa's en momenten
(u, v)	=	snelheid van het schip
r	=	de koerssnelheid
$I_z$	=	traagheidsmoment van het schip
$x_G$	=	ligging van het zwaartepunt
$u_r, v_r$	=	relatieve snelheid ten opzichte van de stroomsnelheid
$r_r$	=	relatieve rotatie
$X_T, Y_T, N_T$	=	krachten en moment werkend op het schip
$\dot{u}_c, \dot{v}_c$	=	versnellingen afgeleid uit de stroomverdeling
$\delta$	=	de roerhoek
n	=	het toerental

De tekenafspraken worden in figuur 1 aangegeven.

De bovenstaande vergelijkingen kunnen aangevuld worden met:

$$\dot{x} = u \cos\psi - v \sin\psi \quad (18)$$

$$\dot{y} = u \sin\psi + v \cos\psi \quad (19)$$

$$\dot{\psi} = r \quad (20)$$

waarin:

$\psi$  = de koershoek is.

In het stelsel (15), (16), (17), (18), 19) en (20) zijn  $n$  en  $\delta$  de stuurgrootheden die zodanig bepaald moeten worden dat de optimaliseringsfunctie (14) minimaal wordt. In bovenstaande vergelijkingen wordt verondersteld dat de op te leggen  $\delta$  momentaan ingesteld kan worden. Om de traagheid van het instellen te simuleren wordt de volgende vergelijking toegevoegd:

$$\frac{d\delta}{dt} = K(\delta_g - \delta) \quad (21)$$

waarin:

$K$  = een constante

$\delta_g$  = de gewenste roerhoek

Door de toevoeging van deze vergelijking wordt nu  $\delta_g$  in plaats van  $\delta$  een stuurgrootheid. Voorts wordt aan  $\delta_g$  een begrenzing opgelegd:

$$|\delta_g| \leq \delta_{\max} \quad (22)$$

In het onderstaande wordt verder verondersteld dat het toerental konstant wordt gehouden, hoewel dit niet essentieel is voor de methode.

Het bovenstaande stelsel vergelijkingen kan nu samengevat worden als:

$$\frac{dx}{dt} = u \cos\psi - v \sin\psi \quad (23)$$

$$\frac{dy}{dt} = u \sin\psi + v \cos\psi \quad (24)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = r \quad (25)$$

$$\frac{du}{dt} = F_1(u, v, r, \psi, \delta, x, y) \quad (26)$$

$$\frac{dv}{dt} = F_2(u, v, r, \psi, \delta, x, y) \quad (27)$$

$$\frac{dr}{dt} = F_3(u, v, r, \psi, \delta, x, y) \quad (28)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = K(\delta_g - \delta) \quad (29)$$

Om het optimaliseringsprobleem op te lossen moet een stelsel vergelijkingen (5) in hulpgrootheden en een hulpfunctie, de Hamiltonfunctie, worden toegevoegd. Volgens (5) worden de hulpvergelijkingen:

$$\frac{dp_1}{dx} = -p_4 \frac{\partial F_1}{\partial x} - p_5 \frac{\partial F_2}{\partial x} - p_6 \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad (30)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -p_4 \frac{\partial F_1}{\partial y} - p_5 \frac{\partial F_2}{\partial y} - p_6 \frac{\partial F_3}{\partial y} + y \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_3}{dt} = & -p_1(-u \sin\psi - v \cos\psi) - p_2(u \cos\psi - v \sin\psi) + \\ & -p_4 \frac{\partial F_1}{\partial \psi} - p_5 \frac{\partial F_2}{\partial \psi} - p_6 \frac{\partial F_3}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -p_1 \cos\psi - p_2 \sin\psi - p_4 \frac{\partial F_1}{\partial u} - p_5 \frac{\partial F_2}{\partial u} - p_6 \frac{\partial F_3}{\partial u} \quad (33)$$

$$\frac{dp_5}{dt} = -p_1 \sin\psi - p_2 \cos\psi - p_4 \frac{\partial F_1}{\partial v} - p_5 \frac{\partial F_2}{\partial v} - p_6 \frac{\partial F_3}{\partial v} \quad (34)$$

$$\frac{dp_6}{dt} = -p_3 - p_4 \frac{\partial F_1}{\partial r} - p_5 \frac{\partial F_2}{\partial r} - p_6 \frac{\partial F_3}{\partial r} \quad (35)$$

$$\frac{dp_7}{dt} = -p_4 \frac{\partial F_1}{\partial \delta} - p_5 \frac{\partial F_2}{\partial \delta} - p_6 \frac{\partial F_3}{\partial \delta} + p_7 K \quad (36)$$

De Hamiltonfunctie, nodig om de optimale roerhoek te bepalen luidt:

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2} y^2 + p_1(u \cos\psi - v \sin\psi) + p_2(u \sin\psi + v \cos\psi) + \\ & + p_3 + p_4 F_1 + p_5 F_2 + p_6 F_3 + p_7 K (\delta_g - \delta) \end{aligned} \quad (37)$$

De stelsels vergelijkingen (23) tot (29) en (30) tot (36) worden nu simultaan opgelost voorwaarts in de tijd. Op elk moment wordt  $\delta_g$  dan zo bepaald dat H maximaal wordt. Uit de vorm van de functie H kan bepaald worden welk gedrag de optimale besturing vertoont. De uitdrukking voor H kan geschreven worden als:

$$H = H_0(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, x, y, \psi, u, v, r, \delta) + p_7 K \delta_g \quad (38)$$



waarin  $H_0$  een functie is die niet van  $\delta_g$  afhangt, dat wil zeggen  $H$  is een lineaire functie in  $\delta_g$ . Er zullen dus alleen randextremen op kunnen treden. Het stuurgedrag wordt dus

$$\delta_g = \delta_{\max} \quad \text{als} \quad p_7 > 0 \quad (39)$$

$$\delta_g = -\delta_{\max} \quad \text{als} \quad p_7 < 0$$

$$\delta_g = \text{willekeurig} \quad \text{als} \quad p_7 = 0.$$

Dit besturingstype wordt als bang-bang besturing aangeduid. In  $\delta$  is de besturing niet van het bang-bang type.

Het geval  $p_7 = 0$  geeft aan dat het schip de gewenste baan exact kan volgen door  $\delta_g$  geschikt, maar niet noodzakelijkerwijs extreem te kiezen.

Het bepalen van de optimale baan is nu dus gereduceerd tot het simultaan oplossen van twee stelsels vergelijkingen (23) tot (29) en (30) tot (36) waarbij voor  $\delta_g$  geldt:

$$\delta_g = \delta_{\max} \text{ sign}(p_7)$$

Indien de beginwaarden voor  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_7)$  en  $\underline{x} = (x, y, \psi, u, v, r, \delta)$  gegeven worden ligt de oplossing van de vergelijkingen e nduidig vast. Stel dat de beginwaarden op  $t = t_0$  gegeven worden door  $\underline{x} = \underline{x}_0$  en  $\underline{p} = \underline{p}_0$  en dat op  $t = t_1$  daarmee het punt  $\underline{x} = \underline{x}_1$  bereikt wordt, dan is de gevonden baan tevens de optimale baan om van  $\underline{x} = \underline{x}_0$  naar  $\underline{x} = \underline{x}_1$  te sturen. Wordt in plaats van  $\underline{p} = \underline{p}_0$ ,  $\underline{x} = \underline{x}_1$  opgegeven dan ontstaat een randwaardeprobleem voor het stelsel vergelijkingen dat dan iteratief opgelost moet worden. In geval het eindpunt vrij gelaten wordt, wordt voor het eindpunt  $t = t_1$  de waarde voor  $\underline{p}$  voorgeschreven namelijk  $\underline{p} = \underline{0}$  waarmee weer een randwaardeprobleem wordt gedefinieerd. In het volgende hoofdstuk zal nader op de numerieke oplostech-nieken voor deze problemen worden ingegaan.

#### 4. Numerieke oplostechniek

In hoofdstuk 3 wordt een randwaardeprobleem gedefinieerd voor een stelsel vergelijkingen. In dit hoofdstuk wordt nader ingegaan op de oplossings technieken voor dit type problemen en op de gekozen techniek voor het huidige probleem.

In geval van een lineair stelsel differentiaalvergelijkingen kan het randwaardeprobleem als volgt worden opgelost. Stel dat het stelsel uit  $m$  vergelijkingen bestaat en dat in het beginpunt  $p$  ( $p < m$ ) beginvoorwaarden worden gegeven en in het eindpunt  $m - p$  condities:

$$\frac{dx}{dt} = A \underline{x} + \underline{f}^* \quad (41)$$

waarin:

- $\underline{x}$  = een  $m$ -dimensionale vector
- $A$  = een  $m \times m$  matrix met constante coëfficiënten
- $\underline{f}^*$  = een gegeven vector

Op het begintijdstip  $t = t_0$  wordt gegeven:

$$x_i(t_0) = a_i \quad i = 1, p \quad (42)$$

Op het eindtijdstip  $t = t_1$  wordt gegeven:

$$x_i(t_1) = b_i \quad i = p + 1, \dots, m \quad (43)$$

Het randwaardeprobleem wordt nu omgezet in een aantal direct op te lossen beginwaardeproblemen. Door middel van superpositie kan uit deze oplossingen, de oplossing bepaald worden die aan het randwaardeprobleem voldoet. De volgende beginwaardeproblemen moeten worden opgelost:

$\underline{x}^{(0)}$  als oplossing van (41) met als beginvoorwaarde

$$x_i^{(0)}(t_0) = a_i \quad i = 1, p \quad (44)$$

$$x_i^{(0)}(t_0) = 0 \quad i = p + 1, \dots, m$$

$\underline{x}^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, m - p$ ) als oplossing van

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A \underline{x} \quad (45)$$

met als beginvoorwaarde:

$$\begin{aligned} x_i^{(j)}(t_0) &= 0 \quad \text{voor } i \neq p+j \\ x_{p+j}^{(j)}(t) &= 1 \end{aligned} \quad (46)$$

De gezochte oplossing  $\underline{x}$  van het randwaardeprobleem kan dan geschreven worden als:

$$\underline{x} = \underline{x}^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j \underline{x}^{(j)} \quad (47)$$

waarin:

$\alpha_j$  nog te bepalen constanten zijn. Deze waarden kunnen bepaald worden door de condities (43) in het eindpunt op te leggen:

$$x_i(t_1) = x_i^{(0)}(t_1) + \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j x_i^{(j)}(t_1) = b_i \quad \text{voor } i = n-p + 1, \dots, n \quad (48)$$

Dit levert een lineair stelsel vergelijkingen in  $\alpha_j$  op met een e nduidige oplossing en daarmee is het randwaardeprobleem opgelost.

Toepassing van deze eenvoudige methode stuit bij de oplossing van het optimale besturingsprobleem op een aantal moeilijkheden. In het algemeen is het stelsel vergelijkingen niet-lineair. Door middel van quasi-linearisatie van het stelsel vergelijkingen en een iteratieve benadering kan deze moeilijkheid nog overwonnen worden. In geval van een bang-bang besturing wordt dit bemoeilijkt door dan optredende discontinuïteiten. Met behulp van een penalty functie zijn deze discontinuïteiten te onderdrukken, hoewel dit de convergentiesnelheid van het iteratieproces nadelig beïnvloedt.

Naast deze moeilijkheden treedt als belangrijkste moeilijkheid op het aanwezig zijn van positieve eigenwaarden in het stelsel hulpvergelijkingen (5), terwijl de toestandsvergelijkingen negatieve eigenwaarden bevatten. Dit houdt in dat beide stelsels vergelijkingen niet simultaan opgelost kunnen worden



vanwege dan optredende numerieke onnauwkeurigheden, noch in de positieve noch in de negatieve tijdrichting: De oplossing behorend bij de meest extreme eigenwaarde, zal de overige steeds gaan overheersen. Het stelsel toestandsvergelijkingen laat zich correct oplossen in + t richting en het stelsel hulpvergelijkingen in - t richting. Bovengenoemde moeilijkheden hebben tot gevolg dat een oplossingstechniek voor het onderhavige optimaliseringsprobleem nogal moet afwijken van een methode als bovengeschetst. In Bryson en Yu-chi Ho [1] en in Sage en White [7] wordt nader ingegaan op diverse oplostechneken.

Voor de oplossing van het in hoofdstuk 3 besproken optimaliseringsprobleem: de optimale vaarbaan bij dwarsstroom, wordt een methode toegepast zoals gebruikt door Carpenter en Falco [2]. Zij bepaalden de optimale vaarbaan voor een schip dat een gewenste baan moet volgen. In [2] wordt als gewenste baan twee elkaar snijdende rechten gekozen (varen door een bocht). Er wordt een niet-lineair vrij uitgebreid manoeuvreermodel gekozen. Stroominvloeden worden niet in rekening gebracht. De resultaten lijken voldoende veelbelovend om ook bij aanwezigheid van stroom te worden toegepast.

De in [2] gebruikte methode is een iteratieve methode waarbij per iteratiestap de volgende berekeningen worden uitgevoerd:

- a. Met het in de vorige iteratiestap bepaalde stuursignaal worden de toestandsvergelijkingen voorwaarts in de tijd opgelost.
- b. Het stelsel hulpvergelijkingen wordt met de onder a bepaalde toestandsgrootheden terug in de tijd opgelost.
- c. Corrigeren van het stuursignaal.

De correctie van het stuursignaal heeft als volgt plaats:  $u_i(t)$  geeft het stuursignaal aan op de  $1^e$  iteratieve stap. Er wordt een richting  $S_i(t)$  vastgesteld. Vervolgens wordt het stuursignaal voor de  $(i+1)$  iteratie voorgesteld als

$$u_{i+1}(t) = u_i(t) + \alpha S_i(t) \quad (49)$$

waarbij  $\alpha$  geen functie van de tijd is. Vervolgens wordt  $\alpha$  zodanig bepaald dat de optimaliseringsfunctie (14) minimaal wordt. Dit houdt op zich een iteratief proces in, waarbij meerdere malen het stelsel toestandsvergelijkingen moet worden opgelost. De zoekrichting wordt vastgesteld als:



$$S_i(t) = -H_u(u_i) + \gamma S_{i-1}(t) \quad (50)$$

waarbij:

$$\gamma = \int_{t_0}^{t_1} H_u^2(u_i) dt / \int_{t_0}^{t_1} H_u^2(u_{i-1}) dt \quad (51)$$

zoals gebruikelijk bij een geconjugeerde gradiënten-methode [4].

Het totale iteratieproces wordt opgestart door het eerste stuursignaal te bepalen met een stuurautomaat. Per iteratiestap wordt minimaal viermaal een stelsel differentiaalvergelijkingen opgelost (de  $\alpha$  bepaling vereist minimaal het twee keer oplossen van de toestandsvergelijkingen). De methode is derhalve rekenintensief, te meer daar de algemene ervaring is dat het een slechts langzaam convergerend proces is.

## 5. De uitvoering van numerieke experimenten

De in hoofdstuk 4 beschreven methode is toegepast op het optimaliseringsprobleem dat in hoofdstuk 3 staat aangegeven. Het niet lineaire manoeuvreermodel, zoals toegepast bij de proeven op de manoeuvreersimulator [6] en bij het volledig wiskundig model [10], vormen de uitgangsvergelijkingen voor het huidige probleem. Het uit deze vergelijkingen af te leiden stelsel hulpvergelijkingen is tamelijk gecompliceerd. Voor de oplossing van het probleem is een computerprogramma ontwikkeld. Ter controle van het programma en in het bijzonder van het stelsel hulpvergelijkingen zijn de coëfficiënten in deze vergelijkingen zowel bepaald met behulp van numerieke afgeleiden als met de analytisch bepaalde afgeleiden.

Als rekengeval is gekozen een vaarconditie beproefd op de manoeuvreersimulator, namelijk een manoeuvre met het grote schip voor de stroomverdeling met piek, bij een sterke dwarsstroom. De optimale baan dient zo nauw mogelijk aan te sluiten bij het midden van de vaargeul. Zie tabel 1 voor de afmetingen van het schip, figuur 3 voor het stroombeeld en figuur 2 voor de haven/vaarwegconfiguratie. De manoeuvre begint 4500 m voor de haveningang en eindigt er 1000 m na. De manoeuvre start onder lokale evenwichtscondities. In het eindpunt worden geen condities opgelegd aan de toestand van het schip. Dit laatste kan leiden tot onrealistische waarden, c.q. binnen een haven niet toelaatbare waarden. Dit is niet waarschijnlijk, daar in de haven geen stroom aanwezig is en de optimale baan daarom na zekere afstand met het midden van de haven zal samenvallen: van de toestandsvector zijn dan alleen de langssnelheid en de afgelegde weg grootheden ongelijk nul, waarbij de langssnelheid door het konstante toerental tot realistische waarden beperkt blijft. Voorts is bij de bepaling van de optimale baan geen rekening gehouden met de beperkte breedte in de havenmond. Daar de toestandsgrootheid vrij wordt gelaten in het eindpunt geldt dat de hulpgrootheden in het eindpunt nul worden.

Het toepassen van de bovenbeschreven oplosmethode op dit probleem toonde geen convergerend proces. Dit heeft geleid tot een aantal wijzigingen in de opzet van de oplosmethode die nu besproken zullen worden. Gezien de gecompliceerdheid van de vergelijkingen was het slechts mogelijk relatief geringe modificaties toe te passen.

In de oplosmethode als beschreven in hoofdstuk 4 wordt het stuursignaal voortdurend gecorrigeerd met een fractie zodanig dat het stuursignaal verkregen aan het eind van iedere iteratiestap nog niet het karakter vertoont van een optimaal stuursignaal, dat wil zeggen uitsluitend de extreme begrenzingsen van de roeruitslag aanneemt. De rekenmethode werd nu zo aangepast dat stap c in het iteratieproces zoals beschreven in hoofdstuk 4, vervangen wordt door:

$$u_{i+1} = \delta_{\max} \text{sign}(p_7) \quad (52)$$

waarbij  $p_7$  een hulpgrootheid is die in stap b (hoofdstuk 4) wordt bepaald. Vergelijking (52) geeft het roersigaaal aan dat volgens de theorie moet worden gegeven. Deze verandering had niet tot gevolg dat het iteratieproces convergeerde.

In de rekenmethode wordt het stelsel toestandsvergelijkingen in de positieve tijdrichting opgelost bij gegeven stuursignaal en het stelsel hulpvergelijkingen wordt bij gegeven toestandsgrootheden vervolgens in negatieve tijdrichting opgelost. Verondersteld kan worden dat de oplossing van het hulpstelsel op  $t = t_0$  veel zal afwijken van wat de oplossing in de limiet zal zijn, doordat ook de vaarbaan nog afwijkt. Het stuursignaal wordt bepaald op grond van de oplossing van het stelsel hulpvergelijkingen. Het gevonden roergedrag zal voor  $t = t_0$  vermoedelijk het sterkst afwijken van het optimaal vaargedrag. Dit roergedrag wordt voor oplossing van het stelsel toestandsvergelijkingen toegepast. Dus juist aan het begin van de vaarbaan wordt al het sterkst fout gestuurd. Dit kan aanleiding zijn van het niet convergeren van het proces. Hoe groter de afstand tussen het startpunt van de manoeuvre en het eindpunt, des te groter zal de fout in het roergedrag in het beginpunt zijn.

Om de bovenstaande reden is de rekenprocedure als volgt gewijzigd: Het totale tijdsinterval waarover gevaren wordt, wordt in een aantal deelintervallen verdeeld. De eerste maal wordt het hele interval gevaren met een stuurautomaat. Daarna wordt voor het laatste interval de optimale baan bepaald, vervolgens voor de laatste twee intervallen, enz., totdat de optimale baan voor het gehele tijdsinterval wordt gevonden. De aldus voorgestelde procedure blijkt ook niet te leiden tot een convergerend proces.



In alle bovenstaande aanpassingen blijkt dat de convergentie van het rekenproces te wensen overlaat. Daar de exercities met het volledige model vrij kostbaar en de vergelijkingen erg ondoorzichtig zijn wordt voor een eenvoudig model de convergentie van de methode nog eens onderzocht. In het volgende hoofdstuk wordt hier nader op ingegaan.



## 6. Toepassing op een eenvoudig manoeuvreermodel

In het voorgaande is de aandacht geconcentreerd geweest op een volledig niet-lineair model, zoals gebruikt is bij het wiskundig gevoeligheidsonderzoek [10]. In het onderstaande wordt voor een eenvoudige manoeuvreervergelijking het optimale besturingsprobleem nog eens uitgewerkt om daarmee de gesignaleerde convergentieproblemen te onderzoeken. Uitgaande van de tekenafspraken, zoals in figuur 1 zijn aangegeven, luidt de Nomoto-manoeuvereervergelijking:

$$T\dot{r} + r = C\delta \quad (53)$$

Daarnaast gelden de vergelijkingen voor de koershoek en de baan:

$$\frac{d\psi}{dt} = r \quad (54)$$

$$\frac{dy}{dt} = U\psi \quad (55)$$

$$\frac{dx}{dt} = U \quad (56)$$

waarmee verondersteld wordt dat de snelheid in langsrichting niet verandert en dat de koershoek klein blijft. Voorts geldt de vergelijking voor traagheid van het roer.

$$\frac{d\delta}{dt} = K(\delta_g - \delta) \quad (57)$$

Samenvattend wordt het stelsel toestandsvergelijkingen dus

$$\frac{dy}{dt} = U\psi \quad (58)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = r \quad (59)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{T}r + \frac{C}{T}\delta \quad (60)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = K(\delta_g - \delta) \quad (61)$$

Uitgaande van de optimaliseringsfunctie:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} y^2 dt \quad (62)$$

wordt het hulpstelsel:

$$\frac{dp_1}{dt} = y \quad (63)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = p_1 U \quad (64)$$

$$\frac{dp_3}{dt} = p_2 + \frac{1}{T} p_3 \quad (65)$$

$$\frac{dp_4}{dt} = \frac{C}{T} p_3 + K p_4 \quad (66)$$

De hulpfunctie ter bepaling van de optimale besturing wordt

$$H = -\frac{1}{2} y^2 + p_1 u\psi + p_2 r + p_3 \left(-\frac{r}{T} + \frac{C\delta}{T}\right) + p_4 K(\delta_g - \delta) \quad (67)$$

Uit deze Hamiltonfunctie volgt weer een bang-bang besturing voor  $\delta_g$

$$p_4 > 0 \quad \delta_g = \delta_{\max} \quad (68)$$

$$p_4 < 0 \quad \delta_g = -\delta_{\max}$$

De bovenstaande vergelijkingen worden toegepast om voor een schip dat op  $t = t_0$  op een zekere afstand evenwijdig aan een gewenste baan vaart, de optimale baan voor het terugsturen van het schip naar de gewenste baan te bepalen, zodanig dat

$$\int_{t_0}^{t_1} y^2 dt \text{ minimaal is} \quad (69)$$

De toestand van het schip op  $t = t_1$  wordt vrijgelaten, zodat voor de hulp-grootheden geldt:

$$\underline{p}(t_1) = 0 \quad (70)$$

In het bovenstaande wordt geen stroomveld ingevoerd ter vereenvoudiging van het probleem.

Als oplosmethode voor het bovenstaand optimaliseringsprobleem werd de iteratiemethode gekozen, zoals beschreven is in hoofdstuk 4. Voor de bepaling van het gecorrigeerde stuursignaal, stap c uit de iteratiecyclus, is een aantal mogelijkheden nagegaan. Daarbij bleken de methoden waarbij min of meer "optimale" stuursignalen werden toegepast, dat wil zeggen stuursignalen die uitsluitend extreme waarden aannemen, niet tot convergentie te leiden.

De volgende twee methoden geven een convergerend proces:

- De steilste gradienten-methode

De zoekrichting wordt dan bepaald door:

$$S_i(t) = \frac{H_u(u_i)}{\left\{ \int_{t_0}^{t_1} H_u^2(u_i) dt \right\}^{1/2}} \quad (71)$$

- De geconjugeerde gradienten-methode

De methode wordt in hoofdstuk 4 beschreven

De steilste gradienten-methode convergeert erg langzaam. In figuur 4 staat een vaarbaan weergegeven die met deze methode bepaald is. De afname van de grootte:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} y^2 dt \quad (72)$$

bij voortzetting van het iteratieproces is dan nog slechts zeer gering. Uit de theorie kan afgeleid worden dat een bang-bang besturing voor het gegeven probleem optimaal is. Echter het aantal keren roeromslag is niet van tevoren bekend. Het bovenstaande probleem is ook opgelost door twee omslagpunten toe te laten en vervolgens de plaatsen van het omslagpunt zo te kiezen dat de functie (72) minimaal wordt. De aldus gevonden baan staat eveneens in figuur 4 weergegeven. De baan die nog niet optimaal hoeft te zijn heeft als waarde voor J:

$$J/\frac{1}{2}UT_s y_s^2 = 0.29 \quad (73)$$

terwijl met de steilste gradienten-methode wordt bereikt:

$$J/\frac{1}{2}UT_s y_s^2 = 0.325 \quad (74)$$

Klaarblijkelijk moet dit iteratieproces nog worden voortgezet.

Toepassing van de geconjugeerde gradienten-methode geeft een sneller convergerend proces dan de steilste gradienten-methode. In figuur 4 staat de verkregen baan weergegeven. De bijbehorende J-waarde bedraagt:

$$J/\frac{1}{2}UT_s y_s^2 = 0.287 \quad (75)$$

De verkregen baan wijkt, wat de vorm betreft, weinig van de baan af met de twee roeromslagpunten. Blijkbaar is de laatste baan nog niet de optimale baan. Toelaten van drie omslagpunten kan tot een nog kleinere J-waarde leiden daar het roersignaal verkregen met de iteratiemethode nog geen bang-bang karakter heeft.

Het bovenstaande bevestigt dat met de in hoofdstuk 4 beschreven methode in principe bruikbaar is voor de bepaling van een optimale baan.



## 7. Slotopmerkingen

In hoofdstuk 6 is experimenteel aangetoond voor een eenvoudig manoeuvreer model dat de in hoofdstuk 4 beschreven oplostechiek voor de bepaling van de optimale baan in principe werkt. Toepassing van deze methode op de in hoofdstuk 3 beschreven niet-lineaire vergelijkingen leidt niet tot een convergerend proces. Daarvoor kan een aantal vermoedelijke oorzaken worden aangewezen:

- In de theorie van het optimaliseren van de dynamische systemen wordt een aantal aannamen gedaan over de continuïteiten en differentiëerbaarheid van de beschreven functies. Bij het hier gebruikte stelsel vergelijkingen treedt een tweetal discontinuïteiten op: in de manoeuvreervergelijkingen zelf en in het gebruikte snelheidsveld. Het snelheidsveld wordt lineair geïnterpoleerd binnen driehoeken. Bij de randen van de driehoeken treden discontinuïteiten in de gradiënten van de snelheid op. In de manoeuvreervergelijkingen worden voorts grenzen gesteld aan bepaalde termen in de vergelijkingen.
- Met een eenvoudige modelvergelijking kan aangetoond worden dat, ten gevolge van het snelheidsveld, de hulpvergelijkingen elementaire oplossingen kunnen bevatten met zowel toenemend als afnemende e-macht karakter. Dit vereist voor de oplossing van het stelsel een aangepaste methodiek.
- Bij de oplosmethode wordt aangenomen dat aan de eindtoestand van het systeem geen beperkingen worden opgelegd en dat de eindtoestand van het schip na de manoeuvre een intern punt is, dat wil zeggen dat elk naburig punt in de toestandruimte bereikt moet kunnen worden. Indien het eindpunt geen intern punt is kan niet uitgegaan worden van de eindtoestand  $\underline{p}(t_1) = 0$  voor de hulpvector. Het is niet zonder meer duidelijk dat het betreffende punt een intern punt is. Door een groter tijdsinterval zal een dergelijk probleem vermoedelijk kunnen worden vermeden.

De convergentiesnelheid zal een punt van aandacht moeten zijn. Het aantal iteraties dat bij de geconjugeerde gradienten-methode wordt toegepast is evenredig met het aantal gediscrètiseerde tijdstappen. Voor een realistisch probleem kan dit aanzienlijk zijn. Mogelijk kan het proces versneld worden als rekening wordt gehouden met de begrenzingen aan de roeruitrusting.

Om de bovenvermelde problemen nader te analyseren en op te lossen. lijkt het gewenst de volgende onderzoekfasen te definiëren:

- a. Onderzoek naar de optimale baan met een eenvoudig model.
  - invloed van een snelheidsveld vaststellen
  - verhogen van de convergentiesnelheid van het proces.
- b. Onderzoek naar de optimale baan met een niet-lineair maar wel continue differentieerbaar model, zonder stroom.
  - invloed van de begrenzingen van toestandsgrootheden op het proces vaststellen.
- c. Onderzoek als onder b maar met een continue differentieerbaar snelheidsveld van een type dat geen afnemende e-machten geeft in het stelsel van hulpvergelijkingen.
- d. Onderzoek als onder b maar met een willekeurig snelheidsveld.
- e. Onderzoek naar de optimale baan voor de algemene manoeuvreervergelijkingen en een willekeurig snelheidsveld.

Een deel van de bovenstaande problemen kan vermeden worden door hogere eisen te stellen aan de beschrijvingen van het snelheidsveld (geen discontinuïteiten) en de gebruikte manoeuvreervergelijkingen.

## LITERATUUR

- 1 BRYSON, A.E. and YU-CH Ho.,  
Applied optimal control.  
John Wiley and Son, New York, 1975.
- 2 CARPENTER, G. and FALCO, M.,  
Application of optimal control theory to supership manoeuvring.  
Grumman Aerospace Corporation, New York, rept. Re-557, 1978.
- 3 DOLD, A. and ECKMANN, A.,  
Lecture Notes in Mathematics Sparse Matrix Techniques.  
Springer-Verslag Berlin, 1977.
- 4 FLETCHER, R.,  
Optimization.  
Academic Press, London, 1969.
- 5 FRANKE, J.F. en OLSDER, G.J.,  
Inleiding tot de optimale besturingstheorie.  
T.H. Twente, Collegedictaat, januari 1976.
- 6 MARIN,  
Schepen in dwarsstroom, gevoeligheidsonderzoek.  
N.S.P. rapport no. 03010-MS, september 1982.
- 7 PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKII, V., GAMKRELIDZE, R. and MISHEHENKO, F.,  
Mathematical theory of optimal processes.  
Interscience Publishers, New York, 1962.
- 8 SAGE, A.D. and WHITE, C.C.,  
Optimum systems Control.  
Prentice Hall, New Jersey, 1977.

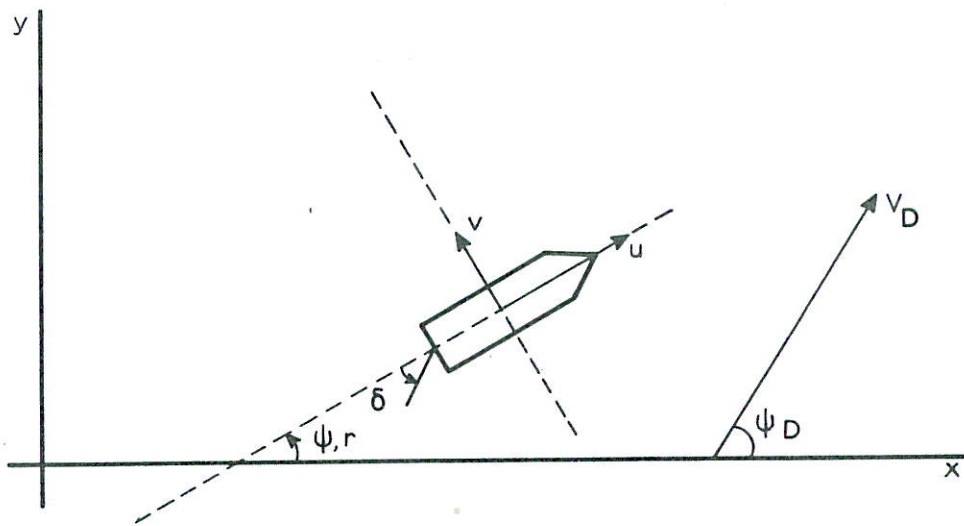
LITERATUUR (vervolg)

- 9 Waterloopkundig Laboratorium,  
Schepen in dwarsstroom, Fysisch gevoeligheidsonderzoek.  
R 775/M 1670, augustus 1981.
  
- 10 Waterloopkundig Laboratorium,  
Schepen in dwarsstroom, Wiskundig gevoeligheidsonderzoek.  
R 775/W 252, oktober 1982.



	tanker
L	289,8 m
B	44,0 m
T	17,5 m
$\nabla$	200.000 m <sup>3</sup>
$v_{\max}$	12,0 kn
$n_{\max}$	85 rpm

Tabel 1 Eigenschappen van de beproefde tanker



DEFINITIESCHETS

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

W 252

FIG. 1

dwarssroom



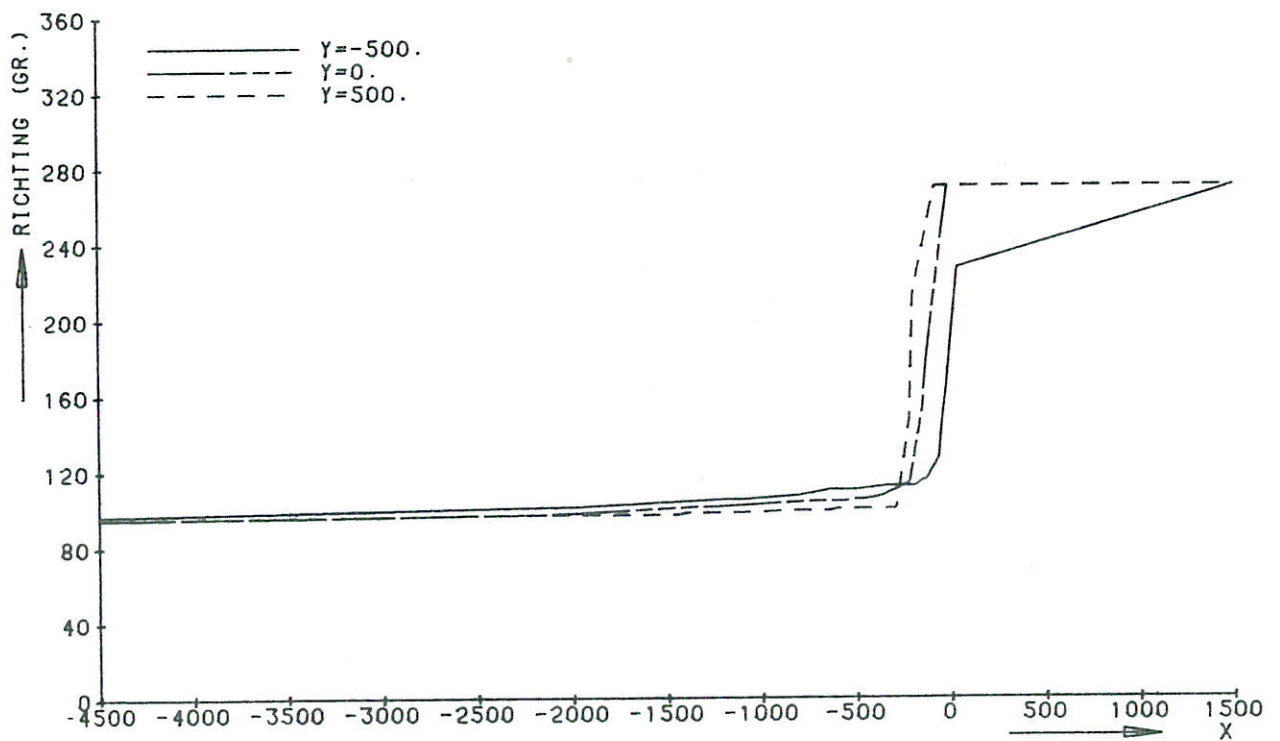
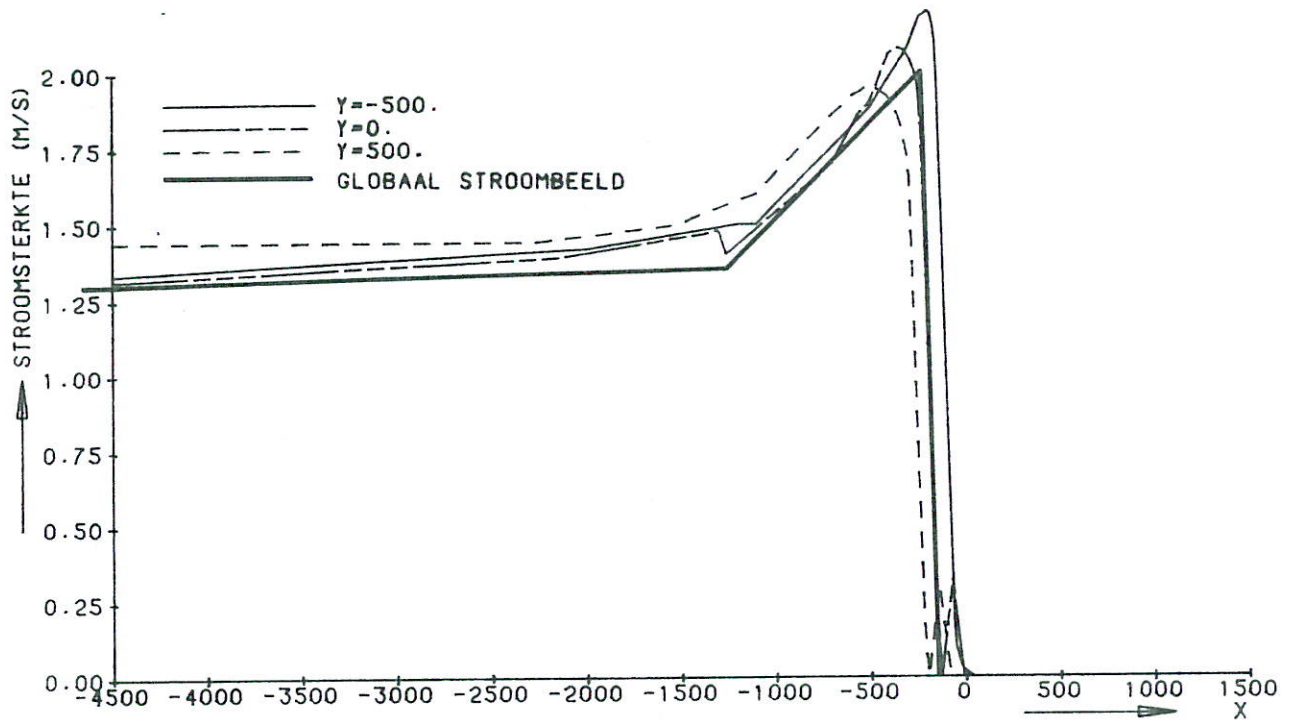
startpunt



x

HAVEN

KARAKTERISTIEKE VAARBAAN



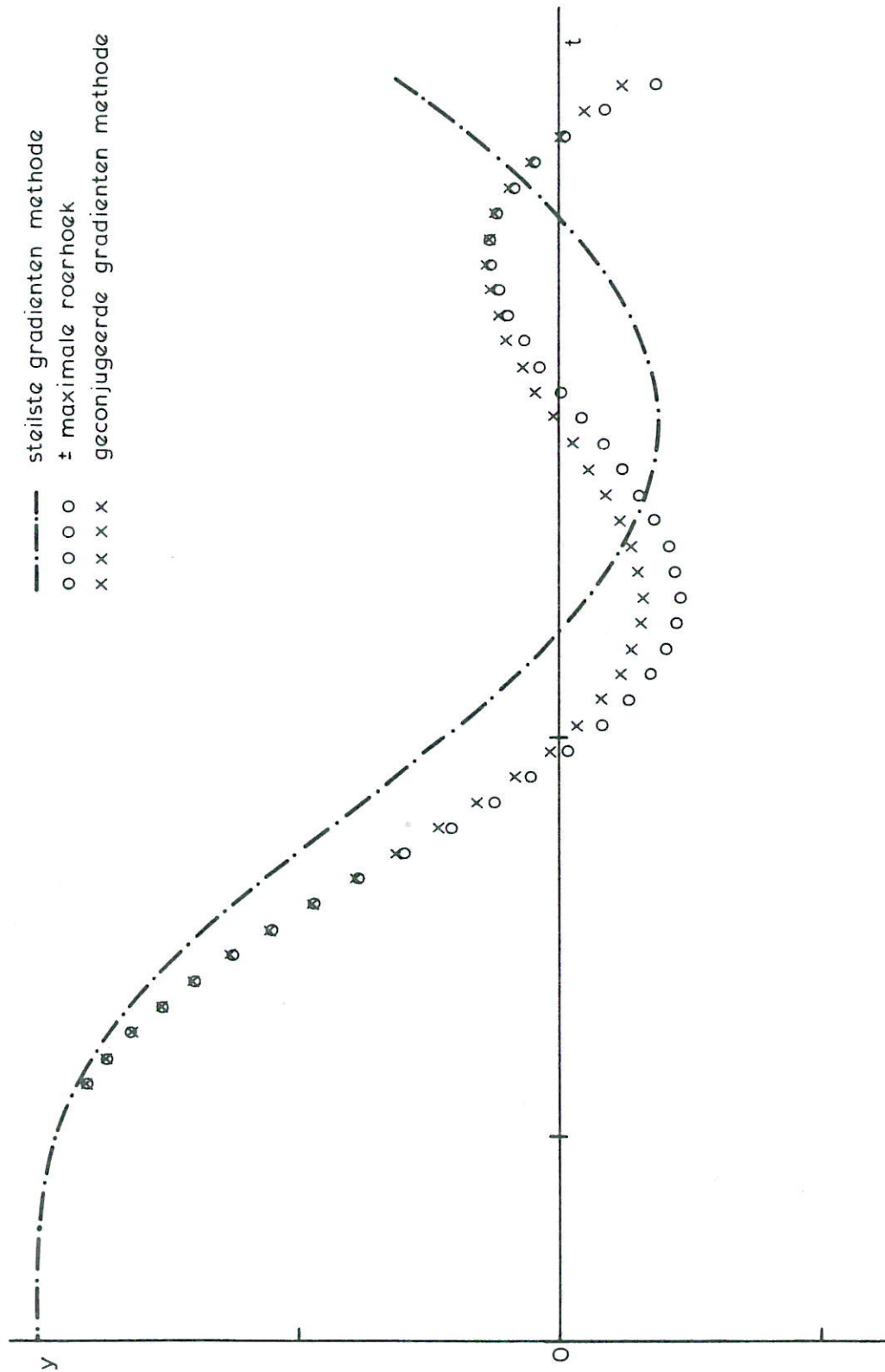
SNELHEIDSVERDELING VAN DE DWARSSTROOM  
SIM., STRM=1, EKSP=1

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

W252

FIG. 3



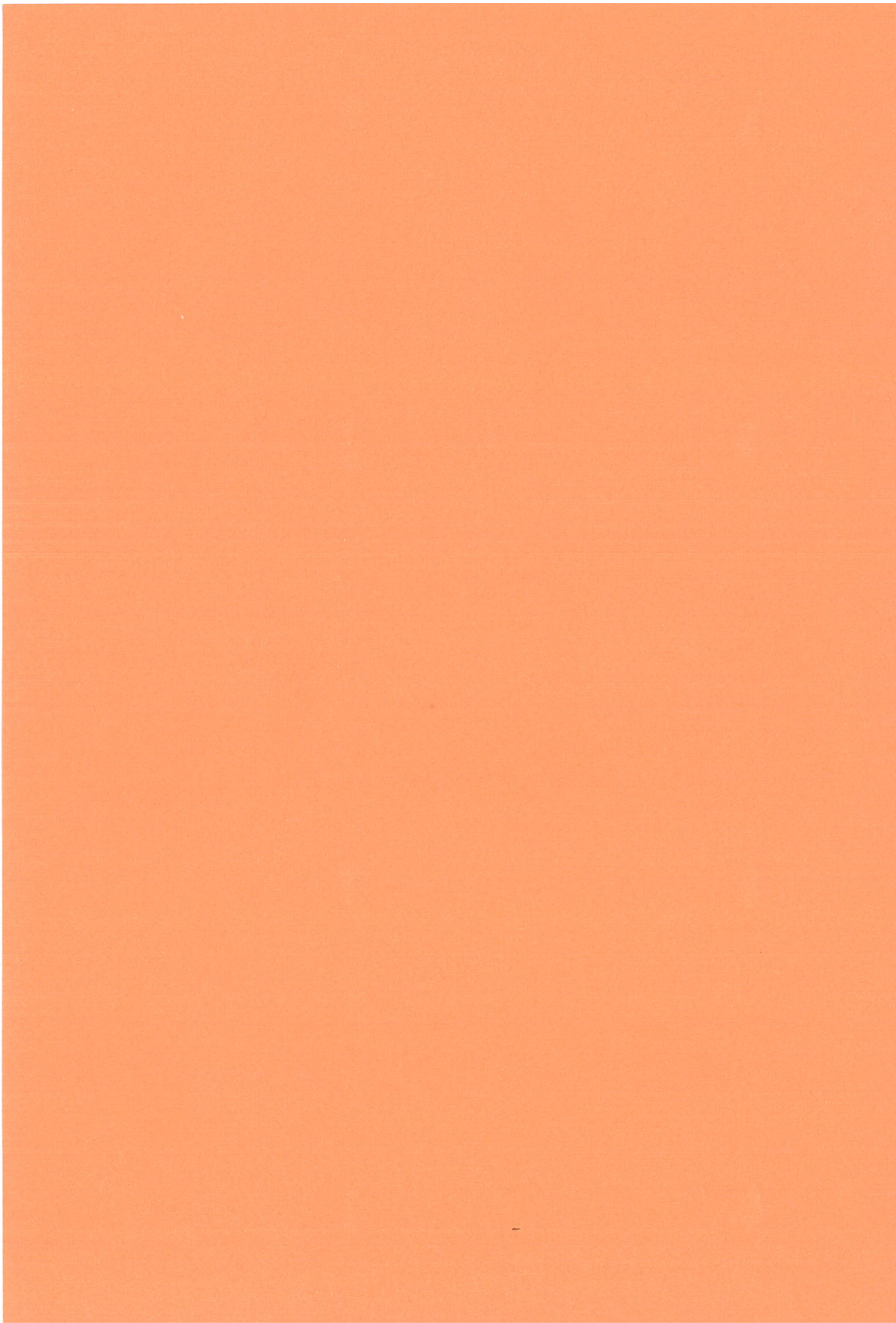


OPTIMALISATIE VAN DE VAARBAAN VOOR HET  
 NOMOTO-MODEL

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

W 252

FIG. 4





APPENDIX

Afleiding van de optimaliseringsformules

In deze appendix wordt aangegeven hoe de vergelijkingen (5), (6) en (8) worden verkregen zonder daarbij op de wiskundige details in te gaan. Ter vereenvoudiging van de formules wordt daarbij uitgegaan van één dimensie.

De baan  $x$  wordt beschreven door de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (\text{A.1})$$

waarin  $u$  een te bepalen stuurgrootte is. Er moet gestuurd worden van punt  $x = x_0$  op  $t = t_0$  naar punt  $x = x_1$  op  $t = t_1$  en wel zodanig dat

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt \quad (\text{A.2})$$

minimaal wordt. Er wordt verondersteld dat een dergelijke optimale besturing  $u^0$  bestaat. Dan geldt voor een kleine variatie  $\delta u$  van  $u^0$ :

$$I(\delta u) = J(u^0 + \delta u) - J(u^0) = \int_{t_0}^{t_1} (F(x^0 + \delta x, u^0 + \delta u, t) - F(x^0, u^0, t)) dt \quad (\text{A.3})$$

Daarin is  $x^0 + \delta x$  de baan die bij de besturing  $u^0 + \delta u$  hoort, dat wil zeggen  $\delta x$  is geen willekeurige variatie. Voorts hoeft de verstoring  $\delta u$  lokaal niet klein te zijn, integraal wel. Bij ontwikkeling van  $F$  in een Taylor reeks voor  $\delta x$  volgt:

$$I(\delta u) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F(x^0 + \delta x, u^0 + \delta u, t) - F(x^0 + \delta x, u^0, t) + \frac{\partial F^0}{\partial x} \delta x \right\} + \text{hogere orde termen} \quad (\text{A.4})$$

Een ontwikkeling naar  $\delta u$  is niet toegestaan daar  $\delta u$  lokaal niet klein hoeft te zijn. Om de afhankelijke variatie  $\delta x$  kwijt te raken wordt een nog onbekende hulpfunctie  $p(t)$  ingevoerd zodat (A4) te schrijven is als:

$$I(\delta u) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \{ F(x^0 + \delta x, u^0 + \delta u, t) - p f(x^0 + \delta x, u^0 + \delta u, t) + \right. \\ \left. - \{ F(x^0 + \delta x, u^0, t) - p f(x^0 + \delta x, u^0, t) \} + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\partial F^0}{\partial x} - p \frac{\partial f^0}{\partial x} - \dot{p} \right\} \delta x(t) + \frac{d}{dt} (p(t) \delta x) \right] dt + \text{hogere orde} \quad (\text{A.5})$$

waarin gebruikt is dat  $\delta \dot{x} = \delta f$ .

Door nu  $p$  zodanig te kiezen dat

$$\frac{\partial F^0}{\partial x} - p \frac{\partial f^0}{\partial x} - \dot{p} = 0 \quad (\text{A.6})$$

te kiezen volgt voor (A.4)

$$I(\delta u) = \int_{t_0}^{t_1} \{H(x^0 + \delta x, u^0, t) - H(x^0 + \delta x, u^0 + \delta u, t)\} dt + p(t_1) \delta x(t_1) + p(t_0) \delta x(t_0) \quad (\text{A.7})$$

waarin  $H$  de functie van Hamilton is:

$$H = -F + pf \quad (\text{A.8})$$

Voorts kan opgelegd worden:  $\delta x_0(t) = 0$ . Een dergelijke voorwaarde voor  $\delta x_1(t)$  houdt te strenge voorwaarden voor  $\delta u$  in. In plaats daarvan wordt een voorwaarde aan  $p$  opgelegd in het punt  $t = t_1$ . Daartoe wordt een optimale besturing  $u^+$  ingevoerd voor een baan tussen  $t = t_0$ ,  $x = x_0$  en  $t = t_1$ ,  $x = x_1 + \delta x_1$ , dat wil zeggen hetzelfde eindpunt als bij de besturing  $u + \delta u$  wordt verkregen. Dan geldt:

$$I(\delta u) = J(u^0 + \delta u) - J(u^0) \geq J(u^+) - J(u^0) \quad (\text{A.9})$$

Nu wordt  $p(t_1)$  zo gekozen dat:

$$p(t_1) \delta x(t_1) = J(u^+) - J(u^0) \quad (\text{A.10})$$

In de limiet geldt dan:

$$p(t_1) = \frac{dJ}{dx_1} \quad (\text{A.11})$$

Voor de uitdrukking (A.7) geldt dan:

$$I(\delta u) = \int_{t_0}^{t_1} \{H(x^0 + \delta x, u^0, t) - H(x^0 + \delta x, u^0 + \delta u, t)\} dt \geq 0 \quad (\text{A.12})$$

Deze uitdrukking geldt voor elke willekeurige  $\delta u$  en dus ook voor een lokale afwijking:



$$\begin{aligned} \delta u &= 0 & 0 < t < t^*, & t^* + \Delta t < t < t_1 \\ c & & t^* < t < t^* + \Delta t & \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Er geldt dan:

$$\Delta t \{H(x^0 + \delta x, u^0, t) - H(x^0 + \delta x, u^0 + K, t)\} \geq 0 \quad (\text{A.14})$$

Waaruit volgt dat  $H(x^0 + \delta x, u^0, t)$  lokaal maximaal is voor  $u = u^0$ .

In het bovenstaande is uitgegaan van een vast eindpunt. Bij een vrij eindpunt geldt volgens (11):

$$p(t_1) = 0 \quad (\text{A.15})$$

In meer detail wordt deze afleiding beschreven in [5].

p.o. box 177

2600 mh delft

the netherlands