

LABORATORIUM VOOR SCHEEPSBOUWKUNDE

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

NUMERIEKE FILTERS

door

C.C. Glansdorp

Samenvatting.

Bij de analyse van gedigitaliseerde meetsignalen is het vaak nodig ruis van het meetsignaal te scheiden door toepassing van een numeriek filter. De theorie van deze filters werd door Martin ontworpen en wordt in dit rapport behandeld.

Met een aantal voorbeelden wordt het gebruik van numerieke filters toegelicht.

Lijst van symbolen:

A	amplitudo
$a_1(r)$	overdrachtsfunctie van een filter met een faseverschuiving 0 of $\pm \pi$
B_k	uiteindelijk gewicht van een filter
$B_k^{(o)}$	ongecorrigeerde gewicht van een filter
$B_k^{(a)}$	correctiegewicht op $B_k^{(o)}$ van een filter met een faseverschuiving 0 of π
$B_k^{(b)}$	correctiegewicht op $B_k^{(o)}$ van een filter met een faseverschuiving $\pm \frac{\pi}{2}$
$b_1(r)$	overdrachtsfunctie van een filter met een faseverschuiving $\pm \frac{\pi}{2}$
c_k	Fouriercoefficient
$F(\theta), F(u)$	hulpfuncties
f	frequentie
f_s	bemonsteringsfrequentie
$f(\theta)$	hulpfunctie
$G(r)$	gewenste amplitudokarakteristiek
$G_{f1}(\omega)$	amplitudokarakteristiek
$g(k)$	hulpfunctie
h	frequentieparameter die samenhangt met de helling
I	na het afbreken van de amplitudokarakteristiek van het filter kleinste kwadraten criterium
L_k	gewicht van een filter bestaande uit $B_k^{(o)}$ en $B_k^{(a)}$ of $B_k^{(b)}$
M	kleinste kwadraten criterium
r	dimensieloze frequentie
r_c	afkap frequentie
r_o	waarde van r waarvoor $G(r)$ de waarde y_o aanneemt
t	tijd
$Y_{f1}(\omega)$	overdrachtsfunctie
$Y(r)$	gewenste overdrachtsfunctie
$Y_1(r)$	benaderde overdrachtsfunctie
$y_i(t)$	tijdsafhankelijk signaal, input
$y_o(t)$	output
y_o	amplitudo van de afbreeksinusoid

y_1	waarde van de amplitudokarakteristiek van het filter bij de afkapfrequentie
y_1'	waarde van de helling van de amplitudokarakteristiek van het filter bij de afhapfrequentie
δ	correctiegrootheid
Δ	correctiegrootheid
σ	verschil in frequentie tussen een willekeurige frequentie en de frequentie r_0
τ	intervaltijd
ω	cirkelfrequentie
$\phi_{f1}(\omega)$	fasekarakteristiek
$\phi(r)$	gewenste fasekarakteristiek
$\Omega_f(\omega)$	vermogensspectrum

Inhoud.

1. Inleiding
2. Algemene beschouwingen over numerieke filters
 - 2.1. De overdracht van een numeriek filter
 - 2.2. Bepaling van de gewichten van het filter
 - 2.3. De amplitudo afbreekcorrectie op de gewichten
3. Laagdoorlaatfilter
4. Bandfilter
5. Differentiator
6. Dubbele differentiator
7. Toepassingen

Referenties

Bijlagen:

1. Procedure laagdoorlaatfilter
2. Procedure differentiator
3. Procedure vermenigvuldiging
4. Inbouw van procedures in een programma

Lijst van figuren.

- Fig. 1: Plaatsing van een filter in een meet- en verwerkingsketen
- Fig. 2: Digitaal filter
- Fig. 3: Amplitudo karakteristiek van een laagdoorlaatfilter
- Fig. 4: Amplitudo karakteristiek van een bandfilter
- Fig. 5: Amplitudo karakteristiek van een differentiator
- Fig. 6: Amplitudo karakteristiek van een dubbele differentiator
- Fig. 7 t/m Fig.10: Simulatie van het filteren van een meetsignaal
- Fig. 11: Invloed van de signaalruisverhouding op het meetsignaal
- Fig. 12: Filteren van een tijdsafhankelijk signaal met ruis en berekening van de bijbehorende tijdsafgeleide
- Fig. 13: Berekening gewichten door vermenigvuldiging

1. Inleiding.

Bij de analyse van het gedrag van systemen, waarvan metingen ter beschikking staan, doet zich vaak het probleem voor de gewenste informatie te scheiden van storingen op het gemeten signaal. Dit laat zich te meer gelden als de analyse niet "stochastisch" maar "deterministisch" zal worden uitgevoerd.

Het onderdrukken van storingen van periodieke aard op de gemeten signalen gebeurt door filters.

In het algemeen kan men de filters in de meet- en verwerkingskring, die schematisch in fig. 1 is weergegeven, nog op verschillende plaatsen opnemen. De opstelling van een filter als algoritme in een computer, zoals fig. 1^a laat zien, wordt beschouwd als een numeriek filter. De plaats van het filter, zoals in fig. 1^b is aangegeven wordt bij routinemetingen vaak toegepast. Het filter kan analoog of digitaal worden uitgevoerd,

De situatie van fig. 1^c komt vaak bij éénmalige metingen voor. Na een bestudering van de parallel aan de bandopnemer geschakelde analoge informatiebron wordt besloten een filter met bepaalde karakteristieken toe te passen om de gewenste informatie te isoleren. Ook dit filter kan analoog of digitaal worden uitgevoerd.

Tussen het numerieke filter van fig. 1^a en de eventuele digitale filters van fig. 1^b en 1^c bestaan in uitvoeringsvorm grote verschillen. Fig. 2 geeft een illustratie van een digitaal filter zoals te gebruiken zou zijn in fig. 1^b en 1^c,

Een korte beschrijving van dit filter wordt ontleend aan [1].

Een continue signaal $x(t)$ wordt bemonsterd, gemeten in een A/D (analoog/digitaal) omzetter en vervolgens in een code weergegeven. Deze informatie wordt aangeboden aan een schuifregister, bestaande uit $m+1$ regels.

Op het commando van een klokpuls, die ook de bemonsteringsfrequentie regelt, worden de inhouden van de geheugenregels één plaats naar rechts geschoven. De werking van het filter is zodanig dat een lineaire combinatie van de in het schuifregister aanwezige waarden wordt gemaakt.

Aan de uitgang van het filter komt een rij getallen $y(kT)$ volgens:

$$y(kT) = x(kT) + a_1 x(kT-T) + a_2 x(kT-2T) \dots + a_m x(kT-mT) \quad (1.1.)$$

Hierin zijn $a_1 \dots a_m$ constanten die de overdracht van het filter bepalen. De verschillen tussen analoog en digitaal filteren komen aan het licht door te bedenken dat de werking van een analoog filter beschreven kan worden door lineaire differentiaalvergelijkingen terwijl (1.1.) een voorbeeld is van een stelsel differentievergelijkingen. Vergelijking (1.1.) is een voorbeeld van een niet recursief filter; een voorbeeld van een recursief filter wordt gegeven door de volgende vergelijking:

$$y(kT) = \sum_{i=0}^r L_i \cdot x(kT-iT) - \sum_{i=0}^m K_i \cdot y(kT-iT) \quad (1.2.)$$

De output $y(kT)$ hangt af van de input en output op voorgaande tijdstippen.

Voor de werking van een numeriek filter, zoals in fig. 1^a, kan men schrijven:

$$y_o(t) = \sum_{k=-n}^n B_k \cdot x(t+kT) \quad (1.3.)$$

Dit numerieke filter is niet recursief. De output hangt af van de input in "toekomst" en "verleden" als we het tijdstip t als "heden" definieren.

In het vervolg zullen we onze aandacht richten op het numerieke filter. Martin[2] heeft een beschrijving van het ontwerp van deze filters gegeven. We zullen zijn gedachtengang op de voet volgen. Voor een aantal filters zijn Algolprocedures gemaakt. Het gebruik van deze filters wordt in een aantal voorbeelden toegelicht.

2. Algemene beschouwingen over numerieke filters.

2.1. De overdracht van een numeriek filter.

Stel dat een signaal y_i bestaat uit een aantal frequentiecomponenten van de vorm:

$$y_i(t) = Ae^{j\omega t} \quad (2.1.1.)$$

Hierin is: A: een complexe amplitudo
 ω : cirkelfrequentie
 t: de tijd

Wordt zo'n component met een constante frequentie f_s bemonsterd, dan zijn er discrete waarden op alle tijdstippen t die $\tau = \frac{1}{f_s}$ sec. van elkaar liggen voorradig van de vorm $Ae^{j\omega(t+k\tau)}$.

$k = 1 \dots n$,

Definieren we nu een output y_o als som van een eindig aantal van deze waarden ieder vermenigvuldigd met een zeker gewicht B_k als volgt:

$$y_o(t) = \sum_{k=-M}^N B_k Ae^{j\omega(t+k\tau)} \quad (2.1.2.)$$

dan wordt als overdrachtsfunctie van het filter de volgende uitdrukking gevonden:

$$Y_{fl}(\omega) = \frac{y_o(t)}{y_i(t)} = \sum_{k=-M}^N B_k e^{j\omega k\tau} \quad (2.1.3.)$$

Deze uitdrukking wordt nu vaak geschreven als:

$$Y_{fl}(\omega) = G_{fl}(\omega) \cdot e^{j\phi_{fl}(\omega)} \quad (2.1.4.)$$

We noemen in (2.1.4.):

G_{fl} : de amplitudokarakteristiek

ϕ_{fl} : de fasekarakteristiek

Er wordt nu een dimensieloze frequentie r ingevoerd, die als volgt wordt gedefinieerd:

$$r = \frac{f}{f_s} \quad (2.1.5.)$$

waarin:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

We veronderstellen nu dat de input geen frequentie componenten bevat die groter zijn dan $0.5 \times f_s$.

Het te beschouwen dimensieloze frequentiegebied strekt zich dan uit van:

$$-0.5 \leq r \leq 0.5 \quad (2.1.6.)$$

Beschouwen we nu het vermogensspectrum Ω_f van een functie $y(t)$

$$\Omega_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (2.1.7.)$$

met

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_f(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (2.1.8.)$$

dan geldt voor een reële functie $y(t)$ de eigenschap:

$$\Omega_f(-\omega) = \Omega_f^*(\omega) \quad (2.1.9.)$$

In (2.1.9.) is Ω_f^* de geconjugeerde van Ω_f .

Het omgekeerde van (2.1.9.) is ook geldig: een vermogensspectrum met eigenschap (2.1.9.) behoort bij een reële functie.

In het vervolg zullen we reële functies $y(t)$ beschouwen.

We veronderstellen nu dat het vermogensspectrum van $y_1(t)$ buiten het door (2.1.6.) gedefinieerde interval geen bijdragen meer krijgt.

Hiermee kan (2.1.8.) geschreven worden als:

$$y_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi f_s}^{\pi f_s} \Omega_{fi}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.1.10.)$$

Ontwikkelen we in het interval gegeven in (2.1.6.) het vermogenspectrum van y_i in een Fourierreeks, dan

$$\Omega_{fi}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \frac{2\pi k \omega}{2\pi f_s}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \omega \frac{k}{f_s}} \quad (2.1.11.)$$

waarin c_k gegeven is door:

$$c_k = \frac{1}{2\pi f_s} \cdot \int_{-\pi f_s}^{\pi f_s} \Omega_{fi}(\omega) \cdot e^{-j \omega \frac{k}{f_s}} d\omega \quad (2.1.12.)$$

Uit een vergelijking van (2.1.12.) en (2.1.10.) blijkt nu dat:

$$c_k = \frac{1}{f_s} y_i\left(-\frac{k}{f_s}\right) = \frac{1}{f_s} y_i(-k\tau) \quad (2.1.13.)$$

De Fouriercoëfficiënt c_k is te berekenen door de k^{de} discrete waarde van de input $y_i(t)$ te nemen en deze door de bemonsteringsfrequentie te delen.

Nu is (2.1.11.) te schrijven als:

$$\Omega_{fi}(\omega) = \frac{1}{f_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_i(k\tau) e^{-j \omega \frac{k}{f_s}} \quad (2.1.14.)$$

Voor $y_i(t)$ kan nu geschreven worden:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi f_s}^{\pi f_s} \frac{1}{f_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_i(k\tau) \cdot e^{-j \omega \frac{k}{f_s}} e^{j\omega t} dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_i(k\tau) \cdot \frac{\sin \pi(f_s t - k)}{\pi(f_s t - k)} \end{aligned} \quad (2.1.15.)$$

De laatste twee uitdrukkingen worden nu beschouwd als de voorstellingswijze van het door het digitaliseren ontstane functie en het daarbij behorende spectrum.

Maken we nu gebruik van de bekende relatie

$$Y_f(\omega) = \frac{\Omega_{fo}(\omega)}{\Omega_{fi}(\omega)} \quad (2.1.16.)$$

waarin:

- $\Omega_{fo}(\omega)$ het spectrum van de output
- $\Omega_{fi}(\omega)$ het spectrum van de input
- $Y_f(\omega)$ de overdracht van een filter

dan wordt als (2.1.14.) met (2.1.16.) wordt gecombineerd:

$$\Omega_{fo}(\omega) = \frac{1}{f_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_i(k\tau) \cdot Y_f(\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{k}{f_s}} \quad (2.1.17.)$$

De bijbehorende output wordt als volgt gevonden:

$$\begin{aligned} y_o(t) &= \frac{1}{2\pi f_s} \int_{-\pi f_s}^{\pi f_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_i(k\tau) \cdot Y_f(\omega) e^{-j\omega \frac{k}{f_s}} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_i(k\tau) \frac{1}{2\pi f_s} \int_{-\pi f_s}^{\pi f_s} Y_f(\omega) e^{-j\omega \left(\frac{k}{f_s} - t\right)} d\omega \end{aligned} \quad (2.1.18.)$$

Speciaal is op het tijdstip $t = 0$:

$$y_o(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_i(k\tau) \cdot \frac{1}{2\pi f_s} \int_{-\pi f_s}^{\pi f_s} Y_f(\omega) e^{-j\omega \frac{k}{f_s}} d\omega \quad (2.1.19.)$$

Nu is (2.1.19.) te schrijven als:

$$y_o(o) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \cdot y_i(k\tau)$$

$$\text{met } B_k = \frac{1}{2\pi f_s} \cdot \int_{-\pi f_s}^{\pi f_s} Y_f(\omega) e^{-j\omega \frac{k}{f_s}} d\omega \quad (2.1.20.)$$

Met behulp van vergelijking (2.1.5.) wordt B_k :

$$B_k = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Y_f(\omega) e^{-j2\pi k r} dr \quad (2.1.21.)$$

B_k wordt nu een gewicht van het filter, gekarakteriseerd door $Y_f(\omega)$ genoemd.

In het algemeen moet men volstaan met een eindig (meestal klein) aantal gewichten. Met het oog hierop wordt (2.1.20.) nu:

$$y_o(o) = \sum_{k=-M}^N B_k \cdot y_i(k\tau) \quad (2.1.22.)$$

De overdrachtsfunctie is dan:

$$Y_{f1}(\omega) = \sum_{k=-M}^N B_k \cdot e^{j\omega k \tau} \quad (2.1.23.)$$

Hierin heeft nu Y_{f1} betrekking op de overdrachtsfunctie van een filter met een eindig aantal gewichten.

In de dimensieloze frequentie r geschreven wordt (2.1.23.) nu:

$$Y(r) = \sum_{k=-M}^N B_k \cdot e^{j2\pi k r} \quad (2.1.24.)$$

2.2. Bepaling van de gewichten van het filter.

Vervolgens vragen we ons af wat de waarden van de gewichten B_k zijn als de overdracht $Y_1(r)$ zo goed mogelijk een gewenste overdrachtsfunctie gedefinieerd door:

$$Y(r) = G(r) \cdot e^{j\phi(r)} \quad (2.2.1.)$$

benadert door toepassing van het criterium van de kleinste kwadraten.

Derhalve moet nu

$$I = \frac{1}{2r_2} \int_{-r_2}^{r_2} \left(Y(r) - Y_1(r) \right)^2 dr = \text{minimaal} \quad (2.2.2.)$$

door een geschikte keuze van de gewichten B_k .

Een combinatie van de vergelijkingen (2.1.24.), (2.2.1.) en (2.2.2.) levert op:

$$I = \frac{1}{2r_2} \int_{-r_2}^{r_2} \left(G(r) \cdot e^{j\phi(r)} - \sum_{k=-M}^N B_k \cdot e^{j2\pi kr} \right)^2 dr$$

Dit kan geschreven worden als:

$$I' = 2r_2 I = \int_{-r_2}^{r_2} \left(G(r) \cdot e^{j\phi(r)} - \sum_{k=-M}^N B_k \cdot e^{j2\pi kr} \right) \cdot$$

$$\left(G(r) e^{-j\phi(r)} - \sum_{k=-M}^N B_k e^{-j2\pi kr} \right) dr$$

Het minimaliseren van deze uitdrukking levert de volgende $N + M + 1$ betrekkingen:

$$\frac{\partial I'}{\partial B_k} = \int_{-r_2}^{r_2} \left\{ -e^{j2\pi kr} \left[G(r) \cdot e^{-j\phi(r)} - \sum_{k=-M}^N B_n \cdot e^{-j2\pi nr} \right] + \right. \\ \left. -e^{-j2\pi kr} \left[G(r) \cdot e^{j\phi(r)} - \sum_{n=-M}^N B_n \cdot e^{j2\pi nr} \right] \right\} dr$$

Werken we de voorgaande uitdrukking verder uit dan krijgen we

$$\sum_{k=-M}^N B_n \int_{-r_2}^{r_2} \cos 2\pi(k-n)r \, dr = \int_{-r_2}^{r_2} G(r) \cdot \cos \{2\pi kr - \phi(r)\} dr$$

Daar nu $2\pi(k-n)$ en $2\pi kr - \phi(r)$ oneven functies zijn kunnen we schrijven:

$$\sum_{k=-M}^N B_n \int_0^{r_2} \cos 2\pi(k-n)r \, dr = \int_0^{r_2} G(r) \cdot \cos \{2\pi kr - \phi(r)\} dr \quad (2.2.3.)$$

Stellen we nu:

$$g(k) = \int_0^{r_2} G(r) \cdot \cos \{2\pi kr - \phi(r)\} dr \quad (2.2.4.)$$

en

$$F(u) = \int_0^{r_2} \cos 2\pi ur \, dr \quad (2.2.5.)$$

$$\text{met, als } \begin{array}{l} u=0 \quad F(0) = r_2 \\ u \neq 0 \quad F(u) = \frac{\sin 2\pi ur_2}{2\pi u} \end{array}$$

dan kan (2.2.3.) geschreven worden als:

$$\sum_{n=-M}^N B_n \cdot F(k-n) = g(k) \quad (2.2.6.)$$

Beschouwen we nu $r_2 = 0.5$, dan is

$$\begin{aligned} F(u) &= 0 & \text{als } u \neq 0 \\ F(u) &= 0.5 & \text{als } u = 0 \end{aligned}$$

Hiermee wordt (2.2.6,)

$$\frac{1}{2}B_k = g(k) \quad \text{met } k = -N(1)M$$

of anders geschreven

$$B_k = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} G(r) \cdot \cos\{2\pi kr - \phi(r)\} dr \quad (2.2.7.)$$

Deze uitdrukking is bijzonder waardevol daar door het gebruik van (2.2.7.) vermeden wordt dat we $M+N+1$ lineaire vergelijkingen in B_k moeten oplossen, zoals zal voorkomen als $r_2 < 0.5$,

Is nu het faseverschil ϕ gelijk aan 0 of π dan wordt $g(k)$

$$g(k) = \int_0^{r_2} G(r) \cdot \cos 2\pi kr dr \quad (2.2.8.)$$

In(2.2.8.) is $g(k)$ een even functie van k ; als $G(r)$ gedefinieerd is over het hele interval $0 \leq r \leq 0.5$ dan blijkt:

$$\begin{aligned} B_{-k} &= B_k \\ M &= N \end{aligned} \quad (2.2.9.)$$

De bijbehorende overdrachtsfunctie volgt uit:

$$\begin{aligned} a_1(r) = Y_1(r) &= \sum_{k=-N}^N B_k \cdot e^{j2\pi kr} \\ &= B_0 + \sum_{k=1}^N B_k \cdot (e^{j2\pi kr} + e^{-j2\pi kr}) \\ &= B_0 + 2 \sum_{k=1}^N B_k \cdot \cos 2\pi kr \end{aligned} \quad (2.2.10.)$$

Is het faseverschil ϕ gelijk aan $\pm \frac{\pi}{2}$ dan wordt $g(k)$

$$g(k) = \int_0^{r_2} G(r) \cdot \sin 2\pi kr \, dr \quad (2.2.11.)$$

In dit geval is $g(k)$ een oneven functie; als $G(r)$ nu gedefinieerd is over het interval $0 \leq r \leq 0.5$, dan blijkt

$$\begin{aligned} B_{-k} &= -B_k \\ M &= N \end{aligned} \quad (2.2.12.)$$

De bijbehorende overdrachtsfunctie volgt uit:

$$\begin{aligned} Y_1(r) &= \sum_{k=-N}^N B_k \cdot e^{j2\pi kr} \\ &= \sum_{k=1}^N (B_k e^{j2\pi kr} + B_{-k} e^{-j2\pi kr}) \\ &= \sum_{k=1}^N B_k (e^{j2\pi kr} - e^{-j2\pi kr}) \\ &= 2j \sum_{k=1}^N B_k \sin 2\pi kr \\ b_1(r) &= \frac{Y_1(r)}{j} = 2 \sum_{k=1}^N B_k \sin 2\pi kr \end{aligned} \quad (2.2.13.)$$

Indien nu een filter wordt gebruikt voor het elimineren van de ongewenste hoge frequenties dan is de amplitudoverhouding tot de afbreekfrequentie gespecificeerd, terwijl voor alle $r > r_c$ geldt $a_1(r) = 0$ of $b_1(r) = 0$, dan kan men de gewichten B_k berekenen door:

$$B_k^{(0)} = 2 \int_0^{r_c} G(r) \cdot \cos \{2\pi kr - \phi(r)\} \, dr \quad (2.2.14.)$$

(0) slaat in (2.2.14.) op het feit dat nog geen afbreekcorrectie voor de amplitudokarakteristiek op het gewicht B_k is toegepast.

2.3. De amplitudo afbreekcorrectie op de gewichten.

Indien bij een zekere afbreekfrequentie r_c de amplitudo wordt afgesneden en als dit beschreven wordt door een Fouriersom dan treden ter plaatse van deze abrupte overgang heftige slingeringen op, die grote afwijkingen van de gewenste amplitudokarakteristiek kunnen opleveren. Om dit verschijnsel tegen te gaan wordt het afbreken voorgesteld door een sinusoïde. Bij de afbreekfrequentie r_c moeten dan aansluitvoorwaarden gelden.

Stel dat de sinusoïde als volgt geschreven kan worden:

$$G(r) = y_0 \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{r-r_0}{h} \right) \quad \text{voor } r \geq r_c \quad (2.3.1.)$$

Hierin is: y_0 de amplitudo
 r_0 die waarde van r waarvoor $G(r)$ de waarde y_0 aanneemt
 h een frequentieparameter die samenhangt met de helling van het afbreken

Ter plaatse van de afbreekfrequentie moet aan de volgende aansluitvoorwaarden worden voldaan.

$$\text{Als } r = r_c \text{ dan } y_0 \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{h} \right) = A(r_c) = y_1$$

en

$$-y_0 \frac{\pi}{2h} \cos \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{h} = A'(r_c) = y_1' \quad (2.3.2.)$$

$$\text{met } \sigma = r - r_0$$

Hieruit volgen onmiddellijk de volgende relaties:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{h} &= \frac{y_1 - y_0}{y_0} \\ \cos \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{h} &= \frac{-2h}{\pi} \frac{y_1'}{y_0} \\ y_0 &= \frac{y_1^2 + \left(\frac{2h}{\pi}\right)^2 y_1'^2}{2y_1} \end{aligned} \quad (2.3.3.)$$

De vergelijking (2.2.14.) wordt hiermee:

$$\begin{aligned}
 B_k &= 2 \int_0^{r_0+h} G(r) \cdot \cos\{2\pi kr - \phi(r)\} dr \\
 &= 2 \int_0^{r_c} G(r) \cdot \cos\{2\pi kr - \phi(r)\} dr + \int_{r_c}^{r_0+h} G(r) \cdot \cos\{2\pi kr - \phi(r)\} dr \\
 B_k &= B_k^{(o)} + \int_{r_c}^{r_0+h} G(r) \cdot \cos\{2\pi kr - \phi(r)\} dr \quad (2.3.4.)
 \end{aligned}$$

De in (2.3.4.) vermelde integraal is de afbreekcorrectie $B_k^{(a)}$ op het gewicht $B_k^{(o)}$.

Ook hier hebben we weer te maken met twee gevallen wat betreft de fasedraaiing: $\phi(r) = 0$ of π en $\phi(r) = -\frac{\pi}{2}$ of $\frac{\pi}{2}$

We behandelen hier eerst $\phi(r) = 0$ of π .

De correctie $B_k^{(a)}$ is nu met (2.3.1.)

$$\begin{aligned}
 B_k^{(a)} &= 2y_0 \int_{r_c}^{r_0+h} \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{r-r_0}{h}\right) \cos 2\pi kr dr \\
 &= 2y_0 \int_{r_c}^{r_0+h} \cos 2\pi kr dr - y_0 \int_{r_c}^{r_0+h} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{r-r_0}{h} + 2\pi kr\right) dr \\
 &\quad - y_0 \int_{r_c}^{r_0+h} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{r-r_0}{h} - 2\pi kr\right) dr
 \end{aligned}$$

Worden deze integralen nu uitgewerkt dan wordt $B_k^{(a)}$ uiteindelijk:

$$B_k^{(a)} = \frac{\frac{8}{\pi} kh^2 y_1' \cos 2\pi kr_c - (y_0 - 16k^2 h^2 y_1) \sin 2\pi kr_c + y_0 \sin 2\pi k(r_0+h)}{k(1-16k^2 h^2)} \quad (2.3.5.)$$

Tenslotte wordt het geval $\phi = \frac{-\pi}{2}$ of $\frac{\pi}{2}$ beschouwd.

De correctie integraal wordt nu $B_k^{(b)}$ genoemd,

$$B_k^{(b)} = 2y_0 \int_{r_c}^{r_0+h} \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{r-r_0}{h}\right) \sin 2\pi k r \, dr =$$

$$= \frac{(y_0 - 16k^2 h^2 y_1) \cos 2\pi k r_c + \frac{8}{\pi} k h^2 y_1 \sin 2\pi k r_c - y_0 \cos 2\pi k (r_0+h)}{\pi k (1 - 16k^2 h^2)} \quad (2.3.6.)$$

Tenslotte kan men van een filter eisen dat in de buurt van $r=0$ de amplitudoverhouding gelijk is aan die van de theoretische waarde. Dit kan gebeuren door op de som van gewicht en de geschikte afbreekcorrectie een nieuwe correctie te geven.

Bij de bespreking van de onderscheiden filters zal hierop nader worden ingegaan.

3. Laagdoorlaatfilter.

De werking van een ideaal laagdoorlaatfilter kan als volgt worden gedefinieerd:

Alle frequenties lager dan de afbreekfrequentie worden onveranderd doorgelaten, alle frequenties daarboven worden volledig onderdrukt.

De hierbij behorende frequentiekaracteristieken luiden:

$$\begin{aligned} G(r) &= 1 & \text{voor } 0 \leq r \leq r_c \\ \phi(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.)$$

Door toepassing van (2.2.9.) volgt nu:

$$B_{-k} = B_k \quad (3.2.)$$

De gewichten $B_k^{(o)}$ worden berekend met (2.2.14.)

$$B_k^{(o)} = 2 \int_0^{r_c} \cos 2\pi k r dr = \frac{\sin 2\pi k r_c}{\pi k} \quad (3.3.)$$

Uit (3.3.) volgt nu voor $k = 0$,

$$B_0^{(o)} = 2r_c \quad (3.4.)$$

De correctie $B_k^{(a)}$ wordt berekend met behulp van de aansluitvoorwaarden:

$$\begin{aligned} G(r_c) &= y_1 = 1 \\ G'(r_c) &= y_1' = 0 \end{aligned} \quad (3.5.)$$

Hieruit volgt nu met (2.3.3.),

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} \\ \sigma &= h \\ r_0 &= r_c + h \end{aligned} \quad (3.6.)$$

Vergelijking (3.6.) met (2.3.5.) gecombineerd levert op:

$$B_k(a) = \frac{-(\frac{1}{2}-16k^2h^2)\sin 2\pi k r_c + \frac{1}{2}\sin 2\pi k(r_c + 2h)}{\pi k(1-16k^2h^2)} \quad (3.7.)$$

Noemen we nu:

$$L_k = B_k(o) + B_k(a) \quad (3.8.)$$

dan wordt L_k door optelling van (3.3.) met (3.7.)

$$L_k = \left[\frac{\cos 2\pi kh}{1-16k^2h^2} \right] \left[\frac{\sin 2\pi k(r_c+h)}{k} \right] \quad (3.9.)$$

Zoals aan het eind van sectie 2.3. vermeld, kan op L_k desgewenst een correctie worden aangebracht om in het punt $r=0$ het filter zo goed mogelijk aan $G(o) = 1$ te laten voldoen.

De voorwaarden bij $r=0$ zijn:

$$\left. \begin{array}{l} G(o) = 1 \\ G'(o) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.10.)$$

Differentiëren van vergelijking (2.2.10.) levert op:

$$a_1'(r) = -4\pi \sum_{k=1}^N kB_k \sin 2\pi kr \quad (3.11.)$$

Derhalve is $G'(o) = a_1'(o) = 0$, zodat aan de tweede voorwaarde van (3.10.) voldaan is.

Definiëren we nu een functie $F(\theta)$,

$$F(\theta) = B_0 + 2 \sum_{k=1}^N B_k \cos k\theta \quad \text{met } \theta = 2\pi r, \quad (3.12.)$$

die de kleinste kwadraten benadering is van een functie $f(\theta)$ dan is de functiewaarde in de oorsprong:

$$F(0) = B_0 + 2 \sum_{k=1}^N B_k = f(0) = 1 \quad (3.13.)$$

Elimineren we nu B_0 uit (3.12.) en (2.13.) dan,

$$F(\theta) = f(0) + 2 \sum_{k=1}^N B_k (\cos k\theta - 1) \quad (3.14.)$$

Om de correctieterm nu te vinden dienen we de volgende uitdrukking M minimaal te maken over $0 \leq \theta \leq \pi$ met behulp van de kleinste kwadratenmethode:

$$M = \int_0^{\pi} [F(\theta) - f(\theta)]^2 d\theta \quad (3.15.)$$

Dan moet gelden

$$\frac{\partial M}{\partial B_m} = 2 \int_0^{\pi} [F(\theta) - f(\theta)] \frac{\partial F(\theta)}{\partial B_m} d\theta = 0 \quad (3.16.)$$

voor $m=1(\dots)N$

Wordt (3.16) uitgewerkt dan wordt de volgende uitdrukking verkregen.

$$2 \sum_{k=1}^N B_k - f(0) + B_m = L_m - L_0 \quad (3.17.)$$

met:

$$L_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta$$

en

$$L_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta$$

De uitdrukkingen voor L_m en L_0 zijn gelijkwaardig met (2.3.4.).
Wordt (3.17.) met (3.13.) gecombineerd dan komt er:

$$B_k - B_0 = L_k - L_0$$

Noemen we nu $B_k - L_k = B_0 - L_0 = \delta$ (3.19.)

en

$$1 - (L_0 + 2 \sum_{k=1}^N L_k) = \Delta \quad (3.20.)$$

dan wordt (3.20.) na combinatie met (3.17.),

$$B_0 - L_0 + 2 \sum_{k=1}^N (B_k - L_k) = \Delta \quad (3.21.)$$

Na combinatie van (3.19.) met (3.21.) wordt de volgende uitdrukking verkregen:

$$(2N + 1)\delta = \Delta \quad (3.22.)$$

Met (3.19.) wordt (3.22.):

$$B_k = L_k + \frac{\Delta}{2N+1} \quad (3.23.)$$

Zijn de filterparameters r_c , h en N nu bekend, dan kunnen de gewichten B_k berekend worden door toepassing van vergelijking (3.9.). De correctie voor $r=0$ op de gewichten geschiedt nu door berekening van (3.20.) en (3.23.).

4. Bandfilter.

De werking van een ideale bandfilter is zodanig dat componenten tussen de twee hoekfrequenties onveranderd worden doorgelaten doch buiten het door de hoekpunten gedefinieerde frequentie interval worden frequentiecomponenten onderdrukt.

De gewichten van een bandpassfilter zijn eenvoudig te berekenen uit de gewichten van twee laagdoorlaatfilters waarvan de afbreekfrequenties gelijk zijn aan de twee hoekfrequenties van het bandfilter en de waarden van de gewichten behorend bij het laagdoorlaatfilter met de kleinste afbreekfrequentie af te trekken van de waarden van het overeenkomstige gewicht van het laagdoorlaatfilter met de grootste afbreekfrequentie.

5. Differentiator.

De werking van een ideale differentiator is zodanig dat tot de afbreekfrequentie de tijdsafgeleide van de input wordt geproduceerd en frequenties groter dan de afbreekfrequentie worden onderdrukt.

Stel dat we een sinusvormige input

$$y_i(t) = Ae^{j\omega t}$$

als ingangssignaal de differentiator aanbieden,

De afgeleide is:

$$y_o(t) = \frac{dy_i(t)}{dt} = Aj\omega e^{j\omega t} = A\omega e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

De overdrachtsfunctie is nu:

$$Y = \frac{y_o(t)}{y_i(t)} = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} = 2\pi f e^{j\frac{\pi}{2}} = 2\pi r f_s e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (5.1.)$$

We schrijven nu naar analogie met (2.1.2.)

$$y_o(t) = \frac{d}{dt} \cdot y_i(t) = f_s \sum_{k=-M}^N B_k \cdot y_i(t+k\tau) \quad (5.2.)$$

De frequentiekaracteristieken luiden:

$$\left. \begin{aligned} G(r) &= b(r) = 2\pi r \\ \phi(r) &= +\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ voor } 0 \leq r \leq r_c \quad (5.3.)$$

Uit het faseverschil $\frac{\pi}{2}$ en (2.2.12.) volgt:

$$\begin{aligned} B_{-k} &= -B_k \\ M &= N \end{aligned} \quad (5.4.)$$

De gewichten $B_k^{(o)}$ worden berekend met (2.2.14.)

$$B_k^{(o)} = 4\pi \int_0^{r_c} r \sin 2\pi k r dr = \frac{\sin 2\pi k r_c - 2\pi k r_c \cos 2\pi k r_c}{\pi k^2} \quad (5.5.)$$

De afbreekcorrectie $B_k^{(b)}$ wordt berekend met behulp van de volgende aansluitvoorwaarden:

$$\begin{aligned} y_1 &= A(r_c) = 2\pi r_c \\ y_1' &= A'(r_c) = 2\pi \end{aligned} \quad (5.6.)$$

Met behulp van de verg. (2.3.3.) en (2.3.6.) kan nu $B_k^{(b)}$ worden uitgedrukt in de grootheden k , r_c en h .

Het gecorrigeerde gewicht L_k volgt nu uit:

$$L_k = B_k^{(o)} + B_k^{(b)} \quad (5.7.)$$

Indien men de gewichten L_k wenst aan te passen voor de waarden van de amplitudokarakteristiek op de oorsprong gedefinieerd door

$$\begin{aligned} G(o) &= o \\ G'(o) &= 2\pi \end{aligned} \quad (5.8.)$$

dan dient een procedure te worden gevolgd zoals in sectie 3 beschreven. Deze procedure wordt hier toegelicht,

Differentieren van (2.2.13.) naar r levert op:

$$b_1'(r) = 4\pi \sum_{k=1}^N B_k \cdot k \cos 2\pi k r \quad (5.9.)$$

Dus voor $r=0$ geldt:

$$b_1'(o) = 4\pi \sum_{k=1}^N kB_k = 2\pi$$

of wel

$$\sum_{k=1}^N kB_k = \frac{1}{2} \quad (5.10.)$$

Definiëren we weer een functie $F(\theta)$:

$$F(\theta) = 2 \sum_{k=1}^N B_k \sin k\theta \quad \text{met } \theta = 2\pi r \quad (5.11.)$$

die de kleinste kwadratenbenadering van een functie $f(\theta)$ is, dan volgt uit eliminatie van B_1 uit (5.10.) en (5.11.)

$$F(\theta) - (2C - 2 \sum_{k=2}^N kB_k) \sin \theta + 2 \sum_{k=2}^N B_k \sin k\theta \quad (5.12.)$$

Nu moet

$$\frac{\partial}{\partial B_m} \int_0^\pi \{F(\theta) - f(\theta)\}^2 d\theta = 0 \quad (5.13.)$$

Uitwerking van verg. (5.13.) met behulp van (5.12.) levert na enig rekenwerk:

$$B_m - C_m + m \sum_{k=2}^N kB_k = L_m - mL_1 \quad (5.14.)$$

Hierin zijn L_m en L_1 de gewichten zoals gevonden in (5.7.)

Nu kan met gebruikmaking van (5.10.), terwijl (5.14.) in de k^{de} notatie is geschreven, afgeleid worden dat:

$$B_k - k \left(\sum_{k=1}^N kB_k - \sum_{k=2}^N kB_k \right) = L_k - kL_1$$

$$\text{of wel: } B_k - kB_1 = L_k - kL_1 \quad (5.15.)$$

Noemen we nu:

$$B_k - L_k = k(B_1 - L_1) = k\delta \quad (5.16.)$$

en

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^N kL_k = \Delta \quad (5.17.)$$

dan kan de volgende betrekking gevonden worden:

$$\sum_{k=1}^N k(B_k - L_k) = \sum_{k=1}^N k^2 \delta = \delta \sum_{k=1}^N k^2 = \Delta \quad (5.18.)$$

Hieruit volgt dan uiteindelijk:

$$B_k = L_k + \frac{k \Delta}{\sum_{k=1}^N k^2} \quad (5.19.)$$

Zijn de filterparameters h , r_c en N bekend dan is het rekenschema ter berekening van de gewichten als volgt:
 met behulp van (5.5.) wordt het gewicht zonder afbreekcorrectie berekend, Daarna wordt uitgaande van de voorwaarden (5.6.) m,b,v. de in (2.3.3.) genoemde grootheden de waarde van de afbreekcorrectie (2.3.6.) berekend, Optellen volgens (5.7.) van de twee gewichten $B_k^{(o)}$ en $B_k^{(b)}$ levert dan het gewicht L_k . Met behulp van (5.17.) wordt de correctie grootheid Δ berekend, waarna met verg. (5.19.) de uiteindelijke waarde van het gewicht B_k berekend wordt.

6. Dubbele differentiator.

De werking van de ideale dubbele differentiator is zodanig dat tot de afbreekfrequentie de tweede tijdsafgeleide van de input wordt geproduceerd en frequenties groter dan de afbreekfrequentie worden onderdrukt.

Stel dat we een sinusvormige input

$$y_i(t) = Ae^{j\omega t}$$

als ingangssignaal aan de dubbele differentiator aanbieden.

De tweede afgeleide is:

$$y_o(t) = \frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} = -A\omega^2 e^{j\omega t} = A\omega^2 e^{j(\omega t + \pi)}$$

Als overdrachtsfunctie wordt nu geschreven

$$Y = \frac{y_o(t)}{y_i(t)} = \omega^2 e^{j\pi} = 4\pi^2 f_s^2 r^2 e^{j\pi} \quad (6.1.)$$

We schrijven nu naar analogie met (2.1.2.):

$$y_o(t) = \frac{d^2}{dt^2} \cdot y_i(t) = f_s^2 \cdot \sum_{k=-M}^N B_k \cdot y_i(t + k\tau) \quad (6.2.)$$

De frequentiekaracteristieken luiden:

$$\left. \begin{aligned} G(r) &= b(r) = 4\pi^2 r^2 \\ \phi(r) &= \pi \end{aligned} \right\} 0 \leq r \leq r_c \quad (6.3.)$$

Uit het faseverschil $\phi = \pi$ en (2.2.9.) volgt nu:

$$\left. \begin{aligned} B_{-k} &= B_k \\ M &= N \end{aligned} \right\} \quad (6.4.)$$

De gewichten B_k zijn nu te bepalen met de procedure die ook in de secties 3 en 5 is gebruikt.

Er is evenwel ook een andere procedure denkbaar, door gebruikmaking van twee in serie geschakelde differentiatoren.

We stellen daartoe:

$$y_1(t) = \frac{d}{dt} y_i(t) = f_s \sum_{k=-N_1}^{N_1} B_{k1} \cdot y_i(t+k\tau)$$

en

(6.5.)

$$y_o(t) = \frac{d}{dt} y_1(t) = f_s^2 \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} B_{k_2} \cdot y_1(t+k_2\tau)$$

Nu is

$$y_1(t+k_2\tau) = f_s \sum_{k=-N_1}^{N_1} B_{k1} \cdot y_i\{t+(k_1+k_2)\tau\}$$

dus is

$$y_o(t) = f_s^2 \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} B_{k_2} \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} B_{k_1} \cdot y_i\{t+(k_1+k_2)\tau\} \quad (6.6.)$$

Stellen we nu dat (6.6.) en (6.2.) identiek zijn dan volgt:

$$k = k_1 + k_2 \quad (6.7.)$$

De nieuwe gewichten B_k worden berekend met behulp van fig. 13.

Uit serieschakeling van twee differentiators kan dus een dubbele differentiator gemaakt worden.

Evenzo is het mogelijk op deze wijze twee willekeurige filters te schakelen.

7. Toepassingen.

Als voorbeeld zijn in de fig. 3, 4, 5 en 6 de amplitudokarakteristieken uitgezet voor een laagdoorlaatfilter, een bandfilter, een differentiator en een dubbele differentiator.

De algoritmes behorend bij de genoemde filters zijn in de bijlagen gegeven.

De werking van een laagdoorlaatfilter wordt gedemonstreerd in fig. 7 t/m fig. 11, waar ruis van een sinusvormig signaal wordt gefilterd. De verhouding tussen signaal en ruis is aangegeven onder de betreffende figuren. De invloed van een meetonnauwkeurigheid is gesimuleerd door een getal getrokken uit een normaalverdeling, waarvan het gemiddelde nul is en de standaardafwijking σ .

Uit de grafieken blijkt dat als de signaal-ruisverhouding afneemt het gefilterde signaal onnauwkeuriger wordt, alhoewel het sinusvormige karakter gehandhaafd blijft.

De invloed van de meetonnauwkeurigheid, beschreven door σ , blijkt zeer gering te zijn. Zeer laag frequente driftverschijnselen zullen ongewijzigd worden doorgelaten.

De werking van de differentiator wordt in fig. 12 gegeven. Een tijdsafhankelijk signaal wordt gefilterd en gedifferentieerd. Het blijkt mogelijk te zijn uit een relatief onnauwkeurig signaal een redelijke tijdsafgeleide te bepalen.

Referenties;

[1] Lavèn, W.J.

"Digitale filters"

de Ingenieur, 21 februari 1969, nr. 8

[2] Martin, Marcel A.

"Frequency Domain Applications in Data Processing"

Technical Inf. Series, General Electric

Missile and Ordnance Systems Department

Bijlage 1: Procedure laagdoorlaatfilter.

1: Protocol voor de berekening van de gewichten van een laagdoorlaatfilter.

```

procedure lowpass (n, rc, h, b);
  integer n; real rc, h; array b;
  begin integer k; real pi, delta;
  array l, ll[0:n];
  l[0] := 2 * (rc + h); ll[0] := 0; pi := 3.14159;
  for k := 1 step 1 until n do
    begin l[k] := cos(2 * pi * k * h) * sin(2 * pi * k * (rc + h)) /
      ((1 - 16 * k * k * h * h) * pi * k);
      ll[k] := l[k] + ll[k-1];
    end; delta := 1 - 2 * ll[n - l[0]];
    for k := 0 step 1 until n do
      begin b[k] := l[k] + delta / (2 * n + 1);
        b[-k] := b[k];
      end;
    end lowpass;

```

2. Verklaring van de formele parameters:

2n+1 is het aantal gewichten

r_c is de afbreekfrequentie

h is de amplitudo afbreekterm

b is de array van de gewichten van het laagdoorlaatfilter

3. Men kieze h zo dat in het interval $[-n, n]$ voor k nergens blijkt dat:

$$1 - 16k^2h^2 = 0, \text{ dus } kh = \pm \frac{1}{4}$$

Bijlage 2: Procedure differentiator.

1: Protocol voor de berekening van de gewichten van een differentiator.

```

procedure diff (n, rc, h, b);
  integer n; real rc, h; array b;
  begin integer k, som;
    real pi, delta, rn, sig, y1, y1a, yn, p;
    array l, ll[0:n];
    ll[0] := l[0] := 0; pi := 3.14159;
    som := 0;
    y1 := 2 * pi * rc; y1a := 2 * pi;
    yn := (y1 * y1 + 4 * h * h * y1a * y1a / (pi * pi)) / (2 * y1);
    p := -pi / 2 * (y1 - yn) / (h * y1a);
    sig := 2 * h / pi * (arctan(p) + pi);
    rn := sig + rc;
    for k := 1 step 1 until n do
      begin l[k] := ((yn - 16 * k * k * h * h * y1) * cos(2 * pi * k * rc)
        + 8 * k * h * h * y1a * sin(2 * pi * k * rc) / pi - yn * cos
          (2 * pi * k * (rn + h))) / (pi * k * (1 - 16 * k * k * h * h));
        ll[k] := ll[k] + sin(2 * pi * k * rc) / (pi * k * k) - 2 * rc
          * cos(2 * pi * k * rc) / k;
        ll[k] := k * ll[k] + ll[k-1];
        som := som + k * k;
      end; delta := 0.5 - ll[n]; b[0] := 0;
      for k := 1 step 1 until n do
        begin b[k] := l[k] + k * delta / som;
          b[-k] := -b[k];
        end;
    end diff;

```

2. Verklaring van de formele parameters

$2n + 1$ is het aantal gewichten

r_c is de afbreekfrequentie

h is de amplitudo afbreekterm

b is de array van de gewichten van de differentiator

3. Men kieze h zo dat in het interval $[-n, n]$ voor k nergens blijkt dat:

$$1 - 16k^2 h^2 = 0, \text{ dus } kh = \pm \frac{1}{4}$$

Bijlage 3. Procedure vermenigvuldiging.

1. Protocol van de procedure die de gewichten van twee filters vermenigvuldigt.

```

procedure verm (a, b, c, n, m, fi);
  integer n, m; array a, b, c; boolean fi;
  begin integer i, j, grens;
    for i := -n step 1 until m do
      begin c[i-m] := 0;
        if i less 2*m+1-n then grens := i+n
        else grens := 2*m;
        for j := 0 step 1 until grens do
          c[i-m] := a[i-j] * b[-m+j] + c[i-m]
        end;
        for j := -m-n step 1 until -1 do
          if fi then c[-j] := c[j] else c[-j] := -c[j]
        end verm;
  end verm;

```

2. Verklaring van de formele parameters:

a is de array van gewichten van het eerste filter
 b is de array van gewichten van het tweede filter
 c is de array van het resulterende filter
 2n+1 is het aantal gewichten van het eerste filter
 2m+1 is het aantal gewichten van het tweede filter
 fi is een boolean die aangeeft de symmetrie of de asymmetrie van het resulterend filter
 ('true' voor laagdoorlaatfilter en dubbele differentiator
 'false' voor differentiator)

Bijlage 4: Inbouw van procedures in een programma.

1. Inbouw van een filter in een programma en gebruik van de gewichten.

Zij $y[1:\text{eind}]$ een array met ongefilterde meetwaarden op onderlinge afstand Δt seconden en zijn de grootheden n , r_c en h geschikt gekozen, dan luidt het programmastuk wat de filterende acties beschrijft als volgt:

```

lowpass (n, rc, h, b);
for j:=n+1 step 1 until eind-n do
begin
  p:=0;
  for jj:= -n step 1 until n do
    p:= p + b[jj] * y[j+jj];
  fy[j]:= p;
end;

```

In dit stuk programma zijn:

j, jj hulpvariabelen van het type 'integer'

p hulpgrootheid van het type 'real'

$fy[n+1: \text{eind}-n-1]$ de array met de gefilterde waarden

N.B. deze array is verkleind met $2n+1$ elementen t.o.v. de array y .

Indien de procedure diff i.p.v. de procedure lowpass was aangeroepen, zodat de array fy de afgeleiden zou bevatten dan luidt de voorlaatste regel van bovenstaand programma:

$fy[j] := p/\Delta t$

2. Inbouw van een bandfilter in een programma.

Zijn n_1 , rc_1 en h_1 de karakteristieken van het laagdoorlaatfilter met de grootste afbreekfrequentie, en n_2 , rc_2 en h_2 dezelfde karakteristieken voor de laagste afbreekfrequentie dan volgen de gewichten van het bandfilter uit:

```
lowpass(n1, rc1, h1, b1);
lowpass(n2, rc2, h2, b2);
for j := -n1 step 1 until n1 do
  c[j] := b1[j] - b2[j];
```

Hierin is c de array van de gewichten van het bandfilter.

De werking is zoals onder 1. beschreven.

3. De dubbele differentiator.

Zijn n , rc_1 , h_1 de karakteristieken van een differentiator en m , rc_2 en h_2 de karakteristieken van een andere differentiator, dan worden de gewichten van de dubbele differentiator berekend door

```
dift(n, rc1, h1, b1);
dift(m, rc2, h2, b2);
norm(b1, b2, c, n, m, 'true');
```

De array c geeft nu de gewichten aan van de dubbele differentiator.

In 1. is dan weer de verdere werking beschreven.

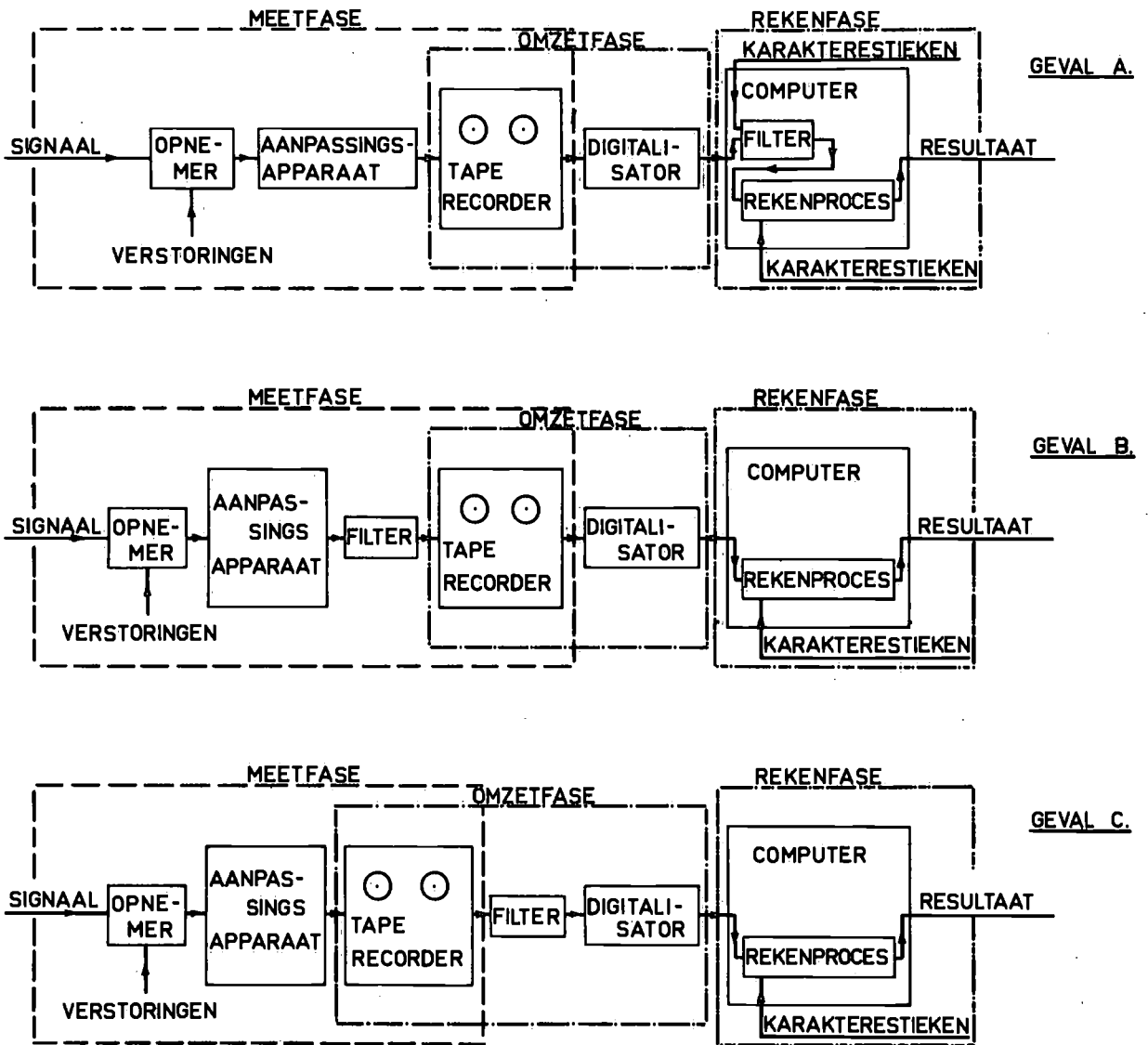


FIG.1: PLAATSING FILTER IN EEN MEET- EN VERWERKINGSKETEN.

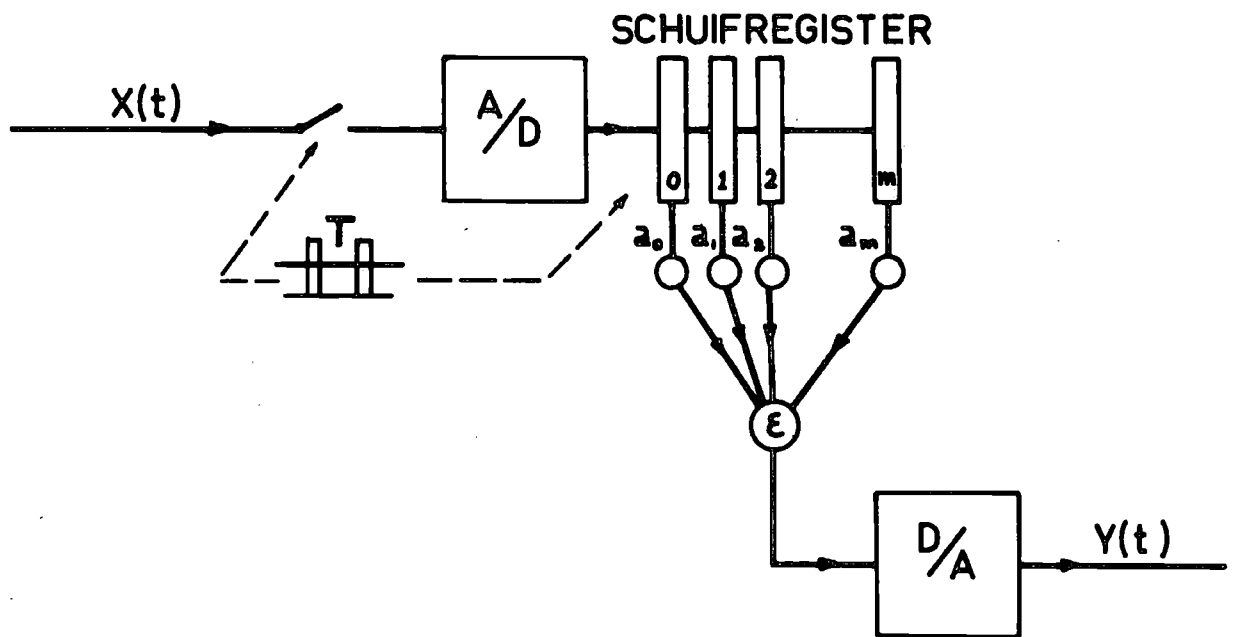


FIG. 2: DIGITAAL FILTER.

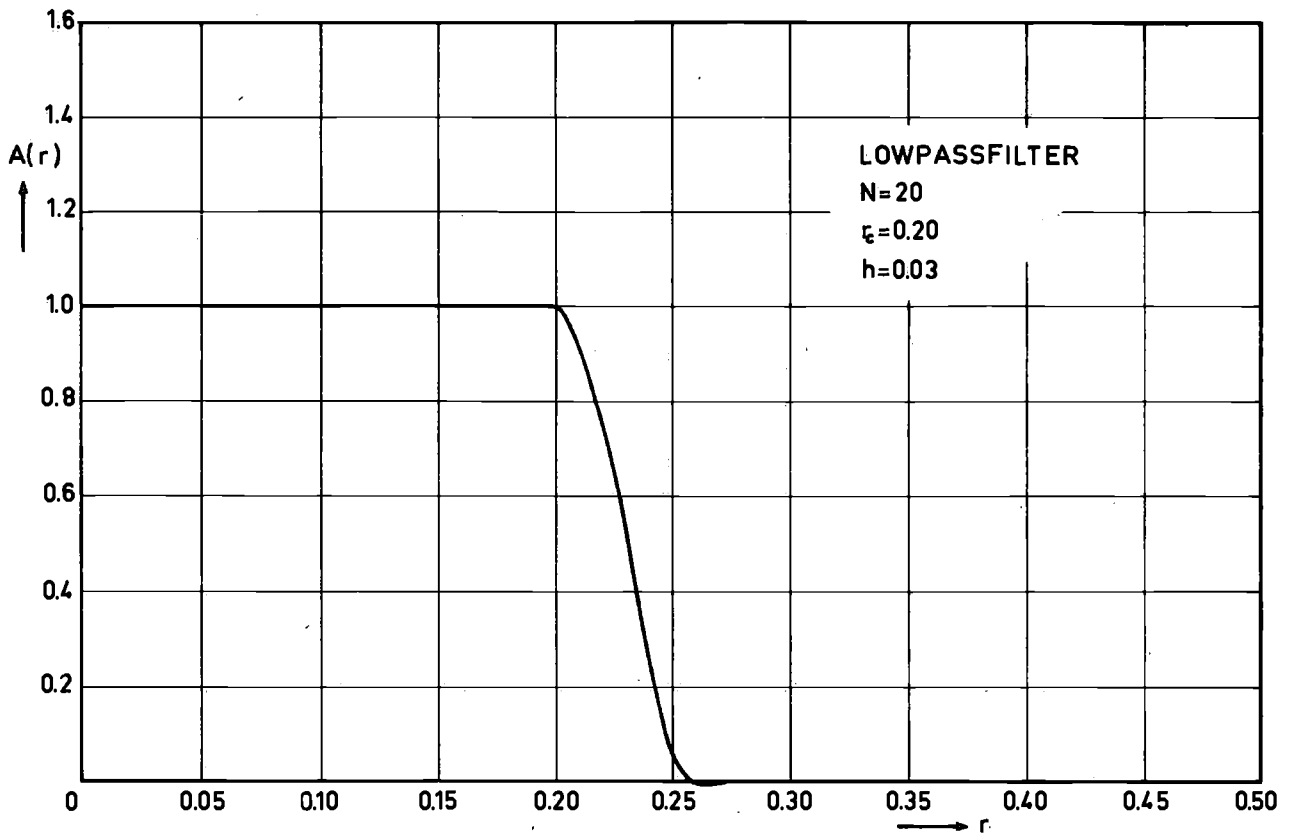


FIG. 3

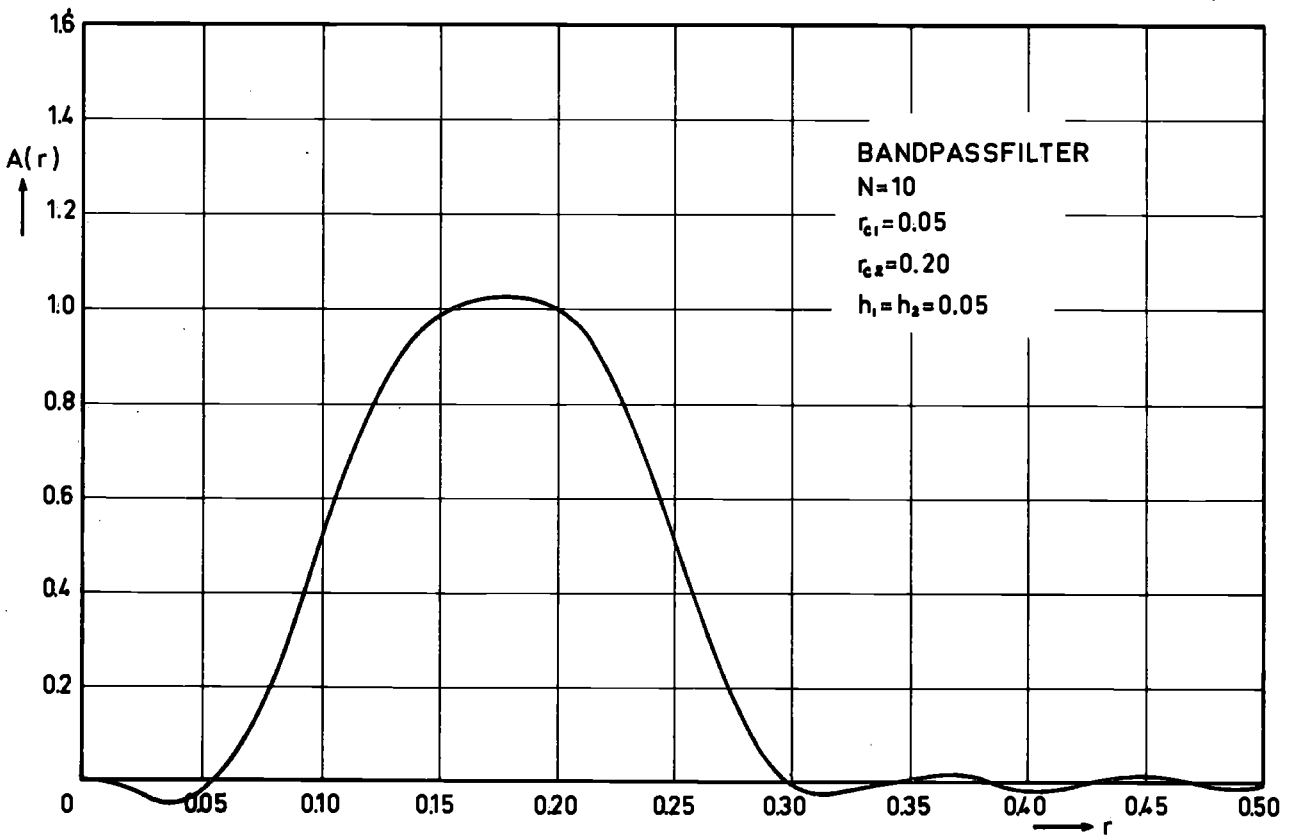


FIG. 4

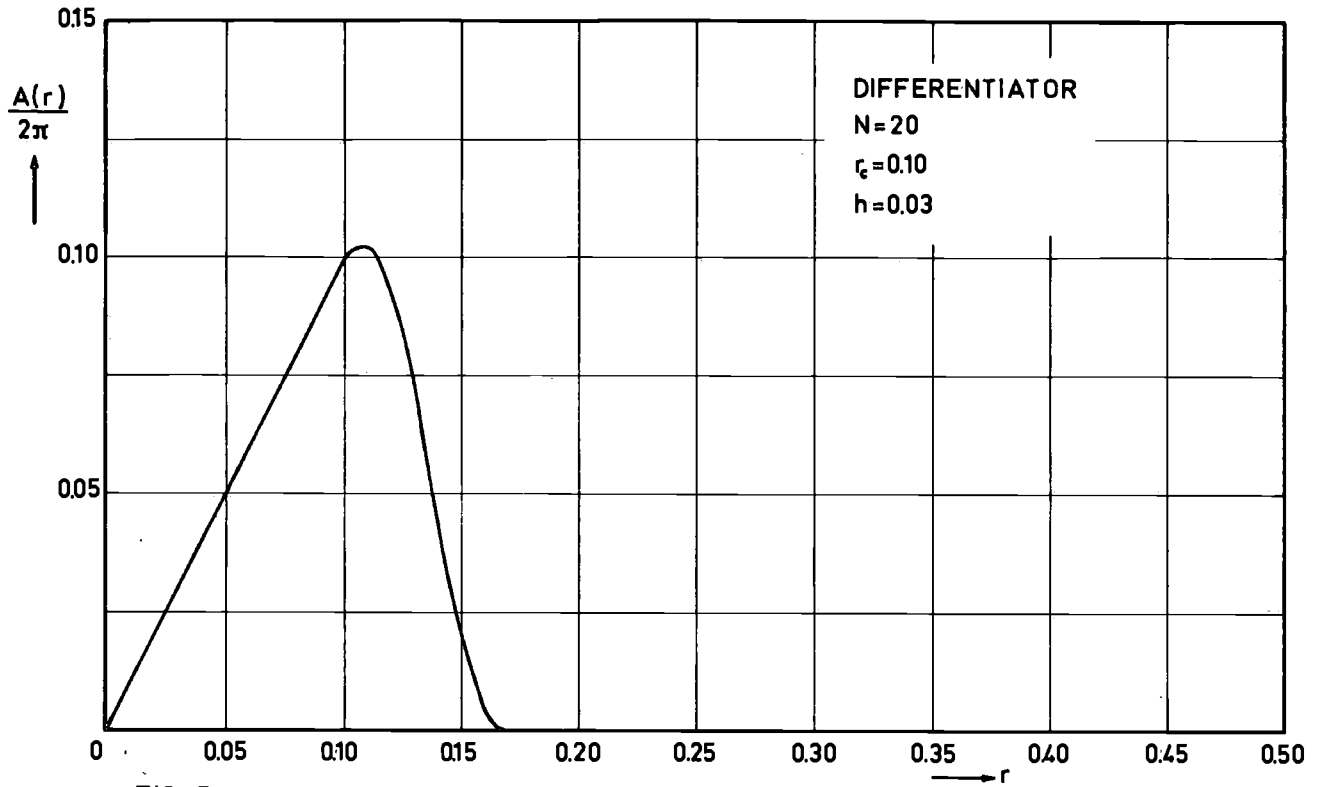


FIG. 5

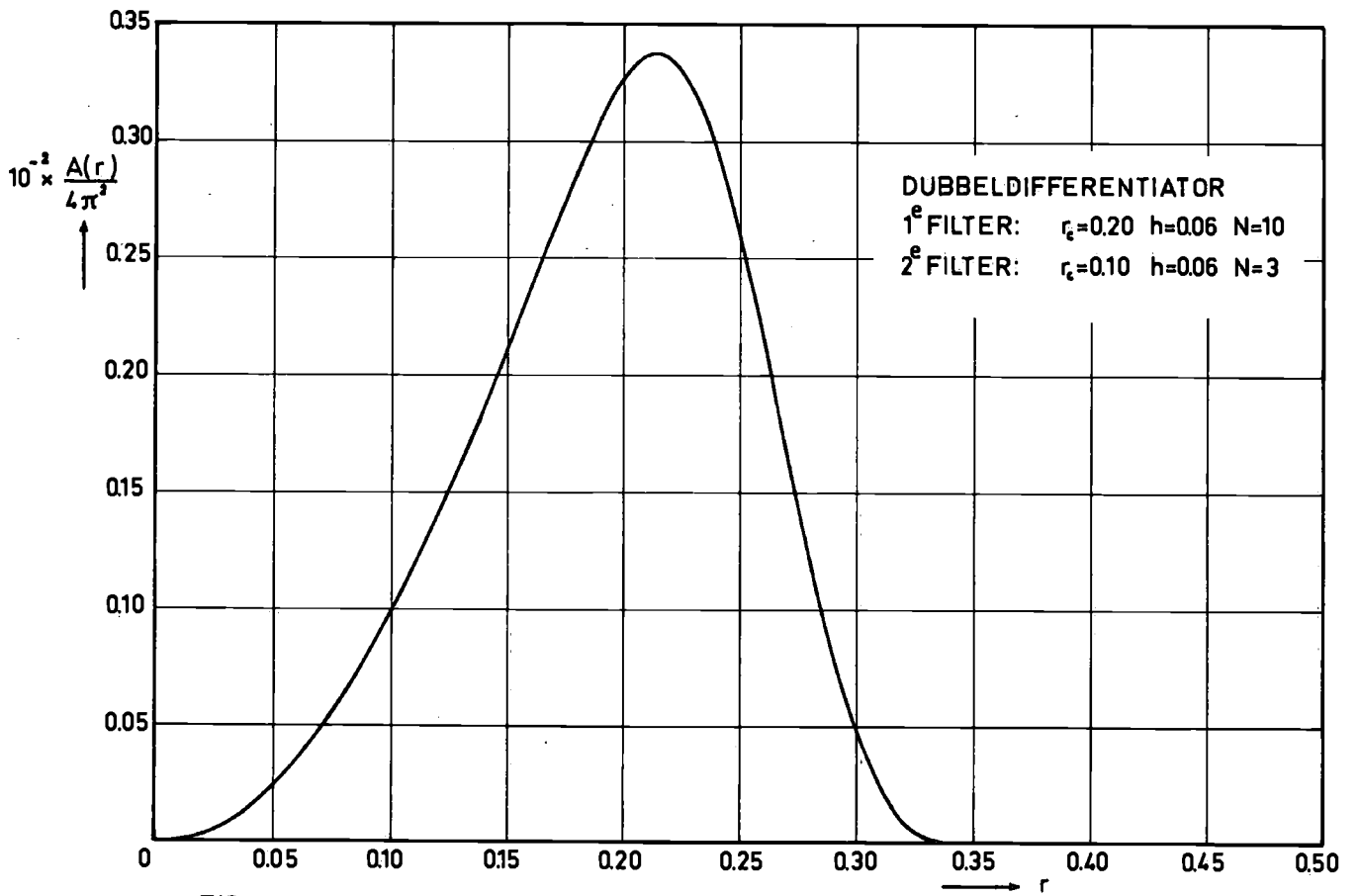


FIG. 6

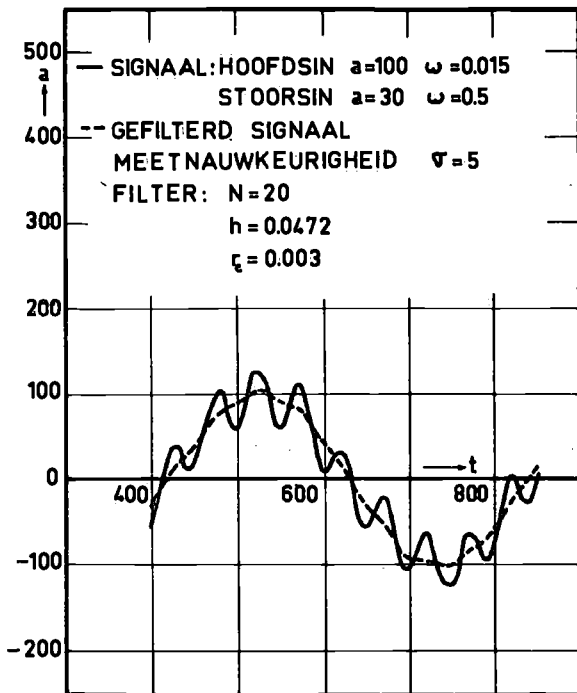


FIG.7 LOWPASS FILTER 100/30

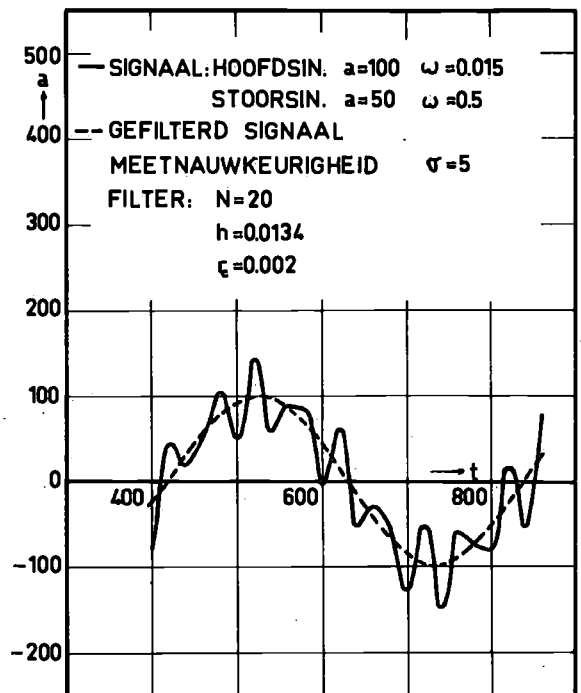


FIG.8 LOWPASS FILTER 100/50

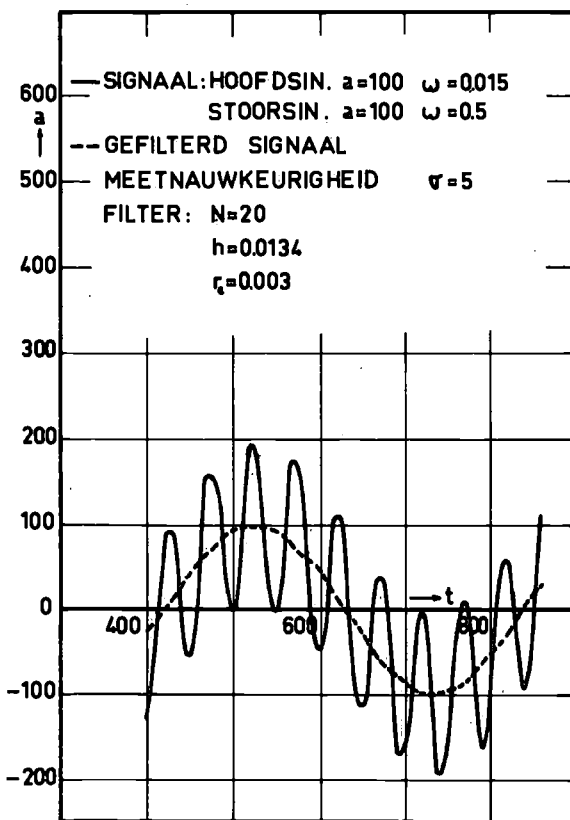


FIG.9 LOWPASS FILTER 100/100

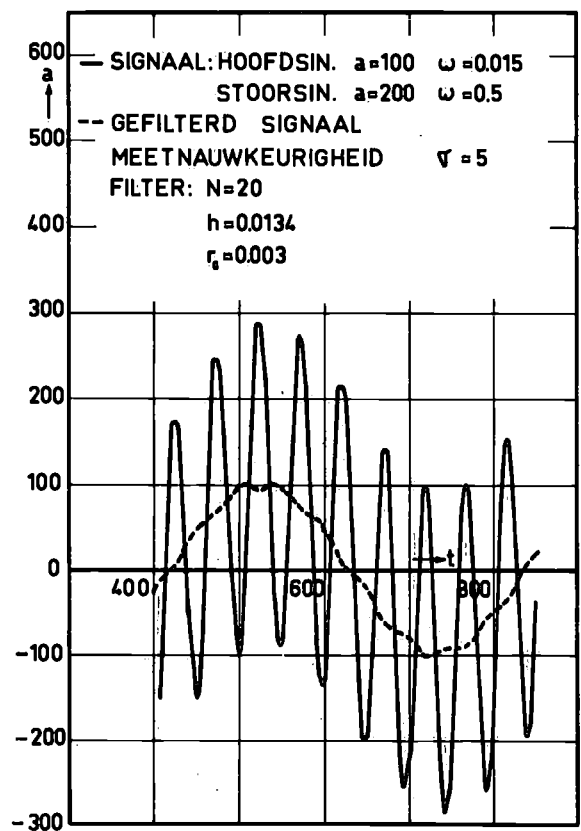
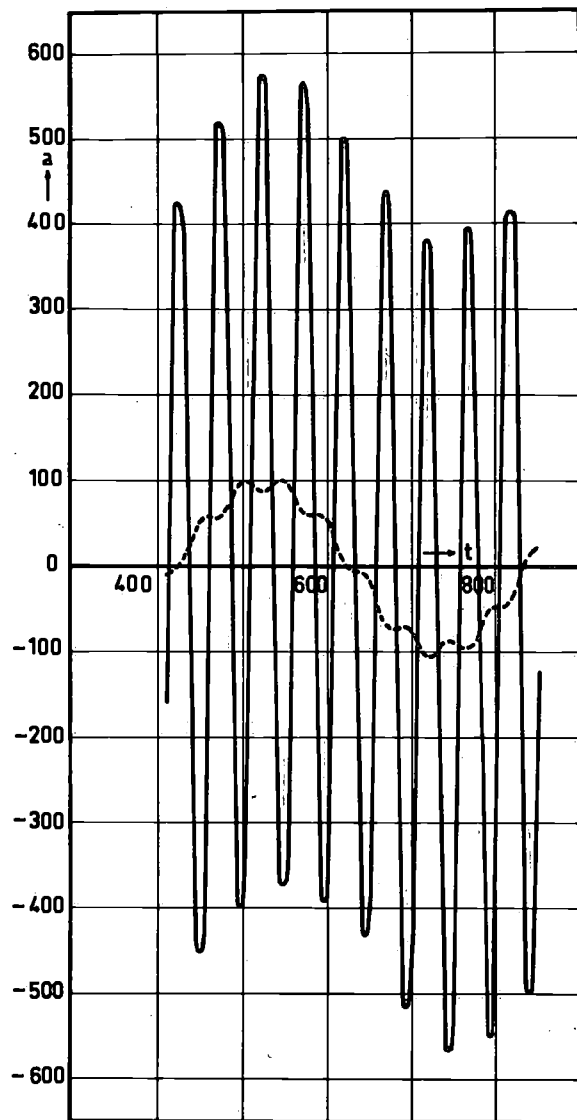


FIG.10 LOWPASS FILTER 100/200



— SIGNAAL: HOOFDSIN. $a=100$ $\omega=0.015$
 STOORSIN. $a=500$ $\omega=0.5$
 - - GEFILTERD SIGNAAL
 MEETNAUWKEURIGHEID $\nabla=5$
 FILTER: $N=20$
 $h=0.0134$
 $r_c=0.003$

FIG. 11 LOWPASS FILTER 100/500

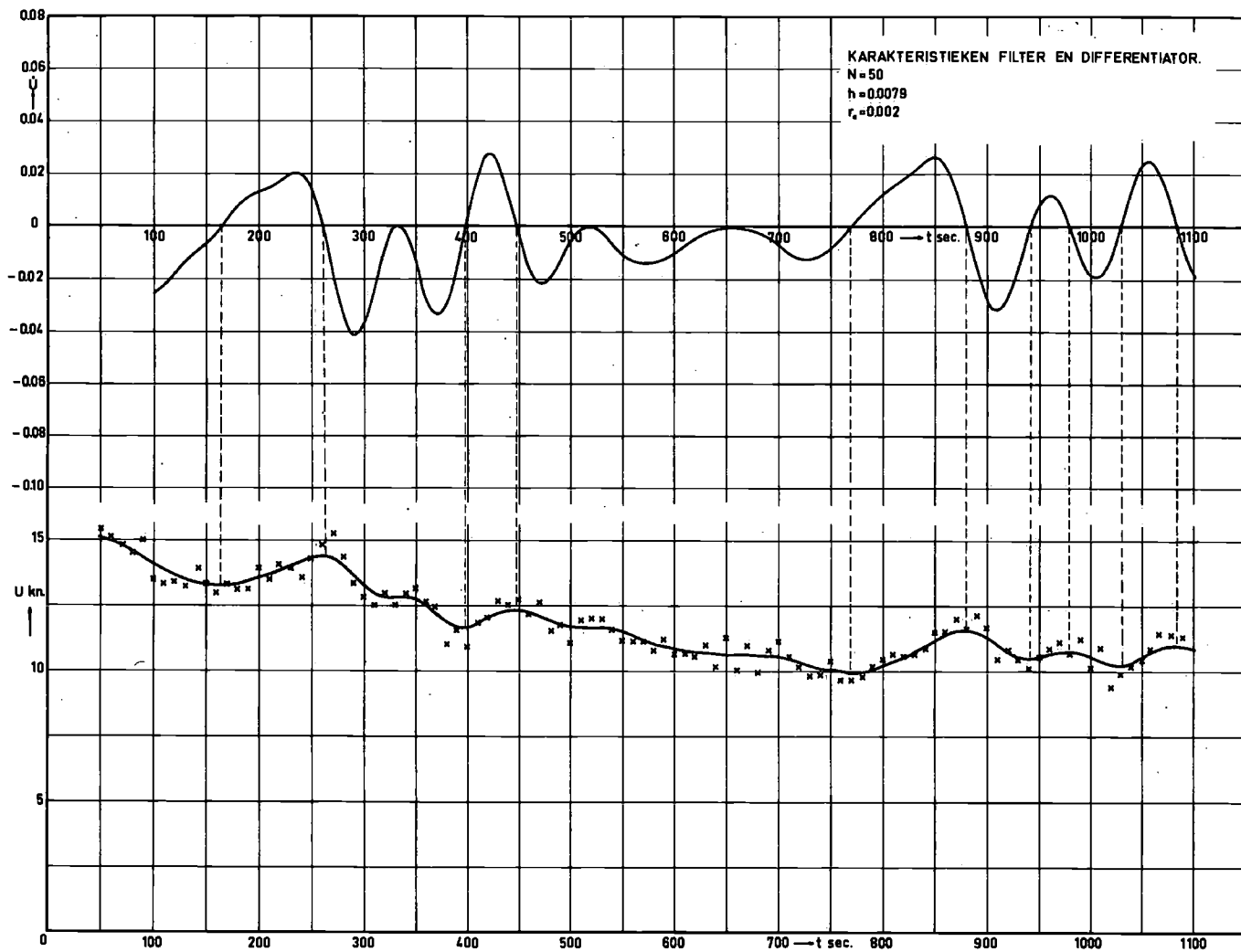
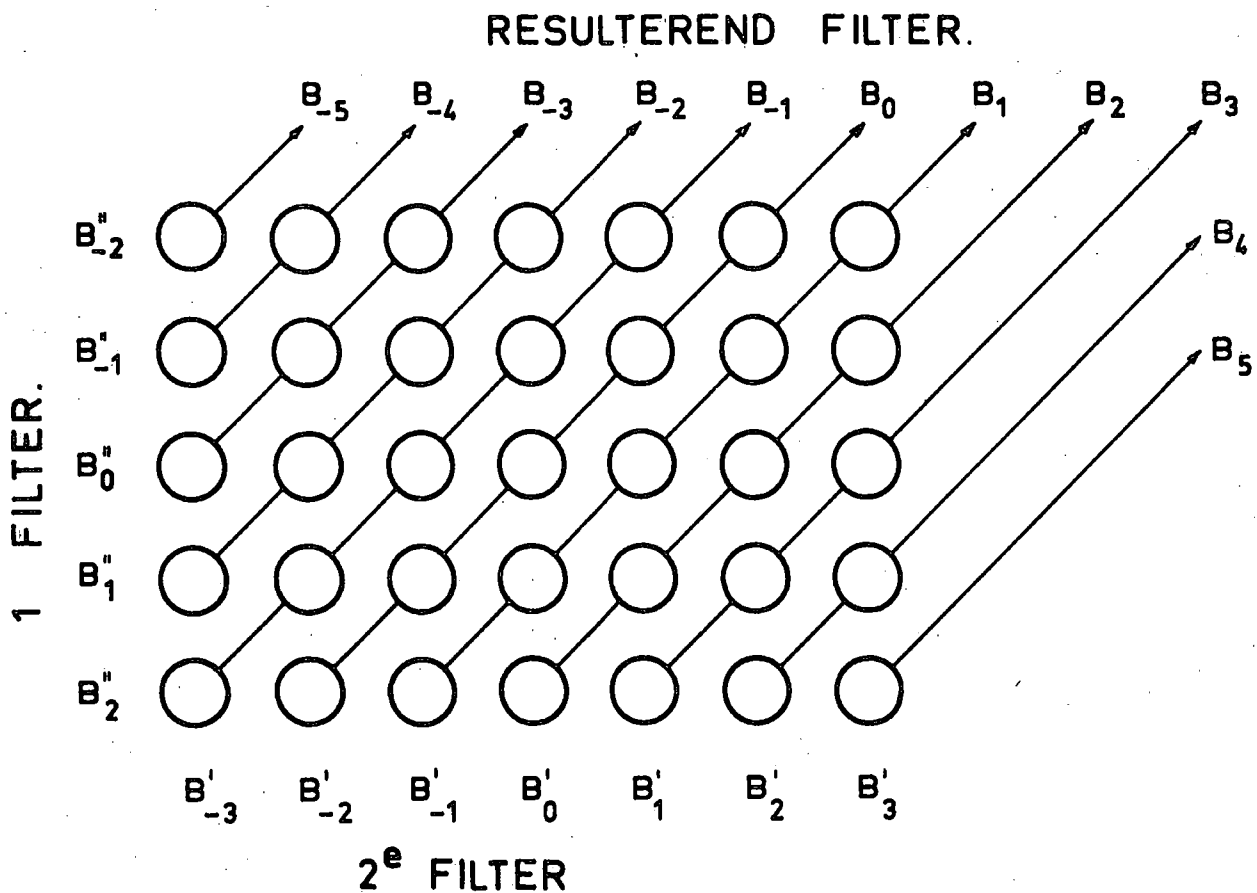


FIG. 12 FILTEREN VAN EEN TIJDSAFHANKELUK SIGNAAL MET RUIS EN BEREKENING VAN DE BUBEHORENDE TIJDSAFGELEIDE.

FIG. 13



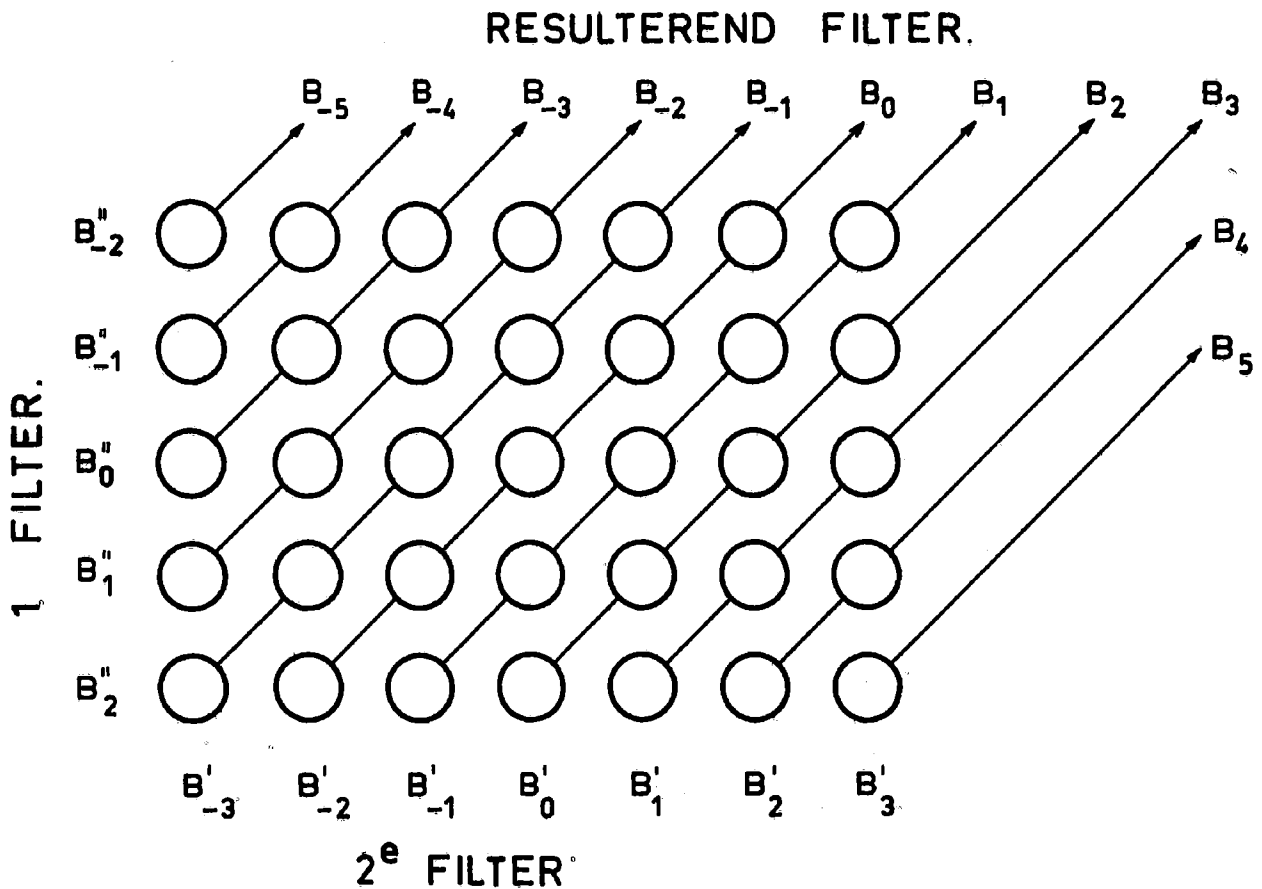
De berekening van de gewichten van het resulterend filter gaat als volgt:

Het produkt van twee gewichten wordt op het snijpunt van twee loodrecht op elkaar staande lijnen in de cirkel geplaatst.

Vervolgens wordt in de richting van de getekende diagonalen de som genomen van de in de cirkel staande gewichten.

Het resultaat van deze opstelling is het nieuwe gewicht.

FIG. 13



De berekening van de gewichten van het resulterend filter gaat als volgt:

Het produkt van twee gewichten wordt op het snijpunt van twee loodrecht op elkaar staande lijnen in de cirkel geplaatst.

Vervolgens wordt in de richting van de getekende diagonalen de som genomen van de in de cirkel staande gewichten.

Het resultaat van deze opstelling is het nieuwe gewicht.