

TOEGEPASTE MECHANICA-I

A. Verruijt



Maatschappij



570720

TOEGEPASTE MECHANICA – I
prof.dr.ir. A. Verruijt
Technische Universiteit Delft

Bibliotheek TU Delft



C 0003814030

Delftse Uitgevers Maatschappij

2414
430
7

CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Verruijt, A.

Toegepaste mechanica / A. Verruijt. – Delft : Delftsche U.M. –
Uitg. van de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

I. – Ill. Met index, lit. opg.

ISBN 90-6562-0031-1

SISO 642.3 UDC 531.8(075.8)

Trefw.: toegepaste mechanica.

© VSSD

Eerste druk 1977

Derde druk 1983, 1985, 1989, 1993

Delftse Uitgevers Maatschappij b.v.

P.O. Box 2851, 2601 CW Delft, The Netherlands

Tel. 015-123725, telefax 015-143724

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90 6562 031 1

VOORWOORD

Dit boek is bedoeld als handleiding bij het eerstejaarscollege Toegepaste Mechanica van de Afdeling der Civiele Techniek van de Technische Hogeschool Delft (codenummer b10).

De schrijver betuigt zijn dank aan de collega's, medewerkers en studenten die door hun opmerkingen hebben bijgedragen aan de totstandkoming van deze handleiding. Veel dank is verschuldigd aan mw. Y.D. van Nierop voor de verzorging van het typewerk.

Alle opmerkingen van kritische lezers over inhoud of presentatie zullen op hoge prijs gesteld worden.

Delft, september 1977

A. Verruijt

Bij de tweede druk

Voor de tweede druk werd een aantal fouten verbeterd en werd hier en daar de tekst verduidelijkt. De tekst werd voorts geheel opnieuw gezet door medewerkers van de V.S.S.D., aan wie ik gaarne daarvoor mijn dank betuig.

Delft, juli 1979

A. V.

INHOUDSOPGAVE

1.	INLEIDING	
1.1.	Mechanica	7
1.2.	Basisbegrippen	7
1.3.	Scalars en vectoren	8
2.	STATICA VAN EEN DEELTJE	
2.1.	De wetten van Newton	13
2.2.	Evenwicht van een deeltje	15
3.	STATICA VAN STARRE LICHAMEN	
3.1.	Krachten en momenten in een plat vlak	17
3.2.	Beweging van een star lichaam	19
3.3.	Het samenstellen van krachten	22
3.4.	Evenwicht van een star lichaam	26
3.5.	Krachten in de ruimte	28
4.	EVENWICHT VAN STATISCH BEPAALDE CONSTRUCTIES	
4.1.	Constructies opgelegd op een scharnieroplegging en een roloplegging	31
4.2.	Opleggingen met scharnierende staven	34
4.3.	Bepaling oplegreacties met poolfiguur en stangenveelhoek	36
4.4.	Ingeklemdde liggers	38
5.	INWENDIGE KRACHTEN EN MOMENTEN IN LIGGERS	
5.1.	De op normaalkracht belaste staaf	41
5.2.	Buigend moment in een ligger	44
5.3.	Dwarskracht in een ligger	46
5.4.	Normaalkrachtenlijn, dwarskrachtenlijn en momentenlijn	48
5.5.	Verband tussen buigend moment, dwarskracht en belasting	54
5.6.	Wiskundige beschrijving van het buigingsprobleem	55
5.7.	Momentenlijn met poolfiguur en stangenveelhoek	64
5.8.	Superpositie	68
5.9.	Experimentele bepaling van de draagkracht van liggers	69
6.	EVENWICHT VAN STATISCH BEPAALDE CONSTRUCTIES, VERVOLG	
6.1.	Scharnierliggers	73
6.2.	Driescharnierspanten	77
6.3.	Geschoorde portalen	81
6.4.	Flexibele kabels	84
7.	STATISCH BEPAALDE VLAKKE VAKWERKEN	
7.1.	Vormvastheid van vlakke vakwerken	90
7.2.	Kinematische bepaaldheid van vlakke vakwerken	92
7.3.	Statische bepaaldheid van vlakke vakwerken	93
7.4.	De snedemethode	95
7.5.	Het Cremona-diagram	102
7.6.	Knooppuntenevenwicht	106
7.7.	Matrixbehandeling	110
8.	VERVORMINGEN VAN VAKWERKEN	
8.1.	Lengteveranderingen van een staaf	115
8.2.	Vervormingen van eenvoudige staafconstructies	117
8.3.	Vervormingen van vakwerken, Williot-diagram	125
8.4.	Matrixbehandeling	131

9.	STATISCH ONBEPAAALDE STAAFCONSTRUCTIES	
9.1.	Krachtenmethode	134
9.2.	Verplaatsingsmethode	139
9.3.	Matrixbehandeling	144
10.	SPANNINGEN EN VERVORMINGEN BIJ BUIGING	
10.1.	Spanningen bij belasting op normaalkracht	147
10.2.	Spanningen bij buiging	151
10.3.	Vervormingen bij buiging	156
10.4.	Symmetrische profielen	161
10.5.	Statisch onbepaalde liggers	172
11.	SCHUIFSPANNINGEN DOOR DWARSKRACHT	
11.1.	Ligger met rechthoekige doorsnede	175
11.2.	Symmetrische doorsneden	179
11.3.	Dunwandige profielen	183
12.	SCHUIFSPANNINGEN DOOR WRINGING	
12.1.	Cirkelvormige doorsneden	189
12.2.	Dunwandige kokers	192
12.3.	Superpositie	194
12.4.	Constructieve toepassingen	196
	LIJST VAN DE BELANGRIJKSTE SYMBOLEN	202
	INDEX	203
	LITERATUUR	204

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

1. INLEIDING

In dit hoofdstuk worden een aantal definities en begripsbepalingen gegeven. Voorts wordt aandacht besteed aan het karakter van een aantal belangrijke grootheden uit de mechanica, en de eenheden waarin deze worden uitgedrukt.

1.1. mechanica

Mechanica is de wetenschap van de beweging van lichamen. Tot de mechanica behoren de beschrijving van de beweging van natuurlijke en kunstmatige hemellichamen, de berekening van de vervormingen van een olieplatform op zee onder invloed van golfaanval, en de beschrijving van de stroming van het water in een zeearm. Er zijn verschillende indelingen in de mechanica te maken. Een daarvan is een indeling naar de aard van het beschouwde lichaam. Dat kan een *star lichaam* (onvervormbaar lichaam) zijn of een *vervormbaar lichaam*, of een *vloeistof* (of een *gas*). Voor de civiel ingenieur zijn vervormbare vaste lichamen en vloeistoffen het belangrijkste, maar omdat sommige beschouwingen voor starre lichamen een algemeen karakter hebben, en omdat de behandeling van starre lichamen in sommige opzichten eenvoudiger is, zal hier toch eerst enige aandacht geschonken worden aan starre lichamen. Later wordt dan overgegaan op de mechanica van vervormbare lichamen, en dan natuurlijk vooral lichamen waar de civiel ingenieur bij betrokken is: bruggen, gebouwen, en andere civieltechnische constructies. De mechanica van vloeistoffen komt hier niet ter sprake, evenmin als de mechanica van gassen.

Een andere indeling van de mechanica is die naar de aard van de beweging. De studie van lichamen die in rust zijn (d.w.z. lichamen die niet bewegen) noemt men dan de *statica*, en de studie van werkelijk bewegende lichamen noemt men de *dynamica*. Een onderdeel daarvan is de *kinematica*, die zich uitsluitend bezig houdt met de beschrijving van de beweging van lichamen, zonder de oorzaak van de beweging te beschouwen.

In de civiele techniek houdt de *toegepaste mechanica* zich bezig met de statica en de dynamica van constructies. In de eerste jaren van de studie voor civiel ingenieur valt de nadruk daarbij op de statica van constructies. De analyse van de krachten in de constructie als geheel noemt men dan soms de *bouwstatica*. En de analyse van de lokale spanningen en vervormingen in een constructie-onderdeel noemt men de *sterkteleer*. In het eerstejaarscollege komen beide onderdelen van de mechanica van constructies aan de orde, voor betrekkelijk eenvoudige constructies.

1.2. basisbegrippen

In deze paragraaf wordt een aantal basisbegrippen gedefinieerd.

Ruimte is het meetkundige gebied waarin wij leven en waarin onze constructies worden opgericht. De ruimte wordt geacht driedimensionaal en euclidisch te zijn. Voor de beschrijving van verschijnselen in de ruimte zal gebruik gemaakt worden van een zogenaamd rechts orthonormaal assenstelsel. Dat is een stelsel van drie onderling loodrechte assen x , y en z , die onderling zodanig georiënteerd zijn dat een normale kurketrekker, met de punt wijzend in de richting van de z -as, in de richting van die as beweegt als een poot van het handvat van de x -as

naar de y-as gedraaid wordt. Twee voorbeelden van dergelijke assenstelsels zijn getekend in fig. 1.1.

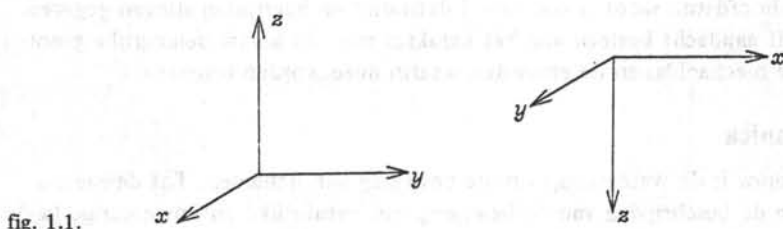


fig. 1.1.

Afstanden in de ruimte worden gemeten in meter.

Tijd is een maat voor de opeenvolging van gebeurtenissen, met als eenheid de *seconde*.

Massa is de kwantitatieve maat voor de eigenschap van een lichaam dat het een zekere weerstand biedt tegen veranderingen van zijn beweging (die eigenschap noemt men *traagheid*). De eenheid van massa is de *kilogram*.

Kracht is de werking van een lichaam op een ander lichaam die leidt tot een verandering van de beweging van dat lichaam. Op het begrip kracht wordt teruggekomen in paragraaf 2.1.

Impuls is het product van massa en snelheid van een lichaam.

Een meetbare grootheid wordt in het algemeen aangegeven door een *getal* en een *eenheid*. Als het getal erg groot of erg klein is, wordt vaak gebruik gemaakt van een voorvoegsel bij de eenheid. De volgende voorvoegsels worden vaak gebruikt.

grootte	voorvoegsel	afkorting
10^{12}	tera-	T
10^9	giga-	G
10^6	mega-	M
10^3	kilo-	k
10^{-3}	milli-	m
10^{-6}	micro-	μ
10^{-9}	nano-	n
10^{-12}	pico-	p

1.3. scalars en vectoren

De waarde van sommige fysische grootheden wordt volledig gekarakteriseerd door één getal met de bijbehorende eenheid. Voorbeelden hiervan zijn de tijd, de temperatuur, het volume van een lichaam, en massa. Men noemt dat *scalaire* grootheden, of kortweg *scalars*. Sommige andere grootheden kan men echter alleen volledig beschrijven als er naast de grootte (aangegeven door een getal en een eenheid) ook aangegeven wordt in welke richting in de ruimte de grootte georiënteerd is. Zo'n grootheid met richting en grootte noemt men een *vector*. Voorbeelden hiervan zijn verplaatsing, snelheid, versnelling en kracht.

In het algemeen zijn van een vector de grootte, de richting en het aangrijpingspunt van belang. Men kan de vector in de ruimte weergeven met een pijl, vanuit het aangrijpingspunt, gericht in de richting van de vector, en met een

lengte overeenkomend (eventueel op een zekere schaal) met de grootte van de vector, zie fig. 1.2.

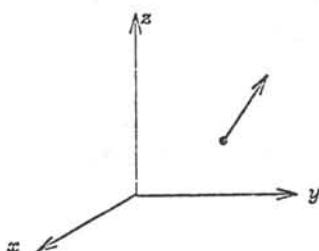


fig. 1.2.

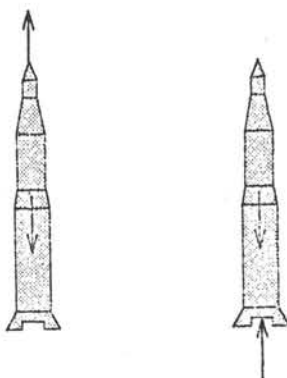


fig. 1.3.

In sommige gevallen is het aangrijpingspunt niet van wezenlijk belang, maar mag het aangrijpingspunt verplaatst worden in de richting van de vector. Een voorbeeld hiervan is een kracht werkend op een star lichaam. Voor een star lichaam maakt het niet uit of het in evenwicht gehouden wordt door een kracht aan zijn bovenkant of aan zijn onderkant (zie fig. 1.3). Men noemt een vector die langs zijn werklijn verschoven mag worden een *glijdende vector*. Men bedenke dat wat voor een star lichaam geldt niet zonder meer gesteld kan worden voor een vervormbaar lichaam. Voor de beweging als geheel van een vervormbaar lichaam (zoals bijvoorbeeld een mens) doet het er niet toe of het aan de bovenzijde is opgehangen of aan de onderzijde wordt ondersteund. Voor verschijnselen in het inwendige van het lichaam maakt het wel uit!

Soms doet zelfs de werklijn van een vector niet ter zake. De snelheid van elk punt van een niet-roterend star lichaam kan volledig beschreven worden met een enkele vector. Men spreekt dan van een *vrije vector*.

Twee vectoren met hetzelfde aangrijpingspunt kan men samenstellen tot een enkele vector met behulp van de zogenaamde parallellogram-regel, zie fig. 1.4.

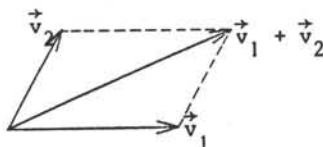


fig. 1.4.

Men kan zich deze regel het eenvoudigst voorstellen door bijvoorbeeld de beweging van een man lopend op een varend schip te beschouwen (fig. 1.5). De beweging van de man ten opzichte van de aarde bestaat uit de som van de bewe-



fig. 1.5.

ging van het schip ten opzichte van de aarde en zijn eigen beweging ten opzichte van het schip. Op dezelfde wijze kan men snelheidsvectoren samenstellen,

en krachten. Op de samenstelling van krachten wordt later nog uitvoerig teruggekomen.

Vectoren geeft men, ter onderscheiding met scalars, vaak weer door ze vet te drukken of door er een pijltje boven te schrijven of te typen. De samenstelling van twee vectoren, zoals weergegeven in fig. 1.4, kan men schrijven als

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Omgekeerd kan men bijvoorbeeld zeggen dat $\vec{v}_2$ het verschil is van $\vec{v}$ en $\vec{v}_1$,

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1.$$

Men beschrijft een vector vaak door zijn zogenaamde *componenten*. Men voert dan langs de coördinaatassen x , y en z , eenheidsvectoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ en $\vec{e}_z$ in (dat zijn vectoren gericht langs de assen en met een lengte gelijk aan 1). De vector wordt nu geschreven als de vector-som van zijn drie componenten, zie fig. 1.6.

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z.$$

De grootheden v_x , v_y en v_z noemt men in de wiskunde de *kentallen* van de vector, de grootheden $v_x \vec{e}_x$, $v_y \vec{e}_y$ en $v_z \vec{e}_z$ zijn de *componenten* van de vector. In de mechanica gebruikt men het woord component ook vaak als eigenlijk een kental bedoeld wordt. In het vervolg van dit boek zal dat gebruik gevolgd worden.

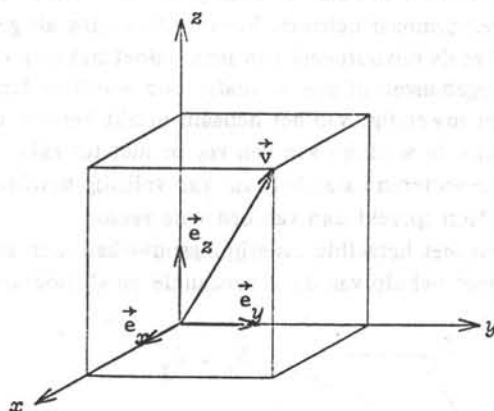


fig. 1.6.

Het samenstellen van twee vectoren die gegeven zijn door hun componenten kan analytisch geschieden door de overeenkomstige componenten bij elkaar op te tellen. De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met componenten a_x, a_y, a_z , respectievelijk b_x, b_y, b_z , is

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{e}_x + (a_y + b_y) \vec{e}_y + (a_z + b_z) \vec{e}_z.$$

Dit wordt, voor het geval dat $a_z = b_z = 0$, geïllustreerd in fig. 1.7.

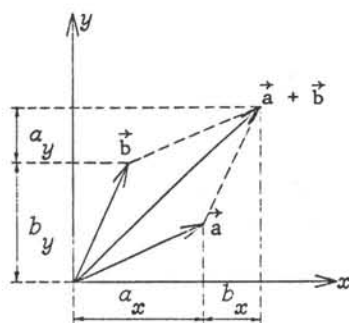


fig. 1.7.

Noemt men de hoek die een vector $\vec{v}$ met elk der assen maakt $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, dan geldt, zie figuur 1.8, waarin de hoek bij A in driehoek OPA recht is, evenals de hoeken bij B en C in de driehoeken OPB, respectievelijk OPC,

$$v_x = v \cos \alpha_x$$

$$v_y = v \cos \alpha_y$$

$$v_z = v \cos \alpha_z$$

waarin v de grootte (of *norm*) van de vector is,

$$v = |\vec{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

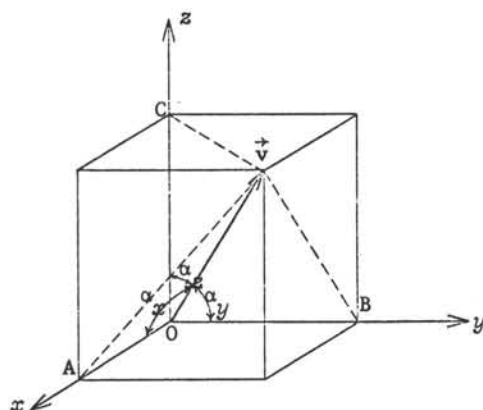


fig. 1.8.

De grootheden $\cos \alpha_x$, $\cos \alpha_y$ en $\cos \alpha_z$ geeft men ook wel aan als l_x, l_y en l_z . Men noemt dit de *richtingscosinussen*.

Men bedenke dat voor het vastleggen van een vector drie getallen nodig zijn (en een eenheid). De drie getallen kunnen zijn de waarden van de drie componenten v_x, v_y, v_z , of bijvoorbeeld de grootte v , en twee richtingscosinussen. De derde richtingscosinus volgt in het laatste geval uit de andere twee omdat $\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1$.

Om een vector aan te geven schrijft men vaak de kentallen (of componenten) onder elkaar en voegt ze tezamen met een haakje. Men schrijft dan

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Omdat de eenheidsvectoren e_x , e_y en e_z elk een component gelijk aan 1 hebben en twee componenten gelijk aan 0, kan de ontbinding van een vector in zijn componenten ook als volgt geschreven worden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. STATICA VAN EEN DEELTJE

In dit hoofdstuk wordt de statica van een deeltje behandeld. Daartoe wordt de toestand van rust beschouwd als een bijzonder geval van beweging. De evenwichtsvergelijkingen voor een deeltje dat in rust is worden afgeleid uit de bewegingsvergelijkingen.

2.1. de wetten van Newton

De basiswetten voor de beweging van een deeltje (dat is een lichaam met verwaarloosbaar kleine afmetingen, maar met een zekere massa) zijn het eerst geformuleerd door Sir Isaac Newton (1687). De drie wetten van Newton luiden als volgt.

1. *Indien er geen kracht op een deeltje werkt beweegt het in een rechte lijn met constante snelheid.*
2. *De verandering van de impuls van een deeltje is evenredig met de kracht die er op werkt, en heeft de richting van die kracht.*
3. *Indien een lichaam L_1 een kracht uitoefent op een lichaam L_2 , dan oefent lichaam L_2 op het lichaam L_1 een gelijke doch tegengesteld gerichte kracht uit.*

De eerste wet stelt, dat een deeltje dat in rust is in rust blijft als er geen kracht op werkt, en dat een deeltje dat op een zeker moment in beweging is, met een zekere snelheid, die beweging met dezelfde snelheid voortzet als er geen kracht op werkt.

De tweede wet kan men in formule weergeven door

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).$$

Hierin is $\vec{F}$ de kracht op het deeltje, m zijn massa, en $\vec{v}$ zijn snelheid. Aannemende dat de massa van het deeltje niet verandert, kan men ook schrijven

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

waarin $\vec{a}$ de versnelling van het deeltje is, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

Om de juistheid van de tweede wet van Newton na te gaan is het nodig zorgvuldige experimenten uit te voeren waarbij verschillende lichamen in beweging gebracht worden door verschillende krachten. Het principe van dergelijke experimenten is weergegeven in fig. 2.1. Daarbij wordt de kracht ontleend aan veren die men een bepaalde indrukking geeft. Als twee deeltjes dezelfde beweging ondergaan onder invloed van dezelfde kracht zegt men dat ze dezelfde massa hebben. Voegt men deze twee deeltjes samen, dan ligt het voor de hand te stellen dat de massa van het nieuwe deeltje twee maal de massa van de oorspronkelijke deeltjes is. Oefent men op het deeltje met de twee maal zo grote massa weer dezelfde kracht uit, dan blijkt dat deeltje een half zo grote versnelling te krijgen als de oorspronkelijke deeltjes. Door de kracht te verdubbelen (door twee veren parallel te plaatsen, zie de onderste figuren in fig. 2.1) krijgt het deeltje met de twee maal zo grote massa dezelfde versnelling als de oorspronkelijke deeltjes met de enkele kracht.

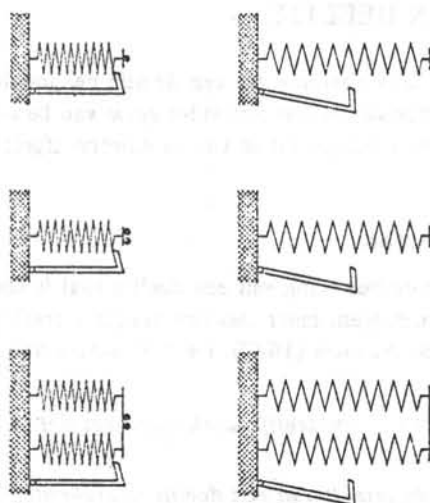


fig. 2.1.

Door experimenten zoals hierboven in principe beschreven, is de juistheid van de tweede wet van Newton bevestigd. Opgemerkt moge nog worden dat de eerste wet eigenlijk een bijzonder geval van de tweede is. Als de kracht op een deeltje nul is, is zijn versnelling ook nul.

Door in de wiskundige formulering van de tweede wet geen evenredigheidsconstante op te nemen (de formulering in woorden zegt immers alleen maar dat de kracht evenredig is met de verandering van impuls) is de eenheid van kracht vastgelegd als de kracht die een massa van 1 kilogram een versnelling geeft van 1 meter per seconde. Deze eenheid van kracht noemt men de newton (afgekort N),

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2.$$

De derde wet is de zogenaamde wet van actie en reactie. Geeft men de kracht die lichaam L_1 uitoefent op lichaam L_2 aan met $\vec{F}_{21}$ en de kracht die lichaam L_2 uitoefent op lichaam L_1 met $\vec{F}_{12}$, dan stelt de derde wet dat

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Krachten treden volgens de wet van actie en reactie altijd op in paren van gelijke doch tegengesteld gerichte krachten.

Newton heeft ook de wet geformuleerd die de aantrekking tussen twee lichamen beschrijft. Deze *gravitatiewet* stelt dat de kracht tussen twee deeltjes met massa's m_1 en m_2 op een afstand r een aantrekking is die werkt langs de verbindingslijn van de twee deeltjes met de grootte

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Hierin is G een universele constante, die dezelfde waarde heeft voor alle paren van deeltjes. De waarde van G , de gravitatieconstante, is experimenteel vastgesteld als $G = 6.671 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Ook de juistheid van de gravitatiewet is

langs experimentele weg gecontroleerd.

In het algemeen worden op aarde alle aantrekkende krachten tussen lichamen overheerst door de aantrekkende kracht van de aarde op die lichamen, omdat de massa van de aarde zo groot is (5.98×10^{24} kg). Uit Newtons tweede wet en de gravitatiewet volgt dat bij een vrije val aan het oppervlak van de aarde elke massa dezelfde versnelling ondervindt (aangeduid als g , de *versnelling van de zwaartekracht*). Men vindt, aannemende dat men de massa van de aarde in het centrum geconcentreerd mag denken,

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

waarin M de massa van de aarde is, en R de afstand tot het middelpunt. De precieze waarde van g hangt af van de plaats op aarde door de afplatting van de aarde bij de polen. Ter plaatse van de evenaar is g ongeveer 9.790 m/s^2 , ter plaatse van de polen ongeveer 9.832 m/s^2 , en in Nederland 9.813 m/s^2 . Dat elk lichaam bij vrije val (dat wil zeggen bij afwezigheid van wrijving) dezelfde versnelling ondervindt was overigens reeds voor Newton bekend (Galilei, Benedetti).

2.2. evenwicht van een deeltje

Indien op een deeltje meerdere krachten werken, dan kan men deze krachten samenstellen op de wijze beschreven in paragraaf 1.3. De krachten hebben alle hetzelfde aangrijpingspunt (de plaats van het deeltje), en ook de *resulterende kracht*, dat is de som van alle krachtvectoren, grijpt aan in dat punt. De samenstelling kan eenvoudig grafisch geschieden als alle krachten in hetzelfde vlak liggen (zie fig. 2.2). Men kan eenvoudig nagaan dat de volgorde waarin men de

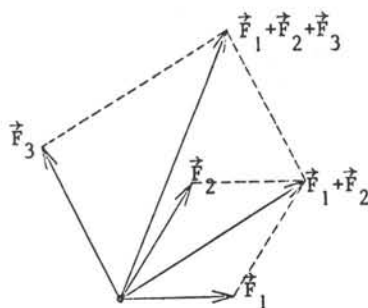


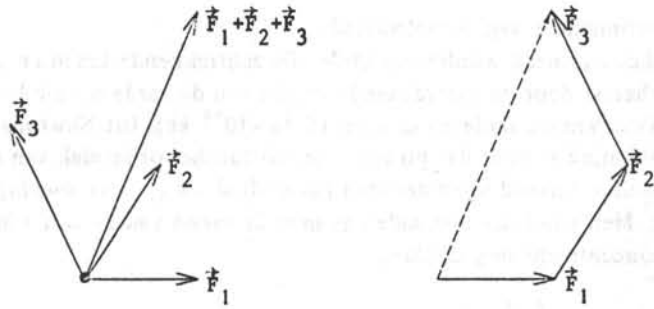
fig. 2.2.

krachten bij elkaar optelt niet van belang is voor het eindresultaat (vectoroptelling is associatief en commutatief).

Voor de grafische samenstelling van een aantal krachten met hetzelfde aangrijpingspunt is het niet nodig alle parallelogrammen volledig té tekenen. Men kan volstaan met een hulpfiguur waarin alle vectoren achter elkaar getekend worden, zie fig. 2.3. Men noemt een dergelijke hulpfiguur een *krachtenveelhoek*. De verbindingslijn van begin- en eindpunt van het stelsel van achter elkaar uitgezette krachten geeft de resultante van alle krachten. Nadere inspectie van fig. 2.2 toont overigens aan dat de krachtenveelhoek daarin eigenlijk ook al voorkomt.

Men kan krachten ook samenstellen door de overeenkomstige componenten in elk der coördinaatrichtingen bij elkaar op te tellen. Vooral als niet alle krachten in een vlak liggen is dat vaak eenvoudiger.

fig. 2.3.



Indien de resultante van alle krachten werkend op een deeltje juist nul is, blijft dit volgens de eerste wet van Newton in rust, als het aanvankelijk in rust was. Men zegt dat het deeltje in *evenwicht* is. Blijkbaar is het voor het evenwicht van het deeltje nodig dat de drie componenten van de resultante nul zijn. Men schrijft de drie evenwichtsvergelijkingen van een deeltje vaak als volgt

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0.$$

Het sommatiesymbool betekent hierbij dat gesommeerd moet worden over alle krachten die op het deeltje werken.

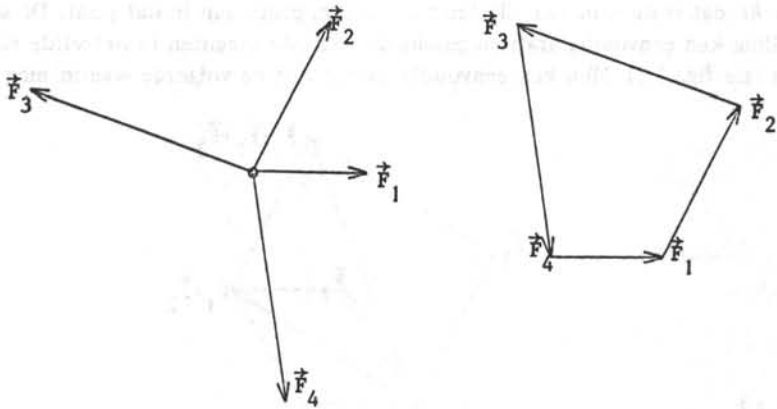


fig. 2.4.

In een krachtenveelhoek leidt de evenwichtsvoorwaarde tot de eis dat de krachtenveelhoek *gesloten* is: dan is de resulterende kracht immers nul, zie fig. 2.4.

3. STATICA VAN STARRE LICHAMEN

Tot nu toe zijn alleen gevallen beschouwd waarbij het, door de beperking tot een deeltje met verwaarloosbaar kleine afmetingen, vanzelfsprekend is dat de krachten alle hetzelfde aangrijpingspunt hebben. In dit hoofdstuk zal blijken dat voor het evenwicht van een star lichaam met zekere afmetingen de aangrijpingspunten van de verschillende krachten (of eigenlijk de werklijnen) van wezenlijk belang zijn. Om de beschouwingen zo eenvoudig mogelijk te houden zijn ze aanvankelijk beperkt tot gevallen waarbij alle krachten in een plat vlak liggen.

3.1. krachten en momenten in een plat vlak

Zoals reeds opgemerkt in paragraaf 1.3, heeft een verschuiving van een kracht werkend op een star lichaam langs zijn werklijn geen invloed op het mechanisch gedrag van het lichaam als geheel. Voor een star lichaam maakt het in eerste instantie niet uit of men het ondersteunt aan de onderkant of ophangt aan de bovenkant. Aangetekend moge worden dat hier is afgezien van tweede-orde-effecten zoals instabiliteit. De constructie van fig. 3.1 kan men in de praktijk namelijk beter oppakken aan de bovenkant dan aan de onderkant als men hem wil transporteren.

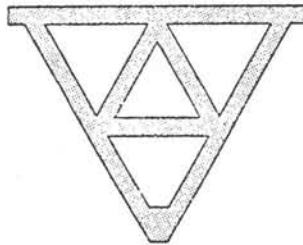


fig. 3.1.

Voor het gedrag van een lichaam onder invloed van een kracht is de plaats van de werklijn ten opzichte van het lichaam wel van essentieel belang. Het maakt voor de beweging van een biljartbal erg veel uit of men hem links of rechts aanstoot. En als men de constructie van fig. 3.1 wil ophijzen maakt het veel verschil of men hem in een van de bovenhoeken of in het midden pakt. Alleen in het laatste geval zou men, op grond van de symmetrie, kunnen verwachten dat de constructie niet gaat draaien.

Het blijkt dat de beweging van een star lichaam afwijkt van die van een deeltje in die zin dat thans ook de rotatie van het lichaam in beschouwing moet worden genomen. Een lichaam kan men doen roteren door er bijvoorbeeld twee gelijke, doch tegengesteld gerichte krachten, met verschillende werklijn, op te laten werken, zie fig. 3.2. Twee van dergelijke krachten vormen tezamen een

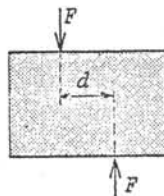


fig. 3.2.

koppel. Het product Fd van de grootte F van de krachten en de afstand d van de werklijnen (gemeten loodrecht op deze werklijnen) noemt men het *draaimoment* van het koppel, of ook wel kortweg het *moment* van het koppel. Deze grootheid zal aangegeven worden met T_z ,

$$T_z = Fd.$$

Het symbool T is ontleend aan de engelse benaming *torque*, de betekenis van het subscript z zal later duidelijk worden. Voorlopig is het alleen een aanduiding voor de normaal op het vlak van tekening.

De grootte van het moment bepaalt de rotatie-beweging van het lichaam. Dat dat zo is kan men eenvoudig inzien door te bedenken dat een koppel van twee krachten ter grootte F met een arm d en een koppel van twee krachten ter grootte $\frac{1}{2}F$ met een arm $2d$ beide in evenwicht gehouden kunnen worden met hetzelfde, in tegengestelde richting werkende koppel Fd , zie fig. 3.3.

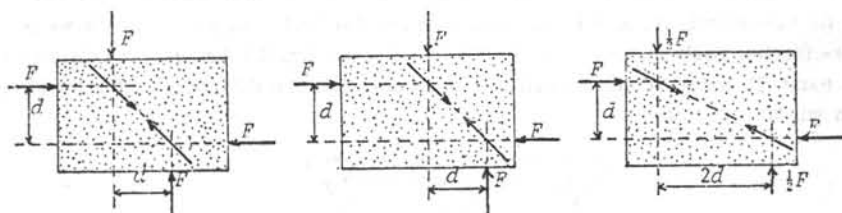


fig. 3.3.

In alle drie de getekende gevallen kan men de krachten paarsgewijs samenstellen tot twee even grote, tegengesteld gerichte krachten met dezelfde werklijn. Het lichaam blijft in alle drie de gevallen in rust. Blijkbaar zijn koppels met hetzelfde moment equivalent, mits de ermee overeenkomende draaiingsrichting dezelfde is.

In het algemeen is de grootte van het *draaimoment* van een kracht ten opzichte van een punt A het product van de grootte van die kracht en de afstand van punt A tot de werklijn van die kracht. De tekenafpraak hangt samen met de keuze van het coördinatenstelsel. In het geval van fig. 3.4 wordt het draaimoment van de kracht in punt B (die de grootte F_1 heeft en gericht is volgens

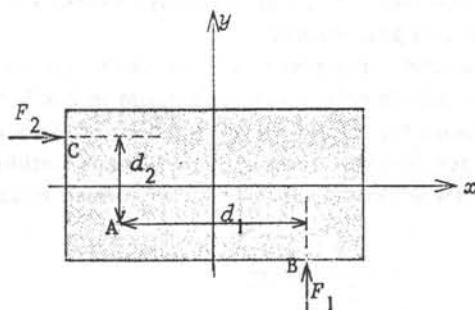


fig. 3.4.

de aangegeven pijl) positief gerekend omdat de ermee overeenkomende rotatie van een rechtse schroef (of kurketrekker) leidt tot een beweging van de schroef

(of de kurketrekker) in de positieve z -richting: loodrecht op het vlak van tekening, naar de lezer toe. Het draaimoment van de kracht in C (met grootte F_2 en gericht volgens de getekende pijl) is negatief omdat de ermee overeenkomende rotatie van een rechtse schroef die schroef in negatieve z -richting doet bewegen.

Reeds thans kan gesteld worden dat het voor het evenwicht van een star lichaam niet voldoende is dat de som van de componenten van de krachten in elk der drie coördinaatrichtingen nul moet zijn. Om rotatie van het lichaam te verhinderen moet er ook geëist worden dat de krachten geen resulterend draaimoment hebben. Alvorens deze evenwichtsvoorwaarden nader te formuleren wordt eerst nog ingegaan op de beweging van een star lichaam onder invloed van krachten en momenten.

3.2. beweging van een star lichaam

In deze paragraaf wordt de beweging van een aantal bijzondere starre lichamen beschouwd, waarna de beschouwingen gegeneraliseerd worden.

Het eerste te beschouwen lichaam bestaat uit twee deeltjes, verbonden door een stijve doch massaloze verbindingsstaaf, zie fig. 3.5. Er zullen twee gevallen beschouwd worden: in het eerste geval werken op de deeltjes gelijke en

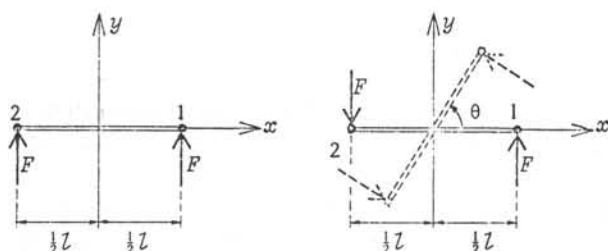


fig. 3.5.

gelijkgerichte krachten, loodrecht op de verbindingsstaaf; in het tweede geval zijn de krachten ook gelijk en ook loodrecht op de verbindingsstaaf, maar ze zijn tegengesteld gericht.

Het eerste geval is erg eenvoudig. Als de massa van de deeltjes elk m is, dan krijgen ze in het getekende geval (zie fig. 3.5, linkerhelft) beide een versnelling F/m in de positieve y -richting. Het lichaam zal in zijn geheel in de y -richting bewegen met een gelijkmatige versnelling F/m . Het roteert niet.

In het tweede geval willen de deeltjes in tegengesteld gerichte richting gaan bewegen. Dat levert een rotatie op om het midden van de staaf. De staaf verhindert dat de afstand tussen de deeltjes groter wordt, zodat, als de krachten steeds loodrecht op de verbindingsstaaf gericht blijven, na enige tijd de situatie gestippeld in fig. 3.5 ontstaat. De beweging kan worden beschreven met behulp van de hoek θ , die de oriëntatie van de staaf ten opzichte van de x -as aangeeft. Deze hoek θ is een functie van de tijd. Er geldt algemeen voor de y -coördinaat van het eerste deeltje:

$$y_1 = \frac{1}{2}l \sin \theta,$$

waarin l de lengte van de verbindingsstaaf is. Er volgt nu

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2} l \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{1}{2} l \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} l \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

In de uitgangstoestand (zie de rechterhelft van fig. 3.5) is $\theta = 0$. Dan geldt

$$\theta = 0: \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{1}{2} l \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

Op grond van de tweede wet van Newton geldt op dat moment

$$F = \frac{1}{2} m l \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

Zoals in de vorige paragraaf reeds gezien wordt de rotatie van een star lichaam onder invloed van een koppel (en dat geval wordt hier eigenlijk beschouwd) bepaald door het draaimoment van dat koppel. In dit geval is het moment

$$T_z = Fl$$

en dus

$$T_z = \frac{1}{2} m l^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

Deze vergelijking geeft het verband tussen de rotatieversnelling $d^2\theta/dt^2$ en het draaimoment T_z . De grootte $\frac{1}{2} m l^2$ noemt men het *traagheidsmoment* van het lichaam.

Het hierboven afgeleide verband voor de rotatie van het systeem van twee gelijke deeltjes met een stijve, massaloze verbindingsstaaf vertoont veel overeenkomst met de tweede wet van Newton, die betrekking heeft op de beweging van een enkel deeltje.

Vervolgens wordt de beweging beschouwd van een star lichaam bestaande uit twee deeltjes waarvan het ene een massa m heeft, en het andere een massa $2m$, zie fig. 3.6. In het eerste geval werkt op het eerste deeltje een kracht ter grootte F , loodrecht op de staaf, en op het tweede deeltje een gelijkgerichte

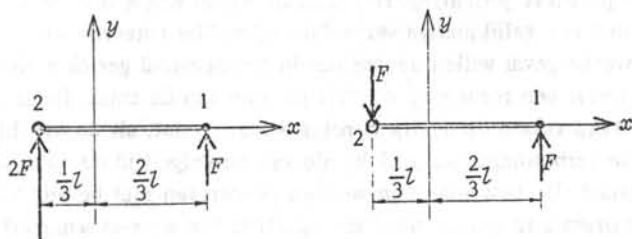


fig. 3.6.

kracht ter grootte $2F$. De beide deeltjes gaan nu elk bewegen met een versnelling F/m in de y -richting, en dat betekent dat het lichaam zonder te roteren in de y -richting gaat bewegen, met een versnelling F/m .

In het tweede geval, waarin er een koppel met een moment Fl op het systeem werkt, gaat het eerste deeltje in positieve y -richting bewegen met een ver-

snelling F/m , en het tweede deeltje gaat in negatieve y -richting bewegen met een versnelling $F/2m$. Dit betekent dat het lichaam gaat roteren om het punt van de staaf dat deze in stukken $\frac{1}{3}l$ en $\frac{2}{3}l$ verdeelt. Als men de roterende beweging van de staaf in dit geval nagaat, dan blijkt er het volgende verband te gelden tussen de grootte van het draaimoment $T_z = Fl$ en de rotatieversnelling

$$T_z = \frac{2}{3} ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Het traagheidsmoment van dit lichaam is blijkbaar $\frac{2}{3} ml^2$.

De hierboven gegeven beschouwingen kan men samenvatten en tegelijk generaliseren door het begrip *zwaartepunt* (of *massacentrum*) in te voeren. Het zwaartepunt van de hierboven beschouwde lichamen is het punt waarom ze draaien als er een koppel op werkt. Meer in het algemeen zegt men dat het zwaartepunt van een stelsel van n deeltjes met massa's m_i het punt is met coördinaten x_0, y_0, z_0 , waarvoor geldt

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$z_0 = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Hierin zijn x_i, y_i en z_i de coördinaten van het deeltje met massa m_i , en dient de sommatie te geschieden over alle n deeltjes.

Men kan eenvoudig nagaan dat de hierboven gegeven definitie van het zwaartepunt voor de lichamen getekend in de figuren 3.5 en 3.6 inderdaad leidt tot de uitspraak dat het zwaartepunt in de oorsprong ligt ($x_0 = 0, y_0 = 0$, de z -coördinaat speelt in dit geval geen rol). Men kan nu stellen dat in de belastingsgevallen getekend in de linkerhelften van de figuren 3.5 en 3.6 geen rotatie optreedt doordat in beide gevallen het totale moment van de krachten ten opzichte van het zwaartepunt nul is.

De beweging van een star lichaam onder invloed van een stelsel van krachten in een plat vlak kan men als volgt samenvatten. Men denkt zich de totale massa van het lichaam geconcentreerd in het zwaartepunt, en kent aan het lichaam een zeker traagheidsmoment I toe, volgens

$$I = \sum m_i r_i^2,$$

waarin r_i de afstand van het deeltje met massa m_i tot het zwaartepunt is. Het stelsel van krachten vervangt men vervolgens door een kracht werkend in het zwaartepunt, en een draaimoment. De grootte van deze kracht kan men bepalen door de overeenkomstige componenten in elk der coördinaatrichtingen van alle krachten bij elkaar op te tellen. De grootte van het draaimoment is de som van de momenten van de krachten ten opzichte van het zwaartepunt. Deze procedure leidt voor de gevallen van fig. 3.5 tot de schematiseringen weergegeven in fig. 3.7. Het draaimoment $T = Fl$ is hierin weergegeven door een ronde pijl. Voor de gevallen van fig. 3.6 zijn de schematiseringen weergegeven in fig. 3.8.

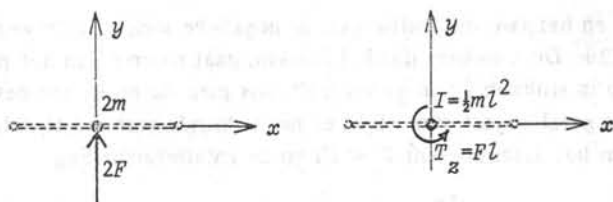


fig. 3.7.

Voor beschouwingen over de beweging, en over het evenwicht van starre lichamen is het van veel belang de resulterende kracht en het resulterend draaimoment van een stelsel krachten te kunnen bepalen. Hierop wordt teruggekomen in de volgende paragraaf.

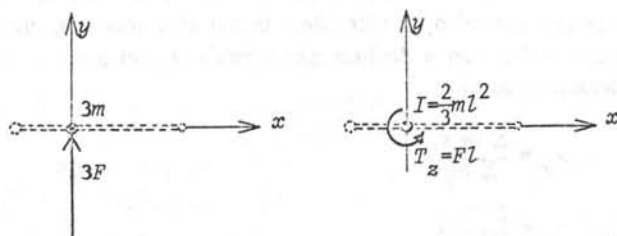


fig. 3.8.

3.3. het samenstellen van krachten

In de paragrafen 1.3 en 2.2 is het samenstellen van krachten met hetzelfde aangrijpingspunt behandeld. Dat is van belang voor de beweging en het evenwicht van een deeltje. In de vorige paragraaf is gebleken dat het voor de beweging en het evenwicht van een star lichaam nodig is krachten met verschillende aangrijpingspunten samen te stellen, tot een resulterende kracht en/of een draaimoment. Die samenstelling van krachten wordt in deze paragraaf behandeld, in eerste instantie alleen voor het geval dat alle krachten in hetzelfde platte vlak liggen.

Het samenstellen van krachten tot een resulterende kracht en eventueel een draaimoment is analytisch vrij eenvoudig. Als er bijvoorbeeld een stelsel van drie krachten met hun werklijnen bekend is, zie fig. 3.9, dan kan men elk van

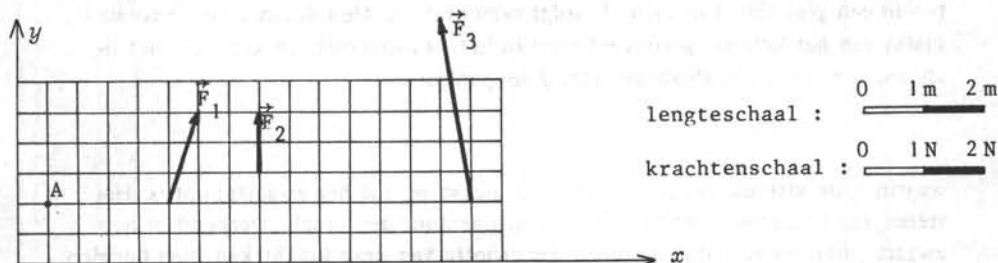


fig. 3.9.

deze krachten ontbinden in componenten, en van elk van de krachten het moment ten opzichte van een (willekeurig) punt A bepalen. Het stelsel van krachten is dan equivalent met een kracht $\vec{F}_r$ door het punt A en een draaimoment T_z , zodanig dat de componenten van $\vec{F}_r$ gelijk zijn aan de som van de overeen-

komstige componenten van elk der krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$, en zodanig dat T_z gelijk is aan de som van de momenten van elk der krachten ten opzichte van punt A. Voor de krachten en momenten in het geval getekend in fig. 3.9 geldt, rekening houdend met de lengteschaal en de krachteschaal.

	x-component	y-component	moment t.o.v. A
$\vec{F}_1$:	+0.5 N	+1.5 N	+3.0 Nm
$\vec{F}_2$:	0.0 N	+1.0 N	+3.5 Nm
$\vec{F}_3$:	-0.5 N	+3.0 N	+21.0 Nm

Hieruit volgt dat de componenten van de resultante en het moment daarvan t.o.v. A de volgende waarden hebben:

$\vec{F}_t$	0.0 N	+5.5 N	+27.5 Nm.
-------------	-------	--------	-----------

De kracht $\vec{F}_t$ is getekend in fig. 3.10, en het draaimoment T_z is daarin ook aangegeven. Dit stelsel van een kracht en een draaimoment kan men ook vervangen door een kracht $\vec{R}$ gelijk aan $\vec{F}_t$ en evenwijdig daaraan, op een zodanige afstand dat het moment t.o.v. A juist 27.5 Nm is. Omdat $\vec{F}_t$ in dit geval toevallig precies in de y-richting werkt is het eenvoudig de afstand van de werklijn van $\vec{R}$ tot A te bepalen: die afstand is $27.5 \text{ Nm} / 5.5 \text{ N} = 5 \text{ m}$. In fig. 3.11 is de kracht $\vec{R}$ in zijn positie t.o.v. punt A getekend. In deze figuur zijn de oorspronkelijke krachten gestippeld aangegeven.

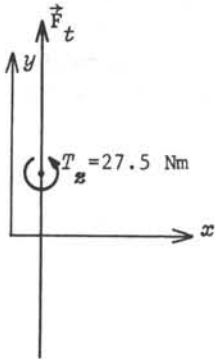


fig. 3.10.

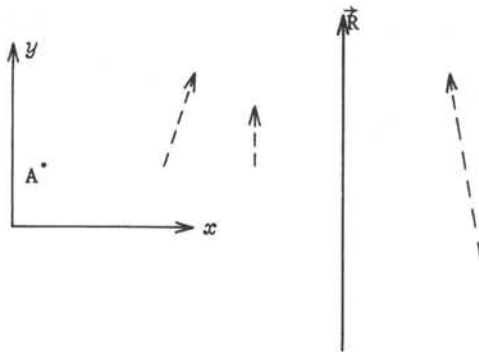


fig. 3.11.

Het oorspronkelijke stelsel van krachten is voor wat betreft de beweging van een star lichaam, equivalent met de kracht en het draaimoment van fig. 3.10 of met alleen de kracht van fig. 3.11. Het bijzondere van deze laatste wijze van voorstellen van het gezamenlijk effect van de drie krachten is dat er geen draaimoment meer bij nodig is. Dat wordt veroorzaakt doordat de som van de momenten van de drie krachten ten opzichte van een willekeurig punt van de werklijn van $\vec{R}$ precies nul is.

Het bepalen van de resultante van een stelsel krachten kan ook grafisch geschieden. Zoals reeds gesteld in vorige paragrafen mag men voor beschouwingen over de beweging en het evenwicht van een star lichaam als geheel de erop werkende krachten verschuiven langs hun werklijn. Dit betekent dat de grafische bepaling van de resultante van een tweetal krachten kan geschieden door ze beide te verschuiven naar het snijpunt van hun werklijnen, zie fig. 3.12. Men vindt daar-

bij de grootte van de resultante en zijn werklijn. Het heeft geen zin om over een aangrijpingspunt van deze resultante te spreken, alleen zijn werklijn ligt vast.

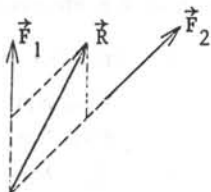


fig. 3.12.

De grootte en richting kan men ook in een krachtenveelhoek bepalen, zie fig. 3.13. De werklijn bepaalt men dan door te bedenken dat deze door het snijpunt van de werklijnen van de twee oorspronkelijke krachten moet gaan.

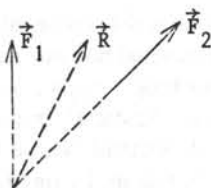


fig. 3.13.

Als meerdere krachten met elkaar moeten worden samengesteld, kan men dat in fasen doen door eerst de resultante van twee krachten te bepalen, daarna deze samen te stellen met de derde kracht, enzovoorts. Zie hiervoor bijvoorbeeld fig. 3.14. Ook in dit geval kan de constructie snel geschieden met behulp van een krachtenveelhoek.

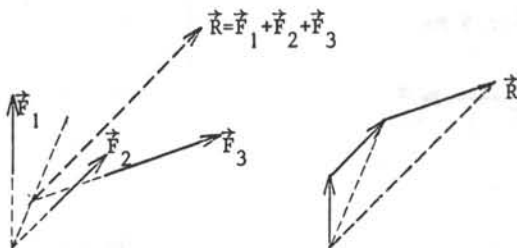


fig. 3.14.

Als de krachten evenwijdig zijn, of bijna evenwijdig, wordt de constructie moeilijk omdat het snijpunt van de werklijnen ver weg of zelfs in het oneindige valt. In de civiele techniek komt dat nogal eens voor, omdat de belasting van constructies veelal veroorzaakt wordt door het gewicht van een aantal lasten; bijvoorbeeld een brug met een aantal wagons van een trein: de brug wordt dan belast door een groot aantal verticale aslasten. In dergelijke gevallen kan men met succes gebruik maken van een speciale constructie met behulp van een zogenaamde *poolfiguur*, zie fig. 3.15. De eerste kracht ($\vec{F}_1$) wordt daarbij samengesteld met een andere, fictieve, kracht ($\vec{P}_2$), die ongeveer loodrecht staat op de werklijn van de samen te stellen krachten, zie de rechterhelft van fig. 3.15. De resultante van $\vec{F}_1$ en $\vec{P}_2$ is de vector $\vec{P}_1$. Er geldt dan $\vec{F}_1 = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$. Het uiteinde van de fictieve kracht $\vec{P}_2$ in de poolfiguur noemt men de *pool*. Als men nu alle krachten

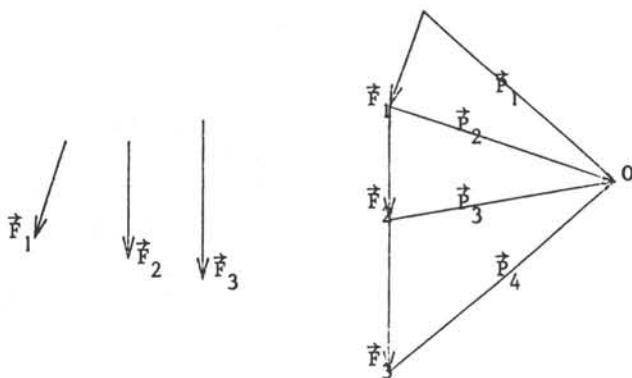


fig. 3.15.

(in het voorbeeld van fig. 3.15 de drie krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$) achter elkaar zet, en de uiteinden van de aldus uitgezette krachten verbindt met de pool, dan geldt

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \vec{P}_1 - \vec{P}_2 \\ \vec{F}_2 &= \vec{P}_2 - \vec{P}_3 \\ \vec{F}_3 &= \vec{P}_3 - \vec{P}_4.\end{aligned}$$

Optellen van deze vergelijkingen geeft

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F} = \vec{P}_1 - \vec{P}_4,$$

hetgeen betekent dat de resultante $\vec{R}$ van de drie krachten het verschil is van de fictieve krachten $\vec{P}_1$ en $\vec{P}_4$. Deze resultante kan in de poolfiguur, de rechterhelft van fig. 3.15, direct getekend worden. Dat is niets nieuws: het is niets anders dan het bepalen van de resultante van een stelsel van krachten met een krachtenveelhoek, zie bijvoorbeeld fig. 2.3. De constructie met behulp van de poolfiguur maakt het evenwel mogelijk ook de werklijn van de resultante $\vec{R}$ van de krachten te bepalen, ook al liggen de snijpunten van de werklijnen van de samen te stellen krachten erg ver weg. Dit wordt geïllustreerd in fig. 3.16, die een verdere uitwerking van de constructie geeft. Daartoe is ook in de linkerhelft van de figuur, waarin de krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$ in hun werkelijke positie getekend zijn, de fic-

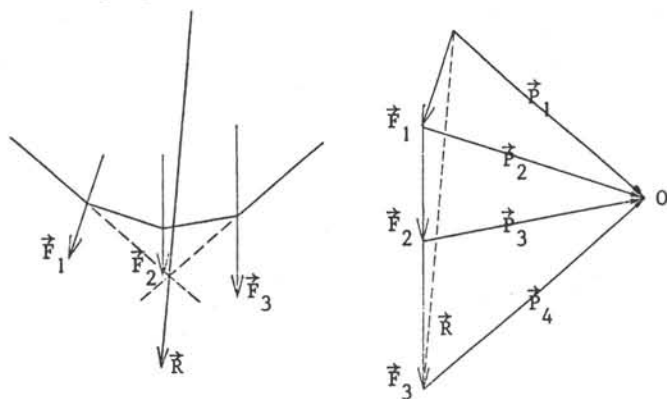


fig. 3.16.

tieve werklijn van de fictieve kracht $\vec{P}_2$ getekend, in een willekeurige positie. Omdat $\vec{P}_1$ de resultante is van $\vec{F}_1$ en $\vec{P}_2$ gaat de werklijn van $\vec{P}_1$ door het snijpunt van $\vec{F}_1$ en $\vec{P}_2$. De werklijn van $\vec{P}_1$ kan nu ook getekend worden, omdat de richting van $\vec{P}_1$ bekend is uit de poolfiguur. Vervolgens kunnen de werklijnen van $\vec{P}_3$ en $\vec{P}_4$ getekend worden: de werklijn van $\vec{P}_3$ door het snijpunt van de werklijnen van $\vec{P}_2$ en $\vec{F}_2$, en de werklijn van $\vec{P}_4$ door het snijpunt van de werklijnen van $\vec{P}_3$ en $\vec{F}_3$. De resultante $\vec{R}$ is het verschil van de krachten $\vec{P}_1$ en $\vec{P}_4$, en derhalve gaat de werklijn van $\vec{R}$ door het snijpunt van de werklijnen van $\vec{P}_1$ en $\vec{P}_4$. Omdat dat snijpunt eenvoudig bepaald kan worden, ligt de werklijn van de resultante $\vec{R}$ nu vast. In fig. 3.16 is de volledige constructie uitgevoerd. Opgemerkt moge worden dat de plaats van de pool O willekeurig is, evenals de ligging van de eerste werklijn van een der fictieve krachten in de linkerhelft van de figuur. Het stelsel van werklijnen van de fictieve krachten noemt men soms een *stangenveelhoek*. Ook wordt nog opgemerkt dat de volgorde waarin de krachten in de poolfiguur achter elkaar worden uitgezet willekeurig is. Wel moet de volgorde van de stangen in de stangenveelhoek overeenstemmen met de volgorde van de fictieve krachten (soms de *poolstralen* genoemd) in de poolfiguur.

3.4. evenwicht van een star lichaam

Zoals hierboven gezien kan men voor de beweging van een star lichaam de krachten die erop werken vervangen door een kracht door een willekeurig punt van dat lichaam en een draaimoment. Voor beschouwingen over de beweging van een star lichaam kiest men voor het willekeurig punt bij voorkeur het zwaartepunt van het lichaam, omdat dan de beweging gesplitst kan worden in een uniforme translatie en een rotatie om het zwaartepunt.

Uit het bovenstaande volgt dat een star lichaam in evenwicht is als de erop werkende krachten en draaimomenten zodanig zijn dat de resulterende kracht en het resulterende draaimoment nul zijn. Een voorbeeld is weergegeven in fig. 3.17. Het in die figuur getekende lichaam is in evenwicht omdat zowel de horizontale componenten als de verticale componenten van de krachten tezamen juist nul zijn, en omdat het moment ten opzichte van een willekeurig punt ook nul is.

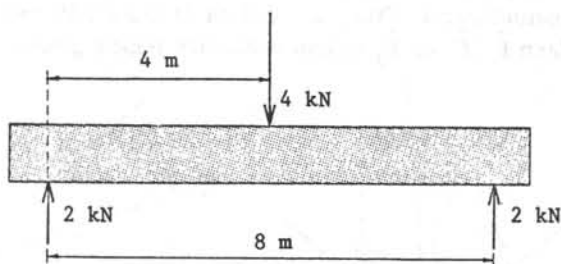


fig. 3.17.

De evenwichtsvergelijkingen voor een star lichaam dat alleen belast wordt door krachten in het x,y -vlak zijn als volgt:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum T_z = 0.$$

Het sommatiesymbool betekent hierbij dat gesommeerd moet worden over alle krachten (en eventuele momenten) die op het lichaam werken. De derde vergelijking drukt het momentenevenwicht uit. Daarbij moet van alle krachten het moment ten opzichte van één willekeurig gekozen punt bepaald worden, en daarna moeten al die momenten gesommeerd worden. Als er ook geconcentreerde momenten op het lichaam werken (bijvoorbeeld in de vorm van koppels), moeten die hierbij ook nog opgeteld worden natuurlijk.

De drie hierboven gegeven vergelijkingen voor het evenwicht van een vlak lichaam kan men ook vervangen door drie willekeurige lineaire combinaties van deze vergelijkingen, mits de combinaties maar onafhankelijk zijn. Zo kan men het evenwicht ook beschrijven door te eisen dat het moment ten opzichte van een willekeurig punt nul is, en dat de som van alle componenten in twee verschillende richtingen nul is. Ook kan men het evenwicht verzekeren door te eisen dat de momenten ten opzichte van drie, niet op één rechte lijn gelegen, punten nul zijn. Dat dat ook voldoende is om het evenwicht te verzekeren, kan men eenvoudig inzien door te bedenken dat elk stelsel van krachten en momenten in een vlak vervangen kan worden door een resulterende kracht en een resulterend moment, zie paragraaf 3.3, figuren 3.10 en 3.11. Als het moment ten opzichte van drie punten nul is kan het niet anders dan dat de resulterende kracht en het resulterende moment nul zijn, mits het geval dat meer dan twee van de drie punten op de werklijn van de resultante $\vec{R}$ in fig. 3.11 liggen wordt uitgesloten. Daarom is gesteld dat de drie punten niet op één rechte lijn mogen liggen.

Dat een stelsel van krachten een evenwichtssysteem vormt kan men ook grafisch controleren met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek, zie fig. 3.18. Omdat geen der krachten een horizontale component heeft is het evenwicht in de x -richting automatisch verzekerd. Dat er ook evenwicht in verticale richting is, ziet men direct in door alle krachten achter elkaar uit te zetten. In de figuur is dat gedaan vanuit het punt A. Er is verticaal evenwicht omdat het uiteinde van de laatste kracht weer in punt A uitkomt. Om het momentenevenwicht na te gaan moet men de poolfiguur en de stangenveelhoek tekenen. In de poolfiguur geldt

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \vec{P}_1 - \vec{P}_2 \\ \vec{F}_2 &= \vec{P}_2 - \vec{P}_3 \\ \vec{F}_3 &= \vec{P}_3 - \vec{P}_4 \\ \vec{F}_4 &= \vec{P}_4 - \vec{P}_5 \\ \vec{F}_5 &= \vec{P}_5 - \vec{P}_1.\end{aligned}$$

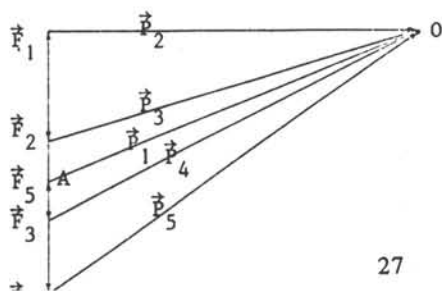
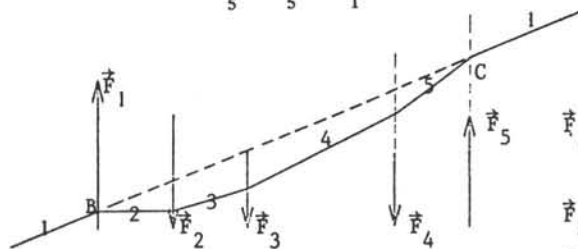


fig. 3.18.

De som van de krachten is dus nul, maar dat was al bekend. Tekent men nu de fictieve werklijnen van de fictieve kracht $\vec{P}_1$ tot en met $\vec{P}_5$ ook in de linkerhelft van de figuur, dan kan men stellen dat het stelsel van vijf krachten $\vec{F}_1$ tot en met $\vec{F}_5$ equivalent is met een kracht $\vec{P}_1$ door punt B en een kracht $-\vec{P}_1$ door punt C, zie fig. 3.19. Omdat die twee krachten dezelfde werklijn hebben is er momenten-evenwicht.

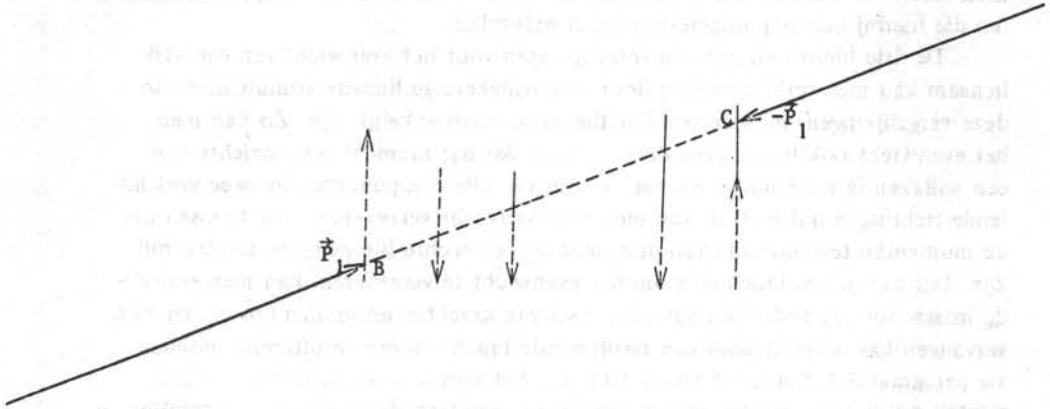


fig. 3.19.

3.5. krachten in de ruimte

Tot nu toe zijn de beschouwingen over de beweging en het evenwicht van een star lichaam eenvoudigheidshalve beperkt tot gevallen waarbij alle krachten in één plat vlak werken. In deze paragraaf worden de beschouwingen uitgebreid tot het algemene driedimensionale geval. Daartoe is het nodig het begrip draaimoment meer algemeen te definiëren.

Stel dat in de ruimte een kracht $\vec{F}$ gegeven is, met aangrijpingspunt B, zie fig. 3.20. Het draaimoment $\vec{T}$ van deze kracht ten opzichte van het punt A wordt nu gedefinieerd als het vectorproduct van de vector $\vec{r}$, dat is de vector die de plaats aangeeft van punt B ten opzichte van punt A, en de kracht $\vec{F}$,

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Het vectorproduct $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$ van twee vectoren $\vec{r}$ en $\vec{F}$ is een vector die loodrecht staat op $\vec{r}$ en $\vec{F}$, ter grootte $rF \sin \theta$, waarin r de grootte van de vector $\vec{r}$ is, F de grootte van de vector $\vec{F}$, en θ de hoek tussen de vectoren $\vec{r}$ en $\vec{F}$. De richting van $\vec{T}$ wordt bepaald door de afspraak dat deze overeenkomt met de

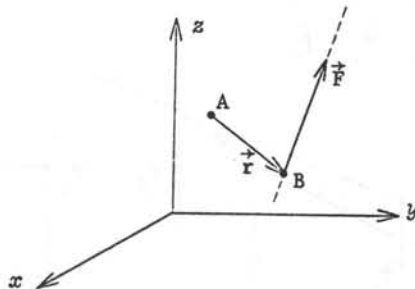


fig. 3.20.

richting waarin een rechtse schroef beweegt als de kop gedraaid wordt van de

eerste vector ($\vec{r}$) naar de tweede ($\vec{F}$) over de kleinste hoek, zie fig. 3.21. De vectoren moeten daarbij zonodig langs hun werklijn verschoven worden totdat ze hetzelfde aangrijpingspunt hebben.

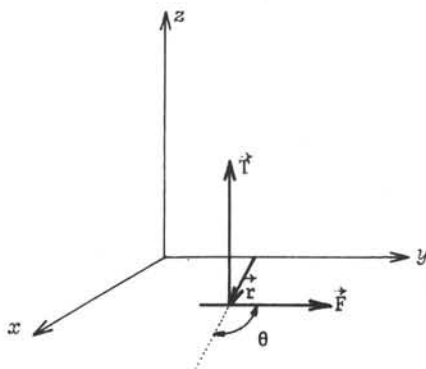


fig. 3.21.

In figuur 3.21 liggen de vectoren $\vec{r}$ en $\vec{F}$ in het x,y -vlak. De vector $\vec{T}$ is dan evenwijdig aan de z -as. In fig. 3.22 is het x,y -vlak nog eens apart getekend.

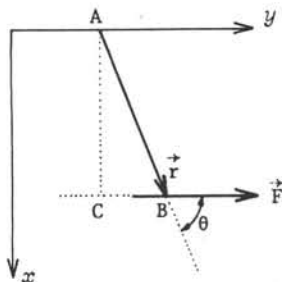


fig. 3.22.

In die figuur is ook de loodlijn AC vanuit punt A op de werklijn van $\vec{F}$ getekend. De lengte van het lijnstuk AC is $r \sin \theta$, en de grootte van het vectorproduct is dus gelijk aan het product van de grootte van de kracht en de afstand van het punt A tot de werklijn van de kracht. Dit komt overeen met de definitie van een draaimoment van een kracht ten opzichte van een punt zoals gegeven in paragraaf 3.1. In die paragraaf was de beperking tot krachten en punten in het x,y -vlak essentieel. Hier is de gegeven definitie algemener. Blijkbaar is het draaimoment van een kracht ten opzichte van een punt in het algemeen een vector.

Men kan het vectorproduct ook goed beschrijven met behulp van de voorstelling van de vectoren in componenten. Men schrijft daartoe

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y + r_z \vec{e}_z \\ \vec{F} &= F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z\end{aligned}$$

Voor de vectorproducten van de eenheidsvectoren, die in fig. 3.23 getekend zijn, gelden op grond van de definitie van het vectorproduct de volgende relaties,

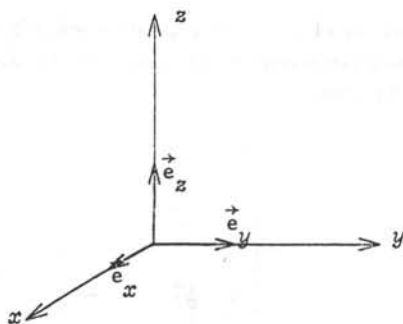


fig. 3.23.

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_x \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0 \\
 \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= -\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_z \\
 \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= -\vec{e}_z \times \vec{e}_y = \vec{e}_x \\
 \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= -\vec{e}_x \times \vec{e}_z = \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

Men vindt nu, als $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$,

$$T_x = r_y F_z - r_z F_y$$

$$T_y = r_z F_x - r_x F_z$$

$$T_z = r_x F_y - r_y F_x$$

In het geval dat $\vec{r}$ en $\vec{F}$ beide in het x, y -vlak liggen, heeft alleen T_z een van nul verschillende waarde. De hier gegeven definitie van de componenten van $\vec{T}$ is een generalisatie van de definitie van T_z zoals gegeven in paragraaf 3.1. Het gebruik van het subscript z blijkt nodig te zijn omdat het draaimoment een vector is.

Het is vrij eenvoudig de evenwichtsvergelijkingen voor een star lichaam te generaliseren. Evenwicht vereist dat zowel de resulterende kracht als het resulterende moment ten opzichte van een willekeurig punt nul zijn. Dit betekent dat de volgende eisen gesteld moeten worden aan de krachten en momenten werkend op een star lichaam opdat dit in rust zij,

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma T_x = 0$$

$$\Sigma T_y = 0$$

$$\Sigma T_z = 0.$$

De eerste drie voorwaarden betekenen dat het lichaam geen translatieversnelling ondergaat; de laatste drie betekenen dat het geen rotatieversnelling ondergaat.

4. EVENWICHT VAN STATISCH BEPAALDE CONSTRUCTIES

Civiltechnische constructies zijn nooit volkomen star, maar in het algemeen zijn de vervormingen toch wel zo klein dat de vorm van de constructie in zijn geheel nauwelijks verandert. In veel gevallen kan men er daarom voor beschouwen over het evenwicht van een constructie als geheel in eerste instantie wel van uitgaan dat de constructie beschouwd mag worden als een star lichaam.

De krachten op een constructie bestaan in het algemeen uit een belasting door het gewicht van de constructie zelf, een belasting voortvloeiend uit het gebruik van de constructie (bijvoorbeeld het gewicht van de voertuigen die over een brug rijden, of het gewicht van goederen in een pakhuis), een belasting ten gevolge van natuurverschijnselen (wind tegen een gebouw, sneeuw op een dak, golfkrachten tegen een stuw), en krachten door de ondergrond via de fundering op de constructie uitgeoefend. Om het gedrag van een constructie goed te kunnen analyseren is het nodig al deze krachten goed te kennen.

Sommige van de hierboven genoemde krachten zijn in het algemeen tevoren goed of redelijk goed bekend (eigen gewicht, nuttige belasting, winddruk). De krachten van de ondergrond op de constructie zijn echter in het algemeen niet zonder meer gegeven. Deze krachten moeten de constructie met de andere daarop werkende krachten (de *belastingen*) in evenwicht houden. Men spreekt daarom wel van *oplegreacties*. In dit hoofdstuk zal op de bepaling van die oplegreacties worden ingegaan, voor een aantal eenvoudige constructies. Om de beschouwingen zo eenvoudig mogelijk te houden zijn ze voorlopig beperkt tot vlakke constructies.

4.1. constructies opgelegd op een scharnieroplegging en een roloplegging

In deze paragraaf wordt een eenvoudige vlakke constructie beschouwd, bestaande uit een rechte balk, zie fig. 4.1, die uitsluitend belast wordt door krach-

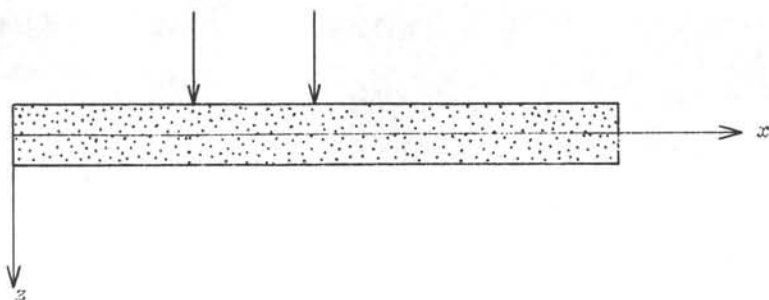


fig. 4.1.

ten in het vlak van tekening. Men kan bijvoorbeeld denken aan een houten of betonnen balk in een dak, belast door gordingen. De breedte van de balk (de afmeting loodrecht op het vlak van tekening) speelt in dit geval geen belangrijke rol.

Een eventuele beweging van de balk, opgevat als star lichaam, in het vlak van tekening, kan worden beschreven door drie variabelen: een translatie in x -richting, een translatie in z -richting, en een rotatie. Men zegt dat de constructie drie vrijheidsgraden bezit. Om de beweging van de constructie te verhinderen moet de oplegging zodanig geschieden dat bij verschillende nuttige belastingen

evenwicht mogelijk is. In dit geval zijn er drie onafhankelijke oplegreacties vereist, zodanig dat aan de drie evenwichtsvoorwaarden

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum T_y = 0$$

voldaan kan worden.

Een van de meest eenvoudige mogelijkheden om de constructie op te leggen zodat de drie vrijheidsgraden elk opgeheven worden, is door middel van een scharnieroplegging en een roloplegging, zie fig. 4.2. Een scharnieroplegging kan twee reacties leveren: een kracht door het scharnierpunt, met een horizontale

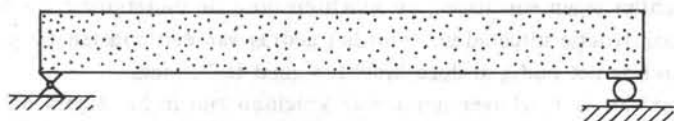


fig. 4.2.

en een verticale component. Een roloplegging kan één reactie leveren: een kracht loodrecht op de rolbaan. In het in fig. 4.2 getekende geval van een horizontale rolbaan is de oplegreactie verticaal. Het scharnier kan vrij roteren, de rol kan ook vrij roteren, maar deze laat bovendien een horizontale beweging toe. Voor een voorbeeld van de praktische uitvoering van een scharnieroplegging en een roloplegging zie men fig. 4.3, die de opleggingen toont van het viaduct in de rijksweg Den Haag - Rotterdam over de provinciale weg naar Pijnacker.

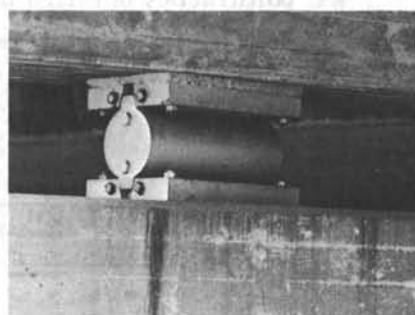
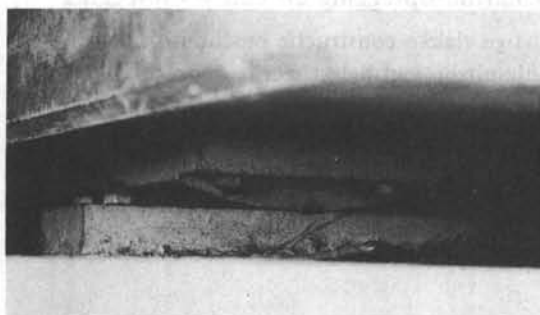


fig. 4.3.

De praktische uitvoering is vaak zo dat alleen een verticale component van de oplegreactie omhoog mogelijk is. Een reactie omlaag kan niet geleverd worden, maar dat is meestal ook niet nodig omdat de meeste belastingen van de brug verticaal omlaag werken. Met name is dit bijvoorbeeld het geval voor het altijd aanwezige eigen gewicht van de constructie. Meestal is het eigen gewicht van een constructie zoals een brug voldoende groot om ervoor te zorgen dat de oplegreacties altijd omhoog gericht zijn.

Schematisch geeft men de balk en zijn opleggingen vaak weer zoals in fig. 4.4 getekend. De linkeroplegging is hierin een scharnier, en de rechteroplegging is een rol. De rolletjes laat men daarbij soms wel weg.

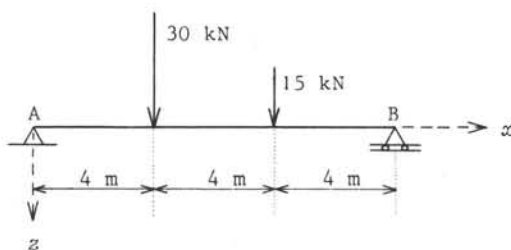


fig. 4.4.

De bepaling van de drie oplegreacties kan geschieden met behulp van de drie evenwichtsvergelijkingen. Voor het getekende geval kan de verticale component van de kracht die de scharnieroplegging uitoefent op de balk aangegeven worden met A_z , de horizontale component van deze kracht met A_x , en de verticale component van de kracht die de roloplegging uitoefent op de balk kan aangegeven worden met B_z (de horizontale component van deze kracht is nul). De drie evenwichtsvergelijkingen zijn nu, als de belastingen en afmetingen zijn zoals aangegeven in fig. 4.4,

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_z + B_z + 30 \text{ kN} + 15 \text{ kN} &= 0 \\ -B_z \times 12 \text{ m} - 30 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - 15 \text{ kN} \times 8 \text{ m} &= 0 \end{aligned}$$

Hierbij is in de laatste vergelijking het moment genomen ten opzichte van het punt A, en is de definitie van het moment T_y van paragraaf 3.5 gebruikt: $T_y = r_z F_x - r_x F_z$. Deze definitie houdt in dat een moment positief is als de draaiing overeenkomt met een rotatie van de z-as over de kleinste hoek naar de x-as.

Men vindt nu

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \text{ kN} \\ A_z &= -25 \text{ kN} \\ B_z &= -20 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Het minteken bij de verticale reacties betekent dat de opleggingen een kracht in negatieve z-richting op de balk uitoefenen: dat is een kracht omhoog. Dat was, gezien de naar beneden gerichte krachten, te verwachten.

Hierboven is gebleken dat men de oplegreacties bij een balk (men spreekt ook wel van een *ligger*), opgelegd op een scharnier en een rol, kan berekenen met behulp van de evenwichtsvergelijkingen voor de ligger. Men spreekt in zo'n geval van een *statisch bepaalde constructie*. Als de ligger nog een ondersteuning zou hebben (zie fig. 4.5) zijn er te veel onbekende oplegreacties om ze met be-



fig. 4.5.

hulp van een evenwichtsbeschouwing te berekenen. Men spreekt dan van een *statisch onbepaalde constructie*. Voor de bepaling van de oplegreacties is het dan nodig de ligger echt als vervormbaar te beschouwen. Op de bepaling van de oplegreacties bij statisch onbepaalde constructies wordt ingegaan in het tweedejaarscollege Toegepaste Mechanica (b11).

Er is hierboven reeds gesteld dat de drie vrijheidsgraden van de constructie drie onafhankelijke oplegreacties vereisen. Zou men de constructie opleggen op twee rollen, dan zijn de drie vrijheidsgraden niet volledig belemmerd, zie fig. 4.6. Als er een horizontale kracht op de ligger zou werken (bijvoorbeeld door een

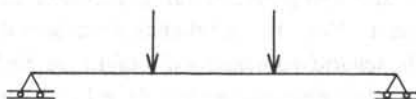


fig. 4.6.

remmend voertuig), kunnen de opleggingen geen reactie leveren om de ligger in evenwicht te houden. De ligger gaat in horizontale richting bewegen. Men spreekt in zo'n geval van een *kinematisch onbepaalde constructie*, of ook wel van een *niet-plaatsvaste constructie*. De ingenieur dient dergelijke constructies uiteraard te vermijden: zijn constructies moeten *kinematisch bepaald* (of *plaatsvast*) zijn.

Samenvattend komt men tot de volgende definities.

Kinematisch bepaalde constructie. Een constructie is kinematisch bepaald (of plaatsvast) als er tegen elke eventuele beweging een weerstand bestaat. Voor een vlakke constructie die zelf vormvast is, is het daartoe nodig dat er tenminste drie oplegreacties zijn waarvan de werklijnen elkaar niet in een punt snijden en niet alle drie evenwijdig zijn.

Kinematisch onbepaalde constructie. Een constructie is kinematisch onbepaald (of niet-plaatsvast) als er tenminste één vorm van beweging is waartegen geen weerstand wordt ontwikkeld. Bij een vlakke vormvaste constructie kan dit optreden als de werklijnen van alle oplegreacties evenwijdig zijn, of als ze alle door hetzelfde punt gaan, of als er minder dan drie oplegreacties zijn. Een vlakke constructie kan ook kinematisch onbepaald zijn als er drie oplegreacties zijn, maar de constructie op zichzelf niet vormvast is. Dit geval van een niet-vormvaste constructie treedt bijvoorbeeld op bij een constructie samengesteld uit twee scharnierend verbonden delen. Er zijn dan meer dan drie onafhankelijke oplegreacties nodig om de constructie kinematisch bepaald te maken. Voorbeelden hiervan worden behandeld in hoofdstuk 6.

Statisch bepaalde constructie. Een constructie is (uitwendig) statisch bepaald als alle oplegreacties kunnen worden berekend uit een evenwichtsbeschouwing.

Statisch onbepaalde constructie. Een constructie is (uitwendig) statisch onbepaald als niet alle oplegreacties kunnen worden berekend uit een evenwichtsbeschouwing.

4.2. opleggingen met scharnierende staven

Naast scharnieropleggingen en rolopleggingen komen in de praktijk nog twee andere opleggingen vaak voor: de later te behandelen inklemmingen en de hier te behandelen opleggingen met scharnierende staven (of *pendelstaven*). Een voorbeeld is gegeven in fig. 4.7, waarin een ligger is opgelegd op een scharnieroplegging en een verticale scharnierende staaf.

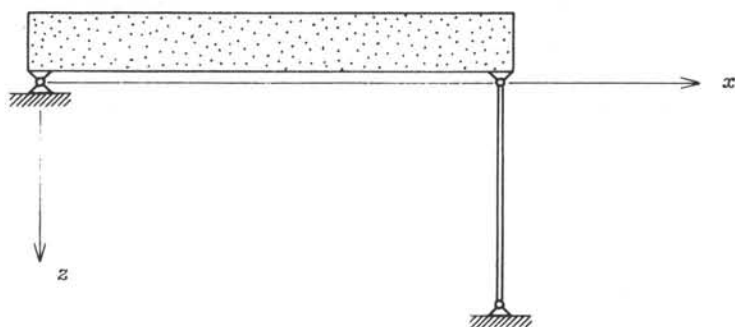


fig. 4.7.

De staaf getekend in fig. 4.7 als rechterondersteuning van de ligger heeft geen weerstand tegen een eventuele horizontale verplaatsing van de ligger. De staaf kan dus alleen een kracht leveren in zijn lengterichting, in fig. 4.7 is dat de z -richting.

Het bepalen van de oplegreacties bij een ligger zoals getekend in fig. 4.7, op een scharnieroplegging en een pendelstaaf, kan op precies dezelfde wijze geschieden als in de vorige paragraaf is aangegeven voor een ligger opgelegd op een scharnier en een rol: de drie evenwichtsvergelijkingen zijn nodig en voldoende om de drie reacties te bepalen. In feite is er ten aanzien van de oplegreacties geen verschil tussen een rol en een verticale pendelstaaf, er is alleen constructief verschil tussen de opleggingen zelf.

Pendelstaven zijn bijvoorbeeld toegepast bij het spoorwegviaduct door Delft. Dit viaduct bestaat uit secties van elk vier overspanningen en vijf opleggingen: een scharnieroplegging in het midden en vier pendelstaven, zie fig. 4.8. Elke sectie is dus statisch onbepaald opgelegd.

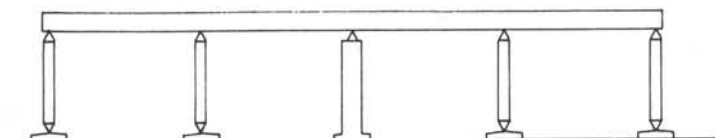


fig. 4.8.

Men kan een ligger ook statisch bepaald en plaatsvast opleggen met behulp van drie scharnierende staven, zie fig. 4.9. De drie staven mogen natuurlijk niet evenwijdig zijn of door hetzelfde punt gaan, anders is de constructie kinematisch onbepaald: een kracht die niet door dat punt gaat kan niet in evenwicht worden gehouden.

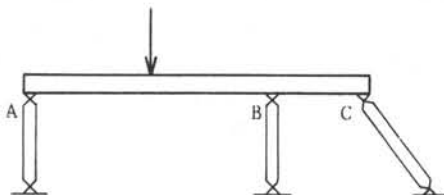


fig. 4.9.

Van de oplegreacties in de punten A, B en C van de constructie getekend in fig. 4.9 is tevoren de richting al bekend: dat is de richting van de oplegstaven (of, meer precies gezegd: de verbindingslijn van de scharnierpunten

aan de beide uiteinden van een oplegstaaf). Alleen de grootte van deze krachten is nog onbekend. Geeft men de component van deze krachten in de in fig. 4.10 getekende richtingen aan als R_A , R_B respectievelijk R_C , dan kunnen deze drie onbekenden bepaald worden uit de drie evenwichtsvergelijkingen

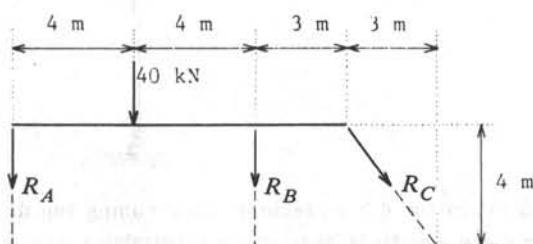


fig. 4.10.

gen. Die zijn in dit geval, als het momentenevenwicht genomen wordt ten opzichte van het snijpunt van de middelste staaf en de rechterstaaf,

$$-\frac{3}{5}R_C = 0 \quad (\Sigma F_x = 0)$$

$$R_A + R_B + \frac{4}{3}R_C + 40 \text{ kN} = 0 \quad (\Sigma F_z = 0)$$

$$-R_A \times 8 \text{ m} - 40 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = 0 \quad (\Sigma T_y = 0)$$

Uit deze vergelijkingen volgt voor de grootte van de oplegreacties:

$$R_A = -20 \text{ kN}$$

$$R_B = -20 \text{ kN}$$

$$R_C = 0.$$

Het minteken betekent dat de krachten op de ligger omhoog gericht zijn. Dat was te verwachten.

Het voordeel van het beschouwen van het momentenevenwicht ten opzichte van het snijpunt van de werklijnen van twee staafkrachten is dat in die vergelijking dan slechts één onbekende kracht voorkomt. Die kracht volgt dan onmiddellijk uit die vergelijking.

4.3. bepaling oplegreacties met poolfiguur en stangenveelhoek

In paragraaf 3.4 is gezien hoe men het evenwicht van een stelsel van krachten kan controleren met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek, zie de figuren 3.18 en 3.19. Wezenlijk daarbij was dat in de stangenveelhoek de twee uiterste stangen in elkaars verlengde lagen, zie fig. 3.19. Deze eigenschap, die direct op het evenwicht berust, kan men gebruiken om de oplegreacties te bepalen van bijvoorbeeld een ligger opgelegd op een scharnier en een rol, zie fig. 4.11. In het getekende geval is de procedure als volgt. De belastingen (de krachten van 30 kN en 15 kN) worden in volgorde achter elkaar uitgezet, en er

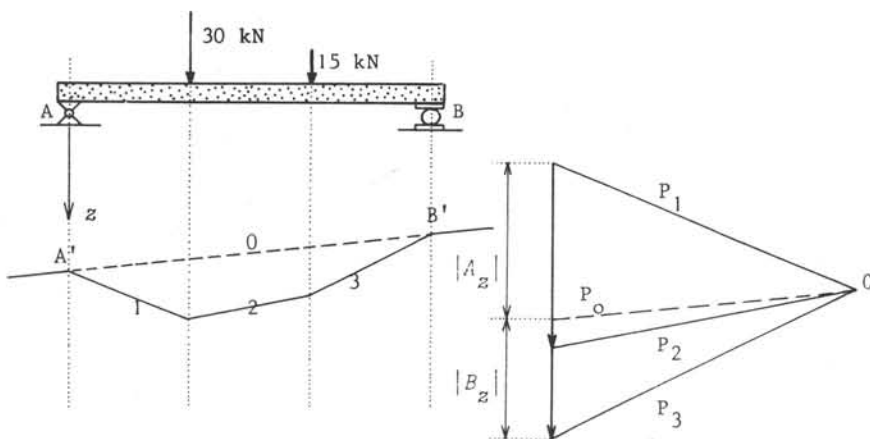


fig. 4.11.

worden poolstralen getekend van de uiteinden naar een willekeurig gekozen pool 0. Daarna kunnen in de linkerhelft van de figuur de stangen getekend worden. De werklijnen van de oplegreacties zijn, omdat in dit geval de belastingen alleen verticaal zijn, tevoren bekend. Het snijpunt van de werklijn van de oplegreactie van het scharnier met stang 1 kan nu bepaald worden, evenals het snijpunt van de werklijn van de oplegreactie van de rol met stang 3 (deze snijpunten zijn in fig. 4.11 aangegeven met A' en B'). De verbindingslijn van die twee punten noemt men de *sluitlijn*. Door in de poolfiguur vanuit de pool een lijn evenwijdig aan de sluitlijn te trekken (deze lijn is in fig. 4.11 aangegeven als een onderbroken lijn, en aangegeven met P_0) ontstaat een situatie juist overeenkomend met die van fig. 3.18. De sluitlijn maakt het mogelijk de grootte van elk der oplegreacties te bepalen. De juistheid van de constructie volgt uit de ontbinding van elk der krachten op de volgende wijze.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{P}_0 - \vec{P}_1 \\ \vec{F}_1 &= \vec{P}_1 - \vec{P}_2 \\ \vec{F}_2 &= \vec{P}_2 - \vec{P}_3 \\ \vec{B} &= \vec{P}_3 - \vec{P}_0\end{aligned}$$

Optellen van deze vergelijkingen geeft nul in het rechterlid, hetgeen een voorwaarde is voor het evenwicht van de krachten in het linkerlid. Omdat bovendien de twee uiterste stangen in de stangenveelhoek juist in elkaars verlengde liggen, is er ook momentenevenwicht.

Om de procedure nog iets te verduidelijken zal nog een voorbeeld gegeven worden. Dit voorbeeld heeft betrekking op een iets gecompliceerder geval, namelijk een geval waarbij de belastingen niet zuiver verticaal zijn, zie fig. 4.12. Van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ en van de oplegreactie van de rol zijn de werklijnen bekend, maar van de oplegreactie van het scharnier is alleen bekend dat de werklijn ervan door het scharnierpunt moet gaan. Na ontbinding van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ in de poolfiguur kan men nu de stangenveelhoek construeren door het punt A, te beginnen met stang 1 door dat punt. Omdat de werklijn van de oplegreactie van de rol bekend is, kan men het snijpunt van stang 3 met deze oplegreactie

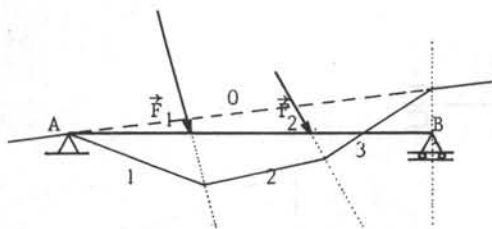
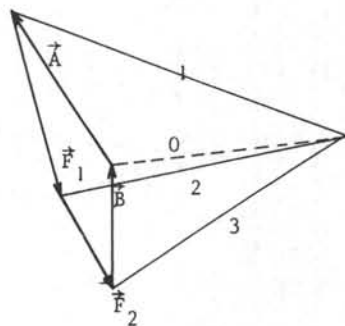


fig. 4.12.



nu bepalen, en daarna de sluitlijn (0) trekken. In de poolfiguur kan vervolgens een lijn evenwijdig aan deze sluitlijn getrokken worden, en omdat bekend is dat de oplegreactie B verticaal is, kunnen in de krachtenveelhoek de oplegreacties A en B geconstrueerd worden (zie de rechterhelft van fig. 4.12), zodanig dat de krachtenveelhoek gesloten is.

Er moge worden opgemerkt dat de grafische bepaling van oplegreacties met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek weliswaar een elegante procedure is, die het inzicht in de krachtswerking op een constructie kan vergroten (grootte en richting van een oplegreactie worden aanschouwelijk), maar dat de methode slechts beperkt toepasbaar is. Met enige kunstgrepen is de methode nog wel toepasbaar te maken voor ingewikkelder gevallen als de hier beschouwde, maar daarop wordt hier nog niet ingegaan (zie hiervoor bijvoorbeeld paragraaf 5.7). De analytische methode, met behulp van een formulering van evenwichtsvergelijkingen, leidt, vooral in meer gecompliceerde gevallen, meer systematisch tot een oplossing.

4.4. ingeklemde liggers

Naast scharnieropleggingen, rolopleggingen en staafopleggingen komt in de praktijk nog een vierde vorm van oplegging veelvuldig voor. Het betreft hier een volledige *inklemming* van het uiteinde van een ligger in een onvervormbare wand. Men kan bijvoorbeeld denken aan een houten balk die aan één zijde is ingemetseld in een dikke stenen muur, of aan een betonnen balk die uit een dikke betonnen wand steekt. Men zie voor dit type oplegging, en de schematisering ervan, fig. 4.13. De inklemming verhindert de beweging volgens de drie vrijheidsgraden van de ligger: translatie in x -richting en in z -richting, en rotatie om de y -as. De constructie is kinematisch bepaald en statisch bepaald.

De drie oplegreacties, een horizontale kracht, een verticale kracht en een moment, volgen uit het evenwicht van de constructie, zie fig. 4.14. Men vindt in het getekende geval voor de oplegreacties

$$A_x = 0 \text{ kN} \quad (\Sigma F_x = 0)$$

$$A_z = -40 \text{ kN} \quad (\Sigma F_z = 0)$$

$$T_y = 80 \text{ kNm} \quad (\Sigma T_y = 0).$$

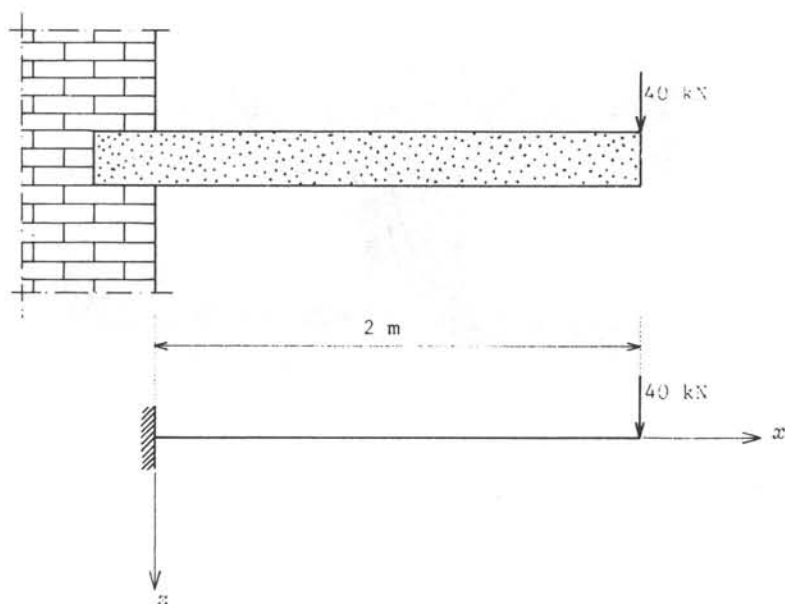


fig. 4.13.

Ingekleemde liggers komen vrij veel voor in de utiliteitsbouw, bijvoorbeeld als ondersteuning van een uitkragend balkon. Een ander voorbeeld van een inklemming wordt gevormd door de middensteunpunten van elk der secties van het spoorwegviaduct door Delft (zie fig. 4.8). Deze steunpunten kunnen worden beschouwd, zie fig. 4.15, als verticaal opgestelde liggers, ingeklemd aan de onder-



fig. 4.14.

zijde, en aan de bovenzijde belast door de krachten van de scharnieroplegging van het viaduct.

De beschouwingen van dit hoofdstuk zullen worden voortgezet, voor iets gecompliceerder constructies, in hoofdstuk 6. Daarvoor zal echter, in hoofdstuk 5, eerst ingegaan worden op de krachtsoverdracht in de ligger zelf.



fig. 4.15.

5. INWENDIGE KRACHTEN EN MOMENTEN IN LIGGERS

In het vorige hoofdstuk is gezien dat een ligger, mits kinematisch bepaald opgelegd, in staat is verschillende belastingen te dragen. Naast de plaatsvastheid van de ligger is ook zijn vormvastheid van belang. Die vormvastheid betekent dat de constructie krachten kan overbrengen zonder dat grote vormveranderingen optreden. In dit hoofdstuk wordt ingegaan op deze krachtsoverdracht in de ligger zelf. Later, in hoofdstuk 8, zal hierop nog worden teruggekomen in die zin dat dan ook de (kleine) vervormingen van de ligger in de beschouwingen worden betrokken. In paragraaf 5.1 zal eerst een zeer eenvoudig geval beschouwd worden, namelijk de op normaalkracht belaste staaf. Daarna kan dan overgegaan worden op meer algemene gevallen.

5.1. de op normaalkracht belaste staaf

Een rechte staaf die belast wordt door twee tegengesteld gerichte krachten aan zijn uiteinden, gericht volgens de staafas (zie fig. 5.1), en ter grootte P , is in evenwicht onder invloed van die krachten. De richting van de krachten is zoals in fig. 5.1 is aangegeven door de pijlen. De grootte ervan is aangegeven door de (cursief) getypte letter P . Uiteraard is ook elk deel van de staaf in even-



fig. 5.1.

wicht. Beschouwt men nu bijvoorbeeld alleen een gedeelte aan het linkerruiteinde van de staaf, zie fig. 5.2, links van een doorsnede loodrecht op de x -as, dan moet het evenwicht van dit deel van de ligger verzekerd worden door een kracht ter

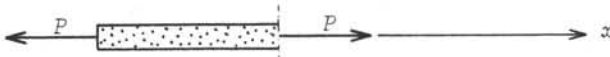


fig. 5.2.

grootte P in de snede. Die kracht op het linkerdeel wordt geleverd door het materiaal juist rechts van de snede. Omgekeerd oefent het materiaal juist links van de snede een even grote maar tegengesteld gerichte kracht uit op het rechterdeel van de staaf, zie fig. 5.3 (dit is in overeenstemming met de derde wet van Newton).

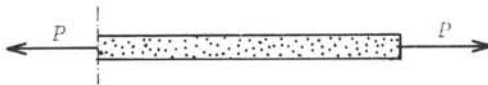


fig. 5.3.

In het inwendige van de staaf wordt de kracht veroorzaakt doordat de atomen iets uit hun evenwichtsstand gebracht worden. De krachtsoverdracht geschiedt daarbij niet als een overdracht van een geconcentreerde kracht in de staafas, maar verdeeld over de doorsnede, als de som van zeer vele kleine wisselwerkingen tussen naburige atomen. Beschouwt men een heel klein oppervlakje, ter grootte ΔA , in een doorsnede loodrecht op de x -as, met de naar buiten gerichte eenheidsnormaalvector in de richting van de positieve x -as, zie fig. 5.4, dan noemt men de x -component van de kracht die overge-

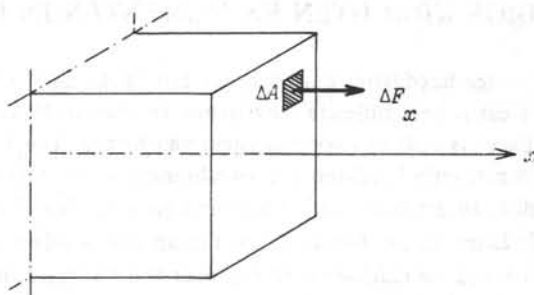


fig. 5.4.

bracht wordt door dat oppervlak heen op de materie juist binnen de staaf ΔF_x . Ook al is dat oppervlak ΔA klein, toch kan men de kracht ΔF_x nog opgebouwd denken uit bijdragen van zeer vele wisselwerkingen tussen atomen. De normaalspanning σ_{xx} wordt nu gedefinieerd als

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A n_x}$$

Hierin is n_x de x -component van de eenheidsnormaalvector op het beschouwde oppervlak, ter lengte 1, en naar buiten gericht.

Beschouwt men het overeenkomstige vlakje op het deel van de staaf rechts van de snede, dan werkt daarop een gelijke doch tegengesteld gerichte kracht, en is ook de normaalvector tegengesteld gericht. De uitkomst van de limiet blijft dan hetzelfde, en blijkbaar geeft het begrip spanning de interactie door het oppervlak weer, zowel van de linkerkant op de rechterkant als andersom.

De eerste index van de normaalspanning σ_{xx} geeft aan dat er een vlakje beschouwd wordt met de normaal in x -richting. De tweede index geeft aan dat ook de beschouwde krachtscomponent (in dit geval ΔF_x) er een in de x -richting is. Later zullen ook andere spanningscomponenten beschouwd worden.

De tekenafspraken voor de normaalspanning σ_{xx} volgt direct uit de definitie. De spanning is positief als ΔF_x en n_x beide positief of beide negatief zijn, en de spanning is negatief als ΔF_x en n_x verschillend van teken zijn. Dat komt er dus op neer dat als er op een vlakje met de normaal in de positieve coördinaatsrichting een kracht werkt ook in de positieve coördinaatsrichting, dat dan de spanning positief is. Maar ook als op een vlakje met de normaal in negatieve coördinaatsrichting een kracht werkt in de negatieve coördinaatsrichting is de spanning positief.

Men kan de spanning σ_{xx} over het oppervlak van de doorsnede integreren tot een normaalkrachtinteractie,

$$N_{xx} = \int_A \sigma_{xx} dA.$$

Men noemt N_{xx} de normaalkrachtinteractie, of ook wel de normaalkracht. De indices worden bij deze normaalkracht meestal weggelaten, en men schrijft dan

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA.$$

In het geval van fig. 5.1 is de grootte van de normaalkrachtinteractie blijkbaar juist P ,

$$N = P.$$

De hierboven gegeven vrij formele tekenafspraken komt er voor het geval van de staaf belast door gelijke doch tegengestelde krachten aan zijn uiteinden (fig. 5.1) op neer dat *trek positief* is, en *druk negatief*.

Voor de staaf van fig. 5.1 kan men nu zeggen dat er in elke doorsnede van de staaf een positieve normaalkracht (of een *trekkracht*) werkt, ter grootte P . Opgemerkt wordt dat het gebruik van het woord kracht voor de resultante van spanningen tot enige verwarring aanleiding kan geven. In feite stelt zo'n normaalkracht eigenlijk een krachtenpaar voor, namelijk een op het linkerdeel, en een op het rechterdeel. Vandaar dat men beter kan spreken van een *normaalkrachtinteractie*. In de praktijk spreekt men echter meestal van een normaalkracht. In het hier beschouwde geval betekent de afspraak dat een normaalkracht positief is voor trek, en negatief voor druk, dat de normaalkracht in de linkerhelft van fig. 5.5 positief is, en die in de rechterhelft van fig. 5.5 negatief is.



fig. 5.5.

Het geval van een uitsluitend op normaalkracht belaste staaf treedt bijvoorbeeld op bij pendelstaven. In het geval van fig. 4.9 zijn de staafkrachten in de beide verticale staven drukkrachten: de staafkrachten zijn negatief. In hoofdstuk 7 zullen in een enigszins ander verband op normaalkracht belaste staven voorkomen: daar betreft het dan vakwerkstaven.

Het verschil in karakter van een normaalkracht (of beter een normaalkrachtinteractie) en een gewone (uitwendige) kracht komt goed tot uitdrukking als men de tekens van de grootheden bekijkt. Als men de uitwendige kracht uitgeoefend op het rechteruiteinde van de staaf van fig. 5.1 aangeeft met $\vec{F}_1$, dan heeft die kracht alleen een van nul verschillende component in de x -richting, en wel ter grootte P ,

$$F_{1-x} = P.$$

Noemt men de uitwendige kracht op het linkeroeinde $\vec{F}_2$, dan heeft deze kracht een x -component ter grootte $-P$,

$$F_{2-x} = -P.$$

In de gehele staaf is echter de normaalkracht positief,

$$N = P.$$

Dit alles hangt samen met de omstandigheid dat met de normaalkracht een krachtenpaar bedoeld wordt. Men kan het ook beschouwen als te zijn veroorzaakt doordat de normaalkracht de resultante is van alle normaalspanningen die door de doorsnede worden overgebracht. Het is mede om het onderscheid met een uitwendige kracht aan te geven dat men soms spreekt van een normaalkrachtinteractie.

5.2. buigend moment in een ligger

In de vorige paragraaf is het begrip normaalkracht geïntroduceerd als de resultante van de over een doorsnede verdeelde normaalspanningen σ_{xx} . Stilzwijgend werd er daarbij van uitgegaan dat de resultante van alle elementaire krachten $\sigma_{xx} \Delta A$ een kracht in de staafas was. In het algemeen hoeft dat niet. Deze krachten kunnen ten opzichte van het zwaartepunt van de doorsnede (de staafas is de verbindingslijn van de zwaartepunten van alle normaaldorsneden) ook nog een moment als resultante hebben. Een voorbeeld is gegeven in fig. 5.6, waarin de spanningen op het linkerdeel van een ligger getekend zijn. Men intro-

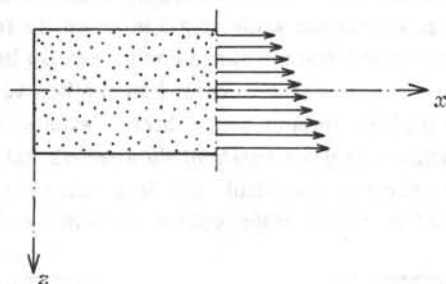


fig. 5.6.

duceert naast de normaalkracht N

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA$$

nu ook het resulterend moment van al de elementaire krachten $\sigma_{xx} \Delta A$ ten opzichte van het zwaartepunt van de doorsnede,

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} z dA.$$

Men noemt M_z het *buigend moment* in de ligger. De index z is hierbij ontleend aan de arm van de elementaire momentjes $\sigma_{xx} z dA$. In veel gevallen laat men die index eenvoudigheidshalve weg.

Een buigend moment als hierboven beschreven treedt bijvoorbeeld op in een ligger die aan zijn uiteinden belast wordt door even grote doch tegengesteld gerichte draaimomenten ter grootte W , zie fig. 5.7. De ligger is onder invloed van die momenten in evenwicht. Brengt men een willekeurige snede aan en beschouwt men alleen het rechterdeel van de ligger, dan vereist het evenwicht van die delen dat er een positief buigend moment M in de snede werkt, zie fig. 5.8. De grootte van het buigend moment is W ,

$$M = W.$$

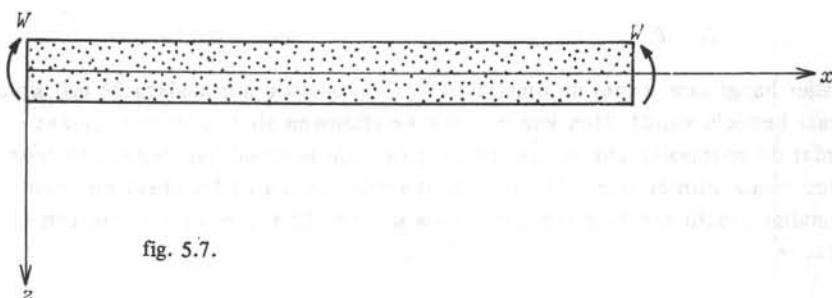


fig. 5.7.

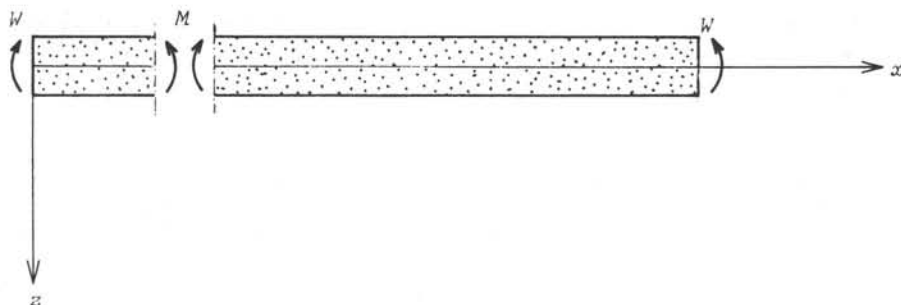


fig. 5.8.

Opgemerkt zij dat het karakter van een buigend moment duidelijk verschilt van dat van een draaimoment. Een buigend moment is een grootheid die betrekking heeft op de krachtoverdracht door een doorsnede in het inwendige van een ligger, en gedefinieerd is aan de hand van de inwendige spanningen. Een draaimoment is een van buiten op de ligger werkende grootheid. Spreekt men over het buigend moment in een ligger, dan wordt zowel de werking van het rechterdeel op het linkerdeel bedoeld als de werking van het linkerdeel op het rechterdeel. Er is weer sprake van een interactie.

Het verschillende karakter van buigende momenten en draaimomenten komt direct tot uitdrukking in de tekens van de grootheden in het geval van fig. 5.7. Het draaimoment aan het rechteruiteinde is positief, dat aan het linkeruiteinde is negatief. Het buigend moment is echter overal positief.

De spanningsverdeling van fig. 5.6 kan men opgebouwd denken uit superpositie van twee gevallen: een gelijkmatige spanningsverdeling, en een lineair over de hoogte verlopende spanningsverdeling die ter plaatse van de staafas juist nul is, zie fig. 5.9. De eerste spanningsverdeling heeft alleen een normaalkracht tot resultante, en geen buigend moment. De tweede spanningsverdeling heeft geen normaalkracht tot resultante, de positieve spanningen (trekspanningen) beneden de staafas en de negatieve spanningen (drukspanningen) boven de staafas heffen elkaar, voor wat betreft het horizontaal evenwicht, juist op.



fig. 5.9.

Deze tweede spanningsverdeling heeft wel een buigend moment tot resultante.

De tekenafspraken voor buigende momenten volgt direct uit de hierboven gegeven definitie van het buigend moment in een ligger,

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} z dA$$

en de tekenafspraken voor positieve normaalspanningen. De bijdrage tot het buigend moment van de spanningen op een vlakje dA is positief als het product $\sigma_{xx} z$ positief is, dat wil zeggen als σ_{xx} en z hetzelfde teken hebben: beide positief of beide negatief. In het geval van een horizontale ligger met de z -as naar

beneden gericht, zoals dat in deze paragraaf steeds het geval is, komt het erop neer dat een positief buigend moment overeenkomt met trek aan de onderzijde van de ligger, en met druk aan de bovenzijde, zie fig. 5.10.

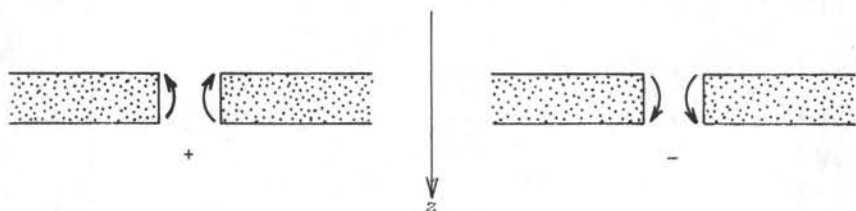


fig. 5.10.

Men merke op dat de tekenafspraken samenhangt met de keuze van de positieve z -richting. Het teken van een buigend moment is pas bepaald als is afgesproken in welke richting de positieve z -as wijst.

5.3. dwarskracht in een ligger

In de paragrafen 5.1 en 5.2 is gezien hoe een normaalkracht en een buigend moment door een ligger kunnen worden overgebracht door middel van normaalspanningen σ_{xx} . Meestal moet in een normaaldoorsnede van een ligger ook nog een kracht in het vlak van die doorsnede worden overgebracht. Dat geschiedt door *schuifspanningen*. In deze paragraaf wordt die krachtsoverdracht beschouwd.

Stel dat er een ligger gegeven is die in evenwicht is onder invloed van de in fig. 5.11 getekende krachten en momenten. Beschouwt men nu alleen een gedeelte ter lengte x_0 van het linkeruiteinde, zie fig. 5.12, dan zal het rechterdeel

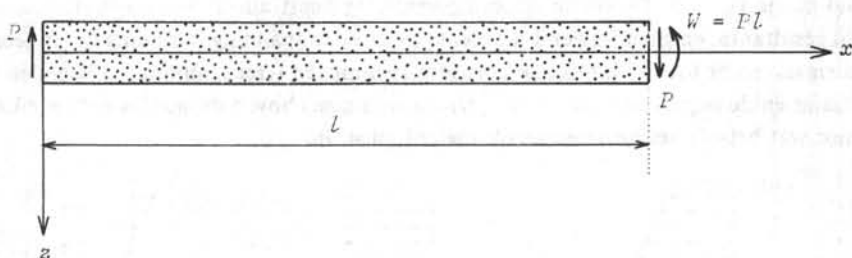


fig. 5.11.

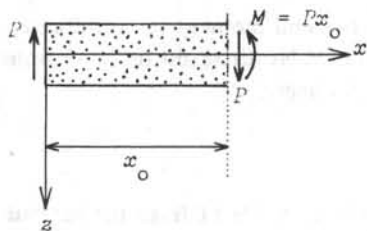


fig. 5.12.

van de ligger op het linkerdeel ter wille van het krachtenevenwicht in verticale richting een verticaal naar beneden gerichte kracht ter grootte P moeten uitoefenen. Om ook het momentenevenwicht te verzekeren moet er door het rechterdeel bovendien een buigend moment $M = Px_0$ uitgeoefend worden.

De kracht P wordt in de doorsnede geleverd door bijdragen van elk elementair oppervlakje ΔA , zie fig. 5.13. Beschouwt men de component in z -richting van de kracht die op het elementaire oppervlakje ΔA van de snede wordt

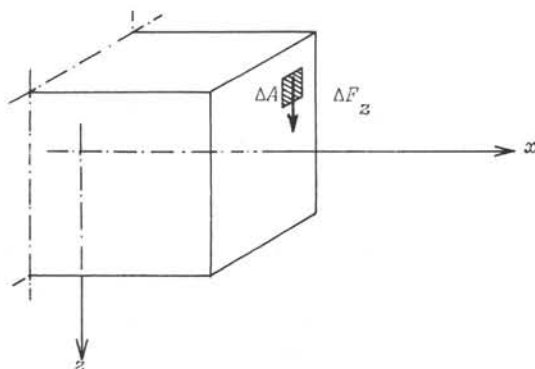


fig. 5.13.

uitgeoefend door het materiaal rechts van die snede, en noemt men die component ΔF_z , dan wordt de schuifspanning σ_{xz} gedefinieerd als

$$\sigma_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A n_x}$$

waarin n_x de x -component van de eenheidsnormaalvector op het beschouwde oppervlak is, met lengte 1, en naar buiten gericht. De aldus gedefinieerde schuifspanning is positief als F_z en n_x beide positief of negatief zijn. De schuifspanning is negatief als F_z en n_x verschillend van teken zijn. Net als bij de eerder gedefinieerde normaalspanning is ook de schuifspanning een maat zowel voor de krachtwerking van de materie rechts van het beschouwde oppervlak op de materie links ervan als voor de krachtwerking van de materie links van dat vlak op de materie rechts ervan. De integraal van de schuifspanningen over het oppervlak van de doorsnede noemt men de dwarskracht in de snede, of liever gezegd de dwarskrachtinteractie.

$$Q_z = \int_A \sigma_{xz} dA.$$

De index z laat men in de praktijk meestal weg, althans bij beschouwingen van vlakke constructies. Blijkbaar is in het geval van de ligger getekend in fig. 5.11 de grootte van de dwarskrachtinteractie gelijk aan P ,

$$Q = P.$$

De tekenafspraken voor de schuifspanning σ_{xz} is analoog aan die voor de normaalspanning σ_{xx} . Als op een vlakje met de uitwendige normaal in de positieve x -richting een kracht werkt met een positieve z -component spreekt men van een positieve schuifspanning σ_{xz} . Ook als op een vlakje met normaal in de negatieve x -richting een kracht werkt met een negatieve z -component spreekt

men van een positieve schuifspanning σ_{xz} . In het geval van een kracht met een positieve z -component op een vlakje met normaal in negatieve x -richting, of een kracht met een negatieve z -component op een vlakje met normaal in positieve x -richting, is de schuifspanning σ_{xz} negatief.

De tekenafspraken voor dwarskrachten volgt direct uit de definitie van de dwarskracht als resultante van schuifkrachtjes, en de tekenafspraken voor schuifspanningen. Het komt erop neer dat de dwarskracht positief is in het geval in de linkerschets van fig. 5.14, en negatief in het geval in de rechterschets van fig. 5.14. Men merke op dat deze tekenafspraken samenhangt met de keuze van de positieve x - en z -richtingen.

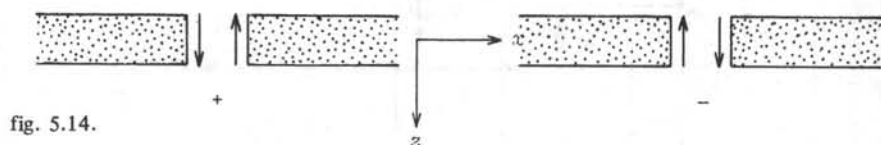


fig. 5.14.

De tekenafspraken voor dwarskrachten is wellicht iets eenvoudiger te onthouden door aan het beschouwde vlak een teken toe te kennen. Men noemt een vlak dan positief als de naar buiten gerichte normaalvector (de normaalvector die van het materiaal af wijst) in de positieve as -richting is, en men noemt dan een vlak negatief als deze normaal vector in de negatieve as -richting wijst. Een dwarskracht is dan positief als de kracht in positieve as -richting werkt op een positief vlak, of in negatieve as -richting op een negatief vlak. Een dwarskracht is negatief als de kracht in negatieve as -richting werkt op een positief vlak, of in positieve as -richting op een negatief vlak. De tekenafspraken voor normaalkrachten kan men op dezelfde wijze onthouden.

Het karakter van een dwarskracht is verschillend van dat van een gewone (uitwendige) kracht. In feite is het karakter van een dwarskracht beter vergelijkbaar met dat van een schuifspanning, hetgeen ook direct volgt uit de definitie van de dwarskracht in een snede. Het verschillende karakter komt weer goed tot uitdrukking in de tekens van de grootheden, zie fig. 5.11 en 5.12. De kracht op het linkeruiteinde werkt in negatieve z -richting, en men zou daar dus schrijven $F_z = -P$. Op het rechteruiteinde is de uitwendige kracht positief, en daar zou men dus schrijven $F_z = P$. In de gehele ligger, dus ook aan de beide uiteinden, is de dwarskracht echter positief, $Q = P$. Men zou daarom beter kunnen spreken van een interactie: in dit geval een dwarskrachtinteractie. In de civieltechnische praktijk is dat echter (nog) niet gebruikelijk.

5.4. normaalkrachtenlijn, dwarskrachtenlijn en momentenlijn

De normaalkrachten, dwarskrachten en buigende momenten in een staaf of een ligger zijn in het algemeen niet constant van grootte. Het verloop van deze interacties kan men goed weergeven in de vorm van een normaalkrachtenlijn, dwarskrachtenlijn en momentenlijn, die het verloop van de betreffende grootte langs de staafas grafisch weergeven. In deze paragraaf worden hiervan enige voorbeelden gegeven.

Voorbeeld 1.

Het eerste voorbeeld heeft betrekking op een ligger opgelegd op een scharnier- en een roloplegging, belast met een puntlast ter grootte P in het midden, zie fig. 5.15.

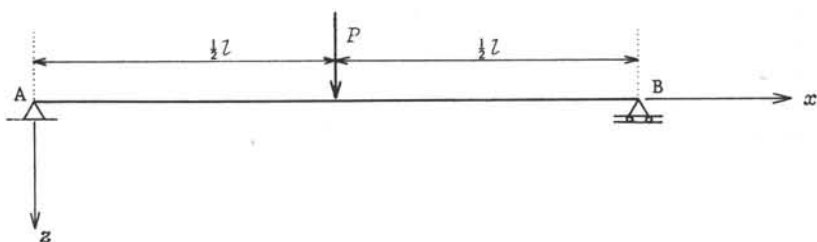


fig. 5.15.

De oplegreacties zijn in dit geval

$$A_x = 0$$

$$A_z = -\frac{1}{2}P$$

$$B_z = -\frac{1}{2}P.$$

Normaalkrachten treden in dit geval in de ligger niet op. Het verloop van de dwarskracht kan men bepalen door een beschouwing van het verticale evenwicht van het gedeelte van de ligger links van de doorsnede waar de grootte van de dwarskracht gezocht wordt, zoals geschetst in fig. 5.16. Zolang de beschouwde snede links van de puntlast valt is de dwarskracht $Q = \frac{1}{2}P$. Als de snede rechts van de puntlast valt is de dwarskracht $Q = -\frac{1}{2}P$. Vanzelfsprekend zou men dezelfde resultaten verkregen hebben uit een beschouwing van het evenwicht van het gedeelte van de ligger rechts van de beschouwde doorsneden, zie fig. 5.17.

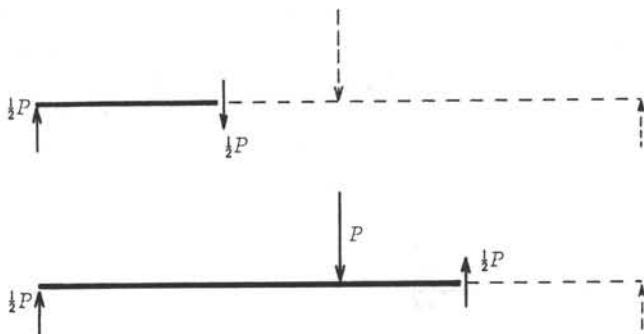


fig. 5.16.

fig. 5.16

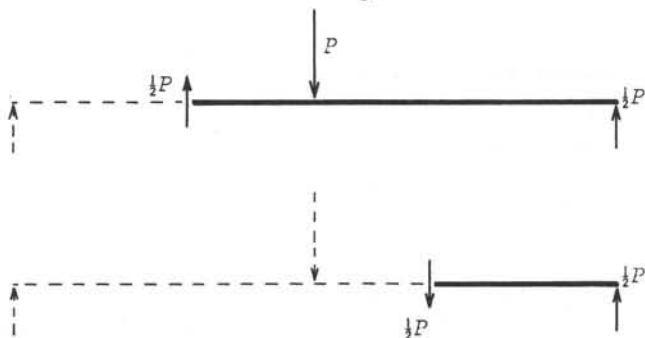


fig. 5.17.

De dwarskrachtenlijn is voor dit geval getekend in fig. 5.18. Links van de puntlast is de dwarskracht positief, rechts is de dwarskracht negatief. In de figuur is de richting waarin de dwarskracht werkt ook symbolisch weergegeven. De symbolen geven aan hoe de staafas zou vervormen als het materiaal plaatselijk zou afschuiven door de aanwezige dwarskracht. Deze symbolen zijn essentieel voor de informatie-overdracht, waartoe de dwarskrachtenlijn in wezen getekend wordt.

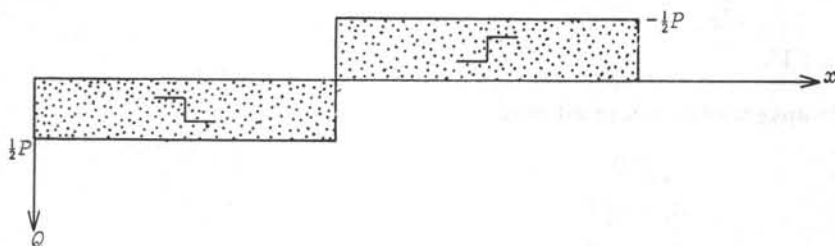


fig. 5.18.

Men merke op dat de symbolische weergave van de richting van de dwarskracht *niet* afhankelijk is van de keuze van het assenstelsel. Zoals in de vorige paragraaf gesteld is, hangt het teken van de dwarskracht *wel* af van de keuze van het assenstelsel. Als men in het voorbeeld de positieve z-as naar boven kiest in plaats van naar beneden, veranderen alle dwarskrachten van teken. De richting van de dwarskracht verandert in fysische zin natuurlijk niet, en de symbolische weergave dus ook niet.

Het verloop van de buigende momenten in de ligger volgt uit een beschouwing van het momentenevenwicht van het deel van de ligger links of rechts van de doorsnede waar de grootte van het buigend moment gezocht wordt, zie fig. 5.19. Ook in dit geval kan men de grootte van het buigend moment ook bepalen door een beschouwing van het momentenevenwicht van het deel van de ligger

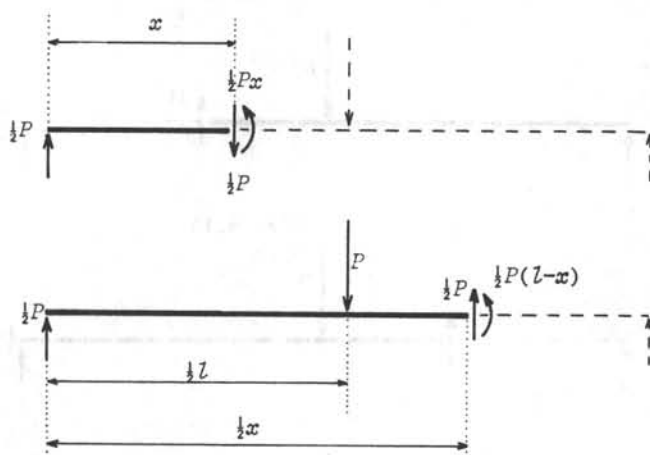


fig. 5.19.

rechts van de beschouwde doorsnede. De momentenlijn is geschetst in fig. 5.20. Het maximale moment treedt op in het midden, en is $\frac{1}{4}Pl$ groot. De zin waarin het moment werkt is weergegeven door een symbool dat aangeeft in welke rich-

ting de ligger wil doorbuigen onder invloed van het optredende buigend moment. Ook hier geldt dat een andere keuze van de positieve z -richting door de gemaakte tekenafspraken wel invloed heeft op het teken van het buigend moment (dat is een kwestie van wiskundige weergave van een mechanica-grootheid), maar geen

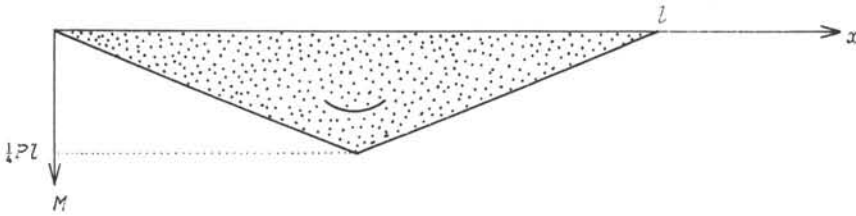


fig. 5.20.

invloed heeft op de symbolische weergave van de zin van het buigend moment.

Voorbeeld 2.

Als tweede voorbeeld wordt beschouwd het geval van een verticale staaf, aan de onderzijde ingeklemd, en belast zoals aangegeven in fig. 5.21. De normaal-

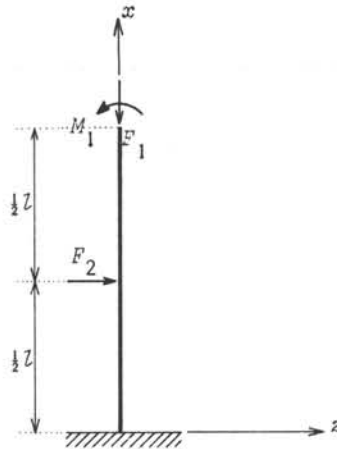


fig. 5.21.

krachtenlijn, de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn kunnen nu direct bepaald worden met behulp van een evenwichtsbeschouwing van het deel van de ligger boven een zekere doorsnede. Deze lijnen zijn geschetst in fig. 5.22. Om aan te geven dat de normaalkracht een drukkracht is, is gebruik gemaakt van een symbool met twee naar elkaar toe gerichte pijlen. Trek kan men aangeven met twee van elkaar af gerichte pijlen.

Voorbeeld 3.

Als derde en laatste voorbeeld wordt beschouwd het geval van een ligger, aan de uiteinden opgelegd op een scharnier- en een roloplegging, en belast door een gelijkmatig verdeelde belasting f_0 (de eenheid hiervan is N/m). Het eigen gewicht van een prismatische ligger is zo'n gelijkmatig verdeelde belasting. Als de dichtheid van het materiaal ρ is (gemeten in kg/m^3), en het oppervlak van de doorsnede is A_0 , dan is $f_0 = \rho g A_0$. De ligger is schematisch weergegeven in fig.

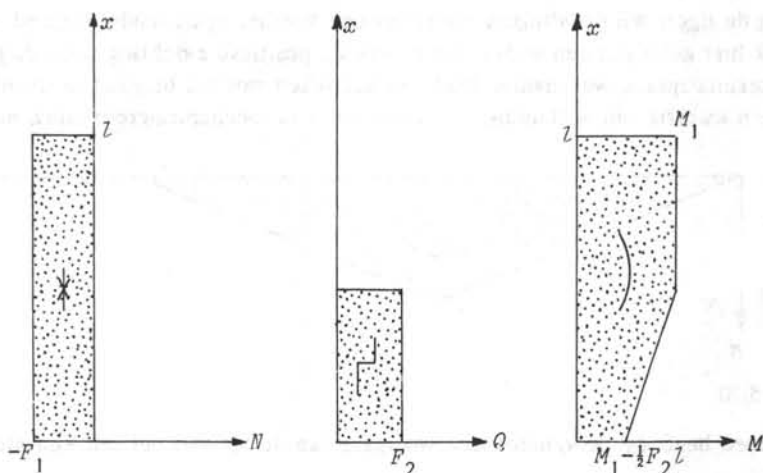


fig. 5.22.

5.23. De totale belasting is $f_0 l$, als l de lengte van de ligger is, en de werklijn van deze resultante gaat door het midden van de ligger. De oplegreacties zijn

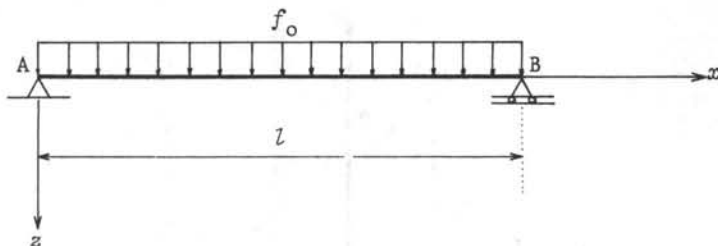


fig. 5.23.

derhalve

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_z &= -\frac{1}{2} f_0 l \\ B_z &= -\frac{1}{2} f_0 l \end{aligned}$$

De bepaling van de dwarskracht Q en het moment M op een afstand x van het linkersteunpunt kan geschieden met behulp van een evenwichtsbeschouwing van het deel links of rechts van de betreffende doorsnede. In fig. 5.24 is het deel links van de doorsnede getekend, met alle krachten en momenten die erop werken. Uit het verticale evenwicht ($\sum F_z = 0$) volgt dat

$$Q = \frac{1}{2} f_0 l - f_0 x = f_0 \left(\frac{1}{2} l - x \right).$$

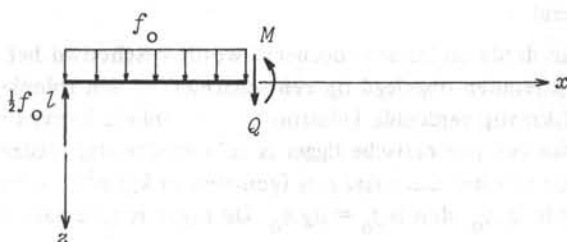


fig. 5.24.

Uit het momentenevenwicht ($\sum T_y = 0$), genomen ten opzichte van een punt op een afstand x van de linkeroplegging, volgt dat

$$M = \frac{1}{2}f_0 l x - \frac{1}{2}f_0 x^2 = \frac{1}{2}f_0 x(l - x).$$

Hierbij is de gelijkmatig verdeelde belasting vervangen door zijn resultante, een kracht $f_0 x$, op een afstand $\frac{1}{2}x$ van de snede.

De dwarskrachtenlijn en de momentenlijn voor dit geval zijn geschetst in fig. 5.25. Het maximale moment treedt op in het midden, en de grootte ervan is $\frac{1}{8}f_0 l^2$.

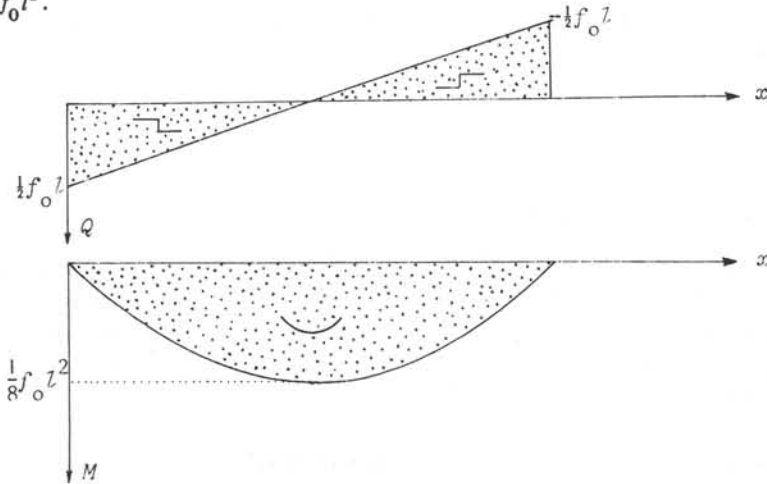


fig. 5.25.

In het voorafgaande zijn de oplegreacties steeds aangegeven met behulp van hun componenten in de coördinaatrichtingen, A_x , A_z , B_x , B_z , enzovoorts. De richting waarin een oplegreactie werkt wordt op die manier bepaald door het teken van een component, en door de keuze van de positieve coördinaatrichting. In de praktijk doet men het veelal iets anders, zie fig. 5.26, waarin het geval van de ligger met een puntlast in het midden nog eens is weergegeven. De mogelijke oplegreacties zijn in deze figuur aangegeven met een gerichte pijl, en

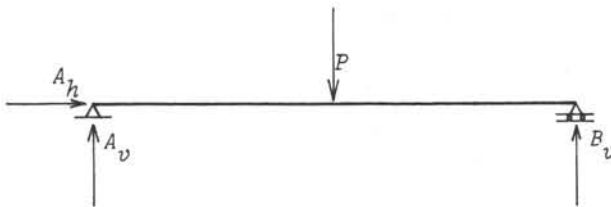


fig. 5.26.

een bijgeschreven grootheid (in dit geval A_h , A_v en B_v). Een beschouwing van het uitwendig evenwicht van de ligger leidt nu tot de volgende waarden voor de oplegreacties

$$\begin{aligned} A_h &= 0 \\ A_v &= \frac{1}{2}P \\ B_v &= \frac{1}{2}P. \end{aligned}$$

Voordelen van deze werkwijze zijn dat de keuze van het assenstelsel er niet meer toe doet, en dat men bij de keuze van de pijlrichting de mogelijkheid heeft rekening te houden met de eigen verwachting ten aanzien van de richting van een oplegreactie. Blijkt dan achteraf dat de oplegreactie negatief is, dan is die verwachting blijkbaar niet goed geweest, hetgeen dan weer de mogelijkheid biedt dat men zich af kan vragen of het antwoord wel redelijk is.

Uiteraard leiden de beide werkwijzen fysisch tot dezelfde resultaten. Men zou kunnen stellen dat de eerste manier formeel en wiskundig fraaier is, en de tweede meer gericht is op de technische toepassing. In de praktijk werkt men veelal nog op de tweede manier. De evenwichtsvergelijkingen geeft men dan ook meestal niet aan met

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_z = 0, \Sigma T_y = 0,$$

maar met

$$\Sigma H = 0, \Sigma V = 0, \Sigma M = 0.$$

Het is te verwachten dat in de toekomst, vooral door de opkomst van numerieke berekeningen met behulp van computers (die immers uiterst formeel werken, met algebraïsche grootheden, en die geen plaatjes kunnen lezen), de formele manier, met componenten van oplegreacties in de coördinaatrichtingen, algemeen gebruikelijk zal worden.

5.5. verband tussen buigend moment, dwarskracht en belasting

In deze paragraaf zal het verband tussen het buigend moment, de dwarskracht en de verdeelde belasting op een ligger worden afgeleid.

Beschouwd wordt een klein gedeelte uit een ligger, tussen twee steunpunten, dat uitsluitend belast wordt door een verdeelde belasting, ter grootte f , loodrecht op de staafas, zie fig. 5.27. Als de lengte Δx van het beschouwde liggerdeel

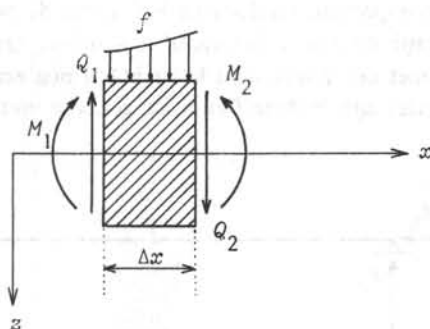


fig. 5.27.

klein genoeg is kan men de belasting f als gelijkmatig verdeeld beschouwen. Het verticaal evenwicht vereist dan

$$Q_2 - Q_1 + f\Delta x = 0$$

en het momentenevenwicht vereist

$$M_2 - M_1 - Q_1\Delta x + \frac{1}{2}f(\Delta x)^2 = 0.$$

Hieruit volgt

$$\frac{Q_2 - Q_1}{\Delta x} = -f$$

$$\frac{M_2 - M_1}{\Delta x} = Q_1 - \frac{1}{2}f(\Delta x).$$

De grootheid $\frac{(Q_2 - Q_1)}{\Delta x}$ is de verandering van de dwarskracht Q in de x -richting, per eenheid van lengte in die richting. In de limiet $\Delta x \rightarrow 0$ noemt men dat de afgeleide van Q naar x , $\frac{dQ}{dx}$. Evenzo nadert $\frac{(M_2 - M_1)}{\Delta x}$ als $\Delta x \rightarrow 0$ tot $\frac{dM}{dx}$, de afgeleide van het buigend moment. Men krijgt nu dus, als Δx naar nul nadert,

$$\frac{dQ}{dx} = -f$$

$$\frac{dM}{dx} = Q.$$

Deze formules geven het verband tussen het buigend moment, de dwarskracht en de belasting, voor een liggerdeel dat uitsluitend belast wordt door een verdeelde belasting. Geconcentreerde lasten, in de vorm van puntlasten of geconcentreerde oplegreacties, zijn hier uitgesloten.

De juistheid van deze formules kan men bijvoorbeeld controleren aan de hand van het laatste voorbeeld van paragraaf 5.4. In dat geval is

$$f = f_0$$

$$Q = f_0(\frac{1}{2}l - x)$$

$$M = \frac{1}{2}f_0x(l - x).$$

Inderdaad blijkt voldaan te zijn aan de hierboven gegeven differentiaalbetrekkingen.

Men kan uit de twee betrekkingen de dwarskracht nog elimineren door de tweede vergelijking naar x te differentiëren. Men krijgt dan

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -f.$$

Deze belangrijke vergelijking geeft het verband tussen het buigend moment en de verdeelde belasting.

Van de betrekkingen afgeleid in deze paragraaf wordt in de volgende paragraaf, en op vele andere plaatsen in de Toegepaste Mechanica gebruik gemaakt.

5.6. wiskundige beschrijving van het buigingsprobleem

In paragraaf 5.4 zijn reeds het verloop van de dwarskracht en het buigend moment voor een aan zijn uiteinden vrij opgelegde ligger, met een gelijkmatig verdeelde belasting, bepaald. Daarbij werd gebruik gemaakt van een evenwichtsbeschouwing voor een als het ware losgesneden deel van de ligger. In deze paragraaf wordt hetzelfde geval nog eens bekeken, maar nu zal het meer van de wiskundige kant benaderd worden.

Voor een willekeurig klein deel van de ligger is op grond van een elemen-

taire evenwichtsbeschouwing het volgende verband tussen het buigend moment en de belasting afgeleid.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -f.$$

In het algemeen kan men de belasting f als gegeven beschouwen. De vergelijking hierboven kan men dan beschouwen als een differentiaalvergelijking voor het buigend moment. Het is een zogenaamde differentiaalvergelijking, met constante coëfficiënten, van de tweede orde. De vergelijking is niet-homogeen (omdat het rechterlid niet gelijk aan nul is, maar een gegeven functie is).

Voorbeeld 1.

Omdat de differentiaalvergelijking van de tweede orde is, moet men er twee randvoorwaarden bij geven om het probleem wiskundig oplosbaar te maken. Die randvoorwaarden zijn afhankelijk van het beschouwde geval. In het geval van een ligger opgelegd op een scharnier- en een roloplegging, zie fig. 5.28, zijn die randvoorwaarden, omdat aan geen der beide uiteinden een moment werkt (de oplegreacties zijn krachten door de respectieve oplegpunten),

$$x = 0: M = 0$$

$$x = l: M = 0.$$

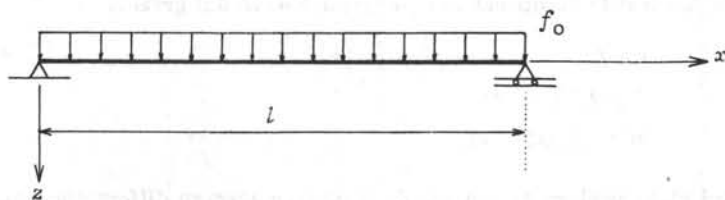


fig. 5.28.

De oplossing van het wiskundig probleem gedefinieerd door de differentiaalvergelijking $d^2 M/dx^2 = -f$ en de twee randvoorwaarden, kan, als de belasting constant is ($f = f_0$) als volgt geschieden.

De algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is

$$M = Ax + B,$$

waarin A en B nog onbepaalde constanten zijn. Een particuliere oplossing van de niet-homogene differentiaalvergelijking is

$$M = -\frac{1}{2}f_0 x^2.$$

De algemene oplossing van de niet-homogene differentiaalvergelijking is dus

$$M = -\frac{1}{2}f_0 x^2 + Ax + B.$$

De constanten A en B kan men uit de randvoorwaarden bepalen. Deze leiden tot de volgende vergelijkingen

$$B = 0$$

$$-\frac{1}{2}f_0 l^2 + Al + B = 0.$$

Hieruit volgt

$$A = \frac{1}{2}f_0 l$$

$$B = 0.$$

De uiteindelijke oplossing is dus

$$M = \frac{1}{2}f_0 x(l - x)$$

en dat klopt met het resultaat gevonden in paragraaf 5.4.

De dwarskracht kan men nu direct bepalen omdat deze de afgeleide is van het buigend moment, zoals in de vorige paragraaf is afgeleid,

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Men vindt in dit geval

$$Q = f_0(\frac{1}{2}l - x)$$

in overeenstemming met het resultaat gevonden in paragraaf 5.4.

Voorbeeld 2.

Als tweede voorbeeld zal nog het geval van de aan één zijde ingeklemde ligger met gelijkmatig verdeelde belasting beschouwd worden, zie fig. 5.29.

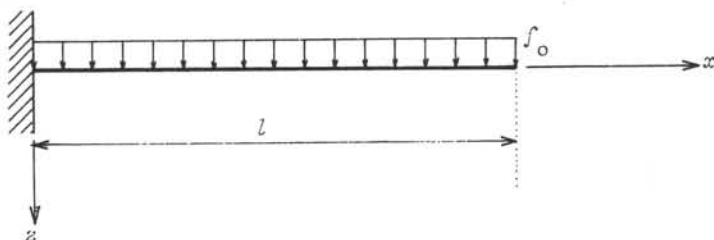


fig. 5.29.

De differentiaalvergelijking is ook nu

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -f_0$$

met als algemene oplossing

$$M = -\frac{1}{2}f_0 x^2 + Ax + B.$$

De randvoorwaarden zijn nu dat aan het rechteinde zowel het buigend moment als de dwarskracht nul zijn,

$$x = l: M = 0$$

$$x = l: Q = 0.$$

Omdat $Q = dM/dx$, kan men de laatste randvoorwaarde ook schrijven als

$$x = l: \frac{dM}{dx} = 0.$$

Deze randvoorwaarden leiden tot de volgende vergelijkingen

$$-\frac{1}{2}f_0 l^2 + Al + B = 0$$

$$-f_0 l + A = 0$$

en hieruit volgt

$$A = f_0 l$$

$$B = -\frac{1}{2}f_0 l^2$$

Omdat nu de constanten A en B bekend zijn, is nu de oplossing voor het buigend moment volledig bekend. Deze oplossing is

$$M = -\frac{1}{2}f_0(l-x)^2.$$

De dwarskracht vindt men weer door differentiatie

$$Q = f_0(l-x).$$

Het verloop van de dwarskracht en het buigend moment is grafisch weergegeven in fig. 5.30. De grootste dwarskracht (in absolute zin) treedt op bij inklemming,

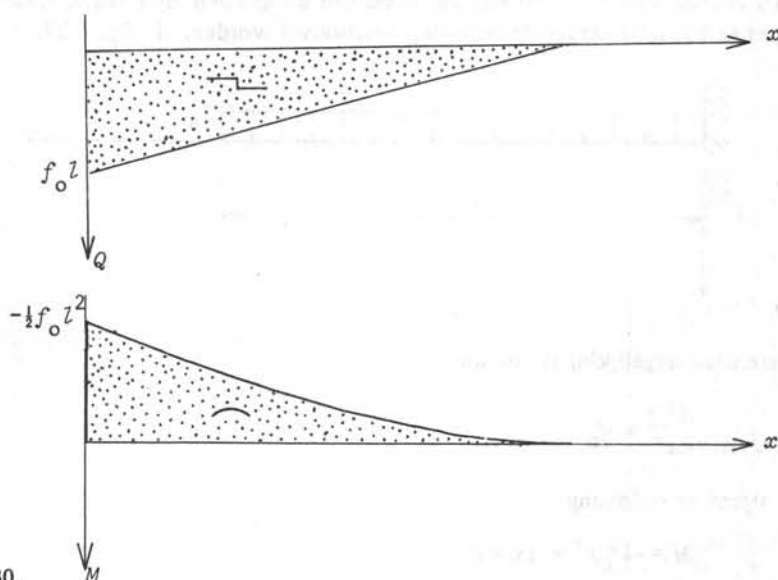


fig. 5.30.

en is $f_0 l$ groot. De grootste waarde van het buigend moment (eveneens in absolute zin) treedt ook op bij de inklemming, en is $-\frac{1}{2}f_0 l^2$ groot.

Hierboven zijn de uitdrukkingen voor het buigend moment en de dwarskracht bij een ingeklemde ligger met gelijkmatig verdeelde belasting afgeleid door

de differentiaalvergelijking op te lossen, met gebruikmaking van de randvoorwaarden. Men kan deze uitdrukkingen natuurlijk ook vinden op de wijze beschreven in paragraaf 5.4: eerst de oplegreacties bepalen met behulp van een evenwichtsbeschouwing van de ligger als geheel, en vervolgens de dwarskracht en het buigend moment in een willekeurige doorsnede bepalen met behulp van een evenwichtsbeschouwing van het deel links of rechts van de beschouwde snede.

Het in deze paragraaf afgeleide verband tussen buigend moment, dwarskracht en verdeelde belasting,

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -f,$$

verdiend nog wel enige nadere beschouwing. De volgende punten zijn van belang.

1. Het verband tussen dwarskracht en verdeelde belasting is afgeleid onder de aanname dat de belasting per lengte (f) eindig is. Dit verband geldt daarom alleen over delen van een ligger waar de verdeelde belasting f niet oneindig groot is: puntlasten zijn uitgesloten. In het geval van een ligger belast met een puntlast is het verband $dQ/dx = -f$ wel bruikbaar links en rechts van de puntlast, maar niet ter plaatse van de puntlast. Hoe men dan te werk kan gaan, wordt hieronder uitgelegd in voorbeeld 3.
2. Omdat de belasting (op het teken na) de afgeleide is van de dwarskracht, geldt dat de helling van de dwarskrachtenlijn wordt gegeven door de grootte van de verdeelde belasting. Dit betekent bijvoorbeeld dat de dwarskracht constant is als de belasting nul is, en dat de dwarskracht lineair toe- of afneemt als de belasting constant is.
3. Omdat de dwarskracht de afgeleide is van het buigend moment geldt dat de helling van de momentenlijn wordt gegeven door de dwarskracht. Het buigend moment is constant als de dwarskracht nul is, en het moment neemt lineair toe (of af) als de dwarskracht constant is. Het moment verloopt volgens een (tweedegraads) parabool als de dwarskracht lineair verloopt, dat wil zeggen als de belasting constant is. Deze eigenschap houdt in dat een echt maximum of minimum van het buigend moment alleen op kan treden daar waar de dwarskracht nul is. De voorwaarde voor een extreem is immers $dM/dx = 0$, en dat betekent $Q = 0$. Een dergelijk extreem treedt bijvoorbeeld op in het geval van de aan de uiteinden vrij opgelegde ligger, met gelijkmatig verdeelde belasting, zie fig. 5.23 en 5.25. Men zij erop bedacht dat de grootste waarde van het buigend moment in een ligger niet altijd een echt extreem hoeft te zijn. Zo heeft het buigend moment in het geval van de aan één zijde ingeklemde ligger met gelijkmatig verdeelde belasting een rand-extreem, zie fig. 5.30.

Voorbeeld 3.

Het geval van de aan zijn uiteinden vrij opgelegde ligger belast door een puntlast is al beschouwd in paragraaf 4 voor het geval dat de puntlast in het midden staat, zie fig. 5.15. Hier zal het geval van een puntlast op een willekeurige plaats beschouwd worden, zie fig. 5.31. De uitdrukkingen voor de dwarskracht en het buigend moment zullen formeel worden afgeleid uit de differentiaalvergelijking.

Zowel links als rechts van de puntlast is de ligger onbelast. Er geldt dus

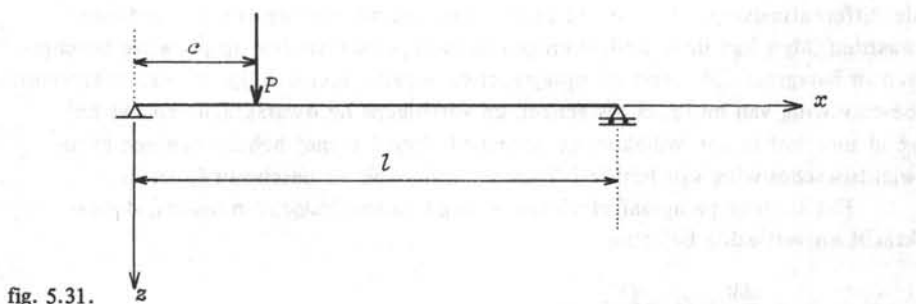


fig. 5.31.

$$0 < x < c: \frac{d^2 M}{dx^2} = 0.$$

$$c < x < l: \frac{d^2 M}{dx^2} = 0.$$

Deze twee differentiaalvergelijkingen zijn identiek. Ze hebben dezelfde algemene oplossing, maar de constanten behoeven niet gelijk te zijn. De algemene oplossingen kan men als volgt schrijven,

$$0 < x < c: M = Ax + B$$

$$c < x < l: M = Cx + D.$$

De vier constanten A , B , C en D moeten bepaald worden uit de *randvoorwaarden* ter plaatse $x = 0$ en $x = l$, en uit *aansluitvoorwaarden* ter plaatse $x = c$.

De randvoorwaarden zijn:

$$x = 0: M = 0$$

$$x = l: M = 0.$$

De aansluitvoorwaarden ter plaatse $x = c$ volgen uit een beschouwing van het evenwicht van een klein stukje balk daar ter plaatse, zie fig. 5.32.

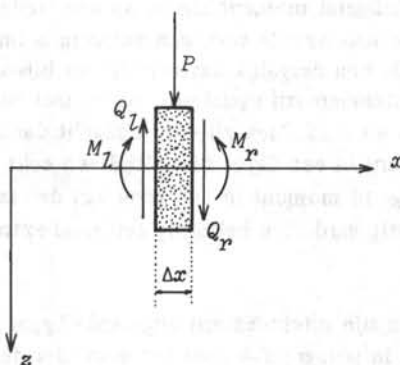


fig. 5.32.

Geeft men de dwarskracht juist links van het punt $x = c$ aan met Q_l , en de dwarskracht juist rechts van dat punt met Q_r , dan volgt er uit het evenwicht in verticale richting,

$$Q_l - Q_r = P.$$

Uit het momentenevenwicht volgt, als de afstand Δx oneindig klein wordt,

$$M_l = M_r.$$

Omdat zowel links als rechts van de puntlast het verband $dM/dx = Q$ zonder meer gebruikt kan worden, kan men de twee fysische aansluitvoorwaarden wiskundig als volgt formuleren,

$$\lim_{x \uparrow c} \frac{dM}{dx} - \lim_{x \downarrow c} \frac{dM}{dx} = P$$

$$\lim_{x \uparrow c} M = \lim_{x \downarrow c} M.$$

Er zijn nu vier condities beschikbaar, en de constanten A , B , C en D kunnen nu bepaald worden. Uiteraard moet men daarbij als x kleiner is dan c de eerste uitdrukking voor het buigend moment ($M = Ax + B$) gebruiken, en als x groter is dan c de tweede uitdrukking ($M = Cx + D$). Men vindt nu:

$$B = 0$$

$$Cl + D = 0$$

$$A - C = P$$

$$Ac + B = Cc + D.$$

Hieruit volgt voor de constanten

$$A = P(1 - \frac{c}{l})$$

$$B = 0$$

$$C = -P\frac{c}{l}$$

$$D = Pc.$$

De uitdrukkingen voor het buigend moment en de dwarskracht worden daarmee als volgt

$$0 < x < c: M = Px(1 - \frac{c}{l})$$

$$0 < x < c: Q = P(1 - \frac{c}{l})$$

$$c < x < l: M = Pc(1 - \frac{x}{l})$$

$$c < x < l: Q = -P\frac{c}{l}.$$

De aldus bepaalde dwarskrachtenlijn en momentenlijn zijn getekend in fig. 5.33. Voor het tekenen van de figuur is gesteld dat $c = \frac{1}{4}l$. Het maximale moment treedt op ter plaatse van de puntlast (de dwarskracht gaat daar door nul), en heeft de grootte $Pc(l - c)/l$.

Het verloop van de dwarskracht en het buigend moment had men natuurlijk ook (en wellicht eenvoudiger en sneller) kunnen bepalen op de manier van paragraaf 5.4: eerst de oplegreacties bepalen uit het evenwicht van de constructie

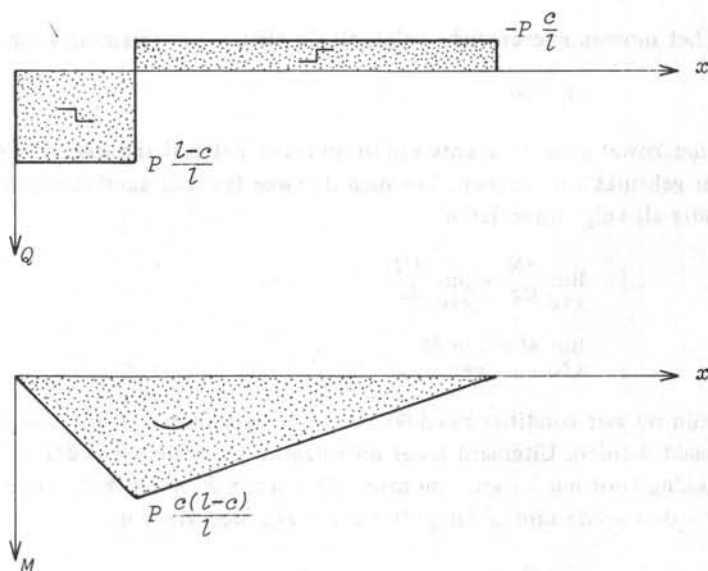


fig. 5.33.

als geheel, en dan de dwarskracht en het buigend moment bepalen uit een beschouwing van een deel van de ligger links of rechts van een aangebrachte snede. Men merke op dat bij de manier van deze paragraaf, door de differentiaalvergelijking $d^2M/dx^2 = -f$ op te lossen, de oplegreacties geen rol van betekenis spelen. Wil men de oplegreacties kennen (en voor de constructeur is dat wel essentieel, hij moet bijvoorbeeld de opleggingen sterk genoeg maken), dan volgen deze automatisch uit de uiteindelijke oplossingen. In het hier beschouwde geval volgen ze uit de randwaarden van de dwarskracht,

$$A_z = -P \frac{l-c}{l}$$

$$B_z = -P \frac{c}{l}$$

Het minteken duidt er weer op dat de oplegreacties in negatieve z-richting (dat is verticaal omhoog) op de ligger werken.

Voorbeeld 4.

Als vierde en laatste voorbeeld van een formele bepaling van de dwarskracht en het buigend moment in een ligger, uitgaande van de differentiaalvergelijking, wordt beschouwd het geval van een ligger met een lineair variërende belasting. Men kan hierbij denken aan een waterkerende schuif, aan de bovenzijde scharnierend opgehangen en aan de onderzijde ondersteund door een oplegging die men als een rol kan beschouwen, zie fig. 5.34. Als de dichtheid van het water aangegeven wordt met ρ , en het assenstelsel wordt gekozen zoals in de figuur is aangegeven, dan wordt in dit geval de belasting over de gehele ligger (beschouwd wordt een strook van 1 m breedte in de richting loodrecht op het papier),

$$f = \rho g x.$$

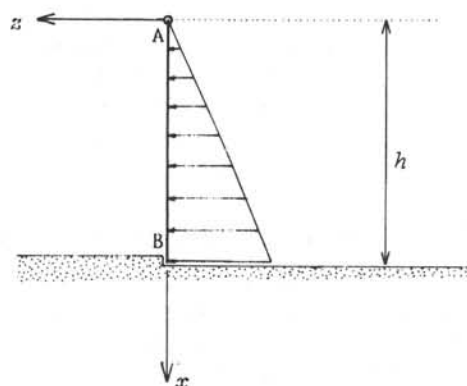


fig. 5.34.

Integratie van de vergelijking $dQ/dx = -f$ geeft nu

$$Q = -\frac{1}{2}\rho g x^2 + A$$

en omdat $dM/dx = Q$ vindt men, door nogmaals te integreren,

$$M = -\frac{1}{6}\rho g x^3 + A x + B.$$

De constanten A en B volgen uit de voorwaarden dat aan onder- en bovenzijde het moment nul is. Men vindt dan

$$A = \frac{1}{6}\rho g h^2$$

$$B = 0.$$

De uitdrukkingen voor de dwarskracht en het buigend moment worden daarmee

$$Q = \frac{1}{6}\rho g (h^2 - 3x^2)$$

$$M = \frac{1}{6}\rho g x (h^2 - x^2).$$

De dwarskrachtenlijn en de momentenlijn zijn grafisch weergegeven in fig. 5.35.

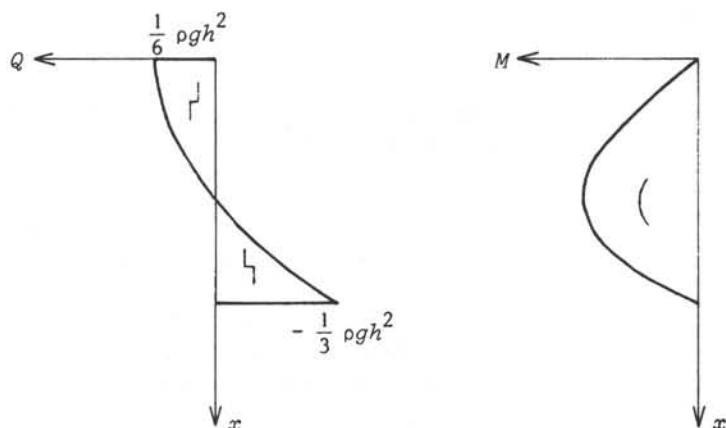


fig. 5.35.

Ook in dit geval had men de dwarskrachtenlijn en momentenlijn natuurlijk ook uit evenwichtsbeschouwingen van de ligger als geheel en een deel onder of boven een zekere denkbeeldige snede kunnen bepalen. Daarbij is het dan wel nodig dat men de resulterende kracht van de driehoekvormige belasting kan bepalen. Daartoe moet men het zwaartepunt van een vlak (in dit geval een driehoek) kunnen bepalen. Men zie daarvoor het college analyse I.

5.7. momentenlijn met poolfiguur en stangenveelhoek

Een interessante toepassing van de reeds eerder behandelde poolfiguur en stangenveelhoek (zie paragraaf 3.4 en paragraaf 4.3) is dat men met behulp daarvan in veel gevallen de momentenlijn voor een ligger kan construeren. Deze constructie wordt in deze paragraaf behandeld.

Beschouwd wordt het geval van een aan de uiteinden vrij opgelegde ligger, belast door een enkele verticale puntlast, zie fig. 5.36. De oplegreacties zijn geconstrueerd met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek. De grootten

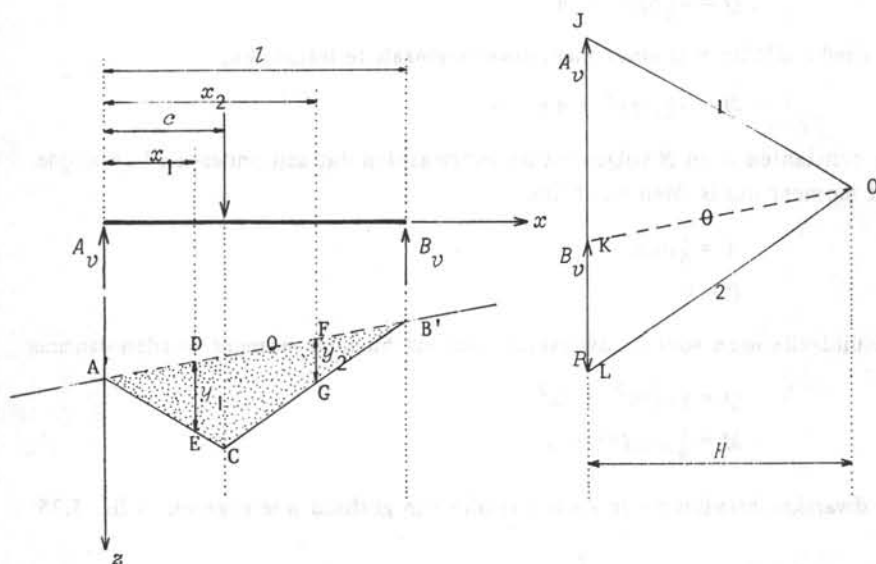


fig. 5.36.

van deze oplegreacties zijn A_v en B_v , waarbij A_v en B_v positief zijn gerekend als ze verticaal omhoog gericht zijn. Dit laatste betekent dat

$$A_v = -A_z, \quad B_v = -B_z$$

als A_z en B_z de componenten in z -richting zijn van de krachten die de opleggingen op de ligger uitoefenen.

Het buigend moment M_2 op een afstand x_2 van het linkersteunpunt (waarbij x_2 zo groot is dat de doorsnede rechts van de puntlast ligt) heeft een grootte $B_v(l - x_2)$ zoals men direct inzielt aan de hand van een evenwichtsbeschouwing van het deel rechts van de doorsnede,

$$M_2 = B_v(l - x_2).$$

Als y_2 de afstand is in de stangenveelhoek tussen de sluitlijn O en stang 2, op een afstand x_2 van het linkersteunpunt, en als de afstand van de pool O tot de werklijn van de krachten in de poolfiguur aangegeven wordt met H (men noemt H wel de *poolafstand*), dan volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoek $FB'G$ in de stangenveelhoek en de driehoek KOL in de poolfiguur, dat

$$\frac{l - x_2}{y_2} = \frac{H}{B_v}.$$

Hieruit volgt

$$B_v(l - x_2) = Hy_2.$$

Het buigend moment kan dus ook geschreven worden als

$$M_2 = Hy_2.$$

Het buigend moment M_1 in een doorsnede links van de puntlast, op een afstand x_1 van het linkersteunpunt, heeft een grootte

$$M_1 = A_v x_1.$$

Omdat driehoek $A'DE$ in de stangenveelhoek gelijkvormig is met driehoek OKJ in de poolfiguur geldt er

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{H}{A_v}.$$

Hieruit volgt dat men het buigend moment M_1 ook als volgt kan schrijven:

$$M_1 = Hy_1.$$

Uit het bovenstaande volgt dat de driehoek $A'B'C$ in de stangenveelhoek, op een evenredigheidsfactor H na, de buigende momenten aangeeft. Het buigend moment M op een afstand x van het linkersteunpunt kan men bepalen door de afstand y in de stangenveelhoek op te meten (rekening houdend met de lengteschaal van deze figuur), en deze te vermenigvuldigen met de poolafstand H , die men kan opmeten in de poolfiguur (rekening houdend met de krachtschaal in die figuur: de dimensie van H is die van een kracht),

$$M = Hy.$$

Voor een ligger met meerdere puntlasten kan de momentenlijn eveneens geconstrueerd worden met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek, zie fig. 5.37. Het bewijs van de juistheid van de constructie is nu iets ingewikkelder. In een doorsnede tussen de twee puntlasten, op een afstand x_1 van het linkersteunpunt is het buigend moment

$$M_1 = A_v x_1 - P_1(x_1 - a),$$

waarin a de afstand van de puntlast P_1 tot het linkersteunpunt is. De driehoeken $A'EG$ en OLJ zijn gelijkvormig, evenals de driehoeken CFG en OKJ . Hieruit volgt

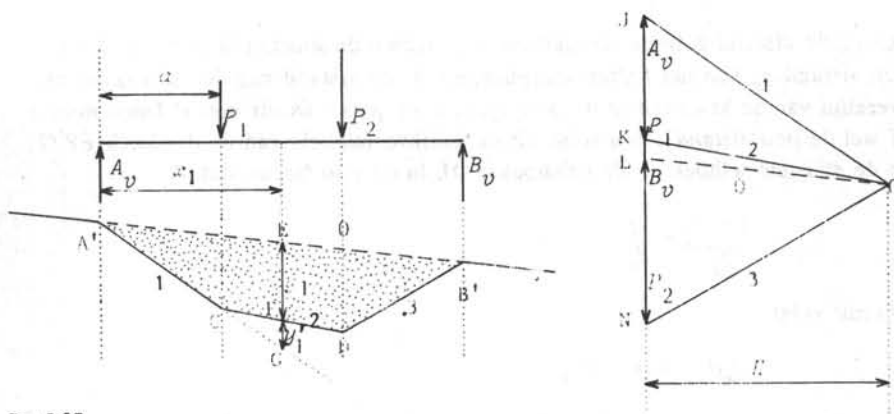


fig. 5.37.

$$\frac{x_1}{y_1 + y_1'} = \frac{H}{A_v} \quad \text{en} \quad \frac{x_1 - a}{y_1'} = \frac{H}{P_1}$$

en dus

$$A_v x_1 = H(y_1 + y_1') \quad \text{en} \quad P_1(x_1 - a) = H y_1'$$

Voor het buigend moment vindt men nu

$$M_1 = H y_1$$

hetgeen bewezen moest worden om aan te tonen dat de figuur tussen de stangen 1, 2 en 3 en de sluitlijn O de momentenlijn voorstelt.

Als laatste voorbeeld van het gebruik van poolfiguur en stangenveelhoek voor de bepaling van oplegreacties en momentenlijn wordt een ligger met een overstek beschouwd, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting, groot 10 kN/m, zie fig. 5.38. Alvorens in te gaan op de constructie met behulp van poolfiguur en stangenveelhoek, zullen eerst de oplegreacties en het verloop van de dwarskracht en het buigend moment bepaald worden met behulp van de analytische methode van paragraaf 5.4.

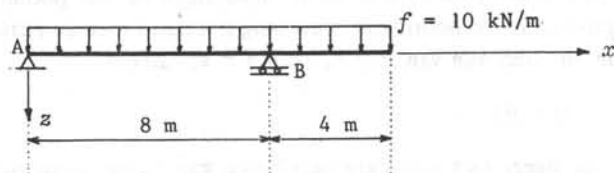


fig. 5.38.

Een analytische bepaling van de oplegreacties, zoals beschreven in paragraaf 4.1, levert voor een geval als dit geen enkel probleem op, evenmin als de bepaling van de momentenlijn, zoals beschreven in paragraaf 5.4. Voor de oplegreacties vindt men

$$A_x = 0 \text{ kN.}$$

$$A_z = -30 \text{ kN}$$

$$B_z = -90 \text{ kN.}$$

De dwarskrachtenlijn en de momentenlijn kan men, als de oplegreacties bekend zijn, zonder moeilijkheden tekenen, zie fig. 5.39. De dwarskrachtenlijn bestaat, omdat de belasting gelijkmatig is, uit trajecten waar de dwarskracht lineair afneemt. Ter plaatse van de oplegging in punt B vertoont de dwarskrachtenlijn een sprong ter grootte van 90 kN. De momentenlijn bestaat uit parabolische gedeelten, en vertoont ter plaatse van de oplegging in punt B een knik, die overeenkomt met de sprong in de dwarskracht. Het buigend moment heeft twee extremen, en wel ter plaatse van de nuldoorgangen van de dwarskrachtenlijn, dat is voor $x = 3$ m, en voor $x = 8$ m. De hierbij behorende extremen zijn

$$M_{\max} = 45 \text{ kNm}$$

$$M_{\min} = -80 \text{ kNm.}$$

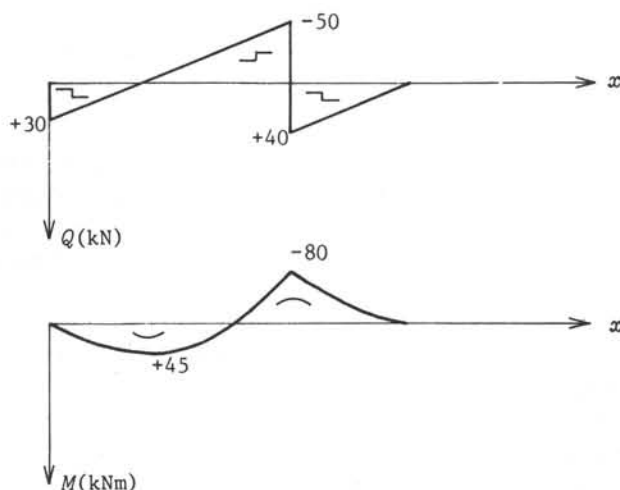


fig. 5.39.

Een alternatief voor de analytische bepaling van oplegreacties en momentenlijn is de grafische methode, met poolfiguur en stangenveelhoek. In dit geval zijn er twee complicaties: de verdeelde belasting en het overstek. In de grafische constructie zijn alleen geconcentreerde krachten te gebruiken, de verdeelde belasting wordt daarom vervangen door een equivalent stelsel van krachten, in dit geval bijvoorbeeld 6 krachten van elk 20 kN. Dan ontstaat de situatie van fig. 5.40. Voor de bepaling van de oplegreacties kan men het beste beginnen met de resultante van het stelsel belastingen te bepalen met poolfiguur en stangenveelhoek. Zoals bekend (zie bijvoorbeeld paragraaf 3.3) wordt de ligging van de resultante bepaald door het snijpunt van de uiterste stangen (1 en 7). De twee oplegreacties, in A en B, moeten tezamen een gelijke doch tegengestelde resultante, met dezelfde werklijn hebben. De sluitlijn O moet stang 1 snijden op de werklijn van de reactie in A, en stang 7 op de werklijn van de reactie in B. Daarmee is die sluitlijn bekend, en door in de poolfiguur een lijn evenwijdig aan die sluitlijn te trekken zijn ook de oplegreacties bekend. Door opmeten in de figuur vindt men dat de grootte van de reactie in B 88 kN is, en die van de reactie in A 32 kN. Beide reacties zijn verticaal omhoog gericht. De aldus gevonden waarden komen redelijk goed overeen met de analytisch gevonden resultaten ($A_v = 30$ kN, $B_v = 90$ kN).

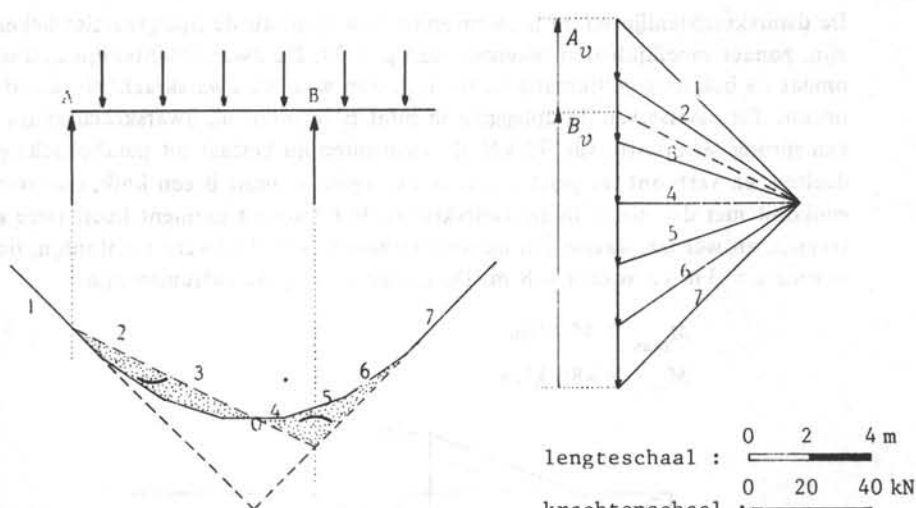


fig. 5.40.

De vorm van de momentenlijn is, nu de sluitlijn in de stangenveelhoek bekend is, ook bekend. Tussen A en B is de stang 0 de nullijn, rechts van B is stang 7 de nullijn. Het teken van de buigende momenten kan men zich het eenvoudigst voorstellen door het evenwicht van een klein deel te beschouwen, bijvoorbeeld het overstek.

De schaal van de momentenlijn wordt bepaald door de lengteschaal van de linkerfiguur, en de poolafstand in de poolfiguur. In het geval van fig. 5.40 is die poolafstand, op de krachteschaal, 60 kN. De schaal van de momentenlijn is nu de lengteschaal, vermenigvuldigd met 60 kN. Voor het grootste (negatieve) buigend moment, bij de oplegging B, vindt men nu -84 kNm , hetgeen redelijk goed overeenkomt met de analytisch gevonden waarde (zie fig. 5.32) van -80 kNm .

5.8. superpositie

Indien op een constructie meerdere belastingen werken kan men voor de bepaling van de oplegreacties en de krachtswerking in het inwendige van de constructie vaak met vrucht gebruik maken van het zogenaamde *beginsel van superpositie*. Volgens dit beginsel mag men de invloed van verschillende belastingen op de oplegreacties en inwendige krachtsgrootheden (normaalkracht, dwarskracht en buigend moment) bij elkaar optellen. Dat dit mag is een gevolg van de eigenschap dat optelling van vectoren (in dit geval krachten) associatief is, zie paragraaf 2.2.

In figuur 5.41 is het superpositiebeginsel bij wijze van voorbeeld toegepast ter bepaling van de momentenlijn voor een 8 m lange ligger die belast wordt door een puntlast ter grootte van 40 kN en een geconcentreerd moment ter grootte van 80 kNm. De momentenlijn is bepaald door eerst die ten gevolge van alleen de puntlast te bepalen, en daarna die ten gevolge van alleen het geconcentreerde moment te bepalen. Die twee momentenlijnen zijn in figuur 5.41 afzonderlijk getekend. De uiteindelijke momentenlijn, bij gelijktijdige belasting door de puntlast en het geconcentreerde moment, is weergegeven in de onderste te-

kening van figuur 5.41. Daarbij is voor het tekenen van de uiteindelijke momentenlijn een van de twee te superponeren delen gespiegeld ten opzichte van de ho-

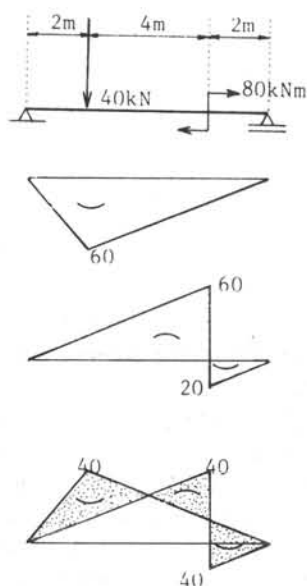


fig. 5.41.

izontale nullijn. Dat is grafisch handig, maar vanzelfsprekend kan men de optelling ook uitvoeren door ordinaten in een aantal punten op te meten of uit te rekenen, en dan bij elkaar op te tellen.

Formeel wiskundig kan men de toepasbaarheid van het superpositiebeginsel ook zien als een gevolg van het feit dat de verbanden tussen buigend moment en dwarskracht en tussen dwarskracht en belasting lineaire betrekkingen zijn.

Het superpositiebeginsel kan ook gebruikt worden om de effecten van soortgelijke belastingen van verschillende grootte met elkaar te vergelijken. Omdat het hele systeem lineair is, kan men stellen dat als een zekere belasting leidt tot een bepaalde waarde voor het buigend moment in een bepaald punt, dat dan een tweemaal zo grote, overigens gelijkvormige, belasting leidt tot een tweemaal zo groot buigend moment in het beschouwde punt.

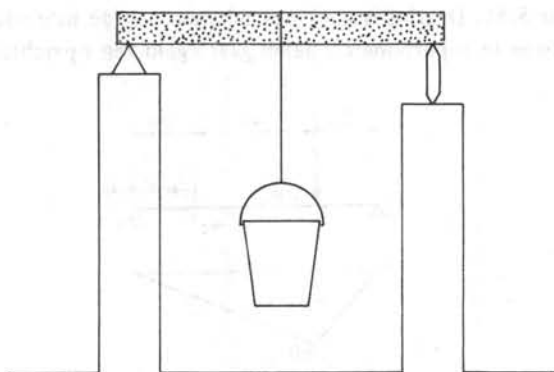
5.9. experimentele bepaling van de draagkracht van liggers

In deze paragraaf wordt, bij wijze van intermezzo, en ter illustratie van het belang van een grootheid als het buigend moment, de experimentele bepaling van de maximale draagkracht van vrij opgelegde liggers beschouwd.

Stel dat men de beschikking heeft over een groot aantal liggers, alle met dezelfde constante doorsnede. Het kan bijvoorbeeld een stel identieke houten of betonnen balken betreffen. Stel dat men deze balken wil gebruiken als draagconstructie van een zekere last. Ter bepaling van het maximale draagvermogen zou men de balken als volgt kunnen beproeven.

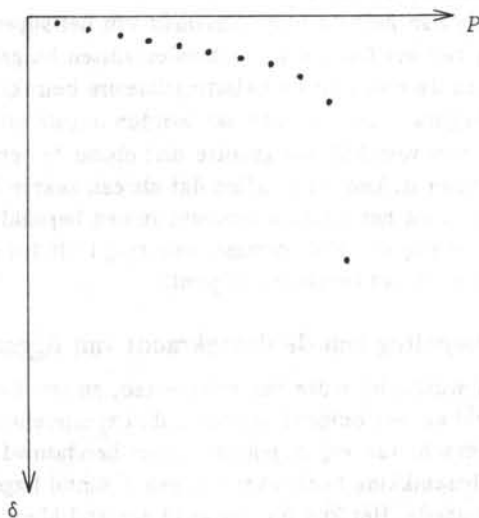
Om te beginnen beproeft men een enkele balk door hem op te leggen op een scharnieroplegging en een roloplegging, en hem te belasten met een geleidelijk toenemende kracht in het midden, zie fig. 5.42. De belasting kan bijvoorbeeld geschieden met behulp van loden kogeltjes die in een emmer, die aan de

fig. 5.42.



balk hangt, worden gegoten. Met een optisch, mechanisch of elektrisch meetinstrument kan men de bij elke belasting horende verticale verplaatsing δ van het midden van de balk meten. Het resultaat van een dergelijk experiment is weergegeven in fig. 5.43. De zakking blijkt aanvankelijk ongeveer recht evenredig te zijn met de aangebrachte belasting. Als de belasting wat groter wordt gaat de zakking wat sneller toenemen (een houten of betonnen balk begint dan te scheuren), en op een gegeven ogenblik breekt de balk (zie fig. 5.44). Herhaalt men het experiment met identieke balken, dan blijkt steeds bij ongeveer dezelfde kracht bezwijken op te treden. Men zou nu in de verleiding kunnen komen te stellen dat deze balken een maximale draagkracht hebben gelijk aan de gevonden bezwijklast. Dan veronderstelt men echter stilzwijgend dat er geen andere groot-

fig. 5.43.



heden van belang zijn voor die maximale draagkracht dan de doorsnede (en het materiaal) van de balken en de bezwijklast bij een zekere proef. In dit geval heeft men dan over het hoofd gezien dat de draagkracht wellicht ook afhankelijk is van de grootte van de overspanning.

Om de invloed van de grootte van de overspanning na te gaan moet men de proeven herhalen met een andere overspanning, bijvoorbeeld met tweemaal

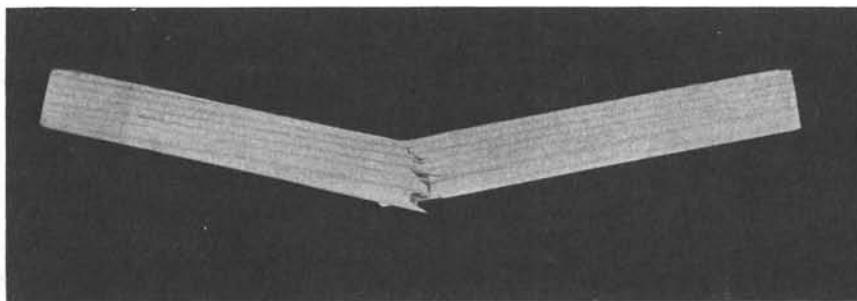


fig. 5.44.

zo grote overspanning, zie fig. 5.45.

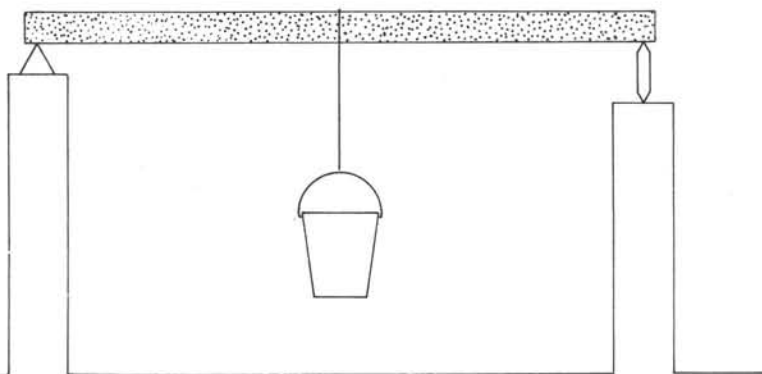


fig. 5.45.

Bij de experimenten met een tweemaal zo grote overspanning vindt men om te beginnen dat de zakking δ bij een zekere belasting aanzienlijk groter is (ongeveer een factor 8 groter). Bovendien blijkt echter dat de balk eerder bezwijkt, en wel bij een ongeveer half zo grote kracht als bij de eerste serie proeven, zie fig. 5.46. Dit leidt tot de hypothese dat de draagkracht bepaald wordt

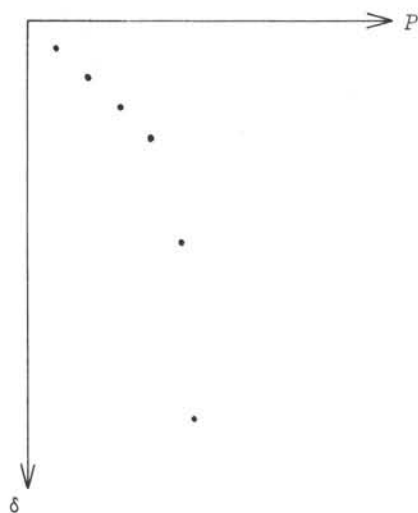


fig. 5.46.

door het product van de kracht P en de overspanning l . Inderdaad blijkt, als men nog meerdere proeven doet, met andere overspanningen, dit met goede benadering het geval te zijn, als de overspanning maar niet al te klein is, en ook niet al te groot.

In paragraaf 5.4 is gevonden dat voor het hier beschouwde geval van een vrij opgelegde ligger, met een puntlast in het midden, het maximale moment $\frac{1}{4}Pl$ groot is, en optreedt in het midden. De proeven geven derhalve de indruk dat de draagkracht bepaald wordt door het maximale buigend moment. Om die hypothese te toetsen, kan men nog weer andere proeven doen, bijvoorbeeld met een ander belastingsysteem, zoals een ingeklemde balk, zie fig. 5.47. Het maximale moment is nu Pl groot, en treedt op bij de inklemming. Als het buigend moment de draagkracht bepaalt zou in dit geval een vier maal zo kleine kracht

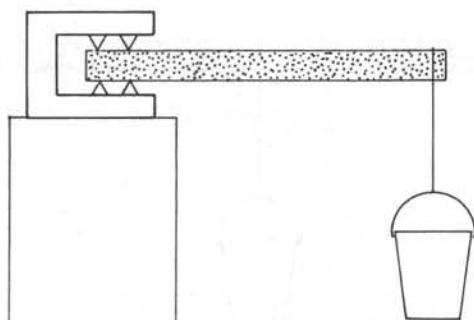


fig. 5.47.

gedragen moeten kunnen worden als bij een vrij opgelegde ligger met gelijke lengte, en belast in het midden. Inderdaad vindt men ongeveer een factor vier als verhouding der bezwijklasten. Dit ondersteunt de hypothese dat de draagkracht bepaald wordt door het maximale buigend moment.

De hierboven gegeven relatie tussen de draagkracht van een ligger en het buigend moment is een illustratie van het belang van de bepaling van buigende momenten voor verschillende gevallen. Later zal blijken dat het ook voor de bepaling van de vervormingen van constructies noodzakelijk is het verloop van het buigend moment, de dwarskracht en de normaalkracht, en eventueel nog andere grootheden, te kennen.

6. EVENWICHT VAN STATISCH BEPAALDE CONSTRUCTIES, VERVOLG

In dit hoofdstuk wordt, als vervolg op hoofdstuk 4, het evenwicht beschouwd van statisch bepaalde constructies, alleen betreft het hier nu iets meer gecompliceerde constructies. Er zal zowel worden ingegaan op de bepaling van oplegreacties als op de bepaling van normaalkrachten, dwarskrachten en buigende momenten. De constructies die in dit hoofdstuk behandeld worden zijn scharnierliggers, enige vormen van portalen en flexibele kabels.

6.1. scharnierliggers

Een veel voorkomend type van constructies is dat waarbij verschillende liggers onderling verbonden zijn door middel van scharnieren. Twee voorbeelden zijn schematisch weergegeven in fig. 6.1. De praktische uitvoering bestaat er vaak uit dat een balk opgelegd wordt op een andere balk. Een mogelijke uitvoering van het rechterscharnier in de bovenste tekening van fig. 6.1, of van het linkerscharnier in de onderste tekening van fig. 6.1, is getekend in fig. 6.2. In

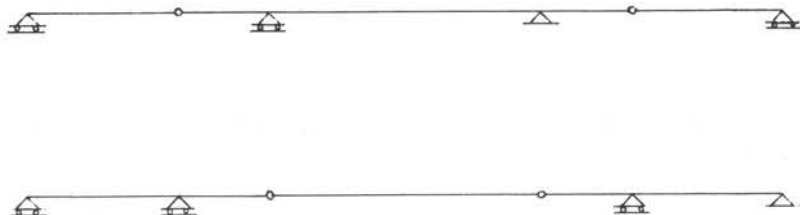


fig. 6.1.

deze uitvoering werkt het scharnier alleen als de rechterligger op de linkerligger een naar beneden gerichte kracht uitoefent. Aan die voorwaarde kan in de prak-

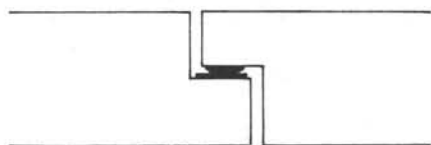


fig. 6.2.

tijk voldaan worden door het relatief grote eigen gewicht van de rechterligger, die bij de bouw van de constructie later "ingehangen" wordt.

Een scharnier zoals hierboven beschreven kan, althans binnen zekere grenzen, zowel een horizontale als een verticale kracht overbrengen, maar geen buigend moment. De constructie-onderdelen (de twee balken) kunnen ter plaatse van het scharnier vrij ten opzichte van elkaar roteren. Men zegt dat de constructie een *inwendige graad van vrijheid* heeft. De constructies van fig. 6.1 hebben elk twee inwendige graden van vrijheid. Om de constructie kinematisch bepaald te maken moeten deze vrijheidsgraden opgeheven worden, bijvoorbeeld door extra opleggingen. In de beide gevallen van fig. 6.1 is dat geschied door twee extra opleggingen. De constructies zijn daarmee ook statisch bepaald. Met nog

meer opleggingen zouden ze ook kinematisch bepaald zijn, maar zouden ze statisch onbepaald worden. In het vervolg van deze paragraaf zal worden ingegaan op de bepaling van de oplegreacties, en de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn voor dergelijke statisch bepaalde scharnierliggers. In het algemeen is de procedure (die alleen bruikbaar is als de constructie statisch bepaald is) dat de onbekende oplegreacties bepaald worden uit de drie evenwichtsvergelijkingen voor de constructie als geheel, en de eisen dat ter plaatse van de inwendige scharnieren het buigend moment nul is. Als op die manier de oplegreacties bepaald zijn, kan men daarna het verloop van de normaalkracht, de dwarskracht en het buigend moment bepalen door het aanbrengen van een geschikte snede en een evenwichtsbeschouwing van een deel van de constructie.

Als eerste voorbeeld wordt beschouwd de constructie van fig. 6.3, met een belasting door twee puntlasten, zoals aangegeven in de figuur. Als men de

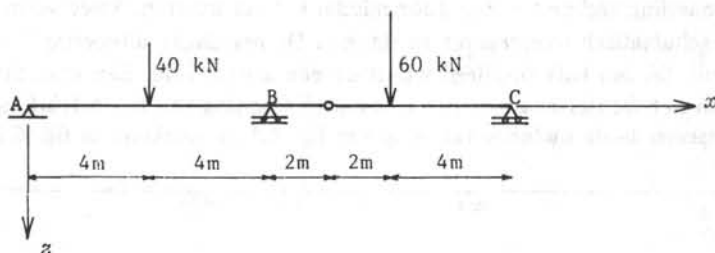


fig. 6.3.

onbekende componenten van de oplegreacties aangeeft met A_x , A_z , B_z en C_z , dan zijn de drie evenwichtsvergelijkingen voor de constructie als geheel

$$A_x = 0$$

$$A_z + B_z + C_z + 100 \text{ kN} = 0$$

$$-160 \text{ kNm} - B_z \times 8 \text{ m} - 720 \text{ kNm} - C_z \times 16 \text{ m} = 0.$$

In de laatste vergelijking is het moment ten opzichte van punt A gelijk aan nul gesteld. De conditie dat het buigend moment ter plaatse van het scharnier nul is, kan men het eenvoudigst in formule brengen door het deel van de constructie rechts van het scharnier te beschouwen. Die conditie is dan

$$-C_z \times 6 \text{ m} - 120 \text{ kNm} = 0.$$

Uit de vier vergelijkingen kunnen de vier onbekenden worden bepaald. Het resultaat is

$$A_x = 0 \text{ kN}$$

$$A_z = -10 \text{ kN}$$

$$B_z = -70 \text{ kN}$$

$$C_z = -20 \text{ kN}.$$

Nu de oplegreacties bekend zijn, kan men het verloop van de dwarskracht en het buigend moment bepalen door een beschouwing van het evenwicht van het deel van de ligger links of rechts van een denkbeeldige snede. De dwarskrachtenlijn en de momentenlijn zijn getekend in fig. 6.4.

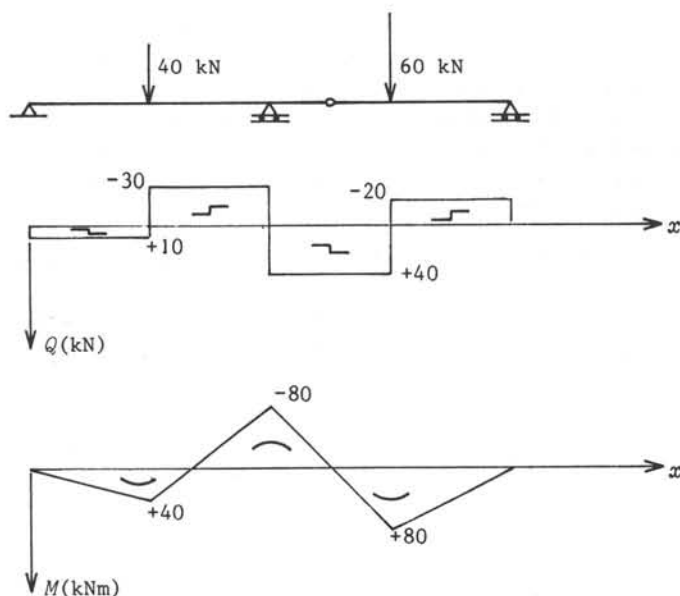


fig. 6.4.

Als tweede voorbeeld wordt beschouwd de scharnierligger uit de onderste tekening van figuur 6.1, belast met een gelijkmatig verdeelde belasting groot 25 kN/m, zie fig. 6.5. Het opstellen van de vergelijkingen (drie evenwichtsvergelij-

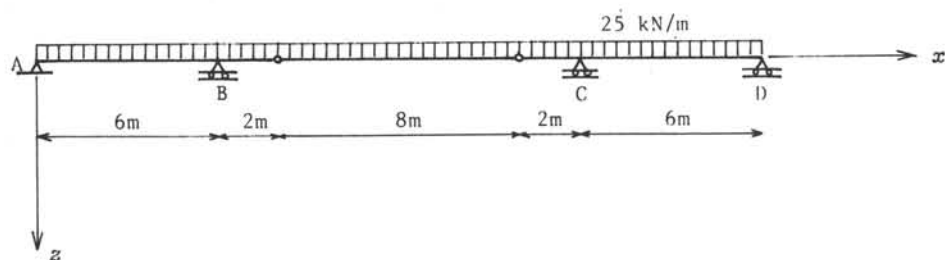


fig. 6.5.

kingen voor de ligger als geheel, en twee vergelijkingen voor het gelijk aan nul zijn van het buigend moment ter plaatse van de scharnieren) wordt aan de lezer overgelaten. Men vindt voor de oplegreacties

$$A_x = 0 \text{ kN}$$

$$A_z = -33,3 \text{ kN}$$

$$B_z = -266,7 \text{ kN}$$

$$C_z = -266,7 \text{ kN}$$

$$D_z = -33,3 \text{ kN}.$$

De dwarskrachtenlijn en de momentenlijn zijn getekend in fig. 6.6. De momentenlijn bestaat, omdat de dwarskrachtenlijn uit rechte stukken bestaat, uit parabolische gedeelten. In de figuur is hij schematisch weergegeven door de waarden

op onderlinge afstanden van 1 meter door rechte lijnen te verbinden.

Men kan de oplegreacties en de momentenlijn voor dit geval ook grafisch bepalen met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek, zie fig. 6.7. De stangenveelhoek is hierbij opgebouwd uit twee delen: een deel voor de belastingen die tevoren bekend zijn, en een deel voor de oplegreacties, die tevoren niet bekend zijn. De stangenveelhoek en de poolfiguren moeten aan de volgende voorwaarden voldoen:

- in de poolfiguur moeten de belastingen en de oplegreacties een gesloten krachtenveelhoek vormen;
- de stangenveelhoek moet zodanig zijn dat ter plaatse van de beide uiteinden van de ligger, en ter plaatse van de twee inwendige scharnieren het buigend moment nul is.

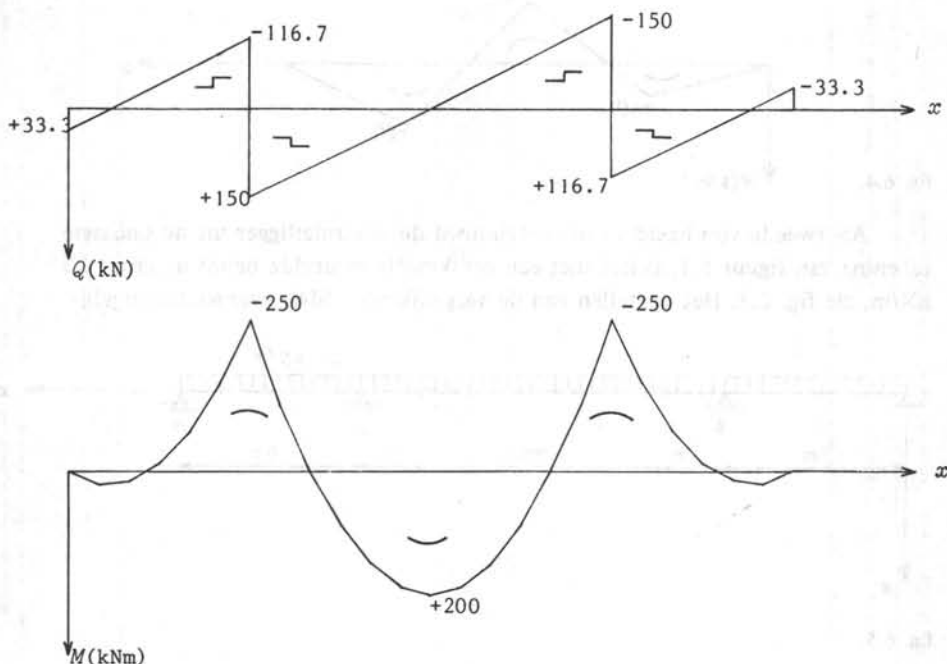


fig. 6.6.

De constructie van poolfiguur en stangenveelhoek is uitgevoerd in fig. 6.7. Eerst zijn de belastingen uitgezet en is een pool gekozen. De gelijkmatig verdeelde belasting is daartoe eerst vervangen door een stelsel van puntlasten, elk overeenkomend met de belasting op 2 m lengte van de ligger, dat zijn dus puntlasten ter grootte van 50 kN. Na de keuze van een pool kan de stangenveelhoek voor de belasting geconstrueerd worden. Het gedeelte van de stangenveelhoek behorende bij de oplegreacties in de punten A, B, C en D moet nu zodanig zijn dat aan de uiteinden en ter plaatse van de scharnieren geen buigend moment optreedt. De zogenaamde *sluitlijn* mag ter plaatse van de opleggingen knikken vertonen, overeenkomend met de grootte van de oplegreacties. Deze sluitlijn kan nu getekend worden, te beginnen met het middelste gedeelte (door de stangenveelhoek van de belasting, ter plaatse van de scharnieren), zie fig. 6.7.

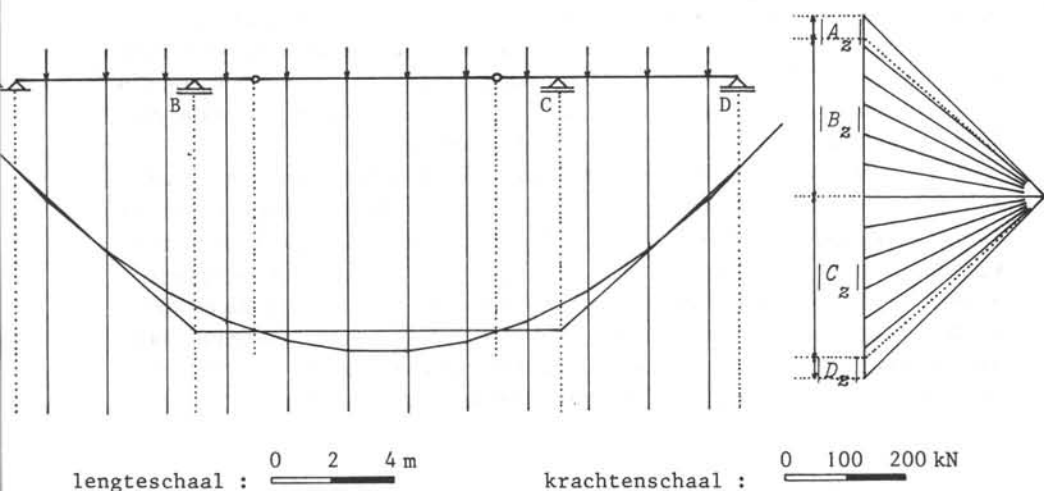


fig. 6.7.

De grootte van de oplegreacties kan worden bepaald door in de poolfiguur poolstralen te tekenen evenwijdig aan de delen van de sluitlijn. In fig. 6.7 zijn die aangegeven door een stippellijn. Rekening houdend met de krachtschaal vindt men voor de oplegreacties

$$A_z = - 35 \text{ kN}$$

$$B_z = -265 \text{ kN}$$

$$C_z = -265 \text{ kN}$$

$$D_z = - 35 \text{ kN}.$$

De waarden zijn bepaald door opmeting in de figuur. Het teken volgt uit de richting van de krachten, aannemende dat de z -as verticaal naar beneden gericht is. De gevonden waarden komen redelijk goed overeen met die welke hierboven gevonden werden uit een analytische berekening. Voor het buigend moment in het midden van de ligger vindt men, door de ordinaat (opgemeten op lengteschaal als 0,64 m) te vermenigvuldigen met de poolafstand (opgemeten op krachtschaal als 300 kN), 193 kNm. Dit komt redelijk goed overeen met de analytisch berekende waarde van 200 kNm.

6.2. driescharnierspanten

Een ander type van constructie met een inwendige graad van vrijheid is het zogenaamde driescharnierspant, waarvan een aantal mogelijke uitvoeringen zijn getekend in fig. 6.8. Dergelijke spanten worden veel toegepast als overkap-



fig. 6.8.

pingsconstructie voor bijvoorbeeld een loods, of een sporthal. De constructie is kinematisch bepaald (of plaatsvast), omdat hij is opgebouwd uit twee vormvaste delen, die als ze alleen aan de onderste scharnieren bevestigd waren, elk nog één vrijheidsgraad zouden hebben, en omdat deze twee vrijheidsgraden (rotatie om de oplegging) verhinderd worden door het scharnier in de top.

De berekening van een driescharnierspant kan in principe als volgt geschieden. Er zijn vier onbekende oplegreacties, die bepaald kunnen worden uit de drie evenwichtsvergelijkingen voor het spant als geheel en de conditie dat ter plaatse van het scharnier in de top het buigend moment nul moet zijn. Als de oplegreacties bekend zijn kan men verder zonder moeite de normaalkracht, de dwarskracht en het buigend moment in elke doorsnede berekenen. De procedure kan wellicht het best worden toegelicht aan de hand van een getallenvoorbeeld, zie fig. 6.9. De evenwichtsvergelijkingen voor de constructie als geheel zijn

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_z + B_z + 40 \text{ kN} = 0$$

$$-40 \text{ kN} \times 2 \text{ m} - B_z \times 8 \text{ m} = 0.$$

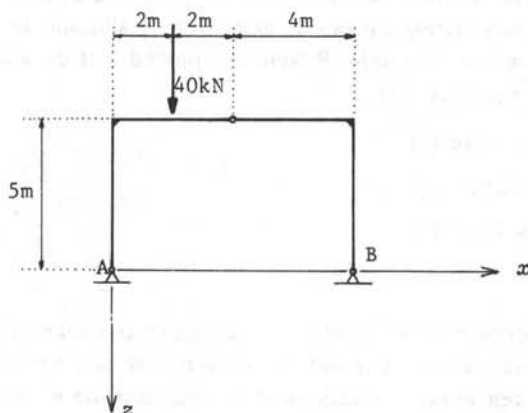


fig. 6.9.

De eerste vergelijking stelt dat de som van alle horizontale krachtcomponenten nul is, de tweede stelt dat de som van alle verticale krachtcomponenten nul is, en de derde stelt dat het moment ten opzichte van het punt A nul is. De conditie dat het buigend moment in het scharnier in de top nul is, leidt, als men het deel rechts van het scharnier beschouwt, tot de vergelijking

$$B_x \times 5 \text{ m} - B_z \times 4 \text{ m} = 0.$$

Uit de vier vergelijkingen vindt men voor de oplegreacties

$$A_x = 8 \text{ kN}$$

$$A_z = -30 \text{ kN}$$

$$B_x = -8 \text{ kN}$$

$$B_z = -10 \text{ kN}.$$

Alle krachten die op het spant werken zijn getekend in de schets linksboven in

fig. 6.10. In deze figuur zijn ook de normaalkrachtenlijn, de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn getekend. De tekens van de grootheden zijn aangegeven met symbolen. Voor de normaalkracht geldt dat deze zowel in de twee opgaande stijlen als in de regel een drukkracht is. Omdat in het algemeen een normaalkracht negatief gerekend wordt voor druk had het teken dus ook kunnen worden aangegeven met een min-teken. Bij de dwarskrachten en de buigende momenten ligt dat iets gecompliceerder. De tekenafspraken hangt daarbij samen met de keuze van het assenstelsel. Men zou nu voor de stijlen en de regel elk een eigen assenstelsel (een "lokaal assenstelsel") kunnen kiezen. Daarmee ligt dan de tekenafspraken vast. Bij constructies als portalen volstaat men er meestal mee de zin van de grootheden aan te geven met de betreffende symbolen. De grootheden liggen door de getalswaarde en de aldus aangegeven zin volledig vast.

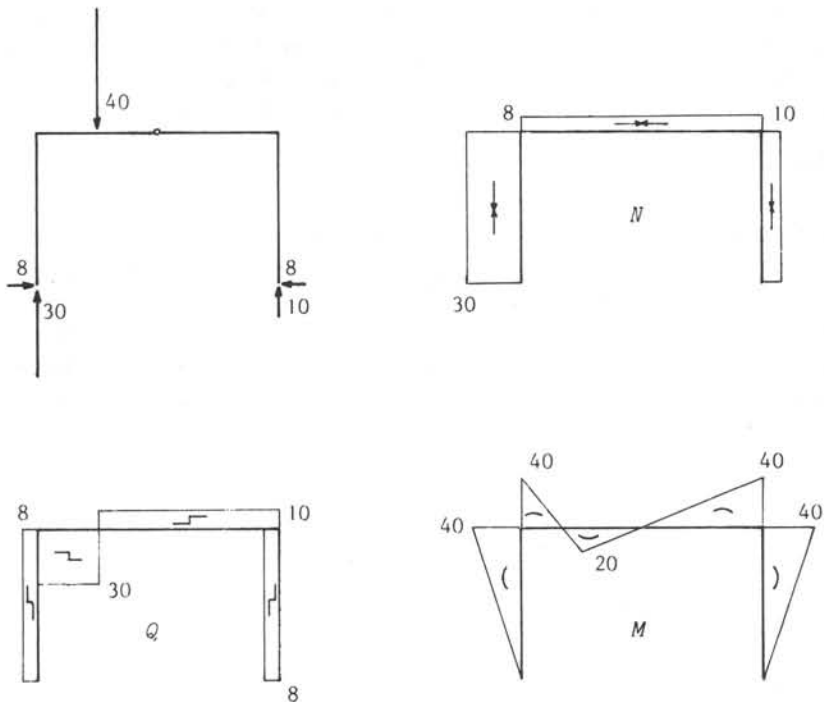


fig. 6.10.

De krachtsverdeling in een portaal kan men, vooral als maar één deel van het portaal belast is, ook eenvoudig grafisch bepalen, zie fig. 6.11. Op het rechterdeel van de constructie werken slechts twee krachten: de oplegreactie in B en de kracht door het scharnier in de top overgebracht. Omdat het rechterdeel van het portaal in rust zij moeten die twee krachten gelijk en tegengesteld van richting zijn, en dezelfde werklijn hebben. De werklijn van de oplegreactie in punt B moet dus door het scharnier in de top gaan, en uiteraard ook door punt B zelf. Die werklijn ligt daarmee volledig vast. De werklijn van de belasting op het portaal is ook volledig bekend. Van de werklijn van de oplegreactie in punt A is bekend dat deze door dat scharnierpunt gaat. Omdat de drie krachten (de twee oplegreacties en de belasting) tezamen een evenwichtssysteem moeten vormen, is

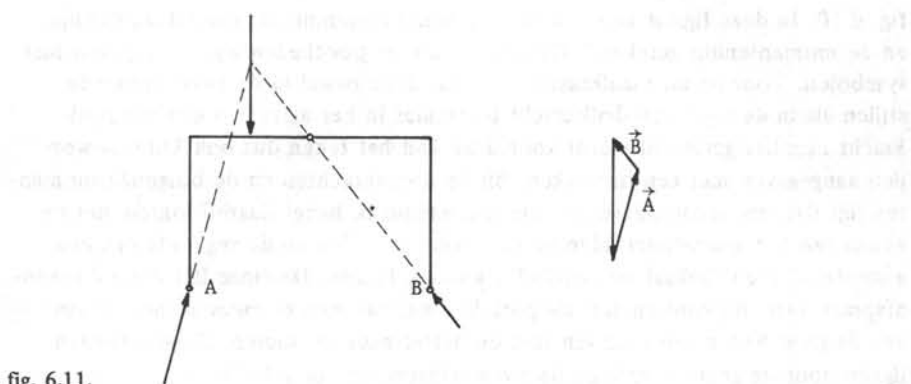


fig. 6.11.

het nu mogelijk de werklijn van de oplegreactie in A te bepalen (die moet immers gaan door het snijpunt van de werklijnen van de belasting en de oplegreactie in B), en ook is het mogelijk de grootte van de oplegreacties te bepalen. In figuur 6.11 is dat grafisch gedaan door middel van een krachtenveelhoek.

druklijn

Het tekenen van de werklijnen van de krachten zoals dat in fig. 6.11 is geschied, heeft nog een voordeel. Met behulp daarvan kan men namelijk vrij eenvoudig de normaalkracht, de dwarskracht en het buigend moment in een bepaalde doorsnede bepalen, zie fig. 6.12. Elke doorsnede rechts van de puntlast in fig. 6.12 moet dezelfde kracht overbrengen, namelijk de oplegreactie in B. De grootte van die kracht is bekend uit de krachtenveelhoek (fig. 6.11). De richting van de kracht is ook uit de krachtenveelhoek bekend, en die richting is ook terug

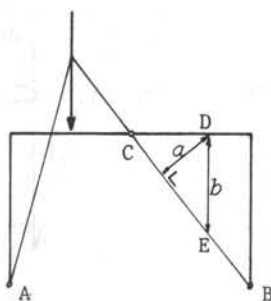


fig. 6.12.

te vinden in fig. 6.12, waar de werklijn van de kracht getekend is. Door nu de kracht te ontbinden in een component evenwijdig aan de staafas ter plaatse van de beschouwde doorsnede, en een component loodrecht op de staafas, vindt men de normaalkracht en de dwarskracht. Het buigend moment is te bepalen omdat de plaats van de werklijn bekend is. De grootte van het buigend moment in punt D in fig. 6.12 is gelijk aan het product van de oplegreactie in B en de afstand a van punt D tot de werklijn van die kracht. De grootte van het buigend moment kan men ook berekenen door de normaalkracht te vermenigvuldigen met de afstand b van de staafas tot de werklijn van de over te brengen kracht, gemeten loodrecht op de staafas.

Het snijpunt van de werklijn van de kracht die een bepaalde normaaldoor-

sneede moet overbrengen met het vlak van die doorsnede noemt men het krachtpunt van die doorsnede. In fig. 6.12 is punt E het krachtpunt van de doorsnede, ter plaatse van D. De verzameling van alle krachtpunten van een constructie, of van een onderdeel daarvan, noemt men de *druklijn*. Een belangrijke eigenschap van de druklijn is dat de afstand ervan tot de staafas een maat is voor het buigend moment. In vroeger tijden, toen er nog veel in steen geconstrueerd werd, moest ervoor gezorgd worden dat de druklijn vlak bij de as van de constructie bleef, omdat een steenconstructie niet of nauwelijks in staat is om momenten over te brengen.

Als er meerdere uitwendige belastingen op een driescharnierpunt werken wordt de grafische constructie van de druklijn wat ingewikkelder. Het is dan handig de belasting te splitsen in een belasting alleen op het linkerdeel en een belasting alleen op het rechterdeel van het spant, en dan eerst voor beide gevallen apart de oplegreacties te bepalen. Daarbij is het dan vaak nog nodig eerst de resultante van elk der belastingstelsels te bepalen, eventueel met behulp van een poolfiguur en een stangenveelhoek. Ook een goede methode is eerst een van de oplegreacties te berekenen uit een evenwichtsbeschouwing, en dan de druklijn te construeren door samenstelling van die oplegreactie met de achtereenvolgens aangrijpende krachten. De druklijn moet daarbij natuurlijk door de scharnieren gaan.

6.3. geschoorde portalen

In deze paragraaf wordt de berekening van de krachtsverdeling in statisch bepaalde geschoorde portalen behandeld. Enige voorbeelden van dit type van constructies zijn geschetst in fig. 6.13. Het betreft hier op zichzelf vormvaste

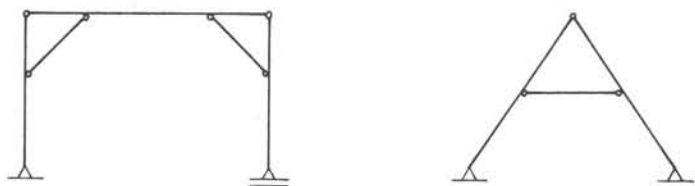


fig. 6.13.

constructies, die statisch bepaald zijn opgelegd op een scharnieroplegging en een roloplegging. De schoren zijn door middel van scharnieren tegen de stijlen bevestigd. In de schoren treedt, als de belasting tenminste niet direct op de schoren aangrijpt, alleen een normaalkracht op. Zonder de schoren zou de constructie, door de inwendige scharnieren (in de top in de rechterfiguur, en in de bovenhoeken in de linkerfiguur) niet vormvast zijn. De scharnieren waarmee de schoren tegen het portaal zijn bevestigd zorgen ervoor dat aan de uiteinden van de schoren geen buigend moment optreedt. De schoren brengen alleen een geconcentreerde kracht op het portaal over. Ter plaatse van deze scharnierbevestigingen kan in het portaal uiteraard wel een buigend moment optreden. Overigens is de benaming "schoor" eigenlijk alleen gebruikelijk in gevallen zoals getekend in de linkerhelft van fig. 6.13. In het geval getekend in de rechterhelft spreekt men meestal van een trekstang.

De berekeningswijze van portalen zoals hier beschouwd, is in het algemeen als volgt. De drie oplegreacties kunnen direct bepaald worden uit de drie evenwichtsvergelijkingen voor de constructie als geheel. Daarna kan men de normaalkrachten in de schoren bepalen met behulp van de vergelijkingen die volgen uit de voorwaarden dat ter plaatse van de inwendige scharnieren in het portaal het buigend moment nul is. Ter illustratie zal het geval geschetst in fig. 6.14 worden uitgewerkt.

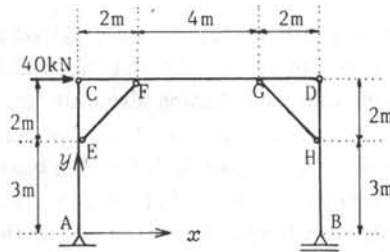


fig. 6.14.

De oplegreacties zijn, als het portaal in het x,y -vlak ligt, en als de y -as omhoog wijst,

$$A_x = -40 \text{ kN}$$

$$A_y = -25 \text{ kN}$$

$$B_y = +25 \text{ kN}.$$

Als de normaalkracht in de schoor EF wordt aangegeven met N_{EF} en die in de schoor GH met N_{GH} (beide positief gerekend als het trekkrachten zijn), dan zijn de voorwaarden dat het buigend moment in de punten C en D nul is,

$$40 \text{ kN} \times 5 \text{ m} - N_{EF} \times 1,41 \text{ m} = 0$$

$$N_{GH} \times 1,41 \text{ m} = 0.$$

Hieruit volgt

$$N_{EF} = 141 \text{ kN}$$

$$N_{GH} = 0 \text{ kN}.$$

De normaalkrachtenlijn, de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn voor de stijlen en de bovenregel van het portaal zijn getekend in fig. 6.15. In deze figuur zijn ook de krachten zoals die op de stijlen en de bovenregel werken aangegeven, linksboven in de figuur.

De berekening wordt iets gecompliceerder als er ook belasting rechtstreeks op een van de schoren aangrijpt, zie bijvoorbeeld het geval van fig. 6.16, waar een kracht op de trekstang werkt. In zo'n geval treden er in de trekstang ook dwarskrachten en buigende momenten op. Voor de berekening van de krachtsverdeling dient men nu het evenwicht van de stang eerst apart te bekijken. De stang kan beschouwd worden als een aan zijn uiteinden vrij opgelegde ligger, waarin dwarskrachten en buigende momenten werken die direct volgen uit evenwichtsbeschouwingen. De normaalkracht in de stang kan pas later bepaald worden uit de eis

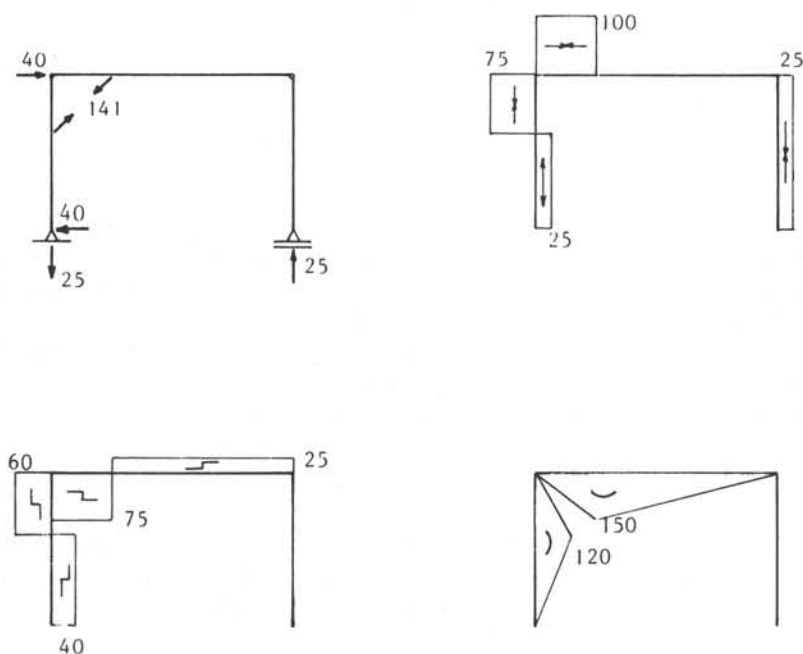


fig. 6.15.

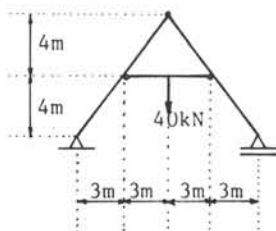


fig. 6.16.

dat het buigend moment in het bij de stang behorende scharnier nul is. De lezer ga na dat in het geval getekend in fig. 6.16 de berekeningen tenslotte leiden tot een waarde voor de normaalkracht in de stang van 15 kN.

In de praktijk komen geschoorde portalen vrij veel voor. Vaak zijn ze echter iets gecompliceerder van constructie, en dus moeilijker te berekenen. Zo maakt men de constructie vaak stijver door de hoeken niet uit te voeren als scharnier maar als stijve verbinding. De tegenwoordig veel toegepaste gelaste verbindingen kunnen zeker niet als scharnier beschouwd worden, zoals men wel kan doen met de vroeger veel toegepaste verbinding van staalprofielen met klinknagels. Door een stijve verbinding met lasnaden toe te passen wordt het geschoorde portaal statisch onbepaald. Op de berekening van dergelijke portalen wordt in het tweede studiejaar ingegaan.

Een constructie die wel statisch bepaald is, en daarom wel met de tot nu toe behandelde technieken berekend kan worden, is het geschoorde driescharnierspant getekend in fig. 6.17. De wijze van berekening is in een dergelijk geval

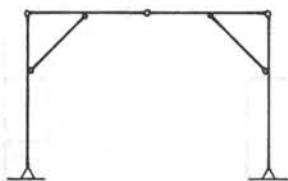


fig. 6.17.

een combinatie van die behandeld in deze paragraaf en de voorgaande. Eerst kan men de oplegreacties berekenen op de wijze beschreven in de vorige paragraaf voor een driescharnierpunt. De vier oplegreacties volgen uit de drie evenwichtsvergelijkingen voor de constructie als geheel en de voorwaarde dat in het scharnier in het midden van de bovenregel het buigend moment nul is. Daarna kan men de normaalkrachten in de schoren berekenen uit de voorwaarden dat in de bijbehorende hoekscharnieren het buigend moment nul is. De lezer ga na dat als de afmetingen en de belasting van het portaal van fig. 6.17 gelijk zijn aan die van het portaal van fig. 6.14 de normaalkrachten in de schoren gelijk zijn aan $+70.7$ kN, respectievelijk -70.7 kN.

Constructief gezien is het aanbrengen van schoren vaak erg zinvol. De buigende momenten worden er sterk door gereduceerd, en dat kan betekenen dat er minder materiaal nodig is om aan de eisen ten aanzien van sterkte en stijfheid van de constructie te voldoen.

6.4. flexibele kabels

In sommige constructies, met name hangbruggen, wordt een belangrijke rol gespeeld door een constructie-element met eigenschappen die nogal afwijken van de tot nu toe behandelde, namelijk een flexibele kabel. In deze paragraaf wordt de krachtswerking in een dergelijke kabel behandeld.

Aangenomen wordt dat de kabel zo flexibel is dat hij zonder moeite gebogen kan worden. De kabel kan dan geen buigend moment en geen dwarskracht overbrengen. In de kabel kan alleen een normaalkracht werken, en dan nog alleen als dit een trekkracht is.

De berekening van een flexibele kabel die belast wordt door een gelijkmatig verdeelde belasting kan als volgt geschieden. Stel dat de positie van de kabel in het x, z -vlak aangegeven wordt met $w(x)$, zie fig. 6.18, en stel dat de normaalkracht in de kabel aangegeven wordt met $N(x)$. Stel verder dat de kabel belast wordt door een in positieve z -richting werkende belasting $f(s)$, dat is een kracht per lengteëenheid van de kabel, met s een coördinaat gemeten langs de kabel.

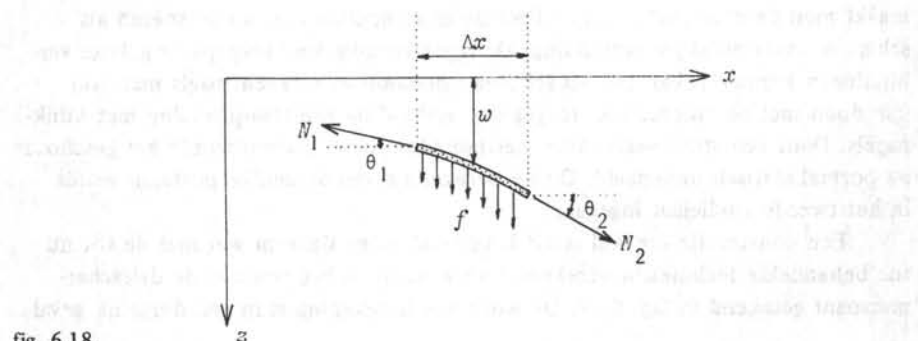


fig. 6.18.

Beschouwt men nu een stukje van de kabel waarvan de projectie op de x -as een lengte Δx heeft, dan vereist het evenwicht in x -richting

$$N_1 \cos \theta_1 = N_2 \cos \theta_2 = N_0,$$

waarin θ de hoek van de kabel met de x -as is, en de indices 1 en 2 aangeven dat de waarden aan het linker- resp. het rechteruiteinde van het stukje van de kabel bedoeld worden. Deze evenwichtsvergelijking stelt dat de horizontale component van de normaalkracht in de kabel constant is. Deze constante horizontale component zal worden aangegeven met N_0 .

Het evenwicht in de z -richting vereist dat

$$N_2 \sin \theta_2 - N_1 \sin \theta_1 + f \Delta s = 0,$$

waarin Δs de lengte van het beschouwde stukje kabel is. Als N_1 en N_2 nu uitgedrukt worden in N_0 , dan wordt de laatste vergelijking

$$N_0 (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) + f \Delta s = 0.$$

Omdat in het algemeen $\tan \theta = dw/dx$, kan men ook schrijven

$$N_0 \frac{d^2 w}{dx^2} \Delta x + f \Delta s = 0,$$

ofwel, na overgang in de limiet $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{f}{N_0} \frac{ds}{dx}.$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor de positie van de kabel onder invloed van een belasting f per lengte-eenheid van de kabel.

Voorbeeld: kabel onder eigen gewicht, kettinglijn

Voor het geval van een homogene kabel onder invloed van zijn eigen gewicht geldt dat de belasting f constant is, zeg $f = f_0$. Substitueert men nu verder de identiteit

$$ds^2 = dw^2 + dx^2,$$

dan wordt de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{f_0}{N_0} \left(1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dit is een gewone differentiaalvergelijking van de tweede orde, die vrij eenvoudig kan worden opgelost door eerst $dw/dx = g$ te stellen en de dan ontstane differentiaalvergelijking van de eerste orde op te lossen. Voor de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking vindt men dan:

$$w = -\frac{N_0}{f_0} \cosh \left(\frac{f_0 x}{N_0} + A \right) + B,$$

waarin A en B integratieconstanten zijn, die uit de randvoorwaarden bepaald moeten worden. Stelt men dat deze randvoorwaarden betrekking hebben op een aan de twee uiteinden vastgehouden kabel, zie fig. 6.19, dan moet de oplossing

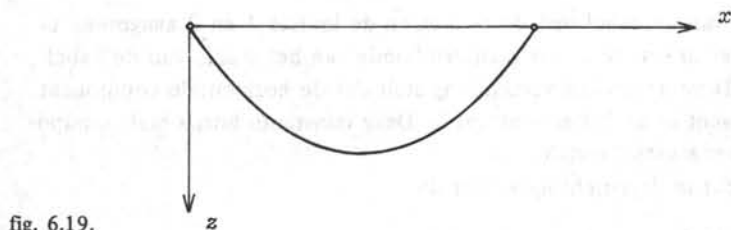


fig. 6.19.

voldoen aan de voorwaarden dat $w = 0$ voor $x = 0$ en $x = l$. Men vindt dan voor de uiteindelijke oplossing

$$w = \frac{N_0}{f_0} \left\{ \cosh \left(\frac{f_0 l}{2N_0} \right) - \cosh \left(\frac{f_0}{N_0} \left(x - \frac{1}{2} l \right) \right) \right\}$$

Deze formule geeft de vorm aan van een flexibele kabel, opgehangen aan zijn uiteinden, onder invloed van zijn eigen gewicht. Men noemt dit wel de *kettinglijn*.

benadering voor kleine vervormingen

Als de kabel strak gespannen is, zal de zakking w vaak klein zijn. Men kan dan de kettinglijn benaderen door een eenvoudiger formule. Die formule kan men op twee manieren afleiden. De eerste manier is door aan te nemen dat de parameter $f_0 l / N_0$ klein is ten opzichte van 1. Dan kunnen de hyperbolische functies in de formule voor de kettinglijn benaderd worden door de eerste twee termen uit de reeks van Taylor (MacLaurin),

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

Men vindt dan als benadering voor de kettinglijn

$$w \approx \frac{f_0}{2N_0} x(l - x).$$

Dit is een parabool.

Een andere manier om deze benadering af te leiden is door uit te gaan van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking,

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{f_0}{N_0} \left(1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

en dan aan te nemen dat dw/dx zo klein is ten opzichte van 1 dat men de term $(dw/dx)^2$ wel kan verwaarlozen. De differentiaalvergelijking wordt dan

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{f_0}{N_0}.$$

Men zegt wel dat de differentiaalvergelijking hiermee gelineariseerd is. De oplossing van deze differentiaalvergelijking die aan de randvoorwaarden voldoet is

$$w = \frac{f_0}{2N_0} x(l - x)$$

en dit is weer dezelfde parabolische benadering van de kettinglijn.

7. STATISCH BEPAALDE VLAKKE VAKWERKEN

Voor de constructie van bruggen en ondersteuning van daken maakt men vaak gebruik van *vakwerken*. Vakwerken zijn vormvaste constructies opgebouwd uit lange dunne staven, die in hun uiteinden scharnierend aan elkaar verbonden gedacht worden. In het algemeen gaat het om een driedimensionale constructie, zie fig. 7.1, die het dak toont van een benzinestation nabij het gebouw voor Civiele Techniek te Delft. Vaak is de constructie niet echt driedimensionaal, maar



fig. 7.1.

wordt deze opgebouwd uit *vlakke vakwerken*. Voor een voorbeeld zie men bijvoorbeeld fig. 7.2, die een loopbrug tussen twee laboratoria van de Afdeling der



fig. 7.2.

Civiele Techniek toont. Ook veel grote bruggen bestaan uit vlakke vakwerken: één aan elke zijde van de rijbaan, met een rijdek dat bijvoorbeeld is opgebouwd uit balken die de verkeersbelasting overbrengen naar de vakwerken. Zie bijvoorbeeld fig. 7.3, die de Moerdijkbrug toont, in augustus 1975. De beide vakwerken worden meestal aan de bovenzijde nog verbonden door een zogenaamd *windverband*. Ook dat windverband kan weer een vlak vakwerk zijn.

In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de berekening van een aantal eenvoudige



fig. 7.3.

dige vlakke vakwerken. De behandeling zal betrekking hebben op een geschematiseerde constructie met de volgende eigenschappen:

1. De constructie bevindt zich in een plat vlak, en wordt alleen belast door krachten in dat vlak.
2. Alle belastingen grijpen aan in de knooppunten.
3. De staven zijn in de knooppunten aan elkaar verbonden door middel van wrijvingsloze scharnieren.

De tweede aanname is vaak wel realistisch voor wat betreft de belastingen en de oplegreacties. Voor wat betreft het eigen gewicht van de staven is dit uiteraard een nogal sterke schematisering. De rechtvaardiging ervoor is dat meer geavanceerde berekeningen hebben aangetoond dat de fouten die het gevolg zijn van deze aanname relatief klein zijn.

De derde aanname is ook een schematisering van de werkelijkheid die eigenlijk voornamelijk tot doel heeft de berekening eenvoudiger te maken. Het gevolg van deze aanname, tezamen met de tweede, is namelijk dat in de staven van het vakwerk alleen normaalkrachten optreden, en geen buigende momenten en dwarskrachten. De staven van een vakwerk kunnen beschouwd worden als pendelstaven. Vroeger trachtte men soms de derde aanname te rechtvaardigen door de verbinding inderdaad met scharnieren uit te voeren. Men zie hiervoor de overkappingsconstructie van sommige oudere stations in Nederland, of fig. 7.4, die een brug toont in Montpelier (Vermont, USA). Men kan echter bewijzen dat in de meeste gevallen de aanname dat de staven scharnierend met elkaar verbonden zijn slechts tot kleine fouten in de krachtsverdeling leidt, ook als de staven in werkelijkheid zeer stijf aan elkaar zijn verbonden. Het bewijs kan in dit stadium nog niet geleverd worden, maar het berust erop dat een lange dunne staaf relatief slap is tegen buiging en relatief stijf tegen verlenging. De bij buiging behorende buigende momenten en dwarskrachten blijven daardoor zeer klein. Daarom is het ook voor constructies waarbij de staven stijf aan elkaar verbonden zijn (bijvoorbeeld door middel van bouten of lasnaden, zie fig. 7.5) zinvol de berekeningsmethoden voor ideale vakwerken toe te passen.

Omdat in dit stadium van de behandeling van de Toegepaste Mechanica alleen nog van evenwichtsbeschouwingen gebruik gemaakt kan worden is er nog een vierde beperking aan de hier te behandelen vakwerken:



fig. 7.4.



4. De constructie is statisch bepaald.

Deze beperking houdt in dat alle staafkrachten en alle oplegreacties (onder een willekeurige belasting) bepaald moeten kunnen worden uit de statica van het vakwerk of een deel daarvan.



fig. 7.5.

In de paragrafen 7.1, 7.2 en 7.3 wordt ingegaan op de classificatie van vakwerken, met het doel na te gaan aan welke voorwaarden een vakwerk moet voldoen om statisch bepaald te zijn. In de paragrafen 7.4, 7.5 en 7.6 wordt ingegaan op de eigenlijke berekeningsmethoden. Berekeningsmethoden voor meer algemene typen van vakwerken (met name statisch onbepaalde vakwerken) worden in latere studiejaar behandeld.

7.1. vormvastheid van vlakke vakwerken

Een belangrijke eigenschap van een vakwerk is dat het een *vormvaste constructie* is. De meest eenvoudige wijze om een vormvaste constructie op te bouwen met behulp van scharnierend aan elkaar verbonden staven is door uit te gaan van een driehoek, en dan steeds met twee nieuwe staven een nieuw knooppunt te creëren. Een aantal voorbeelden van op die manier opgebouwde vakwerken is getekend in fig. 7.6. De aldaar getekende vakwerken bestaan geheel

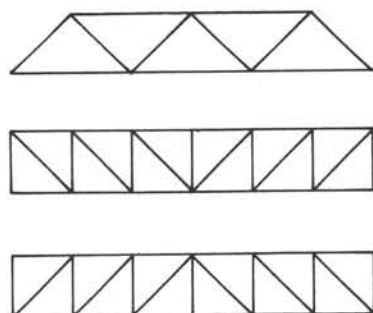


fig. 7.6.

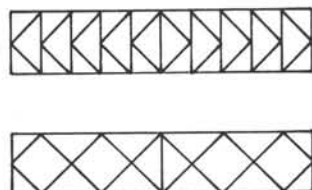


fig. 7.7.

uit driehoeken. Ook de constructies getekend in fig. 7.7 kan men zich opgebouwd denken door uit te gaan van een enkele driehoek (in dit geval een van de twee driehoeken in het midden), en daarna steeds een nieuw knooppunt vast aan twee reeds bestaande knooppunten te verbinden met behulp van twee staven. Deze constructies bestaan niet uit driehoeken, maar zijn wel vormvast. Omdat ze vormvast zijn, en opgebouwd zijn uit pendelstaven, zijn het vakwerken.

Voor een vakwerk opgebouwd op de wijze van fig. 7.6 of fig. 7.7, waarbij steeds een nieuw knooppunt gevormd wordt met twee nieuwe staven, geldt het volgende verband tussen het aantal staven, s , en het aantal knooppunten, k :

$$s = 2k - 3.$$

De juistheid van deze formule kan men eenvoudig nagaan door uit te gaan van een enkele driehoek (dan is $k = 3$ en $s = 3$), en te bedenken dat de toename van het aantal staven tweemaal zo groot is als de toename van het aantal knooppunten.

De formule $s = 2k - 3$ is een minimum-voorwaarde voor het vormvast zijn van een vakwerk. Door nog extra staven toe te voegen blijft de constructie natuurlijk vormvast. Zo kan men bijvoorbeeld aan de vakwerken van fig. 7.7 nog staven toevoegen zonder nieuwe knooppunten te creëren, zie fig. 7.8.

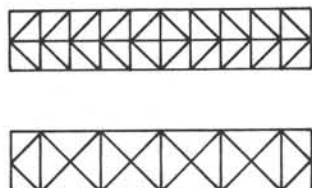


fig. 7.8.

De constructie is dan nog steeds vormvast, maar het aantal staven is groter dan $2k - 3$.

Men zou nu in de verleiding kunnen komen te denken dat een vlakke constructie opgebouwd uit pendelstaven altijd vormvast is als het aantal staven tenminste gelijk is aan $2k - 3$. Dat is echter niet juist, zoals bijvoorbeeld blijkt uit het voorbeeld van fig. 7.9. De constructie uit deze figuur bestaat uit twee vorm-

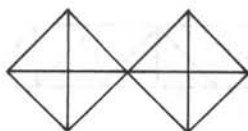


fig. 7.9.

vaste delen die eigenlijk allebei nog een staaf zouden kunnen missen, en dan nog steeds vormvast zouden zijn. Deze twee vormvaste constructies zijn in een punt scharnierend aan elkaar verbonden. De twee delen kunnen nog ten opzichte van elkaar bewegen, en de constructie is dus niet vormvast, hoewel het aantal staven zelfs één groter is dan $2k - 3$. De twee delen vormen zelf wel elk een vakwerk, maar de constructie als geheel is niet vormvast, en is daarom geen vakwerk. Een dergelijke constructie noemt men een *samengesteld vakwerk*.

De formule $s = 2k - 3$ blijkt geen goed criterium te zijn voor vormvastheid. Wel kan gesteld worden dat voor elke vormvaste constructie opgebouwd uit pendelstaven (dat wil zeggen voor elk vakwerk) geldt dat

$$s \geq 2k - 3.$$

Het omgekeerde geldt echter niet. Niet elke constructie waarvoor geldt dat $s \geq 2k - 3$ is vormvast. Men zegt wel dat de voorwaarde $s \geq 2k - 3$ noodzakelijk is voor vormvastheid, maar niet voldoende.

Samenvattend kan gesteld worden dat het bepalen of een constructie opgebouwd uit staven al dan niet vormvast is, niet goed kan geschieden door het aantal staven te vergelijken met de waarde $2k - 3$. Alleen als het aantal staven minder dan $2k - 3$ is, kan men zeggen dat de constructie zeker niet vormvast is. Een positieve uitspraak kan men alleen doen door aan de hand van het schema van de constructie na te gaan of elk knooppunt met minstens twee staven aan een vormvast deel van de constructie verbonden is.

Op de betekenis van de relatie $s = 2k - 3$ zal in paragraaf 7.3, bij de bespreking van de statische bepaaldheid, worden teruggekomen.

7.2. kinematische bepaaldheid van vlakke vakwerken

Zoals reeds eerder gesteld, moet de ingenieur er steeds voor zorgen dat zijn constructies *kinematisch bepaald* (of plaatsvast) zijn. Voor een vormvaste vlakke constructie betekent dit dat de opleggingen de drie mogelijke bewegingsvormen van de constructie in zijn geheel (de drie vrijheidsgraden: twee translaties en een rotatie) moeten verhinderen. Hiervoor zijn minstens drie onafhankelijke oplegreacties nodig, bijvoorbeeld in de vorm van een scharnieroplegging en een roloplegging. Zo zijn de constructies van fig. 7.10 beide kinematisch bepaald. De eerste is juist vormvast, en kan daartoe geen staaf missen. De tweede zou nog wel een aantal staven kunnen missen, bijvoorbeeld alle horizontale staven op de

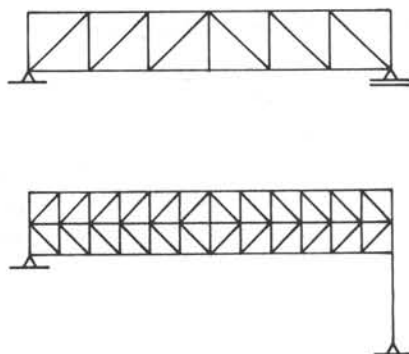


fig. 7.10.

halve hoogte van het vakwerk. Beide zijn kinematisch bepaald omdat de constructies op zichzelf vormvast zijn, en drie onafhankelijke opleggingen bezitten.

Vanzelfsprekend blijft een vormvaste constructie kinematisch bepaald als er meer dan drie oplegreacties zijn. De constructie is dan echter niet meer statisch bepaald, hetgeen de berekening moeilijker maakt. Een voorbeeld hiervan is weergegeven in fig. 7.11. De aldaar getoonde constructie is juist vormvast en

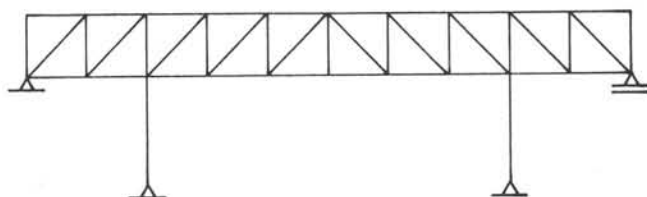


fig. 7.11. .

kinematisch bepaald, maar dat zou de constructie ook nog zijn zonder de twee oplegstaven. De constructie is (tweevoudig) uitwendig statisch onbepaald. Dergelijke constructies zullen in dit hoofdstuk niet verder beschouwd worden omdat de berekening van de krachtsverdeling in dit stadium nog niet mogelijk is.

Om een kinematisch bepaalde constructie te maken is het niet persé nodig uit te gaan van vormvaste constructies. Het is ook mogelijk uit te gaan van een niet-vormvaste constructie, alleen zijn dan meer dan drie oplossingen nodig om de constructie kinematisch bepaald te maken, zie bijvoorbeeld fig. 7.12.

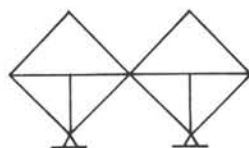


fig. 7.12.

De constructie in die figuur is vergelijkbaar met de eerder behandelde driescharnierspanen, zie paragraaf 6.2. De constructie is een samengesteld vakwerk, dat kinematisch bepaald is. De constructie is op zichzelf niet vormvast, omdat de twee samenstellende vakwerken ten opzichte van elkaar kunnen roteren. De twee scharnieropleggingen maken de constructie echter wel kinematisch bepaald, omdat daardoor de rotatie van de twee delen verhinderd wordt, evenals de andere vrijheidsgraden.

7.3. statische bepaaldheid van vlakke vakwerken

Wanneer een kinematisch bepaald vlak vakwerk (of kinematisch bepaald samengesteld vlak vakwerk) belast wordt door krachten die aangrijpen in de knooppunten, dan ontstaan in de staven van het vakwerk alleen normaalkrachten. Betreft het een enkel vakwerk dat kinematisch bepaald is opgelegd door het minimaal vereiste aantal opleggingen (d.w.z. 3 onafhankelijke oplegreacties), dan is het voor de bepaling van de krachtsverdeling in het vakwerk nodig de volgende grootheden te berekenen:

3 oplegreacties,

s staafkrachten.

Hierin is s het aantal staven in het vakwerk. Voor elk knooppunt kan men het evenwicht beschouwen. Die evenwichtsbeschouwingen bevatten zowel bekende krachten (de belastingen) als onbekende krachten (de staafkrachten en de oplegreacties). Elk knooppunt levert daarbij twee vergelijkingen. Geen drie, want het momentenevenwicht is automatisch verzekerd doordat alle betreffende krachten door het knooppunt gaan. Als het aantal knooppunten aangegeven wordt met k , betekent dit dat het aantal uit de statica beschikbare vergelijkingen gelijk is aan $2k$. Omdat het aantal onbekenden gelijk is aan $s + 3$ kan men nu stellen dat het systeem alleen oplosbaar kan zijn op basis van evenwichtsbeschouwingen als

$$s = 2k - 3.$$

Dit is juist weer het reeds in paragraaf 7.1 voorkomende verband tussen het aantal staafkrachten en knooppunten, dat daar voor een aantal eenvoudige vakwerken bleek te gelden.

Een vakwerk waarvoor geldt dat men de oplegreacties en de staafkrachten alle kan bepalen met behulp van evenwichtsbeschouwingen noemt men *statisch bepaald*.

Zoals hierboven gezien, geldt voor een vormvast en kinematisch bepaald vlak vakwerk dat het statisch bepaald is als

$$s = 2k - 3.$$

Meer in het algemeen geldt voor een kinematisch bepaalde constructie bestaande uit vlakke vakwerken (d.w.z. een samengesteld vlak vakwerk, dat kinematisch bepaald is gemaakt door voldoende opleggingen aan te brengen), dat deze statisch bepaald is als

$$s = 2k - r,$$

waarin r het aantal oplegreacties is.

Een aantal kinematisch bepaalde vakwerkconstructies dat tevens statisch bepaald is, is weergegeven in fig. 7.13. De derde is een samengesteld vakwerk, de andere twee zijn enkelvoudige vakwerken omdat ze op zichzelf vormvast zijn.

Is het aantal staven groter dan $2k - r$, dan is het aantal onbekenden groter dan het aantal beschikbare evenwichtsvergelijkingen. Het vakwerk is dan *statisch onbepaald*.

Het is soms mogelijk van een vakwerk wel de oplegreacties te bepalen uit

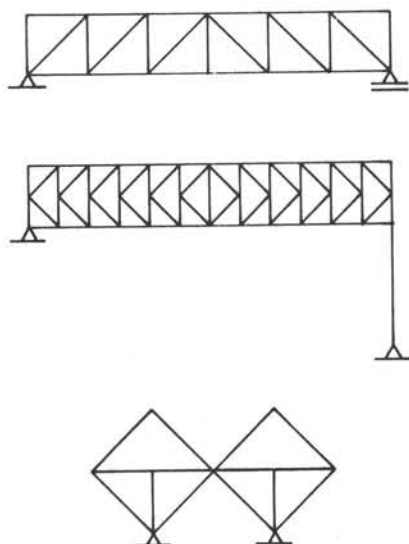


fig. 7.13.

de statica van het gehele vakwerk, maar niet de staafkrachten. Een voorbeeld hiervan is weergegeven in fig. 7.14. Men noemt een dergelijk vakwerk wel *uit-*

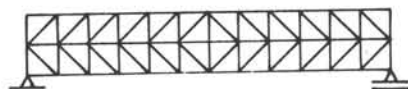


fig. 7.14.

wendig statisch bepaald en *inwendig statisch onbepaald*. Als de roloplegging vervangen wordt door een scharnieroplegging is het vakwerk ook *uitwendig statisch onbepaald*.

7.4. de snedemethode

De snedemethode is een methode ter bepaling van staafkrachten in een statisch bepaald vakwerk die gebaseerd is op een evenwichtsbeschouwing van het gedeelte van een vakwerk links of rechts van een denkbeeldige snede. Daartoe moeten in het algemeen wel eerst de oplegreacties bepaald worden. Dat kan geschieden met evenwichtsbeschouwingen voor het vakwerk als geheel. De methode kan het best gedemonstreerd worden aan de hand van een aantal voorbeelden. De voorbeelden hebben alle betrekking op enkelvoudige vakwerken. De behandelde methodes zijn ook zonder meer toepasbaar op samengestelde vakwerken. Het enige verschil is dat de bepaling van de oplegreacties bij een samengesteld vakwerk iets gecompliceerder is.

Voorbeeld 1

Het eerste voorbeeld heeft betrekking op het vakwerk van fig. 7.15, dat belast wordt door een enkele puntlast, groot 100 kN, precies in het midden. De oplegreacties zijn in dit geval beide verticaal omhoog gericht, en groot 50 kN. Om nu bijvoorbeeld de staafkrachten in het tweede veld (de krachten in de staven genummerd 6, 7 en 8) te bepalen, denke men zich dat tweede veld doorgesneden en beschouwe men het evenwicht van het gedeelte van het vakwerk links

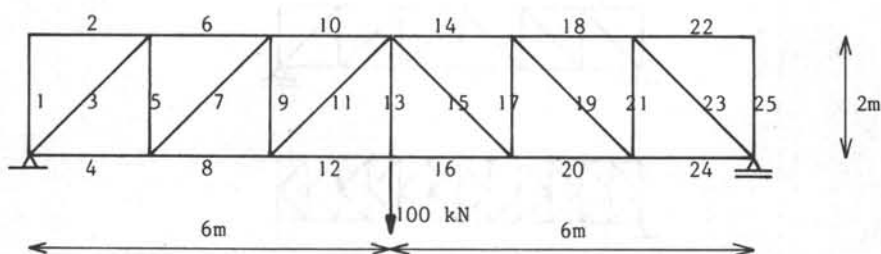


fig. 7.15.

van die snede (of, als alternatief, het gedeelte rechts van die snede), zie fig. 7.16. In deze figuur zijn alle krachten die op dat gedeelte van het vakwerk werken getekend. De bekende kracht (de oplegreactie aan het linkeruiteinde) is daarbij aangegeven met zijn richting en zijn grootte. De andere krachten (de onbekende staafkrachten N_6 , N_7 en N_8) zijn symbolisch weergegeven door aan te nemen dat het trekkrachten zijn. Daarbij is het gebruik gevolgd dat een normaalkracht in een staaf (een normaalkrachtinteractie) positief gerekend wordt als het de overdracht van een trekkracht betreft. Als een staaf uiteindelijk een drukkracht moet overbrengen, dan zal dat blijken uit het negatief zijn van de waarde van de staafkracht.

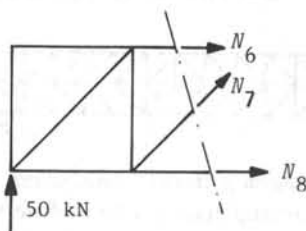


fig. 7.16.

Door een evenwichtsbeschouwing kan men de gezochte staafkrachten als volgt bepalen.

N_6 – De grootte van de staafkracht N_6 bepaalt men het eenvoudigst door het momentenevenwicht te beschouwen van het deel links van de snede ten opzichte van het snijpunt van de staven 7 en 8. Dit geeft

$$50 \text{ kN} \times 2 \text{ m} + N_6 \times 2 \text{ m} = 0.$$

Hieruit volgt

$$N_6 = -50 \text{ kN}.$$

N_7 – De grootte van de staafkracht N_7 bepaalt men het eenvoudigst door het verticaal evenwicht te beschouwen van het deel links van de snede. Dat dat handig is volgt uit het feit dat de krachten in de beide andere staven (de staven 6 en 8) geen verticale component hebben. Men vindt nu

$$50 \text{ kN} + N_7 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.$$

Hieruit volgt

$$N_7 = -70.71 \text{ kN}.$$

N_8 — De grootte van de staafkracht N_8 bepaalt men het eenvoudigst door het momentenevenwicht te beschouwen van het deel links van de snede ten opzichte van het snijpunt van de staven 6 en 7. Dit geeft

$$50 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - N_8 \times 2 \text{ m} = 0.$$

Hieruit volgt

$$N_8 = 100 \text{ kN}.$$

Ter controle zou men nu nog kunnen nagaan of het horizontaal evenwicht wel verzekerd is. Dit leidt tot de voorwaarde

$$N_6 + N_7 \times \frac{1}{2} \sqrt{2} + N_8 = 0.$$

Met de hierboven gevonden getalwaarden is hieraan inderdaad voldaan.

De drie staafkrachten N_6 , N_7 en N_8 zijn hiermee gevonden. Het principe van de snedemethode is dat men voor het deel aan één kant van een denkbeeldige snede drie onafhankelijke evenwichtsvergelijkingen opstelt. Deze drie vergelijkingen kunnen zijn:

- vergelijkingen voor het horizontaal evenwicht, het verticaal evenwicht en het momentenevenwicht t.o.v. een willekeurig punt;
- twee vergelijkingen voor het momentenevenwicht ten opzichte van twee verschillende punten en nog een vergelijking voor het evenwicht van alle krachtcomponenten in een bepaalde richting. Daarbij moet er (om de evenwichtsvergelijkingen onafhankelijk te doen zijn) wel voor gezorgd worden dat die richting van het krachterevenwicht niet loodrecht staat op de verbindinglijn van de twee punten ten opzichte waarvan men het momentenevenwicht beschouwd heeft;
- drie vergelijkingen voor het momentenevenwicht ten opzichte van drie verschillende punten, mits die drie punten niet op één rechte lijn liggen (anders zijn de evenwichtsvergelijkingen niet onafhankelijk).

De staafkrachten in de overige staven van het vakwerk van fig. 7.15 kan men op soortgelijke wijze bepalen. Steeds moet men er daarbij voor zorgen dat men een zodanige snede aanbrengt dat deze slechts drie staven snijdt. Dat levert in dit geval alleen een klein probleem op voor de middelste staaf, omdat men het vakwerk niet door een snede door staaf 13 en twee andere staven in een linker- en een rechterdeel kan verdelen. Elke snede door staaf 13 snijdt in totaal minstens vier staven, en dat is er één te veel om de krachten erin uit 3 evenwichtsvergelijkingen te bepalen. In het algemeen is de uitweg uit deze moeilijkheid deze dat men achtereenvolgens twee sneden beschouwt: eerst één die wel slechts drie staven snijdt (in dit geval bijvoorbeeld een snede door de staven 10, 11 en 12) en vervolgens een andere snede die hoogstens drie staven met onbekende staafkrachten snijdt (in dit geval dan een snede door de staven 10, 11, 13 en 16). Toevallig kan men in dit voorbeeld de staafkracht in staaf 13 nog heel wat eenvoudiger bepalen door een beschouwing van het evenwicht van het deel van het vakwerk onder een snede door de staven 12, 13 en 16, zie fig. 7.17. Het verticale evenwicht van dit deel van de ligger vereist nu dat

$$N_{13} = 100 \text{ kN.}$$

Dat deze staafkracht in dit geval zo eenvoudig bepaald kan worden is een toevallige omstandigheid. Het is een gevolg van het feit dat er in het knooppunt waaromheen de snede gekozen is slechts drie staven samenkomen waarvan er dan nog twee in elkaars verlengde liggen. De kracht in de derde staaf kan men in zo'n geval direct bepalen. Men merke op dat het niet mogelijk is de twee ande-

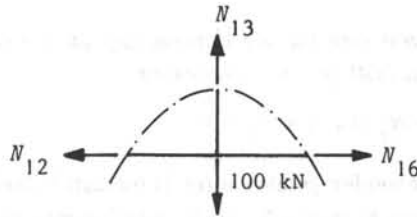


fig. 7.17.

re staafkrachten te bepalen uit een beschouwing van het evenwicht van het deel van het vakwerk getekend in fig. 7.17. Men vindt wel dat

$$N_{12} = N_{16},$$

maar de waarde van deze staafkrachten kan men met deze snede niet bepalen.

Voorbeeld 2

Het tweede voorbeeld heeft betrekking op het vakwerk getekend in fig. 7.18, met de in die figuur aangegeven belastingen. Ook in dit geval zijn de beide oplegreacties verticaal omhoog gericht, en elk 50 kN groot. De bepaling van bij-

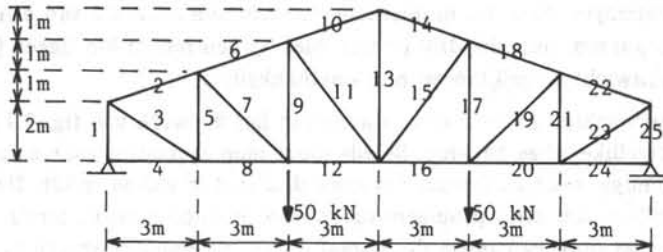


fig. 7.18.

na alle staafkrachten kan nu geschieden door een evenwichtsbeschouwing van het deel links of rechts van een verticale of bijna verticale snede. Zo kan men de staafkrachten in de staven 2, 5 en 8 bepalen door een snede aan te brengen door die staven, en de staafkrachten in de staven 6, 7 en 8 door een snede aan te brengen door deze staven. De lezer ga na dat men op die manier voor de betreffende staafkrachten vindt:

$$N_2 = -52.70 \text{ kN}$$

$$N_5 = -33.33 \text{ kN}$$

$$N_6 = -79.06 \text{ kN}$$

$$N_7 = +35.36 \text{ kN}$$

$$N_8 = +50.00 \text{ kN.}$$

De grootte van al deze staafkrachten kan men het eenvoudigst bepalen door een beschouwing van het momentenevenwicht van het deel links van een snede, ten opzichte van het snijpunt van twee staven waardoor de snede gaat. Zo kan men de staafkracht N_7 het eenvoudigst bepalen door zich een snede te denken door de staven 6, 7 en 8, en dan het momentenevenwicht te beschouwen van het deel links van die snede ten opzichte van het snijpunt van de staven 6 en 8.

Ook in dit geval stuit men op een probleem bij de bepaling van de staafkracht in de middelste staaf, staaf 13. En in dit geval kan men die moeilijkheid ook niet oplossen door een beschouwing van het evenwicht van het deel van het vakwerk rondom het knooppunt waarin de staven 10, 13 en 14 samenkomen. Het is, ter bepaling van de staafkracht N_{13} , nodig eerst tenminste één andere staafkracht te bepalen. Zo kan men in dit geval bijvoorbeeld eerst de staafkracht N_{10} bepalen, met behulp van een snede door de staven 10, 11 en 12. Men vindt hiervoor

$$N_{10} = -63.25 \text{ kN.}$$

De staafkracht N_{13} kan men nu bepalen met behulp van een snede door de staven 10, 13 en 14. Men vindt dan

$$N_{13} = +40.00 \text{ kN.}$$

Voorbeeld 3

Het derde voorbeeld betreft een uitkragend vakwerk, dat door een scharnier en een pendelstaaf is bevestigd aan een onvervormbare wand, zie fig. 7.19. Het vakwerk wordt belast door een verticaal naar beneden gerichte kracht, groot 50 kN, aan het rechteruiteinde. In dit geval is het voor de bepaling van de staafkrachten niet eens nodig eerst de oplegreacties te bepalen. De lezer ga na dat met behulp van een snede door de staven 4, 5 en 6 (of een snede door de staven 8, 7 en 6), en een evenwichtsbeschouwing voor het deel rechts van de snede, voor

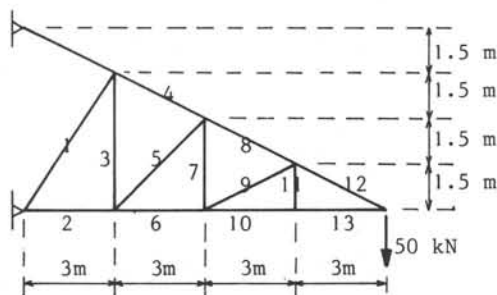


fig. 7.19.

de kracht in staaf 6 gevonden wordt

$$N_6 = -100 \text{ kN.}$$

Voorbeeld 4

Het vierde, en laatste, voorbeeld heeft betrekking op een wat ingewikkelder geval, namelijk een zogenaamde K-ligger, zie fig. 7.20. De belasting is zoals aan-

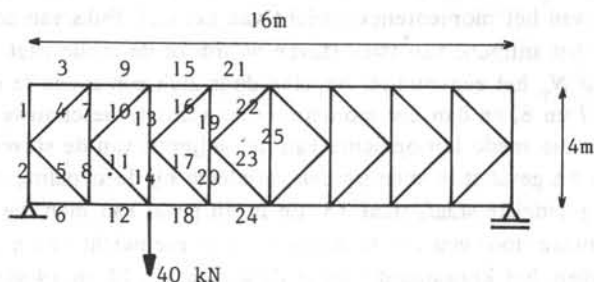


fig. 7.20.

gegeven in de figuur. De oplegreacties zijn beide verticaal omhoog gericht en hebben een grootte van 30 kN aan het linkerruiteinde, respectievelijk 10 kN aan het rechteruiteinde. De moeilijkheid bij een type vakwerk als dit is dat er voor de meeste staven geen snede gemaakt kan worden die maar drie staven snijdt. Er is daarom steeds extra informatie nodig, die men moet zien te verkrijgen door de snede handig te kiezen, of door gebruik te maken van meerdere sneden.

In dit geval kan men de staafkrachten in de staven van de bovenregel en de onderregel handig bepalen door een snede te kiezen zoals aangegeven in fig. 7.21. De staafkracht N_{15} kan men nu bepalen door het momentenevenwicht te beschouwen van het deel links van de snede, ten opzichte van het snijpunt van de staven 14 en 18. Dat dat zinvol is, is een gevolg van de omstandigheid dat de werklijn van de staafkracht N_{13} toevallig ook door dat punt gaat. Men vindt nu voor de kracht in staaf 15

$$N_{15} = -30 \text{ kN}.$$

Voor de staafkracht N_{18} vindt men, uit het momentenevenwicht ten opzichte van het snijpunt van de staven 13 en 15,

$$N_{18} = +30 \text{ kN}.$$

Dat de staafkrachten N_{15} en N_{18} tezamen nul zijn volgt ook direct uit het horizontaal evenwicht van het gedeelte van het vakwerk links van de snede van fig. 7.21.

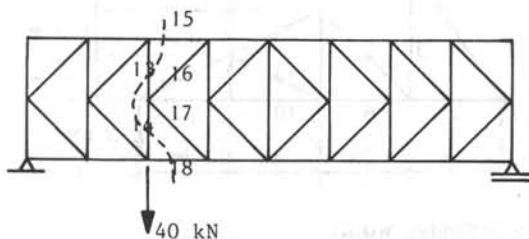


fig. 7.21.

Het toevallige karakter van de hier gevolgde werkwijze wordt goed geïllustreerd door het feit dat men met behulp van een snede door de staven 15, 13, 14 en 18 (zie fig. 7.21) weliswaar snel de staafkrachten N_{15} en N_{18} kan bepalen,

maar niet de staafkrachten N_{13} en N_{14} . Om die te bepalen moet men nog tenminste één andere snede beschouwen. Ook voor de bepaling van de staafkrachten in de schuine staven, zoals 16 en 17 moet men tenminste twee evenwichtsbeschouwingen met behulp van twee verschillende sneden opstellen. Het is niet mogelijk deze staafkrachten met behulp van één enkele snede te berekenen.

De staafkrachten N_{16} en N_{17} kan men vinden door eerst een snede aangebracht te denken door de staven 15, 16, 17 en 18, zie fig. 7.22. Uit het horizontale evenwicht van het deel links van die snede volgt nu, omdat al bekend is dat $N_{15} + N_{18} = 0$,

$$N_{16} + N_{17} = 0.$$

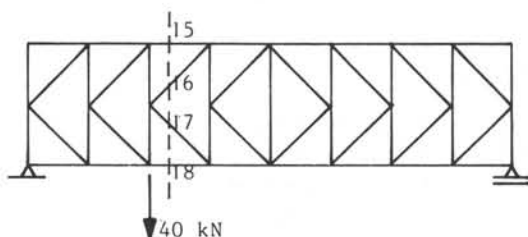


fig. 7.22.

Hierbij is gebruik gemaakt van het feit dat beide staven eenzelfde hoek met de horizontale richting maken. Men bedenke dat er ook gebruik gemaakt is van een gegeven verkregen met behulp van een andere snede: namelijk dat $N_{15} + N_{18} = 0$. Omdat nu bekend is dat de staafkrachten N_{16} en N_{17} dezelfde grootte hebben, maar tegengesteld van teken zijn, volgt nu uit het verticale evenwicht van het gedeelte van het vakwerk links van de snede van fig. 7.22 dat elk van de staafkrachten N_{16} en N_{17} een verticale component van 5 kN moet hebben, beide op het linkerdeel naar boven werkend. Deze staafkrachten zijn dus

$$N_{16} = +7.07 \text{ kN}$$

$$N_{17} = -7.07 \text{ kN}.$$

De bepaling van de krachten in de verticale staven is nog iets gecompliceerder. Men moet daartoe eerst de krachten in een schuine staaf bepalen, om dan vervolgens met behulp van een beschouwing van het verticale evenwicht van het deel van het vakwerk rondom een knooppunt, zie fig. 7.23, de staafkracht

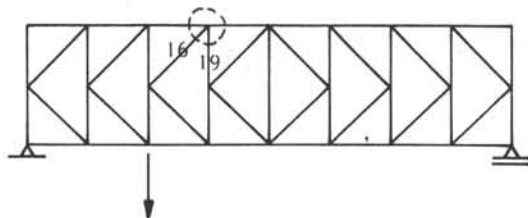


fig. 7.23.

in een verticale staaf te kunnen bepalen. Zo vindt men bijvoorbeeld, omdat al bekend is dat $N_{16} = +7.07 \text{ kN}$, voor de staafkracht in staaf 19

$$N_{19} = -5 \text{ kN}.$$

Een andere manier om de staafkrachten N_{16} en N_{19} te bepalen is dat men eerst de krachten in de horizontale staven 15 en 21 bepaalt (met snedes zoals aangegeven in fig. 7.21), en dan uit een beschouwing van het evenwicht van een knooppunt (zie fig. 7.23) de krachten in de staven 16 en 19 bepaalt.

Men merke op dat de snedemethode een soms weinig systematisch karakter heeft. Het kiezen van de meest geschikte snede is vaak niet zo eenvoudig, en soms is het zelfs nodig eerst nog een andere snede in de beschouwingen te betrekken. Desondanks is de methode vaak erg handig, met name als men slechts een beperkt aantal staafkrachten wil bepalen, en vooral als het vakwerk zodanig is opgebouwd dat voor de gezochte staafkrachten sneden door niet meer dan drie staven mogelijk zijn.

7.5. het Cremona-diagram

Een iets meer systematische methode dan die met behulp van snedes is de grafische methode met behulp van een zogenaamd Cremona-diagram (in Engelse leerboeken meestal aangeduid als Maxwell-diagram). Bij deze methode worden in principe alle staafkrachten van het hele vakwerk bepaald. Ook deze methode kan het beste worden uitgelegd aan de hand van een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1

Het eerste voorbeeld betreft het vakwerk van fig. 7.24, belast door een enkele puntlast, groot 100 kN, aangrijpend in het midden. De oplegreacties zijn

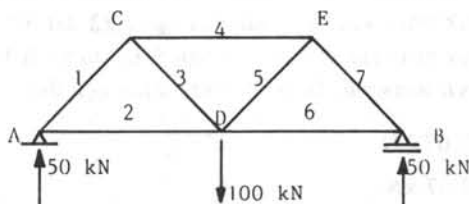


fig. 7.24.

beide verticaal omhoog gericht, en 50 kN groot. Het principe van de methode is nu achtereenvolgens het evenwicht in elk knooppunt te beschouwen, met behulp van een krachtenveelhoek. Beschouwt men eerst het punt A, dan wordt de daarvoor geldende krachtenveelhoek zoals aangegeven in fig. 7.25. In deze

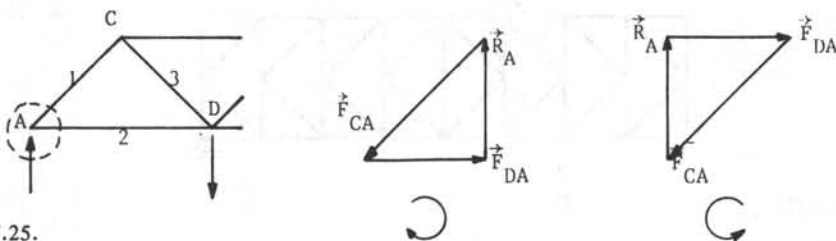


fig. 7.25.

figuur is de oplegreactie, zoals deze op het vakwerk werkt, aangegeven als $\vec{R}_A$. De kracht die door middel van de staaf 1 werkt op het knooppunt A is aangege-

ven als $\vec{F}_{CA}$, waarbij de indices aangeven dat er een kracht overgebracht wordt van C naar A. Er zijn in fig. 7.25 twee equivalenten krachtenveelhoeken getekend, die beide uiteraard tot dezelfde waarden voor de krachten $\vec{F}_{CA}$ en $\vec{F}_{DA}$ leiden. Men kan zeggen dat de eerste krachtenveelhoek ontstaat als men de verschillende krachten die op het knooppunt A werken rangschikt in de volgorde met de wijzers van de klok mee. De tweede krachtenveelhoek ontstaat als men de krachten achter elkaar uitzet in de volgorde die behoort bij een draaiing om punt A tegen de wijzers van de klok in. Essentieel in de Cremona-methode is dat men bij alle knooppunten dezelfde volgorde aanhoudt. Meestal kiest men daarvoor de volgorde die behoort bij een draaiing met de wijzers van de klok mee. Die volgorde zal in het vervolg van deze paragraaf ook worden aangehouden.

Omdat nu de kracht die door middel van staaf 1 overgebracht wordt bekend is kan vervolgens het evenwicht beschouwd worden van het knooppunt C. De daarbij behorende krachtenveelhoek is getekend in fig. 7.26. Er is daarbij gebruik gemaakt van de wetenschap dat de kracht door staaf 1 uitgeoefend op punt C, $\vec{F}_{AC}$, op het teken na gelijk is aan de kracht die door deze staaf op het knooppunt

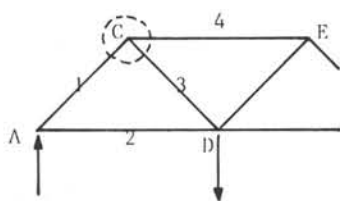


fig. 7.26.

punt A wordt uitgeoefend, $\vec{F}_{CA}$,

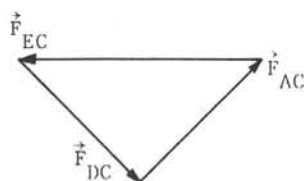
$$\vec{F}_{AC} = -\vec{F}_{CA}.$$

Men zie hiervoor ook de beschouwingen over normaalkrachtinteracties in paragraaf 5.1.

De krachtenveelhoeken voor de knooppunten D, E en B kunnen nu achtereenvolgens getekend worden, zie fig. 7.27. De laatste krachtenveelhoek dient daarbij meer als controle, omdat na de beschouwing van het evenwicht van de knooppunten D en E alle krachten die op het knooppunt B werken bekend zijn.

Doordat alle krachtenveelhoeken geconstrueerd zijn met dezelfde volgorde van de staafkrachten (met de wijzers van de klok mee), en doordat de uitwendige krachten (belasting en oplegreacties) buiten het vakwerk zijn getekend en op die manier ingepast in die volgorde, is het nu mogelijk alle krachtenveelhoeken te verzamelen tot één figuur, het zogenaamde Cremona-diagram, of ook wel kortweg: de Cremona, zie fig. 7.28.

Hierboven is de Cremona voor het beschouwde vakwerk stapsgewijs opgebouwd. In de praktijk tekent men alleen de laatste figuur, fig. 7.28. In deze figuur zijn de staafkrachten aangegeven door het nummer van de betreffende staaf erbij te schrijven. Het teken van de staafkracht (positief voor trek, negatief voor druk) is uit het Cremona-diagram niet zonder meer duidelijk. Wel kan men dat teken eruit afleiden. Men kan daartoe een deel van de Cremona behorende



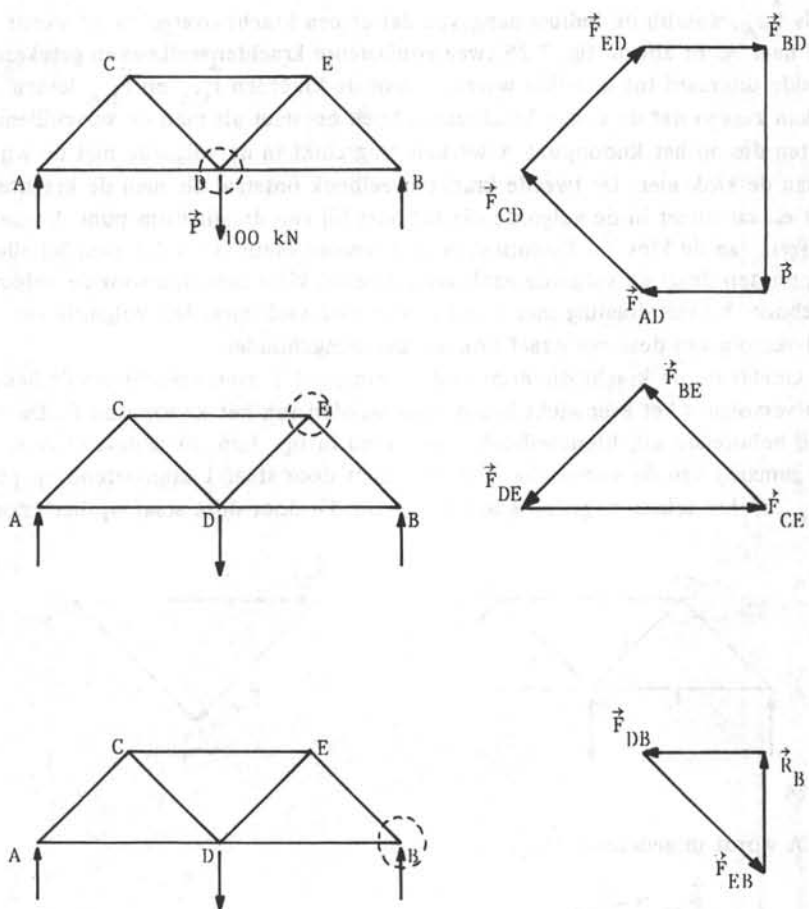


fig. 7.27.

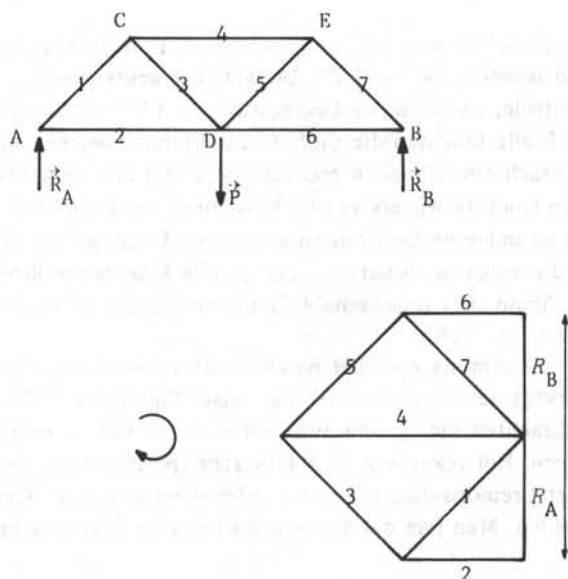


fig. 7.28.

bij een bepaald knooppunt apart beschouwen, bedenkend dat de Cremona geconstrueerd is met een volgorde van de staafkrachten met de wijzers van de klok mee. Zo kan men bijvoorbeeld het teken van de staafkracht N_4 als volgt nagaan. Men beschouwt een van de knooppunten aan de uiteinden van die staaf, bijvoorbeeld punt E. In het schema van het vakwerk is de staafvolgorde 4-7-5, en dat moet dus ook de volgorde van de staafkrachten in de Cremona zijn. Loopt men het deel van de Cremona bestaande uit de staafkrachten N_4 , N_7 en N_5 nu door, dan blijkt dat in staaf 4 een kracht werkt naar het knooppunt toe gericht. Dat betekent dat staaf 4 een drukstaaf is. Hetzelfde resultaat had men uiteraard kunnen verkrijgen door knooppunt C te beschouwen, zie fig. 7.29.

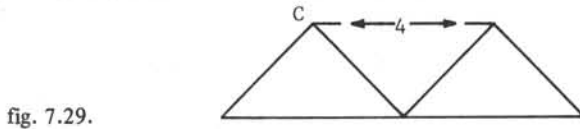


fig. 7.29.

De grootte van elk der staafkrachten vindt men door opmeten uit het Cremona-diagram (rekening houdend met de schaal). Het teken moet men dan nog op de hierboven beschreven wijze uit een rondgang in de Cremona langs de krachten werkend op één knooppunt, in dezelfde volgorde als waarin die staven in het vakwerk rondom dat vakwerk voorkomen, gerekend met de wijzers van de klok mee.

Een handige wijze van notatie is die van Bow, waarbij alle delen van het platte vlak, waarin dat door de staven van het vakwerk en de uitwendige krachten verdeeld wordt, aangegeven worden met een kleine letter. Deze letters komen dan in de Cremona terug in de snijpunten van de staafkrachten, zie fig. 7.30.

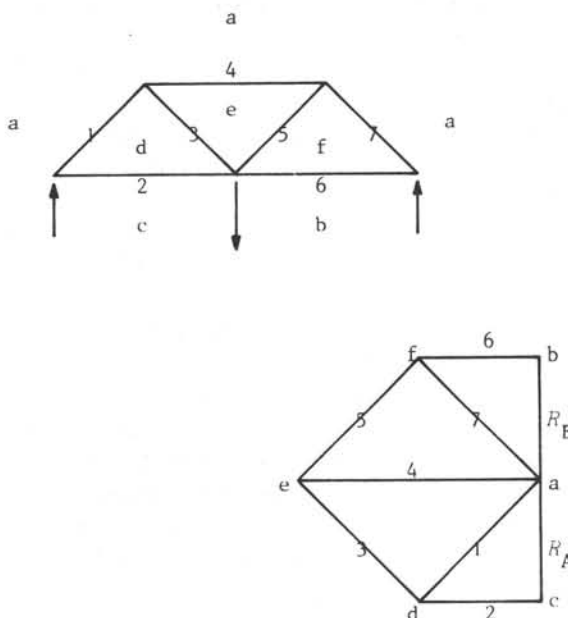


fig. 7.30.

De staafkracht in staaf 4 bevindt zich in de Cremona tussen de punten a en e, omdat in het schema van het vakwerk de staaf 4 ligt tussen de velden a en e. Het teken kan men bepalen door te bedenken dat voor knooppunt E de staaf 4 met de wijzers van de klok meedraaiend ligt tussen e en a (in die volgorde). In de Cremona loopt de staafkracht dan van e naar a, dat is dus in staaf 4 naar knooppunt E toe werkend. Dat betekent dat in staaf 4 een drukkracht werkt.

De lezer kan voor zichzelf nagaan dat de constructie van de Cremona op twee manieren fout kan gaan. De eerste is als men niet in alle knooppunten consequent de volgorde van staven met de wijzers van de klok mee (of consequent daartegenin) aanhoudt. De tweede is als men de uitwendige krachten niet inpast in die volgorde als van buiten het vakwerk komend. In beide gevallen kan men de krachtenveelhoeken voor alle knooppunten niet samenstellen tot een echte Cremona, dat wil zeggen een figuur waarin alle staafkrachten, belastingen en oplegreacties slechts één keer voorkomen.

Voorbeeld 2

Na de uitvoerige behandeling van het eerste voorbeeld wordt voor het tweede voorbeeld, dat betrekking heeft op een K-ligger, zie fig. 7.31, volstaan met het geven van het volledige Cremona-diagram, met de notatie van Bow. De constructie van de Cremona is uitgevoerd door eerst van het linker-steunpunt naar het midden te werken, en daarna van het rechtersteunpunt ook naar het midden te werken. Het blijkt nodig te zijn van beide steunpunten af te werken omdat men in het midden min of meer vastloopt als men van een kant af construeert.

Bij de constructie van de Cremona loopt men in het begin ook al bijna vast omdat in het knooppunt juist boven de oplegging (het punt dat de velden a, d, e en f gemeenschappelijk hebben) eigenlijk nog drie krachten onbekend zijn. Die moeilijkheid kan worden opgelost door te bedenken dat de twee staven die elkaar in het knooppunt linksboven ontmoeten *nulstaven* moeten zijn. Hetzelfde geldt voor de twee staven door het knooppunt rechtsboven. Ook in die twee staven is er geen kracht.

Men merke op dat in de Cremona sommige punten samenvallen, bijvoorbeeld h en j. Dat betekent dan dat bij deze belasting in de betreffende staaf de kracht gelijk aan nul is.

De lezer ga zelf na dat de kracht in de staaf tussen de velden n en l een drukkracht is, en dat de kracht in de staaf tussen de velden e en f een trekkracht is.

De grafische methode met behulp van een Cremona-diagram bevat weliswaar een zekere systematiek (de knooppunten worden successievelijk afgewerkt), maar het is soms wel nodig een kleine tussenstap te maken of een bepaalde handige volgorde te kiezen. Dat geeft de methode een enigszins arbitrair karakter. Vandaar dat men tegenwoordig vaak de voorkeur geeft aan een methode die dan wel meer werk vraagt, maar het voordeel heeft dat zij volkomen systematisch is. Dat is de methode van knooppuntenevenwicht, die in de volgende paragraaf beschreven wordt. Deze methode leent zich ook zeer goed voor uitwerking met behulp van een computer.

7.6. knooppuntenevenwicht

Zoals reeds gesteld in paragraaf 7.3 geldt voor een statisch bepaald vakwerk,

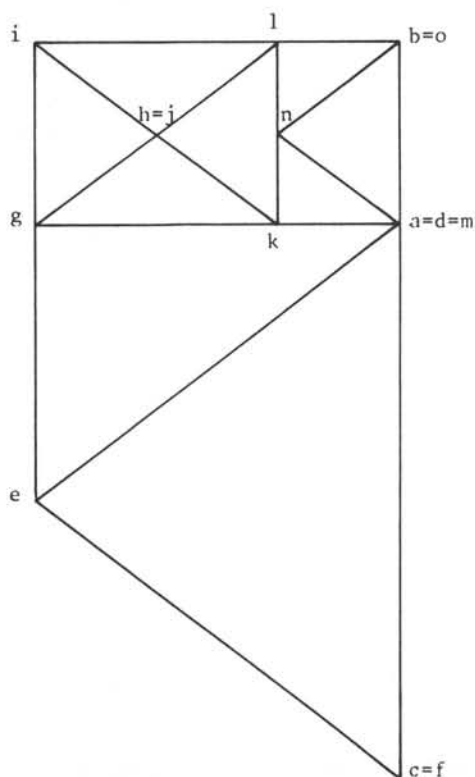
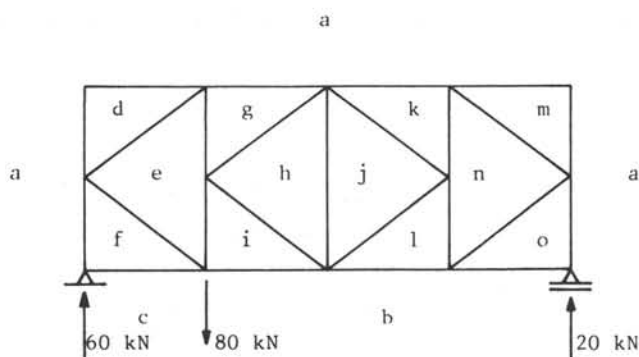


fig. 7.31.

in zekere zin bij definitie, dat het totale aantal onbekenden (staafkrachten en oplegreacties) gelijk is aan het totale aantal onafhankelijke evenwichtsvergelijkingen dat men kan opstellen. De methode van het knooppuntenevenwicht is een directe uitwerking van die stelling. Bij deze methode worden alle evenwichtsvergelijkingen achtereenvolgens uitgeschreven, hetgeen leidt tot een stelsel van $2k$ lineaire algebraïsche vergelijkingen met $2k$ onbekenden, als k het aantal knooppunten is. De methode kan het beste worden gedemonstreerd aan de hand van een eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld

Het voorbeeld betreft het vakwerk dat ook reeds beschouwd is als eerste

voorbeeld in de vorige paragraaf, zie fig. 7.32. In het vlak van het vakwerk zijn

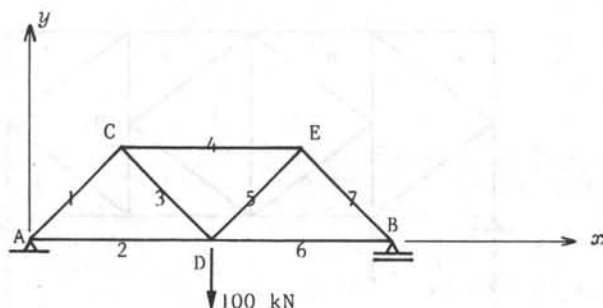


fig. 7.32.

een x -as en een y -as aangenomen zoals getekend in de figuur. De componenten van de oplegreactie in het scharnier aan het linkereinde zullen worden aangegeven met A_x en A_y . De verticale component van de oplegreactie in punt B zal worden aangegeven met B_y . Zoals gebruikelijk worden alle onbekende grootheden (de 7 staafkrachten en de 3 oplegreacties) in beginsel positief aangenomen. Hun grootte wordt aangegeven met $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, A_x, A_y$ en B_y . Een negatieve uitkomst betekent dan dat de grootte negatief is.

De voorwaarden voor het evenwicht in x - en y -richting van de 5 knooppunten zijn

$$\text{knooppunt A, } \Sigma F_x = 0: N_1 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + N_2 + A_x = 0.0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0: N_1 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + A_y = 0.0 \quad (2)$$

$$\text{knooppunt C, } \Sigma F_x = 0: -N_1 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + N_3 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + N_4 = 0.0 \quad (3)$$

$$\Sigma F_y = 0: -N_1 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} - N_3 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.0 \quad (4)$$

$$\text{knooppunt D, } \Sigma F_x = 0: -N_2 - N_3 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + N_5 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + N_6 = 0.0 \quad (5)$$

$$\Sigma F_y = 0: N_3 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + N_5 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} - 100 \text{ kN} = 0.0 \quad (6)$$

$$\text{knooppunt E, } \Sigma F_x = 0: -N_4 - N_5 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + N_7 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.0 \quad (7)$$

$$\Sigma F_y = 0: -N_5 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} - N_7 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.0 \quad (8)$$

$$\text{knooppunt B, } \Sigma F_x = 0: -N_6 - N_7 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.0 \quad (9)$$

$$\Sigma F_y = 0: N_7 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} + B_y = 0.0 \quad (10)$$

De hierboven gegeven vergelijkingen vormen een stelsel van 10 lineaire algebraïsche vergelijkingen met 10 onbekenden. Op de oplossing van deze vergelijkingen wordt straks ingegaan. Eerst zullen nog een aantal opmerkingen over de vergelijkingen zelf worden gemaakt.

De vergelijkingen zijn opgesteld door het evenwicht van elk knooppunt te beschouwen. Daarmee is het evenwicht van het gehele vakwerk verzekerd. Een beschouwing van het vakwerk als geheel geeft geen extra informatie. Formeel wiskundig kan men stellen dat de evenwichtsvergelijkingen voor het vakwerk als geheel een lineaire combinatie vormen van de hierboven gegeven vergelijkingen. Zo vindt men bijvoorbeeld de vergelijking voor het evenwicht van het vakwerk als geheel in x -richting door alle knooppuntenevenwichtsvergelijkingen in x -richting bij elkaar op te tellen. Dat geeft dan

$$A_x = 0.0$$

en dat is inderdaad de vergelijking voor het evenwicht in x-richting van het vakwerk als geheel. Evenzo vindt men door optelling van alle knooppuntevenwichtsvergelijkingen in y-richting van het vakwerk als geheel,

$$A_y - 100 \text{ kN} + B_y = 0.0.$$

Het momentenevenwicht van het vakwerk als geheel is eveneens automatisch verzekerd. Dat de vergelijking voor het momentenevenwicht eveneens gevonden kan worden uit een lineaire combinatie van de 10 knooppuntevenwichtsvergelijkingen is niet zo snel in te zien. Om de vergelijking voor het momentenevenwicht ten opzichte van punt A,

$$2 \times B_y - 1 \times 100 \text{ kN} = 0$$

te verkrijgen, moet men de volgende combinatie van de vergelijkingen nemen

$$4 \times (10) + 3 \times (8) + 2 \times (6) - (3) + (4) - (7).$$

Hierin duiden de getallen tussen haakjes op de hierboven gegeven vergelijkingen voor het knooppuntevenwicht.

Laten we nu terugkeren tot de tien vergelijkingen voor het evenwicht van de vijf knooppunten. De oplossing van een dergelijk stelsel van lineaire vergelijkingen is in principe niet moeilijk, maar kan wel vrij bewerkelijk zijn. In het geval van een vakwerk met een groot aantal knooppunten loont het de moeite hiervoor een computer in te schakelen. Er zijn voor de oplossing van dit type problemen standaard-programma's beschikbaar bij elk rekencentrum. Een voorbeeld hiervan is het ICES-STRUDL-programma, dat beschikbaar is bij het rekencentrum van de T.H. Delft. Dat programma-pakket bevat een subprogramma dat speciaal geschreven is voor de berekening van staafkrachten in een statisch bepaald vakwerk. In het tweede studiejaar zal ook een computer-programma voor de berekening van vakwerken behandeld worden.

In het hier beschouwde geval is het nog wel mogelijk het stelsel van vergelijkingen zelf op te lossen, door achtereenvolgende eliminatie van variabelen. De volgorde waarin men dit doet is daarbij van grote invloed op de hoeveelheid werk. Het is meestal ook wel verstandig toch eerst apart de oplegreacties te bepalen uit het evenwicht van het vakwerk als geheel. In dit geval zijn die oplegreacties

$$A_x = 0 \text{ kN}$$

$$A_y = 50 \text{ kN}$$

$$B_y = 50 \text{ kN}.$$

Dan volgen de staafkrachten direct achtereenvolgens uit de knooppuntevenwichtsvergelijkingen op de volgende wijze

$$\text{uit (2): } N_1 = - 70.71 \text{ kN}$$

$$\text{uit (1): } N_2 = + 50.00 \text{ kN}$$

$$\text{uit (4): } N_3 = + 70.71 \text{ kN}$$

uit (3): $N_4 = -100.00 \text{ kN}$

uit (6): $N_5 = + 70.71 \text{ kN}$

uit (5): $N_6 = + 50.00 \text{ kN}$

uit (7): $N_7 = - 70.71 \text{ kN}$.

De vergelijkingen (8), (9) en (10) zijn nu niet nodig. Dat komt doordat eerst de oplegreacties zijn bepaald, uit de drie evenwichtsvergelijkingen voor het vakwerk als geheel. Men zou kunnen zeggen dat de vergelijkingen (8), (9) en (10) daarin verdisconteerd zijn.

Het wiskundig karakter van het stelsel van knooppuntsevenwichtsvergelijkingen hangt direct samen met het mechanisch karakter van de constructie. Een statische bepaalde constructie leidt altijd tot een stelsel van n onafhankelijke vergelijkingen met n onbekenden. Als bij het opstellen van de vergelijkingen blijkt dat er minder vergelijkingen zijn dan onbekenden, dan betekent dit in het algemeen dat het vakwerk statisch onbepaald is. Dat de hier beschreven methode, die uitsluitend op de statica berust, dan niet tot een oplossing leidt, spreekt eigenlijk vanzelf. Als het aantal vergelijkingen groter is dan het aantal onbekenden, terwijl de vergelijkingen wel onafhankelijk zijn, dan betekent dit in het algemeen dat de constructie niet kinematisch bepaald is: de constructie is ofwel niet vormvast ofwel niet kinematisch bepaald opgelegd. Overigens blijft het zo dat het gemakkelijker is de vormvastheid van een vakwerkconstructie na te gaan aan de hand van het schema van het vakwerk, dan aan de hand van een meestal niet zo erg doorzichtig stelsel van algebraïsche vergelijkingen.

Men kan verwachten dat in de toekomst de hier behandelde methode van het knooppuntenevenwicht vanwege zijn systematische opbouw de minder systematische methodes met behulp van snedes of het Cremona-diagram voor een groot deel zal verdringen. Waarschijnlijk zal echter nog een iets andere methode (gebaseerd op verplaatsingen) uiteindelijk het meest gebruikt worden. Men zie hiervoor het tweedejaarscollege toegepaste mechanica.

De eerder behandelde methodes zullen, door hun eenvoud, minstens een deel van hun waarde behouden, ook als de berekeningen met behulp van een computerprogramma worden uitgevoerd. Dit geldt met name voor de snedemethode, die een uitstekende mogelijkheid biedt om uitkomsten gevonden door een computer te controleren. Op die manier kan men eventuele fouten, bijvoorbeeld ontstaan door een fout van de gebruiker bij de invoer van de gegevens, opsporen.

7.7. matrixbehandeling

De methode van het knooppuntenevenwicht, besproken in de vorige paragraaf, leent zich zeer goed voor een behandeling met behulp van matrices. Daartoe wordt nogmaals het vakwerk van fig. 7.32 beschouwd, zie fig. 7.33. Ditmaal zijn de knooppunten genummerd van 1 t/m 5, in plaats van ze met letters aan te geven. Ter onderscheiding van de nummering van de staven zijn de nummers daarvan tussen haakjes geplaatst.

Voor de opstelling van de vergelijkingen wordt eerst een willekeurig element beschouwd, de staaf genummerd (e), tussen de knopen i en j , zie fig. 7.34.

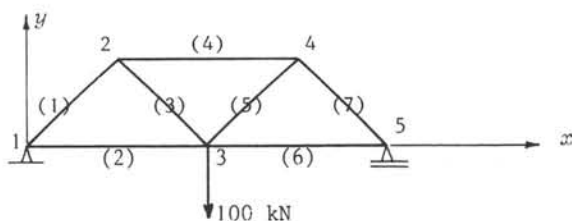


fig. 7.33.

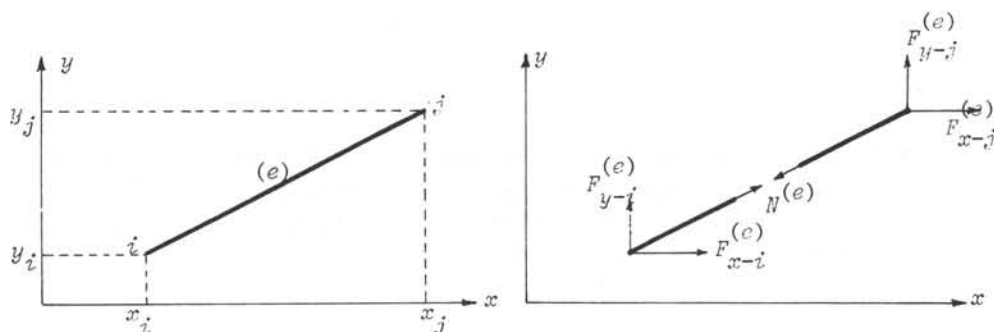


fig. 7.34.

Gesteld wordt dat

$$\Delta x^{(e)} = x_j - x_i, \quad \Delta y^{(e)} = y_j - y_i.$$

Voor de lengte van deze staaf, $l^{(e)}$, geldt nu

$$l^{(e)} = \{(\Delta x^{(e)})^2 + (\Delta y^{(e)})^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Uit het evenwicht van de staaf volgt dat in knoop i de volgende krachten op de staaf moeten worden uitgeoefend

$$F_{x-i}^{(e)} = -\frac{\Delta x^{(e)}}{l^{(e)}} N^{(e)}$$

$$F_{y-i}^{(e)} = -\frac{\Delta y^{(e)}}{l^{(e)}} N^{(e)}.$$

Omdat er in knoop i meerdere staven samenkomen zijn er ook meerdere van deze krachten, die tezamen geleverd moeten worden door de van buiten op die knoop werkende kracht. Noemt men de componenten van de uitwendige kracht op knoop i F_{x-i} en F_{y-i} , dan moet er dus gelden

$$F_{x-i} = -\sum_{(e)} \frac{\Delta x^{(e)}}{l^{(e)}} N^{(e)}$$

$$F_{y-i} = -\sum_{(e)} \frac{\Delta y^{(e)}}{l^{(e)}} N^{(e)}.$$

De sommatie moet hierbij geschieden over alle staven die in knoop i samenkomen. De uitwendige krachten op alle knopen kan men verzamelen in een kolomvector F , en de normaalkrachten in de staven kan men verzamelen in een kolom-

vector N ,

$$F = \begin{bmatrix} F_{x-1} \\ F_{y-1} \\ F_{x-2} \\ F_{y-2} \\ \vdots \\ F_{x-k} \\ F_{y-k} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \\ \vdots \\ N^{(s)} \end{bmatrix}$$

Hierin is k het aantal knopen, en s het aantal staven. De vector F heeft dus $2k$ componenten, en de vector N heeft er s . In het algemeen is $s \neq 2k$.

De hierboven gegeven vergelijkingen voor de uitwendige krachten op de knopen kan men in matrixvorm schrijven als

$$F = AN.$$

Hierin is A een rechthoekige matrix, met $2k$ rijen en s kolommen,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,s} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2k,1} & A_{2k,2} & \dots & A_{2k,s} \end{bmatrix}$$

De coëfficiënten van de matrix A zijn van het type $\pm \Delta x/l$ en $\pm \Delta y/l$. Zo geeft bijvoorbeeld staaf (1), die de knopen 1 en 2 verbindt, de volgende bijdrage aan de matrix

$$\begin{bmatrix} -\Delta x^{(1)}/l^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\Delta y^{(1)}/l^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ +\Delta x^{(1)}/l^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ +\Delta y^{(1)}/l^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Dit element levert immers een bijdrage aan de kracht zowel in knoop 1 als in knoop 2, terwijl die beide krachten gelijk en tegengesteld zijn, en alle componenten evenredig zijn met N_1 . Voor wat betreft het teken van de termen moet nog worden afgesproken welk knooppunt als i zal worden beschouwd en welk als j . Een eenvoudige afspraak is dat men staaf (e) laat lopen van knoop i naar knoop

j zodanig dat knooppuntnummer i steeds kleiner is dan j . Voor staaf (1) is dan

$$\Delta x^{(1)} = x_2 - x_1$$

$$\Delta y^{(1)} = y_2 - y_1$$

en voor de krachten geldt dan

$$F_{x-1} = -\frac{\Delta x^{(1)}}{l^{(1)}} N^{(1)}$$

$$F_{y-1} = -\frac{\Delta y^{(1)}}{l^{(1)}} N^{(1)}$$

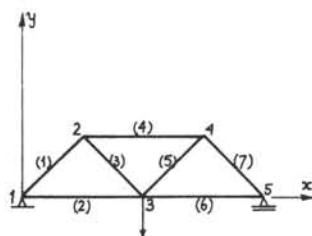
$$F_{x-2} = +\frac{\Delta x^{(1)}}{l^{(1)}} N^{(1)}$$

$$F_{y-2} = +\frac{\Delta y^{(1)}}{l^{(1)}} N^{(1)}$$

De matrix A wordt opgebouwd uit net zoveel kolommen als er staven zijn, waarbij elke staaf in zijn eigen kolom 4 coëfficiënten bijdraagt, en de andere bij voorbaat gelijk aan nul zijn.

In het voorbeeld van fig. 7.33 is $k = 5$ (en dus $2k = 10$) en $s = 7$. De structuur van de matrix A is dan als volgt

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$



Hierin geven de kruisjes de bijdragen van de staven aan.

Een belangrijk probleem uit de statica is de bepaling van de normaalkrachten in de staven van een vakwerk, onder invloed van gegeven uitwendige krachten in een aantal knopen. Dat is ook het probleem beschouwd in de vorige paragrafen. Of het probleem wiskundig oplosbaar is hangt samen met het karakter van het stelsel vergelijkingen. In principe kan gesteld worden dat een probleem van het type

$$F = AN$$

met A en F gegeven en N onbekend, alleen eenduidig oplosbaar is als A een niet-singuliere vierkante matrix is. Als er in A meer kolommen zijn dan rijen, zijn er vergelijkingen te kort. De oplossing is dan niet eenduidig. Als er in A meer rijen zijn dan kolommen, zijn er vergelijkingen te veel. Dan bestaat er in het algemeen geen oplossing, tenzij er afhankelijke vergelijkingen zijn, of als er in F nog onbekenden voorkomen, zodat er minder vergelijkingen zijn dan rijen in de matrix.

In het voorbeeld van fig. 7.33 is $k = 5$ (en dus $2k = 10$) en $s = 7$. Er zijn

7 onbekende staafkrachten. Om tot een oplosbaar probleem te komen moeten er dan 7 knooppunten gegeven zijn. Dat is ook juist het geval! Het gereduceerde stelsel van vergelijkingen

$$F_r = A_r N$$

waarin A_r een vierkante (7×7)-matrix is, heeft een eenduidige oplossing. Dit gereduceerde stelsel van vergelijkingen vindt men op pag. 108 terug als de vergelijkingen (3) t/m (9) van het oorspronkelijke stelsel. De matrix A_r mist in vergelijking met A de eerste, tweede en tiende rij, die behoren bij respectievelijk F_{x-1} , F_{y-1} en F_{y-5} , dat zijn de onbekende oplegreacties.

Als het probleem is opgelost ($N = A_r^{-1} F_r$) kan men de volledige verzameling van knooppunten, inclusief de aanvankelijk onbekende oplegreacties bepalen door substitutie van de gevonden waarde van N in de oorspronkelijke vergelijking. Dit geeft dan

$$F = AN = AA_r^{-1} F_r.$$

Omdat het probleem in dit geval een eenduidige oplossing heeft op basis van uitsluitend evenwichtsbeschouwingen noemt men het statisch bepaald.

Als er nog een oplegging zou zijn (bv. een scharnier in punt 5 i.p.v. een rol, zie fig. 7.35) zijn er maar 6 bekende uitwendige krachten en dus maar 6 vergelijkingen met 7 onbekenden. Er is dan geen eenduidige oplossing. Het probleem is statisch onbepaald. Als het vakwerk een staaf minder zou tellen dan

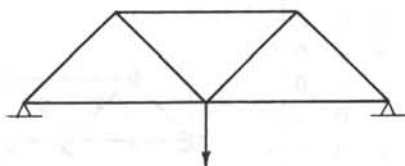


fig. 7.35.

het geval is in fig. 7.33 (denk bijvoorbeeld de bovenrandstaaf (4) weg, zie fig. 7.36), dan zijn er 6 onbekende staafkrachten en 7 gegeven knooppunten. Er

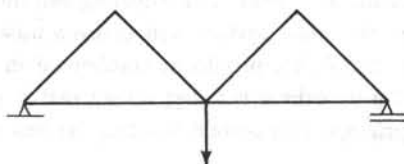


fig. 7.36.

zijn dan 7 vergelijkingen met 6 onbekenden. In het algemeen heeft dat geen oplossing. Dat betekent dat er in dit geval geen evenwicht mogelijk is. Een ingenieur ziet dat direct aan het schema: de constructie is immers kinematisch onbepaald.

8. VERVORMINGEN VAN VAKWERKEN

In dit hoofdstuk wordt beschreven hoe men de vervormingen van een statisch bepaald vakwerk kan bepalen. Daarbij zal worden uitgegaan van het gedrag van de enkele op normaalkracht belaste staaf. De beschouwingen zijn alleen geldig als de vervormingen klein zijn, dat wil zeggen dat de lengteverandering van de staaf zeer klein moet zijn ten opzichte van de oorspronkelijke lengte van de staaf.

8.1. lengteverandering van een staaf

Indien een staaf belast wordt op normaalkracht, zie fig. 8.1, zal de lengte



fig. 8.1.

van de staaf iets veranderen. Voor vele materialen geldt dat de lengteverandering met zeer goede benadering evenredig is met de aangebrachte normaalkracht. De kracht moet daarbij niet te groot zijn, anders zou de staaf bijvoorbeeld breken. Deze evenredigheid van normaalkracht en lengteverandering vormt een goede beschrijving van het gedrag van staven gemaakt van metaal (bv. staal of aluminium) of hout. Deze evenredigheid is ontdekt door Hooke ("ut tensio sic vis", of, zoals Hooke zijn wet voor het eerst publiceerde: "ceiiinossstuv"). In fig. 8.2 is een voorbeeld gegeven van de waarnemingen bij een experiment waarbij men een staaf

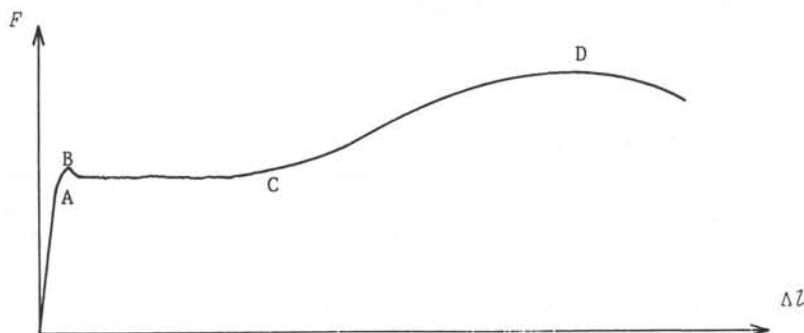


fig. 8.2.

len staaf in een zogenaamde trekbank steeds langer maakt en de daartoe benodigde kracht registreert. De evenredigheid tussen kracht en verlenging geldt tot ongeveer bij punt A. Als de kracht nog wat verder toeneemt (tot bij B) begint het staal grote vervormingen te vertonen zonder dat de kracht verder toeneemt. Men zegt dat het staal dan *vloeit*. Als de vervormingen erg groot worden kan de kracht weer gaan toenemen. Men noemt dat *versteving* (het traject CD in fig. 8.2). Bij D begint de staaf te breken, de kracht valt dan weg. In het vervolg zal aangenomen worden dat de krachten in de staven steeds zo klein blijven dat de verlenging evenredig is met de normaalkracht. Men zegt dat de vervormingen *elastisch* zijn.

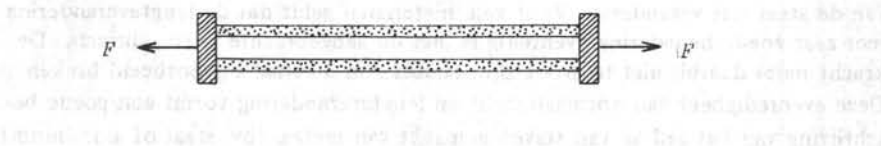
Het ligt voor de hand dat de lengteverandering Δl van een staaf met constante doorsnede (men noemt dat een *prismatische staaf*) niet alleen evenredig is met de normaalkracht F in de staaf, maar ook evenredig is met de oorspronkelijke lengte l van de staaf. Dat kan men inzien door zich het gedrag van twee achter elkaar bevestigde staven voor te stellen, zie fig. 8.3. De totale lengteveran-



fig. 8.3.

dering zal de som van de verlengingen van elk der staven zijn.

Men kan ook eenvoudig inzien dat de verlenging Δl omgekeerd evenredig moet zijn met het oppervlak A van de staafdoorsnede. Daartoe kan men zich het gedrag van twee parallelle staven indenken, zie fig. 8.4. In elk der staven zal nu een normaalkracht $\frac{1}{2}F$ werken, en de verlenging is derhalve half zo groot als bij een enkele staaf met een normaalkracht F .



Dit alles leidt ertoe dat men kan stellen dat de verlenging Δl van een prismatische staaf ter lengte l , en met doorsnede A , belast door een normaalkracht F , evenredig is met $F l / A$. De evenredigheidsfactor noemt men de *elasticiteitsmodulus* E (in het Engels: Young's modulus),

$$\Delta l = \frac{F l}{E A}.$$

De elasticiteitsmodulus is een materiaalconstante, die de weerstand van het materiaal tegen lengteveranderingen karakteriseert. Voor staal is de elasticiteitsmodulus ongeveer 210 GPa (1 Pa = 1 pascal = 1 N/m², 1 GPa = 10⁹ N/m²). Voor aluminium is de elasticiteitsmodulus ongeveer 70 GPa, voor hout is de orde van grootte 10 GPa.

De grootheid $\Delta l / l$ noemt men de *specifieke verlenging*, of de *rek*. Men geeft die grootheid aan met ϵ_{xx} ,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$$

als de as-richting van de staaf samenvalt met de x -as. De grootheid F/A is de *normaalspanning* σ_{xx} , zie paragraaf 5.1,

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A}.$$

Men kan het verband tussen de verlenging Δl en de kracht F nu ook schrijven als

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}.$$

Dit betekent dat de normaalspanning σ_{xx} evenredig is met de rek ϵ_{xx} . Dit is de meest eenvoudige vorm van de zogenaamde *Wet van Hooke*. Later zullen, bijvoorbeeld bij de beschouwing van een in twee richtingen getrokken plaat, meer algemene vormen van de wet van Hooke voorkomen.

Men zij erop bedacht dat de aanduiding "wet" van Hooke enigszins misleidend kan zijn. Het karakter van deze "wet" is heel anders dan die van algemeen geldige wetten als bijvoorbeeld die van Newton. De wet van Hooke is niet meer dan een goede weergave van bepaalde experimenteel gevonden resultaten. De benadering is erg goed in het elastische traject bij metalen. Ook voor houten staven met niet al te grote krachten is de benadering redelijk goed. Voor beton is de benadering al een stuk minder, vooral in het trekgebied. Ongewapend beton scheurt bij belasting op trek erg snel. Bij belasting op druk is het verband tussen spanning en vervorming bij beton ook slechts met een aanzienlijke benadering lineair. In de praktijk kan men voor constructies gemaakt van staal, beton of hout meestal wel uitgaan van de geldigheid van de wet van Hooke. De ingenieur zal er daarbij dan wel voor moeten zorgen dat bijvoorbeeld de spanningen in een stalen balk niet zo groot worden dat het staal gaat vloeien. Hij moet daartoe enerzijds een goede kennis hebben van de materiaaleigenschappen. Anderzijds moet hij de spanningen in een bepaalde constructie ten gevolge van een bepaalde belasting goed kunnen berekenen. In het vervolg van dit hoofdstuk wordt ervan uitgegaan dat de spanningen in de constructie klein genoeg zijn om de wet van Hooke te mogen toepassen.

8.2. vervormingen van eenvoudige staafconstructies

In deze paragraaf wordt behandeld hoe men de vervormingen van enkele eenvoudige statisch bepaalde staafconstructies kan bepalen. Daarbij zal uitgegaan worden van de geldigheid van de wet van Hooke voor elk van de op normaalkracht belaste staven. De behandeling zal gebeuren aan de hand van een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1

Het eerste voorbeeld betreft een symmetrische constructie bestaande uit twee gelijke staven, zie fig. 8.5, belast door een verticale kracht groot 80 kN. De constructie is uitgevoerd als een driescharnierspant. In de beide staven ont-

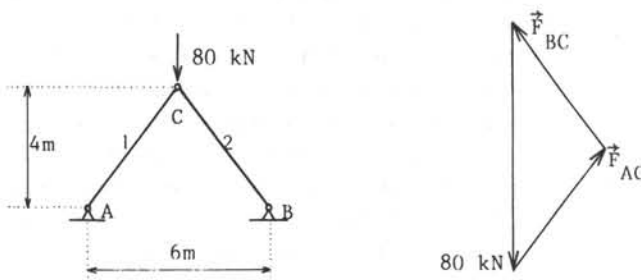


fig. 8.5.

staan drukkrachten van 50 kN,

$$N_1 = N_2 = -50 \text{ kN}.$$

De doorsnede A van elk der staven is gelijk aan $4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, en de elasticiteitsmodulus van het materiaal van de staven is $210 \text{ GPa} = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. Omdat de lengte van de staven 5 m is vindt men nu voor de lengteverandering

$$\Delta l = -\frac{50 \times 10^3 \times 5 \text{ m}}{4 \times 10^{-4} \times 210 \times 10^9} = -0.298 \times 10^{-2} \text{ m} = -2.98 \text{ mm}.$$

De staven worden elk dus bijna 3 mm korter. Om nu de verplaatsing van het punt C te bepalen kan men als volgt te werk gaan.

Het scharnier bij C wordt om te beginnen losgemaakt gedacht en de vervorming van de staven 1 en 2 worden getekend in de oorspronkelijke richting van de staven, zie fig. 8.6. Omdat in werkelijkheid de staven wel in de top verbonden blijven moet op de verkorting nog een rotatie van elk van de staven om hun scharnieropleggingen bij A en B gesuperponeerd worden. Omdat de lengteverandering (2.98 mm) zo klein is ten opzichte van de oorspronkelijke lengte

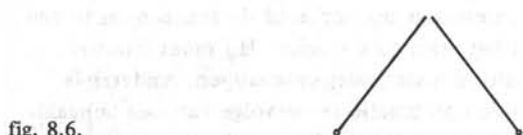


fig. 8.6.

($5 \text{ m} = 5000 \text{ mm}$), lijkt het zinvol een detail nabij het scharnier in C te bekijken, zie fig. 8.7. De punten A en B liggen op de schaal van deze figuur erg ver weg

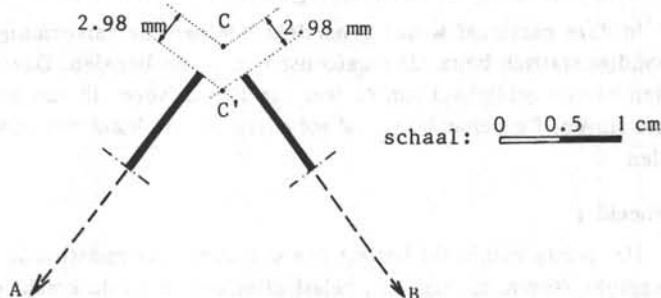


fig. 8.7.

(8 meter ver om precies te zijn). De uiteinden van de losgedachte staven beschrijven bij de rotatie een cirkelboog om de punten A en B , maar omdat de straal van die cirkels zo ontzettend groot is kan men die cirkelbogen in fig. 8.7 niet onderscheiden van een recht lijnstuk loodrecht op de staafassen. De nieuwe positie van het punt C wordt op die manier gevonden als C' in figuur 8.7. In fig. 8.8 is de figuur nog eens verder geschematiseerd getekend.

In deze figuur zijn alleen de verplaatsingen getekend. Door opmeten in de figuur vindt men voor de verticale zakking van het punt C : 3.65 mm . Die waarde kan men ook berekenen uit de gegeven verhoudingen van de lengten van de zijden van de driehoeken in fig. 8.8, die bepaald worden door de helling van de staven AC en BC ($3 : 4$). Men berekent zo voor de zakking van punt C : $\frac{5}{4} \times 2.98 \text{ mm} = 3.72 \text{ mm}$.

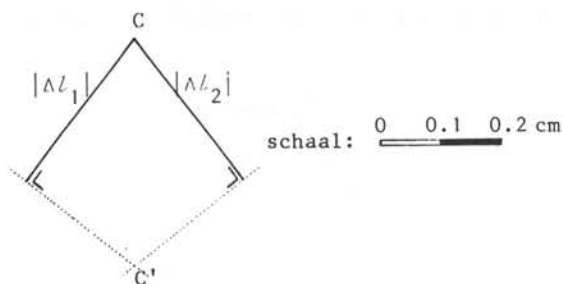


fig. 8.8.

Voorbeeld 2

Om de procedure nog wat te verduidelijken wordt als tweede voorbeeld dezelfde constructie nogmaals beschouwd, maar nu belast met een horizontale kracht ter grootte van 60 kN, zie fig. 8.9. In dit geval worden de staafkrachten

$$N_1 = +50 \text{ kN}$$

$$N_2 = -50 \text{ kN}.$$

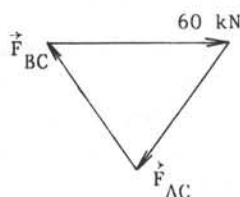
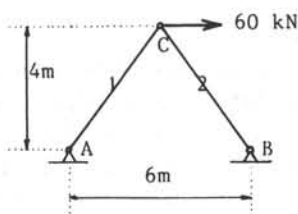


fig. 8.9.

De lengteveranderingen worden nu

$$\Delta l_1 = +2.98 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = -2.98 \text{ mm}.$$

De staaf 1 wordt dus bijna 3 mm langer, en de staaf 2 wordt bijna 3 mm korter. De verplaatsing van punt C kan men nu construeren, zie fig. 8.10. Men vindt nu

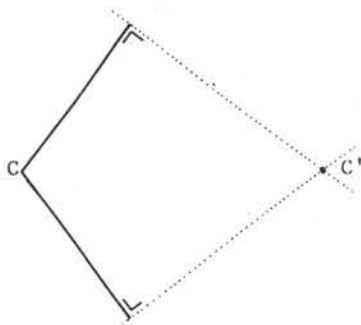


fig. 8.10.

dat punt C in dit geval horizontaal verplaatst over een afstand van 4.96 mm. Ter verdere verduidelijking is de grafische constructie in fig. 8.11 ook nog eens

getekend in het schema van het spant als geheel. De lengteveranderingen zijn

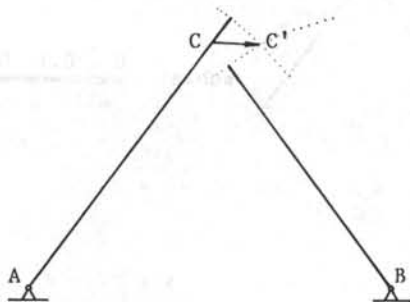


fig. 8.11.

daarbij wel sterk overdreven getekend om ze op deze schaal zichtbaar te maken. Men bedenke dat het vervangen van de cirkelbogen door rechte lijnen loodrecht op de staafas alleen toelaatbaar is als de lengteveranderingen zeer klein zijn ten opzichte van de lengte van de staven. Dit betekent dat de rekken klein moeten zijn, zeg in de orde van 10^{-3} of kleiner. In de praktijk wordt aan deze voorwaarde vrijwel altijd voldaan.

Voorbeeld 2, analytische oplossing

Als alternatief voor de hierboven beschreven grafische methode kan men een meer analytische berekeningsmethode toepassen. Dat gaat in principe als volgt.

Van de drie knooppunten van de constructie kan alleen het punt C verplaatsen omdat A en B als vaste oplegpunten worden beschouwd. Stel dat de componenten van de verplaatsing van het punt C in x - en y -richting worden aan-

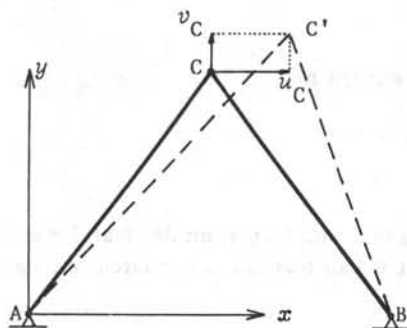


fig. 8.12.

gegeven met u_C , respectievelijk v_C . Ten gevolge van deze verplaatsingen worden de staven 1 en 2 langer (of korter). Als de rekken klein zijn geldt voor de ver-

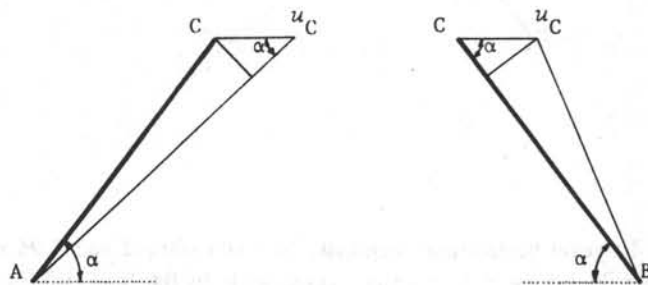


fig. 8.13.

lenging van de staven ten gevolge van de horizontale verplaatsing u_C , zie fig. 8.13,

$$\Delta l_1 = u_C \cos a$$

$$\Delta l_2 = -u_C \cos a.$$

Voor de verlengingen van de staven ten gevolge van de verticale verplaatsing v_C ,

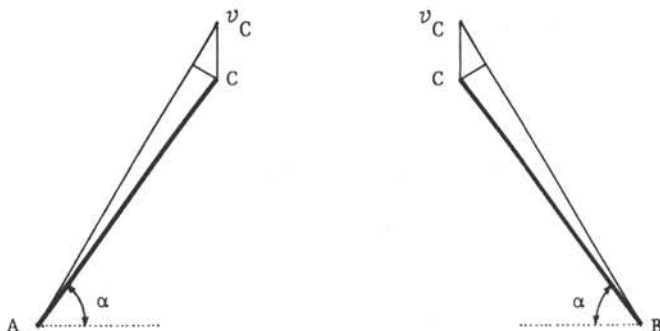


fig. 8.14.

zie fig. 8.14, geldt

$$\Delta l_1 = v_C \sin a$$

$$\Delta l_2 = v_C \sin a.$$

De totale lengteveranderingen worden dus

$$\Delta l_1 = u_C \cos a + v_C \sin a$$

$$\Delta l_2 = -u_C \cos a + v_C \sin a.$$

Omdat in het algemeen volgens de wet van Hooke voor een staaf met een normaalkracht N geldt dat

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

vindt men nu voor de bij de lengteveranderingen Δl_1 en Δl_2 behorende normaalkrachten

$$N_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1} (u_C \cos a + v_C \sin a)$$

$$N_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} (-u_C \cos a + v_C \sin a).$$

Hierin is E_1 de elasticiteitsmodulus van staaf 1, A_1 het oppervlak van de doorsnede, en l_1 zijn lengte. E_2 , A_2 en l_2 zijn de overeenkomstige grootheden van staaf 2.

Omdat de staafkrachten N_1 en N_2 bekend zijn uit de statica van de constructie, kan men de verplaatsingen u_C en v_C uit de bovenstaande twee vergelijkingen bepalen. In het hier beschouwde geval is

$$E_1 = E_2 = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$A_1 = A_2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$l_1 = l_2 = 5 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = 0.6$$

$$\sin \alpha = 0.8$$

$$N_1 = 50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$N_2 = -50 \times 10^3 \text{ N}$$

De twee vergelijkingen worden nu

$$0.6 \times u_C + 0.8 \times v_C = 2.98 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$-0.6 \times u_C + 0.8 \times v_C = -2.98 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Hieruit volgt

$$u_C = 4.96 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_C = 0 \text{ m}$$

en dat klopt met de eerder gevonden waarden.

De hier beschreven analytische methode is gebaseerd op een berekening van de staafkrachten uit de lengteverandering van de staven, en een berekening van deze lengteveranderingen uit de aangenomen verplaatsingen van de knooppunten. In dit geval waren deze laatste verbanden van de volgende vorm:

$$\Delta l_1 = u_C \cos \alpha + v_C \sin \alpha$$

$$\Delta l_2 = -u_C \cos \alpha + v_C \sin \alpha$$

Deze verbanden kan men nog formeler als volgt afleiden.

Stel dat de coördinaten van de punten A en C worden aangegeven met x_A, y_A resp. x_C, y_C , en stel dat de verplaatsingen van deze punten worden aangegeven met u_C, v_C . Dan geldt

$$l_1^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$$

en

$$(l_1 + \Delta l_1)^2 = (x_C + u_C - x_A - u_A)^2 + (y_C + v_C - y_A - v_A)^2$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \Delta l_1 \left(1 + \frac{\Delta l_1}{2l_1} \right) &= \frac{x_C - x_A}{l_1} (u_C - u_A) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_C - u_A}{x_C - x_A} \right) + \\ &+ \frac{y_C - y_A}{l_1} (v_C - v_A) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_C - v_A}{y_C - y_A} \right) \end{aligned}$$

Als nu wordt aangenomen dat de rekken klein zijn, wordt dit, bij benadering,

$$\Delta l_1 = \frac{x_C - x_A}{l_1}(u_C - u_A) + \frac{y_C - y_A}{l_1}(v_C - v_A).$$

De coëfficiënten $(x_C - x_A)/l_1$ en $(y_C - y_A)/l_1$ zijn juist gelijk aan $\cos a$, respectievelijk $\sin a$, en omdat in dit geval $u_A = v_A = 0$, vindt men nu

$$\Delta l_1 = u_C \cos a + v_C \sin a$$

en dit is precies wat eerder gevonden werd uit een beschouwing van de figuren 8.12 en 8.13.

Op de hier beschreven analytische methode zal voorlopig niet verder ingegaan worden. We keren terug naar de eerder behandelde grafische methode, en zullen deze generaliseren voor constructies bestaande uit meerdere staven, als voorbereiding voor de behandeling van vakwerken.

Voorbeeld 3

Het derde voorbeeld heeft betrekking op een constructie bestaande uit vier staven, zie fig. 8.15, die belast wordt door een horizontale kracht van 80 kN.

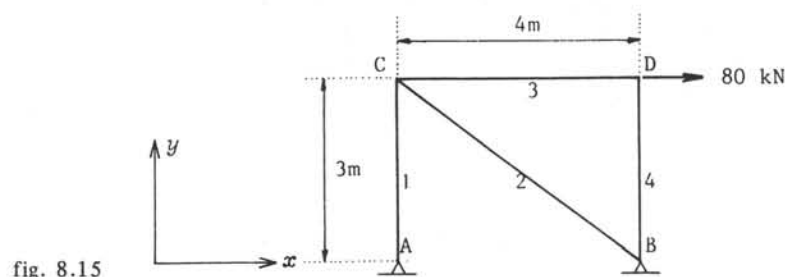


fig. 8.15

Er wordt aangenomen dat voor alle staven geldt dat $EA = 200 \times 10^3$ kN. De berekening van de staafkrachten is niet moeilijk. De waarden ervan zijn verzameld in de onderstaande tabel. In deze tabel zijn ook de lengtes van de staven ver-

staaf	N (kN)	l (m)	EA (kN)	Δl (mm)
1	+ 60	3	200×10^3	+ 0.90
2	- 100	5	200×10^3	- 2.50
3	+ 80	4	200×10^3	+ 1.60
4	0	3	200×10^3	0.00

zameld, evenals de waarden van EA , en de uit al deze gegevens berekende verlengingen van de staven.

De bepaling van de verplaatsingen van de knooppunten C en D kan nu grafisch als volgt geschieden.

Men denkt zich de staven eerst losgemaakt in de knooppunten, en bepaalt vervolgens de verplaatsing van punt C op de wijze beschreven bij de eerste twee voorbeelden, zie fig. 8.16.

Men vindt op deze manier

$$u_C = 3.80 \text{ mm}$$

$$v_C = 0.90 \text{ mm}$$

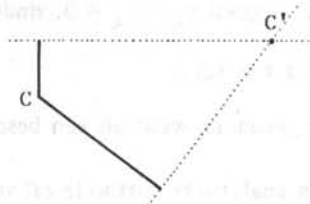


fig. 8.16

Voor de bepaling van de verplaatsing van punt D moet men er nu rekening mee houden dat het linkeruiteinde van staaf 3 (punt C) zelf ook verplaatst. Denkt men zich staaf 3 in D nog los, en denkt men zijn richting voorlopig nog zuiver horizontaal, dan ondergaat het rechteruiteinde van staaf 3 allereerst dezelfde verplaatsing als het linkeruiteinde, en ook nog een extra verplaatsing van 1.60 mm naar rechts, door de verlenging van staaf 3. Staaf 4 verlengt niet, zodat de constructie van de verplaatsing van punt D wordt zoals getekend in fig. 8.17. Ter verdere verduidelijking zijn de verplaatsingen nog eens schematisch,

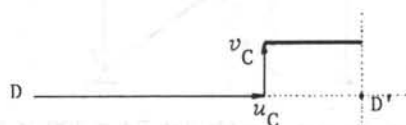


fig. 8.17

sterk overdreven, getekend in het schema van de constructie, zie fig. 8.18.

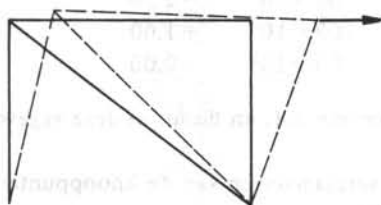


fig. 8.18

Omdat voor de bepaling van de verplaatsing van punt D eerst de eerder gevonden verplaatsing van punt C moet worden uitgezet, ligt het voor de hand de figuren te combineren. Dat is gebeurd in fig. 8.19. Deze figuur bevat een oorsprong O, en alle verplaatsingen moeten ten opzichte van die oorsprong gerekend worden. De verlengingen of verkortingen van de staven zijn dik gete-

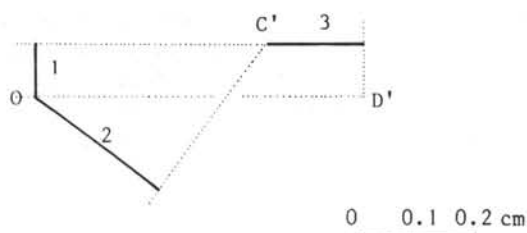


fig. 8.19

kend, en de nummers van de staven waarop deze betrekking hebben zijn erbij geplaatst.

Een figuur zoals fig. 8.19, waarin de verplaatsingen van de knooppunten van een staafconstructie achtereenvolgens geconstrueerd worden, noemt men een Williot-diagram. In de volgende paragraaf zal de constructie van Williot-diagrammen voor vakwerken behandeld worden.

8.3 vervormingen van vakwerken, Williot-diagram

Omdat een vakwerk een constructie is die uit een aantal op normaalkracht belaste staven bestaat, kan men de vervormingen van vakwerken bepalen op dezelfde wijze als in de vorige paragraaf beschreven. In deze paragraaf worden van de daartoe benodigde Williot-diagrammen een aantal voorbeelden gegeven.

Voorbeeld 1

Het eerste voorbeeld betreft een uitkragend vakwerk, belast door een verticale kracht van 50 kN aan het uiteinde, zie fig. 8.10. De staafkrachten

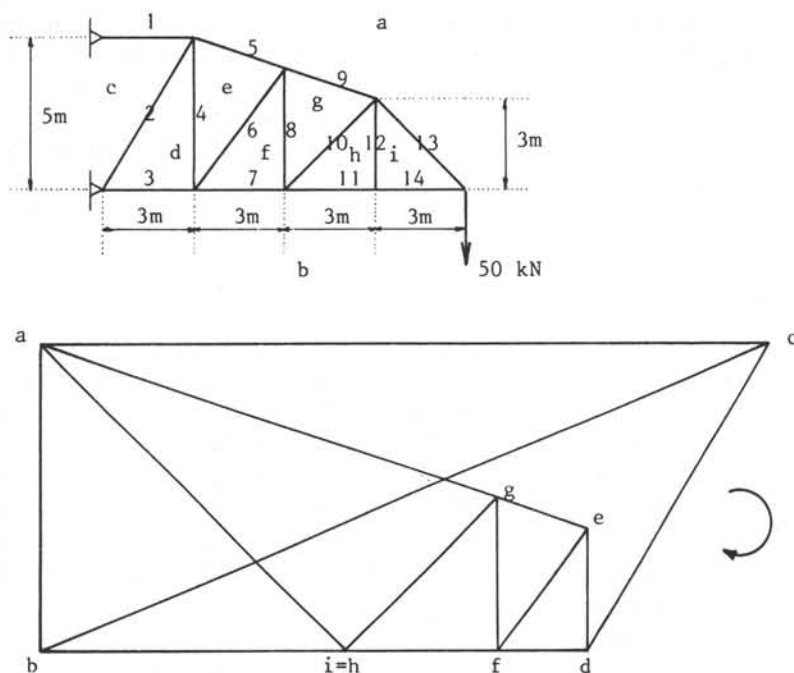


fig. 8.20

(en de oplegreacties) kunnen bepaald worden met behulp van een Cremona-diagram. De constructie daarvan kan beginnen in het rechteruiteinde. Het volledige Cremona-diagram is getekend in de onderste helft van fig. 8.20. Als aangenomen wordt dat voor alle staven geldt dat $EA = 200 \times 10^3$ kN kunnen de verlengingen berekend worden met behulp van de formule $\Delta l = Nl/EA$. De resultaten zijn weergegeven in de volgende tabel.

staaf	N (kN)	l (m)	EA (kN)	Δl (mm)
1	+ 120.0	3.00	200×10^3	+ 1.80
2	- 58.3	5.83	-	- 1.70
3	- 90.0	3.00	-	- 1.35
4	+ 20.0	5.00	-	+ 0.50
5	+ 94.9	3.16	-	+ 1.50
6	- 25.0	5.00	-	- 0.62
7	- 75.0	3.00	-	- 1.12
8	+ 25.0	4.00	-	+ 0.50
9	+ 79.1	3.16	-	+ 1.25
10	- 35.4	4.24	-	- 0.75
11	- 50.0	3.00	-	- 0.75
12	0.0	3.00	-	0.00
13	+ 70.7	4.24	-	+ 1.50
14	- 50.0	3.00	-	- 0.75

De punten A en B kunnen niet verplaatsen. Met behulp van de verlengingen van de staven 1 en 2 kan dan de verplaatsing van punt C bepaald worden. Daarna kunnen de verplaatsingen van de andere punten achtereenvolgens (in de volgorde D, E, F, G, H, I) bepaald worden. De constructie van het volledige Williot-diagram is weergegeven in fig. 8.21. Ter verduidelijking zijn in het Williot-diagram de verlengingen van de staven dik getekend, en zijn de hulplijnen loodrecht op de staafassen (de benaderingen van de cirkelbogen) gestippeld getekend. Uit de figuur vindt men door opmeting (rekening houdende met de schaaftactor) dat het rechteruiteinde (punt I) 20.0 mm naar beneden en 4.0 mm naar links verplaatst.

Voorbeeld 2

Het succes van de grafische methode ter bepaling van de verplaatsingen van de knooppunten in een vakwerk in het vorige voorbeeld is mede een gevolg van het feit dat het vakwerk ondersteund is in de punten A en B. De constructie kan daardoor beginnen met punt C, en daarna vervolgd worden door steeds de verplaatsing van een nieuw knooppunt te construeren uitgaande van twee bekende punten. In veel gevallen is het in principe niet zo eenvoudig om de constructie te beginnen omdat de oplegpunten ver van elkaar liggen. In dit voorbeeld wordt aangegeven hoe men in dergelijke gevallen te werk kan gaan om de knooppuntsverplaatsingen te vinden.

Dit tweede voorbeeld betreft het vakwerk getekend in fig. 8.22, met een belasting zoals aangegeven in de figuur. Na bepaling van de oplegacties ($A_x = 0$, $A_y = 40$ kN, $B_y = 20$ kN) kan men de staafkrachten bepalen, bijvoor-

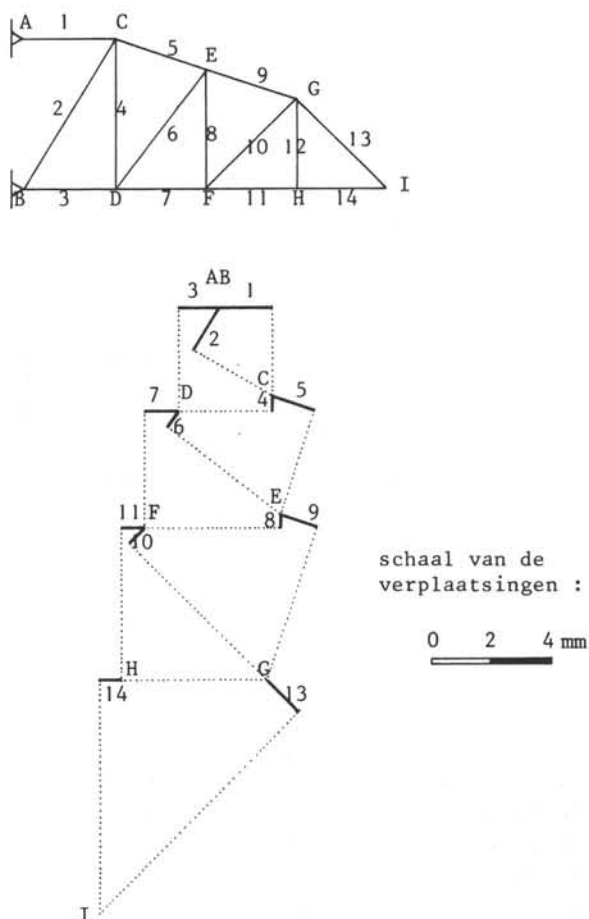


fig. 8.21

beeld met behulp van een Cremona-diagram, zie ook fig. 8.22. De staafkrachten zijn verzameld in de volgende tabel. De verlengingen zijn berekend door aan te nemen dat voor alle staven geldt dat $EA = 100 \times 10^3$ kN.

staaf	N (kN)	l (m)	EA (kN)	Δl (mm)
1	- 56.6	2.83	100×10^3	- 1.60
2	+ 40.0	4.00	-	+ 1.60
3	+ 56.6	2.83	-	+ 1.60
4	- 80.0	4.00	-	- 3.20
5	+ 28.3	2.83	-	+ 0.80
6	+ 60.0	4.00	-	+ 2.40
7	- 28.3	2.83	-	- 0.80
8	- 40.0	4.00	-	- 1.60
9	+ 28.3	2.83	-	+ 0.80
10	+ 20.0	4.00	-	+ 0.80
11	- 28.3	2.83	-	- 0.80

De moeilijkheid is nu om de constructie van het Williot-diagram te beginnen,

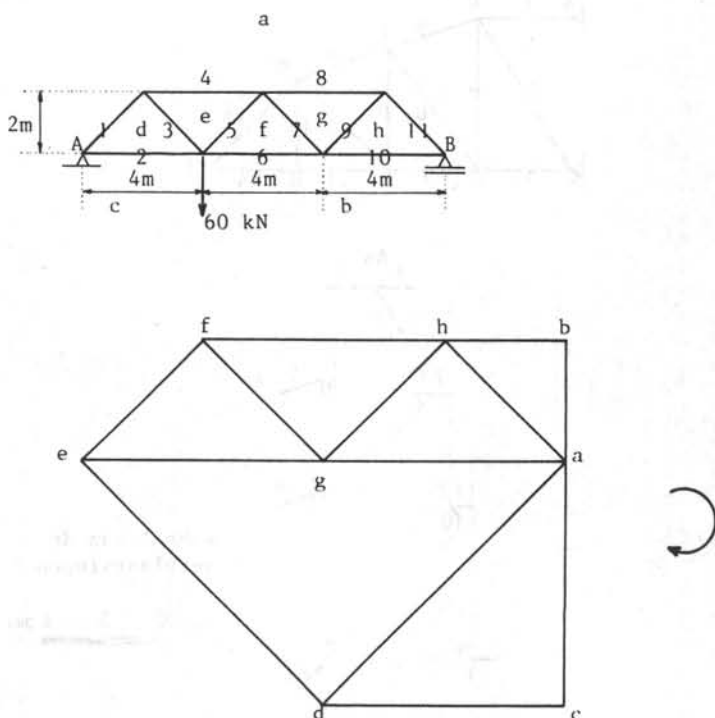


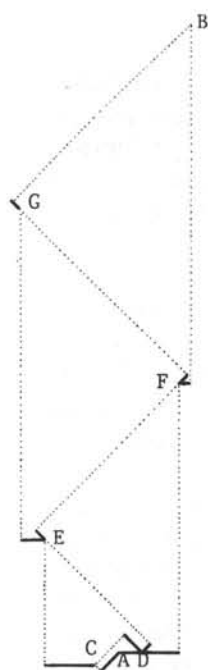
fig. 8.22

omdat er geen enkel punt is dat door middel van twee staven aan punten met reeds bekende verplaatsingen verbonden is. Een uitweg uit deze moeilijkheid kan worden verkregen door voorlopig aan te nemen dat een van de staven door het vaste punt A niet roteert. Uiteraard is dat waarschijnlijk niet goed, en in een later stadium zal er nog een correctie moeten plaatsvinden. Gaat men er echter, althans voorlopig, van uit dat bijvoorbeeld staaf 2 niet roteert, dan kunnen de knooppuntsverplaatsingen (in de volgorde D, C, E, F, G, B) geconstrueerd worden in een Williot-diagram, zie fig. 8.23.

Uit dit diagram blijkt nu dat het punt B een verticale verplaatsing van 41.3 mm (omhoog) ondergaat. Dat is niet mogelijk, omdat het vakwerk bij B opgelegd is op een roloplegging, maar dit is een gevolg van de voorlopige aanname dat de staaf 2 niet roteert. Om de verplaatsing van punt B te corrigeren moet het vervormde vakwerk als geheel met de wijzers van de klok mee gedraaid worden over een hoekje α om het vaste punt A, met

$$\alpha = \frac{41.3 \text{ mm}}{12 \text{ m}} = 0.00344$$

Bij deze rotatie verplaatst het punt B loodrecht op de lijn AB, dat is verticaal naar beneden, en wel juist over een afstand van 41.3 mm. Ook de andere punten van het vakwerk verplaatsen bij deze rotatie, en wel steeds loodrecht op de verbindinglijn van het knooppunt met het vaste punt A, en over een afstand gelijk aan het produkt van het hoekje α en de afstand van het beschouwde punt tot punt A. Men kan ook zeggen dat de grootte van de verplaatsing van bijvoorbeeld het punt E gelijk is aan



schaal van de verplaatsingen :

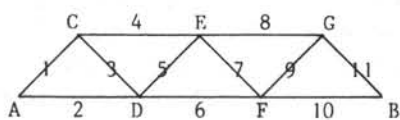
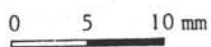


fig. 8.23

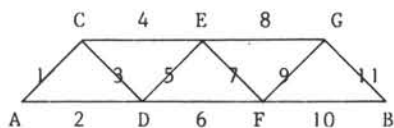
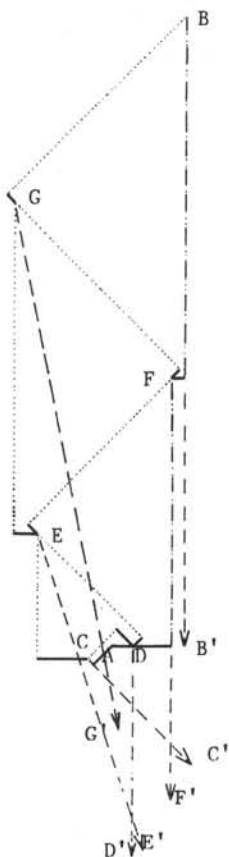


fig. 8.24

$$\frac{|AE|}{|AB|} \times 41.3 \text{ mm}$$

waarin AE de afstand is van de punten A en E. De richting van de verplaatsing is loodrecht op de lijn AE. In fig. 8.24 zijn de verplaatsingen van alle knooppunten bij de rotatie uitgezet door middel van onderbroken lijnen. De uiteindelijke verplaatsing van alle knooppunten wordt nu aangegeven door de vector van het vaste punt (A) naar de plaats van de punten B', C', D', E', F' en G' in fig. 8.24.

In fig. 8.24 is de verplaatsing van alle punten door de rotatie van het vakwerk als geheel in beeld gebracht door deze uit te zetten vanuit de eerder bepaalde punten. Het punt A wordt daarbij als vast punt beschouwd. Men zou vanuit punt A, en dan voor elk punt met een ander nulpunt kunnen rekenen. Dat is gebeurd in fig. 8.25. In feite komt het er op neer dat men, in plaats van bij de eerst gevonden verplaatsingen een rotatie op te tellen, het vakwerk in zijn uitgangstoestand in tegengestelde zin roteert. De verplaatsingen van de punten van het vakwerk ten gevolge van deze rotatie staan loodrecht op de verbindingslijn met het vaste punt A, en zijn evenredig met de afstand tot A. Dit leidt er toe dat de verplaatste punten een met het vakwerk gelijkvormige figuur vormen, maar dan wel over een hoek van 90 graden gedraaid, zie fig. 8.25. In die figuur zijn de nulpunten verbonden door onderbroken lijnen. Men noemt dat wel het *nulstandsdiagram*. Door opmeten in de figuur, rekening houdend met de schaal, vindt men bijvoorbeeld dat het punt D in dit geval over een afstand van 1.6 mm naar rechts verplaatst, en over een afstand van 13.7 mm naar beneden.

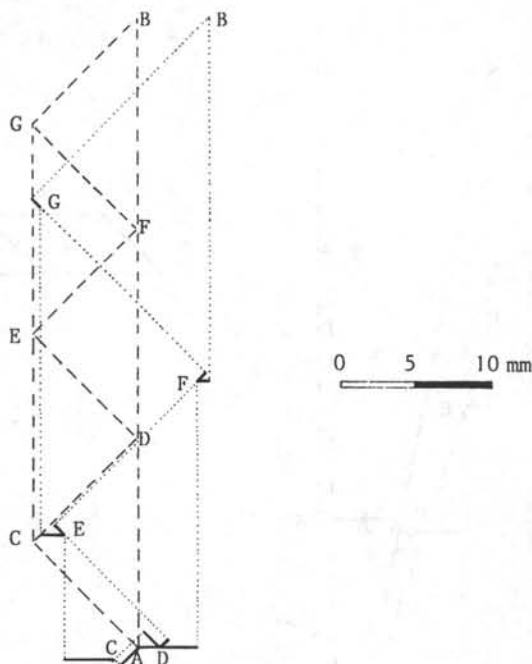


fig. 8.25.

8.4 matrixbehandeling

In de vorige paragraaf is een grafische methode gepresenteerd om uit de gegeven lengteveranderingen van de staven van een statisch bepaald vakwerk de verplaatsingen van de knopen te bepalen. In deze paragraaf zal het verband tussen de lengteveranderingen van de staven en de verplaatsingen van de knopen uitgedrukt worden door middel van een matrix-relatie.

Het basiselement is een willekeurige staaf, genummerd (e), tussen de knopen i en j , zie fig. 8.26. Het verband tussen de knoopverplaatsingen u_i , v_i , u_j

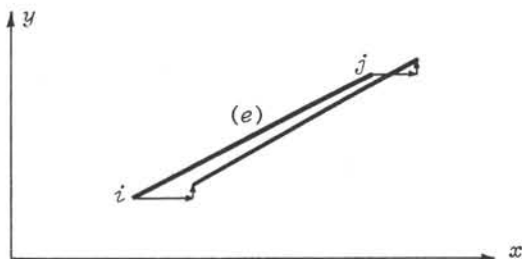


fig. 8.26

v_j en de lengteverandering $\Delta l^{(e)}$ is reeds algemeen afgeleid in par. 8.2. Daar werd gevonden, als de notatie aangepast wordt aan de hier gebruikte,

$$\Delta l^{(e)} = \frac{\Delta x^{(e)}}{l^{(e)}} (u_j - u_i) + \frac{\Delta y^{(e)}}{l^{(e)}} (v_j - v_i)$$

Hierin is $\Delta x^{(e)} = x_j - x_i$ en $\Delta y^{(e)} = y_j - y_i$. Alle lengteveranderingen kan men tezamen nemen in een vector Δl (met s coëfficiënten, als s het aantal staven is), en alle verplaatsingen kan men tezamen nemen in een vector u (met $2k$ coëfficiënten, als k het aantal knopen is),

$$\Delta l = \begin{bmatrix} \Delta l^{(1)} \\ \Delta l^{(2)} \\ \vdots \\ \Delta l^{(s)} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

Het verband tussen de lengteverandering en de verplaatsingen kan men dan schrijven als

$$\Delta l = B u$$

waarin B een rechthoekige matrix is, met s rijen en $2k$ kolommen.

Voor het geval getekend in fig. 8.27 is $s = 7$ en $k = 5$, dus $2k = 10$. De bijdrage van staaf (1) tot de matrix B bestaat dan alleen uit coëfficiënten in de eerste rij, als vermigvuldigingsfactoren van de verplaatsingen u_1 , v_1 , u_2 en v_2 .

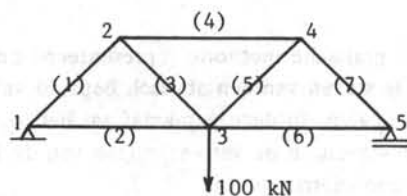


fig. 8.27

De bijdrage van deze staaf tot de matrix is dus, op grond van de hierboven afgeleide formule,

$$\begin{bmatrix} -\Delta x^{(1)}/l^{(1)} & -\Delta y^{(1)}/l^{(1)} & +\Delta x^{(1)}/l^{(1)} & +\Delta y^{(1)}/l^{(1)} & \hat{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

De matrix B wordt opgebouwd uit bijdragen van alle staven. Staaf (e) geeft daarbij aanleiding tot 4 coëfficiënten in rij (e), op de plaatsen die overeenkomen met de verplaatsingen van de knopen i en j aan de uiteinden van die staaf.

Vergelijkt men de structuur en de opbouw van de matrix B met die van matrix A in paragraaf 7.7 dan blijkt dat B juist de getransponeerde matrix van A is,

$$B = {}^t A$$

Men kan dus ook schrijven

$$\Delta l = {}^t A u$$

Bij het type van problemen beschouwd in dit hoofdstuk zijn de lengteveranderingen (dat zijn er in het voorbeeld van fig. 8.27 zeven) gegeven, en wordt gevraagd de verplaatsingen van de knopen (dat zijn er in het voorbeeld in principe tien) te berekenen. Als dat alleen op grond van de bovenstaande vergelijking zou moeten gebeuren zou dat niet eenduidig kunnen, omdat er dan sprake is van 7 vergelijkingen met 10 onbekenden. Gelukkig zijn er nog meer gegevens, namelijk de voorgeschreven verplaatsingen bij de opleggingen. In het voorbeeld zijn dat er juist 3 ($u_1 = 0$, $v_1 = 0$, en $v_5 = 0$). Er zijn dus eigenlijk maar 7 onbekenden, en omdat er 7 vergelijkingen zijn is het probleem eenduidig oplosbaar.

Op de methode van oplossen zal hier niet volledig worden ingegaan. Er wordt volstaan met het noemen van een mogelijkheid, namelijk door de matrix ${}^t A$ te reduceren door de 1e, 2e en 10e kolom (die overeenkomen met de gegeven knooppverplaatsingen) weg te laten. In het stelsel vergelijkingen

$$\Delta l = {}^t A u$$

betekent dit dat de termen met u_1 , v_1 en v_5 in het rechterlid, die toch nul zijn, worden weggelaten. De aldus gereduceerde matrix is juist de getransponeerde van de in paragraaf 7.7 ingevoerde matrix A_r . Het hier bedoelde gereduceerde stelsel kan men schrijven als

$$\Delta l = {}^t A_r u_r$$

Hierin bevat u_r alleen nog de 7 onbekenden u_2 , v_2 , u_3 , v_3 , u_4 , v_4 , en u_5 . Het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen zowel als het gereduceerde stelsel zijn hieronder schematisch weergegeven, het laatstgenoemde door een gestippeld kader.

$$\begin{bmatrix} \Delta l^{(1)} \\ \Delta l^{(2)} \\ \Delta l^{(3)} \\ \Delta l^{(4)} \\ \Delta l^{(5)} \\ \Delta l^{(6)} \\ \Delta l^{(7)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \boxed{\times} & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \boxed{u_2} \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \boxed{u_5} \\ v_5 \end{bmatrix}$$

De oplossing van het probleem vindt men nu door invertëren

$$u_r = {}^t A_r^{-1} \Delta l$$

Het probleem is hiermee in principe opgelost. Later zal meer gedetailleerd worden ingegaan op de bepaling van de verplaatsingen van de knooppunten van een vakwerk met behulp van matrices en numerieke procedures.

Het tekenen van het Williot-diagram, dat uitgaat van een aantal gegeven verplaatsingen ter plaatse van de oplegging, kan men beschouwen als een grafische methode om het hierboven gegeven stelsel van vergelijkingen op te lossen. Ook daar komt de oplossing pas eenduidig naar voren als de opleggingsvoorwaarden verwerkt worden.

9. STATISCH ONBEPAALDE STAAFCONSTRUCTIES

In dit hoofdstuk wordt behandeld hoe men de krachten en vervormingen kan berekenen in het geval van een statisch onbepaalde staafconstructie. Daarbij wordt uitgegaan van het in het vorige hoofdstuk beschreven lineaire verband tussen de normaalkracht in een prismatische staaf en de bijbehorende verlenging. De behandeling zal geschieden aan de hand van een aantal eenvoudige voorbeelden. Er zal onderscheid gemaakt worden tussen twee principieel verschillende methoden van aanpak: een waarbij krachten onbekenden zijn, en een waarbij verplaatsingen de fundamentele onbekenden zijn.

9.1. krachtenmethode

Het principe van de krachtenmethode is dat de statisch onbepaalde constructie vervangen wordt gedacht door een equivalente statisch bepaalde constructie waarop nog een aantal onbekende krachten werken. De grootte van die onbekende krachten wordt dan bepaald uit de eisen ten aanzien van verplaatsingen. De gang van zaken kan het best worden toegelicht aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 1

Het eerste voorbeeld heeft betrekking op een constructie bestaande uit drie staven, zie fig. 9.1, die tezamen een kracht ter grootte F moeten dragen. Aangenomen wordt dat in de staven alleen normaalkracht optreedt (geen dwars-

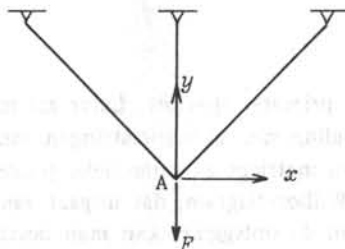


fig. 9.1

kracht en geen buigend moment). De constructie is statisch onbepaald omdat er drie onbekenden zijn, en maar twee vergelijkingen ($\sum F_x = 0$ en $\sum F_y = 0$ in het knooppunt). Het momentevenwicht is automatisch verzekerd door te stellen dat er alleen normaalkrachten in de staven optreden. Omdat er één onbekende te veel is noemt men de constructie *éénvoudig statisch onbepaald*. Als één van de drie staven verwijderd wordt is de constructie statisch bepaald.

Het principe van de krachtenmethode is nu dat men één van de staven verwijderd denkt, en in de plaats daarvan op de rest van de constructie een nog onbekende kracht laat werken, die de werking van de verwijderde staaf voorstelt. Men kan hiervoor bijvoorbeeld de meest rechtse staaf nemen, dan ontstaat de situatie geschetst in fig. 9.2, waarbij de staaf vervangen is door een, nog onbekende, kracht ter grootte N_3 . De constructie is nu statisch bepaald geworden, en het is nu niet moeilijk de krachten in de twee overgebleven staven te bepalen. Men vindt hiervoor

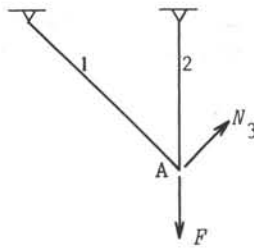


fig. 9.2

$$N_1 = N_3$$

$$N_2 = -N_3\sqrt{2} + F$$

waarbij is aangenomen dat de staven 1 en 3 een hoek van 45 graden met de verticaal maken. Vervolgens kunnen nu de verlengingen van de staven 1 en 2 bepaald worden. Als aangenomen wordt dat alle staven dezelfde doorsnede A hebben, en van hetzelfde materiaal, met elasticiteitsmodulus E , vervaardigd zijn, vindt men

$$\Delta l_1 = \frac{N_3 l \sqrt{2}}{EA}$$

$$\Delta l_2 = -\frac{N_3 l \sqrt{2}}{EA} + \frac{Fl}{EA}$$

Deze verlengingen bestaan uit een bekend deel (evenredig met F), en een nog onbekend deel (evenredig met N_3). Met behulp van een tweetal eenvoudige Williot-diagrammen kan men nu wel de verplaatsing van het punt A ten gevolge van de beide onderdelen van de verlengingen bepalen, zie fig. 9.3.

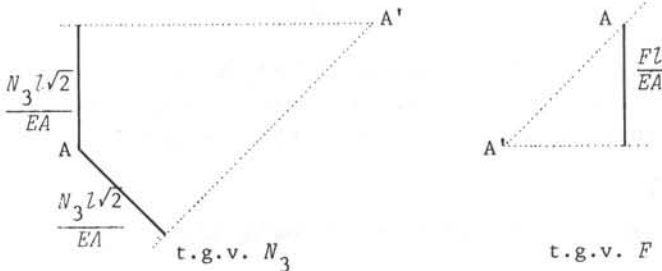


fig. 9.3.

Uit deze figuur volgt nu dat er voor de verlenging van staaf 3 moet gelden

$$\Delta l_3 = \frac{Fl \sqrt{2}}{EA} - \frac{N_3 l \sqrt{2}}{EA} - \frac{2N_3 l}{EA}$$

Anderzijds moet voor deze verlenging gelden dat

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l \sqrt{2}}{EA}$$

omdat de kracht in staaf 3 immers gelijk is gesteld aan N_3 , de lengte van deze staaf gelijk is aan $l\sqrt{2}$, de elasticiteitsmodulus gelijk is aan E , en de doorsnede gelijk is aan A .

Gelijkstelling van de twee uitdrukkingen voor Δl_3 geeft nu

$$N_3 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} F$$

Voor de andere staafkrachten vindt men dan

$$N_1 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} F$$

$$N_2 = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} F$$

Hiermee is het probleem opgelost. Ter controle kan men nog nagaan of de drie krachten inderdaad evenwicht maken met de belasting. Dat is inderdaad het geval, zie fig. 9.4, omdat de verticale componenten van de staafkrachten N_1 en N_3 gelijk zijn aan $\frac{1}{2}F\sqrt{2}/(2 + \sqrt{2})$.



fig. 9.4

De lezer ga voor zichzelf na dat dezelfde waarden voor de staafkrachten worden gevonden als men de constructie statisch bepaald maakt door staaf 2 te verwijderen, en te vervangen door een verticale kracht.

Voorbeeld 2

Als tweede voorbeeld wordt een eenvoudig vakwerk beschouwd, zie fig. 9.5.

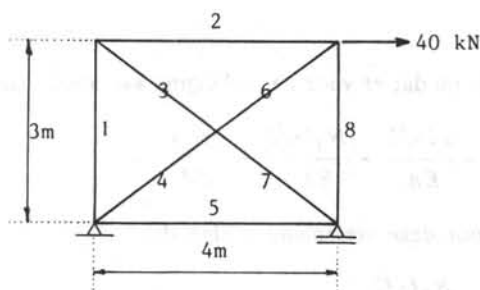


fig. 9.5

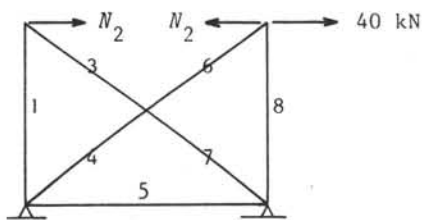


fig. 9.6

Het vakwerk is uitwendig statisch bepaald maar inwendig statisch onbepaald. Het aantal staven (8) is 1 groter dan tweemaal het aantal knooppunten (5) min het aantal oplegreacties (3). Het vakwerk zou nog een willekeurige staaf kunnen missen, en dan nog steeds vormvast zijn en statisch bepaald zijn. Om de staafkrachten te bepalen kan men nu een van de staven vervangen door nog onbekende krachten en vervolgens de vervormingen beschouwen. Als men hiervoor staaf 2 kiest dan ontstaat de situatie van fig. 9.6. Men zegt wel dat de staafkracht N_2 als de statisch onbepaalde grootheid wordt beschouwd. In de onderstaande tabel zijn de staafkrachten en de verlengingen voor de beide belastinggevallen (de kracht van 40 kN, en de krachten N_2) verzameld. Er is aangenomen dat voor alle staven $EA = 100 \times 10^3$ kN. Voor het gemak is

Belasting

Staaf	N (kN)	l (m)	EA (kN)	Δl (mm)
1	0	3	100×10^3	0
3	0	2.5	—	0
4	50	2.5	—	+ 1.25
5	0	4	—	0
6	50	2.5	—	+ 1.25
7	0	2.5	—	0
8	-30	3	—	- 0.9

$$N_2 = 1 \text{ kN}$$

Staaf	N (kN)	l (m)	EA (kN)	Δl (mm)
1	+ 0.75	3	100×10^3	+ 0.02250
3	- 1.25	2.5	—	- 0.03125
4	- 1.25	2.5	—	- 0.03125
5	+ 1.00	4	—	+ 0.04000
6	- 1.25	2.5	—	- 0.03125
7	- 1.25	2.5	—	- 0.03125
8	+ 0.75	3	—	+ 0.02250

voorts alleen nagegaan wat de krachten en verlengingen zouden zijn ten gevolge van een kracht N_2 ter grootte van 1 kN. In werkelijkheid zal gelden dat $N_2 = n_2$ kN. De bijbehorende krachten en verlengingen zijn dan n_2 maal zo groot.

Met behulp van deze gegevens kan men nu de vervormingen van het statisch

bepaalde vakwerk bepalen. In het bijzonder is daarbij van belang de onderlinge verplaatsing van de twee bovenste knooppunten, omdat daartussen de staaf 2 moet passen. In fig. 9.7 zijn de Williot-diagrammen voor de beide belastinggevallen gete-

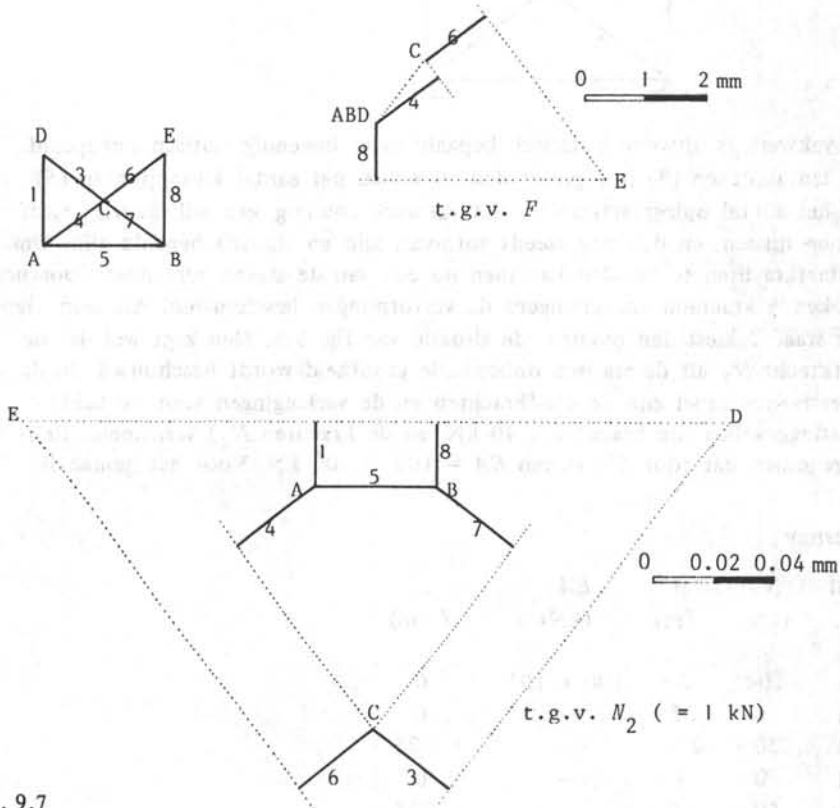


fig. 9.7

kend. Door opmeten uit de figuur vindt men dat door de belasting de punten D en E een onderlinge horizontale verplaatsing van 3.8 mm ondergaan, en wel van elkaar af. Ten gevolge van een kracht $N_2 = 1$ kN ondergaan de punten D en E een onderlinge horizontale verplaatsing van 0.23 mm, en wel naar elkaar toe. Om tussen de punten D en E te passen moet de verlenging van staaf 2 dus gelijk zijn aan

$$\Delta l_2 = 3.8 \text{ mm} - n_2 \times 0.23 \text{ mm}.$$

De verlenging van staaf 2 is anderzijds gelijk aan

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA} = n_2 \times 0.004 \text{ mm}$$

Door gelijkstelling van deze twee waarden vindt men

$$n_2 = 14.1$$

en dus

$$N_2 = 14.1 \text{ kN}.$$

Het probleem is hiermee opgelost.

Nu de grootte van de statisch onbepaalde staafkracht N_2 bekend is, kan men ook, door superpositie van het eerste belastinggeval en 14.1 maal het tweede belastinggeval, de andere staafkrachten en de vervormingen bepalen. De lezer ga zelf na dat men op deze wijze voor de kracht in staaf 4 vindt

$$N_4 = 32.4 \text{ kN}$$

en dat men voor de verplaatsingen van het punt E vindt dat het over een afstand van 2.5 mm naar rechts verplaatst, en over een afstand van 0.6 mm naar beneden. Men merke op dat bij de berekening van deze grootheden blijkt dat de uiteindelijke krachten en verplaatsingen in absolute zin kleiner zijn dan bij de statisch bepaalde constructie die ontstaat door staaf 2 weg te halen. Het is dus constructief wel zinvol de staaf 2 toe te voegen: de grootste staafkrachten worden kleiner, en de vervormingen worden kleiner. Dat de berekening gecompliceerd wordt is één van de prijzen die men moet betalen. Een andere prijs is dat een statisch onbepaalde constructie gevoelig is voor maatafwijkingen. Als het vakwerk van fig. 9.5 zodanig in elkaar gezet wordt dat staaf 2 het laatst gemonteerd wordt, en het blijkt dat deze staaf niet precies past, bijvoorbeeld iets te kort is, dan kan men de montage nog wel uitvoeren, maar daartoe is het wel nodig deze staaf eerst uit te rekken. In de constructie ontstaan dan beginspanningen. Bij statisch bepaalde constructies treedt dat verschijnsel niet op.

De in deze paragraaf behandelde krachtenmethode kan ook toegepast worden bij meervoudig statisch onbepaalde constructies. In het algemeen is de procedure dat men de constructie statisch bepaald maakt, door staven of opleggingen te vervangen door nog onbekende krachten. Die onbekende krachten moeten dan bepaald worden uit aansluitvoorwaarden voor de verplaatsingen.

9.2. verplaatsingenmethode

Het principe van de verplaatsingenmethode is dat men de vervormingen van de constructie beschrijft met behulp van een aantal parameters, vervolgens de daarmee overeenkomende krachten bepaalt, en dan tenslotte de parameters bepaalt uit evenwichtvergelijkingen. Een tweetal voorbeelden kan dit verduidelijken.

Voorbeeld 1

Het eerste voorbeeld betreft een zeer stijve constructie, die statisch onbepaald is opgelegd door middel van een scharnier en drie oplegstaven, zie fig. 9.8. Aangenomen wordt dat de constructie zelf zo stijf is dat ze niet als zodanig vervormt. Alle verplaatsingen worden dan veroorzaakt door een rotatie van de constructie om het vaste scharnier. Stelt men dat deze rotatie een verplaatsing u_0 van het punt D tot gevolg heeft, dan kan men de bijbehorende verlengingen van de staven 2 en 3 eenvoudig bepalen, bijvoorbeeld met behulp van een Williot-diagram, zie fig. 9.9. De verlengingen van de verschillende staven zijn

$$\Delta l_1 = u_0$$

$$\Delta l_2 = \frac{2}{3}u_0$$

$$\Delta l_3 = \frac{7}{6}u_0\sqrt{2}.$$

fig. 9.8.

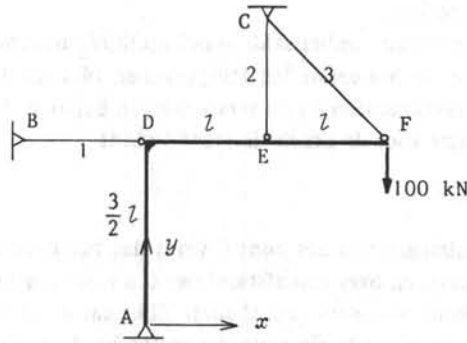
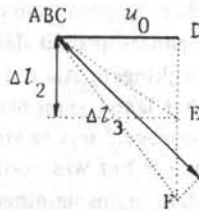


fig. 9.9.



Stel dat de lengte van de staven als volgt is,

$$l_1 = l$$

$$l_2 = l$$

$$l_3 = l\sqrt{2}$$

en stel dat alle staven van hetzelfde materiaal, met elasticiteitsmodulus E , zijn, en alle dezelfde doorsnede A hebben. Dan zijn de staafkrachten

$$N_1 = EAu_0/l$$

$$N_2 = \frac{2}{3} EAu_0/l$$

$$N_3 = \frac{7}{6} EAu_0/l.$$

De constructie is in fig. 9.10 nog eens getekend, met alle daarop werkende

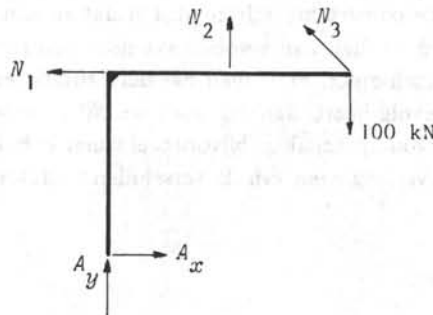


fig. 9.10.

krachten. De evenwichtsvergelijkingen voor de constructie als geheel zijn als daarin de hierboven gegeven uitdrukkingen voor de staafkrachten worden gesubstitueerd

$$A_x - \frac{EAu_0}{l} - \frac{7}{12} \frac{EAu_0}{l} \sqrt{2} = 0$$

$$A_y + \frac{2}{3} \frac{EAu_0}{l} + \frac{7}{12} \frac{EAu_0}{l} \sqrt{2} - 100 \text{ kN} = 0$$

$$\frac{EAu_0}{l} \times 3 \text{ m} + \frac{2}{3} \frac{EAu_0}{l} \times 2 \text{ m} + \frac{7}{6} \frac{EAu_0}{l} \times \frac{7}{2} \sqrt{2} \text{ m} - 100 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = 0.$$

Hieruit volgt

$$A_x = 72.2 \text{ kN}$$

$$A_y = 41.0 \text{ kN}$$

$$u_0 = 39.6 \frac{l}{EA} \text{ m.}$$

Voor de staafkrachten vindt men dan

$$N_1 = 39.6 \text{ kN}$$

$$N_2 = 26.4 \text{ kN}$$

$$N_3 = 46.2 \text{ kN.}$$

Hiermee is de krachtsverdeling volledig bekend. Desgewenst kan men nu bijvoorbeeld de momentenlijn van de stijl en de regel van de constructie tekenen.

Voorbeeld 2

Het tweede voorbeeld betreft het zelfde geval als behandeld in de vorige paragraaf als eerste voorbeeld, zie fig. 9.11. De vrijheidsgraden zijn in dit geval de horizontale en verticale componenten van de verplaatsing van het punt A.

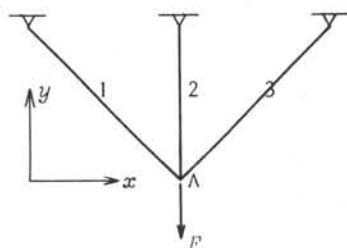


fig. 9.11.

Deze componenten zullen worden aangegeven met u_A en v_A . De verlengingen van de staven die bij deze verplaatsing behoren zijn

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2} u_A \sqrt{2} - \frac{1}{2} v_A \sqrt{2}$$

$$\Delta l_2 = -v_A$$

$$\Delta l_3 = -\frac{1}{2}u_A\sqrt{2} - \frac{1}{2}v_A\sqrt{2}.$$

De lengte van de drie staven is

$$l_1 = l\sqrt{2}$$

$$l_2 = l$$

$$l_3 = l\sqrt{2}.$$

De krachten in de staven kunnen worden berekend met behulp van de relatie

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Hieruit volgt, als voor alle staven de grootte EA gelijk is,

$$N_1 = \frac{EA}{l}(\frac{1}{2}u_A - \frac{1}{2}v_A)$$

$$N_2 = \frac{EA}{l}(-v_A)$$

$$N_3 = \frac{EA}{l}(-\frac{1}{2}u_A - \frac{1}{2}v_A)$$

De evenwichtsvergelijkingen voor het knooppunt zijn

$$-\frac{1}{2}N_1\sqrt{2} + \frac{1}{2}N_3\sqrt{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}N_1\sqrt{2} + N_2 + \frac{1}{2}N_3\sqrt{2} - F = 0.$$

Door nu hierin de formules voor de staafkrachten uitgedrukt in de onbekenden u_A en v_A te substitueren verkrijgt men

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{EA}{l}u_A = 0$$

$$-(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})\frac{EA}{l}v_A - F = 0.$$

Hieruit volgt

$$u_A = 0$$

$$v_A = -\frac{2}{2 + \sqrt{2}} \frac{Fl}{EA}.$$

Voor de staafkrachten vindt men dan

$$N_1 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} F$$

$$N_2 = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} F$$

$$N_3 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} F.$$

Dit zijn inderdaad dezelfde waarden als in de vorige paragraaf gevonden met behulp van de krachtenmethode.

Vergelijkt men de krachtenmethode en de verplaatsingsmethode, dan kan gesteld worden dat de verplaatsingsmethode iets systematischer is. De hoeveelheid rekenwerk kan echter bij de verplaatsingsmethode nogal wat meer zijn. In het geval van het tweede voorbeeld uit de vorige paragraaf, zie fig. 9.12, zijn er 7 vrijheidsgraden, namelijk de horizontale verplaatsingen van de punten

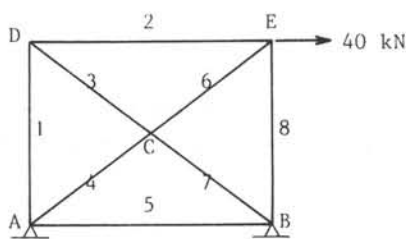


fig. 9.12

B, C, D en E, en de verticale verplaatsingen van de punten C, D en E. Alle verlengingen kan men in de verplaatsingscomponenten u_B , u_C , u_D , u_E , v_C , v_D , en v_E uitdrukken. Zo geldt bijvoorbeeld

$$\Delta l_6 = 0.8 \times (u_E - u_C) + 0.6 \times (v_E - v_C).$$

Vervolgens kunnen de staafkrachten uitgedrukt worden in de verlenging met behulp van de formule $\Delta l = Nl/EA$. Alle 8 staafkrachten kunnen daarmee dan uitgedrukt worden in de 7 onbekende verplaatsingscomponenten. De 10 onbekenden (7 verplaatsingen en 3 oplegreacties) kunnen bepaald worden uit de evenwichtsvergelijkingen voor de knooppunten. Omdat er 5 knooppunten zijn, zijn er 10 vergelijkingen, en het systeem is oplosbaar. Wel brengt dit vrij veel rekenwerk met zich mee. Men bedenke dat de oplossing met de krachtenmethode in dit geval leidde tot slechts één vergelijking met één onbekende. Toch wordt in de praktijk tegenwoordig veelal de voorkeur gegeven aan de verplaatsingsmethode. Dit omdat de aanpak systematischer is, en de oplossing van het stelsel van vergelijkingen met een computer kan geschieden. In dit stadium wordt hierop echter niet verder ingegaan.

Tot slot van deze paragraaf wordt er nog op gewezen dat de verplaatsingsmethode ook zonder meer kan worden toegepast voor de berekening van de krachtsverdeling in een statisch bepaalde constructie. Wel is de methode dan nogal omslachtig, vergeleken met de methodes die specifiek voor statisch bepaalde constructies zijn zoals de snedemethode en het Cremona-diagram. Toch kan het wel als een voordeel worden beschouwd dat deze methode geen verschil maakt tussen statisch bepaalde en statisch onbepaalde constructies. De methode leidt, uiteraard, wel tot moeilijkheden bij een kinetisch onbepaalde constructie. Er zijn dan teveel vrijheidsgraden in de constructie om de belasting te dragen

met kleine vervormingen. Ook een computer raakt dan, als er bijvoorbeeld gevraagd wordt om 20 vergelijkingen met 21 onbekenden op te lossen, in moeilijkheden.

9.3. matrixbehandeling

Vooruitlopend op een meer uitgebreide behandeling van de matrixmethoden voor de analyse van vakwerken (statisch bepaald zowel als statisch onbepaald) zal in deze paragraaf reeds aangegeven worden hoe men de gebruikte vergelijkingen kan schrijven met behulp van matrices. Daartoe wordt uitgegaan van de beschouwingen in de paragrafen 7.7 en 8.4. Daar werd gevonden dat het verband tussen de uitwendige krachten op de knopen en de staafkrachten geschreven kan worden als

$$F = AN$$

waarin A een $(2k \times s)$ -matrix is. Er werd verder gevonden dat het verband tussen de lengteveranderingen van de staven en de verplaatsingen van de knopen kan worden geschreven als

$$\Delta l = {}^t A u$$

waarin ${}^t A$ de getransponeerde van A is. Dit is een $(s \times 2k)$ -matrix.

Tussen de normaalkracht $N^{(e)}$ in een staaf en zijn lengteverandering $\Delta l^{(e)}$ bestaat een eenvoudig verband, namelijk

$$N^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{l^{(e)}} \Delta l^{(e)}$$

waarin $E^{(e)}$, $A^{(e)}$ en $l^{(e)}$ de elasticiteitsmodulus, het oppervlak van de dwarsdoorsnede, respectievelijk de lengte van de staaf (e) zijn. Geeft men EA/l aan met K , dan kan men ook schrijven

$$N^{(e)} = K^{(e)} \Delta l^{(e)}$$

In matrixvorm kan men dit schrijven als

$$N = K \Delta l$$

waarin K een vierkante $(s \times s)$ diagonaalmatrix is,

$$K = \begin{bmatrix} K^{(1)} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & K^{(2)} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & K^{(3)} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & K^{(s)} \end{bmatrix}$$

Samenvattend zijn er nu de volgende matrixvergelijkingen

$$F = AN$$

$$N = K \Delta l$$

$$\Delta l = {}^t A u.$$

Hieruit volgt door achtereenvolgende substitutie

$$F = S u$$

waarin S een vierkante ($2k \times 2k$) matrix is, gedefinieerd volgens

$$S = A K {}^t A.$$

De matrix S noemt men de stijfheidsmatrix van het systeem. Men kan eenvoudig nagaan dat S symmetrisch is: ${}^t S = {}^t (A K {}^t A) = A {}^t K {}^t A = A K {}^t A = S$, omdat de diagonaalmatrix K symmetrisch is.

De matrixvergelijking

$$F = S u$$

drukt de uitwendige krachten in de knopen uit in de verplaatsingscomponenten. Deze vergelijking ligt ten grondslag aan de later uitvoeriger te behandelen verplaatsingenmethode. In een bepaald geval, zie bijvoorbeeld fig. 9.13, zijn er een

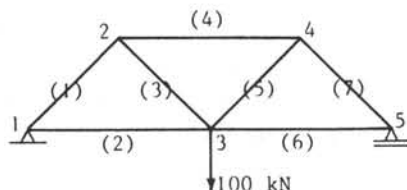


fig. 9.13.

aantal krachten gegeven (in het voorbeeld 7) en een aantal verplaatsingen (in het voorbeeld 3). Uit het stelsel $F = S u$, dat in dat geval 10 vergelijkingen voorstelt, zou men nu een stelsel van 7 vergelijkingen kunnen afsplitsen, waarin dan de 7 gegeven krachten voorkomen, en de 7 onbekende verplaatsingen. Dat heeft een eenduidige oplossing. Op de oplosmethode zelf zal hier nog niet worden ingegaan. In het college b11 wordt hierop uitvoerig teruggekomen.

Bij statisch bepaalde constructies kan men het gereduceerde stelsel

$$F_r = A_r N$$

direct oplossen, zie par. 7.7. De oplossing is

$$N = A_r^{-1} F_r.$$

Dit geeft de staafkrachten uitgedrukt in de krachten in de knopen. De vergelijking

$$N = K \Delta l$$

is al heel gemakkelijk te inverteren omdat K een diagonaalmatrix is. Men hoeft dan alleen maar de inverse waarden van de coëfficiënten op de hoofddiagonaal te bepalen. De oplossing is

$$\Delta l = K^{-1} N.$$

Er volgt nu dus

$$\Delta l = K^{-1} A_r^{-1} F_r$$

waarmee de verlengingen van de staven uitgedrukt zijn in de krachten in de knopen. Zoals reeds gezien in par. 8.4 kan men het verband tussen de staafverlengingen en de knoopverplaatsingen

$$\Delta l = {}^t A u$$

in het algemeen niet zonder meer inverteren, omdat er meer knoopverplaatsingen zijn dan staafverlengingen. Reduceert men het stelsel, door de opleggingsvoorwaarden te gebruiken, tot

$$\Delta l = {}^t A_r u_r$$

dan is de coëfficiëntenmatrix wel vierkant, en kan het stelsel geïnverteerd worden,

$$u_r = {}^t A_r^{-1} \Delta l.$$

Hiermee zijn dan de verplaatsingen gevonden. De hier geschetste procedure is wat in de voorgaande hoofdstukken gebeurd is. Eerst werden de staafkrachten opgelost uit de gegeven knoopkrachten (b.v. grafisch m.b.v. een Cremona-diagram), daarna werden de staafverlengingen berekend uit de staafkrachten, en tenslotte werden de knoopverplaatsingen berekend uit de staafverlengingen (b.v. grafisch m.b.v. een Williot-diagram).

10. SPANNINGEN EN VERVORMINGEN BIJ BUIGING

In dit hoofdstuk wordt nader ingegaan op het verschijnsel van buiging van liggers. Er zal vooral aandacht worden besteed aan de verdeling van de normaalspanningen in een doorsnede van een op buiging belaste ligger, en de vervormingen die daarbij horen. De beschouwingen zullen aanvankelijk alleen betrekking hebben op liggers met een rechthoekige doorsnede. Daarna zullen de beschouwingen gegeneraliseerd worden. Voor de behandeling van de spanningen bij buiging zal eerst, in paragraaf 10.1, nog wat nader worden ingegaan op de spanningen in een op normaalkracht belaste staaf.

10.1. spanningen bij belastingen op normaalkracht

In paragraaf 5.1 is al enige aandacht besteed aan de spanningen in een op normaalkracht belaste prismatische staaf. Van belang is vooral de aldaar gebruikte definitie van normaalspanningen, en de tekenafspraken. Men beschouwt daartoe een vlakje in een staaf, of in een ander lichaam, met de naar buiten gerichte normaal in de positieve x -richting, zie fig. 10.1. Stel dat de grootte

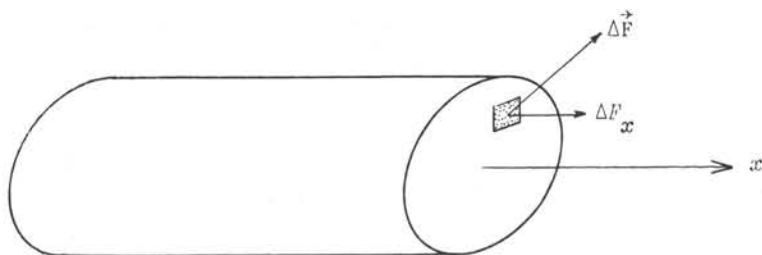


fig. 10.1.

van het oppervlakje ΔA is, en dat de materie aan de positieve kant van dat oppervlakje (die in fig. 10.1 is weggedacht) op de materie aan de negatieve kant een krachtje $\vec{\Delta F}$ uitoefent. Onder de *normaalspanning* σ_{xx} verstaat men dan de limiet van het quotiënt van de x -component ΔF_x van de overgebrachte kracht en het product van het oppervlak ΔA en de component n_x van de eenheidsnormaalvector,

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A n_x}$$

De andere componenten van het krachtje $\vec{\Delta F}$ leiden tot schuifspanningen op het beschouwde vlakje

$$\sigma_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A n_x}$$

$$\sigma_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A n_x}$$

Zie ook fig. 10.2. De tekenafspraken volgt direct uit de definities. Het komt er op neer dat een spanningscomponent positief gerekend wordt als deze in positieve coördinaatrichting werkt op een vlakje waarvan de uitwendige

normaal in een positieve coördinaatrichting wijst, of als de spanningscomponent op een vlakje met de normaal in negatieve coördinaatrichting werkt in negatieve coördinaatrichting.

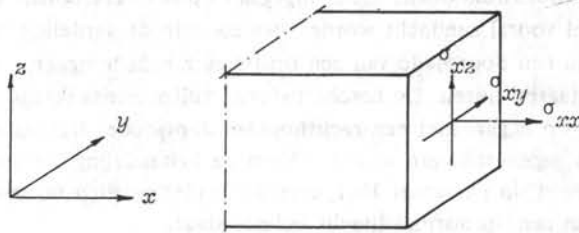


fig. 10.2.

De resultante van alle normaalspanningen werkend op een vlakke doorsnede loodrecht op de as van een staaf noemt men de **normaalkrachtinteractie**, of ook wel, kortweg, de **normaalkracht**

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA$$

Als de spanningsverdeling homogeen is, dat wil zeggen dat de spanning constant is over het gehele oppervlak A , reduceert dit tot

$$N = \sigma_{xx} A.$$

De werklijn van deze normaalkracht wordt bepaald door de ligging van het **zwaartepunt** van de doorsnede. Op dat mathematische begrip zal hieronder eerst nader worden ingegaan.

zwaartepunten

Voor een beschouwing over zwaartepunten is het nodig eerst het begrip *statische moment* in te voeren.

Onder de statische momenten S_y en S_z van een oppervlak A in het y, z -vlak verstaat men de grootheid

$$S_y = \int_A y dA$$

$$S_z = \int_A z dA.$$

Men spreekt ook wel van *oppervlaktmomenten van de eerste orde*.

Voor de coördinaten y_0 en z_0 van het zwaartepunt geldt nu, zie fig. 10.3,

$$y_0 = \frac{S_y}{A}$$

$$z_0 = \frac{S_z}{A}.$$

Men kan ook zeggen dat het zwaartepunt dat punt van de doorsnede is, dat als men het tot de oorsprong van het assenstelsel kiest, leidt tot de waarde nul voor de statische momenten.

De naam zwaartepunt is ontleend aan de statica van lichamen in het veld van de zwaartekracht. Denkt men zich een vlakke plaat gelijkmatig belegd met een substantie die een zekere constante massa per eenheid van oppervlakte heeft, dan kan die plaat in evenwicht gehouden worden door een oplegging op een scherpe punt in het zwaartepunt, zie fig. 10.4. Kiest men het zwaartepunt,

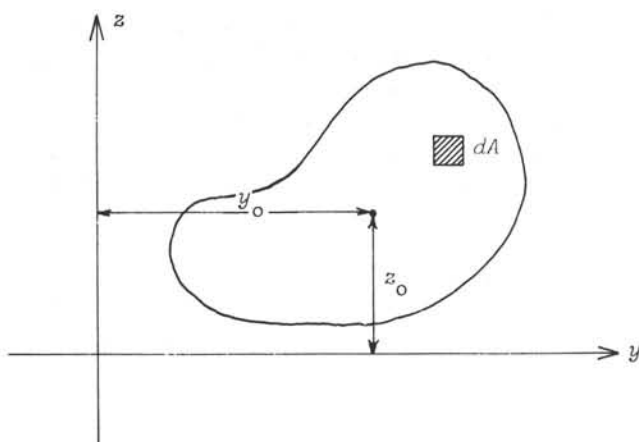


fig. 10.3.

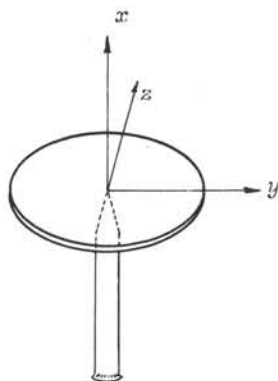


fig. 10.4.

zoals hierboven gedefinieerd, als oorsprong van het assenstelsel, dan vereist het momentenevenwicht om de z -as dat

$$\int_A \rho y \, dA = 0$$

waarin ρ de massa per eenheid van oppervlakte is. Omdat die grootte constant verondersteld is komt dit er dus op neer dat het statisch moment S_y nul moet zijn. Evenzo leidt het momentenevenwicht ten opzichte van de y -as tot de voorwaarde dat het statisch moment S_z nul moet zijn.

Een willekeurige lijn door het zwaartepunt van een oppervlak, die in dat oppervlak ligt, noemt men wel een *zwaartelij*n. De y -as en de z -as in het geval getekend in fig. 10.4 zijn zulke zwaartelijnen.

Er wordt de aandacht op gevestigd dat in veel literatuur een afwijkende notatie wordt gebruikt. Daarbij zijn S_y en S_z net verwisseld. De hier gebruikte

notatie heeft als voordeel dat S_y en S_z als de componenten in y - en z -richting van een vector kunnen worden beschouwd. Op deze grootheden kan men dus de regels van de vectoralgebra toepassen. Dat is bijvoorbeeld gemakkelijk als men de transformatie van de statische momenten bij rotatie van het assenstelsel wil nagaan.

Keren we nu terug tot de beschouwing van een op normaalkracht belaste staaf met een spanningsverdeling die over het gehele oppervlak gelijkmatig is, zie fig. 10.5, dan kan men stellen dat de normaalspanningen σ_{xx} tezamen statisch equivalent zijn met een normaalkracht N ter grootte $\sigma_{xx}A$, en gaande door het zwaartepunt van de doorsnede. Dit laatste volgt uit de omstandigheid dat de momenten ten opzichte van de z -as en de y -as, dat zijn de grootheden

$$\int_A \sigma_{xx} y \, dA \quad \text{en} \quad \int_A \sigma_{xx} z \, dA$$

nul zijn. De normaalspanning σ_{xx} is immers constant over het oppervlak, en de statische momenten S_y en S_z zijn nul omdat de y -as en de z -as door het zwaartepunt gaan.

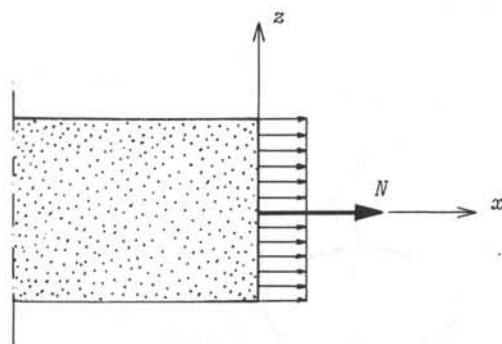


fig. 10.5.

Opgemerkt wordt dat de beschouwingen van deze paragraaf alleen geldig zijn voor prismatische staven. Bij een staaf met een verlopende doorsnede is de verdeling van de normaalspanningen σ_{xx} over de doorsnede in het algemeen niet homogeen. Bovendien treden er dan ook andere spanningen in de staaf op, schuifspanningen en normaalspanningen in andere richtingen. Vooral als de doorsnede van een getrokken staaf op korte afstand verandert (zie bijvoorbeeld de bovenste staaf in fig. 10.6) wordt de spanningsverdeling erg gecompliceerd. Alleen als de staafdoorsnede slechts zeer geleidelijk verandert (zie de onderste staaf in fig. 10.6) kan men stellen dat de normaalkracht zich ongeveer gelijkmatig over de doorsnede verdeelt. Dat is dan weliswaar een benadering, maar de benadering is redelijk goed.

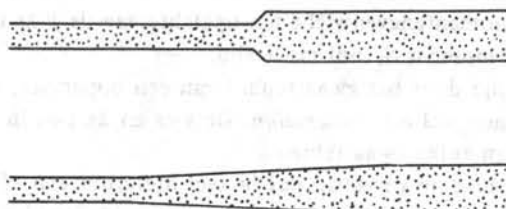


fig. 10.6.

10.2. spanningen bij buiging

In deze paragraaf wordt een begin gemaakt met de behandeling van de spanningsverdeling in een op buiging belaste ligger. Daartoe wordt een ligger beschouwd met een constante rechthoekige doorsnede, die aan zijn uiteinden zodanig door twee momenten wordt belast dat in de gehele ligger een constant

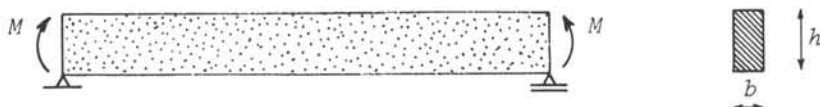


fig. 10.7.

buigend moment werkt, zie fig. 10.7. Men spreekt in dit geval wel van *zuivere buiging*.

Er wordt uitgegaan van een aantal aannamen ten aanzien van de vervorming van en de spanningsoverdracht in de ligger. De eerste aanname is dat vlakke doorsneden loodrecht op de staafas ook na vervorming vlak zijn, en loodrecht op de vervormde staafas staan. Men noemt dit de *hypothese van Bernoulli*. Verder wordt aangenomen dat er in de ligger alleen normaalspanningen in de richting van de staafas optreden. Men zou zich kunnen voorstellen dat de werking van de ligger is alsof deze bestaat uit een groot aantal vezels parallel aan de staafas. Deze vezels dragen geen krachten aan elkaar over. Men kan bewijzen dat de beide aannamen in het geval van zuivere buiging van een ligger gemaakt van homogeen isotroop lineair elastisch materiaal terecht zijn. Daartoe moet men echter uitgaan van een algemene driedimensionale beschouwing over vervormingen, spanningen en de verbanden daartussen, en dat zou hier te ver voeren. Voorlopig worden de aannamen daarom maar als hypothesen gezien.

In figuur 10.8 is een klein stukje van de ligger getekend in de vervormde toestand. Door het buigend moment zal de ligger gekromd worden. Een vezel aan de onderzijde zal daarbij langer worden, en een vezel aan de bovenzijde zal korter worden. Er wordt, voorlopig zonder bewijs, gesteld dat een vezel precies op de halve hoogte van de ligger niet van lengte verandert. Men noemt dat wel de *neutrale lijn*. Als de oorspronkelijke lengte van het beschouwde stukje ligger Δx is, en de plaatselijke kromtestraal is R , dan geldt voor de hoek α in fig. 10.8,

$$\alpha = \frac{\Delta x}{R}$$

De lengte van een vezel op een afstand onder de neutrale lijn is, na de vervorming,

$$a(R + z) = \Delta x \left(1 + \frac{z}{R}\right).$$

Omdat de oorspronkelijke lengte Δx was, is de verlenging dus

$$\Delta l = \Delta x \frac{z}{R}$$

Deelt men dit door de oorspronkelijke lengte Δx , dan vindt men de rek ϵ_{xx} .

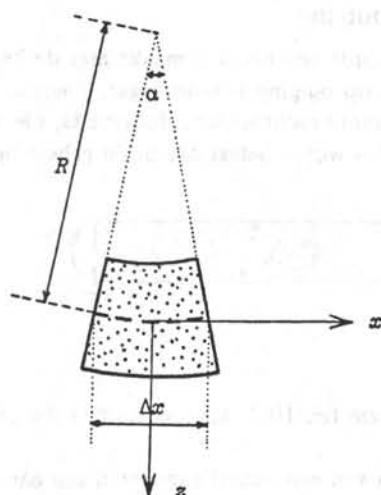


fig. 10.8.

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{R}.$$

Dit is een lineaire verdeling van de rekken over de hoogte, zie fig. 10.9. Op

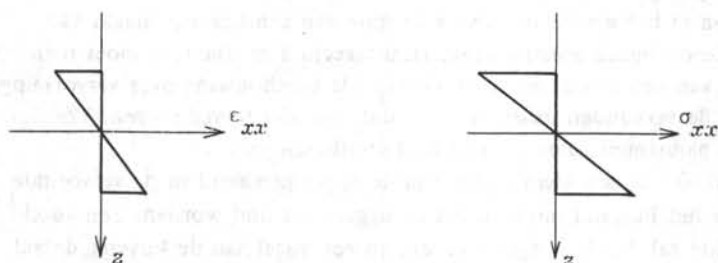


fig. 10.9.

grond van de wet van Hooke behoort bij de gevonden waarden voor de rek ϵ_{xx} de volgende verdeling van de normaalspanningen σ_{xx} ,

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E \frac{z}{R}.$$

Ook de normaalspanningen zijn dus lineair verdeeld over de hoogte van de ligger. Ze zijn nul op de halve hoogte van de ligger.

De gevonden spanningsverdeling heeft geen normaalkracht tot resultante omdat de neutrale lijn (dat is de lijn in de doorsnede waar de rekken, en dus ook de normaalspanningen, nul zijn) precies op de halve hoogte is aangenomen. De resulterende normaalkracht is dan nul omdat

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_{xx} b \, dz = \frac{Eb}{R} \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} z \, dz = 0.$$

Meer algemeen gesproken kan men zeggen dat de normaalkracht nul is omdat het statisch moment nul is. Bij zuivere buiging gaat de neutrale lijn door het zwaartepunt van de doorsnede.

Uit de hierboven gevonden verdeling van de normaalspanningen kan ook de grootte van het buigend moment berekend worden. De bijdrage van de normaalspanning σ_{xx} , werkend op een elementair strookje ter breedte b en met een hoogte dz (zie fig. 10.10), gelegen op een afstand z beneden de neutrale lijn is

$$(\sigma_{xx} b \, dz) \times z$$

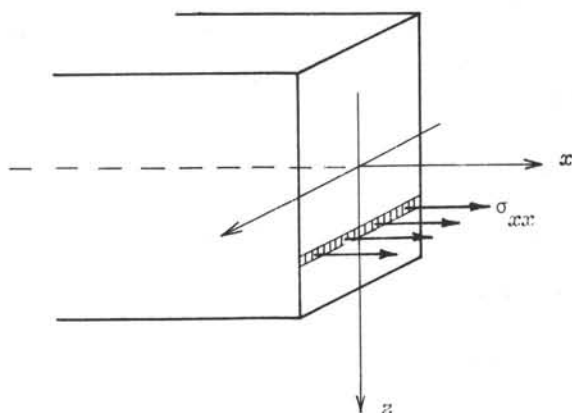


fig. 10.10.

en het totale buigend moment wordt dus

$$M = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_{xx} b z \, dz$$

Met behulp van de eerder gevonden uitdrukking voor de spanningen wordt dit

$$M = \frac{Eb}{R} \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} z^2 \, dz = \frac{Ebh^3}{12R}.$$

Men schrijft dit vaak als volgt

$$M = \frac{EI}{R}$$

waarin het symbool I dan gebruikt wordt voor de grootheid

$$I = \frac{1}{12} bh^3$$

Later zal meer algemeen op dit soort grootheden worden ingegaan. Voorlopig kan men de grootheid I , die men aangeeft met de naam *traagheidsmoment*, beschouwen als niet meer dan een verkorte schrijfwijze voor $bh^3/12$.

Uit de twee relaties $\sigma_{xx} = Ez/R$ en $M = EI/R$ kan men de kromtestraal R elimineren. Dan vindt men

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I}.$$

Dit is een uiterst belangrijke formule. Deze formule maakt het mogelijk de normaalspanningen σ_{xx} in de ligger te berekenen uit de grootte van het buigend moment. Dat is voor de civiel ingenieur erg belangrijk omdat aan de spanningen in een constructie in het algemeen grenzen gesteld worden, afhankelijk van het gebruikte materiaal. Steenachtige materialen (bijvoorbeeld beton) scheuren als de spanning een bepaalde waarde bereikt, en een metaal gaat vloeien bij een bepaalde waarde van de spanning.

De grootste waarden van de normaalspanning treden op aan de onderkant en aan de bovenkant van de ligger. De grootste trekspanning treedt op aan de onderzijde, en heeft de grootte

$$\sigma_{xx-\max} = \frac{M}{I}(\frac{1}{2}h).$$

De grootte $I/(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{6}bh^2$ noemt men soms wel het *weerstandsmoment*

$$W = \frac{1}{6}bh^2.$$

Dan kan men dus schrijven

$$\sigma_{xx-\max} = \frac{M}{W}.$$

De grootste drukspanning treedt op aan de bovenzijde van de ligger, en is in absolute waarde gelijk aan de grootste trekspanning

$$\sigma_{xx-\min} = -\frac{M}{I}(\frac{1}{2}h).$$

De formules die hierboven zijn afgeleid hebben betrekking op het geval van zuivere buiging, dat wil zeggen het geval van een constant buigend moment in een ligger met constante doorsnede (een prismatische ligger). Als het buigend moment in de ligger niet constant is, dat wil zeggen als er een van nul verschillende dwarskracht in de ligger werkt, is de hypothese van Bernoulli (vlakke doorsneden blijven vlak) eigenlijk niet meer verantwoord. De dwarskracht brengt schuifspanningen met zich mee, en die leiden weer tot extra vervormingen, waarbij een vlakke normaaldoorsnede niet vlak blijft, en niet loodrecht op de staaf-as blijft staan. De hierboven gegeven afleiding van de verdeling van de normaalspanningen is dan eigenlijk niet meer correct. Men kan echter bewijzen dat de verdeling van de normaalspanningen ook bij aanwezigheid van een dwarskracht lineair over de hoogte is. Het bewijs zal hier niet geleverd worden, omdat daarvoor meer inzicht in de spanningen en vervormingen in het algemene driedimensionale geval nodig is. Men zou hier kunnen volstaan met de bewering, zonder bewijs, dat de fouten in de hierboven gegeven afleiding, als men die toepast op een elementair stukje uit een ligger met een variabel buigend moment, tegen elkaar wegvallen. Deze fouten betreffen de verwaarlozing van de vervorming ten gevolge van dwarskracht, en de vervormingen in hoogerichting en breedterichting van de ligger, met de daarbij behorende spanningen. Op de verdeling van de normaal-

spanningen σ_{xx} heeft dit echter, alles bij elkaar genomen, geen invloed. Dat is een gelukkige samenloop van omstandigheden. Samenvattend kan gesteld worden dat de formules

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I}$$

$$M = \frac{EI}{R}$$

een algemene geldigheid bezitten voor prismatische liggers vervaardigd van een homogeen, isotroop, en lineair elastisch materiaal. Aan de laatstgenoemde voorwaarden wordt door een materiaal als staal goed voldaan, mits de vervormingen klein zijn. Voor andere constructiematerialen, zoals beton en hout, geldt dat hun gedrag redelijk goed benaderd kan worden door dat van lineair elastisch materiaal.

In het onderstaande voorbeeld zal het gebruik van de formules worden toegelicht.

Voorbeeld

Het voorbeeld heeft betrekking op een betonnen balk met een breedte van 10 cm en een hoogte van 5 cm. Gegeven is dat het beton scheurt bij een trekspanning van $3 \text{ MPa} = 3 \times 10^6 \text{ N/m}^2$. Bij belasting op druk bezwijkt het beton pas bij een spanning van -40 MPa , door verbrijzeling. Gevraagd wordt de draagkracht van de balk te berekenen als de overspanning 1 m is, en de balk belast wordt door een puntlast in het midden, zie fig. 10.11.

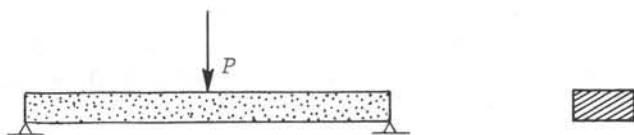


fig. 10.11.

In dit geval treedt het grootste buigend moment op in het midden, en de grootte ervan is (zie paragraaf 5.4.)

$$M_{\max} = \frac{1}{4} PL$$

De hierbij behorende normaalspanningen vindt men met behulp van de formule

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I}$$

In dit geval is de grootste trekspanning, aan de onderzijde van de ligger, maatgevend. Dan is $z = \frac{1}{2}h$, en het maximaal toelaatbare moment is nu dus

$$M_{\max} = \bar{\sigma}_{xx} I / (\frac{1}{2}h)$$

waarin $\bar{\sigma}_{xx}$ de toelaatbare spanning is. Men vindt nu, met de gegeven getalwaarden,

$$M_{\max} = 125 \text{ Nm.}$$

Omdat de overspanning 1 m is vindt men nu voor de toelaatbare kracht $\bar{P}$ (de draagkracht)

$$\bar{P} = 500 \text{ N.}$$

Dit betekent dat de ligger al scheurt en dus kapot gaat, bij belasting door het gewicht van een persoon met een massa van ongeveer 50 kg.

De lezer ga zelf na dat het verstandiger is de balk een kwartslag te draaien. Dan is de breedte b gelijk aan 5 cm, en de hoogte h is dan 10 cm. De balk scheurt dan pas bij een belasting door een kracht van 1000 N. De balk is dan in staat een redelijk zwaar persoon te dragen.

10.3. vervormingen bij buiging

In de vorige paragraaf is al het volgende verband gevonden tussen het buigend moment in een ligger, en de daarbij behorende kromtestraal van de ligger,

$$M = \frac{EI}{R}.$$

Hierin is E de elasticiteitsmodulus van het materiaal en I is het traagheidsmoment van de beschouwde rechthoekige doorsnede, $I = \frac{1}{12}bh^3$. In deze paragraaf zal nader ingegaan worden op de vervormingen van de ligger als geheel, daarbij uitgaande van het bovenstaande verband tussen de plaatselijke kromtestraal R , het buigend moment M en de buigstijfheid EI . Men merke op dat als het buigend moment nul is, of als de buigstijfheid oneindig groot is, de kromtestraal oneindig groot wordt. De balk blijft dan recht.

In fig. 10.12 is een klein stukje van de ligger getekend, in zijn oorspronkelijke rechte toestand en in de vervormde toestand. De verplaatsing van de neutrale lijn in z -richting wordt aangegeven met w .

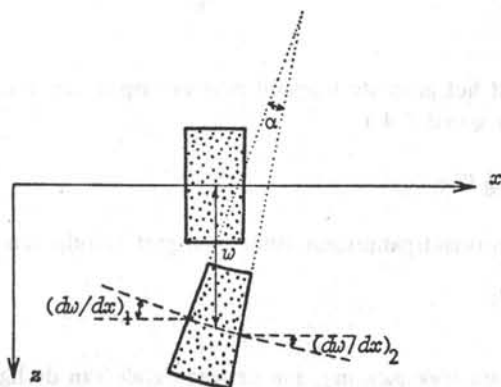


fig. 10.12.

Er geldt nu, zoals al eerder gezien (zie fig. 10.8)

$$\alpha = \frac{\Delta x}{R}$$

Hierin is Δx de lengte van het elementje, gemeten langs de neutrale lijn. De hoek α is het verschil van de richtingen van de twee zijvlakjes van het elementje, na de vervorming, zie fig. 10.12. Omdat op grond van de hypothese van Bernoulli de normaaldoorsneden loodrecht op de as van de ligger blijven staan is α ook gelijk aan het verschil van de hellingen van de as aan de linker- en de rechterzijde van het elementje. Deze helling is, als de hoekverdraaiingen klein zijn, in het algemeen gelijk aan dw/dx , en er geldt dus

$$\alpha = \left(\frac{dw}{dx}\right)_1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)_2$$

waarin de indices 1 en 2 de linker- en rechterzijde van het elementje aangeven. Men vindt nu

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha}{\Delta x} = - \frac{(dw/dx)_2 - (dw/dx)_1}{\Delta x}$$

Bij overgang in de limiet $\Delta x \rightarrow 0$ wordt dit

$$\frac{1}{R} = - \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Dit betekent dat, als de helling van de neutrale lijn klein is, de kromming (op het teken na) gelijk is aan de tweede afgeleide van de verticale verplaatsing w .

Men kan het hier gevonden resultaat vergelijken met de uit de wiskunde bekende formule voor de kromtestraal van een kromme gegeven door een vergelijking $y = f(x)$. De formule is

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d^2 f/dx^2}{(1 + (df/dx)^2)^{3/2}} \right|$$

Als $df/dx \ll 1$ reduceert het rechterlid inderdaad tot de tweede afgeleide.

In de vorige paragraaf is voor het verband tussen de kromtestraal R en het buigend moment M het volgende verband gevonden

$$M = \frac{EI}{R}$$

Omdat verder

$$\frac{1}{R} = - \frac{d^2 w}{dx^2}$$

vindt men nu, door eliminatie van de kromtestraal R , het volgende verband tussen het buigend moment M en de tweede afgeleide van de verticale verplaatsing w ,

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M}{EI}$$

Dit is een zeer belangrijke formule, die in de Toegepaste Mechanica zeer vaak gebruikt wordt. De formule betekent dat men de verticale verplaatsingen kan bepalen door de grootte M/EI tweemaal te integreren.

In het vervolg van deze paragraaf zal het gebruik van de formule toegelicht worden aan de hand van een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1

Het eerste voorbeeld betreft een ligger op twee steunpunten, met een gelijkmatig verdeelde belasting ter grootte f_0 , zie fig. 10.13. Het verloop

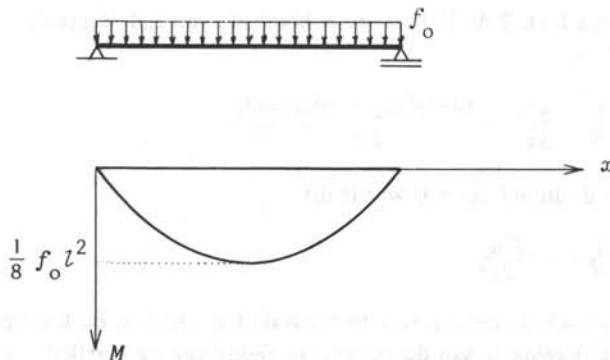


fig. 10.13.

van het buigend moment is voor dit geval al bepaald in paragraaf 5.4. Daar werd gevonden

$$M = \frac{1}{2} f_0 x l - \frac{1}{2} f_0 x^2.$$

Omdat in het algemeen geldt dat

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

vindt men nu, als aangenomen wordt dat EI een constante is (dat is het geval voor een homogene ligger met een overal gelijke doorsnede),

$$\psi = \frac{dw}{dx} = -\frac{f_0}{EI} \left(\frac{1}{4} x^2 l - \frac{1}{6} x^3 \right) + A$$

$$w = -\frac{f_0}{EI} \left(\frac{1}{12} x^3 l - \frac{1}{24} x^4 \right) + Ax + B.$$

Hierin zijn A en B integratieconstanten. Deze constanten kan men bepalen uit de randvoorwaarden

$$x = 0 : w = 0$$

$$x = l : w = 0.$$

Men vindt dan

$$A = \frac{f_0 l^3}{24EI}$$

$$B = 0.$$

De uitdrukking voor de verticale verplaatsing (de *zakking*) wordt nu tenslotte

$$w = \frac{f_0}{24EI} (xl^3 - 2x^3l + x^4).$$

De grootste zakking treedt op in het midden. Dan is $x = \frac{1}{2}l$, en men vindt voor deze maximale zakking

$$w_{\max} = \frac{5 f_0 l^4}{384 EI}$$

Dit is een belangrijke formule, die vaak toepassing vindt.

Voorbeeld 2

Het tweede voorbeeld betreft een ander belangrijk standaard-geval, namelijk dat van een ligger op twee steunpunten, met een puntlast in het midden, zie fig. 10.14. Ook voor dit belastinggeval is de bepaling van het verloop van het buigend moment al behandeld in paragraaf 5.4. Het maximale moment bleek

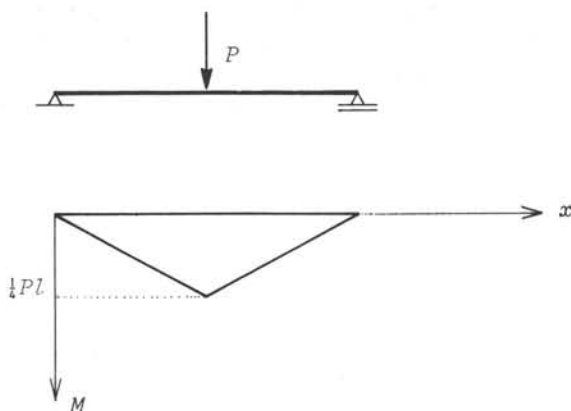


fig. 10.14.

daarbij op te treden in het midden van de ligger, en een grootte van $\frac{1}{4}Pl$ te hebben, als P de grootte van de puntlast is, en l de overspanning van de ligger. Het buigend moment verloopt verder lineair naar nul ter plaatse van de opleggingen, zie ook fig. 10.14.

In dit geval is het het handigst slechts één helft van de ligger te beschouwen, en dan van symmetrie-overweging gebruik te maken. Beschouwt men alleen de linkerhelft van de ligger, dan geldt daar voor het buigend moment

$$M = \frac{1}{2}Px$$

en omdat in het algemeen geldt dat

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

vindt men nu voor de hellingshoek van de as, aannemende dat de buigstijfheid EI constant is,

$$\psi = \frac{dw}{dx} = -\frac{Px^2}{4EI} + A.$$

Hieruit volgt voor de verticale verplaatsing van de linkerhelft van de ligger,

$$w = -\frac{Px^3}{12EI} + Ax + B.$$

De constanten A en B kunnen bepaald worden uit de randvoorwaarden

$$x = 0 : w = 0$$

$$x = \frac{1}{2}l : \frac{dw}{dx} = 0.$$

Men bedenke dat deze laatste voorwaarde alleen gesteld kan worden vanwege de symmetrie van de ligger en zijn belasting. In een meer algemeen geval, bijvoorbeeld het geval van een ligger op twee steunpunten met een puntlast op een willekeurige plaats, is het vaak nodig meerdere delen van de ligger te beschouwen, en die dan later aan elkaar aan te sluiten door de overgangsvoorwaarden dat de onderdelen ter plaatse van de aansluiting dezelfde verticale verplaatsing w en dezelfde verdraaiing ψ hebben. In dit geval is dat echter niet nodig omdat uit de symmetrie volgt dat de ligger in het midden horizontaal blijft.

Men vindt nu voor de integratieconstanten

$$A = \frac{Pl^2}{16EI}$$

$$B = 0.$$

De uitdrukking voor de verticale verplaatsing van het linkerdeel van de ligger wordt nu

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}l : w = \frac{P}{48EI}x(3l^2 - 4x^2).$$

De grootste zakking treedt uiteraard weer op in het midden van de ligger. Men vindt hiervoor

$$w = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Ook dit is een bekende standaardformule uit de Toegepaste Mechanica.

Het hier beschouwde geval van een puntlast in het midden van een ligger opgelegd op een scharnier- en een roloplegging werd ook al behandeld in het voorbeeld van de vorige paragraaf. Daar betrof het een betonnen balk, met een doorsnede van 10 cm bij 5 cm, en met een overspanning van 1 m. Er bleek daar-

bij dat de balk juist begint te scheuren bij een puntlast van ongeveer 500 N. Als de elasticiteitsmodulus van het beton gesteld wordt op 40 GPa (de precieze waarde hangt nogal af van de betonkwaliteit) vindt men nu voor de bijbehorende maximale zakking

$$w_{\max} = \frac{1}{4} \text{ mm.}$$

Dat is nogal weinig. De ligger blijkt al kapot te gaan bij een zakking die 4000 maal zo klein is als de overspanning.

De lezer ga zelf na dat het ook voor de zakkingen gunstiger is de ligger een kwartslag te draaien. Het traagheidsmoment $I = bh^3/12$ wordt dan een factor 4 groter, en de zakking wordt dan dus, bij dezelfde belasting, een factor 4 kleiner.

10.4. symmetrische profielen

In de voorafgaande paragrafen is uitvoerig ingegaan op het geval van zuivere buiging van een ligger met een constante rechthoekige doorsnede. In deze paragraaf zullen de beschouwen gegeneraliseerd worden voor liggers met een doorsnede van meer willekeurige vorm. Er zal wel worden aangenomen dat alle dwarsdoorsnedes van de ligger identiek zijn, dat wil zeggen dat de ligger prismatisch is. Ook zal worden verondersteld dat de dwarsdoorsnede tenminste één as van symmetrie heeft (zie fig. 10.15), en dat de belasting zodanig is dat de mo-

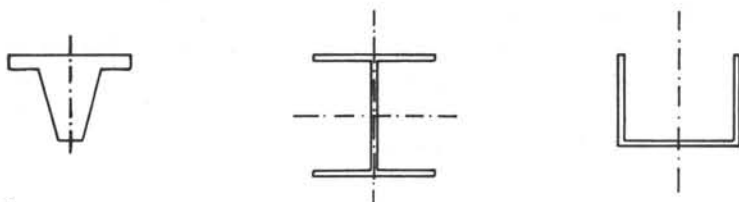


fig. 10.15.

mentvector loodrecht staat op het vlak door de symmetrie-as en de staafas. Dit laatste betekent dat de neutrale lijn in een doorsnede loodrecht staat op de symmetrie-as, en dat brengt met zich mee dat de normaalspanningen in twee symmetrisch ten opzichte van elkaar gelegen punten (bijvoorbeeld de punten A en B in fig. 10.16) gelijk zijn.

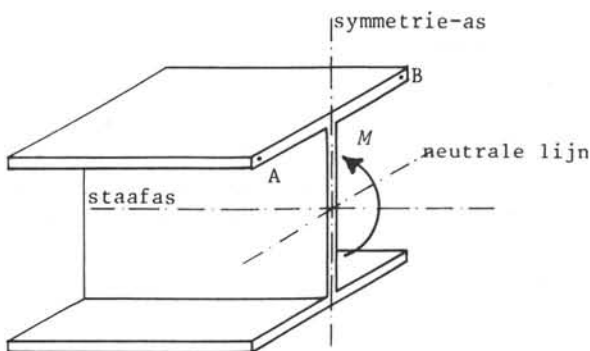


fig. 10.16.

Er zal uitgegaan worden van de benadering van Bernoulli: vlakke doorsneden loodrecht op de staafas behouden die eigenschap, en de normaalspanningen σ_{xx} worden uitsluitend bepaald door de rekken ϵ_{xx} via de wet van Hooke voor een enkele vezel, $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$.

Aangenomen wordt dat de ligger alleen een buigend moment en een dwarskracht moet overbrengen, en geen normaalkracht. Uit de veronderstelling dat vlakke doorsneden vlak blijven volgt dat de rekken lineair verlopen over de

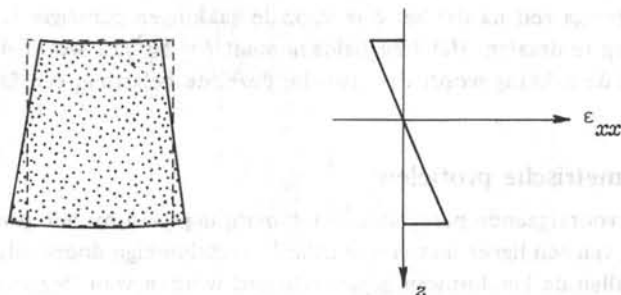


fig. 10.17.

hoogte, zie fig. 10.17. Hieruit volgt dat de normaalspanningen σ_{xx} ook lineair over de hoogte verlopen. Omdat de doorsnede geen normaalkracht behoeft over te brengen moet de spanningsverdeling voldoen aan de voorwaarde dat de resulterende kracht gelijk is aan nul. Voor een ligger met rechthoekige doorsnede betekent dit dat de neutrale lijn (de meetkundige plaats van punten in de doorsnede waar de normaalspanning nul is) precies op halve hoogte ligt. In het meer algemene geval volgt de ligging van de neutrale lijn uit de eis dat de resulterende normaalkracht nul is. Voor een willekeurig profiel met een verticale symmetrie-as, zie fig. 10.18, leidt dit tot de voorwaarde

$$\int_A z \, dA = \int z b \, dz = 0.$$

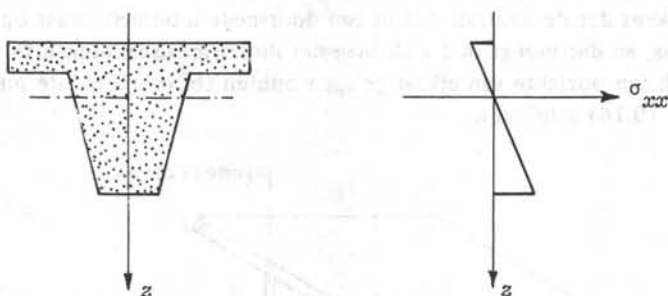


fig. 10.18.

Dit betekent dat de neutrale lijn door het zwaartepunt moet gaan.

De grootte van de rekken wordt bepaald door de kromming, en wel geldt er zoals al in paragraaf 10.2 afgeleid (zie fig. 10.18),

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{R}.$$

Op grond van de wet van Hooke zijn de bijbehorende spanningen

$$\sigma_{xx} = \frac{Ez}{R}$$

Het buigend moment vindt men hieruit door de kracht $\sigma_{xx} b dz$ met de arm z te vermenigvuldigen, en dan integreren over de hoogte,

$$M = \int \sigma_{xx} b z dz = \frac{EI_{zz}}{R}$$

waarin I_{zz} het traagheidsmoment is,

$$I_{zz} = \int z^2 b dz.$$

Men bedenke dat in dit geval de breedte b in principe een functie van z is. In dit stadium is het zinvol een wat algemenere beschouwing over traagheidsmomenten te houden.

traagheidsmomenten

In paragraaf 10.1 is het begrip statisch moment, of oppervlaktemoment van de eerste orde, al ingevoerd. De definitie van de statische momenten van een

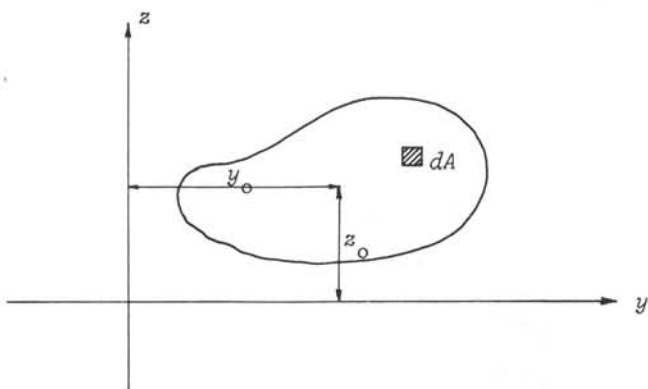


fig. 10.19.

oppervlak A is

$$S_y = \int_A y dA$$

$$S_z = \int_A z dA.$$

Tevens werd in paragraaf 10.1 het zwaartepunt gedefinieerd als het punt dat leidt tot de waarde nul voor beide statische momenten als men het tot de oorsprong van het assenstelsel kiest.

Traagheidsmomenten zijn soortgelijke grootheden, maar dan van de tweede orde. Men spreekt daarom ook wel van *oppervlaktemomenten van de tweede orde*. De definities van de traagheidsmomenten van het oppervlak A ten opzichte van een orthogonaal assenstelsel, met de assen y en z , zijn

$$I_{yy} = \int_A y^2 dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

$$I_{zy} = \int_A zy dA$$

$$I_{zz} = \int_A z^2 dA.$$

Hierin is dA een oppervlakte-elementje,

$$dA = dy dz.$$

De grootheden I_{yz} en I_{zy} zijn uiteraard aan elkaar gelijk. Men noemt dit soms ook wel traagheidsproducten.

Voor een rechthoekige doorsnede, met breedte b en hoogte h , vindt men, als de oorsprong van het assenstelsel in het zwaartepunt wordt gekozen (zie fig. 10.20),

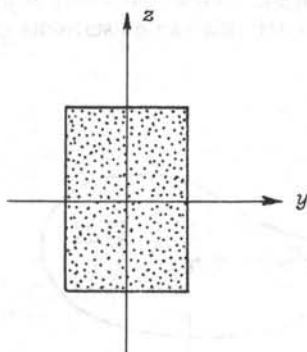


fig. 10.20.

$$I_{yy} = \frac{1}{12} hb^3$$

$$I_{yz} = I_{zy} = 0$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} bh^3.$$

In het voorgaande bleek de grootheid I_{zz} een rol te spelen bij de spanningsverdeling en de vervormingen bij buiging. Kortheidshalve is die grootheid toen aangegeven met I .

In het geval van een doorsnede die symmetrisch is ten opzichte van de z -as, zie fig. 10.21, geldt

$$\int dy = b$$

waarin b de, van z afhankelijke, breedte van de doorsnede is. Er geldt verder, vanwege de symmetrie ten opzichte van de z -as, dat voor elke waarde van z geldt dat

$$\int y dy = 0.$$

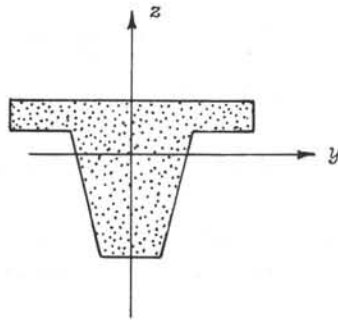


fig. 10.21.

Er volgt nu dat

$$I_{yz} = \int_A yz \, dy \, dz = \int z \int y \, dy \, dz = 0.$$

Verder volgt nu dat

$$I_{zz} = \int_A z^2 \, dy \, dz = \int z^2 \int dy \, dz = \int b(z)z^2 \, dz$$

en dit is in overeenstemming met een in deze paragraaf eerder afgeleide formule voor de grootheid I die voorkomt in de uitdrukking voor de spanningen en de vervormingen bij buiging van een ligger met een symmetrisch profiel.

Een belangrijke formule voor de berekening van traagheidsmomenten ten opzichte van een willekeurig assenstelsel is de zogenaamde *regel van Steiner*. Deze regel heeft betrekking op de relatie tussen traagheidsmomenten ten opzichte van een willekeurige as en een daarmee evenwijdige as door het zwaartepunt. Stel dat in een doorsnede een assenstelsel door het zwaartepunt is gekozen, met assen y en z , zie fig. 10.22. Stel verder dat er ook een assenstelsel met assen y' en

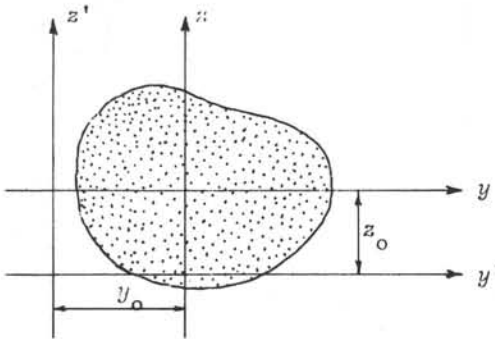


fig. 10.22.

z' in het vlak van de doorsnede is gekozen, dat ten opzichte van het y , z -assenstelsel verschoven is over de afstanden y_0 en z_0 , zie fig. 10.22. Er geldt nu

$$y' = y + y_0$$

$$z' = z + z_0.$$

Voor de traagheidsmomenten ten opzichte van het y' , z' -assenstelsel vindt men nu

$$I_{y'y'} = \int_A (y')^2 dA = \int_A (y^2 + 2yy_0 + y_0^2) dA$$

$$I_{z'z'} = \int_A (z')^2 dA = \int_A (z^2 + 2zz_0 + z_0^2) dA$$

$$I_{y'z'} = \int_A (y'z') dA = \int_A (yz + yz_0 + y_0z + y_0z_0) dA.$$

Omdat y_0 en z_0 constanten zijn en omdat de statische momenten $\int y dA$ en $\int z dA$ nul zijn (omdat het y, z -assenstelsel door het zwaartepunt gaat), vindt men nu

$$I_{y'y'} = I_{yy} + y_0^2 A$$

$$I_{z'z'} = I_{zz} + z_0^2 A$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} + y_0 z_0 A.$$

Dit is de zogenaamde verschuivingsstelling van Steiner. Men bedenke dat de stelling alleen bruikbaar is bij vergelijking met de traagheidsmomenten ten opzichte van een assenstelsel door het zwaartepunt. Hieronder worden enige voorbeelden van de berekening van traagheidsmomenten gegeven.

Voorbeeld 1, Rechthoek

Voor een rechthoekige doorsnede, met breedte b en hoogte h , zijn hierboven al de traagheidsmomenten ten opzichte van een assenstelsel door het

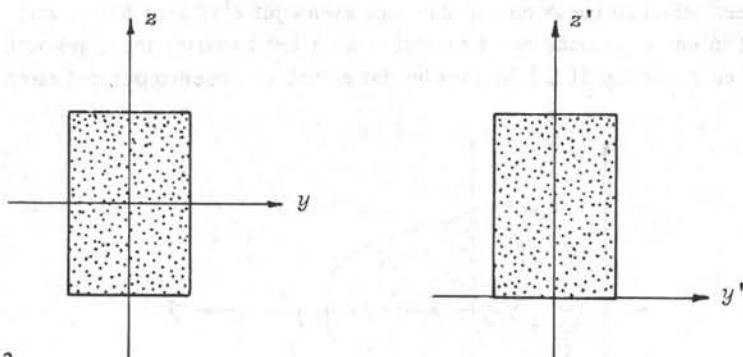


fig. 10.23.

zwaartepunt afgeleid. Hiervoor werd gevonden

$$I_{yy} = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{yz} = 0.$$

Als een van de assen verschoven wordt zodanig dat deze langs een van de zijden valt, zie fig. 10.23, vindt men

$$I_{y'y'} = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$I_{z'z'} = \frac{1}{3} bh^3$$

$$I_{y'z'} = 0.$$

Het traagheidsmoment $I_{z'z'}$ kan men berekenen met behulp van de regel van Steiner, die in dit geval stelt dat

$$I_{z'z'} = I_{zz} + (\frac{1}{2}h)^2 bh = \frac{1}{3} bh^3$$

Uiteraard kan men dit traagheidsmoment ook berekenen door direct van de definitie uit te gaan,

$$I_{z'z'} = \int_0^h \int_{-\frac{1}{2}b}^{-\frac{1}{2}b} (z')^2 dy' dz' = \frac{1}{3} bh^3.$$

Voorbeeld 2, Driehoek

Voor een doorsnede met een driehoekige doorsnede zijn vooral van belang de traagheidsmomenten ten opzichte van een as evenwijdig aan een van de drie zijden, zie fig. 10.24. Het traagheidsmoment $I_{z'z'}$ kan men als volgt berekenen, zie fig. 10.24,

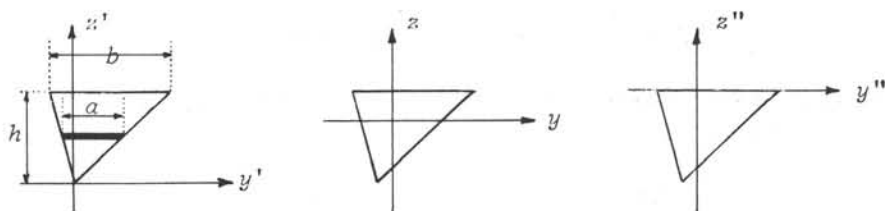


fig. 10.24.

$$I_{z'z'} = \int_0^h z^2 \int dy dz = \int_0^h az^2 dz.$$

Omdat $a = bz/h$ vindt men nu

$$I_{z'z'} = \frac{1}{4} bh^3$$

Met behulp van de regel van Steiner vindt men nu voor het traagheidsmoment ten opzichte van de y -as (die door het zwaartepunt gaat)

$$I_{zz} = \frac{1}{4} bh^3 - \frac{1}{2} bh(\frac{2}{3}h)^2 = \frac{1}{36} bh^3$$

Door nogmaals de regel van Steiner toe te passen vindt men voor het traagheidsmoment ten opzichte van een as die samenvalt met de bovenzijde (zie de meest rechtse tekening in fig. 10.24)

$$I_{z''z''} = \frac{1}{36} bh^3 + \frac{1}{2} bh(\frac{1}{3}h)^2 = \frac{1}{12} bh^3$$

Voorbeeld 3, I-profiel

Als derde voorbeeld zal worden beschouwd een geschematiseerd I-profiel. De maten zijn weergegeven in fig. 10.25. Het traagheidsmoment ten opzichte

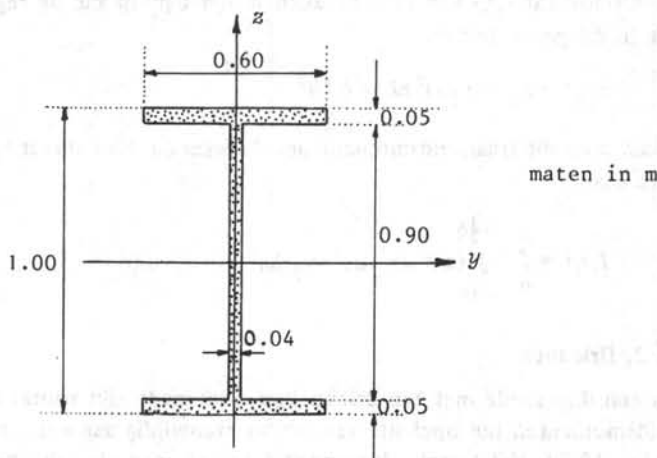


fig. 10.25.

van de y -as van het lijf is

$$I_{zz-l} = \frac{1}{12} (0,04) (0,90)^3 = 2,43 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Het traagheidsmoment van een flens ten opzichte van een horizontale as door zijn eigen zwaartepunt is

$$I_{z'z'-f} = \frac{1}{12} (0,60) (0,05)^3 = 6,25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Met behulp van de verschuivingsstelling van Steiner vindt men voor het traagheidsmoment van een flens ten opzichte van de y -as (die door het zwaartepunt van het lijf gaat, en dat is ook het zwaartepunt van het profiel)

$$I_{zz-f} = I_{z'z'-f} + (0,05) \times (0,60) \times (0,475)^2 = 6,77 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Het eigen traagheidsmoment van de flens blijkt hierbij alleen van belang te zijn voor de afronding in de laatst gegeven decimaal.

Het totale traagheidsmoment van het profiel ten opzichte van de y -as wordt nu, door de bijdragen van het lijf en de twee flenzen bij elkaar op te tellen,

$$I_{zz} = 15,97 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Men merke op dat de bijdrage van de flenzen hierin nogal wat groter is dan die van het lijf. De flenzen dragen sterk bij tot het traagheidsmoment. Dat komt doordat in de integraal

$$I_{zz} = \int z^2 dA$$

de waarde van z in de flenzen zo groot is.

De lezer ga zelf na dat het traagheidsmoment ten opzichte van de z -as de volgende waarde heeft

$$I_{yy} = 1,80 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Dit traagheidsmoment blijkt aanmerkelijk kleiner te zijn dan I_{zz} .

Er wordt op gewezen dat in veel literatuur, en bij veel toepassingen in de civiele techniek, een andere notatie van de traagheidsmomenten wordt gebruikt. Men schrijft dan vaak I_z in plaats van I_{yy} , I_y in plaats van I_{zz} , en C_{yz} in plaats van I_{yz} . Het voordeel van de hier gebruikte notatie zal pas later blijken als ingegaan wordt op de transformatieformules bij rotatie van de assen voor grootheden als traagheidsmomenten.

We keren nu terug naar de beschouwing van de spanningen bij buiging van een symmetrisch profiel, zie fig. 10.26. Er wordt gerecapituleerd dat de verdeling

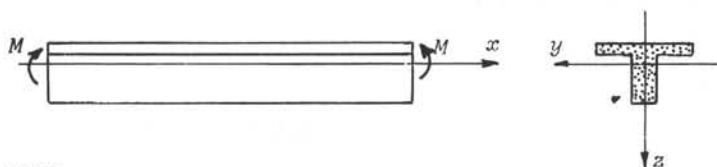


fig. 10.26.

van de rekken over de hoogte lineair is,

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{R}$$

waarin R de plaatselijke kromtestraal is, en waarbij z gemeten wordt ten opzichte van de neutrale lijn, dat is in het geval van buiging zonder normaalkracht een lijn door het zwaartepunt (in fig. 10.26 de y -as).

De spanningsverdeling is

$$\sigma_{xx} = \frac{Ez}{R}$$

Voor het buigend moment vindt men

$$M = \int \sigma_{xx} b(z) z \, dz = \frac{EI_{zz}}{R}$$

waarin I_{zz} het traagheidsmoment is

$$I_{zz} = \int z^2 \, dA = \int z^2 b(z) \, dz.$$

Door eliminatie van de kromtestraal vindt men de spanningsverdeling uitgedrukt in het buigend moment,

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I_{zz}}$$

Deze formule werd ook al in paragraaf 10.2 afgeleid, voor het speciale geval van een ligger met rechthoekige doorsnede. Het traagheidsmoment I_{zz} werd daar kortweg aangegeven met I . De formule blijkt een algemene geldigheid te hebben voor een ligger met een symmetrisch profiel die belast wordt door een buigend moment zodanig dat de neutrale lijn loodrecht op de symmetrie-as staat.

In paragraaf 10.3 werd het volgende verband afgeleid tussen de kromtestraal R en de verticale verplaatsing w

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Bij de afleiding is er uitgegaan van de hypothese van Bernoulli (vlakke doorsneden loodrecht op de staafas blijven vlak en loodrecht op de staafas), en is er verder aangenomen dat de hellingshoek $\psi = dw/dx$ klein is ten opzichte van 1. De vorm van de doorsnede doet er niet toe, en de formule heeft dus een algemene geldigheid. Hetzelfde geldt dan voor het verband tussen het buigend moment en de verticale verplaatsing,

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}.$$

Het gebruik van de formules zal worden toegelicht aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld

Het voorbeeld heeft betrekking op een prismatische ligger met een overspanning van 1 m, belast door een puntlast P in het midden, en met een profiel zoals aangegeven in fig. 10.27. De balk wordt verondersteld te zijn gemaakt

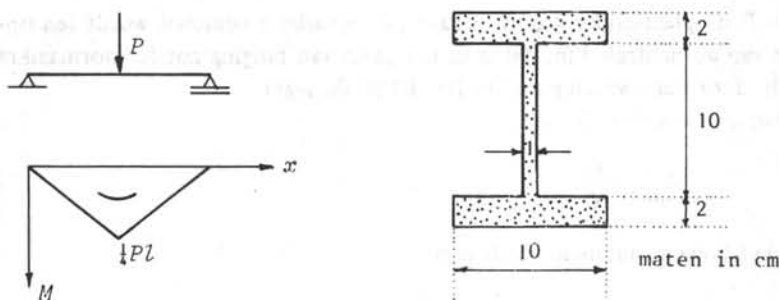


fig. 10.27.

van ongewapend beton. Men merke op dat de oppervlakte van de doorsnede (50 cm^2) gelijk is aan die van de rechthoekige doorsnede van 5 cm bij 10 cm, beschouwd in het voorbeeld van paragraaf 10.2, en het tweede voorbeeld van paragraaf 10.3. Het traagheidsmoment van een doorsnede met een breedte van 10 cm en een hoogte van 5 cm is $104,17 \text{ cm}^4$. Het traagheidsmoment van het in fig. 10.27 getekende I-profiel is $1536,67 \text{ cm}^4$, dat is bijna 15 maal zo veel. Het maximale moment is

$$M_{\max} = \frac{1}{4} Pl$$

en de grootste trekspanning treedt op aan de onderzijde van het profiel in het midden van de ligger. De grootte ervan is

$$\sigma_{xx-\max} = \frac{M_{\max}(\frac{1}{2}h)}{I}$$

Als de toelaatbare spanning $3 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ is vindt men nu voor de toelaatbare kracht $\bar{P}$

$$\bar{P} = \frac{8\bar{\sigma}_{xx}I}{hl} = \frac{8 \times 3 \times 10^6 \times 1536,67 \times 10^{-8}}{0,14 \times 1} \text{ N} = 2634 \text{ N}.$$

De ligger heeft nu dus een draagkracht van 2634 N. Dat is ruim 5 maal zo veel als de ligger met de rechthoekige doorsnede. Het is ook nog ruim 2,5 maal zo veel als de ligger met rechthoekige doorsnede als de doorsnede rechtop gezet wordt (dan is de breedte 5 cm en de hoogte 10 cm).

Constructief gezien blijkt het erg zinvol te zijn een I-profiel toe te passen in plaats van een rechthoekig profiel. Met gelijkblijvende doorsnede (en dus gelijkblijvend materiaalverbruik) blijkt de draagkracht behoorlijk toe te nemen bij overgang op een I-profiel. Het naar buiten brengen van het materiaal (d.w.z. het toepassen van een profiel met veel materiaal ver van de neutrale lijn af) is effectief omdat dan de mogelijkheid ontstaat met relatief lage spanningen toch een groot buigend moment op te nemen door de grote arm.

In de drukzone (de bovenflens) blijven de spanningen nog ver beneden de toelaatbare waarde. Dat betekent dat er nog geen optimaal gebruik gemaakt wordt van het beschikbare materiaal. Het zou beter zijn het materiaal in de onderflens te concentreren, zie fig. 10.28. Het is echter nog beter de balk aan de onderzijde te voorzien van een wapening. Het staal neemt dan de trek op. Op het gedrag van zo'n uit twee materialen samengestelde ligger zal later worden ingegaan.

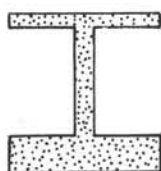


fig. 10.28.

De maximale verticale verplaatsing van een prismatische ligger op twee steunpunten met een puntlast in het midden treedt op in het midden, en heeft de volgende waarde (zie paragraaf 10.3, voorbeeld 2)

$$w_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Stelt men de elasticiteitsmodulus van het beton op 40 GPa, dan vindt men voor de maximale zakking, bij de maximale kracht van 2634 N

$$w_{\max} = 0,09 \text{ mm}.$$

Dat is nog weer minder dan de maximale zakking van de ligger met rechthoekige

doorsnede als die tot zijn (lagere) uiterste draagkracht belast wordt. Ook voor de stijfheid is het erg zinvol het materiaal zo ver mogelijk van de neutrale lijn af te brengen.

Voor de stijfheid van een ligger is, naast de wijze van opleggen en belasten, bepalend de grootte van het product EI van de elasticiteitsmodulus en het traagheidsmoment. Men noemt dat wel de buigstijfheid.

Voor de sterkte is het traagheidsmoment wel van groot belang, maar hierbij is dat niet de bepalende profielgrootte. In de formule voor de spanningen

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I}$$

komt ook nog de afstand z voor. Bij een profiel met een doorsnede die symmetrisch is ten opzichte van een horizontale lijn (zoals een rechthoekige doorsnede, of het symmetrische I-profiel van fig. 10.27) is de maximale waarde van z gelijk aan de halve profielhoogte $\frac{1}{2}h$. Voor de sterkte is dan bepalend (als afgezien wordt van andere bezwijkmogelijkheden dan die door buigspanningen) de waarde van de grootte $I/(\frac{1}{2}h)$. Deze grootte geeft men, zoals reeds eerder gesteld, wel aan met W , het zogenaamde weerstandsmoment. Voor profielen zonder symmetrie ten opzichte van een horizontale lijn (zoals het asymmetrische I-profiel van fig. 10.28) ligt het wat moeilijker, omdat dan de neutrale lijn niet op halve hoogte ligt.

10.5. statisch onbepaalde liggers

In deze paragraaf zal, aan de hand van een eenvoudig voorbeeld, aangegeven worden hoe men de krachtwerking van een statisch onbepaalde ligger kan berekenen. Het voorbeeld heeft betrekking op een ligger op drie steunpunten, met een gelijkmatig verdeelde belasting. De steunpunten zijn gelegen aan de beide uiteinden en in het midden, zie fig. 10.29. De constructie is éénvoudig statisch

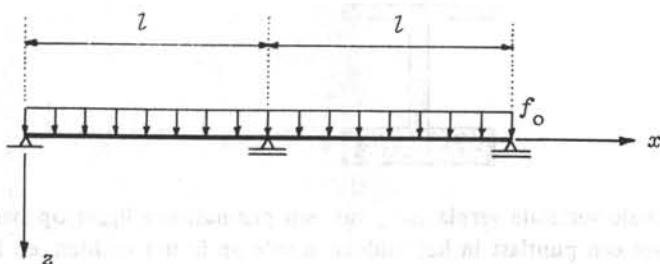


fig. 10.29

onbepaald omdat het aantal onbekende oplegreacties (4) één meer is dan het aantal vergelijkingen dat volgt uit de statica van de constructie.

Men kan de oplegreacties berekenen door de constructie eerst statisch bepaald te maken door een oplegreactie weg te denken, en dan te vervangen door een (nog onbekende) kracht. Deze kracht kan men bepalen uit de voorwaarde dat de verplaatsing ter plaatse van het weggedachte steunpunt nul moet zijn. In dit geval is het het eenvoudigst de middelste oplegreactie als statisch onbepaalde grootte te kiezen, zie fig. 10.30. De belasting van de aldus statisch

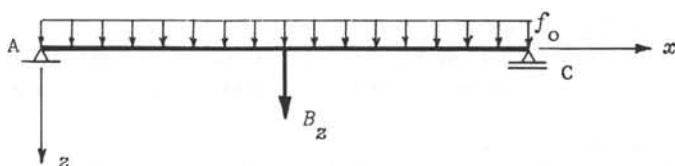


fig. 10.30.

bepaald gemaakte ligger bestaat nu uit een gelijkmatig verdeelde belasting f_0 en een puntlast ter grootte B_z in het midden. Voor beide belastinggevallen is in paragraaf 10.3 de zakking in het midden al bepaald. De totale zakking van het punt B wordt dus

$$w_B = \frac{5}{384} \frac{f_0(2l)^4}{EI} + \frac{1}{48} \frac{B_z(2l)^3}{EI}.$$

Omdat dit gelijk aan nul moet zijn vindt men nu voor de oplegreactie B_z

$$B_z = -\frac{5}{4} f_0 l.$$

De overige oplegreacties kan men nu nog op twee manieren bepalen.

De eerste, meest eenvoudige, manier is door superpositie van de twee belastingen van de statisch bepaalde ligger. Voor de oplegreacties in de punten A en C ten gevolge van de twee in fig. 10.30 getekende belastingen vindt men uit de statica van die statisch bepaalde ligger

$$A_x = 0$$

$$A_z = -f_0 l - \frac{1}{2} B_z$$

$$C_z = -f_0 l - \frac{1}{2} B_z.$$

Omdat de grootte van B_z al bekend is worden de oplegreacties in A en C

$$A_x = 0$$

$$A_z = -\frac{3}{8} f_0 l$$

$$C_z = -\frac{3}{8} f_0 l.$$

De tweede manier is door uit te gaan van de drie evenwichtsvergelijkingen voor de constructie als geheel. Deze vergelijkingen zijn

$$A_x = 0$$

$$A_z + B_z + C_z + 2f_0 l = 0$$

$$-B_z \times l - C_z \times 2l - 2f_0 l^2 = 0.$$

De derde vergelijking beschrijft het momentevenwicht ten opzichte van het punt A. Omdat de waarde van B_z al bekend is kan men uit bovenstaande 3 vergelijkingen de 3 resterende onbekenden bepalen. Uiteraard vindt men dan dezelf-

de waarden als hierboven al gegeven.

Als de oplegreacties bekend zijn kan men verder zonder veel moeite de dwarskrachtenlijn en de momentenlijn bepalen. Deze zijn weergegeven in fig. 10.31.

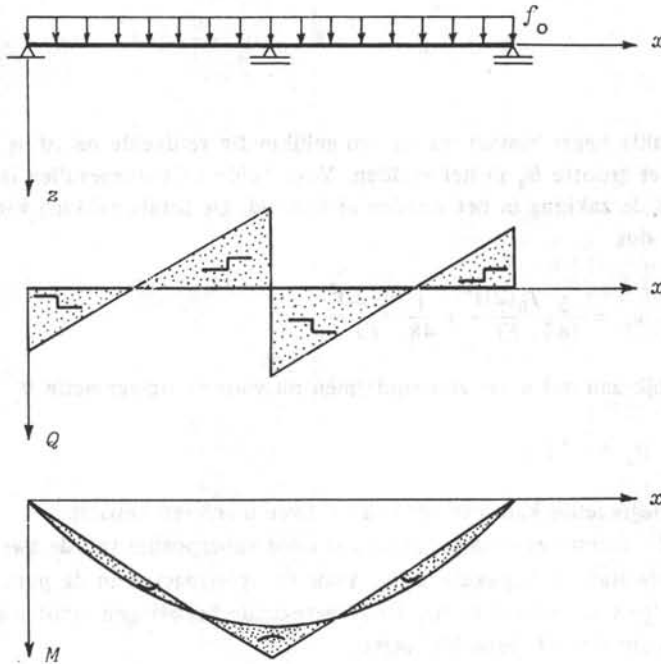


fig. 10.31.

De momentenlijn is daarbij getekend als superpositie van de twee basisgevallen. Men ziet dat het grootste buigend moment optreedt in het midden, en dat de grootte ervan is

$$|M_{\max}| = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} f_0 l \right) - \frac{1}{8} f_0 (2l)^2 = \frac{1}{8} f_0 l^2.$$

De zin van dit moment is dat het de ligger opbuigt, dat wil zeggen er komen trekspanningen aan de bovenzijde en drukspanningen aan de onderzijde. Bij het gekozen assenstelsel is dat een negatief buigend moment.

De hier gebruikte methode ter bepaling van de oplegreacties bij een statisch onbepaalde ligger is vergelijkbaar met de in paragraaf 9.1 behandelde krachtenmethode, waarbij het wiskundige probleem wordt geformuleerd met behulp van een aantal onbekende krachten als parameters. Er bestaat ook een alternatieve methode, die gebruikt maakt van verplaatsingen en hoekverdraaiingen als fundamentele grootheden, maar daar zal hier niet op ingegaan worden.

11. SCHUIFSPANNINGEN DOOR DWARSKRACHT

In het vorige hoofdstuk is de verdeling van de normaalspanningen op een vlak loodrecht op de staafas van een ligger behandeld, zoals deze worden veroorzaakt door een normaalkracht en een buigend moment. Als het buigend moment niet constant is moet er in de ligger ook een dwarskracht worden overgebracht, en dat leidt tot schuifspanningen op dat vlak. In dit hoofdstuk wordt de verdeling van die schuifspanningen berekend, en wel voor een aantal eenvoudige staafdoorsneden.

11.1. ligger met rechthoekige doorsnede

Beschouwd wordt een ligger met een constante rechthoekige doorsnede, die een buigend moment en een dwarskracht moet overbrengen, zie fig. 11.1. Er

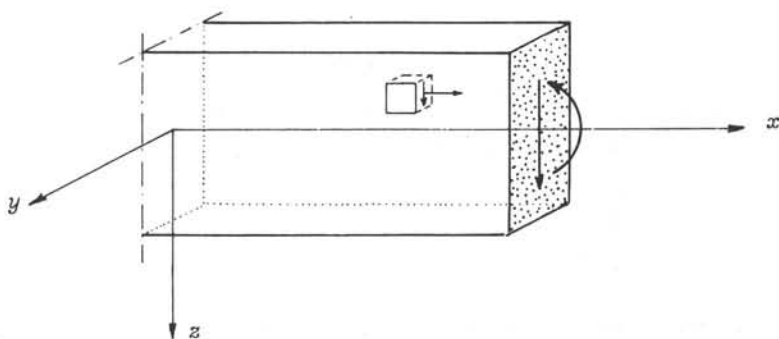


fig. 11.1.

wordt aangenomen dat op vlakjes met de normaal in positieve of negatieve y -richting geen spanningen werken. In fig. 11.1 is in de ligger een elementair kubusje getekend. De aanname stelt dat de zijvlakjes van dat kubusje evenwijdig aan het vlak van tekening spanningsloos zijn. Voor een vlakje dat samenvalt met een zijvlak van de ligger is dat exact juist, als dat zijvlak tenminste onbelast is, wat hier wordt verondersteld. In het inwendige van de ligger kan er in principe wel een spanning overgebracht worden door vlakjes loodrecht op de y -as, maar als de ligger niet te breed is zijn die spanningen verwaarloosbaar ten opzichte van de normaalspanningen σ_{xx} (die behoren bij een normaalkracht en een buigend moment) en de schuifspanning σ_{xz} . In fig. 11.1 zijn de normaalspanning σ_{xx} en de schuifspanning σ_{xz} op het rechterzijvlak van het kubusje ter verduidelijking getekend. Er wordt ook aangenomen dat overal in de ligger de schuifspanningen σ_{xy} en σ_{zy} nul zijn. Alles bij elkaar komen de aannamen er op neer dat alleen de spanningscomponenten σ_{xx} , σ_{xz} , σ_{zx} en σ_{zz} ongelijk aan nul zijn. Men zegt wel dat er aangenomen wordt dat er overal in de ligger een *vlakke spanningstoestand* heerst. In fig. 11.2 is een elementair blokje getekend, met alle van nul verschillende spanningscomponenten die er op werken. Het linkerzijvlak is aangegeven met een subscript 1, het rechter zijvlak met 2, het bovenvlak met 3 en het ondervlak met 4. Voor dit blokje zullen nu een aantal evenwichtsbeschouwingen worden geformuleerd.

Om te beginnen volgt uit een evenwichtsbeschouwing voor een zodanig blokje dat $\Delta x \rightarrow 0$, terwijl Δy en Δz eindig blijven, dat

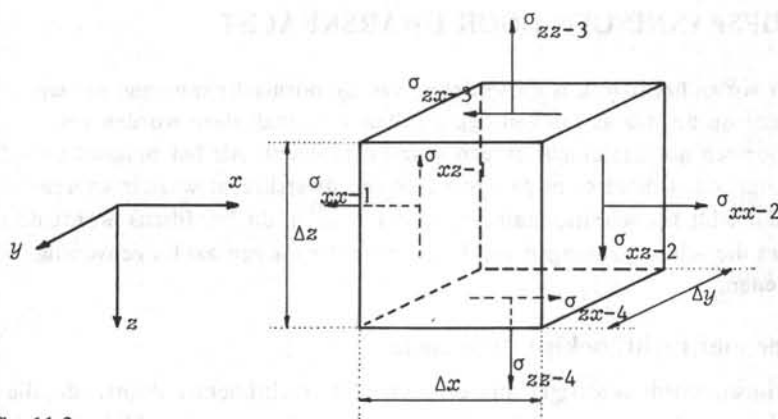


fig. 11.2.

$$\begin{aligned} \text{als } \Delta x \rightarrow 0: \quad & -\sigma_{xx-1} \Delta y \Delta z + \sigma_{xx-2} \Delta y \Delta z = 0 \\ & -\sigma_{xz-1} \Delta y \Delta z + \sigma_{xz-2} \Delta y \Delta z = 0. \end{aligned}$$

De bijdragen van het onder- en bovenvlakje vallen hierbij weg omdat de grootte van die vlakjes naar nul gaat als Δx nul wordt. Er blijkt dus dat

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sigma_{xx-2} - \sigma_{xx-1}) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sigma_{xz-2} - \sigma_{xz-1}) = 0.$$

Dit betekent dat de spanningscomponenten σ_{xx} en σ_{xz} continu zijn in x -richting. Men kan dit uiteraard ook direct zien als een gevolg van de derde wet van Newton (de wet van actie en reactie), omdat als Δx naar nul gaat het linker en rechtervlak samenvallen. Op dezelfde manier kan men bewijzen dat de spanningscomponenten σ_{zz} en σ_{zx} , die werken op een vlakje met de normaal in de z -richting, continu zijn in de z -richting.

Het wordt interessanter het evenwicht te beschouwen van een blokje waarvan de afmetingen zeer klein, maar niet oneindig klein zijn. Het momentevenwicht ten opzichte van het zwaartepunt van het blokje leidt tot de volgende vergelijking

$$-\sigma_{xz-1} \Delta y \Delta z (\frac{1}{2} \Delta x) - \sigma_{xz-2} \Delta y \Delta z (\frac{1}{2} \Delta x) + \sigma_{zx-3} \Delta x \Delta y (\frac{1}{2} \Delta z) + \sigma_{zx-4} \Delta x \Delta y (\frac{1}{2} \Delta z) = 0.$$

De normaalspanningen geven hiering geen bijdrage, als aangenomen wordt dat de zijvlakjes zo klein zijn dat de normaalspanning op elk vlakje praktisch constant is. De resultante van de normaalspanningen op een vlakje gaat dan door het zwaartepunt. Uit de bovenstaande vergelijking volgt dan dat als Δx , Δy en Δz zeer klein zijn,

$$\sigma_{xz-1} + \sigma_{xz-2} = \sigma_{zx-3} + \sigma_{zx-4}.$$

Als nu Δx en Δy naar nul gaan worden σ_{xz-1} en σ_{xz-2} identiek, evenals σ_{zx-3} en σ_{zx-4} . Er volgt dan dus

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}.$$

Dit is een zeer belangrijk resultaat. Het betekent dat de schuifspanningen twee aan twee aan elkaar gelijk zijn. In het algemeen geldt steeds

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz}.$$

Het evenwicht in x -richting van het in fig. 11.2 getekende blokje vereist dat

$$-\sigma_{xx-1}\Delta y\Delta z + \sigma_{xx-2}\Delta y\Delta z - \sigma_{zx-3}\Delta x\Delta y + \sigma_{zx-4}\Delta x\Delta y = 0.$$

Deelt men dit door $\Delta x\Delta y\Delta z$ dan vindt men

$$\frac{\sigma_{xx-2} - \sigma_{xx-1}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{zx-4} - \sigma_{zx-3}}{\Delta z} = 0$$

of, in de limiet $\Delta x \rightarrow 0$ en $\Delta z \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0.$$

evenzo vindt men uit het evenwicht in z -richting

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = 0.$$

Samenvattend kan men nu stellen dat voor elk oneindig klein blokje (men zou kunnen zeggen: voor elk punt) in het inwendige van de ligger op grond van het evenwicht de volgende verbanden tussen de spanningscomponenten gelden

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = 0$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}.$$

Dit zijn de evenwichtsvergelijkingen voor een willekeurige vlakke spanningstoestand bij afwezigheid van inwendige massakrachten.

In het geval van de ligger die op buiging belast wordt is de normaalspanning σ_{xx} bekend, zie paragraaf 10.2,

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I}$$

waarin I het traagheidsmoment is, $I = bh^3/12$, en M het buigend moment is. Er geldt nu dus, omdat I constant is,

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{dMz}{dx I}.$$

Omdat het buigend moment M alleen van x afhangt, is de afgeleide dM/dx in het rechterlid een gewone afgeleide, en geen partiële afgeleide. In het algemeen geldt

$$\frac{dM}{dx} = Q,$$

en men vindt nu, met de evenwichtsvergelijkingen in x -richting,

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = -\frac{Qz}{I}.$$

De schuifspanning σ_{zx} is een functie van x en z . Beschouwt men nu een vaste doorsnede, dat wil zeggen, men neemt x constant, dan kan men schrijven

$$\frac{d\sigma_{zx}}{dz} = -\frac{Qz}{I}$$

omdat σ_{zx} dan alleen nog een functie van z is. Integratie van deze vergelijking geeft

$$\sigma_{zx} = -\frac{Qz^2}{2I} + A$$

waarin A een integratieconstante is. Deze constante vindt men uit de voorwaarde dat op het bovenvlak geen schuifspanning werkt, evenmin als op het ondervlak. Dat wordt hierbij aangenomen. De voorwaarde is dan

$$z = \pm \frac{1}{2}h : \sigma_{zx} = 0.$$

Hieruit volgt

$$A = \frac{Qh^2}{8I}.$$

Voor de schuifspanningen σ_{zx} , en dus ook voor de schuifspanning σ_{xz} , die immers steeds daaraan gelijk is, vindt men dus tenslotte

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \frac{Q}{2I} \left\{ \left(\frac{1}{2}h \right)^2 - z^2 \right\}.$$

Dit is een parabolische verdeling van de schuifspanningen, zie fig. 11.3. Ter

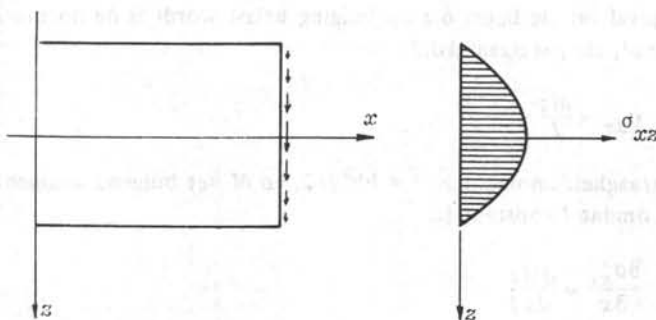


fig. 11.3.

controle kan men nog nagaan of de schuifspanningen tezamen statisch equivalent zijn met de dwarskracht. De eis daarbij is dat

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_{xz} b \, dz = Q.$$

De lezer kan zelf nagaan dat dat klopt. De grootste schuifspanning blijkt op te treden op de halve hoogte van de ligger (voor $z = 0$). Men vindt hiervoor

$$\sigma_{xz-\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$$

hetgeen betekent dat de grootste schuifspanning anderhalf maal zo groot is als de gemiddelde schuifspanning.

11.2. symmetrische doorsneden

In deze paragraaf wordt het geval van een ligger met een constante symmetrische doorsnede beschouwd. In het verloop van de afleiding zal blijken dat de breedte van de doorsnede geleidelijk moet verlopen om de beschouwingen geldig te doen zijn. Een voorbeeld is getekend in fig. 11.4. Het gaat er nu om de verdeling van de schuifspanningen, die in de doorsnede schematisch zijn aangegeven, te berekenen.

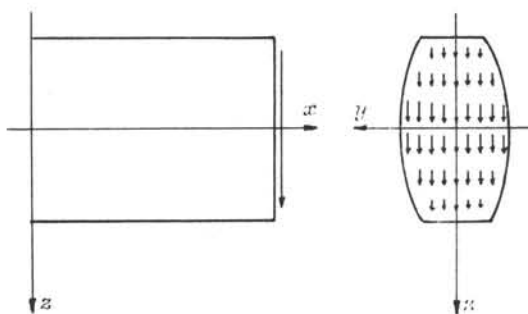


fig. 11.4.

Er wordt weer uitgegaan van de reeds in het vorige hoofdstuk gevonden verdeling van de normaalspanningen

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I}.$$

Ook in dit geval kan men de verdeling van de schuifspanningen vinden met behulp van een beschouwing van het evenwicht in x -richting van een elementje in de ligger. In dit geval is het het handigst hiervoor een elementje beneden een horizontale snede te nemen, zie fig. 11.5. Op het bovenvlak (AB in de rechterhelft van fig. 11.5) werken schuifspanningen σ_{zx} . De totale kracht op dat vlak vindt men door die schuifspanning over dat vlak te integreren. Er wordt nu aangenomen dat de schuifspanningen σ_{zx} gelijkmatig verdeeld zijn over de breedte van de ligger (dat is redelijk als de breedte niet te groot is, en geleidelijk verloopt met de hoogte z). Men kan dan schrijven dat de totale kracht op het vlak AB is

$$s_{zx} \Delta x = \sigma_{zx} b \Delta x.$$

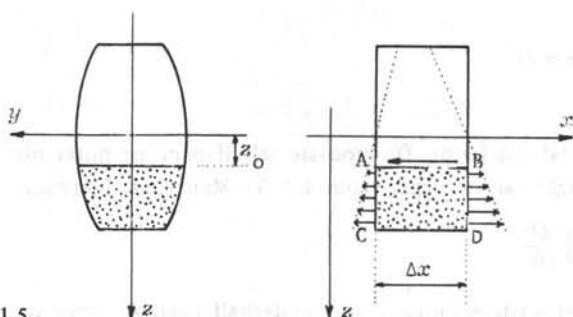


fig. 11.5.

De grootte $s_{zx} = \sigma_{zx}b$ (of eigenlijk $s_{zx} = \int \sigma_{zx} dy$) noemt men wel de *schuifstroom*. Het is een kracht per eenheid van lengte.

Op het ondervlak van het beschouwde elementje (CD in fig. 11.5) werkt geen kracht. Op het linkervlak werken normaalspanningen

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I}$$

en op het rechtervlak werken normaalspanningen

$$\sigma_{xx} = \frac{(M + \Delta M)z}{I}.$$

Voor het evenwicht moeten deze normaalspanningen nog over de betreffende vlakjes geïntegreerd worden, dat wil zeggen: vermenigvuldigd met $b dz$, en dan geïntegreerd van $z = z_0$ tot $z = \frac{1}{2}h$.

Het evenwicht in x -richting vereist nu dat

$$s_{zx}\Delta x = \frac{\Delta M}{I} \int_{z_0}^{\frac{1}{2}h} b(z)z dz.$$

Omdat $\Delta M/\Delta x = Q$, als $\Delta x \rightarrow 0$, vindt men nu

$$s_{zx} = \frac{QS}{I}$$

waarin S het statisch moment is van het in de linkerhelft van fig. 11.5 gearceerde deel van de doorsnede ten opzichte van de y -as,

$$S = \int_{z_0}^{\frac{1}{2}h} b(z)z dz.$$

Men bedenke dat de breedte b hierbij van z afhangt.

Omdat reeds gesteld is dat de schuifspanningen σ_{zx} gelijkmatig over de breedte verdeeld zijn (d.w.z. $\sigma_{zx} = s_{zx}/b$) krijgt men nu

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \frac{QS}{bI}.$$

Dat dit ook de verdeling is van de schuifspanningen σ_{xz} , die werken op de nor-

maalddoorsnede loodrecht op de staafas, volgt uit het gelijk zijn van σ_{xz} en σ_{zx} , zie de vorige paragraaf.

Er wordt op gewezen dat het statisch moment van het in fig. 11.5 gearceerde deel van de doorsnede ten opzichte van de y -as op het teken na gelijk is aan dat van het niet-gearceerde deel ten opzichte van de y -as. Dat volgt uit het feit dat het statisch moment van de gehele doorsnede ten opzichte van de y -as nul is. Deze as gaat immers door het zwaartepunt van de doorsnede.

Voorbeeld 1, Rechthoekige doorsnede

In het geval van een rechthoekige doorsnede, zie fig. 11.6, vindt men voor

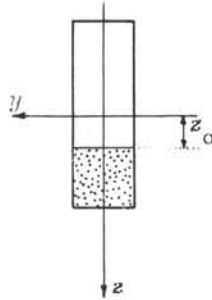


fig. 11.6.

het statisch moment van het gearceerde deel van de doorsnede ten opzichte van de y -as

$$S = \int_{z_0}^{\frac{1}{2}h} bz \, dz = \frac{1}{2}b\left\{\left(\frac{1}{2}h\right)^2 - z_0^2\right\}$$

en de verdeling van de schuifspanningen wordt dus

$$\sigma_{xz} = \frac{Q}{2I}\left\{\left(\frac{1}{2}h\right)^2 - z_0^2\right\}$$

en dit is precies wat al in de vorige paragraaf werd gevonden.

De verdeling van de schuifspanningen door dwarskracht in een ligger met rechthoekige doorsnede is nu tweemaal afgeleid. De beide afleidingen zijn bij zorgvuldige beschouwing wel op precies dezelfde principes gebaseerd, en het spreekt daarom vanzelf dat de resultaten elkaar bevestigen.

Voorbeeld 2, Cirkelvormige doorsnede

In het geval van een ligger met een cirkelvormige doorsnede, zie fig. 11.7,

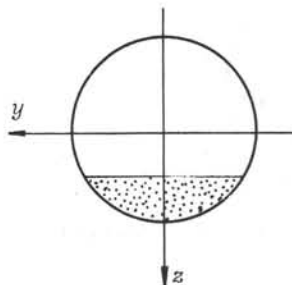


fig. 11.7.

moet men het statisch moment berekenen van een segment van een cirkel ten opzichte van een middellijn evenwijdig aan de koorde. Dat kan als men de formules kent voor het oppervlak van een cirkelsegment en de ligging van het zwaartepunt. Formeel wiskundig kan men het statisch moment als volgt berekenen,

$$S = \int_{z_0}^R b(z)z \, dz.$$

Voor de breedte geldt in dit geval

$$(\frac{1}{2}b)^2 + z^2 = R^2$$

en dus

$$b = 2\sqrt{(R^2 - z^2)}.$$

Men vindt nu

$$S = 2 \int_{z_0}^R z\sqrt{(R^2 - z^2)} \, dz$$

ofwel, na integratie,

$$S = -\frac{2}{3}(R^2 - z^2)^{3/2} \Big|_{z_0}^R = \frac{2}{3}(R^2 - z_0^2)^{3/2}.$$

Het traagheidsmoment I van de volledige doorsnede is

$$I = \int_{-R}^{+R} bz^2 \, dz.$$

Men vindt hiervoor

$$I = \frac{1}{4}\pi R^4.$$

Voor de verdeling van de schuifspanningen σ_{xz} vindt men nu tenslotte

$$\sigma_{xz} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \left(1 - \frac{z_0^2}{R^2}\right).$$

Ook in dit geval blijken de schuifspanningen parabolisch te verlopen, zie fig. 11.8.

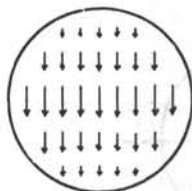


fig. 11.8.

Omdat het materiaal zich nu relatief meer bij de as bevindt (vergeleken met de

rechthoekige doorsnede) is de maximale schuifspanning slechts een factor $4/3$ groter dan de gemiddelde schuifspanning.

Opgemerkt moet worden dat in dit geval de aanname dat de breedte klein is en slechts geleidelijk verloopt (die aanname rechtvaardigt het gelijkmatig verde-len van de schuifspanningen over de breedte) eigenlijk niet zo best is. Exacte berekeningen hebben aangetoond dat de benadering ook in dit geval toch nog vrij goed is. Dat de berekende schuifspanningsverdeling zeker niet exact juist is kan men direct inzien aan de hand van fig. 11.8. Langs de rand van de doorsne-de moeten de schuifspanningen evenwijdig aan die rand zijn. Dat is een gevolg van het feit dat de zijwand spanningsloos is, en van het gelijk zijn van σ_{xn} en σ_{nx} (hierin is n de richting loodrecht op de rand). Omdat $\sigma_{nx} = 0$ moet ook $\sigma_{xn} = 0$, en dat is bij de verdeling getekend in fig. 11.8 alleen in het geval op de halve hoogte van de ligger. Deze inconsistentie is een gevolg van de gemaakte veronderstellingen. Men kan het ook beschouwen als een illustratie van het bena-derend karakter van de afleiding.

11.3. dunwandige profielen

De beschouwingen van de vorige paragraaf zijn niet bruikbaar voor liggers met doorsneden zoals getekend in fig. 11.9. De overdracht van dwarskracht in liggers met een dergelijke doorsnede geschiedt namelijk niet uitsluitend, of bijna



fig. 11.9.

uitsluitend door schuifspanningen σ_{zx} zoals bij de in de vorige paragraaf behan-delde doorsnede. In de flenzen van het in fig. 11.9 getekende I -profiel kan bij-voorbeeld eigenlijk nauwelijks een schuifspanning σ_{xz} optreden, omdat die schuif-spanning aan de onder- en bovenzijde van een flens nul moet zijn. In deze flen-zen kan echter heel wel een schuifspanning σ_{xy} werken. Hieronder zal voor een aantal eenvoudige gevallen, die betrekking hebben op profielen die zowel dun-wandig zijn als symmetrisch ten opzichte van de z -as, de verdeling van de schuif-spanningen bepaald worden. Bij profielen met een niet-symmetrische doorsnede treedt nog een speciale moeilijkheid op ten aanzien van de ligging van de werk-lijn van de dwarskracht. Daarop zal hier niet worden ingegaan.

Voorbeeld 1. Dunwandige buis

Stel dat een dunne cirkelvormige buis een dwarskracht en een buigend mo-ment moet overbrengen, zie fig. 11.10. Beschouwt men nu het deel van de buis begrensd door twee doorsneden loodrecht op de as met onderlinge afstand Δx , en aan de bovenzijde begrensd door twee snedes in radiale richting, dan ontstaat de situatie geschetst in fig. 11.11. Op de linkerzijde en de rechterzijde werken normaalspanningen waarvoor geldt

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I}.$$

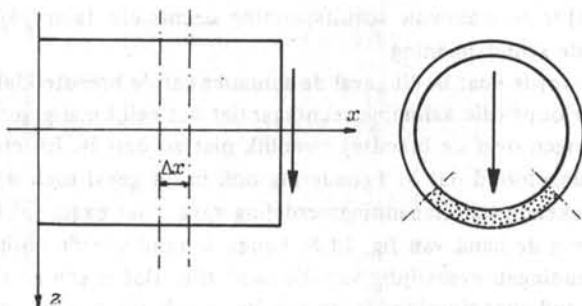


fig. 11.10.

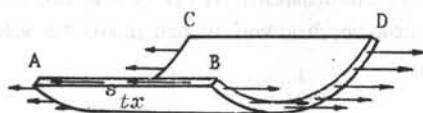


fig. 11.11.

Als het moment niet constant is zijn de krachten op deze twee zijvlakken niet met elkaar in evenwicht. De enige mogelijkheid om het evenwicht in x -richting te verzekeren is dat er in de bovenbegrenzings (de vlakken AB en CD in fig. 11.11) een schuifkracht werkt. Noemt men de schuifspanning in die vlakken σ_{tx} (t omdat de normaal op het vlak in tangentiële richting wijst, en x omdat de spanningscomponent in x -richting werkt), dan is de totale schuifkracht

$$2\sigma_{tx}d \Delta x$$

waarin d de wanddikte van de buis is. De grootte $2\sigma_{tx}d$ zou men weer de schuifstroom kunnen noemen

$$s_{tx} = \sigma_{tx}b = \sigma_{tx}(2d).$$

De "breedte" van de doorsnede wordt nu gemeten loodrecht op de profieldoorsnede.

De vergelijking voor het evenwicht in x -richting is nu precies gelijk aan die in de vorige paragraaf. Er geldt dus ook in dit geval

$$s_{tx} = \frac{QS}{I}.$$

Hierin is S het statisch moment van het in fig. 11.12 gearceerde deel van de doorsnede ten opzichte van de y -as. Voor de schuifspanningen vindt men

$$\sigma_{tx} = \frac{QS}{bI}$$

waarin b de totale breedte van de snede is, $b = 2d$. Er is al eerder (in paragraaf 11.1) bewezen dat de schuifspanningen op onderling loodrechte vlakjes aan elkaar gelijk zijn, dat betekent dat

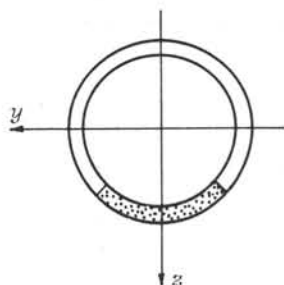


fig. 11.12.

$$\sigma_{tx} = \sigma_{xt}.$$

Het verloop van de schuifspanningen op een vlakke snede loodrecht op de staaf-as is geschetst in fig 11.13. Voor een kwantitatieve analyse moet men het

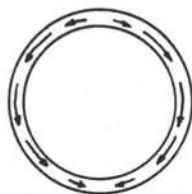


fig. 11.13.

statisch moment van het in fig. 11.12 gearceerde deel van de doorsnede ten opzichte van de y -as berekenen. Men vindt hiervoor, als de wanddikte d zeer klein is ten opzichte van de straal R ,

$$S = 2Rd\sqrt{R^2 - z^2}.$$

Omdat het traagheidsmoment van de totale doorsnede ten opzichte van de y -as gelijk is aan $\pi R^3 d$ vindt men voor de schuifspanningsverdeling

$$\sigma_{xt} = \frac{Q}{\pi R d} \sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}.$$

De maximale schuifspanning is in dit geval twee maal zo groot als de gemiddelde schuifspanning.

Ter controle kan men nog nagaan of deze schuifspanningen tezamen de dwarskracht Q leveren. Daartoe moet de verticale component van de kracht op het elementaire oppervlakje $R d\theta \times d$ (dat is $\sigma_{tx} \sin \theta \times R d\theta \times d$, zie fig. 11.14)

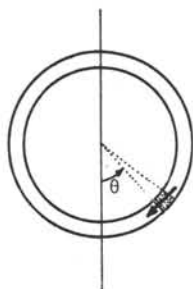


fig. 11.14.

geïntegreerd worden. Het resultaat moet dan juist Q zijn,

$$Q = Rd \int_{+\pi}^{+\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi.$$

Omdat $(1 - z^2/R^2) = \sin^2 \theta$ en omdat

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi$$

blijkt aan deze eis inderdaad voldaan te zijn.

Voorbeeld 2. I-profiel

Als tweede voorbeeld wordt beschouwd het in fig. 11.15 getekende I-profiel. Ter vereenvoudiging is aangenomen dat de totale breedte en hoogte gelijk zijn, en dat de dikte van de flenzen gelijk is aan die van het lijf. De schuifspanningen in de onderflens kan men berekenen door de in fig. 11.15 getekende snede te beschouwen. Het oppervlak van het gearceerde deel van de doorsnede is $2(\frac{1}{2}h - y_0)$, en dit materiaal bevindt zich op een afstand $\frac{1}{2}h$ van de y -as (de dikte d wordt zeer klein verondersteld ten opzichte van de hoogte h). Dan is het statisch moment van het gearceerde deel ten opzichte van de y -as

$$S = hd(\frac{1}{2}h - y_0).$$

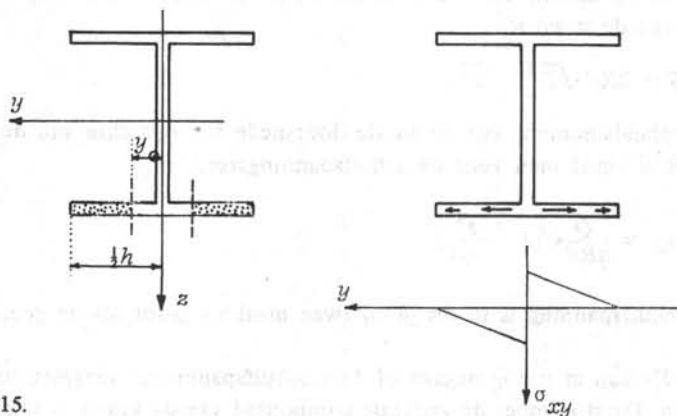


fig. 11.15.

Het traagheidsmoment van de gehele doorsnede ten opzichte van de y -as is

$$I = \frac{7}{12} dh^3.$$

Voor de schuifspanningen in de onderflens vindt men nu

$$\sigma_{xy} = \frac{3}{7} \frac{Q}{dh} \left(1 - \frac{2y_0}{h}\right).$$

Het verloop van deze schuifspanningen is geschetst in fig 11.15.

Het teken van deze schuifspanningen verdient nog wel enige aparte aandacht. Daartoe kan men het beste het losgesneden deel van het profiel een keer

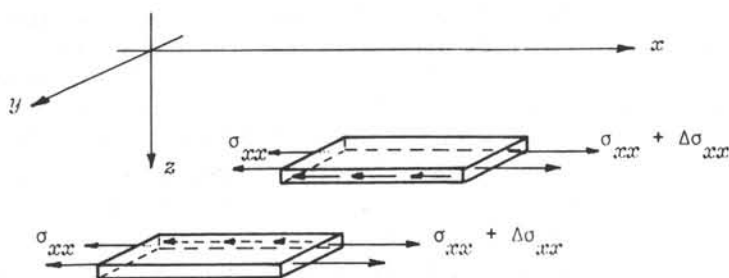


fig. 11.16.

apart tekenen, zie fig. 11.16. Als het buigend moment toeneemt, dat wil zeggen als de dwarskracht positief is, neemt de normaalspanning σ_{xx} in de onderflens toe, dat wil zeggen dat $\Delta\sigma_{xx}$ in fig. 11.15 positief is. Dit betekent dat de schuifstroom in de langsdoorsneden in de aangegeven richtingen werkt. Omdat de schuifspanning op onderling loodrechte vlakjes gelijk is, werkt daar de schuifspanning in de doorsnede loodrecht op de x -as zoals aangegeven in de figuur. In de linkeronderflens ($y > 0$, zie fig. 11.15) is de schuifspanning σ_{xy} derhalve positief.

De schuifspanningen in het lijf kan men berekenen door de in fig. 11.17 getekende snede te beschouwen. Het statisch moment van het gearceerde deel

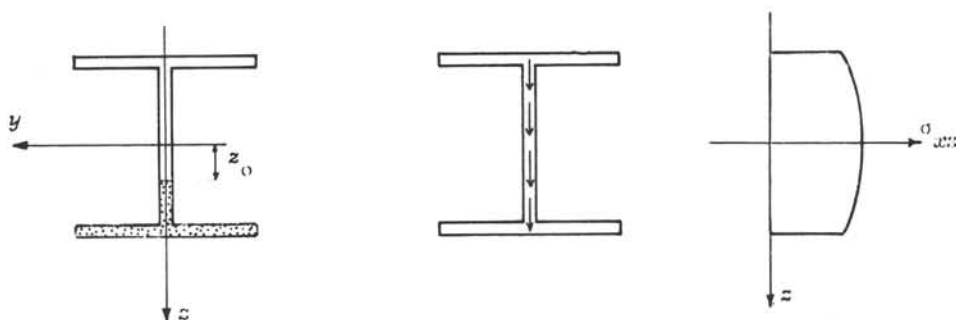


fig. 11.17.

van de doorsnede ten opzichte van de y -as is

$$S = \frac{1}{2} dh^2 + \frac{1}{8} dh^2 \left(1 - \frac{2z_0}{h} \right) \left(1 + \frac{2z_0}{h} \right).$$

Voor de schuifspanningen in het lijf vindt men daarmee

$$\sigma_{xz} = \frac{6}{7} \frac{Q}{dh} + \frac{3}{14} \frac{Q}{dh} \left\{ 1 - \left(\frac{2z_0}{h} \right)^2 \right\}.$$

De verdeling van deze schuifspanningen over het lijf is aangegeven in fig. 11.17. De maximale schuifspanning treedt op ter plaatse van de staafas. De grootte ervan is

$$\sigma_{xz-\max} = \frac{15}{14} \frac{Q}{dh}.$$

Aan onder- en bovenzijde van het lijf is de schuifspanning gelijk aan $(6/7)(Q/dh)$.

Het blijkt dat de schuifspanningen in het lijf niet sterk variëren. Bovendien dragen de schuifspanningen in de flens in totaal niet bij tot de dwarskracht (ze vormen tezamen een evenwichtssysteem). Men kan daarom in eerste benadering wel zeggen dat de schuifspanningen in het lijf gelijkmatig verdeeld zijn. Omdat ze tezamen de dwarskracht moeten leveren vindt men dan voor die gemiddelde schuifspanning in het lijf Q/dh , hetgeen niet zoveel afwijkt van de hierboven gevonden waarden.

De verdeling van de schuifspanning over de gehele doorsnede is geschetst in fig. 11.18. Men kan zich voorstellen dat de schuifstroom in het lijf komt als de som van de stromen in de twee helften van de bovenflens, dan nog iets toe-

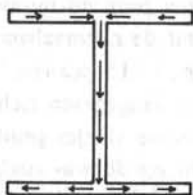


fig. 11.18.

neemt in het lijf, zijn maximum bereikt in het midden, dan weer wat afneemt naar beneden toe, zich verdeelt over de twee helften van de onderflens, en dan tot nul afneemt in de uiterste punten.

12. SCHUIFSPANNINGEN DOOR WRINGING

In het vorige hoofdstuk is gezien dat in een ligger schuifspanningen kunnen ontstaan als er een dwarskracht moet worden overgedragen. Ook door een wringend moment kunnen schuifspanningen worden opgewekt. Voor een aantal eenvoudige gevallen zal in dit hoofdstuk de verdeling van de schuifspanningen ten gevolge van een wringend moment berekend worden. Een algemene en volledige behandeling van de spanningen en vervormingen is in dit stadium nog niet mogelijk. De hier behandelde theorie kan niet worden gebruikt voor meer gecompliceerde gevallen dan de hier behandelde gevallen.

12.1. cirkelvormige doorsneden

In deze paragraaf wordt de wringing van een staaf met cirkelvormige doorsnede beschouwd. Om te beginnen wordt daartoe een staaf met een massieve cirkelvormige doorsnede beschouwd, zie fig. 12.1. De belasting bestaat uit een

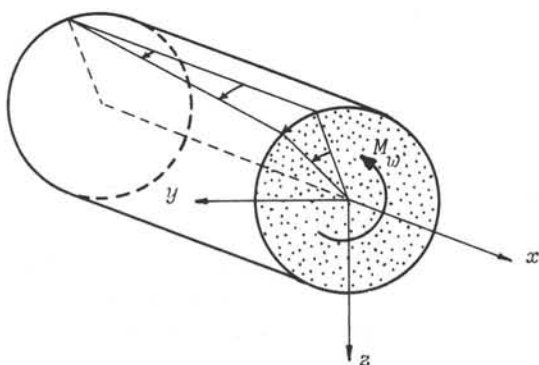


fig. 12.1.

wringend moment, dat zal worden aangegeven met M_w . Gesteld wordt dat de vervorming alleen bestaat uit een rotatie van elke normaald doorsnede om de x-as, waarbij die rotatie geleidelijk toeneemt in de richting van de staafas. De onderlinge afstand van twee doorsneden loodrecht op de staafas verandert niet. Dat is in feite een veronderstelling, maar men kan bewijzen dat deze veronderstelling correct is als er geen normaalkracht in de staaf werkt en het wringend moment op een bepaalde, hier niet ter zake doende, wijze aangebracht wordt. De vervorming van twee doorsneden op een onderlinge afstand Δx is getekend in fig. 12.2. De rotatie van de rechterdoorsnede ten opzichte van de linker is evenredig met

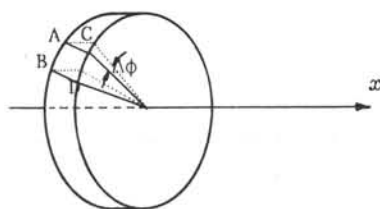


fig. 12.2.

de afstand Δx , zoals men in de figuur kan zien door zich een doorsnede halverwege de twee getekende te denken. Die roteert dan maar half zo ver. Men kan

dus stellen dat de hoek $\Delta\varphi$ waarover de rechterdoorsnede ten opzichte van de linker roteert gelijk is aan $\varphi'\Delta x$,

$$\Delta\varphi = \varphi'\Delta x.$$

Men noemt φ' de *verwringing* (of de *specifieke wringingshoek*), en er kan worden aangenomen dat φ' constant is. Uit de figuur volgt dat twee punten C en D op een afstand r van de staafas verplaatsen over een afstand $r\Delta\varphi$. De rechthoek ABCD vervormt daarbij, zoals getekend in fig. 12.3. De hoeken bij A en B blij-

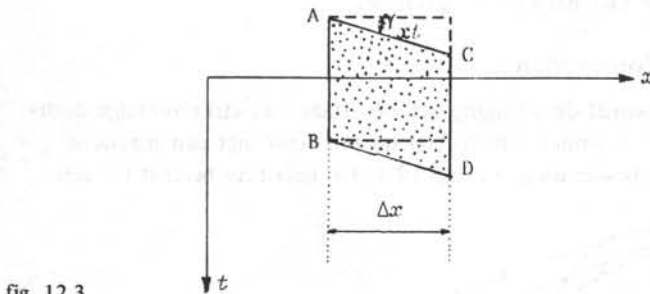


fig. 12.3.

ven niet recht, maar verkleinen met een bedrag γ_{xt} waarvoor geldt

$$\gamma_{xt} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta x} = r\varphi'.$$

Een dergelijke vervorming (men noemt γ_{xt} de *hoekvervorming*) kan niet zomaar optreden. Om zo'n vervorming te veroorzaken zijn schuifspanningen nodig, zie fig. 12.4. Deze schuifspanningen zijn, bij een elastisch materiaal, evenredig met

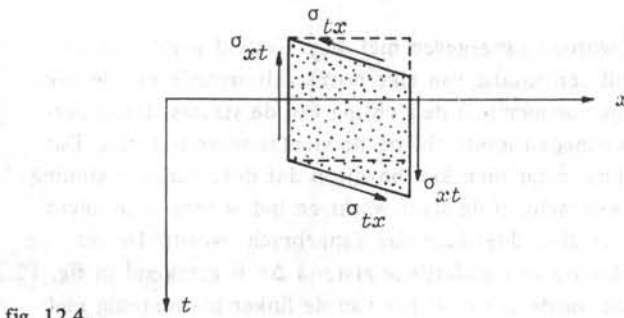


fig. 12.4.

de hoekvervormingen,

$$\sigma_{xt} = G\gamma_{xt}.$$

Dit is de wet van Hooke voor hoekvervormingen. De grootte G noemt men de *Glijdingsmodulus*. De orde van grootte is in het algemeen dezelfde als die van de elasticiteitsmodulus.

Er volgt nu dat

$$\sigma_{xt} = G\varphi'r$$

hetgeen betekent dat de tangentiële schuifspanning evenredig is met de afstand tot de staafas. De verdeling van die schuifspanning is geschetst in fig. 12.5.

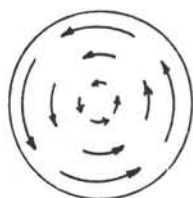


fig. 12.5.

De totale kracht op een elementje met oppervlak $r \, d\theta \, dr$ is $G\phi' r^2 \, d\theta \, dr$, en het moment hiervan ten opzichte van de oorsprong is $G\phi' r^3 \, d\theta \, dr$. Tezamen moeten deze momentjes het wringend moment leveren, dat wil zeggen

$$M_w = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} G\phi' r^3 \, d\theta = \frac{1}{2} \pi G\phi' R^4.$$

Voor de schuifspanningen kan men nu schrijven

$$\sigma_{xt} = \frac{M_w r}{I_w}$$

waarin

$$I_w = \frac{1}{2} \pi R^4.$$

Men noemt I_w wel het *wringingstraagheidsmoment* maar dat is nauwelijks nog een goed woord te noemen, omdat I_w met traagheid niets te maken heeft. Toevallig is voor een cirkelvormige doorsnede I_w gelijk aan het zogenaamde polaire traagheidsmoment

$$I_p = \iint r^2 \, dA$$

dat een rol speelt bij de versnelde rotatie van een lichaam om een as.

De formule voor de schuifspanningen

$$\sigma_{xt} = \frac{M_w r}{I_w}$$

maakt het mogelijk de schuifspanningen ten gevolge van een wringend moment te berekenen. Men merke op dat de formule qua vorm veel overeenkomst vertoont met die voor de normaalspanningen bij buiging.

Holle cirkelvormige doorsnede

Hierboven is gezien dat een wringend moment in een massieve staaf met cirkelvormige doorsnede alleen schuifspanningen in de doorsnede geeft in tangentiële richting. Er is geen krachtoverdracht in radiale richting. Dit betekent weer dat men de hierboven gevonden spanningsverdeling ook kan gebruiken voor een cirkelcilindrische koker, zie fig. 12.6. Het enige verschil is nu dat er

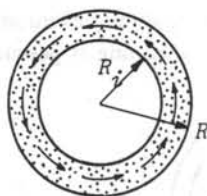


fig. 12.6.

minder materiaal aanwezig is, en er dus minder bijdragen zijn tot het wringend moment. Dit kan tot uitdrukking gebracht worden door een kleinere waarde voor I_w ,

$$I_w = \frac{1}{2}\pi R^4 - \frac{1}{2}\pi R_i^4.$$

Hierin is R_i de inwendige straal van de koker.

12.2. dunwandige kokers

In de vorige paragraaf is het geval van wringing van een cirkelcylindrische koker behandeld. Daarbij bleek dat voor de schuifspanningen geldt

$$\sigma_{xt} = \frac{M_w r}{I_w}$$

waarin

$$I_w = \frac{1}{2}\pi(R^4 - R_i^4).$$

Als de wand van de koker erg dun is (zeg d , met $d \ll R$), kan men schrijven

$$R^4 - R_i^4 = R^4 - (R - d)^4 = R^4 - R^4 + 4R^3d + \dots$$

waarin de termen van de orde R^2d^2 en kleiner zijn verwaarloosd. Men vindt dan dus, bij benadering

$$I_w = 2\pi R^3 d$$

en voor de schuifspanningen vindt men dan, omdat de afstand r nu praktisch niet meer verschillen kan van R

$$\sigma_{xt} = \frac{M_w}{2\pi R^2 d}.$$

In deze paragraaf wordt het meer algemene geval van een dunwandige koker met een doorsnede van willekeurige vorm behandeld. De dunwandige cirkelcylinder is daarvan een bijzonder geval. Gesteld wordt dat ook in het algemene geval van een koker met een doorsnede van willekeurige vorm, zie fig. 12.7 het wringend moment geleverd wordt door een rondlopende schuifstroom $s_{xt} = d\sigma_{xt}$, waarin d de, eventueel variabele, wanddikte van de koker is. In fig. 12.8 is een elementje uit de koker getekend. Op grond van het evenwicht in x -richting moeten de krachten op het voor- en achtervlakje gelijk maar tegengesteld gericht zijn (men bedenke dat er geen normaalspanningen in axiale richting zijn). Omdat op grond

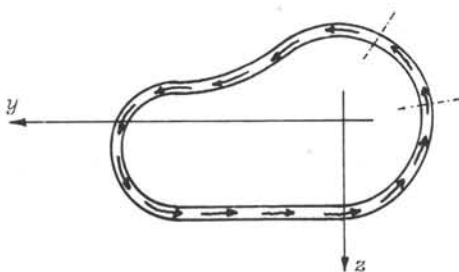


fig. 12.7.

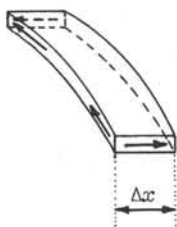


fig. 12.8.

van het momentenevenwicht steeds moet gelden dat $s_{xt} = s_{tx}$ volgt er nu dat de schuifstroom s_{xt} constant is. Overal in de koker werkt dus dezelfde schuifstroom. De plaatselijke schuifspanning is daardoor omgekeerd evenredig met de wanddikte.

Het totale wringend moment kan men vinden door de elementaire bijdrage

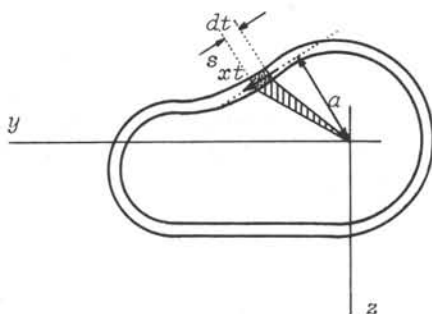


fig. 12.9.

$s_{xt} dt \times a$ (zie fig. 12.9) te integreren. Omdat $dt \times a$ juist gelijk is aan tweemaal het in fig. 12.9 gearceerde oppervlak vindt men na integratie

$$M_w = 2s_{xt}A$$

waarin A het oppervlak binnen de doorsnede is (de oppervlakte van het gat). Voor de schuifspanning vindt men nu

$$\sigma_{xt} = \frac{M_w}{2dA}$$

Voor de cirkelcylindrische koker is

$$A = \pi R^2$$

en in dat geval is de schuifspanning

$$\sigma_{xt} = \frac{M_w}{2\pi d R^2}.$$

Dit is in overeenstemming met de hierboven al gevonden uitdrukking voor de schuifspanningen in dat geval.

12.3. superpositie

In het voorgaande zijn de schuifspanningen ten gevolge van dwarskracht en die ten gevolge van wringing berekend. Daarvoor (in hoofdstuk 10) zijn de normaalspanningen ten gevolge van normaalkracht en die ten gevolge van een buigend moment berekend. Steeds zijn die belastinggevallen onafhankelijk van elkaar beschouwd. In veel gevallen werken in een ligger echter meerdere van de hierboven genoemde grootheden, en dan moeten de verschillende invloeden met elkaar worden gecombineerd. Bij deze superpositie van verschillende belastinggevallen moet men goed op het karakter van de op te tellen grootheden letten. Bij het optellen van scalaire grootheden behoeft men alleen op het teken van de grootheden te letten. Bij het optellen van vectoren moet men de parallelogramregel toepassen. Bij het optellen van grootheden zoals spanningen moet men vooral voorzichtig zijn als die op verschillende vlakjes werken. Op het optellen van dergelijke grootheden wordt in latere studiejaren teruggekomen. Hier wordt alleen een tweetal eenvoudige gevallen nader beschouwd.

Normaalkracht en buiging

Zowel normaalkracht als buiging geeft, zoals in hoofdstuk gezien 10, op vlakjes loodrecht op de staafas alleen aanleiding tot normaalspanningen. De combinatie van die twee verschijnselen is eenvoudig. Men kan de normaalspanningen σ_{xx} ten gevolge van een normaalkracht N en die ten gevolge van een buigend moment M zonder meer bij elkaar optellen,

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I}.$$

Hierin is A het oppervlak van de doorsnede en I is het traagheidsmoment ten opzichte van de y -as. Er is hier aangenomen dat het een ligger met een symmetrisch profiel betreft (symmetrisch t.o.v. de z -as), en dat het buigend moment in het vlak door de x -as en de z -as werkt.

Dwarskracht en wringing

De combinatie van dwarskracht en wringing is veelal ook niet moeilijk. Ter illustratie wordt het geval getekend in fig. 12.10 beschouwd. Er wordt aangenomen dat de ligger bij punt B een knik ter grootte van een rechte hoek vertoont, en dat de doorsnede van de ligger cirkelvormig, massief, is. In het gedeelte AB van de ligger treedt een buigend moment op en een dwarskracht. Het buigend moment is groot $-P(b-y)$ en geeft aanleiding tot normaalspanningen

$$\sigma_{yy} = \frac{Mz}{I} = -\frac{P(b-y)z}{I}.$$

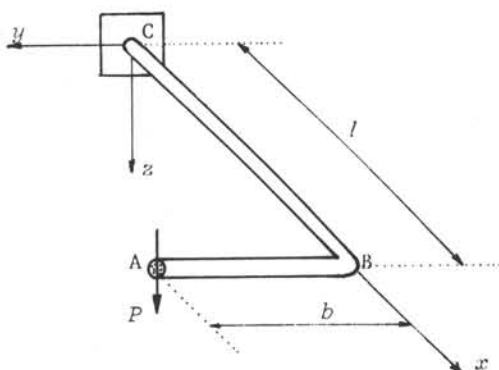


fig. 12.10.

Hierin is I het traagheidsmoment van een cirkelvormige doorsnede ten opzichte van een lijn door het zwaartepunt (in dit geval evenwijdig aan de x -as), $I = \frac{1}{4}\pi R^4$. De dwarskracht, waarvan de grootte P is, geeft aanleiding tot schuifspanningen σ_{yz} . De verdeling hiervan is overeenkomstig het tweede voorbeeld van paragraaf 11.2,

$$\sigma_{yz} = \frac{4}{3} \frac{P}{\pi R^2} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right).$$

In het deel AB van de ligger werkt geen normaalkracht en geen wringend moment.

In het deel BC van de ligger werkt een buigend moment ter grootte $-P(l - x)$. De bijbehorende normaalspanningen zijn

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I} = -\frac{P(l - x)z}{I}.$$

Er werkt een dwarskracht ter grootte P , en dit geeft aanleiding tot de volgende schuifspanningen

$$\sigma_{xz} = \frac{4}{3} \frac{P}{\pi R^2} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right).$$

Tenslotte werkt er ook een wringend moment ter grootte Pb , en dit geeft aanleiding tot de volgende schuifspanningen

$$\sigma_{xt} = \frac{M_w r}{I_w} = \frac{Pbr}{\frac{1}{2}\pi R^4}.$$

De schuifspanningen σ_{xz} en σ_{xt} kan men wel met elkaar samenstellen, maar daarbij moet men bedenken dat deze spanningscomponenten, die op hetzelfde vlakje werken, als vectoren moeten worden opgeteld. De verdeling van de schuifspanningen ten gevolge van de dwarskracht en ten gevolge van het wringend moment zijn schematisch weergegeven in fig. 12.11. Het meest ongunstige geval treedt op in het punt met coördinaten $y = R, z = 0$. Daar zijn zowel de schuifspanningen ten gevolge van dwarskracht als die ten gevolge van wringing maximaal terwijl hun richtingen daar gelijk zijn. De maximale schuifspanning is dus

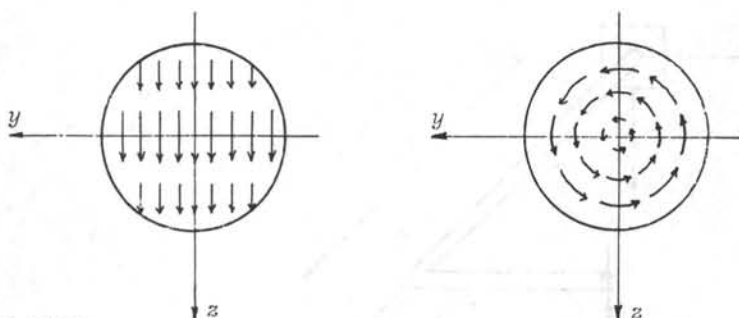


fig. 12.11.

$$\sigma_{xt-\max} = \frac{4}{3} \frac{P}{\pi R^2} + \frac{Pb}{\frac{1}{2}\pi R^3}.$$

Het berekenen van de maximale schuifspanning is vooral van belang voor de dimensionering van constructies. De toelaatbare spanningen in een constructie zijn immers, afhankelijk van het materiaal, beperkt. Op de dimensionering van constructie-onderdelen wordt later teruggekomen. Om een indruk te geven van de wijze waarop de hierboven afgeleide formules voor de spanningen daarbij worden gebruikt, worden in de volgende paragraaf een tweetal eenvoudige voorbeelden behandeld.

12.4. constructieve toepassingen

In deze paragraaf worden twee eenvoudige voorbeelden van toepassingen van de hiervoor afgeleide formules behandeld. De voorbeelden hebben betrekking op een balk van voorgespannen beton en een stalen spant.

Voorbeeld 1

Een dak bestaat uit betonplaten, dik 10 cm, lang 2 m en breed 1 m, die zijn opgelegd op balken van voorgespannen beton, met een lengte van 3 m, en een doorsnede van 10 cm $\times$ 24 cm (zie fig. 12.12). De belasting van het dak

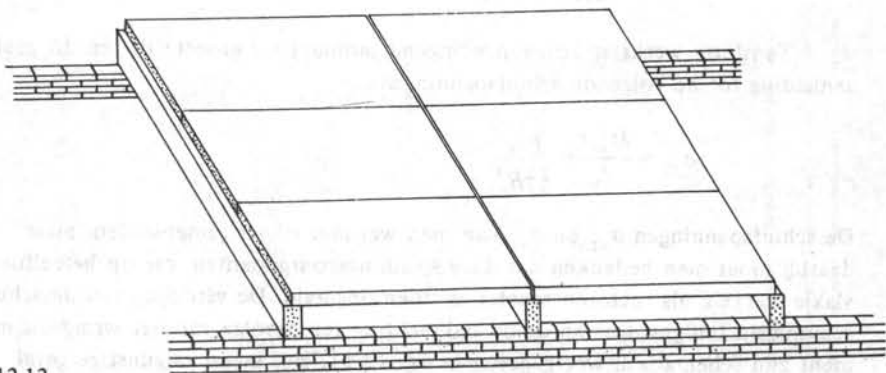


fig. 12.12.

bestaat uit een gelijkmatig verdeelde belasting groot 1 kN/m^2 . Het volumiek gewicht van de dakplaten is 24 kN/m^3 , en dat van de balken 25 kN/m^3 . De toelaatbare drukspanning in het beton van de balken is $10 \text{ MPa} = 10^7 \text{ N/m}^2$.

Het beton is niet bestand tegen trekspanningen. Gevraagd wordt om na te gaan of de balken de belasting kunnen dragen. Er hoeft geen rekening gehouden te worden met een mogelijk bezwijken door overschrijding van de toelaatbare schuifspanningen.

Oplossing

Teneinde na te gaan wat de spanningen in de balken worden, worden eerst de spanningen ten gevolge van de nuttige belasting en het eigen gewicht van de constructie bepaald. De platen kunnen beschouwd worden als vrij te zijn opgelegd op de balken. De totale belasting per m^2 plaat is

$$1 \text{ kN/m}^2 + 0,10 \text{ m} \times 24 \text{ kN/m}^3 = 3,4 \text{ kN/m}^2.$$

Dit leidt tot een belasting van de balken groot

$$2 \text{ m} \times 3,4 \text{ kN/m}^2 = 6,8 \text{ kN/m}.$$

Hierbij komt nog het eigen gewicht van de balken,

$$0,10 \text{ m} \times 0,24 \text{ m} \times 25 \text{ kN/m}^3 = 0,6 \text{ kN/m}.$$

De totale belasting van de balken is dus een gelijkmatig verdeelde belasting groot $7,4 \text{ kN/m}$.

De balken kunnen beschouwd worden als vrij opgelegd. Het maximale buigend moment treedt dan op in het midden, en heeft de grootte

$$\frac{1}{8}(7,4 \text{ kN/m})(3 \text{ m})^2 = 8,32 \text{ kNm}.$$

De bijbehorende spanningsverdeling is lineair, met een gelijke maximale drukspanning en maximale trekspanning (aan de bovenzijde, respectievelijk aan de onderzijde) groot

$$\frac{8,32 \text{ kNm} \times 0,12 \text{ m}}{\frac{1}{12} \times (0,10 \text{ m}) \times (0,24 \text{ m})^3} = 8,67 \text{ MPa}.$$

Deze spanningsverdeling is getekend in fig. 12.13. Omdat het beton geen trekspanningen kan opnemen is deze spanningsverdeling zonder meer onaanvaardbaar.

Vervolgens zal worden nagegaan of de situatie verbetert als de balk wordt voorgespannen door middel van een of meer rechte voorspankabels evenwijdig aan de as van de balk, met een verankering aan de beide uiteinden.

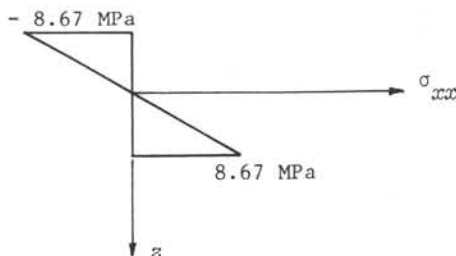


fig. 12.13.

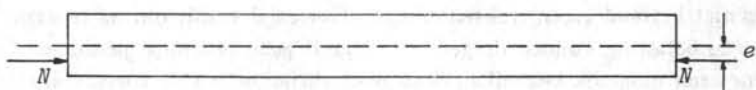


fig. 12.14.

De voorspanning leidt tot een belasting met een normaalkracht $-N$ en een gelijkmatig buigend moment $-Ne$, als e de excentriciteit van de voorspankracht is (zie fig. 12.14). Er zullen twee mogelijkheden nader beschouwd worden.

1. Centrische voorspanning, $e = 0$

In het geval dat de voorspankracht centrisch is, is de spanningsverdeling ten gevolge van de voorspanning alléén gelijkmatig,

$$\sigma_{xx} = -\frac{N}{A}$$

waarin A het oppervlak van de doorsnede is. Deze spanning is toelaatbaar als de absolute waarde maar kleiner is dan 10 MPa. Na het aanbrengen van de belasting bestaan de spanningen uit een superpositie van die ten gevolge van de voorspanning en die ten gevolge van de verdeelde belasting, (zie fig. 12.15).

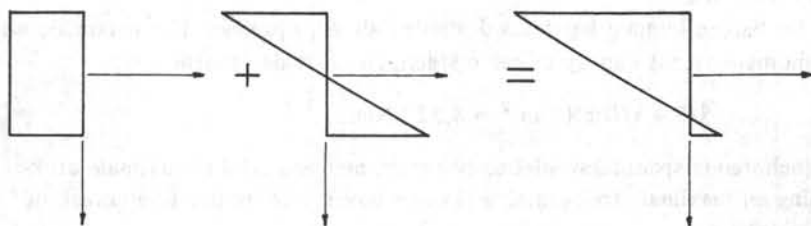


fig. 12.15.

Om dan aan de onderzijde trekspanningen te vermijden moet de waarde van N/A minstens 8,67 MPa zijn. Dan wordt echter de spanning aan de bovenzijde gelijk aan 17,34 MPa, en dat is niet toelaatbaar.

2. Excentrische voorspanning, $e = \frac{1}{6}h$

Een betere wijze van voorspannen is als men de voorspankracht excentrisch aan laat grijpen. Als de excentriciteit $\frac{1}{6}h$ is wordt de spanningsverdeling ten gevolge van de voorspanning alléén

$$\sigma_{xx} = -\frac{N}{A} + \frac{Mz}{I} = -\frac{N}{bh} - \frac{N(\frac{1}{6}h)z}{\frac{1}{12}bh^3}$$

ofwel

$$\sigma_{xx} = -\frac{N}{bh} \left(1 + \frac{2z}{h}\right).$$

Dit is een lineaire spanningsverdeling, zodanig dat aan de bovenzijde ($z = -\frac{1}{2}h$) de spanning nul is, en aan de onderzijde ($z = \frac{1}{2}h$) gelijk aan $-2N/bh$, zie fig.

12.16. Deze spanningsverdeling is toelaatbaar als $2N/bh$ kleiner is dan 10 MPa,

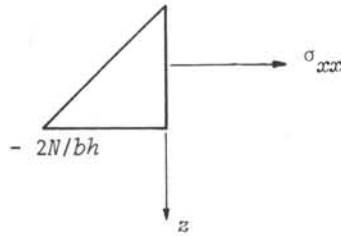


fig. 12.16.

dat wil zeggen als

$$N < 120 \text{ kN.}$$

Stel dat de voorspankracht precies 120 kN is. Na het aanbrengen van de belasting wordt de spanningsverdeling dan als aangegeven in fig. 12.17. Ook na belasten

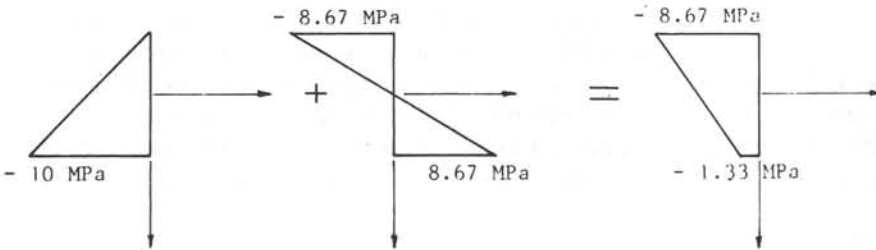


fig. 12.17.

is er geen trekspanning, en is de maximale drukspanning kleiner dan 10 MPa. Door de balk op deze wijze voor te spannen kan de belasting inderdaad gedragen worden. De balken bezwijken ook niet als de belasting kleiner is (bijvoorbeeld tijdens de montage). Men merke op dat als de excentriciteit groter wordt dan $\frac{1}{6}h$ er trekspanningen gaan optreden (aan de bovenzijde) bij afwezigheid van belasting. Dan loopt men het risico dat de balken al kapot gaan bij de fabricage, bij het aanbrengen van de voorspanning.

Voorbeeld 2

Het 2e voorbeeld heeft betrekking op een stalen spant, opgebouwd uit zogenaamde IPE-profielen, zie fig. 12.18. Details van de constructie in de punten

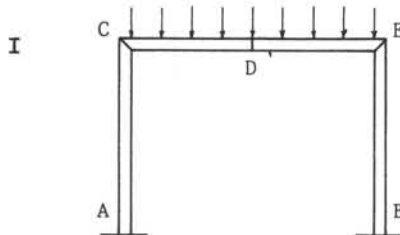


fig. 12.18.

C en D zijn getekend in fig. 12.19. De verbinding in punt C geschiedt door de

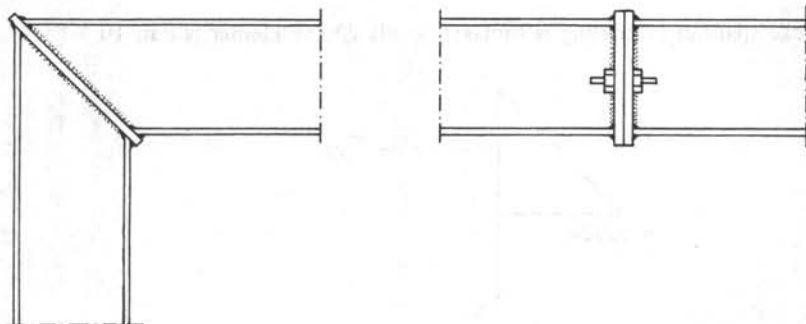


fig. 12.19.

profielen onder 45° af te snijden, en dan te verbinden met behulp van een aan stijl en regel gelaste plaat. In punt D is aan beide helften van de regel een kopplaat gelast, en deze twee kopplaten zijn aan elkaar verbonden door twee bouten (één aan beide zijden van het lijf), op halve hoogte.

De verbinding in de hoeken is vrij stijf, en die in het midden van de regel is vrij slap. Bij benadering kan men de constructie beschouwen als een driescharnierspant, mits ook de verbindingen aan de funderingen slap tegen buiging zijn. Als gesteld wordt dat de hoogte 6 m is, en de overspanning 8 m, dat het spant bestaat uit een profiel van het type IPE 200, dat de belasting gelijkmatig verdeeld is over de regel, en dat de toelaatbare trek- en drukspanning beide 160 MPa zijn, wordt gevraagd de maximaal toelaatbare belasting te bepalen.

Oplissing

De oplegreacties, en de verdeling van de normaalkrachten, de dwarskrachten en de buigende momenten, zijn getekend in fig. 12.20. Het eigen gewicht

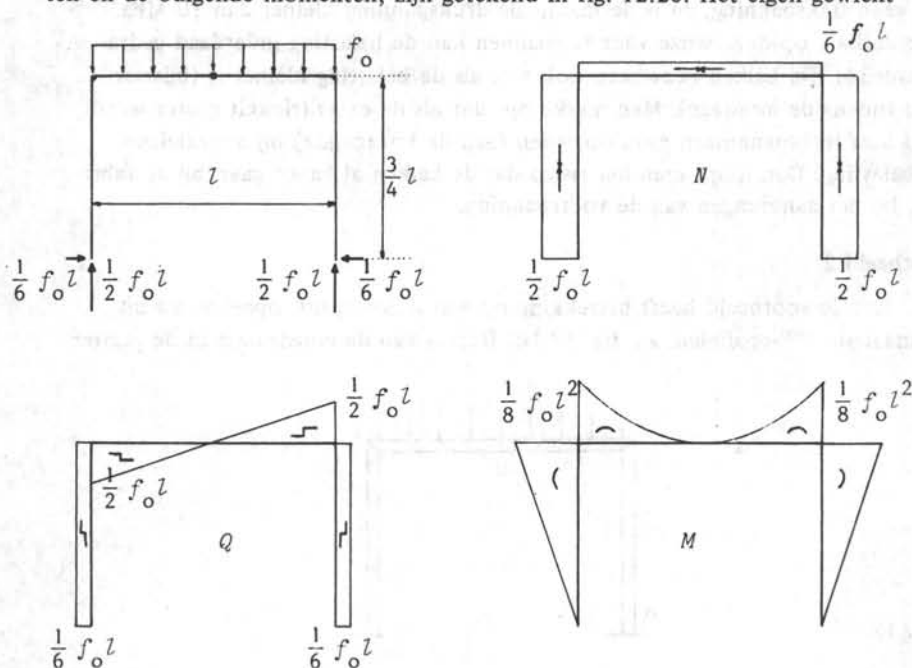


fig. 12.20.

van de stijlen is verwaarloosd. Doet men dat niet dan neemt de normaalkracht in de stijlen geleidelijk naar beneden toe. De dwarskrachten en buigende momenten blijven ongewijzigd.

Men kan, in eerste instantie, stellen dat de kritieke doorsnede een horizontale snede aan de bovenzijde van de stijlen is. Daar is de normaalkracht $-\frac{1}{2}f_0l$ en het buigend moment is $\frac{1}{8}f_0l^2$. De normaalspanningen in die snede bestaan uit een gelijkmatige drukspanning gelijk aan $-\frac{1}{2}f_0l/A$, en een symmetrische lineaire verdeling ten gevolge van het buigend moment. Het meest kritische punt treedt op aan de binnenzijde van het spant, waar twee drukspanningen moeten worden gesuperponeerd.

Voor een profiel van het type IPE 200 is de hoogte 20 cm, het oppervlak is $A = 28,5 \text{ cm}^2$, en het traagheidsmoment is $I = 1940 \text{ cm}^4$, zoals men kan vinden in een tabellenboek voor staalprofielen. De grootste drukspanning wordt nu, met $l = 8 \text{ m}$,

$$\sigma_{\min} = -\frac{\frac{1}{2}f_0l}{A} - \frac{\frac{1}{8}f_0l^2(\frac{1}{2}h)}{I} = -(42,63 \times 10^3 \text{ m}^{-1})f_0.$$

Omdat de maximaal toelaatbare drukspanning $160 \text{ MPa} = 160 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ is, is dus de maximaal toelaatbare belasting $3,75 \text{ kN/m}$.

Het eigen gewicht van de regel is, volgens het tabellenboek, 224 N/m , en de toelaatbare nuttige belasting is dus $3,53 \text{ kN/m}$.

Eigenlijk moet men ook rekening houden met de schuifspanningen ten gevolge van de dwarskracht. De combinatie van normaalspanningen en schuifspanningen is namelijk ongunstiger dan het geval van alleen normaalspanningen. Daartoe moet echter eerst meer bekend zijn over het begrip spanning in het algemeen. Voorlopig wordt daarom volstaan met de hier gegeven eerste benadering.

lijst van de belangrijkste symbolen

Symbool	Betekenis	Dimensie
A	oppervlakte	L^2
$\vec{a}$	versnellingsvector	LT^{-2}
b	breedte	L
E	elasticiteitsmodulus	FL^{-2}
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	eenheidsvectoren	—
$\vec{F}$	kracht	F
f	verdeelde belasting	FL^{-1}
G	glijdingsmodulus	FL^{-2}
g	versnelling van de zwaartekracht	LT^{-2}
h	hoogte	L
I	oppervlaktemoment van de tweede orde (traagheidsmoment)	L^4
I_w	wringingstraagheidsmoment	L^4
k	aantal knooppunten in een vakwerk	—
l	lengte	L
M	buigend moment	FL
M_w	wringend moment	FL
m	massa	M
N	normaalkracht	F
Q	dwarskracht	F
R	kromtestraal	L
$\vec{r}$	plaatsvector	L
S	oppervlaktemoment van de eerste orde (statisch moment)	L^3
s	aantal staven in een vakwerk	—
s	schuifstroom	FL^{-1}
T	draaimoment	FL
u, v, w	verplaatsingscomponenten	L
$\vec{v}$	snelheidsvector	LT^{-1}
W	weerstandsmoment	L^3
x, y, z	cartesische coördinaten	L
γ	hoekvervorming	—
ϵ	rek	—
σ	spanning	FL^{-2}
φ	rotatie	—
φ'	verwringing	L^{-1}
ψ	hellingshoek	—

INDEX

b

bouwstatica 7
buigend moment 44,54,153

c

cremona 102

d

draaimoment 18,28,30
driescharnierspant 77
dwarskracht 47,55,175
dwarskrachtenlijn 48
dynamica 7

e

elasticiteitsmodulus 116
evenwicht 16,26,30

g

glijdingsmodulus 190
gravitatiewet 14

h

hoekvervorming 190

i

impuls 8
inklemming 38

k

k-ligger 100
kabels 84
kettinglijn 86
kinematica 7
kinematische bepaaldheid 34,92
knooppuntenevenwicht 107
kracht 8,13,15,22
krachtenmethode 134
krachtenveelhoek 15
kromtestraal 151,157

m

massa 8,13
massacentrum 21
matrix 110,131,144
mechanica 7
moment 18
(zie ook buigend moment en draaimoment)
momentenlijn 48,64

n

neutrale lijn 151,161
Newton, wetten van 13
normaalkracht 42,148
normaalkrachtenlijn 48
normaalspanning 42,147
nulstandsdiagram 130

o

oplegreacties 31
oppervlaktemoment 148,153,154,163

p

pendelstaaf 34
plaatsvastheid 34
poolfiguur 24,27,37,64,76
portalen 81,199

r

rek 116
roloplegging 32
ruimte 7

s

scalar 8
scharnierende staaf 34
scharnierligger 73
scharnieroplegging 32
schuifspanning 47,147,175,189
schuifstroom 180
sluitlijn 37
snedemethode 95
spanning 46
(zie ook normaalspanning en schuifspanning)
stangenvelhoek 26,27,36,64,76
statica 7
statistische bepaaldheid 34,94
statisch moment 148
statisch onbepaalde constructie 134,172
Steiner, stelling van 166
sterkteleer 7
superpositie 68

t

tekenafpraak 42,45,47
toegepaste mechanica 7
traagheidsmoment 153,163
tijd 8

v

vakwerk 88

vector 8,9
verplaatsingenmethode 139
verwringing 190
voorspanning 198
vormvastheid 90

W

weerstandsmoment 154
wringing 190
wringingstraagheidsmoment 191

Z

zwaartekracht 15
zwaartelijijn 149
zwaartepunt 21,148

LITERATUUR

- F.P. Beer and E.R. Johnston, *Mechanics for Engineers-Statics*, Mc. Graw-Hill, New York, 1976.
- R.C. Coates, M.G. Coutie and F.K. Kong, *Structural Analysis*, Nelson, London, 1972.
- J.P. den Hartog, *Strength of Materials*, Dover, New York, 1961.
- G. Holzmann, H. Meyer und G. Schumpich, *Technische Mechanik, Teil 1: Statik*, Teubner, Stuttgart, 1974.
- G. Holzmann, H. Meyer und G. Schumpich, *Technische Mechanik, Teil 3: Festigkeitslehre*, Teubner, Stuttgart, 1975.
- R.J. Legger en G.L. Ludolph, *Toegepaste Mechanica*, Wolters, Groningen, 1964.
- K. Marguerre, *Technische Mechanik, Erster Teil: Statik*, Springer, Berlin, 1967.
- K. Marguerre, *Technische Mechanik, Zweiter Teil: Elastostatik*, Springer, Berlin, 1967.
- J.L. Meriam, *Statics*, Wiley, New York, 1971.
- W.A. Nash, *Strength of Materials*, Schaum's Outline Series, Mc. Graw-Hill, New York, 1972.
- C.H. Norris and J.B. Wilbur, *Elementary Structural Analysis*, Mc. Graw-Hill, New York, 1960.
- W.D. Pilkey and O.H. Pilkey, *Mechanics of Solids*, Quantum Publishers, New York, 1974.
- S.P. Timoshenko and D.H. Young, *Theory of structures*, Mc. Graw-Hill, New York, 1965.
- J.J. Tuma, *Structural Analysis*, Schaum's Outline Series, Mc. Graw-Hill, New York, 1969.
- G.R. Veldkamp, *Statica*, Oosthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht, 1975.

toegepaste mechanica

TOEGEPASTE MECHANICA

door prof.dr.ir. A. Verruijt

Deze boeken zijn in eerste instantie bedoeld voor eerstejaars, respectievelijk tweedejaars studenten civiele techniek, als handleiding bij de colleges toegepaste mechanica. Ook voor studenten van andere studierichtingen van een Technische Universiteit of van een TH kunnen deze boeken goed bruikbaar zijn.

Er is gestreefd naar een zo helder mogelijke formulering van de principes van de toegepaste mechanica, met veel aandacht voor een volledige maar toch zo eenvoudig mogelijke bewijsvoering. Terwille van een goede voorbereiding voor verder studie en toepassingen, bijvoorbeeld met numerieke methoden, is veel aandacht besteed aan een zorgvuldige definitie van de gebruikte grootheden, aan het maken van consequente tekenafspraken, en aan een systematische opbouw van de leerstof.

Deel I, 204 pag., ISBN 90-6562-031-1 (1993)

Deel II, 224 pag., ISBN 90-6562-032-x (1993)

GRONDMECHANICA

door prof.dr.ir. A. Verruijt

Bij grondmechanica komen vragen aan de orde als: hoeveel zakt een ophoging of een weglichaam, biedt een kerende constructie voldoende zekerheid, hoe groot is de belasting van de grond op een constructie (een tunnel of een sluiswand bijvoorbeeld) of hoe groot is de belasting die men op een paalfundering kan toelaten.

De grondmechanica heeft zich tot een apart vakgebied ontwikkeld door een aantal specifieke eigenschappen van de grond, zoals de niet-lineaire spannings-rek-relatie, veelal de aanwezigheid van grondwater, en de onbekendheid met reeds aanwezige beginspanningen die verband houden met de geologische geschiedenis.

Dit boek beoogt een handleiding te zijn bij de bestudering van het vak.

304 pag., ISBN 90-6562-045-1 (1993)

MECHANICA VAN CONSTRUCTIES

elasto-statica van slanke structuren

door prof.ir. A.L. Bouma

Als gevolg van steeds verdergaande eisen die aan constructies worden gesteld en het streven naar economie vindt een voortschrijdende ontwikkeling plaats die leidt tot nieuwe constructievormen en schaalvergroting. Dit alles wordt mogelijk gemaakt door het beschikbaar komen van nieuwe en steeds hoogwaardigere materialen.

Waar vroeger bij een rivierkruising een vakwerkbrug op pijlers werd ontworpen, later de rivier met een boog werd overspannen, ziet men thans de strakke lijn van ranke kokerliggers van staal of beton.

Bij hoge gebouwen is er een ontwikkeling van

massieve steenmassa's via ijle skeletten van staal of beton naar buis- of kokervormige torens. Vaak zijn hierin interessante structuren verborgen, waarmee combinaties van draagwerkingen worden verkregen.

Daarnaast zijn er ontwikkelingen op geheel nieuwe gebieden, zoals de offshore-techniek, waar platformen worden gebouwd in diep water en waar het toenemend gebruik van kabels en tuien in het oog springt ("tension-structures").

De slanke elementen en daarvan afgeleide constructies die in dit boek worden behandeld, worden in lengterichting als continu beschouwd, zo nodig in gedeelten, wat bij het onderzoek naar het elasto-statische gedrag bij belasting een analytische aanpak mogelijk maakt. Discrete systemen, die bestaan uit een groot aantal identieke subsystemen kunnen vaak met voldoende nauwkeurigheid als een continu systeem worden behandeld.

Dit boek is voortgekomen uit colleges voor derdejaars studenten aan de faculteit der Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft. Het is dan ook in de eerste plaats bedoeld voor studenten van deze studierichting. Daarnaast is het bedoeld voor ingenieurs/ontwerpers, die in hun (bouw)praktijk met mechanica problemen te maken hebben en die kennis willen nemen van een methodische analyse van het gedrag van sterk uiteenlopende constructies.

384 pag., ISBN 90-6562-114-8 (1989)

STABILITEIT voor ontwerpers

door prof.ir. D. Dicke

Op een bouwwerk werken uitwendige krachten zoals zwaartekracht, wind, gronddruk, waterdruk. Maar ook opgelegde vervormingen door temperatuur, zettingen, krimp en kruip. De draagconstructie van het bouwwerk moet dit alles opvangen en ervoor zorgen dat het bouwwerk gedurende z'n levensduur voldoende veilig, stijf en stabiel is.

Het aantonen dat een constructie stabiel is, is met de invoering van de computer eenvoudiger geworden, want met een handberekening een exacte analyse maken van een constructie die gevoelig is voor instabiliteit is vaak een zeer tijdrovende, zo niet onmogelijke zaak. In het ontwerpproces, waar vaak snel beslissingen moeten worden genomen over de vormgeving van een constructie, is het belangrijk om ten eerste inzicht te hebben of we te maken hebben met een reëel stabiliteitsprobleem, ten tweede om de mate van stabiliteit te kunnen vaststellen en ten derde tot een voldoende kwantitatieve benadering van vervormingen en inwendige krachten te komen om globale afmetingen van de constructie te kunnen vaststellen. Blijkt de mate van stabiliteit gering dan kan men de constructievorm wijzigen of de constructie stijver maken. Dit proces mag niet teveel tijd vergen maar moet wel betrouwbaar zijn. In dit boek wordt voor lijnvormige constructies een methodiek ontwikkeld die inzicht geeft in de problematiek en snel tot betrouwbare kwantitatieve informatie leidt.

Als vormgeving en dimensionering zijn vastgelegd kan eventueel met de computer een meer exacte analyse worden uitgevoerd. Dat wordt niet in dit boek behandeld.

De indeling van dit boek in grote lijnen is als volgt:
• Randvoorwaarden van staven • Verend ingeklemde staven • Geschoorde staven • Rotatiestabiliteit • Imperfecties • Praktijkvoorbeelden

207 pag., ISBN 90-6562-129-6

(1991)

materiaalkunde

METAALKUNDE,

**door prof.dr. G. den Ouden en
prof.dr.ir. B.M. Korevaar**

Deze nieuwe metaalkundeboeken zijn in het bijzonder gericht op het verwerven van kennis van metalen als constructiemateriaal en het maken van een verantwoorde materiaalkeuze.

In het eerste deel worden de grondslagen van de metaalkunde en de meest voorkomende begrippen besproken. Hierbij worden de belangrijkste metaalstructuren en de daaruit voortvloeiende fysische en mechanische eigenschappen van metalen en legeringen behandeld. Verder komen de effecten van plastische vervormingen en van warmtebehandelingen op de structuren en de eigenschappen aan de orde. De bereiding en vormgeving van metalen en legeringen en de effecten daarvan op de constructieve eigenschappen worden kort besproken. Het tweede deel is voornamelijk gericht op de materiaalkeuze bij toepassing van metalen. Eerst worden de produktiemethoden, fasetransformaties en warmtebehandelingen van staal besproken en het belang daarvan voor de toepassingen van staal. Vervolgens wordt een overzicht gegeven van de belangrijkste staalsoorten en hun toepassingsmogelijkheden. Daarnaast wordt aandacht besteed aan de gietijzersorten en aan aluminium- en koperlegeringen.

deel 1, 199 pag., ISBN 90-6562-117-2 (1992)

deel 2, 260 pag., ISBN 90-6562-140-7 (1992)

POLYMEREN

**van keten tot kunststof
prof.dr. A.K. van der Vegt**

Om de eigenschappen van kunststoffen in de praktijk te kunnen begrijpen is een goede kennis van het gedrag van polymeren onmisbaar, een gedrag dat in een aantal opzichten sterk afwijkt van dat van andere stoffen.

In dit boek wordt gepoogd een inzicht te geven in de eigenschappen van polymeren zoals die enerzijds beheerst worden door de moleculaire structuur, en zoals die anderzijds bepalend zijn voor het praktische gedrag van kunststoffen, hetzij in de verwerking, hetzij in de eigenschappen van het eindproduct.

Na een inleiding worden in dit boek behandeld:
Moleculaire opbouw • Glastoestand en glas-rubber overgang • kristallijne polymeren • Rubbertoestand en vloeibare toestand • Visco-elastische • Mechanische eigenschappen • Overige eigenschappen (thermische-, elektrische-, optische eigenschappen, milieu-invloeden, spanningscorrosie, diffusie en permeabiliteit) • Samengestelde kunststoffen •

Materiaalgegevens • Vormgeving (gieten en persen, spuitgieten, kalenderen en extruderen, vormgeving halffabrikaten, vormgeving samengestelde kunststoffen).

240 pag., ISBN 90-6562-130-X

(1992)

NIET-DESTRUCTIEF ONDERZOEK

door drs. W.J.P. Vink en ing. N.H.R. Versluis

Dit boek biedt een overzicht van de niet-destructieve methoden, die voor het onderzoek van metalen beschikbaar zijn.

Er zijn hoofdstukken in opgenomen over visuele inspectie, magnetisch onderzoek, penetrant onderzoek, wervelstroomonderzoek, ultrasoon onderzoek, radiografie, neutrografie, de persproef, lek-detectiemethoden, akoestische emissie, thermische inspectiemethoden, holografische interferometrie, de moiré-methode, scheurdieptemetingen, laagdiktemetingen, vibratieanalyse, microgolfstraling.

Voorts is er een hoofdstuk met een korte behandeling van diverse andere methoden.

Het boek wordt afgesloten met hoofdstukken over de organisatie van het n.d.o., de veiligheid en de beoordeling van het onderzoeksresultaat.

Het boek is rijk geïllustreerd.

328 pag., ISBN 90-6562-055-9

(1992)

LASTECHNOLOGIE

door prof.dr. G. den Ouden

Voor het duurzaam verbinden van materialen is in de loop der tijden een groot aantal methodes en technieken ontwikkeld. Solderen, lijmen, en lassen zijn bekende voorbeelden, die elk een zeer belangrijke rol spelen in de metaalverwerking. Vooral lassen wordt op grote schaal toegepast.

Dit boek is bedoeld voor studenten aan technische universiteiten en hogescholen en voor degenen die bij hun werk met het onderwerp te maken hebben. De stof is gegroepeerd in drie delen: processen, metaalkundige aspecten en toepas-singen. In het gedeelte over processen wordt de meeste aandacht besteed aan booglassen, maar ook een reeks andere lasprocessen, solderen en thermisch snijden komen aan de orde. Bij de toepassingen wordt ingegaan op het lassen van ongelegeerd en laaggelegeerd staal, het lassen van roestvast staal en het lassen van aluminium. "Al met al een goed leesbaar studieboek dat in iedere boekenkast thuis hoort" (R.W.A. van den Berg in *Lastetechniek* van november 1987). "Het boek is overzichtelijk en ademt op een prettige manier deskundigheid uit." (L.J. de Ridder in *De Constructeur* van juni 1988).

192 pag., ISBN 90-6562-087-7

(1990)

FRACTURE MECHANICS

door ir. H.L. Ewalds en dr. R.J.H. Wanhill

In deze behandeling van de breukleer, die als publicatie met de Engelse uitgever Edward Arnold is verschenen, zijn de jongste ontwikkelingen in dit vakgebied verwerkt. De onderwerpen die aan de orde komen zijn: spanningsintensiteit, invloed geometrie, vlakke rek- en vlak-spanningstoestand, plastische zónes en scheurtip-opening, de Griffith-Irwin methode, breukmechanismen en breuk-

criteria, scheurweerstandsbeproeving, scheurweerstand van plaat en van taai materialen, compliantie, scheurgroei onder wisselende belasting en bij spanningscorrosie, scheurweerstand als materiaaleigenschap, praktische toepassingen van het 'fail-safe' principe. Het Bulletin of Electrochemistry sprak van "certainly an outstanding contribution from two distinguished scientists engaged in the active field. Engineering students as well as the practising design engineers would find it most useful. The book provides an excellent background to novel design methods, criteria for material selection, guidelines for acceptance of weld effects and the actual ways in which material behaviour influences the fracture mechanics characterization of crack growth".

304 pag., ISBN 90-6562-024-9 (1991)

werktuigbouwkunde

WERKTUIGKUNDIGE SYSTEMEN

door prof.ir. J.C. Cool

Dit boek geeft een algemeen overzicht van de werktuigkunde. Het is geïntendeerd op de systeemleer, waarbij veel aandacht is gegeven aan modelvorming. De optredende interacties tussen krachten en verplaatsingen in werktuigen en tussen werktuigen onderling zijn geanalyseerd.

In het boek is eveneens aandacht besteed aan de synthese van werktuigen. Er zijn verschillende methoden aangegeven om goedwerkende constructies te ontwerpen.

De hoofdstukken gaan over Systemen • Modelvorming • Evenwichten • Stabiliteit • Mechanische versterkers • Spanningen en vervormingen • Materialen • Comparologie • Wrijving en weerstand • Veren • Energie • Aandrijving • Dynamische systemen • Eenheden.

De stof van dit boek ondersteunt colleges aan de Technische Universiteit Delft en kan ook bij andere soorten technisch onderwijs worden gebruikt. De hoofdstukken kunnen grotendeels onafhankelijk van elkaar worden bestudeerd.

344 pag., ISBN 90-6562-092-3 (1992)

WERKTUIGKUNDIGE SYSTEMEN

vraagstukken en antwoorden

door prof.ir. J.C. Cool

In dit boekje zijn opgaven verzameld over de hoofdstukken Systemen, Modelvorming, Stabiliteit, Mechanische versterkers, Comparologie, Wrijving en weerstand, Veren, Aandrijving en Dynamische systemen van het hiervoor genoemde boek. De vraagstukken zijn voorzien van uitgebreide antwoorden.

62 pag., ISBN 90-6562-128-8 (1991)

(technische) natuurkunde

INLEIDING MECHANICA

door drs. R. Roest

Dit boek is in de eerste plaats bestemd voor het propaedeutisch onderwijs aan studenten in de (technische) natuurkunde en aanverwante studierichtingen.

Opdat het boek door studenten met verschillend ingangsniveau kan worden gebruikt, is aan de gehanteerde wiskunde (in een appendix) vrij uitgebreid aandacht besteed.

Na een inleidend hoofdstuk volgen hoofdstukken over de kinematica van puntvormige lichamen, de grondwetten van de dynamica, de vlakke dynamica van een puntmassa, arbeid, energie, impuls en impulsmoment, twee-deeltes systemen en botsingen, de dynamica van een verzameling puntmassa's, starre lichamen en rotatie om een vaste as, de vlakke dynamica van een star lichaam, relatieve beweging en traagheidskrachten, enige aspecten van de niet-vlakke dynamica, het omgekeerd kwadratisch centraal krachtveld, trillingen, lineaire deformaties, vloeistofmechanica, oppervlakteverschijnselen bij vloeistoffen en mechanische aspecten van de relativiteitstheorie.

426 pag., ISBN 90-6562-091-5 (1993)

VRAAGSTUKKEN OVER MECHANICA

door drs. R. Roest

Deze vraagstukkenbundel biedt oefenstof bij bovengenoemd theorieboek en houdt daarbij dezelfde indeling aan. De antwoorden op de opgaven zijn achterin het boek opgenomen.

93 pag., ISBN 90-6562-040-0 (1993)

INLEIDING ELEKTRICITEIT EN MAGNETISME

door ir. W. Buijze

Aan de TU Delft worden voor verschillende faculteiten verschillende colleges Elektriciteit gegeven. Die verschillen betreffen volledigheid en strengheid van het betoog; de keuze hangt af van wat de faculteiten wenselijk of mogelijk achten.

In dit boek, dat is opgezet als een studieboek, komen alle onderwerpen uit die colleges aan de orde. Waar nodig wordt een onderwerp op verschillende niveaus van strengheid behandeld. Dit maakt het mogelijk uit de paragrafen steeds die keuze te doen die voor een bepaald college gewenst wordt. De hoofdstukken gaan over:

- elektrostatische velden in vacuüm • elektrostatische velden in diëlektrica • elektrische stromen
- het magnetisch veld van stationaire stromen • magnetostatische velden • elektromagnetische inductie • de vergelijkingen van Maxwell • netwerken.

243 pag., ISBN 90-6562-123-7 (1992)

VRAAGSTUKKEN ELEKTRICITEIT EN

MAGNETISME

verzameld door ir. W. Buijze

Deze vraagstukkenbundel biedt oefenstof bij 'Inleiding Elektriciteit' en houdt daarbij dezelfde indeling aan. De antwoorden op de vraagstukken zijn

achterin het boek opgenomen.

103 pag., ISBN 90-6562-124-5

(1992)

INLEIDING THERMODYNAMICA

door drs. W.H. Wisman

De aanpak in dit boek is in hoofdzaak klassiek en fenomenologisch. Het is bedoeld als een leerboek op een inleidend niveau. Het is geen handboek.

De titels van de hoofdstukken zijn: Inleiding • Warmteleer • De Eerste Hoofdwet • De Tweede Hoofdwet • Een andere invoering van de entropie • T,S- en H,S-Diagrammen • Standaard vermogens- en koel-cycli; andere systemen • De thermodynamische potentiaalfuncties • De chemische potentiaal • Fase-overgangen • Condensatie van verzadigde dampen • De Derde Hoofdwet • Mengsels, legeringen en oplossingen • Vloeistofmengsels in evenwicht met hun dampen • Vormingsenthalpie en reactiewarmte • Verspreide onderwerpen (Elastische deformatie, de thermodynamica van het rekstrookje, de elektrochemische potentiaal, elektrische elementen en brandstofcellen, transformaties, magnetische arbeid, magnetische koeling) • Elektromagnetische straling (temperatuurstraling, straijngstemperatuur, de wetten van Kirchhoff en Lambert, stralingsdruk, de wetten van Stefan-Boltzmann en Wien).

249 pag., ISBN 90-6562-116-4

(1992)

VRAAGSTUKKEN THERMODYNAMICA

verzameld door ir. W. Buijze, dr.ir. E. Stammers en drs. W.H. Wisman

Deze bundel vraagstukken volgt de indeling van het bovengenoemde theorieboek. De opgaven zijn voorzien van antwoorden.

58 pag., ISBN 90-6562-113-x

(1992)

ELEKTRISCHE EN MAGNETISCHE VELDEN

door ir. A. Henderson

In dit beknopte boek wordt de theorie van de elektrische en magnetische velden voor technici behandeld; daarbij wordt naast de noodzakelijke formules ook aandacht gegeven aan de ontwikkeling van het fysisch inzicht.

In een inleidend hoofdstuk wordt een beknopt overzicht gegeven van de vectoralgebra. Daarna volgen de elektrostatica, de elektrische stromen en magnetische velden, en vervolgens de wetten van Maxwell in integraalvorm.

Daarbij komen ook de voor de netwerktheorie noodzakelijke wetten van Kirchhoff naar voren.

Tenslotte volgen de wetten in differentiaalvorm, waarbij tevens wordt ingegaan op de beginselen van de vectoranalyse. Het boek wordt afgerond met 100 vraagstukken, voorzien van antwoorden.

106 pag., ISBN 90-6562-027-3

(1988)

BOUWFYSICA I (inleiding)

door de vakgroep Bouwfysica

Dit boek is in de plaats gekomen van het bekende boek van wijlen prof. Kosten.

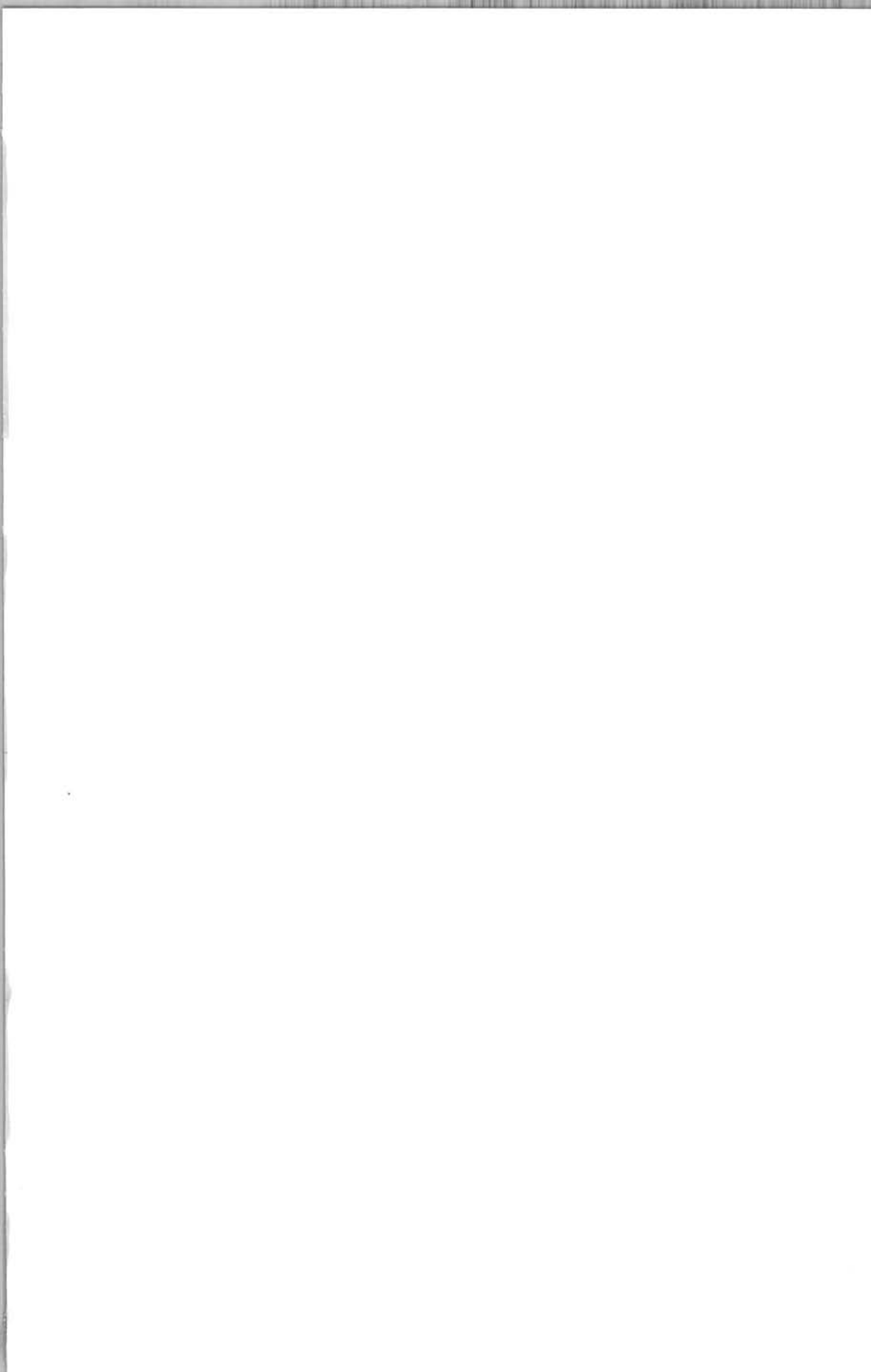
Modernisering van deze behandeling was dringend nodig, vooral door de gewijzigde inzichten m.b.t. de

energiehuishouding en de invoering van de Wet Geluidhinder. De bedoeling van dit boek is inzicht te verschaffen in de grondregels, die bij het ontwerpen van ruimteomsluitende constructies bepalend zijn voor het te verwachten leefklimaat en het daarbij kunnen hanteren van de elementaire basisbegrippen op het gebied van warmte, vocht, ventilatie, akoestiek en licht.

Naast het gebruik als collegedictaat bij het bouwfysica-onderwijs aan de TU-Delft is deze handleiding ook zeer geschikt voor gebruik op TH's.

128 pag., ISBN 90-6562-048-6

(1993)



Dit boek wordt ten behoeve van de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft (VSSD) uitgegeven door de Delftse Uitgevers Maatschappij.

De VSSD is een vereniging van studenten aan de Technische Universiteit Delft, die zich ten doel stelt de belangen van de studenten te behartigen.

Deze belangenbehartiging heeft vele, overigens samenhangende, kanten. De bevordering van de kwaliteit van het onderwijs, bezinning op de beroepspraktijk en het toegankelijker maken van het wetenschappelijk onderwijs voor alle lagen van de bevolking zijn de hoofdzaken van wat de 'ideële' kant van de belangenbehartiging genoemd kan worden. De 'materiële' kant van dit werk betreft het opkomen voor een aanvaardbaar inkomen voor de student, voor goede leefomstandigheden, goed en goedkoop studiemateriaal e.d.

Bij het verzorgen en doen uitgeven van boeken zoals deze zijn de beide aspecten vertegenwoordigd: de beschikbaarheid van goede en handzame boeken vergroot de kwaliteit van het onderwijs, anderzijds worden ze zo goedkoop mogelijk in de handel gebracht.