

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Voorbeelden van tegenintuïtief gedrag van
compacte Hausdorff-ruimten**
(Examples of counterintuitive behavior of compact
Hausdorff spaces)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

FRANKA VAN DIJKEN

Delft, Nederland
Augustus 2017



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

**“Voorbeelden van tegenintuïtief gedrag van compacte Hausdorff-ruimten”
(“Examples of counterintuitive behavior of compact Hausdorff spaces”)**

FRANKA VAN DIJKEN

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K. P. Hart

Overige commissieleden

Dr. B. van den Dries

Dr. R. Fokkink

Dr. C. Kraaikamp

Prof. dr. J. van Mill

Augustus, 2017

Delft

Samenvatting

Topologische ruimten kunnen, ondanks dat ze wellicht compacte Hausdorff-ruimten zijn, heel andere eigenschappen hebben dan compacte metrische ruimten. In dit verslag wordt deze bewering toegelicht aan de hand van zes voorbeelden. Deze voorbeelden zijn ingedeeld in drie hoofdstukken: meetkundige voorbeelden, de Čech-Stone compactificatie van de natuurlijke getallen en de Fedorchuk-Lijn.

Van de meetkundige voorbeelden tonen de Dubbele Cirkel en het Lexicografisch geordend vierkant aan dat een compacte Hausdorff-ruimte met een aftelbare lokale basis niet separabel hoeft te zijn. De laatste twee ruimten, de Dubbele Pijl en de Helly Ruimte, zijn voorbeelden van compacte Hausdorff-ruimten die weliswaar separabel zijn, maar wel een relatief groot gewicht (groter dan $\aleph_0$) hebben.

De Čech-Stone compactificatie heeft meerdere opvallende eigenschappen. Deze ruimte laat zien dat compacte Hausdorff-ruimten relatief groot (kardinaliteit 2^c) kunnen zijn, de elementen geen aftelbare omgevingsbasis hoeven te hebben en geen convergente rij hoeven te bevatten. Tot slot wordt opgemerkt dat de Čech-Stone compactificatie wel een convergente rij bevat geïndiceerd door de overaftelbare verzameling ω_1 .

De Fedorchuk-Lijn snijdt het gedrag van compacte Hausdorff-ruimten in de dimensietheorie aan. Deze ruimte laat namelijk zien dat de verschillende definities van een dimensie niet noodzakelijk samenvallen als een separebele ruimte niet-metrizeerbaar is.

Voorwoord

Dit verslag is geschreven als onderdeel ter verkrijging van de graad van *Bachelor of Science* in de Technische Wiskunde aan het Delft Institute of Applied Mathematics. In april 2017 ben ik begonnen met het afbakenen van een onderwerp binnen de topologie samen met Klaas Pieter Hart. Vanaf toen heb ik wekelijkse ontmoetingen gehad met Klaas Pieter tot het moment dat hij op vakantie ging. Tijdens deze ontmoetingen moest nogal wat werk worden verricht gezien het feit dat ik een nieuweling was in het vakgebied en er bij het uiteindelijk gekozen onderwerp heel nieuwe theorie kwam kijken.

De laatste twee weken nam Jan van Mill het stokje over van Klaas Pieter. Ik kon mijn vragen aan hem stellen en we hadden geregeld Skype Meetings.

Het is als derdejaars wiskundestudent een enorme eer om te worden begeleid door twee mensen met zoveel ervaring in zowel het vakgebied als het onderwijs.

Ik wil Klaas Pieter graag bedanken voor de individuele spoedcursus die hij mij heeft gegeven in de gekozen topologische ruimten gedurende tien weken. Ook al ging het op dat moment wellicht te snel voor mij, uiteindelijk is alles gelukkig op zijn plaats gevallen en hebben deze gesprekken mij enorm geholpen.

Jan wil ik graag bedanken voor afmaken waar ik met Klaas Pieter al een heel eind in gevorderd was. De laatste twee weken zijn cruciaal geweest voor het afronden van het verslag en ik apprecieer de hulp erg.

Ik had drie jaar geleden nooit voor mogelijk gehouden hoeveel ik tijdens de opleiding heb geleerd. En ik kan wel met zekerheid zeggen dat dit niet was gebeurd als Cor Kraaikamp me niet door mijn eerste jaar heen had geholpen. Op dat moment had ik de draai helemaal niet te pakken en hebben de extra bijlessen van Cor ervoor gezorgd dat ik ergens iets zag in het leermateriaal dat ik begreep en waar ik enthousiast van werd omdat het paste bij mijn eigen denkwijze. Gelukkig heb ik in mijn tweede en derde jaar dat zelfstandig kunnen vinden in bijna alle vakken van de opleiding en heb ik het zelfvertrouwen gebouwd om een 'moeilijk' gebied in de wiskunde als Topologie te kiezen als scriptieonderwerp. Maar zonder Cor was dat zeker niet gebeurd, waarvoor dank.

Ook wil ik de volledige beoordelingscommissie bedanken voor mij enthousiast maken over topologie en het lezen van mijn scriptie. Tot slot wil ik nog mijn vrienden en familie bedanken die heel af en toe willen aanhoren wat ik nou eigenlijk doe bij Technische Wiskunde en steun hebben geboden in deze mentaal vermoeiende zomer.

Mijn topologische inzicht zit sinds april 2017 in een lift die zeker nog niet stilstaat en ik ben ervan overtuigd dat ik over een tijd deze scriptie nog zou kunnen verbeteren. Mocht de lezer opmerkingen of vragen hebben, schroom dan niet om mij te mailen naar franka.dijken@gmail.com. Veel leesplezier!

Franka van Dijken,
Amsterdam,
10-08-2017

Inhoudsopgave

Samenvatting	i
Voorwoord	iii
Inleiding	1
1 Compacte metrische en topologische ruimten	3
1.1 Metrische ruimten	3
1.2 Stellingen met betrekking tot compactheid	4
1.3 Topologische ruimten	4
1.3.1 Enkele definities en opmerkingen	5
2 Meetkundige voorbeelden	7
2.1 Dubbele Cirkel	7
2.1.1 Definitie	7
2.1.2 Eigenschappen	8
2.2 Lexicografisch geordend vierkant	10
2.2.1 Definitie	10
2.2.2 Eigenschappen	11
2.3 Dubbele Pijl	13
2.3.1 Definitie	13
2.3.2 Eigenschappen	14
2.4 De Helly Ruimte	16
2.4.1 Definitie	16
2.4.2 Eigenschappen	16
3 Čech-Stone compactificatie van $\mathbb{N}$	19
3.1 Definitie	19
3.2 Eigenschappen	22
3.3 Convergentie in $\beta\mathbb{N}$	28
3.3.1 Geen convergerende rij	28
3.3.2 Wel convergerende overaftelbare rij	29
4 Fedorchuk-lijn en dimensies	31
4.1 Dimensies in de topologie	31
4.1.1 De inductieve dimensie	31
4.1.2 De overdekkingsdimensie	32
4.2 Fedorchuk-lijn	33
4.2.1 Definitie	33
4.2.2 Eigenschappen	34
Bibliografie	43

Inleiding

In dit verslag wordt ingegaan op het gedrag van specifieke compacte Hausdorff-ruimten dat niet overeenkomt met het gedrag van compacte metrische ruimten. De voorbeelden aan de hand waarvan we dit doen zijn namelijk zó geconstrueerd dat ze wel compact en Hausdorff zijn, maar toch in andere eigenschappen, zoals het gewicht, de kardinaliteit of de separabiliteit, niet overeenkomen met compacte metrische ruimten. Hieruit volgt dat metrizeerbaarheid een sterk begrip is. Een topologische ruimte kan namelijk weliswaar compact en Hausdorff zijn, maar omdat deze niet metrizeerbaar is heeft dit toch veel gevolgen met betrekking tot het gedrag van de ruimte.

Voor sommige lezers zal dit genoeg nieuwsgierigheid wekken om door te lezen. Anderen zullen, net zoals ik waarschijnlijk een jaar geleden, zich afvragen waarom je hier in hemelsnaam zoveel tijd aan zou willen besteden. Laat me daarom uitleggen wat ik hier interessant aan vind. Achter de ingewikkelde definities zit namelijk een idee dat betrekking heeft tot iedereen, geïnteresseerd in wiskunde of niet.

De eigenschappen die worden toegekend aan topologische ruimten zijn namelijk deel van een spel tussen intuïtie en definities. Gegeven twee verschillende punten op een lijn. Kan ik nu twee omgevingen van deze punten vinden die elkaar niet snijden? Of gegeven een koffiemok en een donut. Kan ik deze in elkaar vervormen zonder te knippen of te scheuren?

In de wiskunde kun je dit allemaal formeel definiëren om vervolgens verschillende puzzelstukjes in elkaar te schuiven en te kijken of dit past gegeven de aannames die je hebt gemaakt. Dat is echter niet wat de meeste mensen doen als ze deze vragen lezen. Zij dagen hun abstracte denkvermogen uit door het voor zich te zien.

Vanaf dat we geboren worden leren we hoe ruimten en vormen werken. Een vierkant blokje past niet door een driehoekig gat (mits we ons even beperken tot hoe het kinderspeelgoed er meestal uitziet). De intuïtie die we hierin ontwikkelen wordt steeds bijgeschaafd als we een nieuw voorbeeld zien. Voor mij is dit waar dit verslag over gaat: het ontwikkelen van intuïtie in topologische ruimten. Compacte metrische ruimten gedragen zich namelijk intuïtiever dan niet-metrizeerbare topologische ruimten. Vandaar dat we het gedrag van compacte metrische ruimten vaak bestempelen als 'mooi' of 'voorspelbaar'. Deze woorden geven aan dat bepaalde eigenschappen niet alleen wiskundig juist gedefinieerd zijn, maar ook kloppen met hoe je het voor je zou zien in je hoofd. De topologische ruimten die in dit verslag worden behandeld zijn bijzonder omdat ze een aantal mooie eigenschappen hebben, maar ook een aantal onverwachte. Deze intuïtie achter de meetkunde is voor mij erg belangrijk. Het is namelijk de bron van de creativiteit in het bewijzen, iets dat vaak wordt onderschat. Maar aan de intuïtie op zich heb je weinig. De kunst is om de intuïtie te rechtvaardigen in de wiskundige taal en deze zo hard te maken.

In die zin gaat het verslag dus over het wiskundig bewijzen dat het gedrag van compacte topologische niet-metrizeerbare ruimten tegenintuïtief is.

Het is belangrijk om op te merken dat alle resultaten die in dit verslag worden genoemd reeds

bekend zijn. Geen Lemma of Stelling is nergens anders terug te vinden. Het verslag dient slechts als een uiteenzetting van de gekozen topologische ruimten, waarin de relevante eigenschappen worden bewezen en deze in een kader worden geplaatst. Deze structuur lijkt het meeste op de opbouw van het boek *Counterexamples in Topology* van Steen en Seebach Steen, L.A. en Seebach, J.A. (1978). De ruimten die in dit verslag worden behandeld zijn echter een fractie van de ruimten die in Steen, L.A. en Seebach, J.A. (1978) voorkomen. Mocht de lezer meer interesse hebben, verwijs ik deze graag door naar dit boek.

In de totstandkoming van dit verslag hebben boeken echter zeker niet de hoofdrol gespeeld. Voornamelijk de gesprekken, of eigenlijk meer individuele colleges, van zowel Klaas Pieter Hart als Jan van Mill hebben de basis gevormd voor de structuur en inhoud van dit verslag. Veel informatie is dan ook mondeling overgedragen, wat het verwijzen naar specifieke boeken af en toe lastig maakt. Waar dus niet expliciet wordt verwezen naar een bron, bekend dit hoogstwaarschijnlijk dat de informatie mondeling is overgebracht door Hart of van Mill. Dit doet echter niet af aan de betrouwbaarheid van de overgedragen informatie, gezien de indrukwekkende carrière in de topologie van beide heren. En mocht de informatie alsnog onwaar zijn, dan ligt de oorzaak waarschijnlijk bij het verkeerd interpreteren aan mijn kant en neem ik hier de verantwoordelijkheid voor.

In dit verslag wordt alles behandeld in de cursus Topologie (voorjaar 2017) aan de Universiteit Leiden Bruin (2017) als bekend beschouwd. Afgezien daarvan is het verslag zelfvoorzienend en zullen dus alle onbekende definities expliciet worden genoemd.

Mocht de lezer weinig topologische voorkennis hebben, dan wordt aangeraden om Bruin (2017) en Engelking (1989) te raadplegen.

Hoofdstuk 1

Compacte metrische en topologische ruimten

Dit hoofdstuk zal dienen om intuïtie achter compactheid in metrische ruimten te ontwikkelen of aan te wakkeren, zodat in de opvolgende hoofdstukken kan worden aangetoond waar de daar gedefinieerde topologische ruimten precies tegenvoorbeelden van zijn. Eerst zal het begrip *metrische ruimte* worden aangekaart, om daarna *compactheid* te definiëren. Vervolgens wordt een aantal stellingen genoemd met betrekking tot compactheid waar in de verdere hoofdstukken op terugverwezen zal worden. Tot slot zal het begrip *topologische ruimte* worden ingeleid.

Als de lezer over voldoende kennis bezit wat betref metrische en topologische ruimten en compactheid, dan wordt aangeraden om dit hoofdstuk over te slaan en slechts te gebruiken waar nodig bij het lezen van de volgende hoofdstukken.

1.1 Metrische ruimten

Een *metrische ruimte* wordt gedefinieerd door een verzameling X met een bijbehorende metriek $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. De metriek, ook wel de afstandsfunctie genoemd, geeft de afstand tussen ieder paar punten uit X . Hierdoor hebben metrische ruimten een groot geometrisch aspect. Het is dan ook vaak mogelijk om bepaalde kenmerken van een metrische ruimte naar voren te laten komen in een schets. Door deze eigenschap gedragen metrische ruimten zich relatief netjes en voorspelbaar. Het bekendste voorbeeld van een metrische ruimte is dan ook de *Euclidische ruimte*. Deze wordt gedefinieerd door de verzameling $\mathbb{R}^n$ met $n \in \mathbb{N}$ en de *Euclidische metriek* die stelt dat de afstand tussen twee punten gelijk is aan de lengte van het rechte lijnstuk dat ze verbindt. Deze ruimte is erg intuïtief. Merk bijvoorbeeld op dat de meesten de ruimte met $n = 1$, een ordinare getallenlijn, leren op de basisschool. En de ruimte met $n = 2$ en soms $n = 3$, assenstelsels met respectievelijk 2 en 3 assen, wordt vaak behandeld op de middelbare school. Het is natuurlijk mogelijk om een metriek tegenintuïtief te definiëren, maar omdat er een aantal regels is dat altijd moet gelden voor een metriek, kan een metrische ruimte nooit zodanig tegenintuïtief worden als de later gedefinieerde topologische ruimte wel kan. De regels waar een metriek aan moet voldoen zijn als volgt.

1. $d(x, y) \geq 0$ voor alle $x, y \in X$ en $d(x, y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in X$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ voor alle $x, y, z \in X$

Een voorbeeld van hoe deze regels de meetkundige intuïtie van de metrische ruimten waarborgen is dat het extreem tegenintuïtief is om de afstand tussen twee punten die niet gelijk aan elkaar zijn niet 0 te laten zijn. De eerste regel voorkomt dit.

Door de afstand te definiëren tussen ieder paar punten, is het mogelijk om definities als *open verzameling* en *gesloten verzameling* compleet te maken. Hieruit volgen weer nieuwe definities. Het is belangrijk op te merken dat een metrische ruimte dus wordt gedefinieerd door een verzameling met een metriek en daar uit volgt wat de open dan wel gesloten verzamelingen zijn in de ruimte.

Een voorbeeld van een definitie die volgt uit de definitie van een open verzameling is de definitie van compactheid.

Een metrische ruimte (X, d) is *compact* als iedere open overdekking $\mathcal{U}$ een eindige deelloverdekking heeft. In een deelverzameling van een Euclidische ruimte $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is compactheid nog enigszins voor te stellen. De definitie is namelijk equivalent met het zijn van begrensd en gesloten wegens de Stelling van Heine-Borel¹. In complexere ruimten spreekt dit echt niet voor zich. Wel draagt compactheid, net zoals metrizeerbaarheid (zie Sectie 1.3), bij aan het intuïtief correcte gedrag van een deelverzameling of ruimte. Compacte metrische ruimten zijn over het algemeen dus 'mooie' ruimten.

1.2 Stellingen met betrekking tot compactheid

Compactheid in metrische ruimten kan op verschillende manieren worden uitgedrukt. Ook zijn er eigenschappen van metrische ruimten die volgen uit compactheid. De stellingen die dat aansnijden en waar naar wordt terugverwezen later in het verslag zullen hieronder worden benoemd. Op de bewijzen wordt bewust niet ingegaan, maar deze kunnen worden teruggevonden in *General Topology* van Engelking Engelking (1989).

Stelling 1.2.1. *Als een metrische ruimte (X, d) compact is, dan is deze separabel.*

Stelling 1.2.2. *Voor metrische ruimte (X, d) geldt dat ieder element van deze ruimte een aftelbare omgevingsbasis heeft.*

Stelling 1.2.3. *Als een metrische ruimte (X, d) compact is, dan heeft deze een aftelbare basis.*

Stelling 1.2.4. *Als een metrische ruimte (X, d) compact is, dan heeft deze ten hoogste kardinaliteit $\mathfrak{c}$.*

1.3 Topologische ruimten

In tegenstelling tot metrische ruimten worden topologische ruimten niet gedefinieerd met een metriek. Om toch aan te geven wanneer een verzameling open is en daarmee verdere definities te kunnen toepassen, wordt een topologische ruimte gedefinieerd als een verzameling X met een topologie $\mathcal{T}$. Deze *topologie* is de familie open deelverzamelingen van X . Merk op dat dit meer vrijheid biedt dan in het geval van de metrische ruimten. Een verzameling is nu namelijk simpelweg open als deze in $\mathcal{T}$ zit in plaats van dat dat moet volgen uit de gedefinieerde metriek d op X . Het is echter wel mogelijk om een topologie zo 'netjes' te definiëren dat deze precies dezelfde open deelverzamelingen bevat als uit een bepaalde metriek zou volgen. In dat geval is de topologische ruimte *metrizeerbaar*. Merk op dat de familie metrische ruimten dus een

¹Stelling van Heine-Borel: Voor iedere deelverzameling $A \subseteq X$ geldt: A is compact $\iff A$ is totaal begrensd en volledig

deelverzameling is van de familie topologische ruimten.

Ondanks dat een topologische ruimte dus gedrag kan vertonen dat minder intuïtief is dan een metrische ruimte, wordt dit nog binnen de perken gehouden door de volgende regels, die zorgen dat niet iedere greep uit de machtsverzameling van X door kan gaan als topologie.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. als $U, V \in \mathcal{T}$, dan $U \cap V \in \mathcal{T}$
3. als $U_i \in \mathcal{T}$ voor alle $i \in I$, dan $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Merk op dat het verschil tussen de tweede en de derde regel is dat de verzameling I oneindig kan zijn, terwijl dat bij doorsneden niet is toegestaan.

In dit verslag wordt aan de hand van voorbeelden het gedrag van compacte topologische ruimten aangekaart dat indruist tegen de intuïtie die door compacte metrische ruimten wel wordt ondersteund.

1.3.1 Enkele definities en opmerkingen

Definities

Omdat een aantal definities niet in Bruin (2017) staat, maar toch in ieder hoofdstuk van dit verslag terugkomt, komt deze nu aan bod.

Een topologische ruimte X is *separabel* als deze een aftelbare, dichte deelverzameling $D \subseteq X$ heeft.

Een topologische ruimte X *voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma* als ieder element $x \in X$ een aftelbare omgevingsbasis heeft.

Een topologische ruimte X *voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma* als deze een aftelbare basis heeft.

Een open deelverzameling $U \subseteq X$ is een *basis open verzameling* als deze in de basis zit.

Opmerkingen

De termen *lokale basis* en *omgevingsbasis* worden beide gebruikt, maar betekenen hetzelfde.

Formeel moet bij ieder open verzameling A aangegeven worden in welke verzameling A open is. Dit wordt echter niet altijd gedaan. Er wordt vaak geschreven ' $A \subseteq X$ is open' in plaats van ' A is open in X '. En mocht er slechts staan A is open, dan mag er vanuit worden gegaan dat A open is in een genoemde verzameling die A omvat.

De definitie van een *Hausdorff-ruimte* is bekend. Deze term heeft echter ook een bijvoeglijk naamwoord. ' X is een Hausdorff-ruimte' is equivalent met ' X is Hausdorff'.

Ook is het nog nodig om te noemen dat als er geen specifieke topologie wordt gedefinieerd op een ruimte, deze dan de Euclidische topologie heeft. Behalve als de ruimte $\{0, 1\}$ is, dan wordt de discrete topologie verondersteld. En als de ruimte een productruimte is, dan heeft deze de producttopologie, tenzij anders gedefinieerd.

Tot slot is het nog handig om op te merken dat bij het bewijzen van de compactheid van een ruimte er altijd vanuit mag worden gegaan dat de gegeven open overdekking bestaat uit basis open verzamelingen. Dit wordt ondersteund door het volgende Lemma.

Lemma 1.3.1. *Laat X een ruimte zijn en $\mathcal{U}$ een willekeurige open overdekking van X en $\mathcal{U}'$ een willekeurige open overdekking van X bestaande uit basis open verzamelingen. Als $\mathcal{U}'$ een eindige deel overdekking heeft, dan heeft $\mathcal{U}$ dat ook.*

Bewijs. We nemen aan dat iedere willekeurige $\mathcal{U}'$ een eindige deeloeverdekking heeft. Stel nu dat er is een open overdekking $\mathcal{U}$ van X zodanig dat $\mathcal{U}$ geen eindige deeloeverdekking heeft. Merk op dat voor iedere $x \in X$ er een $U_x \in \mathcal{U}$ is, zodanig dat $x \in U_x$. Nu is er een basis open omgeving U'_x van x zodanig dat $U'_x \subseteq U_x$. Merk op dat uit de aanname volgt dat $\{U'_x\}_{x \in X}$ een eindige deeloeverdekking heeft. Hieruit volgt direct dat $\mathcal{U}$ ook een eindige deeloeverdekking heeft. We hebben een tegenspraak afgeleid. En dus moet wel gelden dat alle open overdekkingen $\mathcal{U}$ een eindige deeloeverdekking hebben. $\square$

Hoofdstuk 2

Meetkundige voorbeelden

In dit hoofdstuk zullen vier relatief eenvoudige voorbeelden van compacte topologische ruimten aan de orde komen. De Dubbele Cirkel, het Lexicografisch geordende vierkant en de Dubbele Pijl zijn voorbeelden van compacte Hausdorff-ruimten waar een simpel geometrisch figuur de onderliggende verzameling is en de bijbehorende topologie bijzonder is. De Helly ruimte heeft een al wat complexere onderliggende ruimte, maar een relatief eenvoudige topologie.

Het overkoepelende thema voor deze topologische ruimten is dat ze weliswaar lijken op compacte metrische ruimten in sommige opzichten, maar zich toch heel anders gedragen. Ze hebben allemaal een gewicht dat relatief groot is. Hier zal per voorbeeld meer in detail op worden ingegaan.

2.1 Dubbele Cirkel

Deze topologische ruimte is in 1922 gedefinieerd door Paul Urysohn en Paul Alexandroff toen zij onderzoek deden naar compacte topologische ruimten. In 1929, vijf jaar na de dood van Urysohn, heeft Alexandroff gebaseerd op het onderzoek samen met Urysohn *Mémoire sur les espaces topologiques compacts* Alexandroff, P. en Urysohn, P. (1929) uitgegeven, waar zelfs nog een originele schets van de ruimte in te vinden is.

In *Counterexamples in Topology* van Steen en Seebach Steen, L.A. en Seebach, J.A. (1978) is bovendien een overzicht te vinden van eigenschappen van de Dubbele Cirkel.

2.1.1 Definitie

De onderliggende verzameling

Definieer de concentrische cirkels: $C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = i^2\}$ met $i \in \mathbb{R}$. De onderliggende verzameling is $X = C_1 \cup C_2$.

Merk op dat $X \subset \mathbb{R}^2$, toch zullen de punten in X vanaf nu worden aangeduid met één variabele.

De topologie

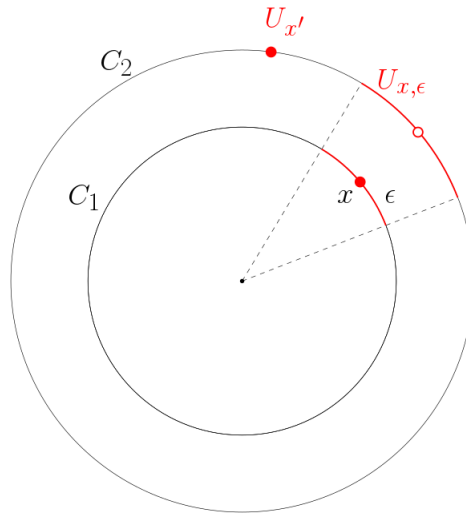
Definieer de natuurlijke afbeelding

$$\begin{aligned} f : C_1 &\rightarrow C_2 \\ x &\mapsto 2 \cdot x \end{aligned}$$

Voor $x \in C_1$ definieer: $O_{x,\epsilon}$ is het open boog interval met x als middelpunt waarbij Euclidische afstand van x tot de uiteinden ϵ is. Een basis open omgeving van $x \in C_1$ is nu:

$$U_{x,\epsilon} = O_{x,\epsilon} \cup (f(O_{x,\epsilon}) \setminus \{f(x)\})$$

Definieer voor alle $x \in C_2$ als open omgeving: $U_x = \{x\}$. Met andere woorden: alle punten in C_2 zijn geïsoleerde punten.



Figuur 2.1: Schets Dubbele Cirkel met een voorbeeld van de basis open omgevingen van $x \in C_1$ en $x' \in C_2$

2.1.2 Eigenschappen

Hausdorff-ruimte

Lemma 2.1.1. *De Dubbele Cirkel is een Hausdorff-ruimte.*

Bewijs. Neem $x, y \in X$ zodanig dat $x \neq y$. Onderscheid de volgende gevallen:

- $x, y \in C_1$
Merk op dat C_1 met de deelruimtetopologie de Euclidische topologie op C_1 geeft. Hieruit volgt dat als $x \neq y$ er een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat open omgevingen $O_{x,\epsilon}$ en $O_{y,\epsilon}$ disjunct zijn. Dus $U_{x,\epsilon}$ en $U_{y,\epsilon}$ zijn ook disjunct.
- $x, y \in C_2$
Merk op dat x, y geïsoleerde punten zijn wegens de gedefinieerde topologie. Nu volgt dus uit $x \neq y$ dat x en y disjuncte open omgevingen zijn van x en y respectievelijk.
- $x \in C_1, y \in C_2$
Maak opnieuw onderscheid uit de volgende gevallen:
 - $f(x) = y$
Merk nu op dat wegens de definitie van de topologie voor iedere $\epsilon > 0$ geldt dat $U_{x,\epsilon} \cap \{y\} = \emptyset$, dus geldt dat $U_{x,\epsilon}$ en $\{y\}$ open omgevingen zijn van x en y respectievelijk.

- $f(x) \neq y$ Beschouw $y' = f^{-1}(y) \in C_1$. Omdat $f(x) \neq y$ volgt $y' \neq x$, dus volgt uit dezelfde redenering als bij het eerste bullet dat er een $\epsilon_1 > 0$ bestaat zodanig dat de open omgevingen O_{x,ϵ_1} en O_{y',ϵ_1} disjunct zijn. Neem nu U_{x,ϵ_1} als open omgeving van x en y als open omgeving van y . Deze open omgevingen zijn nu ook disjunct.

Concludeer nu dat alle gevallen van $x, y \in X$ zijn beschouwd en er dus kan worden geconcludeerd dat x, y disjuncte open omgevingen hebben in X en X dus een Hausdorff-ruimte is. $\square$

Compactheid

Lemma 2.1.2. *De Dubbele Cirkel is compact.*

Bewijs. Om te bewijzen dat X compact is, is het weer belangrijk op te merken dat C_1 met de deelruimte topologie van X de Euclidische topologie op C_1 geeft. Dus de deelruimte C_1 van X is compact.

Gegeven een open overdekking $\mathcal{U}$ van X . Beschouw nu de familie $\{O_{x_i,\epsilon_i} : U_{x_i,\epsilon_i} \in \mathcal{U}\}$. Dit is een open overdekking van C_1 , omdat er geen andere open verzamelingen in $\mathcal{U}$ zijn die C_1 raken. Omdat deze deelruimte compact is, bestaat de eindige deelooverdekking $\{O_{x_i,\epsilon_i}\}_{i=1}^n$ van C_1 . Neem nu eerst de bijbehorende $\{U_{x_i,\epsilon_i}\}_{i=1}^n$. Deze overdekken geheel C_1 en bijna geheel C_2 . De punten van C_2 die niet worden overdekt zijn precies de punten $\{f(x_i)\}_{i=1}^n$. Omdat dit er eindig veel zijn en dit open verzamelingen zijn wegens de gedefinieerde topologie is het mogelijk de eindige deelooverdekking van X te definiëren:

$$\{U_{x_i,\epsilon_i}\}_{i=1}^n \cup \{f(x_i)\}_{i=1}^n$$

Dus iedere open overdekking van X heeft een eindige deelooverdekking en X is dus compact. $\square$

Separabiliteit

Hier gaat deze ruimte zich onderscheiden van compacte metrische ruimten. Wegens Stelling 1.2.1 geldt namelijk dat als een metrische ruimte compact is, deze ook separabel moet zijn. De Dubbele Cirkel is een voorbeeld van een compacte topologische ruimte, waarvoor dit niet geldt.

Lemma 2.1.3. *De Dubbele Cirkel is niet separabel.*

Bewijs. Beschouw de familie $\{\{x\} : x \in C_2\}$. Wegens de gedefinieerde topologie geldt dat dit een familie van open verzamelingen is. Dus X heeft een disjuncte familie van overaftelbaar veel open verzamelingen. Als X een aftelbare, dichte deelverzameling had, dan zou deze al deze overaftelbaar veel verzamelingen moeten snijden. Dit is onmogelijk om met aftelbaar veel elementen te doen, dus X is niet separabel. $\square$

Het eerste aftelbaarheidsaxioma

Lemma 2.1.4. *De Dubbele Cirkel voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Omdat ieder $x \in C_2$ een geïsoleerd punt is, is het triviaal dat deze punten een aftelbare lokale basis hebben, de lokale basis heeft namelijk maar één element namelijk het punt zelf.

Het is dus voldoende om te laten zien dat ieder punt $x \in C_1$ een aftelbare lokale basis heeft. Kies hiervoor $x \in C_1$ willekeurig en merk op dat dit equivalent is met laten zien dat er een aftelbare familie van open omgevingen van x is, zeg $\{U_x^1, U_x^2, \dots\}$, zodanig dat voor iedere open omgeving van x , zeg U_x , er een $i \in \mathbb{N}$ is zodanig dat $U_x^i \subseteq U_x$.

Definieer nu $\{U_{x,\frac{1}{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ als de aftelbare familie van open omgevingen van x .

Merk op dat voor iedere open omgeving U_x van x er een $\epsilon > 0$ is, zodanig dat $U_{x,\epsilon} \subseteq U_x$. We

mogen dus aannemen dat U_x een basis open omgeving is van de vorm $U_{x,\epsilon}$. Kies nu $i > \frac{1}{\epsilon}$, dan volgt dat $\frac{1}{i} < \epsilon$ en dus $U_{x,\frac{1}{i}} \subset U_{x,\epsilon}$. Sterker nog dit geldt voor alle $n > i$. Dus onze familie voldoet en we kunnen zeggen dat iedere $x \in C_1$ ook een aftelbare lokale basis heeft. Dus nu concluderen we dat alle $x \in X$ een aftelbare lokale basis hebben en dus voldoet X aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. $\square$

Het tweede aftelbaarheidsaxioma

Ook hier onderscheidt de Dubbele Cirkel zich weer van compacte metrische ruimten. Wegens Stelling 1.2.3 geldt namelijk dat deze altijd een aftelbare basis hebben en daarmee dus voldoen aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. Nu laten we zien dat de Dubbele Cirkel dat niet doet.

Lemma 2.1.5. *De Dubbele Cirkel voldoet niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Weer beschouwen we de punten $x \in C_2$. Merk op dat voor al deze punten geldt dat $\{x\}$ open is. Als X een aftelbare basis had, dan zou deze dus alle punten $x \in C_2$ moeten bevatten. Dit zijn er echter overaftelbaar veel, dus kan de basis nooit aftelbaar zijn. $\square$

2.2 Lexicografisch geordend vierkant

Ook deze ruimte kan worden teruggevonden in *Mémoire sur les espaces topologiques compacts* van Alexandroff en Urysohn Alexandroff, P. en Urysohn, P. (1929), wederom inclusief originele schets.

Ook in *Counterexamples in Topology* van Steen en Seebach Steen, L.A. en Seebach, J.A. (1978) staat een overzicht van eigenschappen van deze ruimte.

2.2.1 Definitie

De onderliggende verzameling

De onderliggende verzameling is $X = [0, 1] \times [0, 1]$. De verzameling is *lexicografisch geordend*. Deze binaire relatie op X wordt als volgt gedefinieerd. Voor alle $(x, y), (u, v) \in X$ geldt:

$$(x, y) \prec (u, v) \iff \begin{cases} x < u & \text{of} \\ x = u \wedge y < v \end{cases}$$

Bovendien geldt precies zoals verwacht dat $(x, y) \preceq (u, v)$ als en slechts als $(x, y) \prec (u, v)$ of $(x, y) = (u, v)$.

De topologie

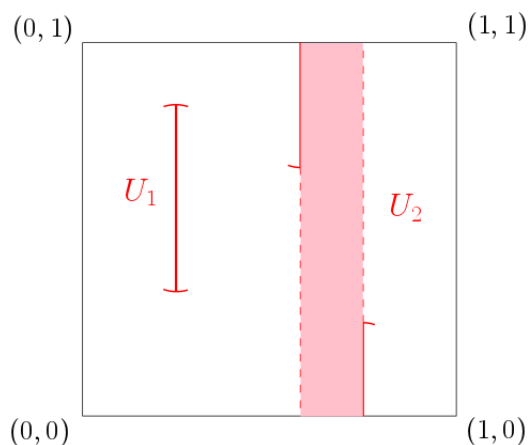
De topologie is de orde-topologie. Om deze topologie te mogen toepassen op een verzameling moet deze totaal geordend zijn door de binaire relatie ' $\preceq$ '. Het bewijs dat $(X, \preceq)$ inderdaad een totaal geordende ruimte is wordt overgelaten aan de lezer. Vanaf nu zullen de punten in X , ondanks dat $X \subset \mathbb{R}^2$, worden aangeduid met één variabele.

Definieer *open intervallen* in X als deelverzamelingen van X van de volgende vorm:

- $(a, b) = \{x \in X : a \prec x \prec b\}$
- $(a, \rightarrow) = \{x \in X : a \prec x\}$

- $(\leftarrow, b) = \{x \in X : x \prec b\}$
- $(\leftarrow, \rightarrow) = X$

De open intervallen vormen een basis voor de orde-topologie. Merk, om dit intuïtief te begrijpen, op dat de Euclisische topologie op de reële getallen ook de orde-topologie is met de totale ordening ' $\leq$ '.



Figuur 2.2: Schets Lexicografisch geordend vierkant met twee mogelijke open verzamelingen U_1 en U_2

2.2.2 Eigenschappen

Hausdorff-ruimte

Lemma 2.2.1. *Het Lexicografisch geordend vierkant is een Hausdorff-ruimte.*

Bewijs. Gegeven $x, y \in X$ met $x \neq y$. Omdat X totaal geordend is door $\preceq$ volgt uit $x \neq y$ dat $x \prec y$ of $y \prec x$. Zonder verlies van algemeenheid kan dus worden aangenomen dat $x \prec y$. Merk nu op dat de standaard ordening op interval $[0, 1]$ *dicht* is, dat wil zeggen tussen elk tweetal verschillende punten bestaat een derde punt.

Hieruit volgt nu dat er een $s \in X$ bestaat zodanig dat $x \prec s \prec y$. Wegens de definitie van de open intervallen, kunnen nu de open, disjuncte omgevingen van x, y worden gedefinieerd: $U_x = (\leftarrow, s)$ en $U_y = (s, \rightarrow)$. Omdat dit geldt voor iedere $x, y \in X$ met $x \neq y$ volgt dat X een Hausdorff-ruimte is. $\square$

Compactheid

Om de te bewijzen dat het Lexicografisch geordend vierkant compact is, maken we gebruik van een algemene stelling voor totaal geordende ruimten met de orde-topologie. Het is ook mogelijk om een bewijs te geven zonder deze stelling, wat uiteraard mooier zou zijn. Omdat het bewijs dat de Dubbele Pijl ook een compacte ruimte is echter van dezelfde eigenschap afhangt, is er echter toch voor gekozen om de algemene stelling uit Engelking (1989) te gebruiken.

Stelling 2.2.2. *Een totaal geordende verzameling X met de orde-topologie is compacte topologische ruimte als en slechts als iedere deelverzameling $A \subseteq X$ een supremum en een infimum heeft.*

Lemma 2.2.3. *Het Lexicografisch geordend vierkant is compact.*

Bewijs. Omdat X een totaal geordende verzameling is en de topologische ruimte gedefinieerd is met de orde-topologie volgt uit Stelling 2.2.2 dat het voldoende is om te laten zien dat iedere deelverzameling $A \subseteq X$ een supremum en een infimum heeft. Om dit te bewijzen laten we zien dat A een supremum heeft.

Laat

$$\begin{aligned}\pi_x : X &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto x\end{aligned}$$

een projectiefunctie zijn. Omdat $\pi_x(A) \subseteq [0, 1]$ een deelverzameling is van het eenheidsinterval met de Euclidische topologie, weten we dat $\sup(\pi_x(A)) = \alpha$ bestaat. Nu onderscheiden we twee gevallen.

- $\{\alpha\} \times [0, 1] \cap A = \emptyset$
Dan geldt $\sup(A) = (\alpha, 0)$.
- $\{\alpha\} \times [0, 1] \cap A \neq \emptyset$
Omdat $\{\alpha\} \times [0, 1] \cap A \subseteq \{\alpha\} \times [0, 1]$ kunnen we weer zeggen dat dit een deelverzameling is van het eenheidsinterval met de Euclidische topologie. Dus $\sup(\{\alpha\} \times [0, 1] \cap A) = \beta$ bestaat. Nu geldt dat $\sup(A) = (\alpha, \beta)$.

Dus iedere deelverzameling $A \subseteq X$ heeft een supremum. Wegens de symmetrie van de ruimte volgt hier ook uit dat iedere $A \subseteq X$ een infimum heeft.

Nu kunnen we uit Stelling 2.2.2 concluderen dat X compact is. □

Separabiliteit

Net zoals bij de Dubbele Cirkel is dit waar het Lexicografisch geordend vierkant zich onderscheidt van compacte metrische ruimten wegens Stelling 1.2.1.

Lemma 2.2.4. *Het Lexicografische geordend vierkant is niet separabel.*

Bewijs. Definieer $U(x) = \{(x, y) \in X : \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}\}$. Dan geldt dat $\{U(x) : x \in [0, 1]\}$ een disjuncte familie is van overaftelbaar veel open verzamelingen. Als X een aftelbare, dichte deelverzameling had, dan zou deze al deze overaftelbaar veel verzamelingen moeten snijden. Dit is onmogelijk om met aftelbaar veel elementen te doen, dus X is niet separabel. □

Het eerste aftelbaarheidsaxioma

Lemma 2.2.5. *Het Lexicografisch geordend vierkant voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. In dit bewijs is het nodig om een element in X weer aan te duiden met twee variabelen. We nemen $(x, y) \in X$ en onderscheiden de volgende gevallen:

- $y = 0$
Nu vormt een familie van open basis omgevingen van de vorm U_2 in Figuur 2.2.1 een aftelbare omgevingsbasis voor (x, y) . Deze familie definiëren we als volgt

$$\{(x - \frac{1}{n}) \times [0, 1] \cup \{x\} \times [0, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$$

- $y = 1$

In dit geval is de redenering equivalent met $y = 0$, de aftelbare omgevingsbasis definiëren we als volgt

$$\left\{ \{x\} \times \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right) \cup \left(x, x + \frac{1}{n}\right) \times [0, 1] \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

- $0 < y < 1$

In dit geval bestaat de aftelbare omgevingsbasis uit basis open omgevingen van de vorm U_1 in Figuur 2.2.1. Deze definiëren we als volgt

$$\left\{ \{x\} \times \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Het wordt aan de lezer overgelaten om na te gaan dat dit daadwerkelijk omgevingsbasisen zijn. Dus ieder element $(x, y) \in X$ heeft een aftelbare omgevingsbasis en X voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. $\square$

Het tweede aftelbaarheidsaxioma

Wederom heeft het Lexicografisch vierkant dezelfde eigenschap als de Dubbele Cirkel en onderscheidt deze zich hiermee van compacte metrische ruimten wegens Stelling 1.2.3.

Lemma 2.2.6. *Het Lexicografisch geordend vierkant voldoet niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Merk op dat de in Lemma 2.2.4 disjunctie familie van overaftelbaar veel open verzamelingen $\{U(x) : x \in [0, 1]\}$ weer kan worden gebruikt in dit bewijs.

Als X wel een aftelbare basis zou hebben, zouden alle open verzamelingen uit deze familie bevat moeten zijn in de basis. Dit is een tegenstelling, omdat het er overaftelbaar veel zijn. $\square$

2.3 Dubbele Pijl

Deze ruimte wordt onder andere gedefinieerd in Hart, K.P. en van Mill, J. en Simon, P. (2013). Ze staat echter ook wel bekend als de *Alexandroff Double Arrow*, dus zal zeker ook al voor Alexanderoff bekend zijn geweest.

2.3.1 Definitie

De onderliggende verzameling

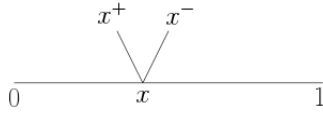
De dubbele pijl is een topologische deelruimte van het lexicografisch geordend vierkant. De onderliggende verzameling is gelijk aan $X = ([0, 1] \times \{0, 1\}) \setminus \{(0, 0), (1, 1)\} \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Het is ook een mogelijkheid om $\{(0, 0), (1, 1)\}$ niet weg te laten. Toch is hier wel voor gekozen, omdat wegens de definitie van de topologie dit geïsoleerde punten zouden zijn.

Een andere manier om deze verzameling op te vatten is om het normaal geordende eenheidsinterval $[0, 1]$ te beschouwen en iedere $x \in (0, 1)$ te 'splitsen' in x^- en x^+ . Merk op dat de eindpunten van het eenheidsinterval niet worden gesplitst om geïsoleerde punten te voorkomen. Voor het begrip zouden we kunnen stellen dat de functie die de ruimte splitst $0, 1 \in [0, 1]$ naar respectievelijk $0^+, 1^- \in X$ stuurt. In de ordening geldt dat $x^- < x^+$.

Van deze opvatting komt de alternatieve naam *Split Interval*.

In het vervolg van deze sectie zullen we deze twee opvattingen van de ruimte afwisselen om de bewijzen zo duidelijk mogelijk te maken. Wel wordt steeds aangegeven welke van de opvattingen

wordt beschouwd. Naar de eerst genoemde opvatting wordt gerefereerd als *deelruimte van het Lexicografisch geordend vierkant* en naar de tweede opvatting wordt gerefereerd als *Split Interval*.



Figuur 2.3: Schets van hoe het splitsen van een element moet worden opgevat

De topologie

De bijbehorende topologie is de deelruimte topologie van de orde-topologie gedefinieerd in Sectie 2.2.1 op X .

2.3.2 Eigenschappen

Hausdorff-ruimte

We beschouwen de Dubbele Pijl als deelruimte van het Lexicografische geordend vierkant. Nu bewijzen we dat X een Hausdorff-ruimte is aan de hand van het volgende lemma.

Lemma 2.3.1. *De deelruimte van een Hausdorff-ruimte is weer een Hausdorff-ruimte.*

Bewijs. Laat X een Hausdorff-ruimte zijn, dan bestaan er voor iedere $x, y \in X$ open disjuncte omgevingen U_x, U_y van x, y respectievelijk. Zij $X' \subseteq X$ nu een topologische deelruimte van X . Neem $x', y' \in X'$. Wegens de definitie van de deelruimtetopologie volgt dat $U_{x'} = U_x \cap X'$ en $U_{y'} = U_y \cap X'$ nu open, disjuncte omgevingen zijn van x', y' respectievelijk in X' . Dus X' is een Hausdorff-ruimte. $\square$

Lemma 2.3.2. *De Dubbele Pijl is een Hausdorff-ruimte.*

Bewijs. Wegens Lemma 2.2.1 en het feit dat de Dubbele Pijl is gedefinieerd als een deelruimte van het Lexicografische georderende vierkant, volgt uit Lemma 2.3.1 dat de Dubbele Pijl ook een Hausdorff-ruimte is. $\square$

Compactheid

We beschouwen de Dubbele Pijl als het Split Interval.

Lemma 2.3.3. *De Dubbele Pijl is compact.*

Bewijs. Omdat X een totaal geordende verzameling is en de topologische ruimte gedefinieerd is met de orde-topologie volgt uit Stelling 2.2.2 dat het voldoende is om te laten zien dat iedere deelverzameling $A \subseteq X$ een supremum en een infimum heeft. Om dit te bewijzen laten we zien dat A een supremum heeft.

Definieer

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

door $f(x^+) = f(x^-) = x$. Deze afbeelding is continu en orde bewarend. Omdat $f(A) \subseteq [0, 1]$ een deelverzameling is van het eenheidsinterval met de Euclidische topologie, weten we dat $\sup(f(A)) = t$ bestaat. Nu onderscheiden we twee gevallen.

- $t^+ \in A$, dan volgt $\max(A) = t^+$
- $t^+ \notin A$, dan volgt $\sup(A) = t^-$

Dus iedere deelverzameling $A \subseteq X$ heeft een supremum. Wegens de symmetrie van de ruimte volgt hier ook uit dat iedere $A \subseteq X$ een infimum heeft.

Nu kunnen we inderdaad concluderen uit Stelling 2.2.2 dat X compact is. $\square$

Separabiliteit

We beschouwen de Dubbele Pijl als deelruimte van het Lexicografisch geordend vierkant.

Lemma 2.3.4. *De Dubbele Pijl is separabel.*

Bewijs. Definieer $\{(x, y) \in X : y \in \{0, 1\}, x \in \mathbb{Q}\}$. Omdat de rationale getallen aftelbaar zijn wegens een stelling uit Lay (2015) en $\{0, 1\}$ ook aftelbaar is volgt dat dit een aftelbare verzameling is. Bovendien geldt dat deze verzameling dicht is in X omdat $\mathbb{Q}$ dicht is in $\mathbb{R}$. Dus X is separabel. $\square$

Het eerste aftelbaarheidsaxioma

We beschouwen de Dubbele Pijl als Split Interval.

Lemma 2.3.5. *De Dubbele Pijl voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Neem een willekeurig element uit X . Dan geldt dat dit element van de vorm x^- of x^+ is, met $x \in [0, 1]$. Hier onderscheiden we de twee gevallen.

- Element is van de vorm x^- .
Nu geldt dat $\{(x - \frac{1}{n})^-, x^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ een aftelbare lokale basis is.
- Element is van de vorm x^+ .
Nu geldt dat $\{[x^+, (x + \frac{1}{n})^+]\}_{n \in \mathbb{N}}$ een aftelbare lokale basis is.

Dus kunnen we concluderen dat ieder punt een aftelbare lokale basis heeft en X dus inderdaad voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

Formeel moet worden opgemerkt dat voor punten dichtbij 0 of 1 geldt dat een omgeving met een relatief kleine $n \in \mathbb{N}$ ervoor kan zorgen dat de omgeving buiten X valt. Om het bewijs leesbaar te houden is er echter voor gekozen om dit te negeren, omdat het evident is. $\square$

Het tweede aftelbaarheidsaxioma

We beschouwen de Dubbele Pijl als Split Interval.

Dit is waar de Dubbele Pijl zich onderscheidt van compacte metrische ruimten wegens Stelling 1.2.3. Merk op dat dit anders is dan bij de Dubbele Cirkel en het Lexicografisch geordend vierkant waar de ruimte ook niet separabel was.

Lemma 2.3.6. *De Dubbele Pijl voldoet niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Laat $\mathcal{B}$ een basis zijn van de topologie op X .

Neem voor iedere $a \in X$ een $B_a \in \mathcal{B}$ met $a^+ \in B_a \subseteq [a^+, 1^-]$. Nu definiëren we de volgende afbeelding

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathcal{B} \\ a &\mapsto B_a \end{aligned}$$

We gaan laten zien dat deze afbeelding injectief is. Neem $b, c \in [0, 1]$ met $b \neq c$, dan kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $c > b$. Omdat $B_c \subseteq [c^+, 1^-]$ en $b \notin [c^+, 1^-]$ volgt dat $b \notin B_c$. Maar $b \in B_b$, dus $B_b \neq B_c$. Dus f is inderdaad injectief.

Hieruit volgt dat $|\mathcal{B}| \geq |[0, 1]|$. Dus de Dubbele Pijl heeft geen aftelbare basis en voldoet niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. □

2.4 De Helly Ruimte

De Helly Ruimte, genoemd naar Eduard Helly, kan worden gevonden in *Counterexamples in Topology* van Steen en Seebach Steen, L.A. en Seebach, J.A. (1978).

2.4.1 Definitie

De onderliggende verzameling

Definieer eerst de functieruimte I^I van alle mogelijk functies van de vorm $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ en rust deze uit met de producttopologie. De onderliggende verzameling van de Helly Ruimte is de topologische deelruimte $X \subset I^I$ van alle monotoon stijgende functies, dat wil zeggen de functies f waarvoor geldt:

$$\forall x, y \in [0, 1] : [x \leq y \implies f(x) \leq f(y)]$$

De topologie

De bijbehorende topologie is de deelruimtetopologie van de producttopologie op I^I , op X .

2.4.2 Eigenschappen

Hausdorff-ruimte

Lemma 2.4.1. *De Helly Ruimte is een Hausdorff-ruimte.*

Bewijs. Omdat het product van Hausdorff-ruimten weer een Hausdorff-ruimte is en I een Hausdorff-ruimte is, volgt dat I^I een Hausdorff-ruimte is. Omdat X een topologische deelruimte is van I^I en een deelruimte van Hausdorff-ruimten weer een Hausdorff-ruimte is, kunnen we dus concluderen dat X een Hausdorff-ruimte is. □

Compact

Lemma 2.4.2. *De Helly Ruimte is compact.*

Bewijs. Omdat $I \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensde deelverzameling is van $\mathbb{R}$ volgt uit de stelling van Heine-Borel dat $I \subset \mathbb{R}$ compact is. Wegens de stelling van Tychonoff volgt nu dat I^I ook compact is. Omdat $X \subset I^I$ voldoet het om aan te tonen dat X gesloten is in I^I . Neem nu $f \in I^I \setminus X$, dan volgt dat er een $x, y \in [0, 1]$ zijn, zodanig dat $x < y$ en $f(x) > f(y)$. Nu kiezen we $\epsilon < \frac{1}{2}(f(x) - f(y))$, zodat we de volgende disjuncte open omgevingen van $f(x)$ en $f(y)$ kunnen definiëren: $U_{f(x)} = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ en $U_{f(y)} = (f(y) - \epsilon, f(y) + \epsilon)$. Merk nu op dat $\pi_x^{-1}(U_{f(x)}) \cap \pi_y^{-1}(U_{f(y)})$ een open omgeving van f is die bevat is in $I^I \setminus X$. Dus $I^I \setminus X$ is open en X dus gesloten. Hieruit kunnen we concluderen dat X inderdaad compact is. □

Separabiliteit

Lemma 2.4.3. *De Helly Ruimte is separabel.*

Bewijs. Neem twee stijgende rijtjes rationale getallen $(p_1, \dots, p_n)$ en $(q_1, \dots, q_n)$ met $0 \leq p_i, q_i \leq 1$ voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$ en $p_0 = 0$ en $p_n = 1$. Definieer nu bij dit paar rijtjes de gebroken, rationale functie $f : I \rightarrow I$ stuksgewijs lineair en door de punten $((p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$. Omdat het kiezen van de rijtjes een eindige greep getallen uit de aftelbare verzameling $\mathbb{Q}^2$ is en er bij ieder rijtje een unieke functie hoort, geeft dit een aftelbare verzameling elementen $\{f_1, f_2, \dots\}$ met $f_i \in X$ voor alle $i \in \mathbb{N}$.

Nu willen we alleen nog aantonen dat deze verzameling dicht is in X .

Neem hiervoor een willekeurige basis open verzameling $U \subseteq X$. Het is voldoende om aan te tonen dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $f_k \in U$.

Neem een $f \in U$, dan gaan we deze functie zo muteren dat zij kan worden voortgebracht door twee rationale rijtjes en nog steeds bevat is in U .

Kies nu $V \subseteq I^I$ zodanig dat $V \cap X = U$. Dan is V een open omgeving van f in I^I . Nu is er een basis open omgeving van f geheel bevat in V . Wegens de producttopologie op I^I weten we dat deze basis open omgeving de volgende vorm heeft:

$$U_{d_1} \times \dots \times U_{d_n} \times I^{I \setminus \{1, \dots, n\}}$$

met $U_i \subseteq I$ open en $f(d_i) \in U_{d_i}$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Omdat $f \in X$, mogen we ook aannemen dat als $d_1 \leq \dots \leq d_n$ (dit nemen we aan zonder verlies van algemeenheid), dan $f(d_1) \leq \dots \leq f(d_n)$. Nu nemen we d_j met $j \in \{1, \dots, n\}$ en onderscheiden we de volgende gevallen:

- $d_j \in \mathbb{Q}$
Voor het open interval $U_{d_j} \subset I$ geldt dat er een $s_j \in \mathbb{Q}$ bestaat zodanig dat $s_j \in U_{d_j}$. Kies deze $s_j \in U_{d_j}$ zodanig dat f monotoon stijgend blijft.
- $d_j \notin \mathbb{Q}$
Nu kunnen we rationale getallen $x_j \in (d_{j-1}, d_j)$ en $y_j \in (d_j, d_{j+1})$ vinden met rationale functiewaarden $f(x_j) = p_j$ en $f(y_j) = t_j$ zodanig dat de lijn door $\langle x_j, p_j \rangle$ en $\langle y_j, t_j \rangle$ het interval U_{d_j} snijdt in s_j en de functie nog steeds monotoon stijgend is.

Merk op dat we nu twee rijtjes rationale getallen kunnen construeren. Voor iedere $d_j \in \mathbb{Q}$ voegen we d_j toe aan het rijtje dat we P noemen en s_j aan het rijtje dat we Q noemen. Voor iedere $d_j \notin \mathbb{Q}$ voegen we x_j, y_j toe aan P en p_j, t_j aan Q .

Nu kunnen we zeggen dat voor de functie f_k die voortkomt uit de eindige rijtjes rationale getallen P en Q gelijk is aan de mutatie van f die bovendien nog steeds binnen U ligt.

Dus iedere niet-lege, open deelverzameling $U \subseteq X$ bevat een functie uit de verzameling $\{f_1, f_2, \dots\}$. Dus we hebben inderdaad een aftelbare, dichte deelverzameling in X gevonden en de Helly Ruimte is separabel. $\square$

Het eerste aftelbaarheidsaxioma

Lemma 2.4.4. *De Helly Ruimte voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Om te laten zien dat X voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma construeren we voor $f \in X$ een aftelbare familie open omgevingen $\{U(f)^1, U(f)^2, \dots\}$ zodanig dat er voor ieder open omgeving $U(f)$ van f een $i \in \mathbb{N}$ is zodanig dat $U(f)^i \subseteq U(f)$.

We onderscheiden twee gevallen:

- f is continu

Wegens de definitie van de topologie weten we dat een basis open verzameling die f bevat van de volgende vorm is $U = \prod_{i \in I} U_i = \prod_{i \in F} U_i \times \prod_{i \in I \setminus F} U_i$ met $U_i \neq I$ voor alle $i \in F$ en $F \subset I$ een eindige verzameling. Nu definiëren we $U_i = I$ voor alle $i \in I \setminus \mathbb{Q}$. We kiezen voor $F \subset I$ steeds een eindige deelverzameling van $I \cap \mathbb{Q}$. Voor iedere F definiëren we $U_{i,n} = (f(i) - \frac{1}{n}, f(i) + \frac{1}{n})$ voor alle $i \in F$. Nu geldt dat $U = I^{I \setminus F} \times \prod_{i \in F} U_{i,n}$. Bij ieder $F \subset I \cap \mathbb{Q}$ hoort nu een aftelbare familie open omgevingen wordt nu $\{I^{I \setminus F} \times \prod_{i \in F} U_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Omdat het kiezen van F een eindige greep is uit de aftelbare verzameling $I \cap \mathbb{Q}$, zijn er ook aftelbaar veel mogelijkheden voor F . De familie van open omgevingen $\{I^{I \setminus F} \times \prod_{i \in F} U_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}, F \subset I \cap \mathbb{Q}}$ is een aftelbare omgevingsbasis.

- f is niet continu

Merk op dat de verzameling van discontinuïteitspunten $D_f \subset I$ aftelbaar is. Volg nu dezelfde redenering als hierboven, behalve dat F een eindige deelverzameling wordt van $(\mathbb{Q} \cap I) \cup D_f$.

Iedere $f \in X$ heeft dus een aftelbare omgevingsbasis en X voldoet dus aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

Formeel moet worden opgemerkt dat voor $f(i)$ dichtbij 0 of 1 geldt dat een omgeving met een relatief kleine $n \in \mathbb{N}$ ervoor kan zorgen dat de omgeving buiten I^I valt. Om het bewijs leesbaar te houden is er echter voor gekozen om dit te negeren, omdat het evident is. $\square$

Het tweede aftelbaarheidsaxioma

Net zoals de Dubbele Pijl is dit waar de Helly Ruimte zich onderscheidt van de compacte metrische ruimten wegens Stelling 1.2.3. Wederom is dit anders dan bij de eerste twee voorbeelden omdat de Helly Ruimte wel separabel is.

Lemma 2.4.5. *De Helly Ruimte voldoet niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Definieer voor iedere $s \in (0, 1)$ de functie f_s door

$$f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < s \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = s \\ 1 & \text{als } x > s \end{cases}$$

Nu is de bewering dat $\{f_s\}_{s \in (0,1)}$ een discrete deelruimte is. Om dit aan te tonen willen we laten zien dat er voor iedere $t \in (0, 1)$ een open verzameling $U_t \subseteq X$ is zodanig dat $f_t \in U_t$ en $f_s \notin U_t$ voor iedere $s \in (0, 1) \setminus \{t\}$.

Kies $t \in (0, 1)$ vast en laat $U_t = \pi_t^{-1}((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$ een basis open omgeving zijn van f_t . Merk op dat triviaal uit de definitie van f_s volgt dat $f_s \notin U_t$ voor alle $s \in (0, 1) \setminus \{t\}$.

Nu volgt dat X dus een overaftelbare discrete deelruimte heeft. Hieruit volgt dat X geen aftelbare basis kan hebben, omdat iedere hierboven gedefinieerde U_t in de basis zou moeten zitten, maar er overaftelbaar veel $t \in (0, 1)$ zijn. Dus X voldoet niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. $\square$

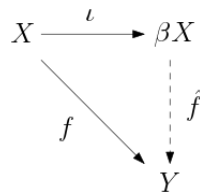
Hoofdstuk 3

Čech-Stone compactificatie van $\mathbb{N}$

De eerst drie topologische ruimten uit het vorige hoofdstuk zijn deelverzamelingen van ruimten van de volgende vorm: $[0, 1]^n$ met $n \in \mathbb{N}$. De Helly Ruimte is dat niet, maar heeft als deelverzameling van I^I zeker wel een meetkundig aspect. We kunnen vreemde topologieën op deze ruimten definiëren om eigenschappen aan te wijzen die indruisen tegen de intuïtie ontwikkeld bij compact metrische ruimten. Wat deze ruimten echter nog steeds gemeen hebben met de compacte metrische ruimten is dat ze een enigszins meetkundig aspect dragen. Hierdoor kunnen we nog steeds uitgaan van onze intuïtie als het aankomt op lijntjes, krommen, etc. Een gevolg hiervan is dat alle topologische ruimten uit het vorige hoofdstuk een convergent rijtje bevatten. Het volgende tegenvoorbeeld is nog radicaler aangezien deze geen meetkundige basis heeft en geen convergent rijtje bevat.

3.1 Definitie

In het algemeen geldt dat de *Čech-Stone compactificatie* Hart, K.P. en Nagata, J. en Vaughan, J.E. (2003) van een volledig reguliere, Hausdorff-ruimte X gelijk is aan de ruimte βX met een inbedding $\iota : X \rightarrow \beta X$, waar βX een compacte Hausdorff-ruimte is zodanig dat voor iedere continue afbeelding van X naar een compacte Hausdorff-ruimte Y , zeg $f : X \rightarrow Y$, er een unieke uitbreiding $\hat{f} : \beta X \rightarrow Y$ bestaat. Dit wordt ook wel de *universele eigenschap* van deze



Figuur 3.1: Dit diagram geldt wegens de universele eigenschap van $\beta\mathbb{N}$

compactificatie genoemd.

Beschouw de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ met de discrete topologie. Omdat dit een discrete, oneindige ruimte is, is het triviaal dat deze ruimte niet compact is. Wel geldt dat de ruimte Hausdorff en volledig regulier is omdat deze discreet is. Nu volgt dus dat de Čech-Stone compactificatie van $\mathbb{N}$ bestaat. We kunnen echter van $\beta\mathbb{N}$ een mooie, directe beschrijving geven.

Eerst hebben we echter nog een paar definities nodig. Een *filter* op $\mathbb{N}$ is een deelverzameling $\mathfrak{F} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die voldoet aan de volgende eisen

1. $\mathbb{N} \in \mathfrak{F}$ en $\emptyset \notin \mathfrak{F}$

2. als $B, C \in \mathfrak{F}$, dan $B \cap C \in \mathfrak{F}$
3. als $B \in \mathfrak{F}$, $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $B \subseteq C$, dan $C \in \mathfrak{F}$

De verzameling van filters op $\mathbb{N}$ noemen we $\mathcal{F}(\mathbb{N})$.

Een *ultrafilter* is een filter $\mathfrak{U}$ zodanig dat er geen filter $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ bestaat zodanig dat $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$. Een ultrafilter is met andere woorden dus een maximaal filter.

Het volgende lemma is een belangrijke eigenschap van ultrafilters die vaak wordt gebruikt in bewijzen om een tegenstelling aan te tonen. De eigenschap volgt uit het de maximaliteit van ultrafilters. De komende twee lemma's zijn terug te vinden in Comfort (2012).

Lemma 3.1.1. *Voor ieder ultrafilter $\mathfrak{U}$ op X en $A \subseteq X$ geldt $A \in \mathfrak{U}$ of $X \setminus A \in \mathfrak{U}$.*

Het *omgevingenfilter* van een element $n \in \mathbb{N}$ is $\mathfrak{F}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$. Merk op dat ieder omgevingenfilter een ultrafilter is.

Gegeven een familie van deelverzamelingen $\{A_i \subseteq \mathbb{N} : i \in I\}$. Als voor iedere eindige deelverzameling $J \subseteq I$ geldt dat $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$, dan voldoet deze familie aan de *eindige doorsnede eigenschap*.

Lemma 3.1.2. *Gegeven $\mathcal{A} = \{A_i \subseteq \mathbb{N} : i \in I\}$ die voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap, dan volgt dat $\mathcal{A}$ bevat is in een ultrafilter $\mathfrak{F}$.*

Nu kunnen we de Čech-Stone compactificatie van $\mathbb{N}$ definiëren. Deze ruimte heeft als onderliggende verzameling

$$\beta\mathbb{N} = \{\mathfrak{U} : \mathfrak{U} \text{ is een ultrafilter op } \mathbb{N}\}.$$

De topologie kan worden uitgedrukt in deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Om deze te definiëren, laten we voor iedere deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$

$$\langle A \rangle = \{\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathfrak{U}\}.$$

De familie $\mathcal{B} = \{\langle A \rangle : A \subseteq \mathbb{N}\}$ vormt een basis voor de topologie.

Nu kunnen we bepaalde eigenschappen van de basis open verzamelingen in $\beta\mathbb{N}$ bewijzen die later goed van pas zullen komen.

Lemma 3.1.3. *Voor iedere $A \subseteq \mathbb{N}$ geldt $\bar{A} = \langle A \rangle$.*

Bewijs. Neem $A \subseteq \mathbb{N}$. We zullen deze equivalentie bewijzen aan de hand van twee inclusies:

- $\bar{A} \subseteq \langle A \rangle$
Kies $\mathfrak{U} \in \bar{A}$ en neem aan dat $\mathfrak{U} \notin \langle A \rangle$. Dan geldt dat $A \notin \mathfrak{U}$, dus geldt wegens Lemma 3.1.1 dat $\mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{U}$. Hieruit volgt dat $\mathfrak{U} \in \langle \mathbb{N} \setminus A \rangle$. Ook hadden we aangenomen dat $\mathfrak{U} \in \bar{A}$. Dus iedere open omgeving van $\mathfrak{U}$ heeft een niet-lege doorsnede met A . Dus nu geldt $(\mathbb{N} \setminus A) \cap A \neq \emptyset$. Maar $(\mathbb{N} \setminus A) \cap A \subseteq (\mathbb{N} \setminus A) \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus A$, dus $\langle \mathbb{N} \setminus A \rangle \cap A = \emptyset$, wat een tegenspraak is. Dus geldt $\bar{A} \subseteq \langle A \rangle$.
- $\bar{A} \supseteq \langle A \rangle$
Neem een $\mathfrak{U} \in \langle A \rangle$, dan volgt dat $A \in \mathfrak{U}$. Stel nu dat $\mathfrak{U} \notin \bar{A}$. Dan is er een $B \in \mathfrak{U}$ zodanig dat $\langle B \rangle \cap A = \emptyset$. Maar omdat $A, B \in \mathfrak{U}$, geldt $A \cap B \neq \emptyset$. Dit is een tegenspraak.

□

Lemma 3.1.4. *De bovenstaande bewering op $A \subseteq \mathbb{N}$ heeft de volgende eigenschappen:*

- (i) $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$ en $\langle \mathbb{N} \rangle = \beta\mathbb{N}$
- (ii) Als $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, dan $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$
- (iii) $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$ en $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$
- (iv) $\langle \mathbb{N} \setminus A \rangle = \beta\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$
- (v) De volgende afbeelding is injectief

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow \mathcal{P}(\beta\mathbb{N}) \\ A &\mapsto \langle A \rangle \end{aligned}$$

- Bewijs.* (i) Volgt direct uit het feit dat voor ieder filter $\mathfrak{F}$ op $\mathbb{N}$ geldt dat $\mathbb{N} \in \mathfrak{F}$ en $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
- (ii) Volgt direct uit het feit dat voor ieder filter $\mathfrak{F}$ op $\mathbb{N}$ geldt dat als $B \in F$, $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $B \subseteq C$, dan $C \in \mathfrak{F}$.
- (iii) $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$ volgt uit twee eigenschappen van filters. Ten eerste dat voor ieder filter $\mathfrak{F}$ op $\mathbb{N}$ geldt dat als $B \in F$, $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $B \subseteq C$, dan $C \in \mathfrak{F}$. Ten tweede dat voor ieder filter $\mathfrak{F}$ op $\mathbb{N}$ geldt dat als $B, C \in \mathfrak{F}$, dan $B \cap C \in \mathfrak{F}$.
 $\langle A \cup B \rangle \supseteq \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$ volgt direct uit het feit dat voor ieder filter $\mathfrak{F}$ op $\mathbb{N}$ geldt dat als $B \in F$, $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $B \subseteq C$, dan $C \in \mathfrak{F}$.
 $\langle A \cup B \rangle \subseteq \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$ bewijzen we wel, omdat dit niet direct uit de definitie van een filter volgt.
 Neem $\mathfrak{U} \in \langle A \cup B \rangle$, dan geldt $A \cup B \in \mathfrak{U}$. Stel $\mathfrak{U} \notin \langle A \rangle$ en $\mathfrak{U} \notin \langle B \rangle$, dan geldt $A \notin \mathfrak{U}$ en $B \notin \mathfrak{U}$. Wegens Lemma 3.1.1 volgt nu dat $\mathbb{N} \setminus A, \mathbb{N} \setminus B \in \mathfrak{U}$. Dan volgt uit de definitie van een filter dat $(\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B) = \mathbb{N} \setminus (A \cup B) \in \mathfrak{U}$. Nu geldt dus $A \cup B \in \mathfrak{U}$ en $\mathbb{N} \setminus (A \cup B) \in \mathfrak{U}$, wat in tegenspraak is met Lemma 3.1.1. Dus $\mathfrak{U} \in \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$.
- (iv) Dit volgt direct uit Lemma 3.1.1. Er geldt:

$$\begin{aligned} \beta\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle &= \beta\mathbb{N} \setminus \{\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathfrak{U}\} \\ &= \{\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N} : A \notin \mathfrak{U}\} \quad (\text{wegens Lemma 3.1.1}) \\ &= \{\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{U}\} \\ &= \langle \mathbb{N} \setminus A \rangle \end{aligned}$$

- (v) Neem $A, B \subseteq \mathbb{N}$ met $A \neq B$. Dan kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat er een $a \in A$ bestaat met $a \notin B$, dus $B \subseteq \mathbb{N} \setminus \{a\}$. Nu volgt uit (ii) dat $\langle \{a\} \rangle \subseteq \langle A \rangle$ en $\langle B \rangle \subseteq \langle \mathbb{N} \setminus \{a\} \rangle$. Vanwege (iv) geldt nu dat $\langle B \rangle \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \langle \{a\} \rangle$. Dus dan volgt dat $\langle A \rangle \neq \langle B \rangle$. Dus de afbeelding is injectief. □

Merk op dat uit het laatste punt direct volgt dat het gewicht van $\beta\mathbb{N}$ kleiner of gelijk is aan $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Bovendien is het gewicht van $\beta\mathbb{N}$ groter of gelijk aan $\mathfrak{c}$ wegens Comfort (2012).

Lemma 3.1.5. *Een basis open verzameling $\langle A \rangle$ met $A \subseteq \mathbb{N}$ is clopen.*

Bewijs. Het voldoende te laten zien dat $\langle A \rangle \subset \beta\mathbb{N}$ gesloten is. Wegens Lemma 3.1.4(iv) geldt $\beta\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle = \langle \mathbb{N} \setminus A \rangle$, wat weer een basis open verzameling is. Dus $\langle A \rangle$ is inderdaad clopen voor alle $A \subseteq \mathbb{N}$. □

Merk bovendien op dat $\langle \{n\} \rangle = \{\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N} : n \in \mathfrak{U}\} = \mathfrak{F}_n$. De inbedding van $\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{N}$ wordt nu als volgt gedefinieerd

$$\begin{aligned}\iota : \mathbb{N} &\rightarrow \beta\mathbb{N} \\ n &\mapsto \mathfrak{F}_n\end{aligned}$$

De claim is dat deze afbeelding $\mathbb{N}$ inbedt als een dichte, discrete verzameling in $\beta\mathbb{N}$. Omdat uit de definitie van de topologie volgt dat $\langle \{n\} \rangle = \{\mathfrak{F}_n\}$ open is, volgt dat het beeld van $\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{N}$ discreet is.

Nu willen we nog laten zien dat $\iota(\mathbb{N})$ dicht in $\beta\mathbb{N}$ ligt. Neem hiervoor een open, niet-lege deelverzameling $\langle A \rangle \subseteq \beta\mathbb{N}$. Deze voldoet aan $\iota(n) = \mathfrak{F}_n \in \langle A \rangle$ als $n \in A \subseteq \mathbb{N}$. Dus de doorsnede van $\langle A \rangle$ met $\iota(\mathbb{N})$ is nooit leeg omdat $A \subseteq \mathbb{N}$ niet leeg is. Dus het beeld $\iota(\mathbb{N}) \subseteq \beta\mathbb{N}$ is dicht in $\beta\mathbb{N}$.

Omdat het triviaal is dat $\iota : \mathbb{N} \rightarrow \iota(\mathbb{N})$ bijectief is, kunnen we hieruit concluderen dat $\iota|_{\mathbb{N}}$ een homeomorfisme is en dat $\mathbb{N}$ inderdaad wordt ingebed in $\beta\mathbb{N}$ als een discrete, dichte verzameling.

3.2 Eigenschappen

Behalve de eerder genoemde eigenschap dat $\beta\mathbb{N}$ geen convergent rijtje bevat, heeft de Čech-Stone compactificatie van $\mathbb{N}$ nog een aantal eigenschappen dat niet overeenkomt met de eigenschappen van compacte metrische ruimten. Deze zullen in deze sectie worden behandeld. Eerst zal worden bewezen dat $\beta\mathbb{N}$ wel compact, Hausdorff en separabel is, om vervolgens in te gaan op de kardinaliteit van $\beta\mathbb{N}$, het karakter van de elementen van $\beta\mathbb{N}$ en tot slot het restant $\mathbb{N}^*$.

Hausdorff-ruimte

Lemma 3.2.1. *$\beta\mathbb{N}$ is een Hausdorff-ruimte.*

Bewijs. Neem $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \beta\mathbb{N}$ met $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}$. Dan kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat er een $A \subseteq \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $A \in \mathfrak{U} \setminus \mathfrak{V}$. Dan volgt uit Lemma 3.1.1 dat $\mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{V}$. Nu geldt $\mathfrak{U} \in \langle A \rangle$ en $\mathfrak{V} \in \langle \mathbb{N} \setminus A \rangle = \beta\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ (wegens Lemma 3.1.4(iv)). Dit zijn disjuncte, open omgevingen in $\beta\mathbb{N}$. Dus $\beta\mathbb{N}$ is een Hausdorff-ruimte. $\square$

Compactheid

Lemma 3.2.2. *$\beta\mathbb{N}$ is compact.*

Bewijs. Neem aan dat $\beta\mathbb{N}$ niet compact is, dan bestaat er een basis open overdekking $\{\langle A_\alpha \rangle : \alpha \in I\}$ die geen eindige deeloeverdekking heeft. Hieruit volgt dat voor alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ wegens Lemma 3.1.4(iii) en Lemma 3.1.4(i) geldt: $\langle A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_n} \rangle = \langle A_{\alpha_1} \rangle \cup \dots \cup \langle A_{\alpha_n} \rangle \neq \beta\mathbb{N} = \langle \mathbb{N} \rangle$. Wegens Lemma 3.1.4(v) volgt $A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_n} \neq \mathbb{N}$, wat equivalent is met $(\mathbb{N} \setminus A_{\alpha_1}) \cap \dots \cap (\mathbb{N} \setminus A_{\alpha_n}) \neq \emptyset$. Dus $\{(\mathbb{N} \setminus A_\alpha) : \alpha \in I\}$ voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap, dus we kunnen wegens Lemma 3.1.2 deze verzameling uitbreiden tot een ultrafilter $\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N}$. Nu geldt $(\mathbb{N} \setminus A_\alpha) \in \mathfrak{U}$ voor alle $\alpha \in I$.

Maar omdat $\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N}$ wordt overdekt door de eerder gedefinieerde open overdekking, is er een $\alpha' \in I$ zodanig dat $\mathfrak{U} \in \langle A_{\alpha'} \rangle$. Dus $\mathbb{N} \setminus A_{\alpha'} \in \mathfrak{U}$ en $A_{\alpha'} \in \mathfrak{U}$. Dit is een tegenspraak wegens Lemma 3.1.1, dus $\beta\mathbb{N}$ is compact. $\square$

Separabiliteit

Lemma 3.2.3. *$\beta\mathbb{N}$ is separabel.*

Bewijs. Wegens de definitie van $\beta\mathbb{N}$ geldt dat $\mathbb{N}$ een aftelbare, dichte deelverzameling is van $\beta\mathbb{N}$. Dus $\beta\mathbb{N}$ is separabel. $\square$

Kardinaliteit

Hoe groot kan een separabele ruimte zijn? Dat was een vraag die Urysohn en Alexandroff zich stelden toen ze onderzoek deden naar compacte Hausdorff-ruimten. Een compacte metrische ruimte heeft wegens haar separabelheid kardinaliteit ten hoogste continuüm (zie Stelling 1.2.4). Hoe zit dat bij compacte topologische ruimten? Hier is de Čech-Stone compactificatie van de natuurlijke getallen een goed tegenvoorbeeld. Deze is namelijk separabel (Lemma 3.2.3), maar heeft kardinaliteit $2^{\mathfrak{c}}$. In die zin laat deze ruimte dus zien dat een separabele ruimte dus ook relatief 'groot' kan zijn.

Om te bewijzen dat de kardinaliteit van $\beta\mathbb{N}$ inderdaad gelijk is aan $2^{\mathfrak{c}}$ hebben we eerst een paar definities en lemma's nodig.

Twee verzamelingen zijn *bijna disjunct* als de doorsnede eindig is. We spreken van een bijna disjuncte familie $\{A_i\}_{i \in I}$ als voor alle $i, j \in I$ met $i \neq j$ geldt $|A_i \cap A_j| < \omega$.

Een familie $\{A_i\}_{i \in I}$ is onafhankelijk als voor iedere paar eindig, disjuncte deelverzamelingen $S, T \subset I$ geldt dat $\bigcap_{i \in S} A_i \setminus (\bigcup_{i \in T} A_i)$ oneindig veel elementen bevat.

Lemma 3.2.4. *Er is een bijna disjuncte familie op $\mathbb{N}$ met kardinaliteit $\mathfrak{c}$.*

Bewijs. Voor het vinden van de bijna disjuncte familie is het voldoende om een bijna disjuncte familie met kardinaliteit $\mathfrak{c}$ te vinden om een willekeurige aftelbare verzameling. Hier maken we gebruik van door de aftelbare verzameling $\mathbb{Q}$ te kiezen. Neem nu voor iedere $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ een rijtje $(q_{r,i})_{i \geq 0}$ van rationale getallen die convergeren naar r . Laat $F(r) = \{q_{r,i}\}_{i \geq 0}$. Nu geldt dat er continuüm veel irrationale getallen zijn en $\{F(r) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ dus een familie is met kardinaliteit $\mathfrak{c}$.

Nu willen we alleen nog laten zien dat deze familie bijna disjunct is. Neem $r, r' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ met $r \neq r'$. Dan willen we aantonen dat $F(r) \cap F(r') < \omega$. Stel $F(r) \cap F(r') = \omega$, dan volgt dat $(q_{r,i})_{i \geq 0}$ en $(q_{r',i})_{i \geq 0}$ convergeren naar hetzelfde punt, wat in tegenspraak is met $r \neq r'$. Dus $F(r) \cap F(r') < \omega$ geldt inderdaad.

$\{F(r) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ is dus een bijna disjuncte familie met kardinaliteit $\mathfrak{c}$ op $\mathbb{Q}$. Dus kunnen we omdat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is concluderen dat er ook een bijna disjuncte familie met kardinaliteit $\mathfrak{c}$ bestaat op $\mathbb{N}$. $\square$

Lemma 3.2.5. *Er is een onafhankelijke familie op $\mathbb{N}$ met kardinaliteit $\mathfrak{c}$.*

Bewijs. We gaan deze construeren met behulp van een bijna disjuncte familie op $\mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ met kardinaliteit $\mathfrak{c}$ die bestaat wegens Lemma 3.2.4.

Weer hebben we de vrijheid om een familie te construeren op een willekeurige aftelbare familie. Neem de aftelbare familie van eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, $X = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |F| < \omega\}$. Definieer nu $[A_\alpha] = \{F \in X : F \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$. Nu claimen we dat $\{[A_\alpha] : \alpha < \mathfrak{c}\}$ een onafhankelijke familie is met kardinaliteit $\mathfrak{c}$ op X .

Neem twee disjunct en eindige deelverzamelingen van $\mathcal{F}$. Deze noemen we $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ en $\{B_{\beta_1}, \dots, B_{\beta_m}\}$. Merk op dat wegens het feit dat $\mathcal{F}$ een bijna disjuncte familie is, geldt dat al deze verzamelingen paarsgewijs een eindige doorsnede hebben. Dus er zijn oneindig veel $x \in A_{\alpha_1} \setminus (A_{\alpha_2} \cup \dots \cup A_{\alpha_n} \cup B_{\beta_0} \cup \dots \cup B_{\beta_m})$. We weten immers dat A_{α_1} een oneindige verzameling is en halen dus eindig vaak een eindige verzameling weg, dan houden we oneindig veel elementen over. Dit is mogelijk voor iedere A_{α_i} met $i \in \{1, \dots, n\}$.

Merk op dat we op deze manier oneindig veel eindige verzamelingen $F \in Y$ met n elementen

kan vinden waarvoor geldt dat ze snijden met iedere A_{α_i} en dus in $\bigcap_{i=1}^n [A_{\alpha_i}]$ zitten. Maar voor al deze eindige verzamelingen geldt ook dat ze niet snijden met alle B_{β_j} met $j \in 1, \dots, m$, en dus niet in $\bigcup_{j=1}^m [B_{\beta_j}]$ zitten.

Nu hebben we dus laten zien dat voor ieder paar eindige, disjuncte deelverzamelingen $S, T \subset \mathbb{N}$ geldt dat er oneindig veel elementen zitten in $\bigcap_{\alpha \in S} [A_\alpha] \setminus (\bigcup_{\alpha \in T} [A_\alpha])$.

Dus kunnen we concluderen dat $\{[A_\alpha] : \alpha < \mathfrak{c}\}$ inderdaad een onafhankelijke familie is en dat $\mathbb{N}$ dus ook een onafhankelijke familie met kardinaliteit $\mathfrak{c}$ heeft.¹ $\square$

Lemma 3.2.6. *De ruimte $2^{\mathfrak{c}}$ is separabel.*

Bewijs. Neem onafhankelijke familie $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ op $\mathbb{N}$ (bestaat wegens Lemma 3.2.5)

Definieer nu

$$x_n(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{als } n \in A_\alpha \\ 0 & \text{als } n \notin A_\alpha \end{cases}$$

Nu geldt $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^{\mathfrak{c}}$ en de bewering is dat dit een aftelbare dichte deelverzameling is. Het is triviaal dat de verzameling aftelbaar is.

Om te laten zien dat deze verzameling dicht ligt in $2^{\mathfrak{c}}$ beschouwen we de elementen van de ruimte als rijtjes met $\mathfrak{c}$ getallen, waarbij ieder getal gelijk is aan 0 of 1. Neem nu een basis open verzameling $U \subset 2^{\mathfrak{c}}$. Wegens de gedefinieerde topologie weten we dat we U kunnen beschouwen als de verzameling van rijtjes zoals gedefinieerd hierboven, maar dan met de restrictie dat voor eindig veel posities in de rijtjes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ er een vaste waarde staat $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ met $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Neem aan dat deze vast gekozen waarden niet allemaal gelijk zijn aan 1 of 0. Definieer nu $F = \{\alpha_i : \epsilon_i = 1\}$ en $G = \{\alpha_i : \epsilon_i = 0\}$. Deze deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn niet-leeg, disjunct en eindig. Laat nu $n \in \bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha \cap \bigcap_{\alpha \in G} \mathbb{N} \setminus A_\alpha$, dan geldt $x_n \in U$. Hieruit volgt dat we inderdaad een aftelbare, dichte deelverzameling hebben gevonden in $2^{\mathfrak{c}}$ en dat deze ruimte dus separabel is. $\square$

Stelling 3.2.7. *$\beta\mathbb{N}$ heeft kardinaliteit $2^{\mathfrak{c}}$*

Bewijs. Uit Lemma 3.2.6 volgt dat er een injectie $f : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathfrak{c}}$ bestaat zodanig dat $f(\mathbb{N})$ dicht is in $2^{\mathfrak{c}}$. Omdat $\mathbb{N}$ gewoon de discrete topologie heeft, volgt dat f continu moet zijn. Bovendien geldt dat $2^{\mathfrak{c}}$ compact is wegens de stelling van Tychonov. Nu kunnen we de universele eigenschap van de Čech-Stone compactificatie toepassen. Er is dus een unieke, continue functie $\hat{f} : \beta\mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathfrak{c}}$ die f uitbreidt.

Merk nu op dat $\hat{f}(\beta\mathbb{N})$ gesloten is. Dit is zo omdat $\hat{f}$ continu is en $\beta\mathbb{N}$ compact, dus $\hat{f}(\beta\mathbb{N})$ is compact. Bovendien is $2^{\mathfrak{c}}$ een Hausdorff-ruimte. Dus uit het feit dat compacte deelverzamelingen van Hausdorff-ruimten gesloten zijn volgt dat ook $\hat{f}(\beta\mathbb{N})$ gesloten is.

Ook geldt dat $\hat{f}(\beta\mathbb{N})$ dicht is in $2^{\mathfrak{c}}$ omdat $\hat{f}(\beta\mathbb{N}) \supseteq \hat{f}(\iota(\mathbb{N})) = f(\mathbb{N})$ en $\hat{f}(\beta\mathbb{N})$ dus een dichte deelverzameling bevat.

Nu kunnen we concluderen dat $\hat{f}(\beta\mathbb{N}) = \overline{\hat{f}(\beta\mathbb{N})} = 2^{\mathfrak{c}}$. Dus $\hat{f}$ is een surjectie en $\beta\mathbb{N}$ heeft minstens evenveel elementen als $2^{\mathfrak{c}}$.

Nu willen we nog laten zien dat $\beta\mathbb{N}$ niet meer dan $2^{\mathfrak{c}}$ elementen heeft. Merk hiervoor op dat in het algemeen geldt als X kardinaliteit κ heeft, dan heeft $\mathcal{P}(X)$ kardinaliteit 2^κ . Omdat $\beta\mathbb{N}$ een familie is van deelverzamelingen uit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en we weten dat $\mathbb{N}$ kardinaliteit $\aleph_0$ heeft, volgt dus dat $\beta\mathbb{N}$ ten hoogste kardinaliteit $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Hieruit volgt dus dat $\beta\mathbb{N}$ kardinaliteit $2^{\mathfrak{c}}$ heeft. $\square$

Het bovenstaande bewijs is relatief modern. Origineel heeft Pospíšil hetzelfde bewezen in Pospíšil (1937).

¹Dit bewijs is een constructie van Charlie Mills.

Karakter

Wegens Stelling 1.2.2 volgt dat voor alle compacte metrische ruimten geldt dat deze voldoen aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. Merk ook op dat alle topologische ruimten uit Hoofdstuk 2 voldoen aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. Dit is een eigenschap die samengaat met het geometrische aspect van de ruimten en dus niet opgaat voor de Čech-Stone compactificatie van $\mathbb{N}$. Niet ieder punt in $\beta\mathbb{N}$ heeft dus een aftelbare omgevingsbasis. Nu gaan we een stelling bewijzen die laat zien dat dit zelfs voor geen enkel punt in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ het geval is.

Stelling 3.2.8. *Er is geen punt in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ met een aftelbare omgevingsbasis.*

Bewijs. Dit volgt direct uit Stelling 3.3.3, maar zullen ook los daarvan bewijzen.

Neem aan dat er een $\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ met een aftelbare omgevingsbasis is. Dan geldt dat $\mathfrak{U}$ een aftelbare lokale basis van basis open verzamelingen heeft. Er is dus een familie $\{\langle A_i \rangle : i \in \mathbb{N}\}$ zodanig dat voor iedere open omgeving $U \subseteq \beta\mathbb{N}$ van $\mathfrak{U}$ er een $i \in \mathbb{N}$ is zodat $\langle A_i \rangle \subseteq U$. Maar omdat iedere $\langle A_i \rangle$ dus een open basis omgeving is van $\mathfrak{U}$ volgt dat $A_i \in \mathfrak{U}$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. En $\mathfrak{U}$ bevat dus een rijtje aftelbare verzamelingen met dezelfde eigenschap al boven genoemd: voor iedere $A \in \mathfrak{U}$ is er een $i \in \mathbb{N}$ zodanig dat $A_i \subseteq A$.

We ordenen dit rijtje elementen van $\mathfrak{U}$ als volgt

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

Al deze verzamelingen zijn oneindig groot omdat $\mathfrak{U}$ een vrij ultrafilter is, dus ik kan $k_i, l_i \in A_i$ kiezen voor alle $i \in \mathbb{N}$ zodanig dat geen enkel van deze elementen hetzelfde zijn. Definieer nu $B = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ en merk op

- Geldt $B \in \mathfrak{U}$?

Dit is equivalent met afvragen of er een $i \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $A_i \subseteq B$. Als dat het geval was, dan zou $A_i \setminus B = \emptyset$ gelden. Dit geldt echter niet, want $A_i \setminus B \supseteq \{l_j : j \geq i\}$. Dus $B \notin \mathfrak{U}$.

- Geldt $\mathbb{N} \setminus B \in \mathfrak{U}$?

Dit is equivalent met afvragen of er een $i \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $A_i \subseteq \mathbb{N} \setminus B$. Als dat het geval was, dan zou $A_i \setminus (\mathbb{N} \setminus B) = \emptyset$ gelden. Dit geldt echter niet, want $A_i \setminus (\mathbb{N} \setminus B) \supseteq \{k_j : j \geq i\}$. Dus $\mathbb{N} \setminus B \notin \mathfrak{U}$.

Dit is echter in tegenspraak met het feit dat $\mathfrak{U}$ een ultrafilter is.

Dus we kunnen concluderen dat er geen punt in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ is met een aftelbare omgevingsbasis. $\square$

Nu is duidelijk dat elke lokale basis van ieder punt in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ten minste overaftelbaar moet zijn. De vraag is of we hier nu nog meer over kunnen zeggen. We kunnen in ieder geval met zekerheid zeggen dat een omgevingsbasis niet groter gaat zijn dan $\mathfrak{c}$ omdat deze wordt bepaald door deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ en er daar maar $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ van zijn. Dus nu weten we dat het karakter van alle punten in $\beta\mathbb{N}$ groter is dan $\aleph_0$ en kleiner of gelijk aan $\mathfrak{c}$.

Dit is waar de Continuum Hypothese (CH) belangrijk wordt. De *Continuum Hypothese* stelt dat er geen verzameling A bestaat zodanig dat $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$.

Als CH waar is, dan hebben we hiermee bewezen dat het karakter van alle punten in $\beta\mathbb{N}$ gelijk is aan $\mathfrak{c}$. Als we er vanuit gaan dat CH niet waar is, kunnen we ons af gaan vragen of alle punten in $\beta\mathbb{N}$ een omgevingsbasis hebben van grootte $\aleph_1$ of dat er ook punten zijn die een omgevingsbasis van grootte $\mathfrak{c}$ hebben. Pospíšil heeft in Pospíšil (1939) het onderstaande resultaat bewezen.

Stelling 3.2.9. *Er zijn $2^{\mathfrak{c}}$ punten in $\beta\mathbb{N}$ waarvoor geldt dat elke omgevingsbasis kardinaliteit $\mathfrak{c}$ heeft.*

De Čech-Stone compactificatie van de natuurlijke getallen heeft dus relatief veel punten met een heel grote omgevingsbasis. Intuïtief zouden we kunnen zeggen dat deze punten 'heel diep' of 'dicht tegen de rest aan' liggen.

Het restant $\mathbb{N}^*$

De laatste eigenaardige eigenschap van $\beta\mathbb{N}$ die we beschouwen voordat we het over convergentie gaan hebben betreft de deelruimte $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{N}^*$. Hiervoor hebben we eerst een definitie nodig. Een ruimte X is *extreem onsamenhangend* als voor iedere open deelverzameling $U \subseteq X$ geldt dat $\bar{U}$ open is. We leiden een equivalente definitie af.

Lemma 3.2.10. *Voor topologische ruimte X zijn de volgende uitspraken equivalent:*

- (i) X is extreem onsamenhangend.
- (ii) Voor iedere open deelverzamelingen $U \subseteq X$ geldt dat $\bar{U}$ open is.
- (iii) Laat $U, V \subseteq X$ open zijn en $U \cap V = \emptyset$, dan volgt dat $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

Bewijs. (i) is equivalent met (ii) wegens definitie. We willen de equivalentie tussen (ii) en (iii) aantonen. Dit doen we aan de hand van twee inclusies.

- (ii) $\implies$ (iii)
We nemen aan dat voor iedere open $U \subseteq X$ geldt dat $\bar{U}$ open is. Gegeven $U, V \subseteq X$ open, met $U \cap V = \emptyset$. Nu willen we aantonen dat $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. In het algemeen geldt dat de afsluiting van een verzameling die bevat is in een gesloten verzameling ook bevat is in die gesloten verzameling. Omdat $X \setminus V \subseteq X$ gesloten is en $U \subseteq X \setminus V$, geldt $\bar{U} \subseteq X \setminus V$ en dus $V \subseteq X \setminus \bar{U}$. Maar omdat $\bar{U}$ open is, volgt dat $X \setminus \bar{U}$ gesloten is en volgt dus $\bar{V} \subseteq X \setminus \bar{U}$. Hieruit volgt dat $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
- (iii) $\implies$ (ii)
Neem aan dat voor $U, V \subseteq X$ open met $U \cap V = \emptyset$ geldt dat $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. We gaan aantonen dat $\bar{U} \subseteq X$ open is.
Gegeven $U \subseteq X$ open. Nu kiezen we $V = X \setminus \bar{U}$. Merk op dat $U, V \subseteq X$ nu open, disjuncte verzamelingen zijn. Dus geldt $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Hieruit volgt direct dat $\bar{U} \subseteq X \setminus \bar{V}$. Maar $X \setminus \bar{V} = X \setminus \overline{(X \setminus \bar{U})} \subseteq \bar{U}$. Dus $\bar{U} = X \setminus \bar{V}$. Hieruit volgt dat $\bar{U} \subseteq X$ open is.

□

We gaan laten zien dat $\beta\mathbb{N}$ extreem onsamenhangend is, maar dat $\mathbb{N}^*$ niet extreem onsamenhangend is. Herinner dat we hebben laten zien dat $|\beta\mathbb{N}| = 2^c$. Dat is het op zijn minst het opmerken waard dat als we een deelverzameling met kardinaliteit $\aleph_0$ weghalen uit $\beta\mathbb{N}$, het restant niet meer extreem onsamenhangend is. Dit is onverwacht omdat we dus een relatief kleine verzameling weghalen uit $\beta\mathbb{N}$, maar de samenstelling van de ruimte wel veel verandert. Wat betreft notatie geldt als $A \subseteq \beta\mathbb{N}$, dan $A^* = \langle A \rangle \cap \mathbb{N}^* = \langle A \rangle \setminus \mathbb{N}$.

Lemma 3.2.11. *$\beta\mathbb{N}$ is extreem onsamenhangend.*

Bewijs. Gegeven $U, V \subseteq \beta\mathbb{N}$ open met $U \cap V = \emptyset$. We willen laten zien dat $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Merk op dat $U \cap \mathbb{N}$ dicht is in U en dus $U \subseteq \overline{U \cap \mathbb{N}}$. Omdat $U \cap \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ geldt nu wegens Lemma 3.1.3 dat $\overline{U \cap \mathbb{N}} = \langle U \cap \mathbb{N} \rangle$. Dus $U \subseteq \langle U \cap \mathbb{N} \rangle$. Omdat $\langle U \cap \mathbb{N} \rangle$ clopen is, geldt dat $\bar{U} \subseteq \langle U \cap \mathbb{N} \rangle$. Hetzelfde geldt voor V , dus $\bar{V} \subseteq \langle V \cap \mathbb{N} \rangle$. Omdat $U \cap V = \emptyset$ geldt dat $\langle U \cap \mathbb{N} \rangle \cap \langle V \cap \mathbb{N} \rangle = \emptyset$. Dus kunnen we concluderen dat $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Wegens Lemma 3.2.10 volgt nu dat $\beta\mathbb{N}$ extreem onsamenhangend is. □

Lemma 3.2.12. *Voor iedere $A, B \subseteq \mathbb{N}$ geldt $A^* \subseteq B^*$ als en slechts als $|A \setminus B| < \omega$.*

Bewijs. We bewijzen de bovenstaande equivalentie aan de had van twee implicaties:

- $A^* \subseteq B^* \implies |A \setminus B| < \omega$
 Neem aan dat $A^* \subseteq B^*$ en $|A \setminus B| = \aleph_0$. Wegens Lemma 3.2.13 volgt dat er dus een vrij ultrafilter in $A \setminus B$ moet zitten, dus er is een $\mathfrak{U} \in (A \setminus B)^*$. Maar voor deze $\mathfrak{U}$ geldt nu dus dat $\mathfrak{U} \in A^*$ en $\mathfrak{U} \notin B^*$, wat in tegenspraak is met de aanname dat $A^* \subseteq B^*$.
- $|A \setminus B| < \omega \implies A^* \subseteq B^*$
 Neem aan dat $|A \setminus B| < \omega$. Kies $\mathfrak{U} \in A^*$, dan geldt dat $\mathfrak{U}$ een vrij ultrafilter is en $A \in \mathfrak{U}$. Omdat $|A \setminus B| < \omega$ geldt dat als we $A \setminus B$ weglaten uit $\mathfrak{U}$, we weer in een ultrafilter zitten. Dus geldt $\mathfrak{U} \in B^*$.

□

Lemma 3.2.13. *Gegeven $A \subseteq \mathbb{N}$ met $|A| = \aleph_0$, dan zit er een vrij ultrafilter in A .*

Bewijs. Beschouw de co-eindige verzamelingen van A . Deze familie heeft de eindige doorsnijdingseigenschap, en kan dus worden uitgebreid tot een ultrafilter $\mathfrak{U}$. Nu geldt dat $\mathfrak{U}$ is een vrij ultrafilter en $A \in \mathfrak{U}$. □

Lemma 3.2.14. *Als $S \subseteq \mathbb{N}^*$ een niet-lege G_δ -verzameling is, dan geldt $S^\circ \neq \emptyset$.*

Bewijs. Neem $p \in S = \bigcap_{i \geq 0} U_i$ met U_i open in $\mathbb{N}^*$. Dan geldt dat er A_i bestaan zodanig dat $p \in A_i^* \subseteq U_i$ voor alle $i \geq 0$. De verzamelingen van de vorm A^* geven namelijk de basis open verzamelingen in $\mathbb{N}^*$. Beschouw nu deze familie $\{A_i : i \geq 0\}$ en merk op dat deze voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap omdat het elementen zijn van een ultrafilter.

Nu contrueren we de verzameling X als volgt

$$\begin{aligned} x_0 &\in A_0 \\ x_1 &\in (A_1 \cap A_0) \setminus \{x_0\} \\ x_2 &\in (A_2 \cap A_1 \cap A_0) \setminus \{x_0, x_1\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dan geldt voor $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ dat $|X \setminus A_i| < \omega$ voor alle $i \geq 0$ (X is een *oneindige bijna doorsnede*).

Merk nu op dat wegens Lemma 3.2.12 geldt, als $|A \setminus B| < \omega$ dan $A^* \subseteq B^*$. Dus volgt dat X^* een niet-lege clopen verzameling is en $\bigcap_{i \geq 0} U_i$ heeft dus een niet-leeg inwendige. □

Stelling 3.2.15. $\mathbb{N}^*$ is niet extreem onsamenvhangend.

Bewijs. Neem aan dat $\mathbb{N}^*$ extreem onsamenvhangend is. Dan volgt wegens Lemma 3.2.10 dat als twee open verzamelingen disjunct zijn, de afsluiting van diezelfde open verzamelingen weer disjunct is. We gaan laten zien dat dit niet waar is in $\mathbb{N}^*$.

Neem de oneindige paarsgewijs disjuncte familie $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ met $A_i \subseteq \mathbb{N}$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Beschouw nu de corresponderende disjuncte basis open verzamelingen $\{A_i^* \subseteq \mathbb{N}^* : i \in \mathbb{N}\}$. Kies nu een $x_i \in A_i^*$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Laat p een verdichtingspunt zijn van $(x_i)_{i \geq 0}$. Definieer nu $U = \bigcup_{i \geq 0} A_i^*$. Merk op dat U en $\mathbb{N}^* \setminus \bar{U}$ open disjuncte verzamelingen zijn in $\mathbb{N}^*$. Nu is de claim dat $p \in \bar{U} \cap (\mathbb{N}^* \setminus \bar{U})$.

Dat $p \in \bar{U}$ is volgt direct uit het feit dat p een verdichtingspunt is van $(x_i)_{i \geq 0}$. Nu willen we dus

nog laten zien dat $p \in \overline{(\mathbb{N}^* \setminus \bar{U})}$. Neem willekeurige clopen omgeving C_p van p . We gaan laten zien dat $C_p \cap (\mathbb{N}^* \setminus \bar{U}) \neq \emptyset$.

Merk op dat $A_i^* \subseteq \mathbb{N}^*$ clopen is en dus $\mathbb{N}^* \setminus A_i$ open voor alle $i \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat $\mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{i \geq 0} A_i^* = \bigcap_{i \geq 0} (\mathbb{N}^* \setminus A_i^*)$ een G_δ -verzameling is. Omdat C_p ook open is, volgt dat $(\mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{i \geq 0} A_i^*) \cap C_p$ ook een G_δ -verzameling is. Wegens Lemma 3.2.14 volgt dat $(\mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{i \geq 0} A_i^*) \cap C_p$ een niet leeg inwendige heeft. Er is dus een niet-lege, clopen $E \subseteq (\mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{i \geq 0} A_i^*) \cap C_p$. Omdat E clopen is, geldt $E \subseteq (\mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{i \geq 0} \bar{A}_i^*) \cap C_p = (\mathbb{N}^* \setminus \bar{U}) \cap C_p$. Dus $C_p \cap (\mathbb{N}^* \setminus \bar{U}) \neq \emptyset$ geldt inderdaad en dus $p \in \overline{(\mathbb{N}^* \setminus \bar{U})}$.

We hebben dus twee disjuncte open verzamelingen gevonden in $\mathbb{N}^*$ waarvoor de doorsnede van de afsluitingen niet leeg is. Dus is n^* niet extreem onsamenvattend.

□

3.3 Convergentie in $\beta\mathbb{N}$

Zoals eerder genoemd bevat de Čech-Stone compactificatie geen convergente rij. Dit zal in deze sectie worden bewezen. Vervolgens zal ook worden bewezen dat $\beta\mathbb{N}$ wel een convergente rij bevat als we deze indiceren met de overaftelbare verzameling ω_1 .

3.3.1 Geen convergerende rij

Lemma 3.3.1. *Iedere oneindige Hausdorff-ruimte X heeft een niet-lege, open $U \subseteq X$, zodat $X \setminus \bar{U}$ oneindig is.*

Bewijs. We nemen aan dat dit niet het geval is en leiden een tegenspraak af. Er geldt voor alle niet-lege, open $U \subseteq X$ dat $X \setminus \bar{U}$ eindig is. Neem dus $U' \subseteq X$ een niet-lege, open deelverzameling. Dan is $X \setminus \bar{U}'$ eindig en de deelruimte van een Hausdorff-ruimte, dus ook Hausdorff. Iedere eindige Hausdorff-ruimte is discreet, dus $X \setminus \bar{U}'$ is een discrete ruimte. Neem $x \in X \setminus \bar{U}'$, dan volgt dat $\{x\}$ clopen is in $X \setminus \bar{U}'$. Omdat $X \setminus \bar{U}'$ open is in X , volgt dat $\{x\}$ dus ook clopen is in X . Maar voor iedere open, niet-lege verzameling $U \subseteq X$ gold dat $X \setminus \bar{U}$ eindig was. Dus $X \setminus \{x\} = X \setminus \bar{U}$ is eindig.

Dit is in tegenspraak met het feit dat X een oneindige ruimte is. Dus er moet wel een niet-lege, open $U \subseteq X$ zijn zodat $X \setminus \bar{U}$ oneindig is. □

Lemma 3.3.2. *Iedere oneindige Hausdorff-ruimte X heeft een oneindige discrete deelruimte $X' \subseteq X$.*

Bewijs. Kies inductief open deelverzamelingen $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ zodanig dat $X \setminus \bigcup_{i=0}^n \bar{U}_i$ oneindig is en $U_{n+1} \subseteq X \setminus \bigcup_{i=0}^n \bar{U}_i$. Dit mag omdat U_0 bestaat wegens Lemma 3.3.1. En als $U_0, \dots, U_k$ bestaan, dan geldt dat $X \setminus \bigcup_{i=0}^k \bar{U}_i$ weer een oneindige Hausdorff-ruimte is en volgt uit Lemma 3.3.1 dat er weer een niet-lege, open $U_{k+1} \subseteq X \setminus \bigcup_{i=0}^k \bar{U}_i$ bestaat, die ook open is in X omdat $X \setminus \bigcup_{i=0}^k \bar{U}_i$ open is in X . Deze U_{k+1} heeft nu de eigenschap dat $X \setminus \bigcup_{i=0}^{k+1} \bar{U}_i$ weer oneindig is. Uit het principe van inductie volgt dus dat $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ goed gedefinieerd is.

Neem nu voor iedere $U_i \subseteq X$ een $x_i \in U_i$, dan volgt dat $X' = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ een discrete deelruimte is van X . □

Stelling 3.3.3. *Er is geen niet-triviale, convergente rij $(U_n)_{n \geq 1}$ in $\beta\mathbb{N}$.*

Bewijs. Laat $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$ een niet-triviale rij zijn in $\beta\mathbb{N}$. Omdat de rij niet-triviaal is, geldt dat deelruimte $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ een oneindige Hausdorff-ruimte is. Uit Lemma 3.3.2 volgt nu dat

deze ruimte een oneindige discrete deelruimte $\{\mathfrak{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ heeft. Deze ruimte correspondeert met de niet-triviale deelrij $(\mathfrak{V}_n)_{n \geq 0}$. Omdat $\{\mathfrak{V}_n\}$ open is voor alle $n \in \mathbb{N}$ volgt dat we een rij $(A_n)_{n \geq 0}$ van deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ kunnen definiëren zodanig dat $A_n \in \mathfrak{V}_m$ als en slechts als $n = m$.

Nu definiëren we $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$. Nu is $(B_n)_{n \geq 0}$ een paarsgewijs disjuncte rij waarvoor geldt $B_n \in \mathfrak{V}_m$ als en slechts als $n = m$.

Definieer nu $B = \bigcup_n B_{2n}$ dan geldt $\mathfrak{V}_m \in \langle B \rangle$ als en slechts als m even is. Dus $\mathfrak{V}_m \in \beta\mathbb{N} \setminus \langle B \rangle$ als en slechts als m oneven is. Merk op dat er zowel in $\langle B \rangle$ als in $\beta\mathbb{N} \setminus \langle B \rangle$ oneindig veel $\mathfrak{V}_m$ zitten. De limiet van $(\mathfrak{V}_m)_{m \geq 0}$ moet dus in $\langle B \rangle \cap \langle \mathbb{N} \setminus B \rangle$ zitten. Wegens Lemma 3.1.1 geldt echter dat $\langle B \rangle \cap \langle \mathbb{N} \setminus B \rangle = \emptyset$. Dit is een tegenspraak, dus $(\mathfrak{V}_n)_{n \geq 0}$ convergeert niet.

Hieruit kunnen we concluderen dat $(\mathfrak{U}_n)_{n \geq 0}$ ook niet convergeert en $\beta\mathbb{N}$ dus geen niet-trivale rij bevat die convergeert. $\square$

3.3.2 Wel convergerende overaftelbare rij

Opvallend is dat er wel een niet-triviaal rijtje in $\beta\mathbb{N}$ is als we deze indiceren met het eerste overaftelbare ordinaalgetal ω_1 . Dus als we de ruimte zo bekijken is er ergens dus toch nog enigszins meetkunde in terug te vinden. We gaan dit niet in detail bewijzen, omdat dit kennis vergt over theorie die niet goed in de rest van het verslag past. Wel zullen we hier kort over uitweiden om een overaftelbare rij beter te definiëren en een ruwe schets van het bewijs te geven.

Een overaftelbare rij

Ondanks dat al in een vroeg stadium in de wiskunde wordt gewerkt met rijen, blijft dit gedurende de hele Bachelor Technische Wiskunde bij rijen geïndiceerd door $\mathbb{N}$. Maar als we een door $\mathbb{N}$ geïndiceerde rij opvatten als een functie

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\rightarrow X \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

dan is het evident dat $\mathbb{N}$ kan worden vervangen door iedere lineair geordende verzameling. Hiermee is $(x_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ ook een goed gedefinieerde rij. Merk nu op dat deze rij convergeert naar $y \in X$ als en slechts als voor iedere open omgeving U_y van y geldt dat er een $d \in \omega_1$ is zodanig dat $x_e \in U_y$ voor alle $e \geq d$.

Dit is equivalent met de uitspraak dat iedere open omgeving U_y van y alle x_α 's bevat op een aftelbaar aantal na.

Het bewijs

In het overzichtsartikel van Mill (1988) staat een bewijs van de uitspraak dat $\beta\mathbb{N}$ een overaftelbare rij bevat. Dit bewijs construeert niet het rijtje zelf in $\beta\mathbb{N}$, maar bewijst dat het bestaat.

Een ruwe, stapsgewijze schets van het bewijs is als volgt:

1. Het is mogelijk om een overaftelbare, convergerende rij te construeren in 2^c . De verzameling punten in deze rij noemen we X .
2. X kan worden ingebed in de *projectieve overdekkingsruimte* $E(2^c)$. Voor de definitie, zie van Mill (1988).
3. Wegens een aantal eigenschappen kan $E(2^c)$ worden ingebed in $\beta\mathbb{N}$

Volgens deze lijnen kan worden aangetoond dat er inderdaad een overaftelbare, convergente rij is in $\beta\mathbb{N}$.

Maar het zou, nogmaals, te ver voeren om hier in detail op in te gaan.

Hoofdstuk 4

Fedorchuk-lijn en dimensies

4.1 Dimensies in de topologie

Het vinden van een correcte definitie van dimensies in de topologie is een spel tussen intuïtie en reeds bekende feiten. Omdat topologische ruimten gedefinieerd zijn door een ruimte met gegeven open verzamelingen, is het niet zo vanzelfsprekend wat de dimensie is als bijvoorbeeld in een vectorruimte, waar de dimensie gelijk is aan het maximale aantal onafhankelijke vectoren. Er zijn echter topologische ruimten waar het definiëren van een dimensie wel heel vanzelfsprekend is. Een logische voorbeeld is de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$, die natuurlijk dimensie n heeft. Nu kunnen we onze geometrische intuïtie in de Euclidische ruimte gebruiken om een algemene definitie op te stellen voor de dimensie van een topologische ruimte.

Het doel is om de definitie zó op te stellen dat de dimensie van een ruimte een topologische eigenschap is. Dat wil zeggen dat twee ruimten dezelfde dimensie hebben als deze ruimten homeomorf zijn. Bovendien willen we dat de dimensie van de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ dus gelijk is aan n . Er zijn drie bekende definities van dimensies in de topologie die hieraan voldoen:

- De kleine inductieve dimensie
- De grote inductieve dimensie
- De overdekkingsdimensie

In dit hoofdstuk zullen we deze verschillende interpretaties van de dimensie van een topologische ruimte uitleggen en vergelijken om vervolgens terug te keren bij het algehele thema van het verslag en een ruimte te definiëren die zich 'raar' gedraagt ten opzichte van deze definities.

4.1.1 De inductieve dimensie

Intuïtief is het misschien voor te stellen dat in de n -dimensionale, Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ de rand van een open verzameling $n-1$ -dimensionaal is. Het gevolg hiervan is dat gegeven $x \in \mathbb{R}^3$ en gesloten deelverzameling $F \subseteq \mathbb{R}^3$, deze twee objecten kunnen worden gescheiden door een 2-dimensionaal object. We kunnen namelijk, wegens het regulier zijn van de Euclidische ruimte, altijd een open bol $V \subseteq \mathbb{R}^3$ om x vinden die disjunct is met F . Nu geldt dat de rand van V , $\partial(V)$ inderdaad x en F scheidt en 2-dimensionaal is. Hetzelfde kunnen we uiteraard voor $\mathbb{R}^n$ in het algemeen doen.

Dit is het idee waar de inductieve dimensie op is gebaseerd. Er zijn twee verschillende inductieve dimensies: de kleine inductieve dimensie, $\text{ind}(X)$, en de grote inductieve dimensie, $\text{Ind}(X)$. De formele definities zijn als volgt.

- De kleine inductieve dimensie van topologische ruimte X is gelijk aan de kleinste n zodanig dat:
voor alle $x \in X$ en alle open omgevingen $U \subseteq X$ van x is er een open $V \subseteq X$ met $x \in V$ en $\bar{V} \subseteq U$, zodat $\text{ind}(\partial(V)) \leq n - 1$.
- De grote inductieve dimensie van topologische ruimte X is gelijk aan de kleinste n zodanig dat:
voor alle gesloten deelverzamelingen $F \subseteq X$ en alle open omgevingen $U \subseteq X$ van F is er een open $V \subseteq X$ met $F \subseteq V$ en $\bar{V} \subseteq U$, zodat $\text{Ind}(\partial(V)) \leq n - 1$.

Nu hebben we een inductieve stap gedefinieerd, maar moeten we ook nog minimaal één ruimte een absolute waarde meegeven om de dimensie van alle ruimten absoluut te kunnen bepalen. Hiervoor merken we op dat het doel is om de eenpuntruimte dimensie 0 te geven. Omdat de rand van een punt leeg is, stellen we als gegeven dat $\text{ind}(\emptyset) = \text{Ind}(\emptyset) = -1$ en is de definitie compleet.

Nu kunnen we ons afvragen hoe het eerder genoemde intuïtieve idee van een dimensie hierin terugkomt. Hiervoor is het belangrijk op te merken dat het vinden van een $V \subseteq X$ zoals hierboven beschreven eigenlijk neerkomt op het scheiden van een punt en een gesloten verzameling voor de kleine inductieve dimensie en het scheiden van twee gesloten verzamelingen voor de grote inductieve dimensie. De gesloten deelverzameling waar een punt ofwel een andere gesloten verzameling van wordt gescheiden is namelijk het complement van de open omgeving $U \subseteq X$.

Lemma 4.1.1. *Voor alle normale topologische ruimten X geldt $\text{ind}(X) \leq \text{Ind}(X)$.*

Bewijs. Als $\text{Ind}(X) = m$, dan volgt dat voor alle gesloten verzamelingen $F \subseteq X$ en alle omgevingen $U \subseteq X$ van F er een open $V \subseteq X$ is met $F \subseteq V$ en $\bar{V} \subseteq U$, zodat $\text{Ind}(\partial(V)) \leq m - 1$. Omdat $\{x\} \in X$ een gesloten verzameling is geldt dit ook voor alle omgevingen $U \subseteq X$ van x . Het kan echter zo zijn dat m voor de kleine inductieve dimensie niet minimaal is. Daar om concluderen we dat $\text{ind}(X) \leq \text{Ind}(X)$. $\square$

4.1.2 De overdekkingsdimensie

Om de overdekkingsdimensie te kunnen definiëren, zijn er eerst twee extra definities nodig. Een andere manier om te bedenken waarom $\mathbb{R}^2$ bijvoorbeeld 2-dimensionaal is, is om de open overdekkingen van het vlak te beschouwen. Het is opvallend dat het intuïtief onmogelijk lijkt om een open overdekking van $\mathbb{R}^2$ te construeren zodanig dat voor geen enkel punt geldt dat het bevat is in drie verschillende open deelverzamelingen. Voor $\mathbb{R}$ is dit echter wel mogelijk door een open overdekking te maken van intervallen die als een soort keten elkaar steeds in de staart bijten. Om dit intuïtieve idee formeel te definiëren hebben we twee nieuwe definities nodig.

De *orde* van een familie open verzamelingen $\mathcal{A}$ is gelijk aan de grootste $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat de familie een deelverzameling heeft van $n+1$ deelverzamelingen met een niet-lege doorsnede. Merk op dat voor een familie van orde n geldt dat een punt bevat is in $n+1$ deelverzamelingen.

Gegeven een open overdekking $\mathcal{A}$ van X , dan is de open overdekking $\mathcal{B}$ van X een *verfijning* van $\mathcal{A}$ als iedere $B \in \mathcal{B}$ bevat is in een $A \in \mathcal{A}$.

De overdekkingsdimensie van topologische ruimte X is de minimale $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat iedere open overdekking een verfijning heeft van orde gelijk aan n . Als notatie gebruiken we $\dim(X) = n$.

De Samenvatting

De drie verschillende definities van een dimensie in de topologie zijn geven onafhankelijk van elkaar een intuïtief kloppend resultaat. Nu is het de vraag wanneer de verschillende definities

dus samenvallen en precies hetzelfde resultaat geven. Deze vraag wordt beantwoord door de volgende stelling in Dijkstra (1992).

Stelling 4.1.2. (*De Samenvallstelling*) Voor iedere separabele, metrische ruimte geldt $\text{ind}(X) = \text{Ind}(X) = \dim(X)$.

4.2 Fedorchuk-lijn

Net zoals we eerder in het verslag voorbeelden van compacte Hausdorff-ruimten tegen zijn gekomen die zich anders gedragen dan compacte metrische ruimten, gaan we nu een compacte Hausdorff-ruimte beschouwen die zich wederom anders gedraagt. Waar de *Fedorchuk-lijn* zich in onderscheidt van een normale metrische ruimte is namelijk dat de bovenstaande samenvallstelling niet opgaat voor deze ruimte. Ondanks het feit dat de Fedorchuk-lijn wel separabel, compact en Hausdorff is, is de niet-metrizeerbaarheid genoeg om deze stelling dwars te bomen. Hierin is de Fedorchuk-lijn dus een goed compact, Hausdorff tegenvoorbeeld in de topologie. Eerst zal de ruimte gedefinieerd worden, om vervolgens te laten zien dat de ruimte wel aan de eerder genoemde eigenschappen voldoet. Tot slot zal worden aangetoond dat de Fedorchuk-lijn niet aan de samenvallstelling voldoet.

4.2.1 Definitie

De onderliggende verzameling

De onderliggende verzameling is het vierkant $V = [-1, 1] \times [-1, 1]$. We zullen vanaf nu stellen dat $I = [-1, 1]$.

De topologie

Bij elke $x \in I$ definiëren we de functie

$$f_x : I \setminus \{x\} \rightarrow I$$

$$y \mapsto \sin\left(\frac{1}{y-x}\right)$$

Voor $(x, y) \in V$ nemen we nu een $\epsilon, \delta > 0$. Definieer nu

$$U(x, y, \epsilon_y, \delta_x) = \{\langle x, z \rangle : |z - y| < \epsilon_y\} \cup \{\langle u, z \rangle : |u - z| < \delta_x \text{ en } |f_x(u) - y| < \epsilon_y\}$$

als open omgeving voor ieder punt $\langle x, y \rangle \in V$. Naar het eerste deel zal af en toe worden verwezen als *verticaal interval* en naar het tweede deel als *open stroken*. Nu vormt $\{U(x, y, \epsilon_y, \delta_x) : \langle x, y \rangle \in V, \epsilon_y, \delta_x > 0\}$ een basis voor de topologie van de Fedorchuk-lijn.

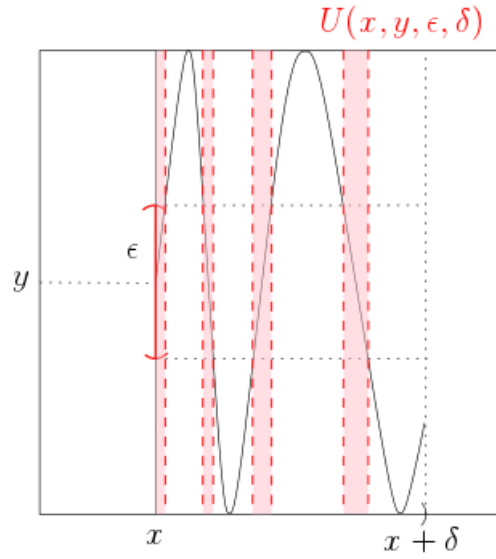
Projectiefunctie

Ook definiëren we de projectiefunctie van V op het horizontale interval I .

$$\pi_x : V \rightarrow [-1, 1]$$

$$\langle x, y \rangle \mapsto x$$

Deze functie zal worden gebruikt in onderstaande bewijzen.



Figuur 4.1: Schets van de rechter helft van een mogelijke basis open verzameling $U(x, y, \epsilon, \delta)$

4.2.2 Eigenschappen

Hausdorff-ruimte

Lemma 4.2.1. *Gegeven $y_1, y_2 \in \{x\} \times I$ met $y_1 \neq y_2$, dan bestaat er een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle $\delta_1, \delta_2 > 0$ geldt $U(x, y_1, \epsilon, \delta_1) \cap U(x, y_2, \epsilon, \delta_2) = \emptyset$.*

Bewijs. Omdat $\{x\} \times I$ de Euclidische topologie heeft, kunnen we $\epsilon < |y_1 - y_2|$ kiezen. Merk op dat de verticale intervallen om y_1 en y_2 nu disjunct zijn. Nu willen we nog aantonen dat de overige stroken disjunct zijn.

Kies voor het gemak $\delta = \delta_1 = \delta_2$. Merk nu op dat f_x een afwisselend strikt stijgend en strikt dalende functie is. Dus we kunnen $I \setminus \{x\}$ opdelen in aftelbaar veel intervallen waar f_x strikt stijgend is om het interval. Als we één zo'n interval I_i beschouwen, dan geldt dat f_x beperkt tot dat interval een continue bijjectie is. Hieruit volgt dat het inverse beeld van de verticaal disjuncte open intervallen op I_i weer disjuncte open intervallen zijn. Dit geldt voor ieder interval $I_i \subset I$ waarop de functie strikt stijgend of strikt dalend is. Dus omdat deze intervallen onderling weer disjunct zijn volgt dat het inverse beeld van de verticaal disjuncte open intervallen op I disjuncte families van open intervallen zijn. Hieruit volgt dat de open stroken behorende bij $U(x, y_1, \epsilon, \delta)$ disjunct zijn met de open stroken behorende bij $U(x, y_2, \epsilon, \delta)$.

Dus we kunnen concluderen dat $U(x, y_1, \epsilon, \delta) \cap U(x, y_2, \epsilon, \delta) = \emptyset$. $\square$

Lemma 4.2.2. *De Fedorchuk-lijn is een Hausdorff-ruimte.*

Bewijs. Neem twee disjuncte punten $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in V$. Nu onderscheiden we gevallen

- $x \neq u$
Kies nu $\delta < \frac{1}{2}|x - u|$. Dan volgt dat $U(x, y, \epsilon, \delta) \cap U(u, v, \epsilon, \delta) = \emptyset$ voor alle $\epsilon > 0$.
- $x = u$
Nu moet gelden dat $y \neq v$. Kies nu $\epsilon < \frac{1}{2}|y - v|$. Dan volgt uit Lemma 4.2.1 dat $U(x, y, \epsilon, \delta) \cap U(u, v, \epsilon, \delta) = \emptyset$ voor alle $\delta > 0$.

Dus is de Fedorchuk-lijn inderdaad een Hausdorff-ruimte. $\square$

Compactheid

Lemma 4.2.3. *De Fedorchuk-lijn is compact.*

Bewijs. Laat $\mathcal{U}$ een basis open overdekking zijn van V . Nu is er wegens Lemma 4.2.9 voor alle $x \in I$ een eindige open verfijning van $\mathcal{U}$ die bestaat uit basis open verzamelingen $\{U(x, y_i, \epsilon_i, \delta_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ en $\{x\} \times I$ overdekt. Kies $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i$, dan geldt dat $(x - \delta, x + \delta) \times I \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x, y_i, \epsilon_i, \delta_i)$. Merk nu op dat $\{(x - \delta, x + \delta)\}_{x \in I}$ een open overdekking is van I . Omdat I compact is, weten we dat er een eindige deeloeverdekking $\{(x_j - \delta, x_j + \delta)\}_{1 \leq j \leq k}$ van I bestaat. Omdat $(x_j - \delta, x_j + \delta) \times I$ wordt overdekt door een eindige open verfijning van $\mathcal{U}$ voor alle $1 \leq j \leq k$, geldt dat $V \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq k} (x_j - \delta, x_j + \delta) \times I$ wordt overdekt door een eindige open verfijning van $\mathcal{U}$. Dus we hebben een eindige open verfijning van $\mathcal{U}$ die V overdekt en de Fedorchuk-lijn is inderdaad compact. $\square$

Separabiliteit

Lemma 4.2.4. *Als $f : X \rightarrow Y$ een irreducibele afbeelding is en Y is separabel, dan is X ook separabel.*

Bewijs. Laat $D = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ een dichte deelverzameling van Y zijn. Neem voor ieder element uit $y_i \in D$ een element $x_i \in X$ zodanig dat $f(x_i) = y_i$. De claim is nu dat verzameling van deze elementen $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht is in X .

Om deze claim te bewijzen nemen we aan dat E niet dicht ligt in X en leiden we een tegenspraak af. Als E niet dicht ligt in X volgt dat er een niet-lege, open verzameling $U \subseteq X \setminus E$ bestaat. Maar omdat f irreducibel is bestaat er nu een $V \subseteq Y$ zodanig dat $f^{-1}(V) \subseteq U$. Maar wegens de dichtheid van D is er een $y_i \in D$ zodanig dat $y_i \in V$. Dus dan is er een $x_i \in f^{-1}(V) \subseteq U$, wat in tegenstelling is met $U \subseteq X \setminus E$.

Dus X is inderdaad separabel. $\square$

Lemma 4.2.5. *De Fedorchuk-lijn is separabel.*

Bewijs. I is separabel omdat $\{q \in I : q \in \mathbb{Q}\}$ een aftelbare, dichte deelverzameling is. Nu volgt de separabiliteit van de Fedorchuk-Lijn direct uit Lemma 4.2.4, het feit dat $\pi_x : V \rightarrow I$ irreducibel is wegens Lemma 4.2.12 en de separabiliteit van het interval I . $\square$

Samenhangendheid

Lemma 4.2.6. *Als $f : X \rightarrow Y$ een continue surjectie is, X en Y compact zijn en $U \subseteq X$ open is, dan volgt daaruit dat $\{y \in Y : f^{-1}(y) \in U\} \subseteq Y$ open is.*

Bewijs. Omdat $U \subseteq X$ open is volgt dat $X \setminus U$ een gesloten deelverzameling is van de compacte ruimte X . Dus weten we dat $X \setminus U$ compact is. Omdat f continu is, volgt dat $f(X \setminus U)$ compact is. Nu volgt uit het gegeven dat Y een Hausdorff-ruimte is dat $f(X \setminus U) \subseteq Y$ gesloten is en $Y \setminus f(X \setminus U)$ dus open.

Merk nu op dat $Y \setminus f(X \setminus U) = Y \setminus \{y \in Y : f^{-1}(y) \in (X \setminus U)\} = Y \setminus \{y \in Y : f^{-1}(y) \notin U\}$. Wegens de surjectieve eigenschap van f volgt dat dit gelijk is aan $\{y \in Y : f^{-1}(y) \in U\}$. Omdat $Y \setminus f(X \setminus U)$ open was in Y , is $\{y \in Y : f^{-1}(y) \in U\}$ dat ook. $\square$

Lemma 4.2.7. *De Fedorchuk-lijn is samenhangend.*

Bewijs. Gegeven $U, W \subseteq V$ open, met $U \cap W = \emptyset$ en $U \cup W = V$. We weten dat de samenhangendheid van V equivalent is met dat hieruit volgt $U = \emptyset$ of $W = \emptyset$. Om te bewijzen dat V samenhangend is nemen we daarom aan dat $W \neq \emptyset$ en $U \neq \emptyset$ en leiden we een tegenspraak af.

We weten dat $\{x\} \times I$ samenhangend is voor alle $x \in I$. Hieruit volgt dat $\{x\} \times I \subseteq U$ of $\{x\} \times I \subseteq W$ voor alle $x \in I$. Nu definiëren we

$$U' = \pi_x(U) = \{x \in I : \{x\} \times I \subseteq U\}$$

$$W' = \pi_x(W) = \{x \in I : \{x\} \times I \subseteq W\}$$

Merk nu op dat wegens Lemma 4.2.10 geldt dat $\pi_x : V \rightarrow I$ continu is. Wegens Lemma 4.2.3 geldt dat V compact is. Bovendien is het triviaal dat π_x surjectief is en dat I een compacte Hausdorff-ruimte is. Omdat bovendien gegeven is dat $U, W \subseteq V$ open zijn, kunnen we Lemma 4.2.6 toepassen en concluderen dat $U', W' \subseteq I$ open verzamelingen zijn. Ook geldt $U' \cap W' = \emptyset$, $U' \cup W' = I$ en $U', W' \neq \emptyset$. Dit is in tegenspraak met het triviale feit dat I samenhangend is.

Dus we kunnen concluderen dat de Fedorchuk-lijn samenhangend is. $\square$

Het eerste aftelbaarheidsaxioma

Lemma 4.2.8. *De Fedorchuk-lijn voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.*

Bewijs. Definieer voor iedere $\langle x, y \rangle \in V$ als aftelbare lokale basis $\{U(x, y, \frac{1}{n}, \frac{1}{m})\}_{n,m \in \mathbb{N}}$. De rest van het bewijs is evident en wordt aan de lezer overgelaten. $\square$

Eigenschappen projectiefunctie

Lemma 4.2.9. *Iedere open strook $(a, b) \times I \subseteq V$ kan worden geschreven als de vereniging van eindig veel basis open verzamelingen.*

Bewijs. Kies $x \in I$ in het midden van het gegeven interval (a, b) en kies $\delta > 0$ zodanig dat $x - \delta = a$ en $x + \delta = b$. Merk op dat $\{x\} \times I$ topologisch equivalent is met I en dus compact is. Het is dus mogelijk om $\{x\} \times I$ te overdekken met eindig veel basis open verzamelingen van deze deelruimte.

Definieer nu de familie $\{U(x, \frac{k}{n}, \frac{1}{n}, \delta)\}_{0 \leq k \leq n}$. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt nu $(a, b) \times I = \bigcup_{k=0}^n U(x, \frac{k}{n}, \frac{1}{n}, \delta)$. Dit laten we zien aan de hand van twee inclusies:

- $(a, b) \times I \subseteq \bigcup_{k=0}^n U(x, \frac{k}{n}, \frac{1}{n}, \delta)$
Neem $(u, v) \in (a, b) \times I$. Dan geldt direct dat $|u - x| < \delta$. Bovendien volgt uit het feit dat geheel $\{x\} \times I$ geheel wordt overdekt dat er een $i \in \{1, \dots, n\}$ bestaat zodanig dat $|f_x(u) - \frac{i}{n}| < \frac{1}{n}$. Hieruit volgt dat $(u, v) \in U(x, \frac{i}{n}, \frac{1}{n}, \delta) \subseteq \bigcup_{k=0}^n U(x, \frac{k}{n}, \frac{1}{n}, \delta)$.
- $(a, b) \times I \supseteq \bigcup_{k=0}^n U(x, \frac{k}{n}, \frac{1}{n}, \delta)$
Deze inclusie is triviaal wegens de definitie van $U(x, \frac{k}{n}, \frac{1}{n}, \delta)$.

Hieruit volgt dus dat we de open strook $(a, b) \times I$ inderdaad kunnen schrijven als de vereniging van eindig veel basis open verzamelingen. $\square$

Lemma 4.2.10. *π_x is een continue functie*

Bewijs. Laat $U \subseteq I$ een open verzameling zijn. Nu willen we bewijzen dat $\pi_x^{-1}(U) = U \times I$ ook een open verzameling is om te kunnen concluderen dat π_x continu is.

Merk op dat uit Lemma 4.2.9 direct volgt dat $U \times I$ open is. Dus π_x is continu. $\square$

Lemma 4.2.11. *Voor continue, gesloten afbeelding $f : X \rightarrow Y$ zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(i) f is irreducibel.

(ii) Voor iedere echte gesloten $A \subset X$ geldt $f(A) \neq Y$.

(iii) Voor iedere niet-lege, open verzameling $U \subseteq X$ is er een niet-lege, open verzameling $V \subseteq Y$ zodanig dat $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Bewijs. (i) is equivalent met (ii) wegens definitie. We willen de equivalentie tussen (ii) en (iii) aantonen. Dit doen we aan de hand van twee inclusies.

• (ii) $\implies$ (iii)

Neem aan dat voor iedere echte gesloten $A \subset X$ geldt $f(A) \neq Y$. Neem ook aan dat er een niet-lege, open $U \subseteq X$ is, zodat voor alle niet-lege, open $V \subseteq Y$ geldt $f^{-1}(V) \setminus U \neq \emptyset$. We gaan een tegenspraak afleiden.

$U \subseteq X$ is niet-leeg en open, dus $X \setminus U \subset X$ is een echte gesloten deelverzameling. Uit de eerste aanname volgt dat $f(X \setminus U) \neq Y$. Dit is equivalent met $Y \setminus f(X \setminus U) \neq \emptyset$. Bovendien is $f(X \setminus U)$ gesloten wegens de aanname dat f gesloten is. Kies nu $V = Y \setminus f(X \setminus U)$ dit is een niet-lege, open verzameling.

Nu geldt $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U)) \subseteq f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(f(X \setminus U)) = X \setminus (X \setminus U) = U$. Dit is in tegenspraak met de laatste aanname.

• (iii) $\implies$ (ii)

Neem aan dat voor alle niet-lege, open $U \subseteq X$ er een niet-lege, open $V \subseteq Y$ bestaat zodanig dat $f^{-1}(V) \subseteq U$. Neem ook aan dat er een echte gesloten verzameling $A \subset X$ is zodanig dat $f(A) = Y$. We gaan een tegenspraak afleiden.

Omdat $A \subset X$ een echte gesloten deelverzameling is, volgt dat $X \setminus A$ niet-leeg en open is. Nu kunnen we de eerste aanname toepassen en bestaat er een niet-lege, open $V \subseteq Y$ zodanig dat $f^{-1}(V) \subseteq X \setminus A$.

Ook geldt $V \subseteq Y = f(A)$, dus $f^{-1}(V) \subseteq A$.

Wegens de uniciteitseigenschap van een goed gedefinieerde functie f volgt nu dat dit een tegenspraak is omdat A en $X \setminus A$ disjunct zijn.

□

Lemma 4.2.12. *De afbeelding π_x is irreducibel.*

Bewijs. Wegens Lemma 4.2.11 is het voldoende om te laten zien dat voor alle niet lege, open $U \subseteq X$ er een $W \subseteq I$ bestaat zodanig dat $f^{-1}(W) \subseteq U$. Neem nu een willekeurige basis open verzameling $U(x, y, \epsilon, \delta)$. Dit is een verticaal interval verenigd met verticale stroken. Neem nu als W het open interval dat de doorsnede is van I en een van de stroken uit $U(x, y, \epsilon, \delta)$. Merk nu op dat $f^{-1}(W)$ gelijk is aan de strook die triviaal bevat zit in $U(x, y, \epsilon, \delta)$. Dus π_x is irreducibel. □

Dimensies

In Watson (1992) wordt in relatief weinig woorden bewezen dat de overdekkingsdimensie van de Fedorchuk-lijn gelijk is aan 1. In het onderstaande bewijs wordt dit in meer detail uitgewerkt.

Stelling 4.2.13. *De Fedorchuk-lijn heeft overdekkingsdimensie 1.*

Bewijs. Laat $\mathcal{U}$ een open overdekking zijn van V . Om te bewijzen dat de Fedorchuk-lijn overdekkingsdimensie 1 heeft, willen we een verfijning van $\mathcal{U}$ construeren van orde 1.

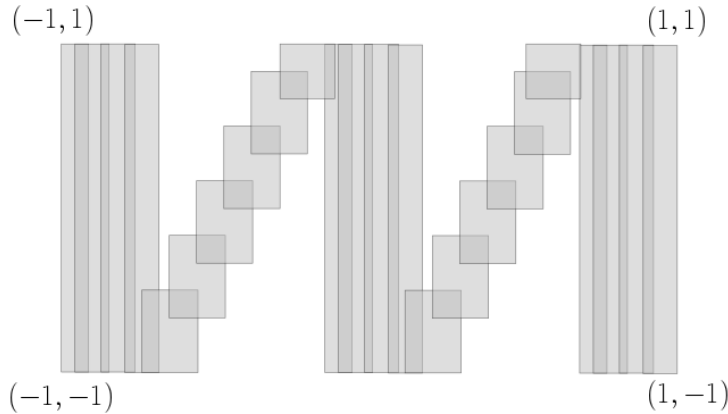
Als we een verfijning van orde 1 kunnen vinden van de overdekking bestaande uit basis open verzamelingen: $\{U(x, y, \epsilon_y, \delta_x) : \langle x, y \rangle \in V\}$, dan is dit automatisch ook een verfijning van iedere willekeurige open overdekking. Dus we kunnen ervan uitgaan dat $\mathcal{U} = \{U(x, y, \epsilon_y, \delta_x) : \langle x, y \rangle \in V\}$.

Definieer nu $F = \{r \in I : (\nexists U \in \mathcal{U}) \pi_x^{-1}(r) \subseteq U\}$. Merk op dat als we een $\pi_x(U(x, y, \epsilon_y, \delta_x)) \subseteq I$ beschouwen, we voor al deze elementen met zekerheid kunnen zeggen dat ze niet in F zitten, behalve voor $\{x\}$.

De claim is dat F een eindige deelverzameling is. Neem hiervoor het tegenovergestelde aan. Als F een oneindige deelverzameling is van I , dan volgt hieruit dat F tenminste één verdichtingspunt $p \in F$ bevat. Wegens Lemma 4.2.9 geldt dat er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $\pi_x(U(p, y, \epsilon, \delta)) \setminus \{p\} \subseteq I \setminus F$. Dit is in tegenspraak met het feit dat p een verdichtingspunt van F is. Dus F is inderdaad eindig en we kunnen schrijven $F = \{r_1, \dots, r_l\}$. Uit Lemma 4.2.9 volgt dat we nu de open stroken $\{I_{r_i} \times I\}_{1 \leq i \leq l}$ kunnen overdekken. Kies de breedte van deze stroken zodanig dat ze onderling disjunct zijn.

Nu kunnen we de overdekking van V opdelen in twee delen. Het overdekken van de open stroken $\{I_{r_i} \times I\}_{1 \leq i \leq l}$ en het overdekken van de gesloten stroken tussen de open stroken $\{C_i \times I\}_{1 \leq i \leq m}$. De open stroken kunnen worden overdekt op de manier zoals in het bewijs van Lemma 4.2.9. Zolang de verticale lijnen $\{\{r_i\} \times I\}_{1 \leq i \leq l}$ worden overdekt door een open overdekking van orde 1 volgt uit Lemma 4.2.1 dat de gehele open stroken zijn overdekt door een open overdekking van orde 1.

De gesloten stroken kunnen simpelweg worden overdekt door een open overdekking van orde 1



Figuur 4.2: Schematische weergave van de overdekking van orde 1 van de Fedorchuk-lijn

van dunne, open stroken omdat voor iedere $\pi_x(u, v)$ in deze ruimte geldt dat deze niet bevat is in F en dus dat $\{x\} \times I \subseteq U$ voor een $U \in \mathcal{U}$.

Om deze twee delen van de overdekking aan elkaar te lijmen en de orde te behouden, kiezen we de breedte van de intervallen, δ_{r_i} , slim, zodanig dat precies geldt dat $\sin \frac{1}{-\delta_{r_i} - r_i} = -1$ en dus ook $\sin \frac{1}{\delta_{r_i} - r_i} = 1$. Dit doen we met de motivatie dat de schematische structuur van Figuur 4.2.2 kan worden aangenomen door onze overdekking.

Merk op dat de orde nu inderdaad gelijk is aan 1 en de Fedorchuk-lijn dus overdekkingsdimensie 1 heeft. $\square$

Nu willen we bewijzen dat de grote inductieve dimensie van de Fedorchuk-lijn gelijk is aan 2 om te kunnen concluderen dat voor deze ruimte de Samenvallstelling inderdaad niet opgaat. Ook deze stelling heeft Watson opgenomen in Watson (1992). Zijn bewijs is echter wederom erg compact opgeschreven en bevat fouten. Bovendien is de originele tekst van het bewijs in

het Russisch. Vandaar dan Hart zo welwillend was om een uitgebreid en correct op te stellen van deze stelling. Aan de hand van dit bewijs is het onderstaande bewijs van Stelling 4.2.16 opgesteld. Voor dit bewijs hebben we echter eerst een ander resultaat nodig: de Stelling van Baire en een losstaand lemma. Deze zullen daarom eerst worden bewezen.

Ook wordt de het begrip *regulier open* veel gebruikt. Een verzameling $O \subseteq V$ is *regulier open* als en slechts als $O = (\overline{O})^\circ$.

Nu introduceren we de volgende notatie:

$$U(x, p, q, r, s) = (\{x\} \times (r, s)) \cup \{\langle u, v \rangle : u \in (p, q) \setminus \{x\} \text{ en } r < f_x(u) < s\}$$

$$U'(x, p, q, r, s) = U(x, p, q, r, s) \setminus (\{x\} \times I)$$

Lemma 4.2.14. *Laat O regelmatig open zijn in L en neem $p, q, r, s \in \mathbb{Q}$. De verzameling $F = \{x \in I : U(x, p, q, r, s) \subseteq O\}$ is gesloten in I .*

Bewijs. Laat $\langle x_n \rangle$ een rij in F zijn die naar een punt $x \in I$ convergeert; we bewijzen dat $x \in F$. Als volgt: neem $\langle u, v \rangle \in U'(x, p, q, r, s)$. Dan geldt $u \in (p, q)$, $u \neq x$, en $r < \sin \frac{1}{u-x} < s$. Wegens de continuïteit van de sinus weten we dat er een N is zó dat voor $n \geq N$ geldt dat $x_n \neq u$ en $r < \sin \frac{1}{u-x_n} < s$. Conclusie

$$U'(p, q, r, s) \subseteq \bigcup_n U(p, q, r, s) \subseteq O$$

Maar $\{x\} \times (r, s) \subseteq \overline{U'(p, q, r, s)} \subseteq \overline{O}$. En dus $U(x, p, q, r, s) \subseteq (\overline{O})^\circ = O$. □

Stelling 4.2.15. *(Stelling van Baire) Als X een volledige metrische ruimte is en $X = \bigcup_{i \geq 0} F_i$ met F_i is gesloten voor alle $i \geq 0$, dan is er een $i \geq 0$ zodanig dat $(F_i)^\circ \neq \emptyset$.*

Bewijs. Laat X een volledige metrische ruimte zijn. Neem aan dat $X = \bigcup_{i \geq 0} F_i$ met F_i is gesloten voor alle $i \geq 0$. Stel dat nu voor iedere $i \geq 0$ geldt dat $(F_i)^\circ = \emptyset$. Nu gaan we een tegenspraak afleiden.

Neem een willekeurig punt $x_0 \in F_0$ en merk op dat $B_{\frac{1}{2}}(x_0)$ niet geheel bevat kan zijn in F_0 omdat het inwendige van F_0 leeg is. Er is dus een $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}(x_0)$ zodanig dat $x_1 \in X \setminus F_0$. Dit is een open verzameling, dus Neem aan $x_1 \in F_1$. Nu doen we weer precies hetzelfde en merken we op dat $B_{\frac{1}{4}}(x_1)$ niet geheel bevat kan zijn in F_1 . Er is dus een punt $x_2 \in B_{\frac{1}{4}}(x_1)$ zodanig dat $x_2 \in X \setminus F_1$. Wegens de volledigheid van de metriek geldt $\bigcap_{n \geq 0} B_{2^{-n}}(x_n) \neq \emptyset$, maar dan is er dus een $x \in X$ waarvoor geldt $x \notin F_i$ voor alle $i \geq 0$. Dit is in tegenspraak met $X = \bigcup_{i \geq 0} F_i$. Dus moet er wel een $i \geq 0$ zijn zodanig dat $(F_i)^\circ \neq \emptyset$. □

Stelling 4.2.16. *De Fedorchuk-lijn heeft grote inductieve dimensie ten minste 2.*

Bewijs. Definieer de partitie $V = H_0 \sqcup F \sqcup H_1$. Hier geldt dat $H_0, H_1 \subseteq V$ disjuncte open verzamelingen zijn met $\{-1\} \times I \subseteq H_0$ en $\{1\} \times I \subseteq H_1$. Nu gaan we laten zien dat er een $x \in I$ is zodanig dat $\{x\} \times I \subseteq F$ en dus $\text{Ind}(F) \geq 1$.

We gebruiken weer de volgende notatie:

$$U(x, p, q, r, s) = (\{x\} \times (r, s)) \cup \{\langle u, v \rangle : u \in (p, q) \setminus \{x\} \text{ en } r < f_x(u) < s\}$$

We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat H_0 en H_1 regelmatig open zijn. Nu definiëren we ook $U_0 = \{t \in I : \{t\} \times I \subseteq H_0\}$ en $U_1 = \{t \in I : \{t\} \times I \subseteq H_1\}$. We analyseren de structuur van F en zijn projectie, $C = \pi_x(F)$, op de eerste coördinaat.

Merk eerst op dat als $(F)^\circ \neq \emptyset$ dan bevat F een verzameling van de vorm $U(x, p, q, r, s)$ en dus

zeker een verticale lijn $\{t\} \times I$. We nemen dus verder aan dat F nergens dicht is.

Dan is $H_0 \cup H_1$ een open en dichte deelverzameling van V en $U_0 \cup U_1$ is een open en dichte deelverzameling van I .

Dat laatste bewijzen we door het tegenovergestelde aan te nemen en een tegenspraak af te leiden. Neem een open interval $(a, b) \subseteq I$. Nu geldt dat $(a, b) \times I \subseteq V$ open is en dus een niet-lege doorsnede heeft met $H_0 \cup H_1$. We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat $H_0 \cap ((a, b) \times I) \neq \emptyset$. Nu bevat deze doorsnede dus een basis-open verzameling, maar dan is er een interval (c, d) met $(c, d) \times I \subseteq H_0 \cap ((a, b) \times I)$ en dus $(c, d) \subseteq U_0 \cap (a, b)$.

Dus we kunnen inderdaad concluderen dat $U_0 \cup U_1$ open en dicht is in I .

Verder geldt dat $F = \overline{H_0} \cap \overline{H_1}$. Dit bewijzen we aan de hand van twee inclusies:

- $F \subseteq \overline{H_0} \cap \overline{H_1}$
 Neem $\langle x, y \rangle \in F$. Omdat $\langle x, y \rangle \notin H_0 \cup H_1 = (\overline{H_0})^\circ \cap (\overline{H_1})^\circ$ volgt dat voor elke open verzameling U van $\langle x, y \rangle$ geldt dat $U \setminus \overline{H_0}$ en $U \setminus \overline{H_1}$ niet leeg zijn. Maar F is nergens dicht dus ook $U \setminus (F \cup \overline{H_0})$ en $U \setminus (F \cup \overline{H_1})$ zijn niet leeg. Maar die verzamelingen zijn gelijk aan respectievelijk $U \cap H_1$ en $U \cap H_0$. Omdat dit voor elke U geldt, volgt $\langle x, y \rangle \in \overline{H_0} \cap \overline{H_1}$.
- $\overline{H_0} \cap \overline{H_1} \subseteq F$
 Deze inclusie is triviaal.

Nu bekijken we het geval dat C een geïsoleerd punt heeft.

Stel dat $x \in C$ en $\epsilon > 0$ zó zijn dat $C \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) = \{x\}$. Dan geldt $(x, x + \epsilon) \subseteq U_0 \cup U_1$ en dus, wegens de samenhang van $(x, x + \epsilon)$ geldt $(x, x + \epsilon) \subseteq U_0$ of $(x, x + \epsilon) \subseteq U_1$, zeg de eerste mogelijkheid geldt. Wegens symmetrie geldt $(x - \epsilon, x) \subseteq U_0$ of $(x - \epsilon, x) \subseteq U_1$. Maar nu moet de tweede mogelijkheid gelden want anders volgt $(x - \epsilon, x + \epsilon) \setminus \{x\} \subseteq U_0$ en dus $(x - \epsilon, x + \epsilon) \times I \subseteq \overline{H_0}$, maar dan ook $(x - \epsilon, x + \epsilon) \times I \subseteq (\overline{H_0})^\circ = H_0$. Dit is in tegenspraak met de aanname dat $x \in C$.

Uit $(x, x + \epsilon) \subseteq U_0$ en $(x - \epsilon, x) \subseteq U_1$ volgt $\{x\} \times I \subseteq F$.

Als C dus een geïsoleerd punt heeft, dan is er een $x \in I$ zodanig dat $\{x\} \times I \subseteq F$. Dus we hoeven nu alleen nog maar te bewijzen dat hetzelfde geldt als C geen geïsoleerd punt heeft.

Neem aan dat C geen geïsoleerde punten heeft.

De verzameling C heeft drie soorten punten:

1. punten die randpunt zijn van een maximaal open interval binnen U_0 , deze vormen de verzameling D_0
2. punten die randpunt zijn van een maximaal open interval binnen U_1 , deze vormen de verzameling D_1
3. de andere punten, deze vormen de verzameling D_2 .

We gaan bewijzen dat D_0 en D_1 dicht liggen in C .

Neem $x \in C$ en neem $y \in I$ zó dat $\langle x, y \rangle \in F$. Neem nu een open interval (a, b) om x , de verzameling $(a, b) \times I$ is open in L en snijdt dus zowel H_0 als H_1 (want $\langle x, y \rangle \in \overline{H_0} \cap \overline{H_1}$). We vinden dan, wegens de irreducibiliteit van π de punten $u \in U_0 \cap (a, b)$ en $v \in U_1 \cap (a, b)$.

Van het maximale interval in U_0 om u ligt een van de randpunten tussen u en v en dus in (a, b) ; dit geldt ook voor een van de randpunten van het maximale interval om v binnen U_1 .

Dus D_0 en D_1 liggen inderdaad dicht in C .

We bekijken nu de ‘slechte’ punten van C . Een punt $x \in C$ is ‘slecht’ als $\{x\} \times I$ niet bevat is in F . Merk op dat het doel dus is om aan te tonen dat niet alle punten in C slecht zijn. Zij $x \in C$ een slecht punt. Er is een $y \in I$ met $\langle x, y \rangle \notin F$ en dus, wegens het feit dat H_0 en H_1 open zijn, is er een $i \in \{0, 1\}$ en een viertal $p, q, r, s \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $U(x, p, q, r, s) \subseteq H_i$. Dat wil zeggen, x is een element van de verzameling

$$C(p, q, r, s, i) = \{t \in C : U(t, p, q, r, s) \subseteq H_i\}$$

Merk op dat de volgende implicatie dus geldt. Als $x \in C$ een slecht punt is, dan geldt $x \in C(p, q, r, s, i)$ voor een $i \in \{0, 1\}$.

Ook geldt dat elke $C(p, q, r, s, i) \cap D_{1-i} = \emptyset$. Als dit niet zou gelden, dan zou dit in tegenspraak zijn met de definitie van D_{1-i} . Als $t \in D_{1-i}$ dan volgt namelijk uit de definitie van D_{1-i} dat $U(a, b, c, d, 1-i) \cap H_{1-i} \neq \emptyset$ voor *elk* viertal $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Dus is er geen enkel punt in D_{1-i} dat een omgeving heeft die geheel bevat is in H_i .

Omdat D_0 en D_1 dicht waren in C en elke $C(p, q, r, s, i) \cap D_{1-i} = \emptyset$ kunnen we nu concluderen dat elke verzameling $C(p, q, r, s, i)$ nergens dicht is in de compacte metrische ruimte C . Bovendien volgt uit Lemma 4.2.14 dat elke $C(p, q, r, s, i)$ gesloten is.

Nu kunnen we de Stelling van Baire toepassen en stellen dat de vereniging van al die verzamelingen $C(p, q, r, s, i)$ niet gelijk aan C .

Er is dus een punt $x \in C$ dat niet in een verzameling $C(p, q, r, s, i)$ zit. Wegens de eerder vastgestelde implicatie dat alle slechte punten in C wél bevat zijn in een $C(p, q, r, s, i)$, kunnen we concluderen dat niet elk punt in C slecht is (er zijn zelfs heel veel niet-slechte punten). Voor elk niet-slecht punt x geldt $\{x\} \times I \subseteq F$.

Dus geldt inderdaad dat $\text{Ind}(F) \geq 1$ en heeft de Fedorchuk-lijn een grote inductieve dimensie van ten minste 2. $\square$

Nu kunnen we dus concluderen dat de Samenvallstelling inderdaad niet opgaat voor de Fedorchuk-lijn omdat de overdekkingsdimensie gelijk is aan 1 en de grote inductieve dimensie gelijk is aan 2. Overigens is de kleine inductieve dimensie ook gelijk aan 2, maar daar gaan we verder niet op in.

Bibliografie

- Alexandroff, P. en Urysohn, P. (1929). Memoire sur les espaces topologiques compacts. *Verh. Konink. Acad. Wetensch. Amsterdam*, 14:1–96.
- Bruin, P. (2017). Topologie. Universiteit Leiden.
- Comfort, W.W. en Negrepontis, S. (2012). *The Theory of Ultrafilters*, volume 211. Springer Science & Business Media.
- Dijkstra, J.J. en van Mill, J. (1992). Topological Classification of Infinite-dimensional Spaces with Absorbers. In en J. van Mill, M. H., editor, *Recent Progress in General Topology*, pages 145–165. North-Hollen Publishing Co., Amsterdam.
- Engelking, R. (1989). General Topology (revised en completed ed.) Heldermann Verlag.
- Hart, K.P. en Nagata, J. en Vaughan, J.E. (2003). *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier.
- Hart, K.P. en van Mill, J. en Simon, P. (2013). *Recent Progress in General Topology III*. Springer.
- Lay, S. (2015). *Analysis with an Introduction to Proof*. Pearson.
- Pospíšil, B. (1937). Remark on bicomact spaces. *Annals of Mathematics*, pages 845–846.
- Pospíšil, B. (1939). *On Bicomact Spaces*. Přírodovědecká fakulta.
- Steen, L.A. en Seebach, J.A. (1978). *Counterexamples in Topology*, volume 18. Springer.
- van Mill, J. (1988). An Introduction to $\beta\omega$ in, K. Kunen en J.E. Vaughan, Handbook of Set-Theoretic Topology.
- Watson, S. (1992). The Construction of Topological Spaces: Planks en Resolutions. *Recent progress in general topology*, 20.