

Dreidimensionales, nichtlinear-elastisches Materialmodell für Holz unter Berücksichtigung der Schädigung

CARMEN SANDHAAS
PhD Student
Timber Structures
University of Technology Delft
Seit Oktober 2011:
Lehrstuhl für Holzbau
KIT Karlsruhe
sandhaas@kit.edu



Bis 2011 PhD-student an der Delft University of Technology. Seit Oktober 2011 wissenschaftliche Angestellte am Lehrstuhl für Holzbau des KIT. Die vorgestellte Arbeit entstand während des PhD-Projektes an der TU Delft.

Zusammenfassung

Ein holistisches konstitutives Modell für das Material Holz wurde entwickelt, das das dreidimensionale Verhalten mit duktilen Versagensmechanismen bei Druckbelastung und sprödem Versagen bei Zug- und Schubbelastung sowie die großen Festigkeitsunterschiede in den einzelnen Materialrichtungen abbilden kann. Das Modell basiert auf Ansätzen der Schädigungsmechanik, die die Spannungs-Dehnungsbeziehungen nach dem Erreichen der Elastizitätsgrenze mit nichtlinear-elastischen Algorithmen beschreiben. Das Material Holz wurde als orthotropes Kontinuum modelliert mit einzelnen Schädigungsparametern für die definierten Versagensarten. Die Versagenskriterien, die die Elastizitätsgrenzen bestimmen, formen keinen einfachen Versagenskörper im Spannungsraum, sondern sind stückweise definiert; der 6D Versagenskörper setzt sich also aus unterschiedlichen Körpern zusammen. Die Schädigungsparameter können in der Auswertung angezeigt werden. Somit kann eine zunehmende Faserstauchung bei Druckbelastung in Faserrichtung ebenso identifiziert werden wie bspw. eine Risszunahme im zugbeanspruchten Bereich.

Das Modell wurde als Subroutine in ein bestehendes FE-Programm eingebaut und zur Modellierung von Lochleibungsversuchen und zweischnittigen Verbindungen mit Stabdübeln unter Verwendung unterschiedlicher Holzarten eingesetzt. Die Modellierungsergebnisse zeigen deutlich eine zunehmende Schwächung der Querrichtungen durch lokales Entfestigungsverhalten bei zunehmenden Verformungen, während das globale Lochleibungs- oder Verbindungsverhalten duktil bleibt. Das Modell ist in der Lage, beobachtete Versagensmechanismen abzubilden. Ein großes Problem bleibt die Verfügbarkeit von benötigten Materialparametern für die Steifigkeit und Festigkeit sowie die Entfestigung. Dies gilt besonders für selten untersuchte Holzarten wie tropisches Hartholz, die jedoch sehr wohl in der Praxis verwendet werden.

1. Schädigungsmechanik

Bevor das Materialmodell vorgestellt wird, muss die grundlegende Idee des gewählten schädigungsmechanischen Ansatzes kurz erläutert werden. Schädigungsmechanische Ansätze sind weitverbreitet zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von faserverstärkten Kunststoffen. Diese Werkstoffe weisen ebenso wie Holz eine hohe Anisotropie auf und versagen unter Zug- und Schubbelastungen spröde. Mit schädigungsmechanischen Ansätzen kann mit relativ wenig Aufwand ein orthotropes entfestigendes, aber auch ein duktileres Materialverhalten abgebildet werden.

Das nichtlinear-elastische Verhalten eines Materials wird bei der Schädigungsmechanik durch eine schrittweise Modifikation der Steifigkeitsmatrix abgebildet. Die Spannungsinkremente werden über eine variable Steifigkeitsmatrix aus den Verzerrungsincrementen errechnet:

$$\sigma_{ij} = (1 - d) D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

In Gleichung (1) ist zu sehen, dass der eingeführte Schädigungsparameter, $0 < d < 1$, den Wert der elastischen Steifigkeitsmatrix D modifiziert. Bei $d = 0$ ist keine Schädigung vorhanden und Gleichung (1) reduziert sich auf das linear-elastische Hooke'sche Gesetz. Bei $d = 1$ hingegen ist das Material vollkommen geschädigt. Bei isotroper Schädigung muss ein Schädigungsparameter definiert werden, bei anisotroper Schädigung besteht das konstitutive Gesetz aus mehreren Parametern d_i .

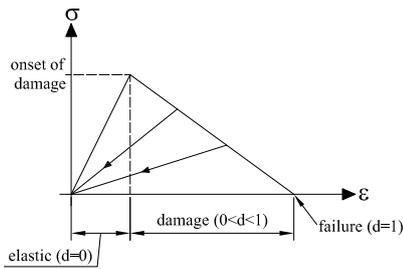


Abb. 1 Schädigungsmechanik

Abb. 1 zeigt eine grafische Darstellung des Ansatzes. Bei Erreichen der Elastizitätsgrenze beginnt die Schädigung des Materials. Dieser Schädigungsbeginn kennzeichnet den Entwicklungsbeginn des Parameters d , der konstant gewählt werden kann oder linearen, quadratischen oder exponentiellen Gesetzen folgt. In Abb. 1 ist zu sehen, dass die Entlastung immer zurück zum Ursprung geht, also eine Entlastung entlang der Sekantensteifigkeit stattfindet und keine bleibenden plastischen Verformungen abgebildet werden können. Schädigungsmechanische Ansätze erfordern folglich eine Festlegung des Schädigungsbeginns und Gesetze zur Schädigungsentwicklung.

Schädigungsmechanik kann über sogenannte ‚material subroutines‘ in inkrementell-iterative FE-Programme implementiert werden, wobei für die Modellierung von Verbindungen notwendige Formulierungen wie Beschreibung der finiten Elemente, Kontakt- und Lösungsalgorithmen bereits bestehen.

2. Schädigung von Holz

Der erste Schritt bei der Entwicklung eines Materialmodells ist die Identifikation der zu erfassenden Versagensmechanismen. Es muss nicht nur der Übergang von linearem zu nichtlinearem Verhalten festgelegt werden, sondern auch die Art der Schädigung wie bspw. duktil oder entfestigend identifiziert werden. Desweiteren gilt es, mögliche Spannungsinteraktionen zu berücksichtigen.

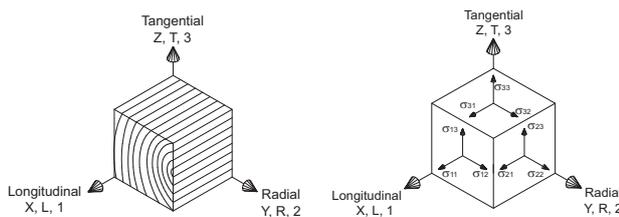


Abb. 2 Definition Koordinaten

Ein wichtiger Schritt hierzu ist die Analyse von experimentellen, einaxialen und mehraxialen Untersuchungen, um ein orthotropes Modell für Holz entwickeln zu können. Nach diesen Vorstudien [1] können die Eckpunkte für ein vereinfachtes Materialmodell wie im Folgenden vorgestellt kurz zusammengefasst werden. Abb. 2 zeigt die definierten Materialrichtungen und zugehörigen Spannungskomponenten (Reihenfolge im Spannungstensor siehe Gleichung (9)).

2.1 Versagensflächen - Schädigungsbeginn

Klassische elasto-plastische Ansätze wie das weitverbreitete Hill-Kriterium [2] verwenden Ellipsoide, um die Elastizitätsgrenze (Schädigungsbeginn) zu definieren. Holz mit seinen großen Festigkeitsunterschieden ist jedoch nicht mit solchen Einzelkörpern abzubilden [3].

Eine einfache Lösung dieses Problems ist die abschnittsweise Definition von Versagensflächen, die pro Spannungsquadrant andere mathematische Formulierungen aufweisen können. Nachteil einer solchen abschnittswisen Formulierung ist, dass die Spannungsvorzeichen bei jedem Inkrement überprüft werden müssen, um die notwendige Fallunterscheidung pro Spannungs Komponente durchführen zu können (i.e. $\sigma_{11} > 0$ Zugspannungen; $\sigma_{11} < 0$ Druckspannungen). Für Holz wurden acht Versagensflächen (FM I – VIII) definiert, wovon vier beispielhaft in Abb. 3 dargestellt sind (weitere siehe [1]).

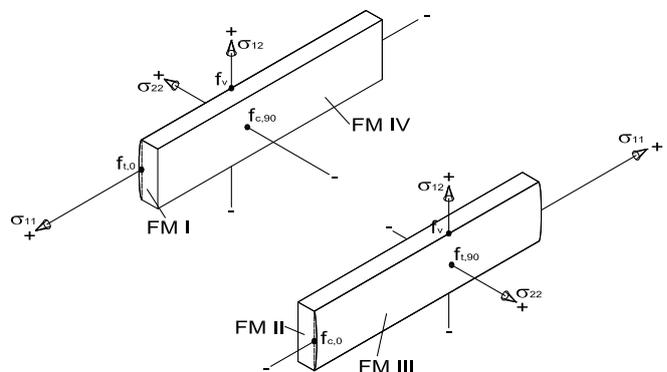


Abb. 3 Versagensflächen

Es ist zu sehen, dass für alle Versagenszustände in Faserrichtung sowie für Querdruck Maximalspannungskriterien (vgl. Gleichung (2)) ausgewählt wurden, während quadratische Spannungsinteraktionen lediglich für Spaltversagen in der LT-Ebene (bzw. LR-Ebene) berücksichtigt werden.

Weiterhin muss auch Versagen durch Übertreten der Schubfestigkeiten bei gleichzeitigem Wirken von Querdruck abgebildet werden. Im Folgenden ist als Beispiel das Maximalspannungskriterium FM I für Versagen unter Zugspannung in Faserrichtung gegeben:

$$\text{Falls } \sigma_{11} \geq 0: \quad F_{t,0}(\sigma) = \frac{\sigma_{11}}{f_{t,0}} \leq 1 \quad (2)$$

In der Implementation müssen die Versagenskriterien von der Belastungsgeschichte abhängig sein, was durch Umformulierung der Kriterien mit einem Geschichtsparameter κ wie in Gleichung (3) gezeigt erreicht wird (der untere Index 'M' steht für die verschiedenen Versagenskriterien). Weiterhin müssen wie bei elasto-plastischen Ansätzen die Kuhn-Tucker-Bedingungen aus Gleichung (4) erfüllt werden.

$$\phi_M(F_M, \kappa_M) = F_M - \kappa_M \leq 0 \quad (3)$$

$$\phi_M \leq 0, \quad \dot{\kappa}_M \geq 0, \quad \dot{\kappa}_M \phi_M = 0 \quad (4)$$

2.2 Schädigungsparameter und Schädigungsbeginn

Neun Schädigungsparameter wurden definiert, die sich beim Überschreiten der jeweiligen Versagenskriterien entwickeln:

1. $d_{t,0}$ = Schädigung Zug in Faserrichtung;
2. $d_{c,0}$ = Schädigung Druck in Faserrichtung;
3. $d_{t,90R}$ = Schädigung Zug quer zur Faserrichtung, radiale Richtung (LT-Ebene);
4. $d_{c,90R}$ = Schädigung Druck quer zur Faserrichtung, radiale Richtung;
5. $d_{t,90T}$ = Schädigung Zug quer zur Faserrichtung, tangentielle Richtung (LR-Ebene);
6. $d_{c,90T}$ = Schädigung Druck quer zur Faserrichtung, tangentielle Richtung;
7. d_{vR} = Schädigung in Längsschub, LT-Ebene;
8. d_{vT} = Schädigung in Längsschub, LR-Ebene;
9. d_{roll} = Schädigung in Rollschub, RT-Ebene.

Die Parameter für Schädigung unter Druckspannungen folgen einer elastisch-ideal plastischen Entwicklung wie in Abb. 4a gezeigt, während die Schädigungsparameter in Zug und Schub einer linearen Entfestigung folgen, Abb. 4b. Dies sind sehr vereinfachte Annahmen für Holz, allerdings sind sie zur Evaluierung eines schädigungsmechanischen Ansatzes ausreichend.

Die Entwicklung des Parameters $d_{t,0}$ bspw. wird durch Überschreiten des Versagenskriteriums unter Zugbeanspruchung in Faserrichtung FM I, gegeben in Gleichung (2), ausgelöst. Die Entwicklung der Schädigungsparameter darf allerdings nicht abhängig von dem Verzerrungsniveau sein, sondern die Schädigung muss sich in Abhängigkeit vom Parameter κ entwickeln, der in Gleichungen (3) und (4) definiert ist. Gleichung (5) definiert das Entwicklungsgesetz des Schädigungsparameters für den elastisch-ideal plastischen Fall, Gleichung (6) dasjenige für den spröden Fall mit E = Elastizitäts-modul, f_{max} = Festigkeit und G_f = Bruchenergie des Materials.

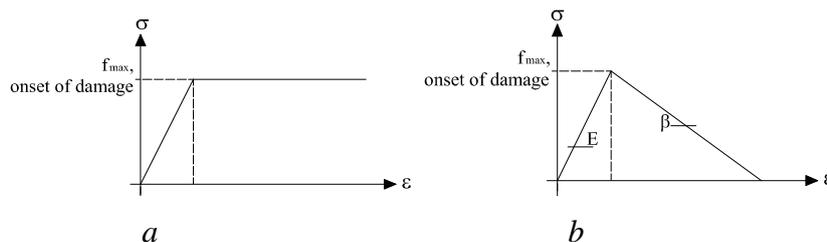


Abb. 4 Schädigungsentwicklung, a elastisch-ideal plastisch, b entfestigend

$$d(\kappa_M) = 1 - \frac{1}{\kappa_M} \quad (5)$$

$$d(\kappa_M) = 1 - \frac{1}{f_{\max}^2 - 2G_f E} \left(f_{\max}^2 - \frac{2gG_f E}{\kappa_M} \right) \quad (6)$$

3. Konstitutives Modell

Die effektiven Spannungen σ^{ef} sind diejenigen Spannungen, die auf das unbeschädigte Material einwirken. Die Beziehung dieser effektiven Spannungen σ^{ef} mit den nominalen Spannungen σ über den sogenannten ‚damage operator‘ \mathbf{M} ist in Gleichung (7) gegeben. Der Hooke'sche Zusammenhang zwischen Verzerrungen und effektiven (elastischen) Spannungen über die elastische Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{C}^{el} ist ebenfalls in Gleichung (7) gegeben. Der damage operator \mathbf{M} beinhaltet die oben definierten Schädigungsparameter nur in den diagonalen Termen (Gleichung (8) mit Reihenfolge der Spannungskomponenten Gleichung (9)). Damit kann nun die Schädigungsmatrix \mathbf{C}^{dam} bestimmt werden und damit die Beziehung zwischen nominalen Spannungen und Verzerrungen im Fall einer Schädigung, Gleichung (10).

$$\sigma^{ef} = \mathbf{M}\sigma \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \mathbf{C}^{el} : \sigma^{ef} \quad (7)$$

mit:

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-d_{t/c,0}} & \frac{1}{1-d_{t/c,90R}} & \frac{1}{1-d_{t/c,90T}} & \frac{1}{1-d_{vR}} & \frac{1}{1-d_{vT}} & \frac{1}{1-d_{roll}} \right] & \text{if } i=j \\ 0 & & & & & & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

$$\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}]^T \quad (9)$$

$$\varepsilon = \mathbf{C}^{el} \sigma^{ef} = \mathbf{C}^{el} \mathbf{M} \sigma = \mathbf{C}^{dam} \sigma \quad (10)$$

Es wird keine Interaktion zwischen den Schädigungsparametern modelliert. Ein Versagen in Querkzug bedeutet zum Beispiel nicht, dass das Holz keinen Längszug mehr aufnehmen kann. Desweiteren wird keine Vorschädigung modelliert, eine Schädigung in Längsdruck verursacht bspw. keine Schädigung in einem nachfolgenden Belastungszyklus in Längszug.

Insgesamt werden zur vollständigen dreidimensionalen Beschreibung des Materials Holz 17 Materialparameter benötigt, die für drei Holzarten beispielhaft in Tab. 1 gegeben sind. Die Bestimmung dieser benötigt 17 mechanischen Eigenschaften sind insbesondere für die Laubholzarten mit grossen Unsicherheiten behaftet. Dies liegt zum einen an ihrer Nichtverfügbarkeit in der Literatur (bspw. Werte für Bruchenergien von Azobé) und zum anderen an der grossen Eigenschaftsstreuung [1].

Abb. 5 zeigt ein Fließdiagramm des entwickelten Schädigungsmodells für Holz. Ein neu entwickeltes konstitutives Modell muss vor der Anwendung in Lochleibungs- oder Verbindungsmodellen einige Validationsschritte durchgehen, in denen u.a. die Netzabhängigkeit, unterschiedliche Belastungen, Materialrichtungen oder Inkrementgrößen geprüft werden. Aber auch bei Validationen an Modellen, die aus nur einem finiten Element bestehen, sind bemerkenswerte und für Holzbauingenieure interessante Resultate zu beobachten. Ein Beispiel dafür ist in Abb. 6 gegeben. Oben wird das Ein-Element-Modell (lineares 3D Element mit 8 Integrationspunkten) mit den Randbedingungen gezeigt, während unten Kraft-Verschiebungskurven für unterschiedliche Kraft-Faser-Winkel ($\alpha = 0, 5, 10, 20, 30, 45, 60, 70, 80, 85, 90$ Grad) gegeben sind. Der Einfluss des spröden Schubversagens ist deutlich zu sehen. Während 0° und 90° sich elastisch-ideal plastisch verhalten, ist dies für Winkel zwischen 20° und 45° nicht der Fall.

Tabelle 1: Materialparameter, Fichte (*Picea abies*), Buche (*Fagus sylvatica*), Azobé (*Lophira alata*)

Parameter	Einheit	Fichte	Buche	Azobé
E_{11}		11000	13000	20000
$E_{22}=E_{33}$		370	860	1330
$G_{12}=G_{13}$		690	810	1250
G_{23}		50	59	91
$f_{t,0}$	MPa	24	41	72
$f_{c,0}$		36	45	58
$f_{t,90}$		0.7	1.0	1.0
$f_{c,90}$		4.3	14.2	23.2
f_v		6.9	6.9	8.6
f_{roll}		0.5	0.5	0.6
$G_{f,0}$	N/mm	60	100	180
$G_{f,90}$		0.5	0.71	0.71
$G_{f,v}$		1.2	1.2	1.5
$G_{f,roll}$		0.6	0.6	0.7
η	-	0.0001	0.0001	0.0001

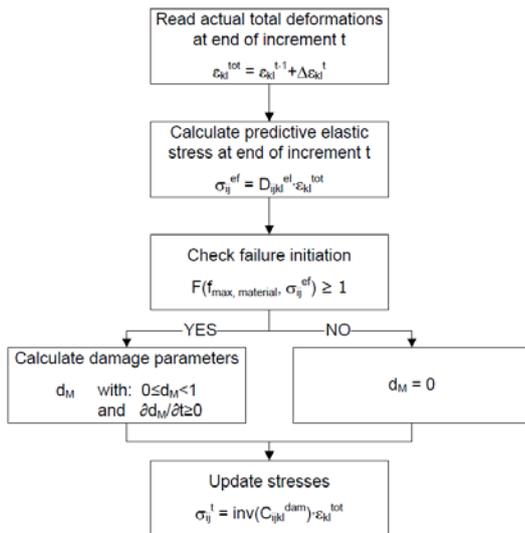


Abb. 5 Fließdiagramm

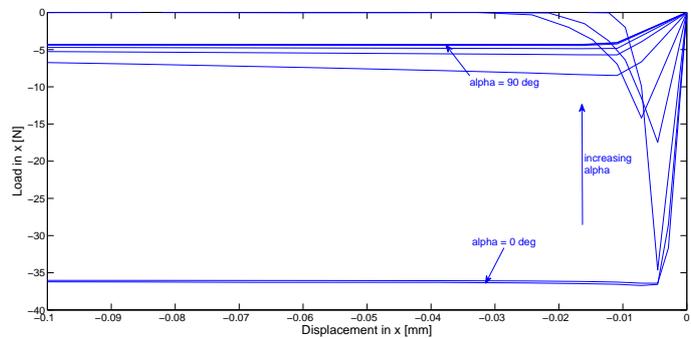
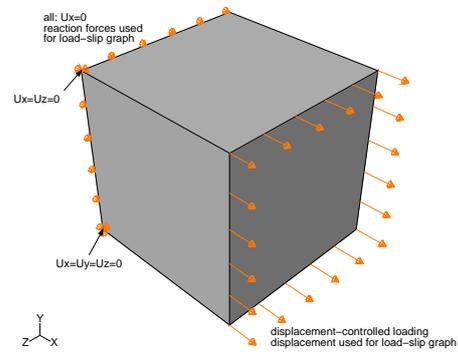


Abb. 6 Ein-Element-Modell und Kraft-Verschiebungskurven für unterschiedliche Kraft-Faser-Winkel

4. Lochleibungsversuche

Mit dem entwickelten konstitutiven Modell wurden Material-, Lochleibungs- und Verbindungsmodelle entwickelt, simuliert und mit Versuchsergebnissen verglichen. Als Beispiel seien hier zwei Lochleibungsmodelle (mit 24mm Stabdübel) gezeigt, mit Fichtenholz in Abb. 7 und mit Azobé in Abb. 8. In Abb. 7 ist die Schädigung durch Druck in Faserrichtung (Abb. 7a) und durch Querzug (Abb. 7c) gut zu erkennen. Das konstitutive Modell vermag einzelne Versagensmechanismen zu identifizieren. Abb. 8 zeigt den Verlauf der Lochleibungsfestigkeit bei wachsenden Verformungen. Das Modell vermag die Steifigkeit und den ersten Abschnitt des nichtlinearen Verhaltens gut vorherzusagen. Dann jedoch tritt numerische Entfestigung auf, sogenannte ‚spurious energy modes‘ in den Elementen direkt unterhalb des Stabdübels. Die spröde Entfestigung in Abb. 8 entspricht nicht dem physischen Versagen, sondern wird durch 3D-Kollaps der finiten Elemente direkt unterhalb des Stabdübels ausgelöst.

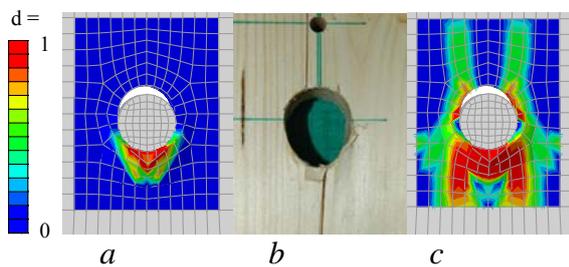


Abb. 7 Lochleibungsversuch Fichte
a Schädigungsparameter $d_{c,0}$
b Experiment
c Schädigungsparameter $d_{t,90}$

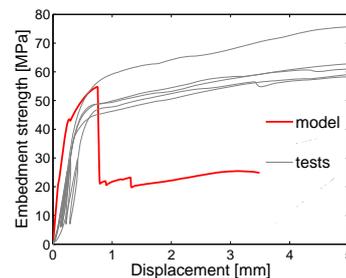


Abb. 8 Lochleibungsfestigkeit-Verschiebungskurven, Modell und Versuche, Holzart Azobé

5. Schlussfolgerungen

Trotz der noch zu beobachtenden numerischen Probleme, im speziellen der spurious energy modes, ist der Ansatz der Schädigungsmechanik vielversprechend, um innovative Materialmodelle für Holz zu entwickeln. Versagensmechanismen können identifiziert werden und sind gut visualisierbar durch ihre Zuordnung zu den Schädigungsparametern, die als ‚solution-dependent state variables‘ im Postprocessing des FE-Programmes erhältlich sind. ‚Fließen‘ unter hohen Druckspannungen mit gleichzeitigem sprödem Verhalten unter Zug- und Schubbelastungen kann erfasst werden.

6. Literatur

- [1] Sandhaas C.: *Mechanical behaviour of timber joints with slotted-in steel plates*. PhD thesis, Delft University of Technology, in preparation.
- [2] Hill R.: A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings Royal Society (London), Series A*, 193, 1948, pp 281-297
- [3] Sandhaas C., Van de Kuilen J.W.G.: Approaches for numerical modelling of timber joints. *Doktorandenkolloquium*. Stuttgart, Germany, 2008.