

ANALYSE VAN DE VOORTPLANTING
EN DE VERVORMING VAN
GEBAGGERDE GATEN OP DE NIGER

DEEL III

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

AFDELING DER CIVIELE TECHNIEK

VAKGROEPEN VLOEISTOFMECHANICA/

WATERBOUWKUNDE

Analyse van de voortplanting en de vervorming
van gebaggerde gaten op de Niger

Deel III

Vakgroep: Waterbouwkunde
Vakgroep: Vloeistofmechanica

Een woord vooraf

Op deze plaats past een woord van dank aan allen die door middel van ideeën, adviezen en begeleiding hebben bijgedragen aan de totstandkoming van dit afstudeerrapport.

Allereerst betreft dit Prof. Ir. J.F. Agema en zijn medewerkers Ir. A. Prins, Ir. J. Stuip en Ir. A.M. Sutmuller die vanuit de vakgroep Waterbouwkunde het hoofdafstudeerontwerp hebben begeleid. Dit betreft de hoofdstukken 1 tot en met 7 en hoofdstuk 11.

Daarnaast werd een deelontwerp bij de vakgroep Vloeistofmechanica gedaan. Dit betreft hoofdstuk 8 tot en met 10. De afstudeerdocent voor dit deelontwerp was Prof. Dr. Ir. C.B. Vreugdenhil. Ook bij Prof. Dr. Ir. M. de Vries, Dr. Ir. N. Booy en Ir. J.S. Ribberink konden wij met onze vragen terecht.

De ingenieursbureau's Nedeco en Haskoning willen wij gaarne bedanken voor de door hun verstrekte informatie. Constance Terink willen wij gaarne bedanken voor het keurig verzorgde type-werk.

M.C.L.M. van Mierlo

G.J.H. Vergoer

juni 1981

HOOFDSTUK 0 : Inleiding

		blz.
§ 0-1	Algemeen	1
§ 0-2	Doel afstudeerwerk	2

HOOFDSTUK 1 : De rivier de Niger

		blz.
§ 1-1	Algemene beschrijving van het stroom- gebied van de Niger	4
§ 1-2	Neerslag en Verdamping	13
§ 1-3	Beschrijving van het afvoerregime	16
§ 1-4	Veranderingen van het afvoerregime van de Beneden-Niger	17
§ 1-4.1	De invloed van het Kainji-reservoir op het afvoerregime	18
§ 1-4.2	De invloed van het Kainji, Jebba- en Shiroro-reservoir op het afvoerregime	21
§ 1-4.3	De invloed van het Kainji-, Jebba-, Shiroro- en het Lokoja reservoir op het afvoerregime	24
§ 1-5	Riviertypen	48
§ 1-6	Beschrijving van het sedimenttransport	49
§ 1-7	De invloed van de verandering van het afvoerregime op de morfologie van de rivier	54
§ 1-8	De invloed van een dam op de bodemlig- ging benedenstrooms van de dam	57

HOOFDSTUK 2: Sedimenttransportformules

		blz.
§ 2-1	De geteste sedimenttransportformules	60
§ 2-1.1	De aangepaste formule van Meyer-Peter-Müller	60
§ 2-1.2	De formule van Meyer-Peter-Müller	64
§ 2-1.3	De formule van Rottner	65
§ 2-1.4	De formule van Ackers en White	66
§ 2-1.5	De formule van Engelund en Hansen	68
§ 2-1.6	De formule van Einstein en Brown	69
§ 2-1.7	De formule van Inglis en Lacey	70
§ 2-2	De beschikbare sedimenttransportmetingen	72
§ 2-3	De berekeningen uitgevoerd met de formules vermeld in § 2-1	75
§ 2-3.1	Berekening met aangepaste formule van Meyer-Peter-Müller	75
§ 2-3.2	Berekening met formule van Meyer-Peter-Müller	75
§ 2-3.3	Berekening met formule van Rottner	76
§ 2-3.4	Berekening met formule van Ackers en White	76
§ 2-3.5	Berekening met formule van Engelund en Hansen	76
§ 2-3.6	Berekening met formule van Einstein en Brown	77
§ 2-3.7	Berekening met formule van Inglis en Lacey	77
§ 2-4	Berekening van de lineaire regressielijnen	93
§ 2-5	Keuze van de sedimenttransportformule	105

HOOFDSTUK 3 : Afschatting van de ruwheid

		blz.
§ 3-1	Inleiding	108
§ 3-2	Scheiding van korrelruwheid en bedruwheid	109
§ 3-2.1	De "gemeten" C-waarden	110
§ 3-2.2	Einstein-Barbarossa	112
§ 3-2.3	Engelund-Hansen	116
§ 3-2.4	Lovera-Kenedy / Alam-Kenedy	122
§ 3-3	Keuze methode C-waarden bepaling	130
§ 3-4	Afschatting van de C-waarden in de "te baggeren" gaten	140

HOOFDSTUK 4 : Gevoeligheid C-waarde op het sedimenttransport
in het gat

blz.

§ 4-1	Inleiding	149
§ 4-2	Berekening van de verhanglijnen over de vijf "gatvormen"	151
§ 4-2.1	Berekening van de verhanglijnen met C-waarden bepaald met de afschattingsmethode van Engelund en Hansen	154
§ 4-2.2	Berekening van de verhanglijnen met C-waarden die ook benedenstrooms op de rivier gelden	159
§ 4-3	Berekening van de sedimenttransporten in de diverse gatvormen	164
§ 4-4	Analyse van de invloed die een foutieve konstante van Chezy (C) heeft op de in het "gebaggerde gat" optredende totale sedimenttransporten	168
§ 4-4.1	De formules waarmee de relatieve fouten in de totale sedimenttransporten kunnen worden berekend	168
§ 4-4.2	Toetsing van de formules waarmee de relatieve fouten in de totale sedimenttransporten kunnen worden berekend.	173
§ 4-4.3	Mag de verhanglijn over het "te baggeren" gat met de direkt benedenstrooms van het gat aanwezige C-waarde worden berekend?	180
§ 4-5	Interpretatie van de in § 4-3 berekende sedimenttransporten met betrekking tot de vervorming van het gebaggerde gat	185
§ 4-5.1	Bovenstrooms van het "te baggeren" gat	185

§ 4-5.2	Hoe plant het "te baggeren" gat zich voort	194
§ 4-6	Het baggermaterieel waarmee de vijf gat- vormen kunnen worden gebaggerd	196
§ 4-6.1	De diverse soorten baggerwerktuigen	197
§ 4-6.2	Het horizontale transport van het "gebaggerde zand" over de rivier naar het op te spuiten terrein	201

HOOFDSTUK 5 : Stelsel toe te passen vergelijkingen

blz.

§ 5-1	Basisvergelijkingen	204
§ 5-2	Stelsel toe te passen vergelijkingen	210
§ 5-3	De aanpassingslengte van de concentratie verticaal van het bodemtransport	214
§ 5-3.1	Het onderzoek van Kerssens	214
§ 5-3.2	Berekening van de W_s / k_{u_x} -waarden	219
§ 5-3.3	De gevoeligheid van de W_s / k_{u_x} -waarden voor foutieve C-waarden	229
§ 5-3.4	Berekening van de W_s / k_{u_x} -waarden bovenstrooms en benedenstrooms van de gebaggerde gaten	235
§ 5-3.5	Conclusie t.a.v. de berekende W_s / k_{u_x} -waarden	240

HOOFDSTUK 6 : Analyse karakteristieke voortplantingssnelheid
bij diverse continuïteits vergelijking

blz.

§ 6-1	Inleiding	244
§ 6-2	Waar het zand in de rivier kan worden gewonnen	245
§ 6-3	De gecombineerde één-dimensionale beweging/continuïteits vergelijking voor het water	248
§ 6-4	De één-dimensionale continuïteits vergelijking voor het sediment $\partial s_t / \partial x + \partial z / \partial t = 0$	251
§ 6-5	De één-dimensionale continuïteits vergelijking voor het sediment $\partial s_t / \partial x + \partial z / \partial t + \partial c_a / \partial t = 0$	256
§ 6-6	De één-dimensionale continuïteits vergelijking voor het sediment die geldt tijdens het baggeren $\partial s_t / \partial x + \partial z / \partial t + q_z / B.L. = 0$	263

HOOFDSTUK 7 : De Schematisatie

blz.

§ 7-1	Inleiding	271
§ 7-2	De schematisatie gegevens	272
§ 7-2.1	Het gekozen referentie niveau	272
§ 7-2.2	De bodemligging t.o.v. Lagos Datum	272
§ 7-2.3	Het verloop van de rivierbreedte	272
§ 7-2.4	De waarden voor d_{50} , d_{90} , W_s	274
§ 7-2.5	De geschematiseerde afvoerregimes met bijbehorende C-waarden en peilschaal aflezingen	274
§ 7-2.6	De verhanglijnen over de geschematiseerde rivier	284
§ 7-2.7	De morfologisch doorgerekende schematisatie	288
§ 7-3	De wijze waarop is geschematiseerd	290
§ 7-3.1	De keuze van het referentie niveau	290
§ 7-3.2	Bepaling van de gemiddelde waarden van de d_{50} , d_{90} en valsnelheid W_s per traject	291
§ 7-3.3	Bepaling van de bodemligging	291
§ 7-3.4	Bepaling van de rivierbreedten	297
§ 7-3.5	Methode om te controleren of de schematisatie een globale evenwichtsligging der rivier is	303

HOOFDSTUK 8 : Numerieke methoden en hun eigenschappen

		blz.
§ 8-1	Numerieke methoden	305
§ 8-2	De eindige differentie-methode	307
§ 8-3	De eindige differentie-methoden	310
§ 8-3.1	Het impliciete schema	310
§ 8-3.2	Het expliciete schema	311
§ 8-4	De differentie-schema's	313
§ 8-4.1	De differentie-schema's voor vergelijking 8-5	313
§ 8-4.2	De differentie-schema's voor vergelijking 8-6	316
§ 8-5	Numerieke eigenschappen	318
§ 8-5.1	De vergelijking waarop de nauwkeurighedsanalyse wordt toegepast	320
§ 8-5.2	De nauwkeurighedsanalyse voor de simple-wave vergelijking	322
§ 8-5.3	Stabiliteit van de differentie-schema's	332
§ 8-5.4	Stabiliteit van de stuwkromme berekening	333
§ 8-5.5	De afbreekfout en consistentie van de differentie-schema's	337
§ 8-5.6	De afbreekfout van de differentie-schema's voor de stuwkromme berekening	342
§ 8-6	Keuze differentie-schema's	344
§ 8-7	De in de computerberekeningen gebruikte differentie-schema's	345

HOOFDSTUK 9 : Afleiding van de criteria die gesteld worden
aan de numerieke nauwkeurigheid

blz.

§ 9-1	Inleiding	348
§ 9-2	Ontwikkeling van een te baggeren gat in een Fourier-reeks	350
§ 9-3	De analytische oplossing van de hyper- bolische vergelijking	356
§ 9-3.1	De dempingstijd T_d	357
§ 9-3.2	De relatieve faseverschuiving c_f van de met behulp van de Fourier-analyse gegenereerde sinussen	359
§ 9-4	Formules waarmee de relatieve fouten in C_b en T_d kunnen worden berekend	360
§ 9-4.1	De relatieve fout in de waterdiepte	361
§ 9-4.2	De relatieve fout in de karakteristieke voortplantingssnelheid (C_b)	361
§ 9-4.3	De relatieve fout in de dempingstijd	362
§ 9-5.1	Criterium voor de fout in de numerieke demping	364
§ 9-5.2	Criterium voor de fout in de numerieke faseverschuiving	365

HOOFDSTUK 10 : Toetsing criteria

blz.

§ 10-1	Inleiding	368
§ 10-2	De 1-cm. golf	371
§ 10-3	Toetsing van de linkergedeelten van de criteria uit § 9-5.1 en § 9-5.2 voor een gebaggerd gat	376
§ 10-4	Gevoeligheidsonderzoek	381
§ 10-5	Gevolgte methode voor keuze ruimtestap voor de gebaggerde gaten op de Niger	390
§ 10-6	Samenvatting	392

HOOFDSTUK 11 : Interpretatie berekeningsresultaten

blz.

§ 11-0	Inleiding	394
§ 11-1	De afmetingen van de doorgerekende gebaggerde gaten en de rivierverbreding	395
§ 11-2	De ruimtestappen bij de morfologische berekeningen van de verschillende gatvormen en de rivierverbreding	404
§ 11-3	Berekeningsresultaten	406
§ 11-4	Het mechanisme van een gebaggerd gat	418
§ 11-5	De verschillen in demping en voortplanting tussen de diverse gatvormen	423
§ 11-6	De ligging en de overgebleven volumina van de diverse gatvormen na 25 jaar	425
§ 11-7	De betrouwbaarheid van de berekeningsresultaten	427

APPENDICES

Appendix I :	430
Afleiding der amplificatie factoren	
Appendix II :	435
De formules voor c_r en d	
Appendix III :	438
De stabiliteits analyse	
Appendix IV :	442
De afbreekfouten bij Simple-wave	
Appendix V :	446
De verklaring waarom enkel Upstream beschouwd	
Appendix VI :	448
De computerberekeningen behorend bij hoofdstuk 10	
Appendix VII :	451
Bepaling van de ruimtestap voor de Niger gaten	

Appendix VIII :

456

Bepaling van relatieve fout in de
dempingstijd

Appendix IX :

460

De computerberekeningen behorende bij
hoofdstuk 11

HOOFDSTUK 8

Numerieke methoden en hun eigenschappen

§ 8-1 Numerieke methoden

Voor het onderstaande stelsel vergelijkingen worden de numerieke eigenschappen in de hierna volgende paragrafen bekeken.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial a}{\partial x} + g \frac{\partial z_b}{\partial x} = \frac{-g u |u|}{C^2 R} \quad 8-1.1$$

$$g = g(t) \quad 8-1.2$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial s_t}{\partial x} = 0 \quad 8-1.3$$

$$s_t = s_t(u) = f \quad 8-1.4$$

Dit stelsel vergelijkingen is om te werken naar onderstaand tweetal vergelijkingen. Voor de omwerking zie de Vries (1977).

$$\left[u - \frac{g g}{u^2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial z_b}{\partial x} = \frac{-g u |u|}{C^2 a} \quad 8-1.5$$

voor $R = a$ en

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{d f}{d u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 8-1.6$$

$$\text{met } s_t = s_t(u) = f$$

Het oplossen van deze twee vergelijkingen kan langs numerieke weg op verschillende manieren gebeuren:

- 1) met de karakteristieken-methode;
- 2) met de eindige differentie-methode.

Op de karakteristieken-methode zal hier niet verder op worden ingegaan. Zie hiervoor Vreugdenhil (1979) en de Vries (1977).

In de volgende paragraaf zal in het kort iets over de eindige differentie-methode gezegd worden.

§ 8-2 De eindige differentie-methode

Bij deze methode worden de vergelijkingen 8-1.3, 8-1.4 en 8-1.5 als volgt gebruikt.

Op $t = 0$ is de bodemligging bekend, verder is op de benedenrand de relatie tussen de afvoer en de waterdiepte ($q = q(a)$) bekend. Op de bovenrand weet men het verloop van de afvoer in de tijd ($q = q(t)$) en $S_t = S_t(t)$ of $z_b = z_b(t)$.

Met behulp van vergelijking 8-1.5 in differentievorm, kunnen voor alle punten, die op een afstand Δx van elkaar liggen, uitgaande van de benedenrand, de snelheid u en de waterdiepte $a = q/u$ berekend worden. Het totale sedimenttransport S_t is nu voor ieder punt te berekenen met behulp van formule 8-1.4.

Met behulp van vergelijking 8-1.3 in differentievorm, kan met de op het tijdstip t berekende sedimenttransport (S_t) en de bekende bodemligging (z_b) de nieuwe bodemligging voor alle punten van het riviertraject op $t + \Delta t$ worden berekend. De cyclus kan dan weer herhaald worden, uitgaande van de bodemligging op $t + \Delta t$.

Ten aanzien van de te kiezen differentie-schema's zijn er diverse mogelijkheden die in § 8-4 besproken zullen worden.

Nadelen van de eindige differentie-methoden zijn in het algemeen:

- a) de methode is minder nauwkeurig dan de karakteristieken-methode;
- b) de methode veroorzaakt zogenaamde "numerieke damping".

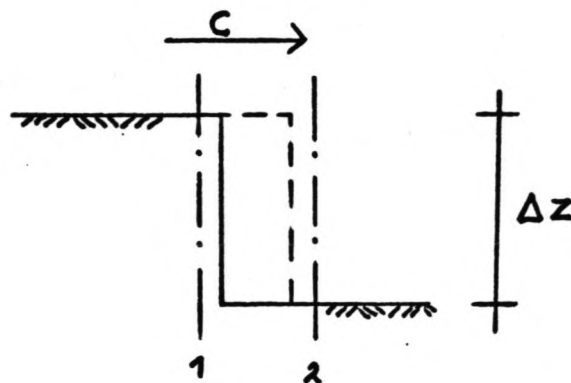
Voordelen van de eindige differentie-methode zijn:

- a) de randvoorwaarden worden op een duidelijke manier in de berekening opgenomen;
- b) tijdens de berekening wordt steeds voor dezelfde punten de bodemligging in de tijd berekend; dit is niet het geval bij de

karacteristieken-methode. Bij de eindige differentie-methode wordt met een vast rooster gewerkt, onnauwkeurigheden die bij de karakteristieken-methode kunnen ontstaan doordat de afstanden tussen de punten in de x-richting in de tijd variëren komen hierbij dus niet voor;

c. de methode verwerkt automatisch eventuele sprongen in de bodemligging, mits de differentievergelijkingen conservatief zijn.

Plaatselijk van een plotselinge verandering van de bodemligging zijn de vergelijkingen 8-1.5 en 8-1.6 niet meer geldig; echter wel de principes van behoud van massa en impuls. Bij een sprong in de bodem (front zandgolf) geldt met name $c \Delta z = \Delta s$ (zie figuur 8-1).



figuur 8-1

- c = de voortplantingssnelheid van het front van de zandgolf $[m/s]$
 Δz = de sprong in het bodemverloop $[m]$
 Δs = het verschil in transport tussen de grenzen 1 en 2 $[m^2/s]$

Volgens Vreugdenhil (1973) is door Lax aangetoond dat bij een differentie benadering van de vergelijking $\partial z_b / \partial t + \partial s / \partial x = 0$, $c \Delta z = \Delta s$ bij een discontinuïteit als oplossing van deze differentie-vergelijking gevonden wordt. Met andere woorden de vergelijking $\partial z_b / \partial t + \partial s / \partial x = 0$ in differentievorm is een vergelijking in de behoudsvorm.

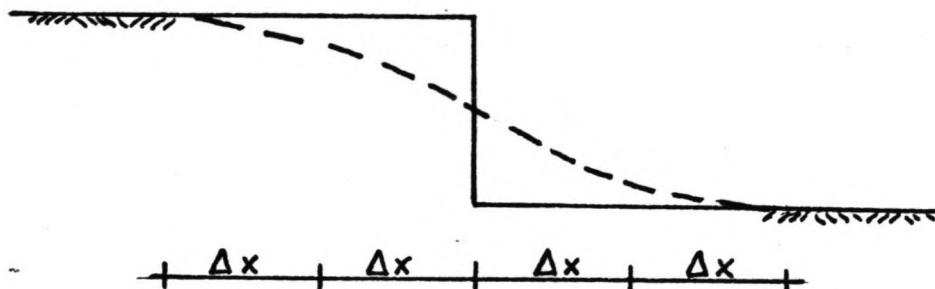
Zou in plaats van $\partial z_b / \partial t + \partial s / \partial x = 0$

de vergelijking $\partial z_b / \partial x + (df/du) \cdot (\partial u / \partial x) = 0$

in een differentievorm geschreven worden dan zou bij een discontinuïteit niet de juiste oplossing gevonden worden. De vergelijking 8-1.6 in differentievorm is dus niet in de behoudsvorm.

Beide bovengenoemde vergelijkingen zijn in differentie vorm gelijkwaardig in het gedeelte van een riviertraject waar de bodem geleidelijk verloopt, echter niet op plaatsen waar sprongen in de rivierbodem voorkomen.

Door dus de juiste vergelijking in differentievorm te gebruiken wordt ondanks de aanwezigheid van sprongen in het bodemverloop de "juiste" oplossing gevonden. De sprongen worden op de juiste plaats en in de juiste grootte weergegeven, echter in een gedempte vorm. (zie onderstaande figuur). Dit is een nadeel van de eindige differentie-methode.



figuur 8-2

Δx = de ruimtestap

———— = de werkelijke vorm van de sprong

- - - - - = de gedempte vorm van de sprong

Dit is niet het gevolg van een of ander fysisch proces, echter alleen het gevolg van numerieke diffusie.

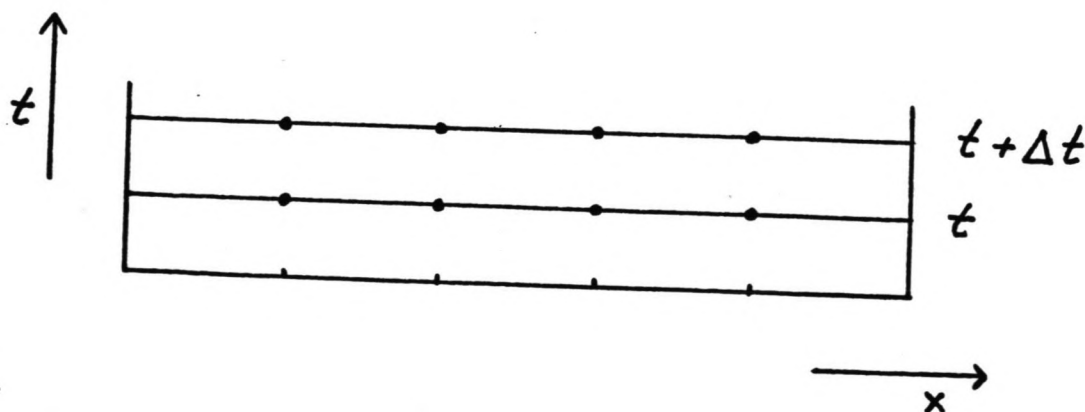
§ 8-3 De eindige differentie-methoden

Met behulp van een differentie-schema, kan een differentiaal vergelijking in een differentie vergelijking worden omgezet.

De differentie-schema's zijn in twee hoofdgroepen te onderscheiden, namelijk de impliciete schema's en de expliciete schema's. In respectievelijk § 8-3.1 en § 8-3.2 zal in het kort iets over deze twee hoofdgroepen worden opgemerkt.

§ 8-3.1 Het impliciete schema:

Kenmerk van een impliciet schema is dat de vergelijkingen 8-1.5 en 8-1.6 op een dusdanige manier aan elkaar worden gekoppeld dat ineens de bodemligging op $t + \Delta t$ over het gehele riviertraject wordt berekend uitgaande van de bodemligging op tijdstip t .



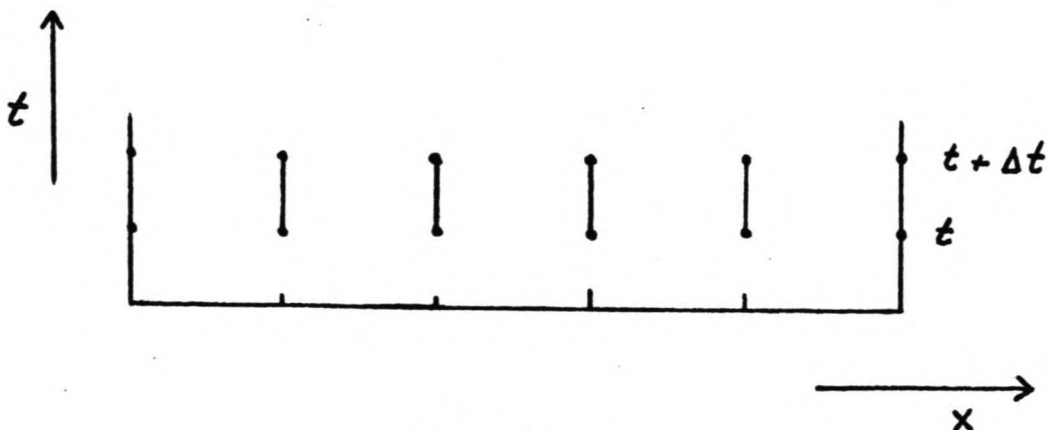
figuur 8-3

Een voordeel van het impliciete schema ten opzichte van het hierna behandelde expliciete schema is het punt van de stabiliteit. Bij een expliciet schema kan men in verband met de stabiliteit de tijdstappen niet al te groot nemen. Bij een impliciet schema kan men zonder dat instabiliteit ontstaat grote tijdstappen nemen, al moet hier direct bijgezegd worden, dat de geëiste numerieke nauwkeurigheid beperkingen oplegt aan de te kiezen tijdstapgrootte.

Een nadeel van het impliciete schema is dat er met ingewikkelde vergelijkingen gerekend moet worden. Daarom zijn in het verleden alleen expliciete schema's gebruikt voor morfologische berekeningen.

§ 8-3.2 Het expliciete schema

Kenmerk van een expliciet schema is dat punt voor punt de bodemligging op het tijdstip $t + \Delta t$ wordt berekend. De vergelijkingen 8-1.5 en 8-1.6 worden, zonder dat ze aan elkaar gekoppeld zijn, voor ieder punt opgelost. Er worden telkens vergelijkingen opgelost met één onbekende. Voor wat betreft de watersnelheid (u) wordt hierbij gebruik gemaakt van vergelijking 8-1.5, terwijl voor de bodemligging (z_b) vergelijking 8-1.6 wordt gebruikt. Schematisch ziet het werken met een expliciet schema er dus als volgt uit:



figuur 8-4

Als nadeel van het werken met expliciete schema's ten opzichte van impliciete schema's in de in § 8-3.1 al genoemde mogelijkheid van instabiliteit. Men kan bij een gekozen stapgrootte Δx de tijdstap Δt niet onbeperkt groot nemen. Een voordeel van deze methode ten opzichte van de impliciete methode is dat de te gebruiken vergelijkingen eenvoudig zijn.

§ 8-4 De differentie schema's

In deze paragraaf zullen de mogelijke differentie-schema's voor de vergelijkingen 8-5 en 8-6 behandeld worden:

§ 8-4.1 De differentie schema's voor vergelijking 8-5

Vergelijking 8-5, die niets anders is, dan de vergelijking van een stuwkromme, is te schrijven als volgt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u^2}{2g} + a + z_b \right] = \frac{-u|u|}{C^2 R}$$

u	= de gemiddelde stroomsnelheid van het water	$[m/s]$
q	= het debiet per eenheid van breedte	$[m^2/s]$
g	= de versnelling van de zwaartekracht	$[m/s^2]$
z_b	= de bodemligging t.o.v. een referentie-niveau	$[m]$
C	= de coëfficiënt van Chezy m.b.t. de totale ruwheid	$[m^{1/2}/s]$
R	= de hydraulische straal	$[m]$

Hetgeen tussen haken staat vermeld is de energiehoopte ten opzichte van het referentie-niveau.

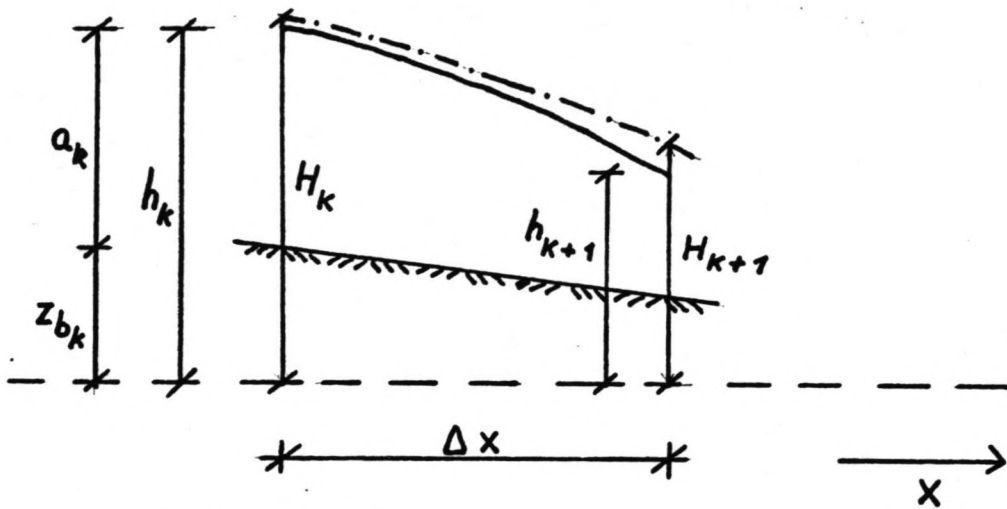
$$H = a + z_b + u^2 / 2g$$

Er geldt: $\partial H / \partial x = f(H, x)$

immers $u = u(x)$, $R = R(a, x)$ en $C = C(x)$

De vergelijking $\partial H / \partial x = f(H, x)$ is met behulp van een expliciet of impliciet schema op te lossen.

a) Expliciet schema:



figuur 8-5

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{-u|u|}{C^2 R} = f(H, x)$$

of in differentievorm

$$\frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta x} = f(H_{k+1}, x_{k+1}) = \frac{-u_{k+1} |u_{k+1}|}{(C_{k+1})^2 R_{k+1}} \quad \text{of}$$

$$H_k = H_{k+1} - \Delta x f(H_{k+1}, x_{k+1}) - (u_{k+1})^2 / 2g$$

$$a_k = h_k - z_{bk}$$

b) Impliciet schema:

In de praktijk wordt in verband met de stabiliteit meestal een impliciet schema gebruikt. In ons geval zal de methode Heun worden toegepast.

Vanaf de benedenrand kan met onderstaande vergelijkingen in stroomopwaartse richting worden gerekend. De berekening verloopt in een bepaald punt (x_k) als volgt:

voor de betekenis van de symbolen zie figuur bij het expliciete schema.

Predictors:

$$H_k^* = H_{k+1} - \Delta x \varphi(H_{k+1}, x_{k+1})$$

$$h_k^* = H_k^* - \frac{(u_{k+1})^2}{2g} \quad \text{en} \quad a_k^* = h_k^* - 2b_k$$

$$u_k^* = \frac{Q}{B_k a_k^*} \rightarrow s_k^* = \frac{(u_k^*)^2}{2g}$$

$$\text{Nu is } \varphi(H_k^*, x_k) = \frac{-u_k^* |u_k^*|}{(C_k)^2 R_k^*}$$

te berekenen.

Correctors:

$$H_k = H_{k+1} - \frac{1}{2} \Delta x [\varphi(H_{k+1}, x_{k+1}) + \varphi(H_k^*, x_k)]$$

$$h_k = H_k - s_k^* \quad \text{en} \quad a_k = h_k - 2b_k$$

Controle:

Gecontroleerd moet worden of $|h_k^* - h_k| \leq \varepsilon_k$;

ε_k is een gestelde nauwkeurigheid.

Wordt niet aan de voorwaarde voldaan, dan heeft verder itereren voor de methode Heun geen zin, omdat ε_k maar weinig kleiner zal worden, wanneer opnieuw de bovenomschreven cyclus doorlopen wordt. In dat geval kan men van verkleining van de ruimtestap Δx meer resultaat verwachten.

§ 8-4.2 De differentie schema's voor vergelijking 8-6

Zoals uit §8-2 blijkt is het in verband met sprongen in de bodemligging noodzakelijk om de vergelijking 8-1.6 in een andere vorm, de zogenaamde behoudsvorm, in de berekening te gebruiken. De vergelijking 8-1.6 wordt dan als volgt geschreven

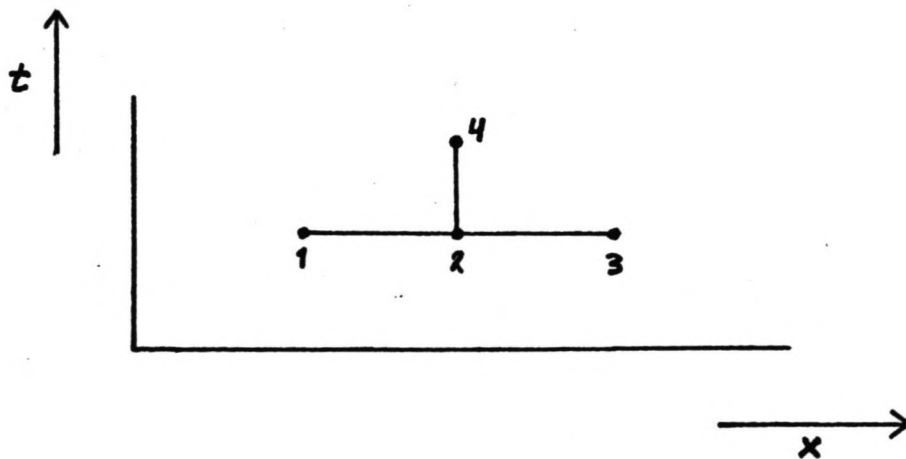
$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial S_t}{\partial x} = 0$$

Bovenstaande vergelijking kan op verschillende manieren met behulp van expliciete schema's in differentie vorm geschreven worden.

1) het modified-Lax schema:

$$\frac{z_4 - \left\{ \frac{1}{2} \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2 + \frac{1}{2} \alpha z_3 \right\}}{\Delta t} + \frac{S_3 - S_1}{2 \Delta x} = 0$$

Het rekenmolecuul van dit schema is als volgt:



Voor α zijn verschillende mogelijkheden Vreugdenhil (1977)

$\alpha = \text{constant}$	modified Lax - methode
$\alpha = \sigma$	Godunov - methode
$\alpha = \sigma^2$	Lax / Wendroffs - methode

$$\sigma = c_b \Delta t / \Delta x \quad = \text{het Courantgetal} \quad [-]$$

$$c_b = \text{de karakteristieke voortplantingssnelheid} \quad [\text{m/s}]$$

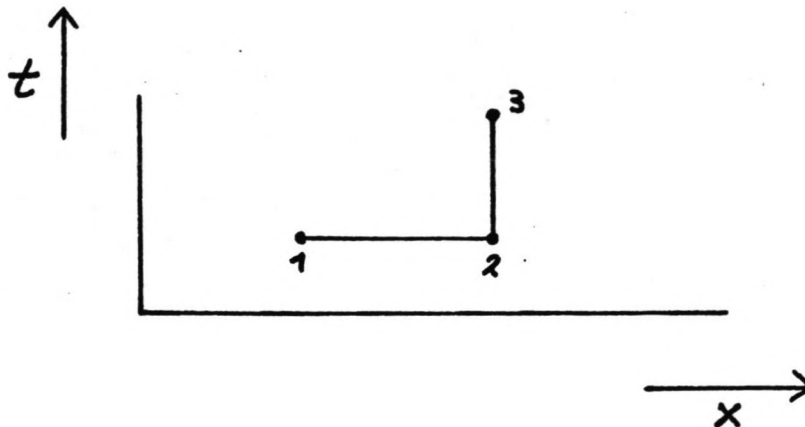
$$\Delta t = \text{de tijdstap} \quad [\text{s}]$$

$$\Delta x = \text{de stap in de x-richting} \quad [\text{m}]$$

2) het upstream schema van Perdrau en Cunge:

$$\frac{z_3 - z_2}{\Delta t} + \frac{s_2 - s_1}{\Delta x} = 0$$

Het rekenmaleaul van dit schema ziet er als volgt uit:



* In bovenvermelde schema's is de notatie voor de bodemligging (z_b) door de notatie z vervangen.

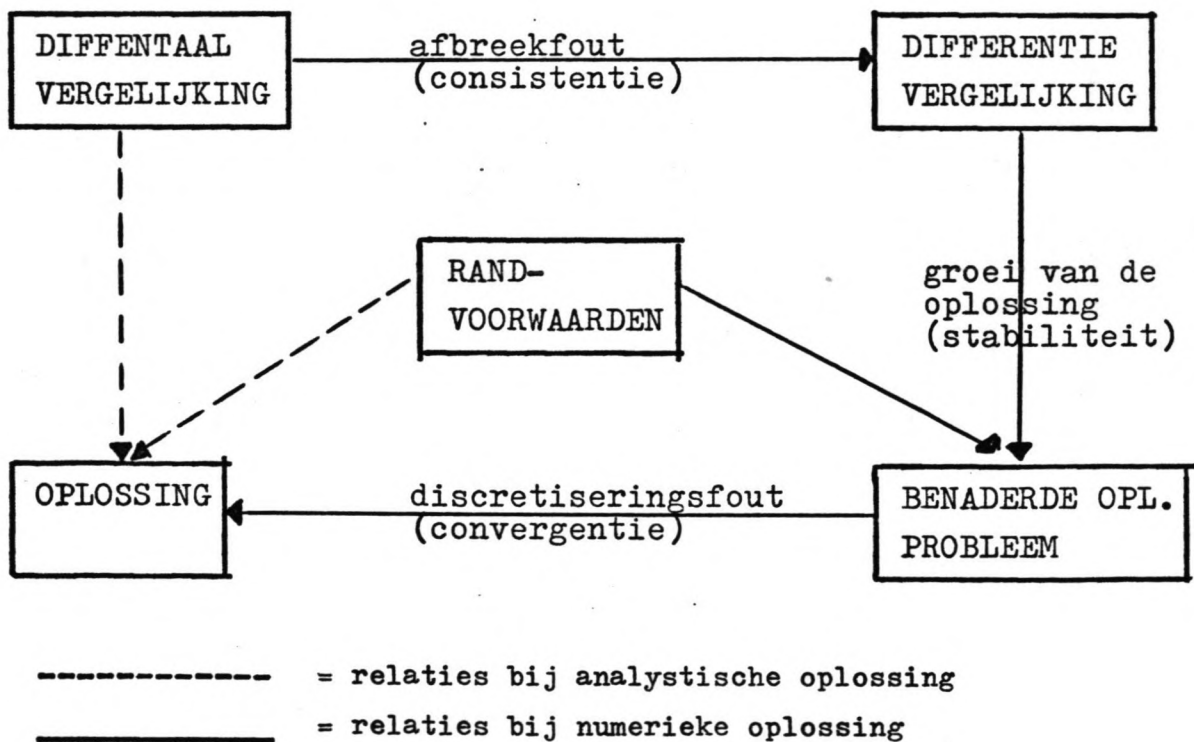
Tenslotte wordt opgemerkt dat het Godunov - schema wanneer het wordt toegepast op de lineaire vergelijking $\partial z_b / \partial t + c_b \partial z_b / \partial x = 0$, hetzelfde differentie-schema is als het upstream schema van Perdrau en Cunge. Zie hiervoor appendix V.

In de volgende paragrafen van dit hoofdstuk zullen een aantal afleidingen dan ook alleen voor het upstream schema gedaan worden.

§ 8-5 Numerieke eigenschappen

Om te kunnen kiezen uit de in § 8-4.1 en § 8-4.2 behandelde differentie-schema's moeten de numerieke eigenschappen van de schema's beoordeeld worden.

In het onderstaande schema is te zien, welke eigenschappen in het algemeen een rol spelen bij het numeriek oplossen van een probleem.



figuur 8-6

Het verschil in de oplossing van de differentie vergelijking en de oplossing van de differentiaal vergelijking oftewel het verschil tussen de numerieke en de analytische oplossing is de discretiseringsfout.

In §8-5.1 zal de vergelijking worden besproken waarmee in §8-5.2 de numerieke nauwkeurigheid voor de verschillende differentie schema's wordt geanalyseerd die in §8-4.2 zijn vermeld.

De eigenschap stabiliteit voor de in §8-4.2 vermelde differentie schema's wordt in §8-5.3 bekeken.

In §8-5.4 wordt aandacht besteed aan de stabiliteit van de impliciete en expliciete differentie schema's voor de stuwkromme-berekening. Deze laatste schema's staan vermeld in §8-4.1.

Voor de in §8-4.2 behandelde differentie schema's zal in §8-5.5. de afbreekfout bepaald worden, waardoor iets is te zeggen over de numerieke demping en de secundaire golven bij gebruik van de verschillende differentie-schema's.

In §8-5.6 wordt de afbreekfout bepaald voor het behandelde impliciete- en expliciete differentie schema's , waarmee de stuwkromme berekend kan worden.

In §8-6 worden de differentie schema's gekozen waarmee vergelijking 8-1.3 en 8-1.5 worden opgelost.

In §8-7 worden de differentie schema's besproken, welke bij de computer-berekeningen worden toegepast.

Alleen het differentie schema waarmee vergelijking 8-3 wordt opgelost, verschilt van die, welke in §8-6 is gekozen. Dit in verband met de eis, dat het schema conservatief moet zijn bij variabele α -waarde.

§8-5.1 De vergelijking waarop de nauwkeurighedsanalyse wordt toegepast

De numerieke eigenschap "nauwkeurigheid" is in het algemeen moeilijk vast te stellen voor een niet lineaire golfvergelijking. Voor een lineaire golfvergelijking met constante coëfficiënten is dit eenvoudiger. Een nauwkeurighedsanalyse toegepast op een gelineariseerde vergelijking geeft op z'n minst een orde van grootte van de nauwkeurigheid van die niet-lineaire vergelijking. De uitspraak over de nauwkeurigheid van de gelineariseerde vergelijking wijkt sterker af van de nauwkeurigheid van de niet-lineaire vergelijking, naarmate de niet-lineaire effecten sterker zijn.

Zoals reeds eerder opgemerkt hebben we bij de morfologische berekeningen te maken met het stelsel vergelijkingen 8-1.1 tot en met 8-1.4.

Dit stelsel vergelijkingen is een niet-lineair-stelsel. Door linearisatie (zie Vreugdenhil (1979)) en eliminatie van a , u en s_t kan dit stelsel worden omgewerkt tot de hyperbolische vergelijking

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} - D \frac{\partial^2 z_b}{\partial x^2} - \frac{D}{c_b} \frac{\partial^2 z_b}{\partial x \partial t} = 0$$

Hierin is:

z_b = de bodemligging t.o.v. het referentie-niveau

D = de diffusie-coëfficiënt = $u \rho'(u) / 3 i_b$;
indien geldt $s_t = \alpha u^\beta$ dan $D = \beta s_t / 3 i_b$

$[s^{-1}]$

β = een constante afhankelijk van de toegepaste sediment -
transportformule

$[-]$

s_t = het totale sedimenttransport per eenheid van breedte

$[m^2/s]$

i_b = het bodemverhang

$[-]$

c_b = de voortplantingssnelheid bodemverstoring: $u^2 \cdot f'(u)/q$
 voor $F^2 \ll 1$; indien geldt dat $s_t = \alpha u B$
 dan $c_b = \beta s_t / a$ [m/s]

q de afvoer per eenheid van breedte [m²/s]
 u = de gemiddelde stroomsnelheid van het water [m/s]
 a = de waterdiepte [m]

Een oplossing van deze hyperbolische vergelijking is:

$$z(x, t) = z \exp(i\kappa x + \tau t)$$

met $\tau = \{-\kappa^2 D - i\kappa c_b \kappa^2 D^2 / c_b^2\} (1 + \kappa^2 D^2 / c_b^2)^{-1}$
 $\kappa = 2\pi / \lambda$

Door Vreugdenhil (1973) wordt aangetoond:

- voor $\kappa D / c_b \ll 1$

de hyperbolische vergelijking een "diffusief" karakter heeft;

- voor $\kappa D / c_b \gg 1$

de hyperbolische vergelijking een "convectief" karakter heeft.

In het laatste geval kan de hyperbolische vergelijking worden benaderd door de simple wave vergelijking:

$$\partial z_b / \partial t + c_b \partial z_b / \partial x = 0$$

De voorwaarde $\kappa D / c_b \gg 1$ kan met $D = \beta s_t / 3 c_b$
 en $\kappa = 2\pi / \lambda$ worden omgewerkt naar:

$$\frac{2,1 a}{\lambda c_b} \gg 1$$

8-5.1

In §9-2 zijn de gebaggerde gaten in Fourier-reeksen ontwikkeld om de golven te analyseren die zich door de rivierbodem gaan voortplanten.

Uit vergelijking 8-5.1 blijkt dat de golfcomponent met de grootste golflengte genomen moet worden om te controleren of aan de voorwaarde wordt voldaan.

In § 9-2 wordt aangetoond dat dit de golf met een lengte gelijk aan tweemaal de gat lengte is.

GATLENGTE [m]	GATDIEPTE [m]	λ [m]	$2,1 a / \lambda i_b$
1000	20	2000	70,5
2000	10	4000	35,3
4000	5	8000	17,6
8000	2,5	16000	8,8
16000	1,25	32000	4,4

tabel 8-1

* $a = 7,05$ m (bij Q dominant)
 $i_b = 10,5 \times 10^{-5}$ (traject Ajaokuta-Agnebode)

Een benadering met de simple wave vergelijking is dus voor alle gaten toelaatbaar.

§ 8-5.2 De nauwkeurighedsanalyse voor de simple-wave vergelijking

De simple-wave vergelijking, $\partial z_b / \partial t + c_b \partial z_b / \partial x = 0$
 heeft als oplossing $z_b(x, t) = \hat{z}_b \exp \{ i \kappa (x - c_b t) \}$

Hieruit blijkt dat:

a) door het verwaarlozen van dampingstermen (bijvoorbeeld de

weerstandsterm) de fysische dempingsfactor 1 is.

b) de fase neemt lineair toe.

Er zal nu worden nagegaan hoe de verandering van de amplitude en de fase in de tijd zal zijn, wanneer de simple-wave vergelijking met een bepaald differentie-schema wordt opgelost. Als beginvoorwaarde geldt:

$$z_b(x,0) = \hat{z}_b \exp(i k x).$$

De amplificatiefactor ρ volgt uit de betrekking $z_b^{n+1} = \rho z_b^n$.

De amplificatiefactoren zijn voor de verschillende differentie-schema's afgeleid in appendix I; zie voor de resultaten tabel 8-2.

Schema	Amplificatiefactoren (ρ)
modified Lax	$1 - \alpha + \alpha \cos \zeta - \sigma i \sin \zeta$
Godunov en upstream	$1 - \sigma + \sigma \cos \zeta - \sigma i \sin \zeta$
Lax / Wendroff	$1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \zeta - \sigma i \sin \zeta$

tabel 8-2

Uitgaande van de numerieke oplossing na 1 tijdstap Δt ,

$$z_b^{n+1} = \rho z_b^n = \rho \hat{z}_b \exp(i k j \Delta x)$$

is eenvoudig aan te tonen, dat na 1 golfperiode ($n_t = T / \Delta t$ tijdstappen) de amplitude met een factor $|\rho|^{n_t}$ veranderd is.

Zie vreugdenhil (1979)

Voor de amplitudedefactor (d) geldt:

$$d = \frac{\text{de numerieke dempingsfactor}}{\text{de fysische dempingsfactor}} = |\rho|^{n_t} = |\rho|^{n_t}$$

De faseverschuiving na 1 tijdstap Δt is $\arg(\rho)$ en na $n_t = T/\Delta t$ tijdstappen $\arg\{\rho^{n_t}\} = n_t \arg(\rho)$

Voor de relatieve voortplantingssnelheid geldt:

$$c_r = \frac{\text{de numerieke faseverschuiving}}{\text{de fysische faseverschuiving}} = \frac{\arg(\rho)^{n_t}}{-2\pi} = \frac{-n_t \arg(\rho)}{2\pi}$$

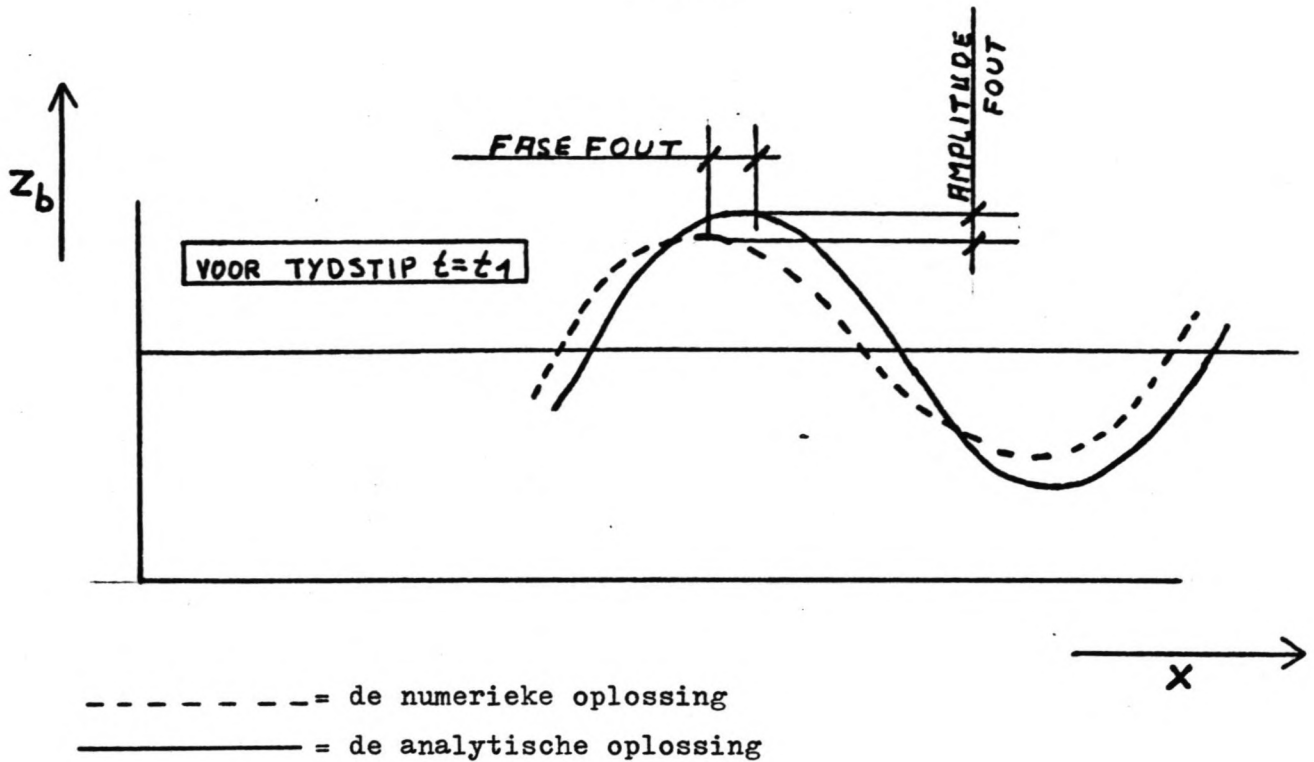
Als onder de numerieke fout (ϵ) na n golfperiodes, het verschil wordt verstaan tussen de amplitude en de faseverschuiving van de numerieke en de analytische oplossing na n golfperiodes ten opzichte van de analytische oplossing, dan geldt:

$$\left| \frac{\hat{z}_b - (|\rho|^{n_t})^n \hat{z}_b}{\hat{z}_b} \right| = |1 - d^n| = \epsilon \text{ amplitude}$$

$$\left| \frac{-2\pi n - n \cdot n_t \arg \rho}{-2\pi n} \right| = |1 - c_r| = \epsilon \text{ fase}$$

Wanneer de amplitudefactor (d) en de relatieve voortplantingssnelheid (c_r) gelijk zijn aan 1, zijn de fouten in de fase en de amplitude nul oftewel de numerieke methode geeft de exacte oplossing (de analytische oplossing).

Zie voor toelichting van het begrip "fouten" het volgende figuur:



figuur 8-7

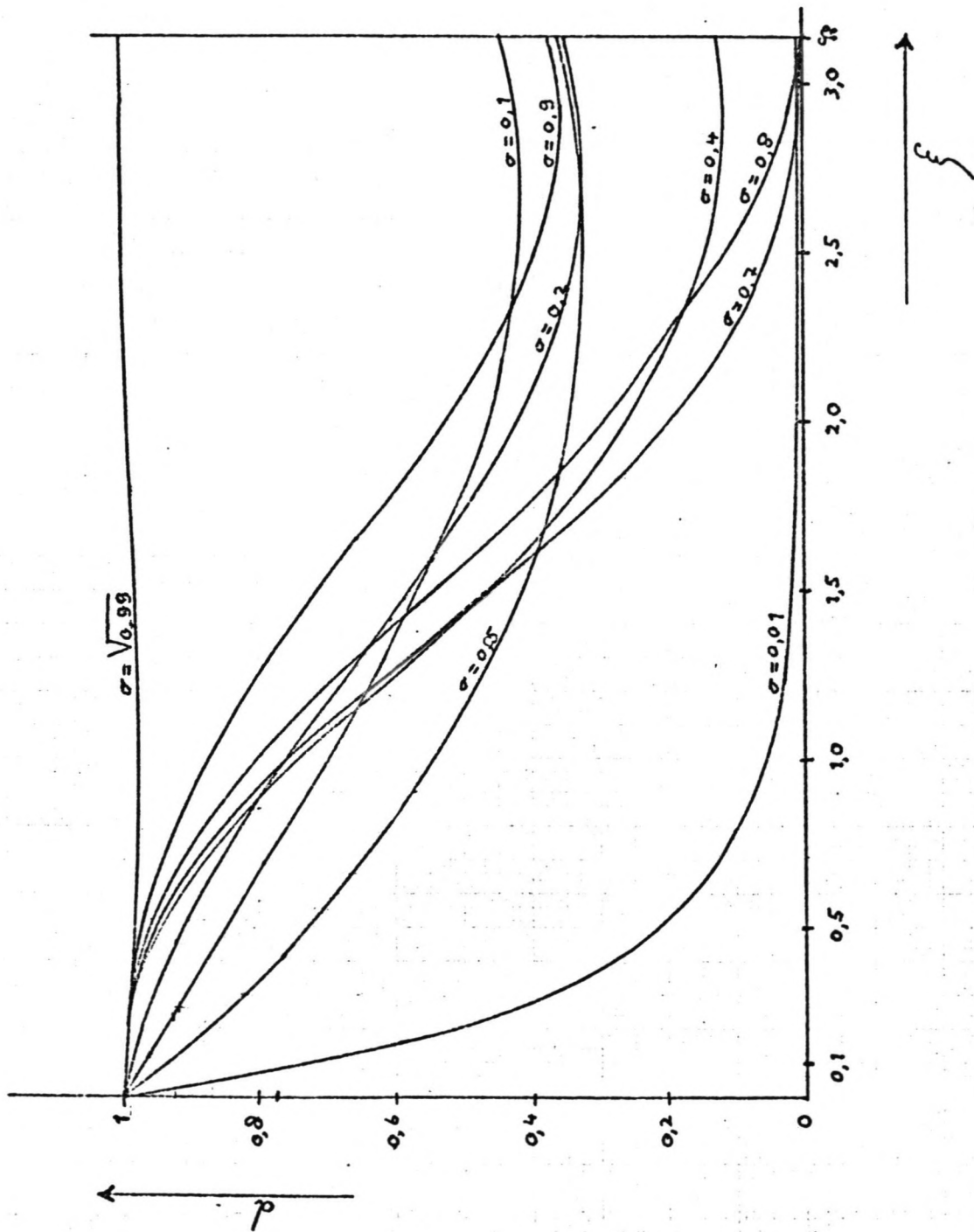
Er is voor ieder differentie-schema een tweetal vergelijkingen af te leiden voor d en c_r . Zie appendix II.

Schema	
modified Lax	$d = \left\{ (1 - \alpha + \alpha \cos \zeta)^2 + (\sigma \sin \zeta)^2 \right\} \frac{\pi}{\sigma \zeta}$ $c_r = -(\tau / \sigma \zeta) \arctg \left\{ -\sigma \sin \zeta / (1 - \alpha + \alpha \cos \zeta) \right\}$
Lax-Wendroff	$d = \left\{ (1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \zeta)^2 + (\sigma \sin \zeta)^2 \right\} \frac{\pi}{\sigma \zeta}$ $c_r = -(\tau / \sigma \zeta) \arctg \left\{ -\sigma \sin \zeta / (1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \zeta) \right\}$
Upstream	$d = \left\{ (1 - \sigma + \sigma \cos \zeta)^2 + (\sigma \sin \zeta)^2 \right\} \frac{\pi}{\sigma \zeta}$ $c_r = -(\tau / \sigma \zeta) \arctg \left\{ -\sigma \sin \zeta / (1 - \sigma + \sigma \cos \zeta) \right\}$

tabel 8-3

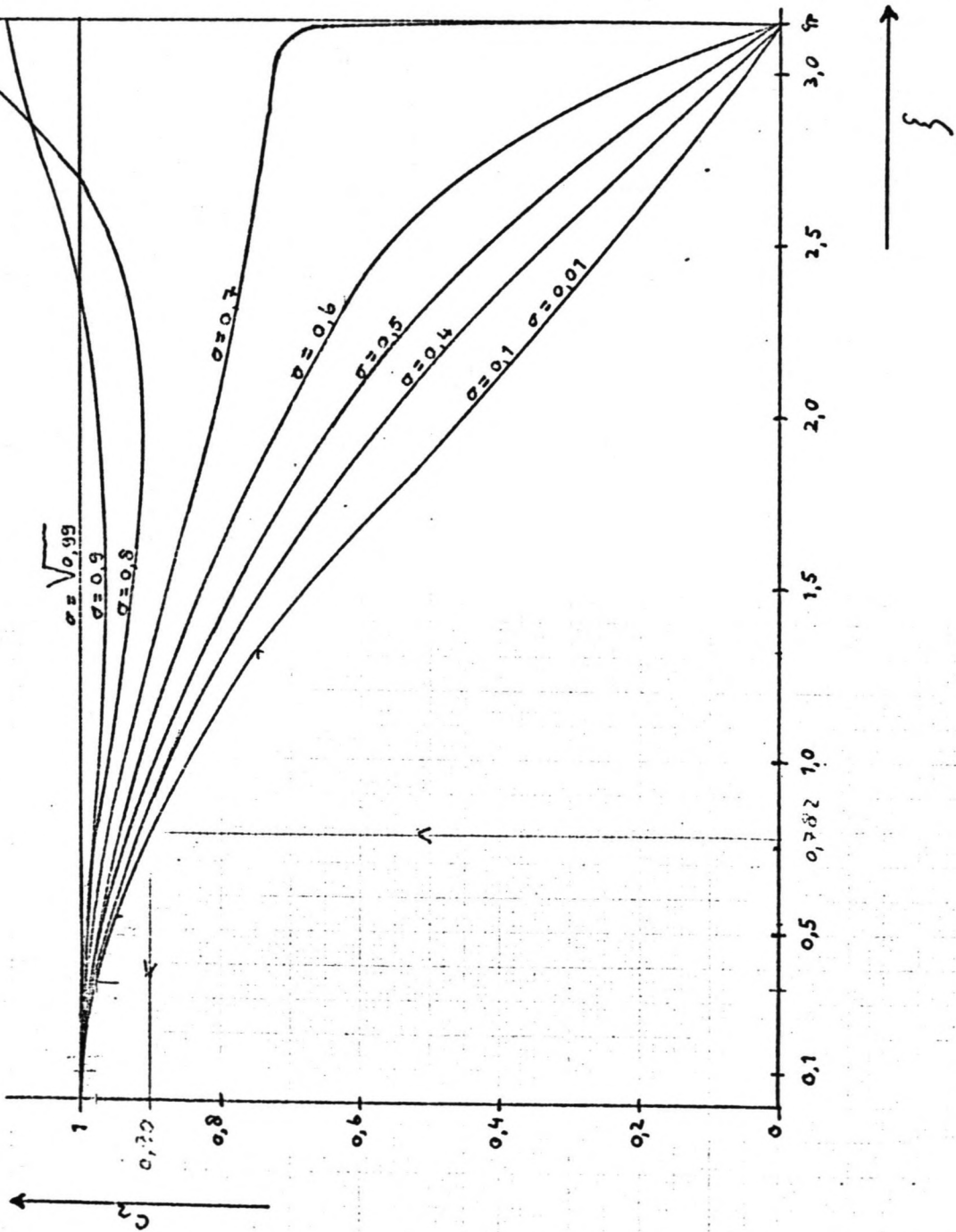
Met behulp van bovenstaande formules zijn de grafieken 8-1 t/m 8-6 getekend.

MODIFIED LAX $\beta = 0,01$

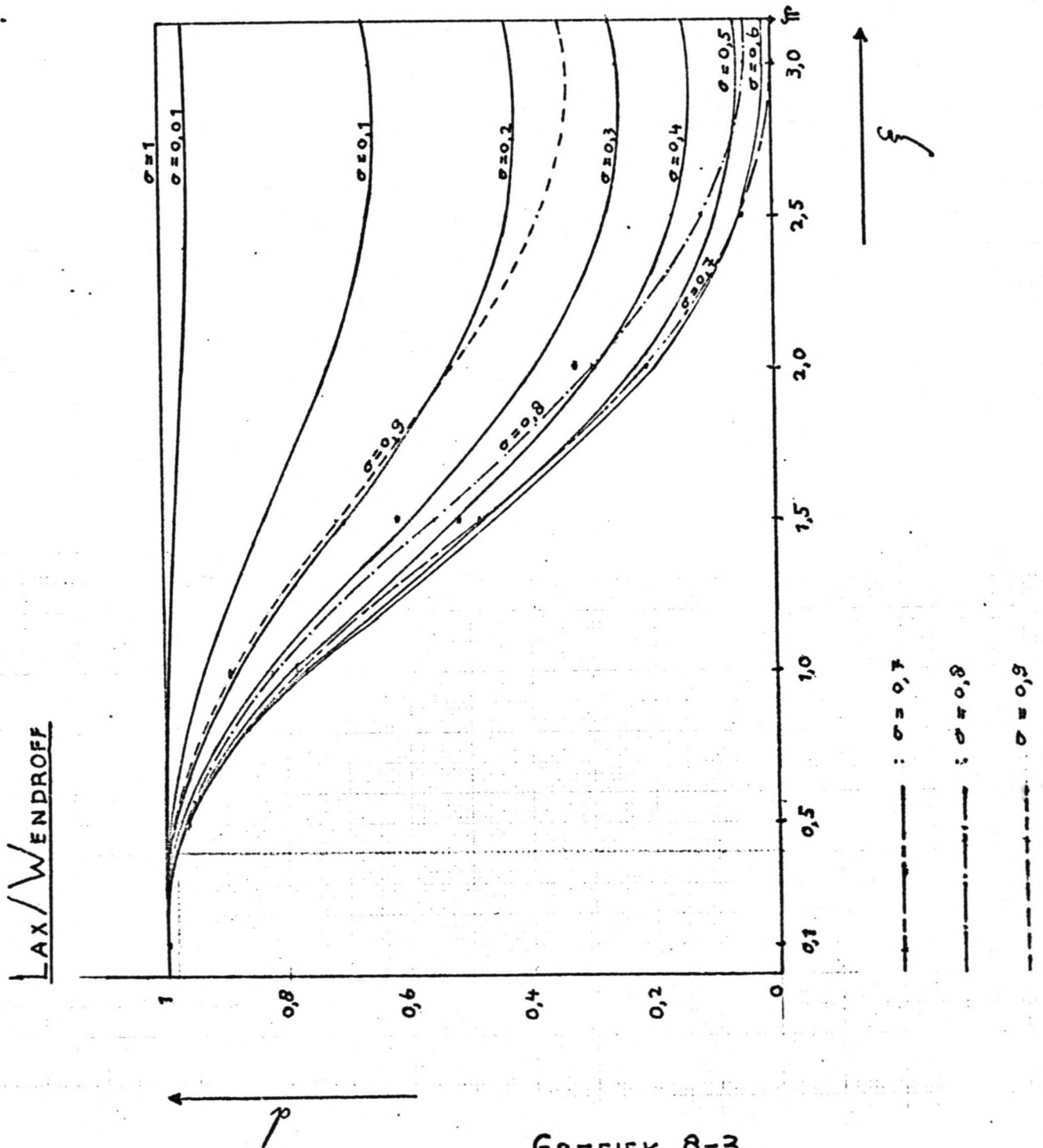


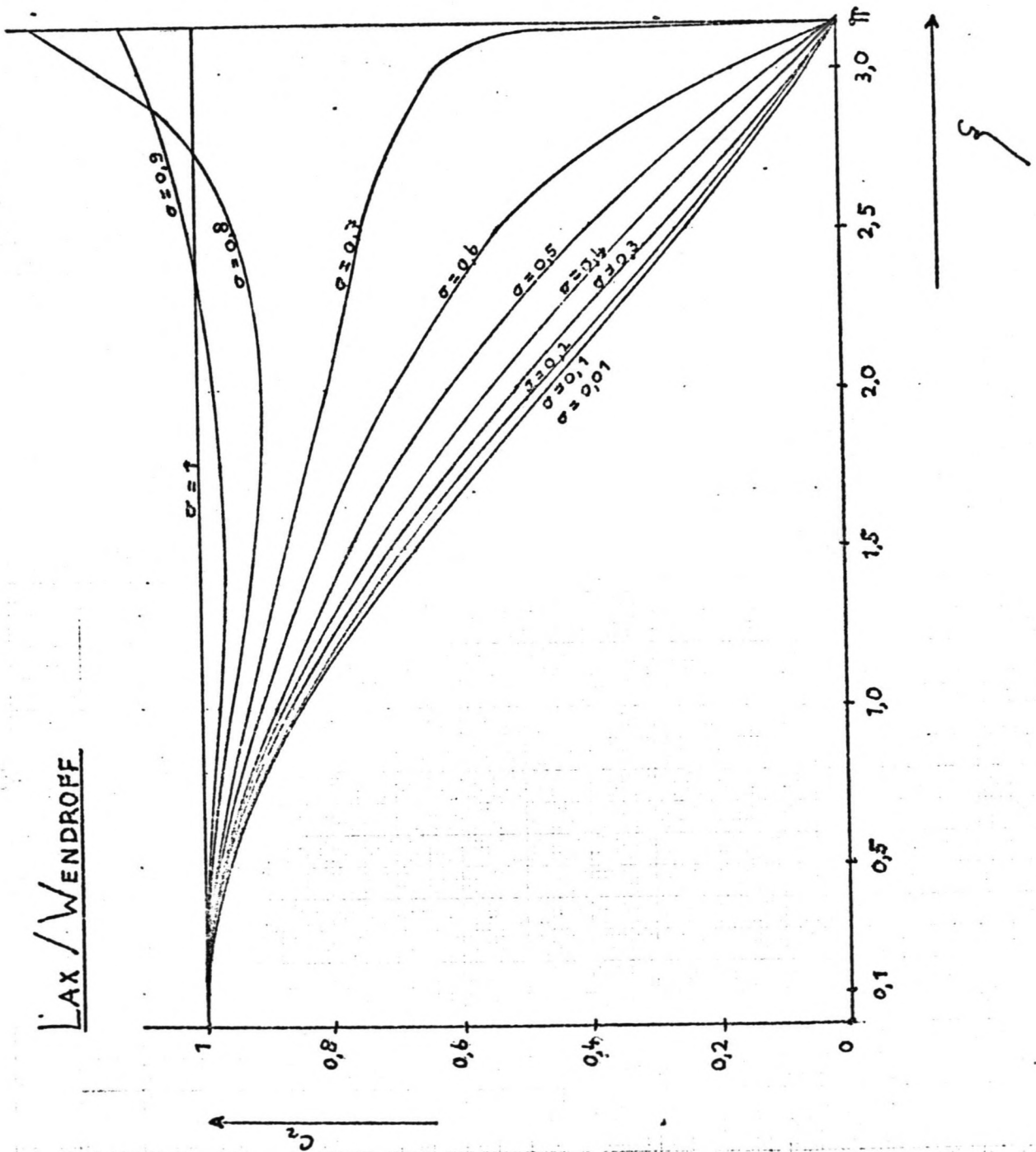
GRAFIEK 8-1

Modified LAX $\beta = 0,01$



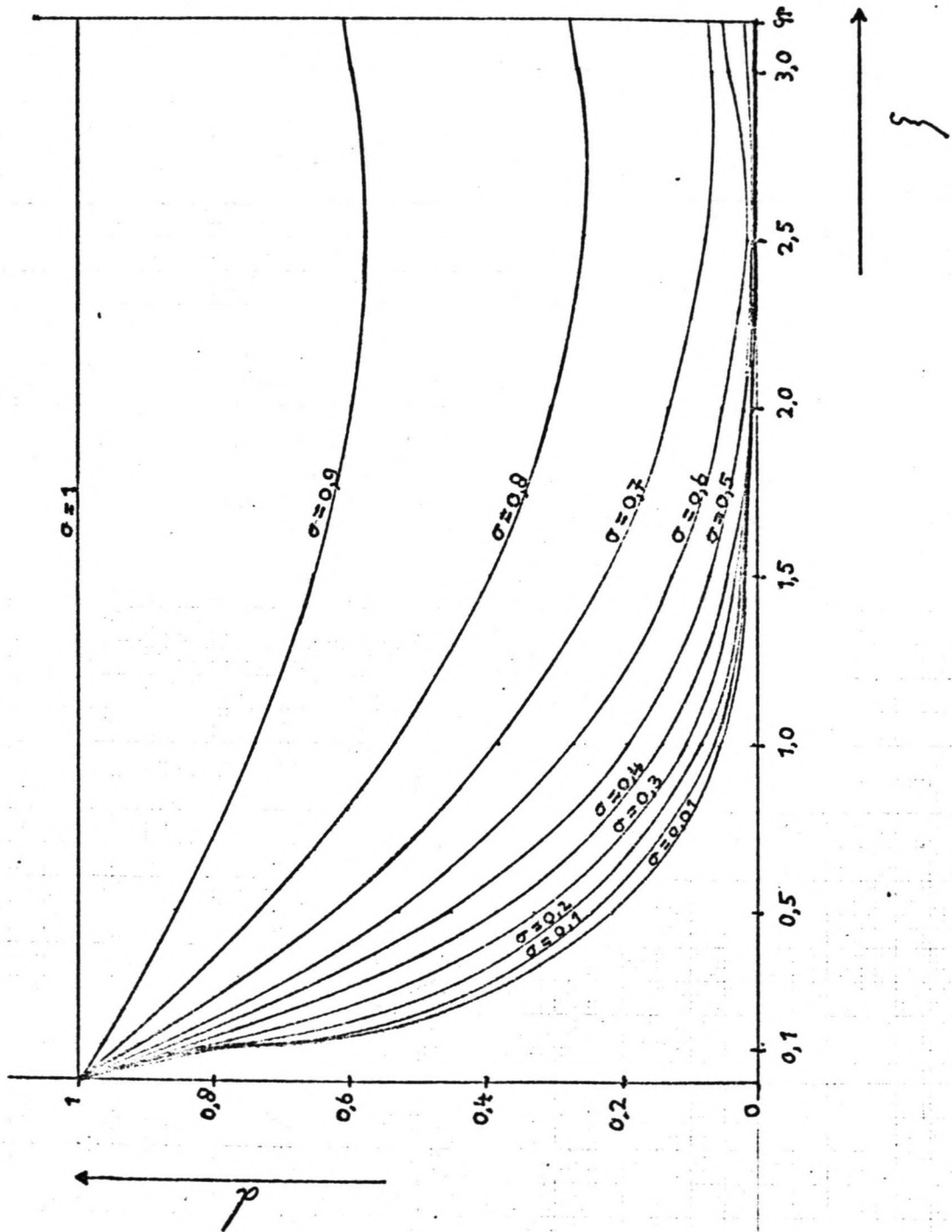
GRAFIK 8-2



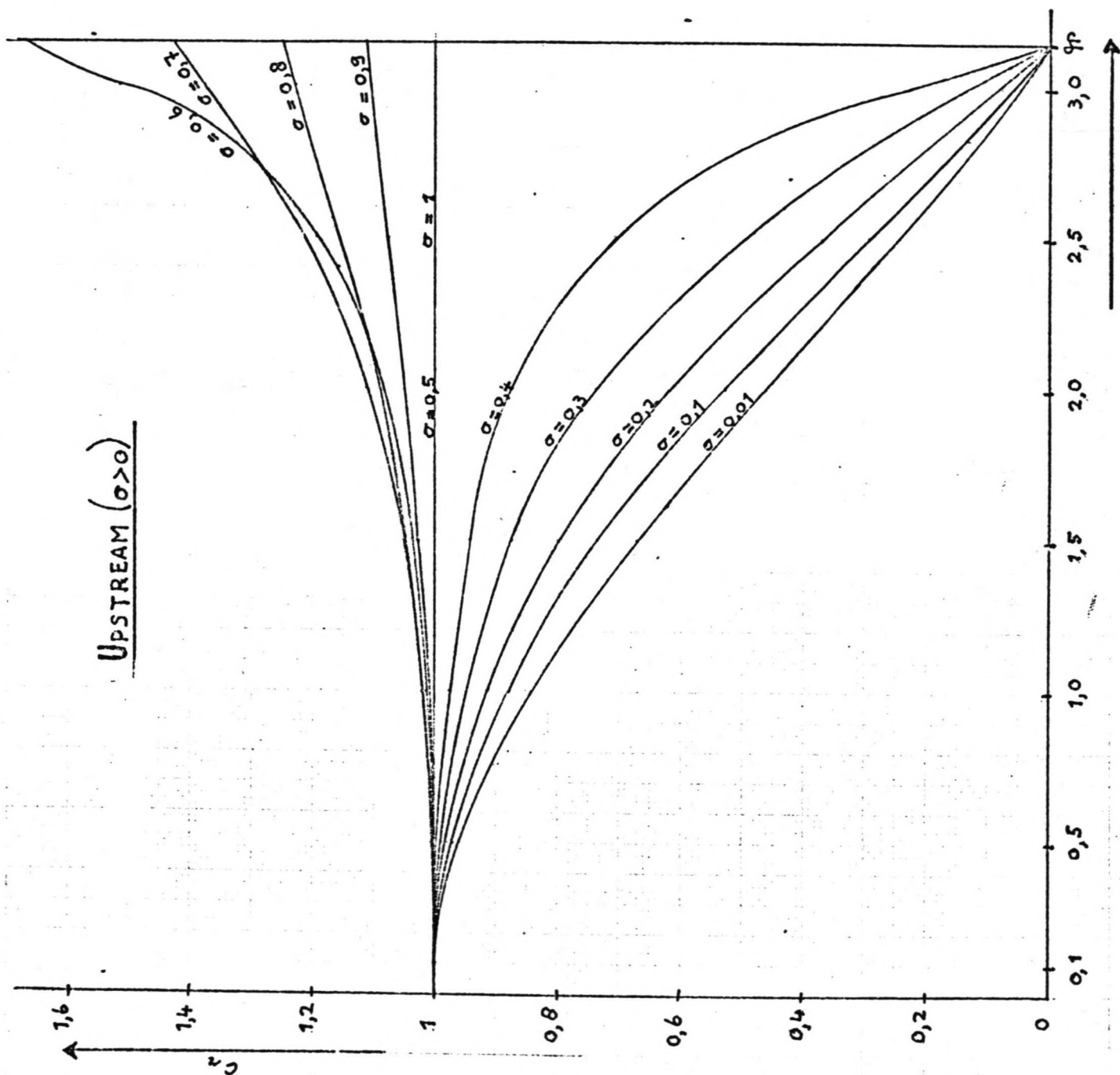


GRAFIEK 8-4

UPSTREAM ($\sigma > 0$)



GRAFIEK 8-5

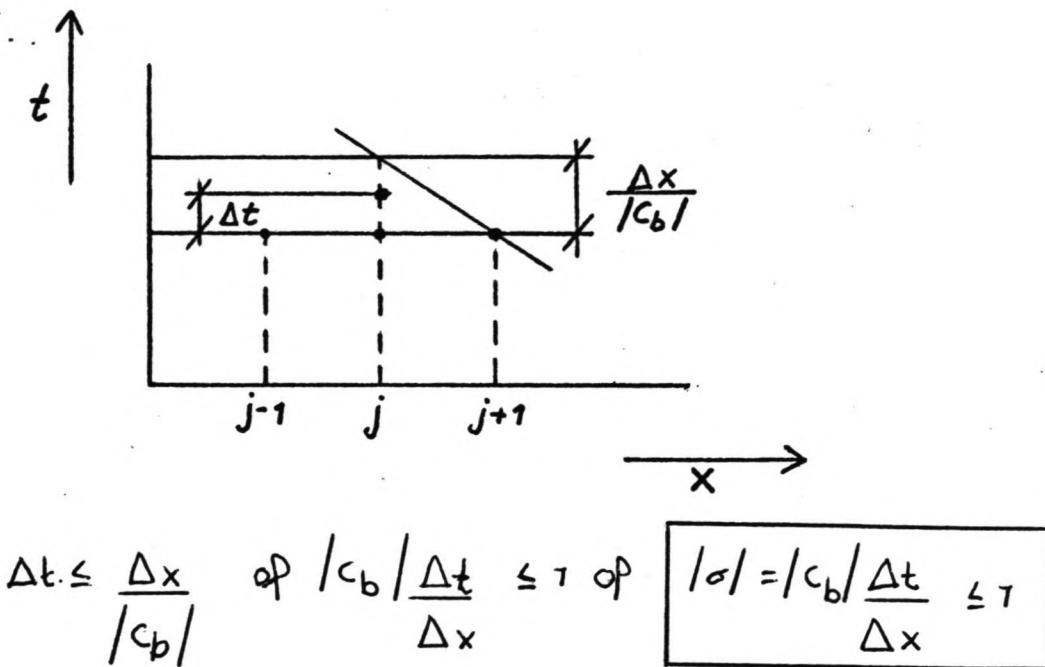


GRAFIK 8-6

§ 8-5.3 Stabiliteit van de differentieschema's

Het verschijnsel van explosieve groei van de oplossingen tijdens het numeriek rekenen wordt "instabiliteit" genoemd. Om dit verschijnsel te voorkomen moet bij het gebruik van een differentie-schema aan bepaalde criteria worden voldaan.

Allereerst geldt voor alle expliciete schema's het zogenaamde Courant/Friedrichs/Lewy (CFL)-criterium:



figuur 8-11

Verder zegt de amplificatiefactor, die voor ieder differentie-schema verschilt, iets over de stabiliteit van het differentie-schema. Als namelijk de amplificatiefactor (ρ) voor bepaalde golf met een zekere golflengte (λ) een absolute waarde > 1 heeft, dan neemt de amplitude van die golf met die golflengte exponentieël toe in de tijd.

Er geldt immers voor bijvoorbeeld een golfverschijnsel dat met de simple-wave benaderd kan worden : $d = |\rho|^{n_t}$.

De methode is dan instabiel. Om deze instabiliteit te voorkomen moet aan het zogenaamde von Neumann-criterium worden voldaan, dat zegt:

$$|\rho| \leq 1 \quad \text{voor} \quad 0 \leq \xi \leq \pi$$

Het aantal punten per golflengte n_x moet minimaal 2 zijn om een golf weer te kunnen geven. Omdat geldt dat $\xi = 2\pi / n_x$ wordt aan de voorwaarde $0 \leq \xi \leq \pi$ voldaan.

Voor de verschillende in § 8-4.2 behandelde expliciete differentie-schema's geldt het CFL-criterium. In appendix III zal worden nagegaan wat het gevolg is van het toepassen van het von Neumann-criterium op de verschillende differentie-schema's.

In tabel 8-10 zijn de in appendix III afgeleide stabiliteitscriteria samengevat:

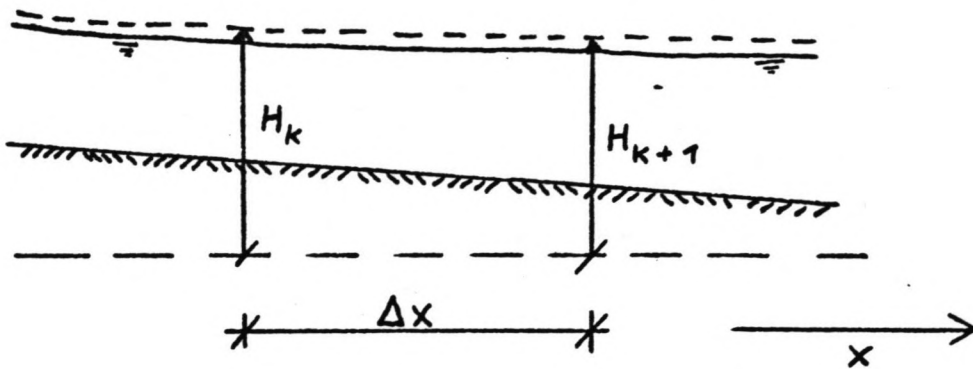
Schema	Stabiliteitscriterium
modified-Lax	$\sigma^2 \leq \alpha \leq 1$
Lax/Wendroff	$ \sigma \leq 1$
upstream	$ \sigma \leq 1$

tabel 8-10

§ 8-5.4 Stabiliteit van de stuwkromme-berekening

Zoals uit § 8-4.1 blijkt kan de stuwkromme-berekening met onderstaande impliciete differentie-schema worden uitgevoerd:

$$\frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta x} = \frac{1}{2} \left[f(H_{k+1}, x_{k+1}) + f(H_k^*, x_k) \right]$$



figuur 8-12

Stel dat op x_{k+1} er een fout in h_{k+1} zit die gelijk is aan ϵ_{k+1} . Een dergelijke fout kan ontstaan door afrondingen of een iteratief proces, dat niet volledig convergeert. De fout in h_k die gelijk is aan ϵ_k is dan als volgt af te leiden:

$$\frac{(H_{k+1} + \epsilon_{k+1}) - (H_k + \epsilon_k)}{\Delta x} = \frac{1}{2} \left[f(H_{k+1} + \epsilon_{k+1}, x_{k+1}) + f(H_k^* + \epsilon_k, x_k) \right] \approx$$

$$\frac{1}{2} \left[f(H_{k+1}, x_{k+1}) + \epsilon_{k+1} f'(H_{k+1}) + f(H_k^*, x_k) + \epsilon_k f'(H_k^*) \right]$$

Na aftrekking van de differentie vergelijking en de veronderstelling dat

$$f'(H_k^*) = f'(H_{k+1}) = f'(H)$$

volgt:

$$\varepsilon_K = \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta x f'(H)}{1 + \frac{1}{2} \Delta x f'(H)} \varepsilon_{K+1}$$

Dus $\varepsilon_K \leq \varepsilon_{K+1}$ wanneer $\left| \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta x f'(H)}{1 + \frac{1}{2} \Delta x f'(H)} \right| \leq 1$

Dit is het geval als $f'(H)$ is positief. Dat dit inderdaad het geval is volgt uit onderstaande afleiding:

$$f(H) = \frac{-u|u|}{C^2 a}, \quad u = \frac{q}{a}; \quad a = H - z_b - \frac{u^2}{2q}$$

dus $f(H) = -\frac{q^2}{C^2} \frac{1}{(H - z_b - \frac{u^2}{2q})^3}$ en

$$f'(H) = \frac{\partial}{\partial H} (f(H)) = \frac{3q^2}{C^2} \frac{1}{a^4}$$

Bij gebruik van het impliciete differentie-schema is de stuwkromme-berekening voor iedere Δx stabiel. Men kan dus de stapgrootte (Δx) onbeperkt groot nemen in verband met de stabiliteit. De geëiste nauwkeurigheid zal echter aan de te kiezen Δx een beperking opleggen (zie § 8-5.2).

De stuwkromme-berekening kan ook met een expliciet differentie-schema worden uitgevoerd:

$$\frac{H_{K+1} - H_K}{\Delta x} = f(H_{K+1}, x_{K+1})$$

Hieruit is zoals bij het impliciete schema onderstaande af te leiden:

$$\frac{(H_{k+1} + \varepsilon_{k+1}) - (H_k + \varepsilon_k)}{\Delta x} = f(H_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, x_{k+1})$$

$$\approx f(H_{k+1}, x_{k+1}) + \varepsilon_{k+1} f'(H_{k+1})$$

Na aftrekking volgt:

$$\varepsilon_k = \{1 - \Delta x f'(H_{k+1})\} \varepsilon_{k+1}$$

Dus $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{k+1}$ als $|1 - \Delta x f'(H_{k+1})| \leq 1$

dit is het geval voor $0 \leq \Delta x f'(H_{k+1}) \leq 2$

$f'(H_{k+1})$ moet dus positief zijn en $0 \leq \Delta x \leq 2/f'(H_{k+1})$.

Zoals bij het impliciete schema is aangetoond is het eerste inderdaad het geval. Bij gebruik van een expliciete differentie-schema mag de stapgrootte Δx niet te groot worden genomen in verband met de stabiliteit. De stapgrootte Δx mag maximaal de waarde $\frac{2C^2}{3q^2} a^4$ hebben.

§ 8-5.5 De afbreekfout en de consistentie van de differentie-
schema's

De fout in de benadering van een differentiaalvergelijking met een differentievergelijking wordt de afbreekfout genoemd. Door de differentievergelijking van de simple-wave vergelijking via een Taylor-reeks weer naar een continue-vorm om te werken kan de afbreekfout van een bepaald differentie-schema bepaald worden.

Bovenstaande gebeurt voor het drietal beschouwde differentie-schema's in appendix IV. In deze appendix wordt tevens nagegaan of de differentievergelijkingen van de drie schema's consistent zijn.

Voor alle differentie-schema's, toegepast op de simple-wave vergelijking, geldt de onderstaande algemene afbreekfout (Vreugdenhil (1981)):

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} f^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6\Delta t} f^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24\Delta t} f^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \dots$$

8-8

In tabel 8-11 zijn de resultaten van appendix IV samengevat.

Schema	f^2	f^3
modified-Lax	$\alpha - \sigma^2 = \beta$	$-\sigma(1 - \sigma^2 - 3\beta)$
Lax/Wendroff	0	$-\sigma(1 - \sigma^2)$
upstream	$ \sigma (1 - \sigma)$	$- \sigma (1 - \sigma)(2 \sigma - 1)$

tabel 8-11

De 1^o orde afbreekterm in de afbreekfout is een diffusieterm en veroorzaakt numerieke demping. De diffusietermen zijn altijd positief

in verband met de stabiliteitseisen. Daarom zullen de oplossingen niet exponentieël groeien in de tijd. Om de invloed van deze numerieke diffusie op de resultaten van de numerieke berekening te beperken, zullen de diffusietermen klein moeten zijn.

De 2^o orde afbreekterm genereert secundaire golven. Om de berekeningsresultaten te kunnen interpreteren, mogen deze secundaire golven niet te groot zijn.

Modified-Lax

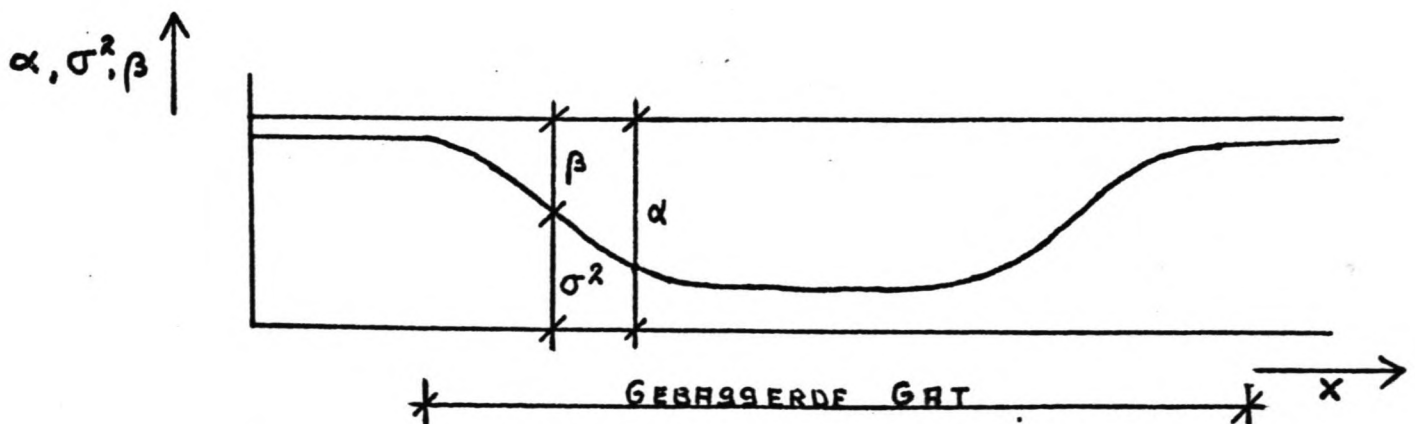
Om de numerieke diffusie bij gebruik van het modified-Lax-schema te verkleinen kan onder andere de stapgrootte Δx kleiner worden genomen. Dit moet dan ook gebeuren voor de tijdstap Δt in verband met de stabiliteitseis $|\sigma| = |c_b| \Delta t / \Delta x \leq 1$.

Doordat Δx tot één hogere macht wordt verheven dan Δt zal bij kleinere stapgrootte Δx , ondanks het afnemen van Δt , de diffusie-term kleiner worden.

Bij het gebruik van dit differentie-schema zijn er twee mogelijkheden ten aanzien van de γ^2 -term:

- 1) α constant kiezen
- 2) $\beta = \alpha - \sigma^2$ constant kiezen

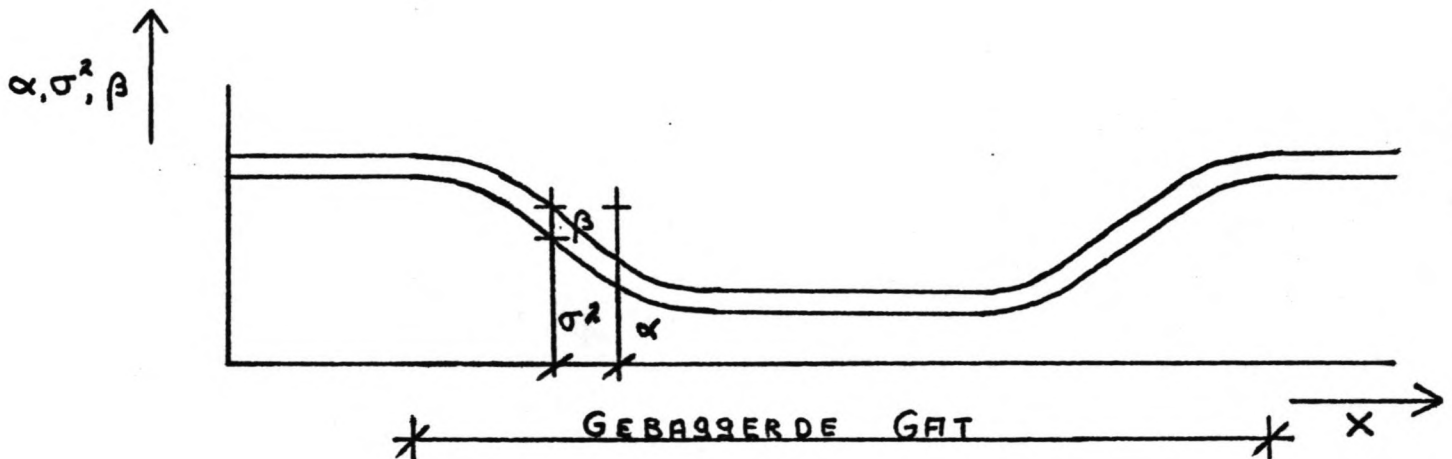
Het constant kiezen van α betekent dat over de gebaggerde gaten het verloop van β er als volgt uitziet:



figuur 8-8

In de diepere gaten zullen de c_b -waarden en daardoor de σ -waarden klein zijn. Omdat $\sigma^2 + \beta = \alpha$ is constant zullen de B-waarden daar dus groot zijn. Zoals uit het tabel 8-11 blijkt betekent een grote β -waarde grote numerieke diffusie, hetgeen het interpreteren van de resultaten van de morfologische berekening moeilijk maakt.

Het constant kiezen van β betekent dat het verloop van β over de diepere gaten er uit ziet, zoals in onderstaande figuur is aangegeven.



figuur 8-9

Grote numerieke diffusie in vooral de diepe gaten wordt bij het constant kiezen van β voorkomen.

Een variabele α heeft echter als nadeel dat er bij gebruik van de differentie vergelijking zoals in § 8-4.2 vermeld, numerieke lekken ontstaan. Dit is echter te ondervangen door een conservativedifferentie vergelijking te gebruiken. Hier zal in § 8-6 op worden teruggekomen.

Bij een constante β -waarde is de α -waarde variabel. In verband met de stabiliteit moet de α max ≤ 1 gekozen worden. In § 8-6 wordt dit nader toegelicht.

Het genereren van secundaire golven kan bij het modified-Lax-schema onderdrukt worden door de stapgrootte Δx te verkleinen. Ook hier betekent dit dat de tijdstap Δt verkleind moet worden in verband met de stabiliteitseis.

Verder kan het genereren van secundaire golven verkleind worden door:

- a) bij constante α -waarde, de α groot te kiezen, echter in verband met de stabiliteit ≤ 1 ; immers $\gamma^3 = -\sigma(1 - \alpha - 2\beta)$
- b) bij constante β -waarde, de β groot te kiezen; immers er geldt $\gamma^3 = -\sigma(1 - \sigma^2 - 3\beta)$

Lax-Wendroff

Bij het gebruik van het Lax/Wendroff schema is geen numerieke diffusie aanwezig, immers de 1^o orde afbreekterm is nul.

De 2^o orde afbreekterm kan verkleind worden door Δx te verkleinen. De opmerking gemaakt bij het modified-Lax-schema ten aanzien van het verkleinen van de stapgrootte zijn ook voor dit schema geldig.

Uit tabel 8-11 blijkt dat de γ^3 afhankelijk is van de σ -waarde. De 2^o orde afbreekterm is dan ook variabel in ruimte en tijd.

Upstream

Bij het upstream-schema is de numerieke diffusie eveneens te verkleinen door de ruimtestap kleiner te maken. Omdat de γ^2 een functie is van σ is de numerieke diffusie variabel in ruimte en tijd.

Wanneer men de γ^2 -term bekijkt, dan blijkt dat voor $\sigma = 1$ de 1^o orde afbreekterm nul wordt. Ondanks het kiezen van $\sigma_{\max}$ dicht in de buurt van 1, echter niet groter dan 1 in verband met de stabiliteitseis, kan voor de σ -waarden kleiner dan 1 de γ^2 en daarmee de numerieke demping groot worden.

Ten aanzien van het genereren van secundaire golven kan voor het upstream-schema hetzelfde worden opgemerkt als gedaan is voor het Lax-Wendroff-schema.

De γ_2 - en γ_3 -waarden voor de verschillende differentie-schema's zijn in de grafieken 8-7 en 8-8 uitgezet tegen de σ -waarden voor $0 \leq \sigma \leq 1$.

§ 8-5.6 De afbreekfout van de differentie-schema's voor de stuwkromme-berekening

Uit § 8-4.1 blijkt dat als expliciet differentie-schema voor de vergelijking 8-1.1, de vergelijking van de stuwkromme, onderstaande differentie-schema genomen kan worden:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta x} = f(H_{k+1}, x_{k+1})$$

Taylor-reeks ontwikkeling in het punt x_{k+1} geeft voor H_k :

$$\frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta x} = \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 H_{k+1}}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

De afbreekfout = $\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ en is dus van de 1^o orde.

Uit § 8-4.1 blijkt dat voor vergelijking 8-1.1, onderstaande impliciete differentie-schema genomen kan worden:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta x} = \frac{1}{2} [f(H_{k+1}, x_{k+1}) + f(H_k^*, x_k)]$$

Taylor-reeks ontwikkeling in het punt $x_{k+1/2}$ geeft:

$$\frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta x} = \frac{\partial H_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^3 H_{k+1/2}}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)$$

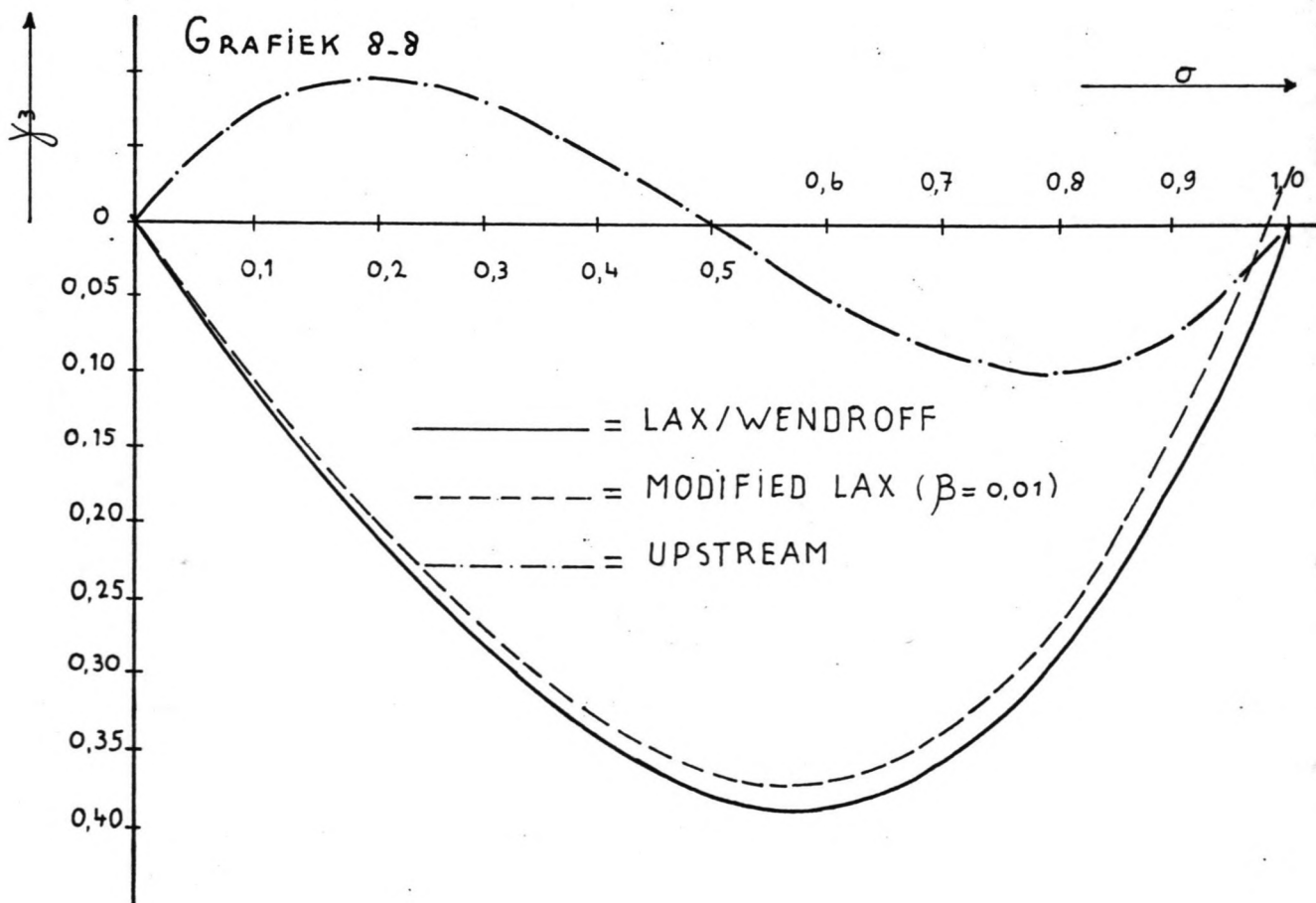
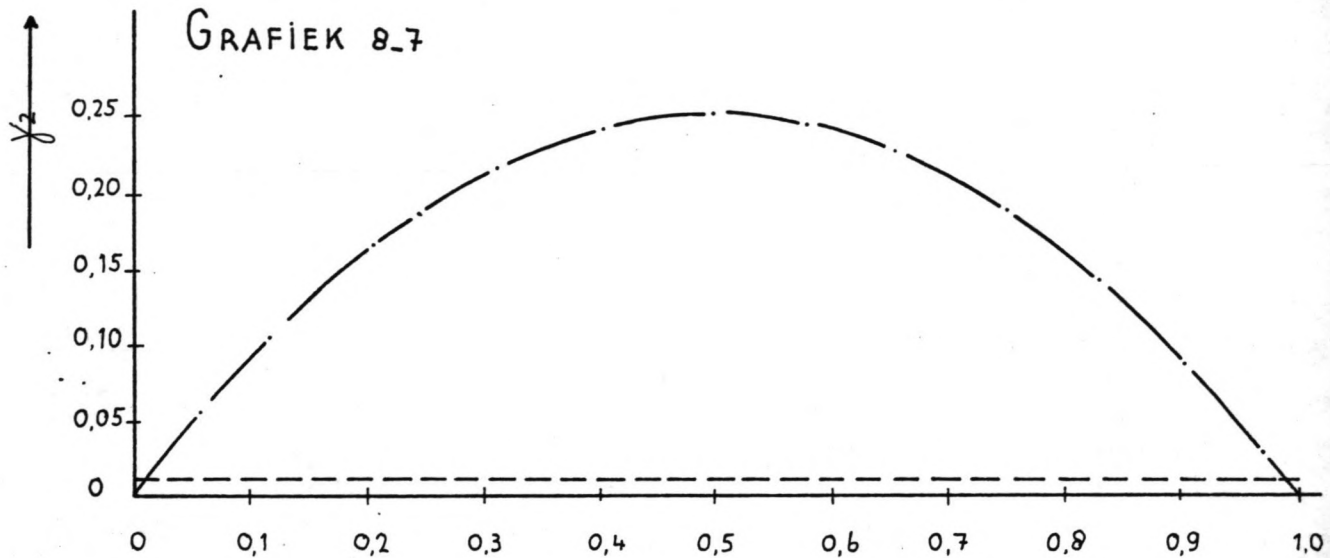
De afbreekfout = $-\frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3}$ en is dus van de 2^o orde.

Uit het bovenstaande volgt dat de differentie vergelijking voor zowel het expliciete als het impliciete schema consistent zijn met de differentiaal vergelijkingen. Immers voor $\Delta x \rightarrow 0$ zal de afbreekfout voor beide schema's naar nul gaan als de tweede afgeleide bij het expliciete schema en de derde afgeleide bij het impliciete schema voor $\Delta x \rightarrow 0$ eindige waarden hebben.

De afbreekfout van het expliciete schema is van de 1^o orde.

Van het impliciete schema is de afbreekfout van de 2^o orde.

Het is dan ook te verwachten, dat het impliciete schema in het algemeen nauwkeuriger zal zijn dan het expliciete schema.



§ 8-6 Keuze differentie-schema's

Uit grafiek 8-7 blijkt dat ten aanzien van de numerieke diffusie het Lax/Wendroff- en het modified-Lax-schema gelijkwaardig zijn, wanneer voor het laatste schema een constante en kleine waarde voor β wordt genomen. Het upstream-schema is duidelijk ongunstiger.

Voor wat betreft het genereren van secundaire golven is, zoals blijkt uit grafiek 8-8 het upstream-schema gunstiger dan de overige twee differentie-schema's.

Het modified-Lax-schema is voor een constante en kleine β waarde gelijkwaardig aan het Lax/Wendroff-schema. Naarmate de β waarde toeneemt, zal het modified-Lax-schema gunstiger worden ten aanzien van het genereren van secundaire golven dan het Lax/Wendroff-schema.

Omdat het modified-Lax-schema naast het verkleinen van de stapgrootte de extra mogelijkheid bezit om na het vergroten van de β waarde de secundaire golven te onderdrukken, is de voorkeur gegeven aan dit schema boven het Lax/Wendroff-schema.

Het impliciete schema voor de stuwkromme-berekening heeft als voordeel ten opzichte van het expliciete schema, dat er geen beperking is voor wat betreft de stapgrootte Δx in verband met de stabiliteit.

De afbreekfout van het expliciete schema is van de 1^o orde. Die van het impliciete schema is van de 2^o orde. Het impliciete schema zal daarom nauwkeuriger zijn.

Op grond van bovenstaande is gekozen voor het impliciete differentie-schema om de stuwkrommen te berekenen.

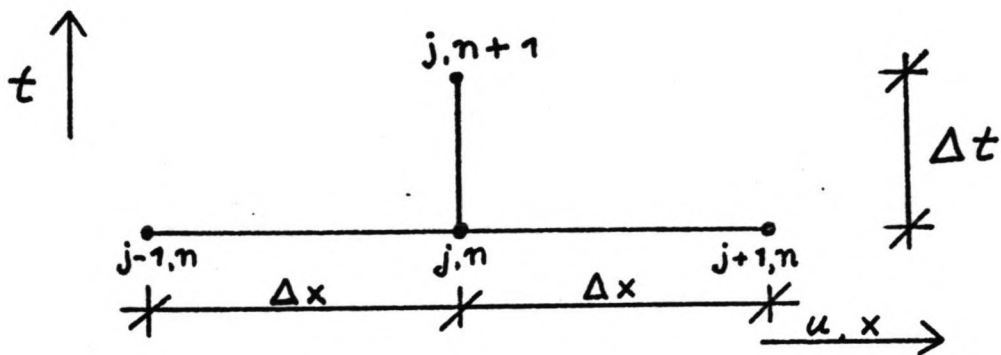
§ 8-7 De in de computerberekeningen gebruikte differentie-schema's

De stuwkromme is berekend met het impliciete differentie-schema, de predictor-corrector methode van Heun, dat besproken is in § 8-4.1,

§ 8-5.4 en § 8-5.6.

Voor de vergelijking $\partial^2/\partial t + \partial^2/\partial x = 0$

is onderstaande variant gebruikt, zie Vreugdenhil (1981). Deze variant is conservatief voor variërende α -waarden en voor variërende rivierbreedten in het langsverloop, dit wordt op de volgende bladzijde aangetoond.



$$z_j^{n+1} = z_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} * (S_{j-1}^n - S_{j+1}^n) / B_j^n + (1/4 B_j^n) * [(\alpha_{j+1}^n B_{j+1}^n + \alpha_j^n B_j^n)(z_{j+1}^n - z_j^n) - (\alpha_j^n B_j^n + \alpha_{j-1}^n B_{j-1}^n)(z_j^n - z_{j-1}^n)]$$

Voor de benedenrand is de conservatieve vorm

$$z_j^{n+1} = z_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} * (S_j^n - S_{j+1}^n) / B_j^n + (1/2 B_j^n) * [(\alpha_{j+1}^n B_{j+1}^n + \alpha_j^n B_j^n)(z_{j+1}^n - z_j^n)]$$

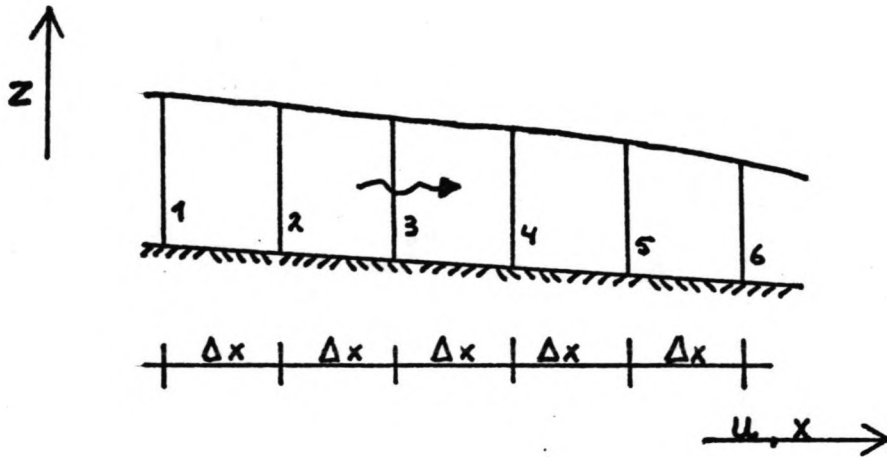
Voor de bovenrand is de conservatieve vorm

$$z_j^{n+1} = z_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (S_{j-1}^n - S_j^n) / B_j^n - (1/2 B_j^n) * [(\alpha_j^n B_j^n + \alpha_{j-1}^n B_{j-1}^n)(z_j^n - z_{j-1}^n)]$$

Voor het hieronder getekende riviertraject, zie figuur 8-10, treedt per tijdstap Δt geen numeriek lek op, indien aan de onderstaande massa-balans wordt voldaan. Dit geldt indien de conservatieve vorm voor de beneden- en bovenrand wordt gekozen.

massa-balans:

$$\sum_{j=1}^6 \Delta x \cdot (z_j^{n+1} - z_j^n) \cdot B_j = \Delta t \cdot (S_1 - S_6)$$



figuur 8-10

massabalans

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot B_1 \cdot (z_1' - z_1'') \cdot \Delta x &= \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (S_1' - S_2'') + \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot [(\alpha_2'' B_2'' + \alpha_1' B_1') (z_2'' - z_1')] \\ B_2 \cdot (z_2' - z_2'') \cdot \Delta x &= \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (S_1'' - S_3') + \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot [(\alpha_3' B_3' + \alpha_2'' B_2'') (z_3' - z_2'') - (\alpha_2' B_2' + \alpha_1'' B_1'') (z_2' - z_1'')] \end{aligned}$$

$$B_3 \cdot (z_3' - z_3'') \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (S_2'' - S_4') + \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot [(\alpha_4' B_4' + \alpha_3'' B_3'') (z_4' - z_3'') - (\alpha_3' B_3' + \alpha_2'' B_2'') (z_3' - z_2'')] \quad \left(\alpha_3' B_3' + \alpha_2'' B_2'') (z_3' - z_2'') \right]$$

$$B_4 \cdot (z_4' - z_4'') \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (S_3' - S_5'') + \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot [(\alpha_5'' B_5'' + \alpha_4' B_4') (z_5'' - z_4') - (\alpha_4' B_4' + \alpha_3'' B_3'') (z_4' - z_3'')] \quad \left(\alpha_4' B_4' + \alpha_3'' B_3'') (z_4' - z_3'') \right]$$

$$B_5 \cdot (z_5' - z_5'') \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (S_4'' - S_6') + \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot [(\alpha_6' B_6' + \alpha_5'' B_5'') (z_6' - z_5'') - (\alpha_5' B_5' + \alpha_4'' B_4'') (z_5' - z_4'')] \quad \left(\alpha_5' B_5' + \alpha_4'' B_4'') (z_5' - z_4'') \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot B_6 \cdot (z_6' - z_6'') \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (S_5' - S_6'') + \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot [(\alpha_6'' B_6'' + \alpha_5' B_5') (z_6'' - z_5')] \quad \left(\alpha_6'' B_6'' + \alpha_5' B_5') (z_6'' - z_5') \right]$$

$$\sum_{j=1}^6 \Delta x \cdot (z_j' - z_j'') \cdot B_j = \Delta t \cdot (S_1' - S_6'')$$

In het computerprogramma zijn de bovenrand en benedenrand niet conservatief gekozen. Omdat bij uniforme stroming op de beneden- en bovenrand met de conservatieve vorm toch aan zandingen of uitschuringen zullen optreden ten gevolge van de termen $(\frac{1}{2} B_j^n) * (\alpha_{j+1}^n B_{j+1}^n + \alpha_j^n B_j^n) * (z_{j+1}^n - z_j^n)$ en $-(\frac{1}{2} B_j^n) * (\alpha_j^n B_j^n + \alpha_{j-1}^n B_{j-1}^n) * (z_j^n - z_{j-1}^n)$ in respectievelijk de beneden- en bovenrand. Daarom zijn deze termen weggelaten.

De tijdstap Δt in het computerprogramma wordt berekend uit de betrekking:

$$\Delta t = \Delta x / C_{b \max} \sqrt{\alpha_{\max} - \beta}$$

waarin: Δx :	de ruimtestap	in [m]
Δt :	de tijdstapgrootte	in [sec]
$C_{b \max}$:	de maximale karakteristieke voortplantingssnelheid in het riviertraject	in [m/sec]
$\alpha_{\max}$:	de maximale waarde voor α	dimensieloos
	deze is gelijk aan 1	
	genomen	

Voor de lokale α -waarde is onderstaande betrekking af te leiden

(N.B. de β -waarde wordt constant gehouden tijdens de computerberekening)

$$\alpha_{\text{lokaal}} = \beta + \left(\frac{C_{b \text{ lokaal}}}{C_{b \max}} \right)^2 * (\alpha_{\max} - \beta)$$

Aangezien $C_{b \text{ lokaal}} \leq C_{b \max}$ volgt uit bovenstaande vergelijking dat $\alpha_{\text{lokaal}} \leq \alpha_{\max}$, zodat bij keuze van $\alpha_{\max} \leq 1$ altijd aan de stabiliteitsvoorwaarde van het von Neumann criterium ($0^2 \leq \alpha \leq 1$) wordt voldaan.

HOOFDSTUK 9

Afleiding van de criteria die gesteld worden
aan de numerieke nauwkeurigheid

§ 9-1 Inleiding

Het doel van dit hoofdstuk is om een criterium af te leiden voor de fout in de numerieke damping en een criterium voor de fout in de numerieke faseverschuiving.

Het baggeren van een gat in de rivierbodem, betekent dat een verstoring in de bodemligging wordt aangebracht, die zich in benedenstroomse richting zal voortplanten. Aangenomen wordt, dat deze verstoring is opgebouwd uit een aantal golven, die met de hyperbolische vergelijking beschreven kunnen worden.

In § 9-2 wordt een te baggeren gat in een fourier-reeks ontwikkeld ten einde de golven die als een verstoring door de rivierbodem gaan lopen te analyseren. Tevens worden hier twee criteria vermeld, waardoor het aantal mee te nemen fouriercomponenten per gat kan worden bepaald.

In § 9-3 wordt de analytische oplossing van de door lineariseren gevonden hyperbolische vergelijking besproken. Ook wordt hier aangetoond, dat voor een bepaald gat alle fouriercomponenten dezelfde fysische damping en faseverschuiving hebben.

In § 9-4 worden formules afgeleid, waarmee de relatieve fout in de karakteristieke voortplantingssnelheid (c_b) en de dampingstijd (τ_d) kunnen worden bepaald ten gevolge van fouten in de rivierbreedte (B), de Chezy-waarde (C), het bodemverhang (i_b) en de sedimenttransportformule.

In § 9-5.1 wordt met behulp van de fout in de fysische demping een criterium afgeleid voor de fout in de numerieke demping.

In § 9-5.2 wordt met behulp van de fout in de karakteristieke voortplantingssnelheid een criterium afgeleid voor de numerieke fout in de faceverschuiving.

Voor een willekeurige rivier kan met behulp van de criteria uit

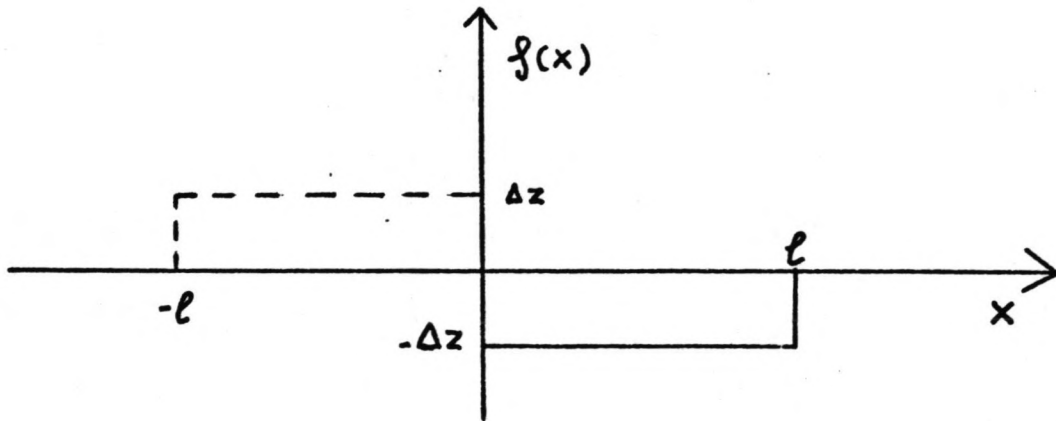
§ 9-5.1 en § 9-5.2 bij geschatte fouten in de rivierbreedte (B), de Chezy-waarde (C), het bodemverhang (i_b) en de sedimenttransport-formule een Δx worden bepaald voor de morfologische berekening.

De criteria uit § 9-5.1 en § 9-5.2 worden in hoofdstuk nummer 10 getoetst.

§ 9-2 Ontwikkeling van een "te baggeren gat" in een Fourier-reeks

Een "te baggeren gat" wordt ontwikkeld in een fourier-reeks, teneinde de golven, die als een verstoring door de rivierbodem benedenstrooms van het "te baggeren gat" gaan lopen, te analyseren.

De theorie van fourier algemeen



figuur 9-1

Zij $F(x)$ een functie van x die periodiek is met de lengte $2l$, dan kan $F(x)$ worden benaderd als de superpositie van diverse sinussen en cosinussen

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \frac{\pi}{l} \cdot x) + b_n \sin(n \frac{\pi}{l} \cdot x)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos(n \frac{\pi}{l} \cdot x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin(n \frac{\pi}{l} \cdot x) dx$$

Door een "te baggeren gat" in een fourier-reeks te ontwikkelen (zie figuur 10-1) verkrijgt men de functie (x)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Delta z}{n\pi} * \{(-1)^n - 1\} * \sin(n\pi/\ell \cdot x) \quad 9-2.1$$

Een beslissing moet worden genomen over het aantal sinussen dat in de nauwkeurigheds analyse wordt meegenomen. Zoals in § 9-3 blijkt, dempen de hogere harmonische niet sneller dan de lagere. Daarom zal de beslissing, over het aantal in de nauwkeurigheds analyse mee te nemen sinussen, gebaseerd worden op de wijze waarop de gesuperponeerde sinussen het gebaggerde gat weergeven. Er zijn twee criteria gesteld aan

- a: de fout in de bodemligging van het gat, deze moet kleiner zijn dan 20%;
- b: de taludhelling, afhankelijk van de vorm van het te baggeren gat is een minimale taludhelling geëist.

ad a:

Zoals eenvoudig kan worden aangetoond, zal op grond van dit criterium elk gatvorm met minimaal twee sinussen moeten worden weergegeven.

ad b:

De taludhelling van een "te baggeren gat" wordt gelijkgesteld aan de afgeleide van formule 9-2.1 in het punt $x=0$.

De taludhelling (1:m) is derhalve te berekenen met formule 9-2.2 zie tabel 9-1.

$$m = \ell / 4 \cdot \Delta z \cdot n_s \quad 9-2.2$$

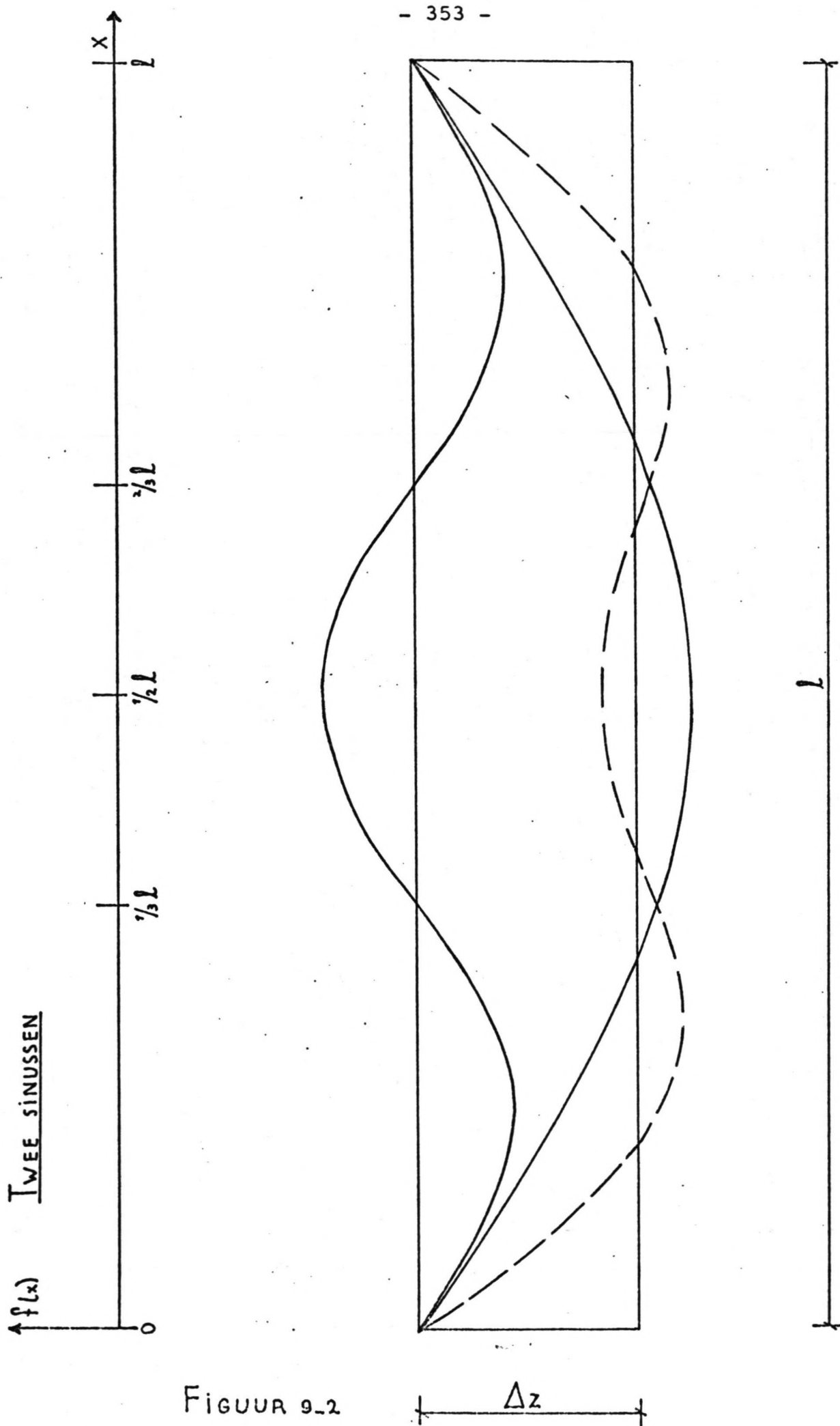
waarin: ℓ = lengte van het gebaggerde gat in [m]
 Δz = diepte van het gebaggerde gat [m]
 n_s = het aantal meegenomen sinus-componenten

gatvorm lengte/diepte	aantal sinus- componenten	talud- helling
1000/20	2	1:6
2000/10	2	1:12
4000/5	3	1:67
8000/2,5	5	1:160
16000/1,25	8	1:400
16000/1,25	1	1:3200

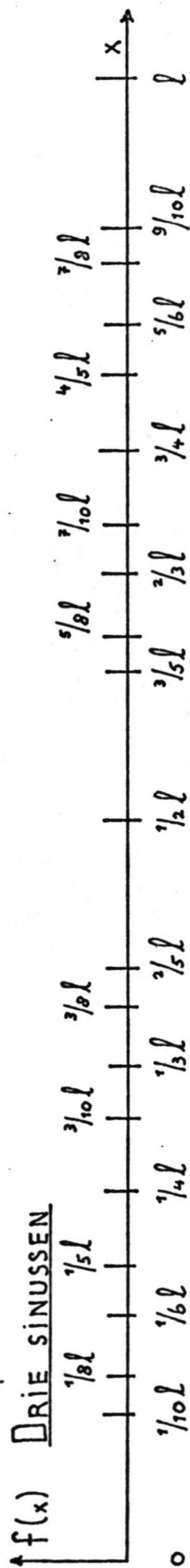
tabel 9-1

Ter illustratie zijn in de figuren 9-2 tot en met 9-4 de gesommeerde resultaten te zien, met respectievelijk 2, 3 en 4 sinuscomponenten.

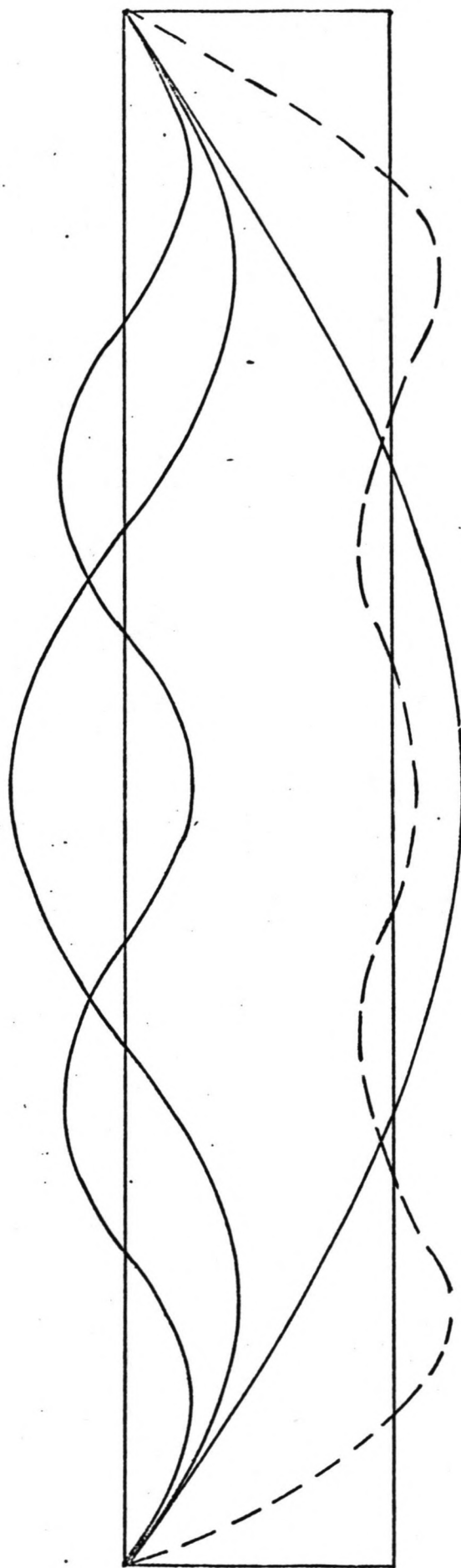
In hoofdstuk nummer 10 wordt nagegaan voor het gat ($l=16000/\Delta z=1,25$) of het juist is om het aantal componenten te relateren aan de taludhelling.



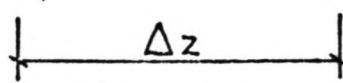
FIGUUR 9.2

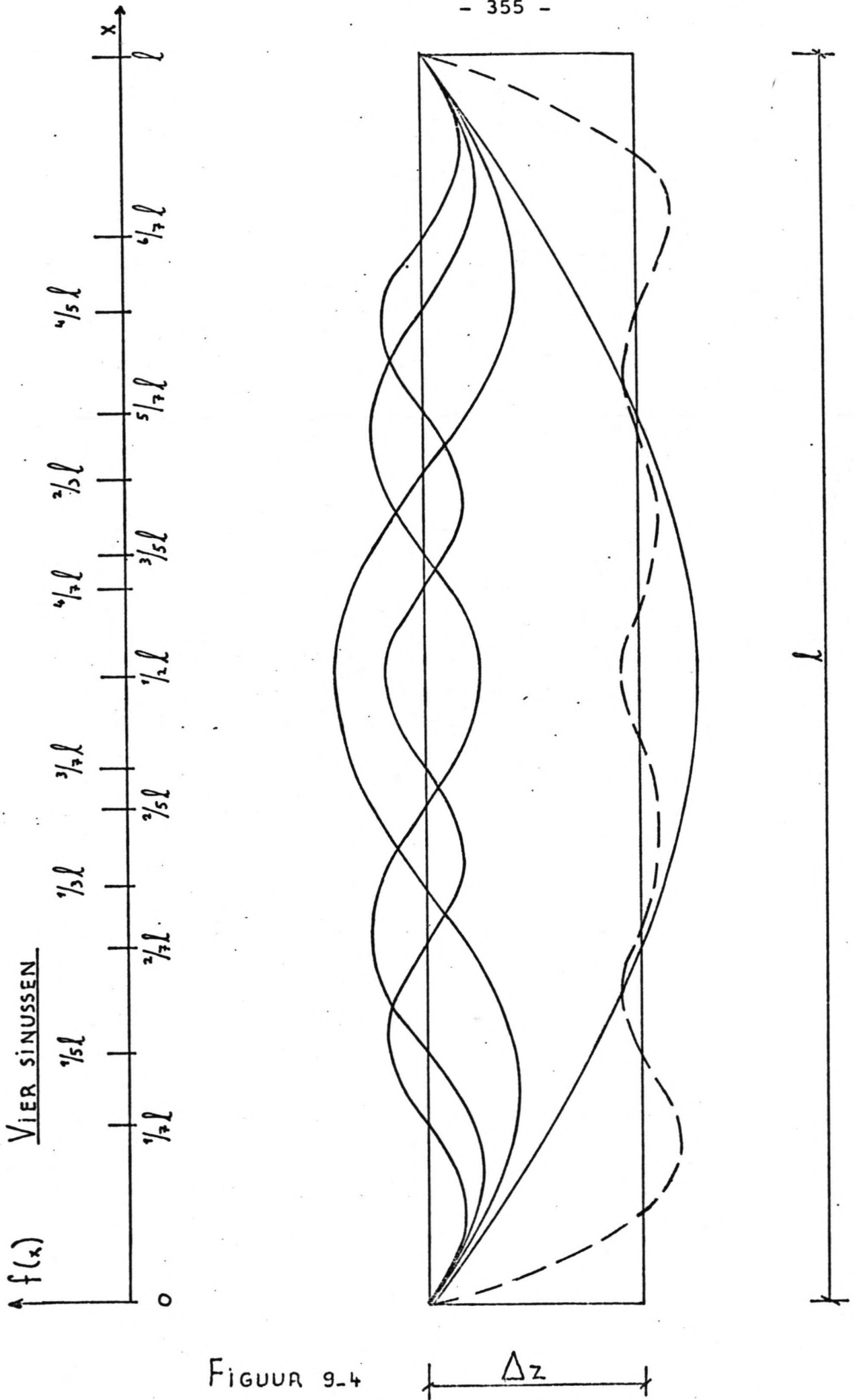


- 354 -



FIGUUR 9.3





FIGUUR 9-4

§ 9-3 De analytische oplossing van de hyperbolische vergelijking.

De oplossing van de hyperbolische vergelijking is vergelijking 9-3.1, zie ook § 8-5.1

$$Z_b(x, t) = \hat{Z} \exp \left\{ -t/T_d + i \omega \left(t - \frac{x}{c_p \cdot c_b} \right) \right\} \quad 9-3.1$$

waarin:

$$T_d = (D/C_b^2) * \left\{ \frac{1 + k^2 D^2 / C_b^2}{k^2 D^2 / C_b^2} \right\}$$

= tijdsperiode waarna damping groot e^{-1} is opgetreden.

$$C_f = \left\{ (1 + k^2 D^2 / C_b^2) / k^2 D^2 / C_b^2 \right\}$$

= de relatieve faseverschuiving

$$k = 2\pi/\lambda \quad = \text{het golfgetal}$$

Vergelijking 9-3.1 wordt de overdrachtsfunctie van het systeem van de zand en waterbeweging genoemd. Aan vergelijking 9-3.1 kan men zien op welk tijdstip t de gegeneerde sinussen tot een bepaalde factor zijn gedempt en hoe groot de faseverschuiving op een bepaalde afstand x is.

Opgemerkt dient te worden dat er bij de afleiding van formule 9-3.1 tijdens het lineariseren de nodige verwaarlozingen zijn gepleegd. De formule 9-3.1 geldt per eenheid van breedte, zodat bij al het gene berekent in § 9-3.1 en § 9-3.2 is uitgegaan van een rivier met constante breedte.

§ 9-3.1 De dempingstijd T_d

Voor T_d , tijdsperiode waarna demping groot e^{-1} optreedt, geldt formule 9-3.2 (zie §9-3).

$$T_d = \left(\frac{D}{C_b^2} \right) * \left(\frac{1 + K^2 D^2 / C_b^2}{K^2 D^2 / C_b^2} \right) \quad 9-3.2$$

De dempingslengte L_d , waarop de demping groot e^{-1} is opgetreden, wordt berekend met behulp van de waardes voor D en c_b , zoals die bij $Q_{dom} = 9417 \text{ [m}^3/\text{sec]}$ benedenstrooms van het gat aanwezig zijn.

$$L_d = D / C_b = \frac{13 \beta \cdot S_t / i_b}{\beta \cdot S_t \cdot u / q} = \frac{a}{3 i_b} = \frac{7.05}{3 * 10.5} * 10^5 \approx 22.5 * 10^3 \text{ [m]}$$

De waarde van (D/c_b^2) varieëert niet per golfcomponent. Zoals men in tabel 9-2 kan zien is de parameter $\{(1 + K^2 D^2 / C_b^2) / K^2 D^2 / C_b^2\}$ voor alle golfcomponenten ongeveer gelijk aan 1.

Hierdoor is de dempingstijd T_d voor alle golfcomponenten even groot. Met andere woorden, de hogere harmonische dempen niet sneller dan de lagere harmonische, dit is de reden, waarom het aantal mee te nemen componenten in de fourier analyse is gebaseerd op visuele gronden. (zie §9-2).

Gatvorm $\Delta z/L$	com- ponent	golflengte in [m]	golfgetal k in 10^{-3}	parameter $\frac{1+k^2 D^2/C_b^2}{k^2 D^2/C_b^2}$
20/1000	S ₁	2000	3,14	1,0006
	S ₃	667	9,42	1,00002
10/2000	S ₁	4000	1,57	1,0008
	S ₃	1333	4,71	1,00009
5/4000	S ₁	8000	0,79	1,003
	S ₃	2667	2,36	1,0004
	S ₅	1600	3,93	1,0001
2,5/8000	S ₁	16000	0,39	1,01
	S ₃	5333	1,18	1,001
	S ₅	3200	1,96	1,0005
	S ₇	2286	2,75	1,0003
	S ₉	1778	3,53	1,0002
1,25/16000	S ₁	32000	0,20	1,05
	S ₃	10667	0,59	1,006
	S ₅	6400	0,98	1,002
	S ₇	4571	1,37	1,001
	S ₉	3556	1,77	1,0006
	S ₁₁	2909	2,16	1,0004
	S ₁₃	2462	2,55	1,0003

tabel 9-2

§ 9-3.2 De relatieve faseverschuiving C_f van de met behulp van de Fourier analyse gegeneerde sinussen.

Zoals men in vergelijking 9-3.1 kan zien treedt op een afstand x van het gebaggerde gat een fase verschuiving ter grootte van $X/(C_f \cdot C_b)$ op.

De vergelijking voor de relatieve fase verschuiving luidt:

$$C_f = \frac{1 + k^2 D^2 / C_b^2}{k^2 D^2 / C_b^2} \quad 9-3.3$$

Zoals men in tabel 9-2 kan zien is de waarde voor de relatieve fase verschuiving (C_f) voor alle golfcomponenten gelijk aan 1.

Met andere woorden, de fysische fase verschuiving is voor alle gegeneerde sinussen even groot. De numerieke fase verschuiving is voor alle componenten van de fourier-analyse niet even groot.

Bij een gekozen Δx , behorende bij een bepaalde gatvorm, kunnen de waarden voor de relatieve voortplantingssnelheid C_r per golfcomponent verschillen.

De bodemligging op een bepaalde plaats is de sommatie van de voor een bepaalde gatvorm beschouwde aantal fouriercomponenten. De onderlinge faseverschuiving van de fouriercomponenten ten gevolge van het numerieke rekenen moet niet te groot zijn, omdat de fysische faseverschuiving van alle fouriercomponenten even groot is. Is de onderlinge numerieke fase verschuiving van de fourier-componenten wel groot, dan zal bij sommatie van deze fourier-componenten een bodemhoogte worden gevonden, die sterk kan afwijken van de fysische bodemhoogte.

§ 9-4 Formules waarmee de relatieve fysische fouten in C_b en T_d kunnen worden berekend

Bij een morfologische berekening heeft men te maken met twee soorten fouten:

- 1) de fouten in de fysische grootheden waarmee tot een mathematisch model wordt geschematiseerd;
- 2) de fouten ten gevolge van het numeriek rekenen.

In de volgende paragrafen wordt aangenomen dat alleen in onderstaande fysische grootheden fouten zitten:

- a) de rivierbreedte (B)
- b) het bodemverhang (i_b)
- c) de totale ruwheid (C)
- d) de constante in de zandtransportformule (k)

De fysische fouten worden volgens het hierna volgende schema bepaald:

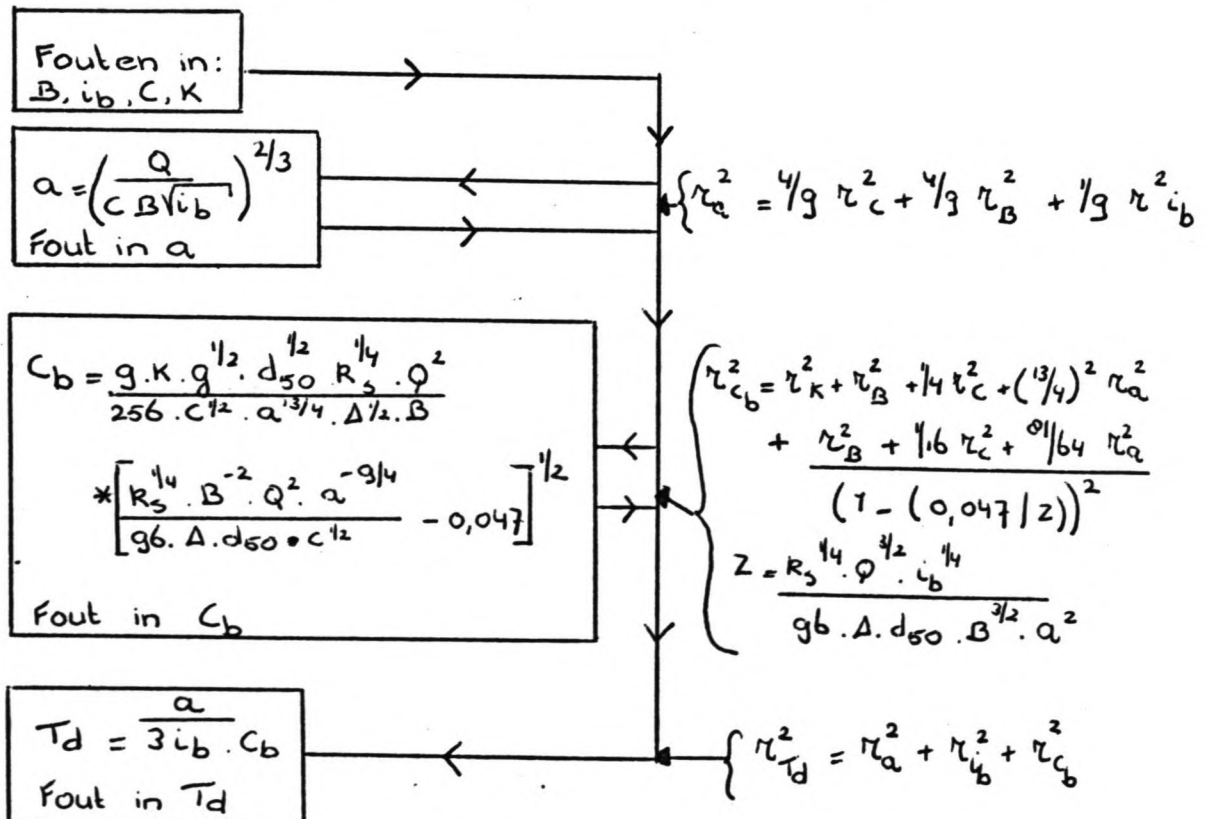


FIG 9-5

§ 9-4.1 De relatieve fout in de waterdiepte

Uit Chezy volgt: $Q = C^{2/3} B^{2/3} c_b^{1/3}$

Met behulp van de kwadratische voortplantingswet van fouten is dan af te leiden:

$$\epsilon_Q^2 = \frac{4}{9} \epsilon_C^2 + \frac{4}{9} \epsilon_B^2 + \frac{1}{9} \epsilon_{c_b}^2 \quad 9-4.1$$

Door de waarden voor ϵ_C , ϵ_B en ϵ_{c_b} in bovenstaande vergelijking te substitueren, wordt de relatieve fout in de waterdiepte gevonden (ϵ_Q).

§ 9-4.2 De fysische fout in de karakteristieke voortplantingssnelheid

Voor $\epsilon^2 \ll 1$ geldt voor de karakteristieke voortplantingssnelheid de formule:

$$c_b = \frac{u^2}{g} f'(u) \quad 9-4.2$$

Verder geldt voor de sedimenttransportformule van Meyer-Peter en Müller (zie hoofdstuk 2) de vergelijking:

$$S_t = f(u) = K B \sqrt{g \Delta d_{50}^3} \left[\frac{u^{3/2} (K_{si})^{1/4}}{96 \Delta d_{50}} - 0,047 \right]^{3/2} \quad 9-4.3$$

Met behulp van bovenstaande formules is de volgende formule voor c_b af te leiden:

$$c_b = \frac{g}{256} \frac{\kappa g^{1/2} d_{50}^{1/2} \kappa_s^{1/4} Q^2}{\Delta^{1/2} B C^{1/2} a^{3/4}} \left[\frac{\kappa_s^{1/4} Q^2}{g b \Delta d_{50} C^{1/2} a^{3/4} B^2} - 0,047 \right]^{1/2} \quad 9-4.4$$

Met

$$X = \frac{g}{256} \frac{\kappa g^{1/2} d_{50}^{1/2} \kappa_s^{1/4} Q^2}{\Delta^{1/2} B C^{1/2} a^{3/4}} \quad 9-4.5$$

$$Z = \frac{\kappa_s^{1/4} Q^2}{g b \Delta d_{50} C^{1/2} a^{3/4} B^2} = \frac{(\kappa_s c_b)^{1/4} Q^{3/2}}{g b \Delta d_{50} B^{3/2} a^2} \quad 9-4.6$$

en de kwadratische voortplantingswet van fouten is voor r_{c_b} onderstaande formule af te leiden:

$$r_{c_b}^2 = r_{\kappa}^2 + r_B^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_c^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 r_a^2 + \frac{4 r_B^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_c^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 r_a^2}{4 (1 - 0,047/Z)^2} \quad 9-4.7$$

Hierbij wordt aangenomen dat $r_g = r_{\Delta} = r_{d_{50}} = r_{\kappa_s} = r_Q = 0$

Met behulp van de relatieve fouten r_{κ} , r_B , r_c , r_a en een waarde voor Z is de relatieve fout in de karakteristieke voortplantingssnelheid te berekenen.

§ 9-4.3 De relatieve fout in de dempingstijd

Zoals in §9-3 is vermeld, geldt voor de dempingstijd:

$$T_d = \frac{D}{c_b^2} = \frac{a}{3 c_b c_b} \quad 9-4.8$$

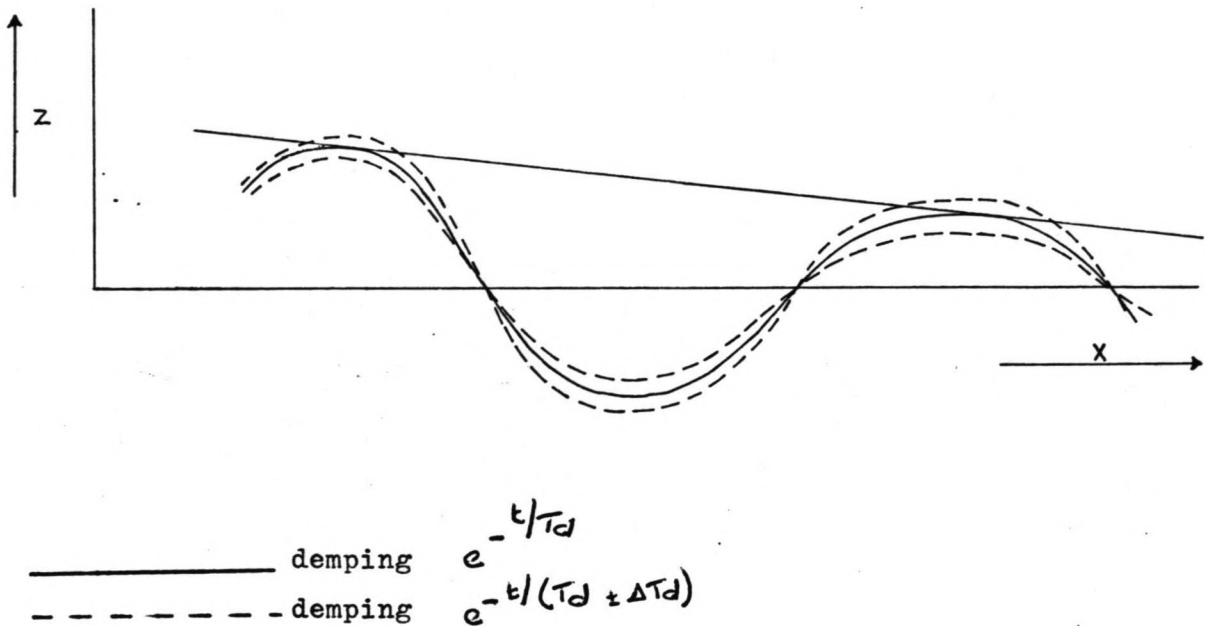
Met behulp van de kwadratische voortplantingswet van fouten volgt dan voor de relatieve fout in de dempingstijd:

$$r_{Td}^2 = r_a^2 + r_{Lb}^2 + r_{Cb}^2 \quad 9-4.9$$

Met de relatieve fouten r_a , r_{Lb} en r_{Cb} is de relatieve fout in de dempingstijd met bovenstaande formule te berekenen.

§ 9-5.1 Criterium voor de fout in de numerieke damping

Zoals uit § 9-3 blijkt is de fysische damping voor alle golfcomponenten gelijk aan $\exp(-t / T_d)$ waaring T_d de dampingstijd voorsteld. Een fout in de dampingstijd betekent dus een fout in de fysische damping.



figuur 9-6

De relatieve fout in de fysische damping op het tijdstip t is gelijk aan:

$$\left| \frac{e^{-t/(T_d \pm \Delta T_d)} - e^{-t/T_d}}{e^{-t/T_d}} \right| = \left| 1 - e^{-\frac{t}{T_d} \frac{\Delta T_d}{T_d \pm \Delta T_d}} \right| \quad 9-5.1$$

Met behulp van Taylorreeks-ontwikkeling naar ΔT_d is bovenstaande formule te benaderen met:

$$\left| (\Delta T_d \cdot t) / T_d^2 \right| = \kappa_{T_d} \cdot t / T_d \quad 9-5.2$$

Aan de fout in de numerieke damping na n golfperioden, wordt de eis gesteld dat deze een factor kleiner is dan de fout in de fysische damping. Aangezien alle beschouwde componenten voor een bepaalde gatvorm tot de totale numerieke en fysische fout bijdragen, vindt sommatie van de fouten plaats.

$$\sum_{j=1}^{n_s} \left[\left| 1 - d_j^{n_j} \right| * \frac{-2 \Delta z}{j \pi} \left\{ (-1)^j - 1 \right\} \right] * \exp(-t / T_d) \leq$$

$$\left[(1/f) * (\kappa_{T_d} t) / T_d * \exp(-t / T_d) \right] * \sum_{j=1}^{n_s} \frac{-2 \Delta z}{j \pi} \left\{ (-1)^j - 1 \right\}$$

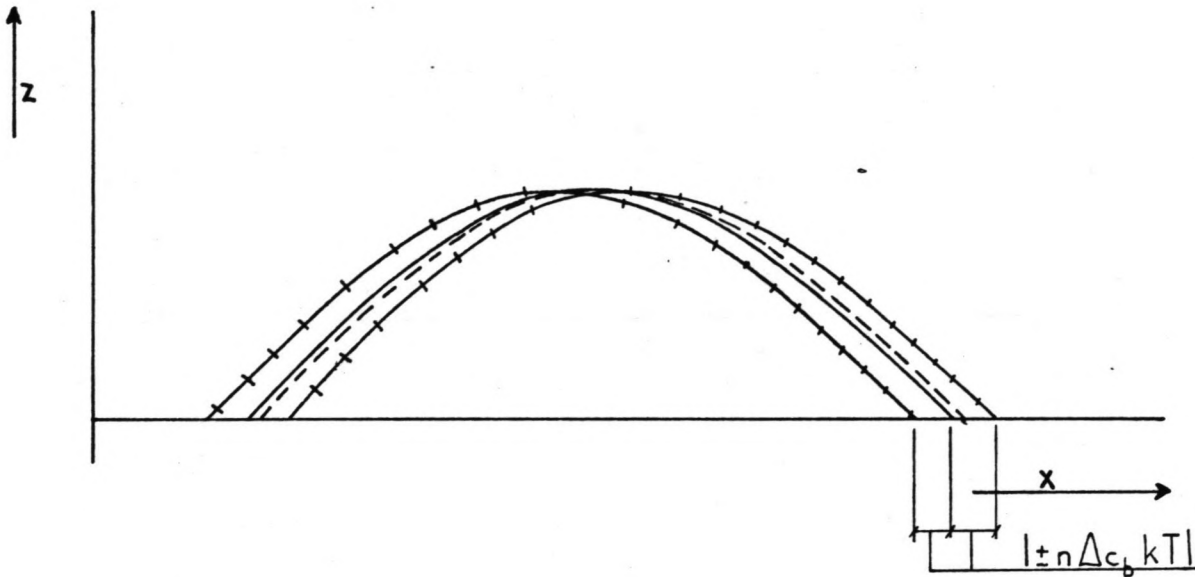
9-5.3

d_j = de dempingsfactor behorende bij de golfcomponent	[-]
Δz = de diepte van het gebaggerde gat	[m]
n_s = het aantal golfcomponenten	[-]
n_j = het aantal golfperioden door een golfcomponent in de beschouwde tijdsperiode t doorlopen	[-]
f = de te eisen factor	[-]
κ_{T_d} = de relatieve fout in de dempingstijd	[-]
T_d = de dempingstijd	[s]

§ 9-5.2 Criterium voor de fout in de numerieke faseverschuiving

Aan de fout in de numerieke faseverschuiving na n golfperioden wordt de eis gesteld dat deze een factor kleiner is,

dan de fout in de fysische faseverschuiving.



- numerieke oplossing
 _____ fysische oplossing na n golfperioden
 + + + + + fysische oplossing met fout in c_b

figuur 9-7

$$n_j |c_b kT - n_e \arg(\rho)| \leq (1/F) * n_j |(c_b \pm \Delta c_b kT - c_b kT)|$$

of na deling door n_j en $|c_b kT|$:

$$|1 - C_n| \leq (1/F) * n_{c_b} \text{ of } C_n \geq \{1 - (1/F) * n_{c_b}\}$$

9-5.4

c_b = de karakteristieke voortplantingssnelheid
 k = het golfgetal

$[m/s]$
 $[m^{-1}]$

T	= de golfperiode	[s]
n_t	= het aantal tijdstappen per golfperiode	[-]
ρ	= de amplificatiefactor	[-]
n_j	= het aantal golfperiodes door een golfcomponent in de beschouwde tijdsperiode doorlopen	[-]
F	= de te eisen factor	[-]
Δc_b	= de absolute fysische fout in de karakteristieke voortplantingssnelheid	[m/s]
γ_{cb}	= de relatieve fout in de karakteristieke voortplantingssnelheid	[-]
c_r	= de relatieve voortplantingssnelheid	[-]

HOOFDSTUK 10

Toetsing criteria

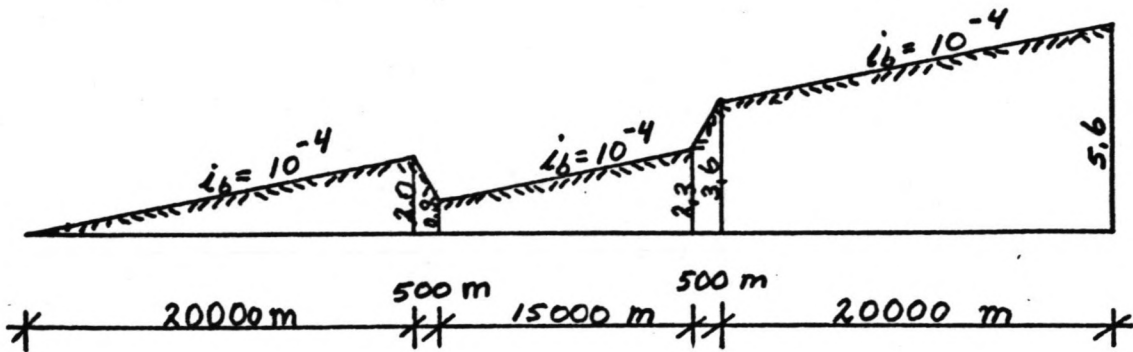
§ 10-1 Inleiding

Het doel van het hoofdstuk is om de criteria uit § 9-5.1 en § 9-5.2 te toetsen. Deze criteria zijn afgeleid voor een kleine verstoring in de bodem, nagegaan wordt in hoeverre ze geldig zijn voor een gebaggerd gat.

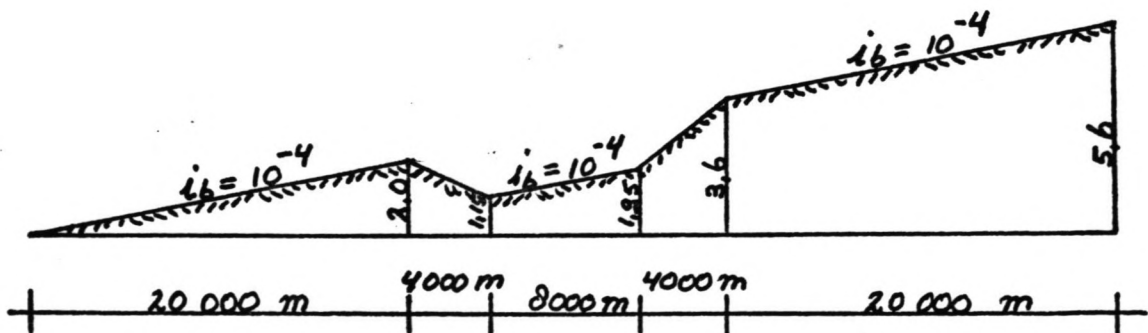
In § 10-2 wordt het linkergedeelte van het criterium uit § 9-5.1 voor een sinusvormig verstoring van 1 cm. met een golflengte van 4000 m. die door de rivierbodem loopt, getoetst. Zoals in § 10-2 staat vermeld is het niet mogelijk om voor deze kleine verstoring het linkergedeelte van het criterium uit § 9-5.2 te toetsen. De sinus-vormige verstoring is gelegd in een traject waar zonder deze verstoring uniforme stroming heerst. De rivier karakteristieken zijn:

$$\begin{aligned}d_{50} &= 2,39 \times 10^{-3} \quad , \quad k_s = 2,39 \times 10^{-3} \quad , \quad a_e = 6,865 \text{ m} \\ B &= 1255 \text{ m} \quad , \quad C = 40,5 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s} \quad , \quad Q = 9095 \text{ [m}^3/\text{s]} \\ i_b &= 10^{-4}\end{aligned}$$

In § 10-3 wordt voor twee in het uniforme riviertraject te baggeren gaten - zie de hierna volgende tekeningen - het linkergedeelte van het criterium uit § 9-5.1 getoetst. Zoals in § 10-3 staat vermeld is het niet mogelijk om voor deze gebaggerde gaten het linkergedeelte van het criterium uit § 9-5.2 te toetsen. Uit § 10-3 blijkt ook dat het aantal mee te nemen golfcomponenten per gatvorm niet te koppelen is aan de criteria uit § 9-2, daarom zijn in § 10-4 niet de rechtergedeelten van de criteria uit § 9-5.1 en § 9-5.2 getoetst.



het gebaggerde gat 1 = 16000 m, $\Delta z = 1,25$ m
met taludhelling 1:400 is hierboven getekend.



het gebaggerde gat 1 = 16000, $\Delta z = 1,25$ m
met taludhelling 1:3200 is hierboven getekend.

De twee gebaggerde gaten zijn in hetzelfde uniforme riviertraject aangebracht als in §10-2. Voor de rivier karakteristieken zie hiervoor.

In §10-4 wordt nagegaan of de in hoofdstuk 9 met behulp van de kwadratische voortplantingswet van fouten afgeleide formules geschikt zijn om een schatting te maken van de fouten in de voortplantingssnelheid van een gebaggerd gat (C_g) en de dempingstijd (T_d) ten gevolge van onnauwkeurigheden in een aantal fysische grootheden.

Dit gebeurt met het gebaggerde gat met talud 1:3200 uit §10-3 met de bijbehorende rivier-karakteristieken, zoals eerder beschreven.

In §10-5 wordt de manier beschreven waarop de ruimtestappen zijn gekozen voor de op de Niger te baggeren gaten.

In §10-6 wordt hoofdstuk nummer 10 samengevat.

§ 10-2 De 1 cm-golf

De in de paragrafen 9-5.1 en 9-5.2 afgeleide theorie is gebaseerd op de voortplanting van een kleine bodemverstoring, die zoals blijkt uit dat hoofdstuk, met de simple-wave vergelijking beschreven kan worden. Daarom kan men verwachten dat de theorie voor een 1 cm-golf redelijk moet kloppen.

In deze paragraaf worden de onderstaande linker delen van de in § 9-5.1 en § 9-5.2 beschreven criteria op de 1 cm-golf getoetst:

- 1) $(1-d)^n * \hat{z}_b * \exp(-t/T_d)$
- 2) $n_b | c_b k T - n_t \arg(p) |$

Toetsing gebeurt met behulp van computerberekeningen voor een golf met een amplitude van 1 cm en een golflengte van 4000 m bij β -waarden van 0,01 en 0,5.

Om het verloop van de sinusvorm te beperken is een ruimtestap van 62,5 m aangehouden. Dit betekent dat de golf met 65 punten per golflengte wordt weergegeven. De berekeningen zijn uitgevoerd over een tijdsduur van 1234 dagen, dat gelijk is aan 1 golfperiode.

ad 1

Bij de berekening met behulp van formule 10-2.1 is de dempingstijd (T_d) berekend met formule 9-4.8 en de karakteristieken van de in de inleiding besproken denkbeeldige rivier. (zie § 10-1). Voor T_d volgt dan de waarde 7064 dagen.

De resultaten van de berekening met formule 10-2.1, waarbij voor d de formule voor het modified-Lax-schema, zie appendix II, is gebruikt met β -waarden van 0,01 en 0,5 en σ -waarden van respectievelijk $\sqrt{0,99}$ en $\sqrt{0,5}$, zijn evenals de computeruitvoer vermeld in tabel 10-1

β -waarde	Computeruitvoer	$(1-d^n) \approx z_b \exp(-t / T_d)$
0,01	0,11 cm	0,16 cm
0,50	0,30 cm	0,32 cm

tabel 10-1

ad 2

De formule 10-2.2 geeft de numerieke fout in de fase-verschuiving in radialen. De formule is te schrijven in een vorm waarin de numerieke fout in de fase-verschuiving in meters wordt uitgedrukt. Er geldt dan:

$$n_j \lambda_j |1 - c_r| \quad 10-2.3$$

n_j = het aantal golfperioden door een golfcomponent
in de beschouwde tijdsperiode t doorlopen

[-]

λ_j = de lengte van de golfcomponent

[m]

c_r = de relatieve voortplantingssnelheid

[-]

De resultaten van de berekening met formule 10-2.3, waarbij voor c_r de formule voor het modified Lax-schema, zie appendix II, is gebruikt met β -waarden van 0,01 en 0,5 en σ -waarden van respectievelijk $\sqrt{0,99}$ en $\sqrt{0,5}$, zijn vermeld in tabel 10-2.

β -waarden	$n_j \lambda_j 1 - c_r $
0,01	12,83 cm
0,50	643,17 cm

tabel 10-2

Omdat de stapgrootte 62,50 m is en slechts is doorgerekend over één golfperiode, is moeilijk te controleren of de formule 10-2.3 een goede benadering geeft voor de numerieke fout in de fase-verschuiving.

Voor de plotuitvoeren van de computerberekeningen zie de figuren 10-1 en 10-2.

Opmerkingen:

- Zoals uit de figuren 10-1 en 10-2 blijkt, is de 1 cm-golf stabiel. Vanaf de bovenrand loopt echter een verstoring het beschouwde riviertraject binnen. Deze verstoring is het gevolg van de niet uniforme stroming op de bovenrand.
- In de figuren 10-1 en 10-2 is te zien dat de numerieke demping voor $\beta = 0,5$ groter is dan voor $\beta = 0,01$ hetgeen te verklaren is met de 1^o orde term in de afbreekfout van het modified Lax-schema (zie § 8-5.5).
- Voor de bij deze paragraaf behorende uitvoeren van de computerberekeningen, zie appendix VI.

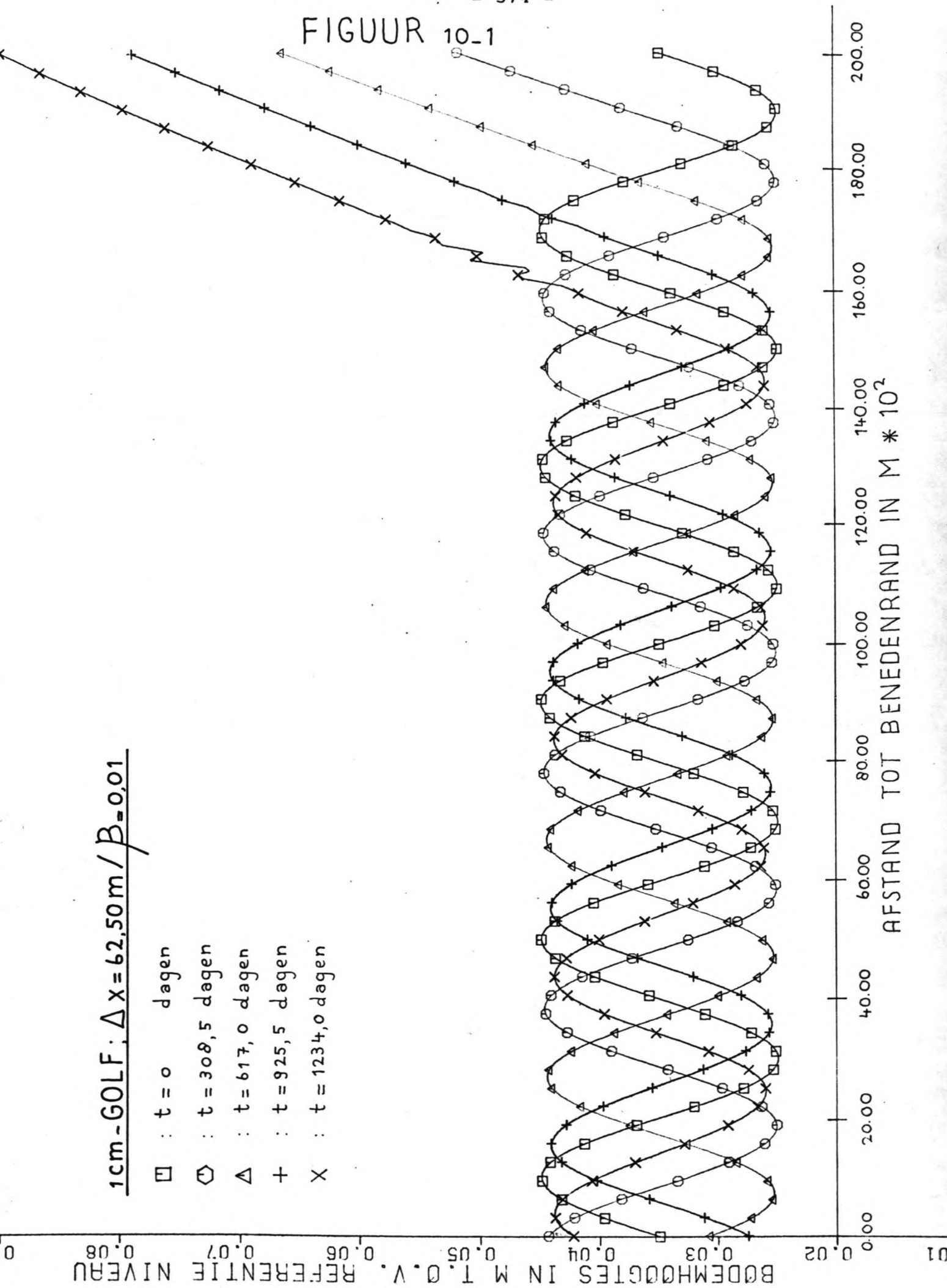
Conclusie:

Voor de 1 cm-golf blijkt dat het linkerdeel van het in § 9-5.1 vermelde criterium een goede benadering geeft van de numerieke fout in de amplitude.

FIGUUR 10-1

1cm-GOLF: $\Delta x = 62,50 \text{ m} / \beta = 0,01$

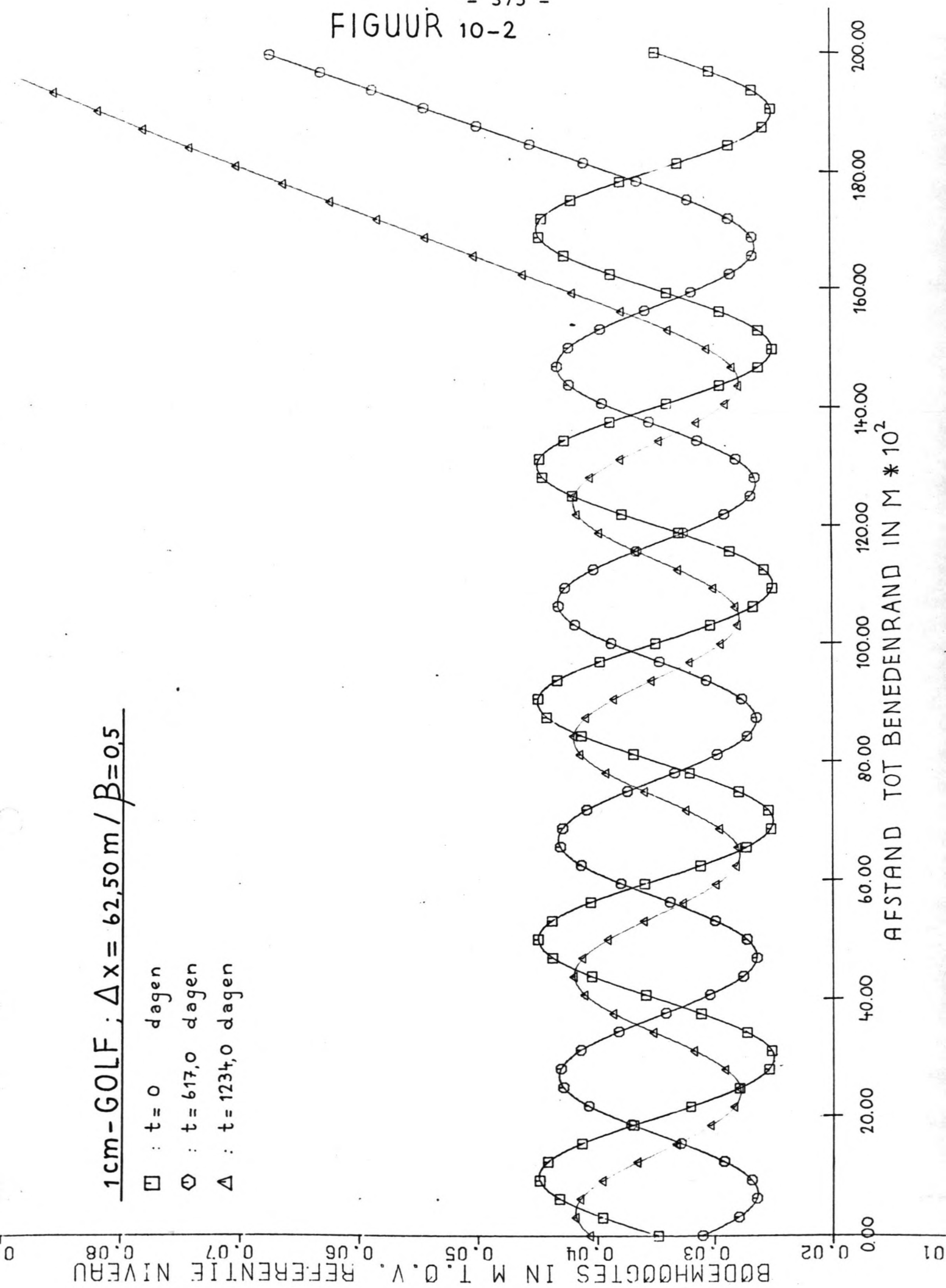
- $\square$: t = 0 dagen
- $\circ$: t = 308,5 dagen
- Δ : t = 617,0 dagen
- +
- X : t = 1234,0 dagen



FIGUUR 10-2

1cm-GOLF; $\Delta x = 62,50 \text{ m} / \beta = 0,5$

- : t = 0 dagen
- : t = 617,0 dagen
- △ : t = 1234,0 dagen



§ 10-3 Toetsing van de linkergedeelten van de criteria uit
§ 9-5.1 en § 9-5.2 voor een gebaggerd gat

Het doel van deze paragraaf is om de linkergedeelten van de criteria uit § 9-5.1 en § 9-5.2 voor een gebaggerd gat in een denkbeeldige rivier (zie § 10-1) te toetsen.

Er worden twee gebaggerde gaten beschouwd een gebaggerd gat met $l = 16000$ m $\Delta z = 1,25$ m en taludhelling 1:400, en een gebaggerd gat met $l = 16000$ m $\Delta z = 1,25$ m en taludhelling 1:3200.

Om het linkergedeelte van het criterium uit § 9-5.1 te kunnen toetsen, moeten de volgende gegevens beschikbaar zijn:

- het aantal golfperioden (n_j) per golfcomponent
- de dempingsfactor (d_j) per golfcomponent
- het aantal golfcomponenten
- de periode (t) waarover wordt gerekend
- de dempingstijd (T_d)

Om bovengenoemde gegevens te bepalen zijn de stuwkrommeberekeningen op $t = 0$ over de twee gebaggerde gaten in de denkbeeldige rivier gemaakt. Aangenomen wordt dat de karakteristieke voortplantingssnelheid, waarmee een gebaggerd gat zich benedenstrooms op de denkbeeldige rivier voortplant, het gemiddelde is van de karakteristieke voortplantingssnelheden op de bodem van het gebaggerde gat en benedenstrooms van het gebaggerde gat op $t = 0$. Voor de twee beschouwde gebaggerde gaten volgt dan $c_b = 890$ [m/jaar].

Het aantal golfperioden (n_j) per golfcomponent volgt nu uit de betrekking $n_j = (c_b \times t) / d_j$.

De dempingsfactoren (d_j) worden berekend met de formules die gelden voor het modified Lax-schema (zie appendix II). Bij deze berekening wordt voor σ de waarde 0,3 aangehouden, dit is de minimale σ waarde die in het gebaggerde gat optreedt. Het aantal mee te nemen golfcomponenten per gebaggerd gat volgt uit de criteria van § 9-2.

De periode (t) waarover gerekend wordt, is 3532 dagen.

Voor de dempingstijd T_d volgt uit formule 9-4.8, met $a = 6,865 + 1,25$, $i_b = 10^{-4}$ en $c_b = 890$ [m/jaar], $T_d = 30,4$ jaar.

Het linkergedeelte van het criterium uit § 9-5.1 kan nu worden berekend voor het gebaggerde gat met taludhelling 1:3200 voor de stapgrootten 125 m, 250 m en 500 m en voor het gebaggerde gat met taludhelling 1:400 voor de stapgrootten 125 en 250 m.

$$\sum \varepsilon_a = \sum_{j=1}^{n_s} \left[|1 - d^j| * \frac{-2\Delta z}{j\pi} \{(-1)^j - 1\} * \exp^{-t/T_d} \right]$$

In tabel 10-3 staat voor een bepaald gatvorm het verschil tussen $\sum \varepsilon_a$ voor een bepaalde Δx en $\sum \varepsilon_a$ van een stapgrootte van 125 m vermeld. Tevens staan de uit figuur 10-3 en figuur 10-4 gemeten verschillen vermeld. Voor de stapgrootten van 1000 m en 2000 m zijn de numerieke verschillen moeilijk uit figuur 10-3 te meten.

Talud helling	Δx [m]	aantal componenten	$(\sum \varepsilon_a)_{\Delta x} -$ $(\sum \varepsilon_a)_{125}$ in [m]	gemeten verschil [m]
1:400	250	8	0,080	0,118
1:3200	250	2	0,003	0,024
1:3200	500	2	0,011	0,059

tabel 10-3

Voor de bijbehorende computeruitvoeren zie appendix VI.

Het toetsen van het linkergedeelte van het criterium uit § 9-5.2 is niet mogelijk, omdat de onderlinge verschillen in fase-verschuiving tussen de diverse stapgroottes niet op te meten is (zie figuur 10-3 en figuur 10-4).

Conclusies:

- Uit de figuren 10-3 en 10-4 blijkt dat de gaten van 1,25 m diep, bij zowel een taludhelling van 1:400 als 1:3200 na 3532 dagen evenveel zijn gedempt. Blijkbaar is de demping van een gat van een bepaalde diepte onafhankelijk van de taludhelling; de term $\exp(-t / T_d)$ is dus onafhankelijk van de taludhelling.
- Door op $t = 0$ een stuwkromme te berekenen over het gebaggerde gat is bepaald dat $T_d = 30,4$ jaar en $c_b = 890$ m/jaar.
 $T_d = 30,4$ jaar betekent dat na 3532 dagen een demping groot 0,73 moet zijn opgetreden, uit meting uit de figuren 10-3 en 10-4 blijkt dat er een demping van 0,82 is opgetreden.
 $c_b = 890$ [m/jaar] betekent dat het gat zich over 8612 m zou moeten hebben voortgeplant, uit meting uit de figuren 10-3 en 10-4 blijkt dat het gat zich over 8022 m heeft voortgeplant. Blijkbaar is de methode - een stuwkromme op $t = 0$ - geschikt om een afschatting te maken van het aantal golfperiodes (n_f) door een golfcomponent afgelegd en de demping (e^{-t/T_d}) van de golfcomponenten.
- Het aantal componenten dat beschouwd moet worden om de totale numerieke fout in de amplituden te bepalen, kan voor wat betreft het steilere talud (1:400) worden afgeschat met de formule 9-2.2. Blijkbaar worden bij de flauwere taludhelling (1:3200) hogere harmonische gegenereerd die van invloed zijn op de totale numerieke fout in de amplituden zodat de formule 9-2.2 niet als afschattingsformule van het aantal componenten geschikt is. Daarom hoeft de formule 9-2.2 in het algemeen niet geschikt te zijn om het aantal componenten af te schatten bij gegeven taludhelling.
- Omdat het aantal componenten niet is af te schatten, kunnen ook de rechterdelen van de criteria uit § 9-5.1 en § 9-5.2 niet worden getoetst.

KEUZE STAPGROOTTE REFERENTIE_MODEL

GATDIEPTE 1,25 m / GATLENGTE 16 km
TALUDHELLING 1:3200

BOEMHOOGTES IN M T.O.V. REFERENTIE NIVEAU

0,40
0,60
0,80
0,90
1,20
1,50
1,80
2,10
2,40
2,70
3,00
3,30
3,60
3,90
4,20
4,50
4,80
5,10
5,40
5,70
6,00
6,30
6,60
6,90

- $\Delta x = 125 \text{ m}$
- $\Delta x = 250 \text{ m}$
- $\Delta x = 500 \text{ m}$
- $\Delta x = 1000 \text{ m}$
- $\Delta x = 2000 \text{ m}$

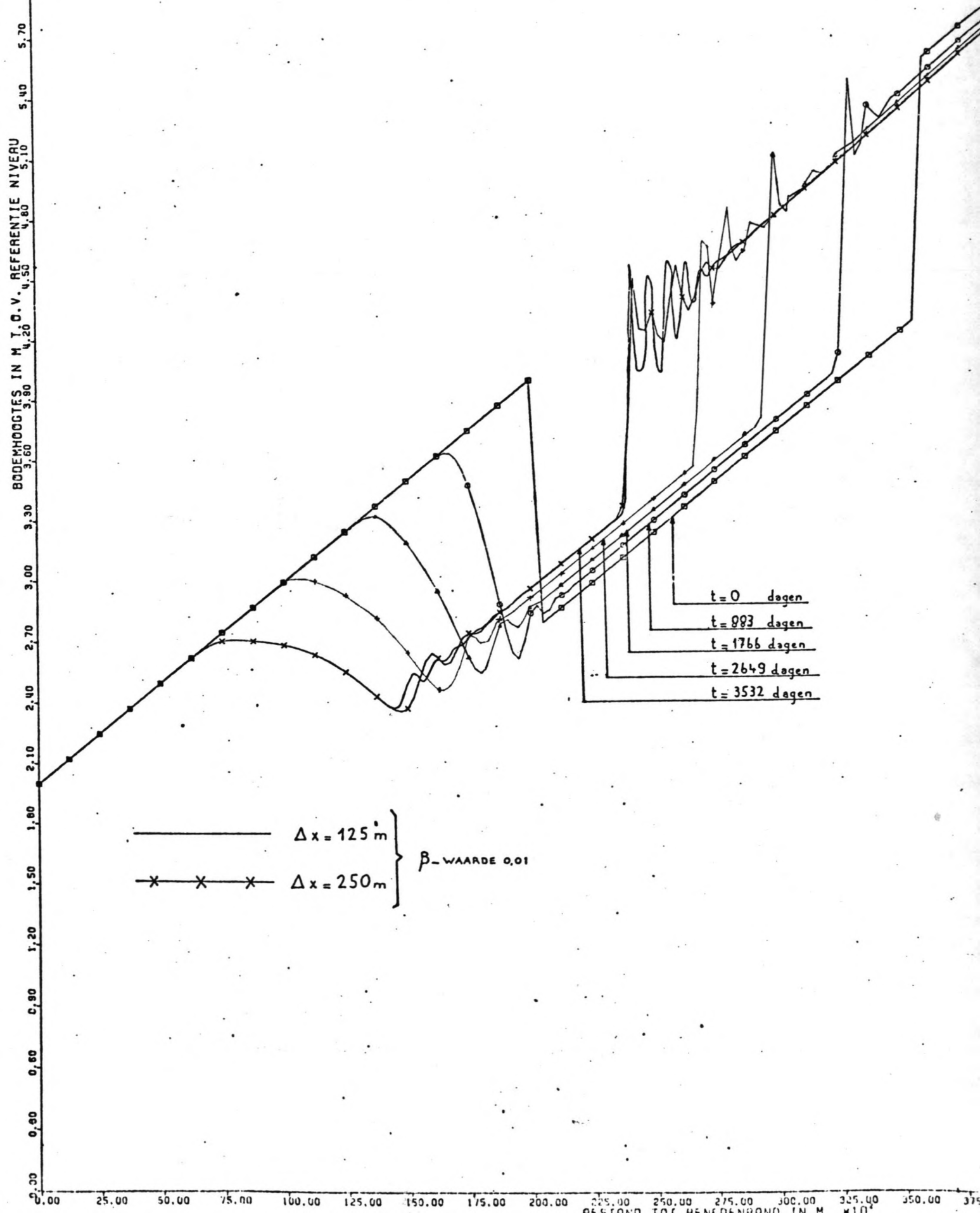
β -WAARDE 0,01

t = 0 dagen
t = 1766 dagen
t = 3532 dagen

0,00 25,00 50,00 75,00 100,00 125,00 150,00 175,00 200,00 225,00 250,00 275,00 300,00 325,00 350,00

ALTERNATIEVE TALUDHELLING

GATDIEPTE 1,25 m / GATLENGTE 16 km
TALUDHELLING 1:400



§ 10-4 Het gevoeligheidsonderzoek

Doel van deze paragraaf is om aan te tonen dat met de kwadratische voortplantingswet van fouten een schatting kan worden gemaakt van de relatieve fout in de dempingstijd van een gebaggerd gat (τ_H) ten gevolge van fouten in een aantal fysische grootheden.

Verder wordt in deze paragraaf aangetoond dat met de kwadratische voortplantingswet van fouten een schatting kan worden gemaakt van de relatieve fout in de verplaatsing van het gebaggerde gat (τ_{cg}) ten gevolge van fouten in een aantal fysische grootheden.

Bovenstaande wordt aangetoond met behulp van een gevoeligheids onderzoek. Bij dit onderzoek moet een referentie-basis gekozen worden.

Wanneer in figuur 10-3 de numerieke oplossingen bij de verschillende stapgrootten met elkaar worden vergeleken, blijkt dat als referentie-basis de oplossing met een stapgrootte van 250 m gekozen kan worden.

Door vergelijken van de figuren 10-3 en 10-5 is te zien dat bij een β -waarde van 0,05 de numerieke demping zowel bovenstrooms als in het gat toeneemt ten opzichte van de berekeningen met β -waarden van 0,01. De toename van de numerieke demping van de secundaire golven is echter zo gering, dat besloten is om bij het gevoeligheidsonderzoek met een β -waarde van 0,01 te rekenen.

De fysische parameters die in het gevoeligheidsonderzoek worden beschouwd zijn:

- 1) de constante in de sedimenttransportformule (k)
- 2) de totale ruwheid (C)
- 3) het bodemverhang (i_b)
- 4) de bodembreedte (B)

De fysische parameters zijn uitgaande van het referentie-model (denkbeeldige rivier § 10-1) gevarieerd.

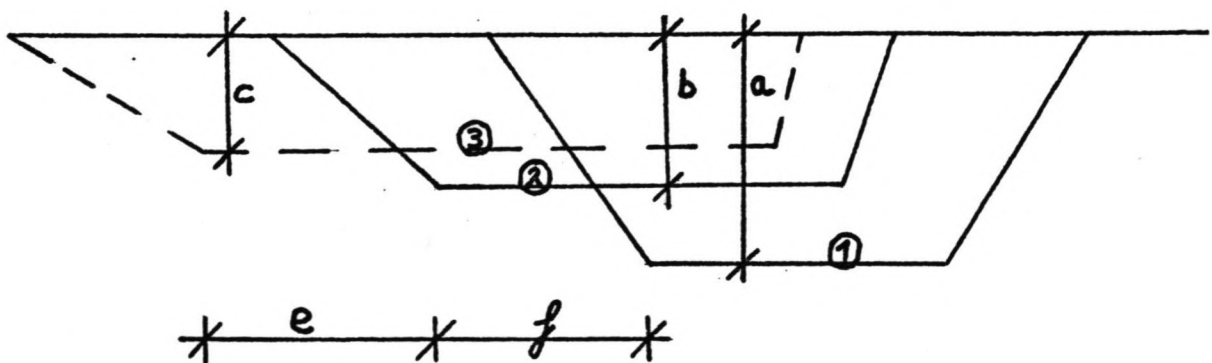
In tabel 10-4 is te zien welke variaties zijn aangebracht.

FYSISCHE PARAMETER	VARIATIES
k	$\pm 20\%$
c	$\pm 10\%$
i_b	$\pm 15\%$
B	$\pm 10\%$

tabel 10-4

Per berekening is slechts één parameter veranderd. De berekeningen werden evenals bij het referentie-model gemaakt met een stapgrootte van 250 m en een β -waarde van 0,01. De rekentijd 3532 dagen.

In de plotuitvoeren (zie figuur 10-6 tot en met 10-9) zijn op onderstaande manier voor r_{c_f} en r_{T_d} bepaald.



figuur 10-10

- 1) situatie op $t=0$
- 2) numerieke oplossing referentie-model op $t=3532$ dagen

3) numerieke oplossing met gevarieerde parameter op $t=3532$ dagen.

$$r_{cg} = \frac{e}{f} \times 100\%$$

$$r_{Td} = \frac{|T_{d2} - T_{d3}|}{T_{d2}} \times 100\% = \frac{\left| -\frac{1}{\ln(\frac{b}{a})} - -\frac{1}{\ln(\frac{c}{a})} \right|}{-\frac{1}{\ln(\frac{b}{a})}} \times 100\%$$

In tabel 10-4 zijn de op bovenstaande manier bepaalde waarden voor r_{cg} en r_{Td} te zien.

Met behulp van de in de paragrafen 9-4.1 tot en met 9-4.3 afgeleide formules zijn de waarden voor r_{cb} en r_{Td} bepaald.

Hierbij is uitgegaan van een benedenstrooms van het gebaggerde gat aanwezige Z-waarde van 0,078.

De resultaten van deze laatste berekeningen zijn ook in tabel 10-4 te zien.

		gemeten in * plotuitvoer		berekend met formules 9-4.1 t/m 9-4.2	
FYSISCH E PARAMETER	FOUT	r_{cg}	r_{Td}	r_{cb}	r_{Td}
k	$\pm 20\%$	23%	24%	20%	20%
c	$\pm 10\%$	17%	39%	30%	31%
i_b	$\pm 15\%$	22%	52%	22%	27%
B	$\pm 10\%$	20%	5%	38%	39%

tabel 10-5

* De met behulp van de plotuitvoeren bepaalde percentages zijn de gemiddelden van de positieve en negatieve variaties.

** Voor de plotuitvoeren zie de figuren 10-6 tot en met 10-9.

*** Voor de computeruitvoeren zie appendix VI.

Conclusie:

- Voor alle variaties in de fysische parameters blijken de fouten afschat met behulp van de kwadratische voortplantingswet van fouten en gemeten uit de plotuitvoeren in de orde van grootte te liggen.
De fouten in de dempingstijd (τ_d) bij variatie van de rivierbreedte wijken sterk van elkaar af. Hier is geen verklaring voor.

- Bij de variaties in de constante van de sedimenttransportformule, komen de berekende en gemeten waarden voor τ_b en τ_d het beste met elkaar overeen. Dit is vermoedelijk het gevolg van het niet variëren van de hydraulische parameters in dit geval.

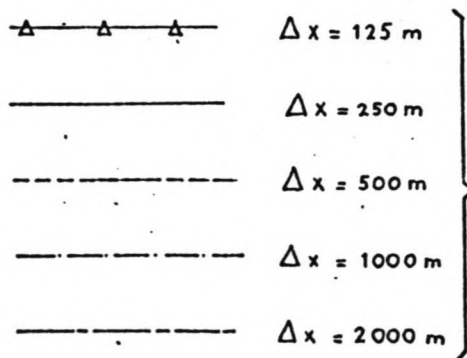
FIGUUR 10.5

- 385 -

KEUZE STAPGROOTTE REFERENTIE_MODEL

GATDIEPTE 1,25 m / GATLENGTE 16 km
TALUDHELLING 1:3200

BOEDENHOOGTES IN M.T.O.V. REFERENTIE NIVEAU



β -WAARDE 0,05

t = 0 dagen
t = 1766 dagen
t = 3532 dagen

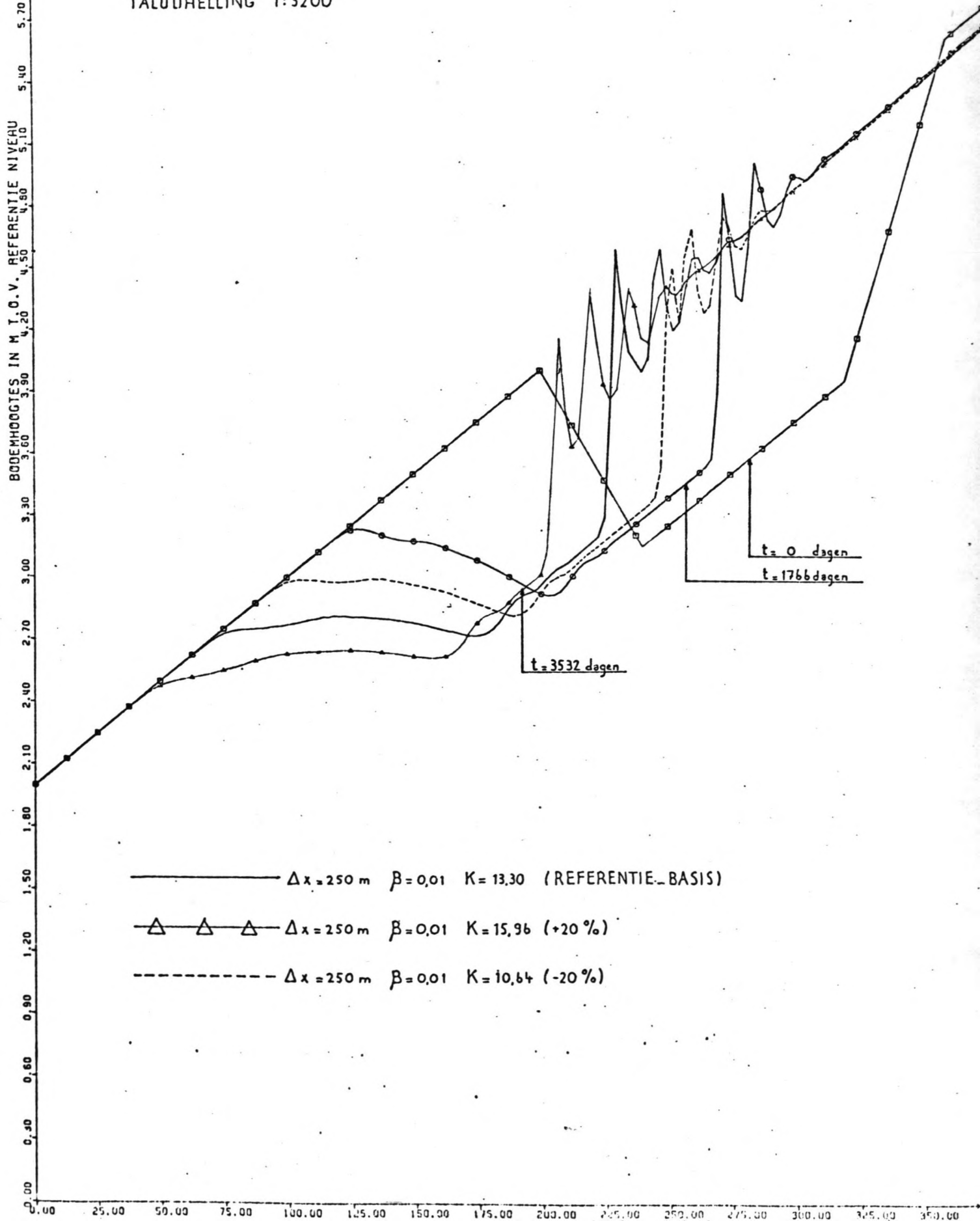
AFSTAND TOT REFERENTIEPUNT IN M. $\times 10^3$

GEVOELIGHEIDSONDERZOEK

VARIATIE CONSTATE SEDIMENTTRANSPORTFORMULE

GATDIEPTE 1,25 m / GATLENGTE 16 km

TALUDHELLING 1:3200

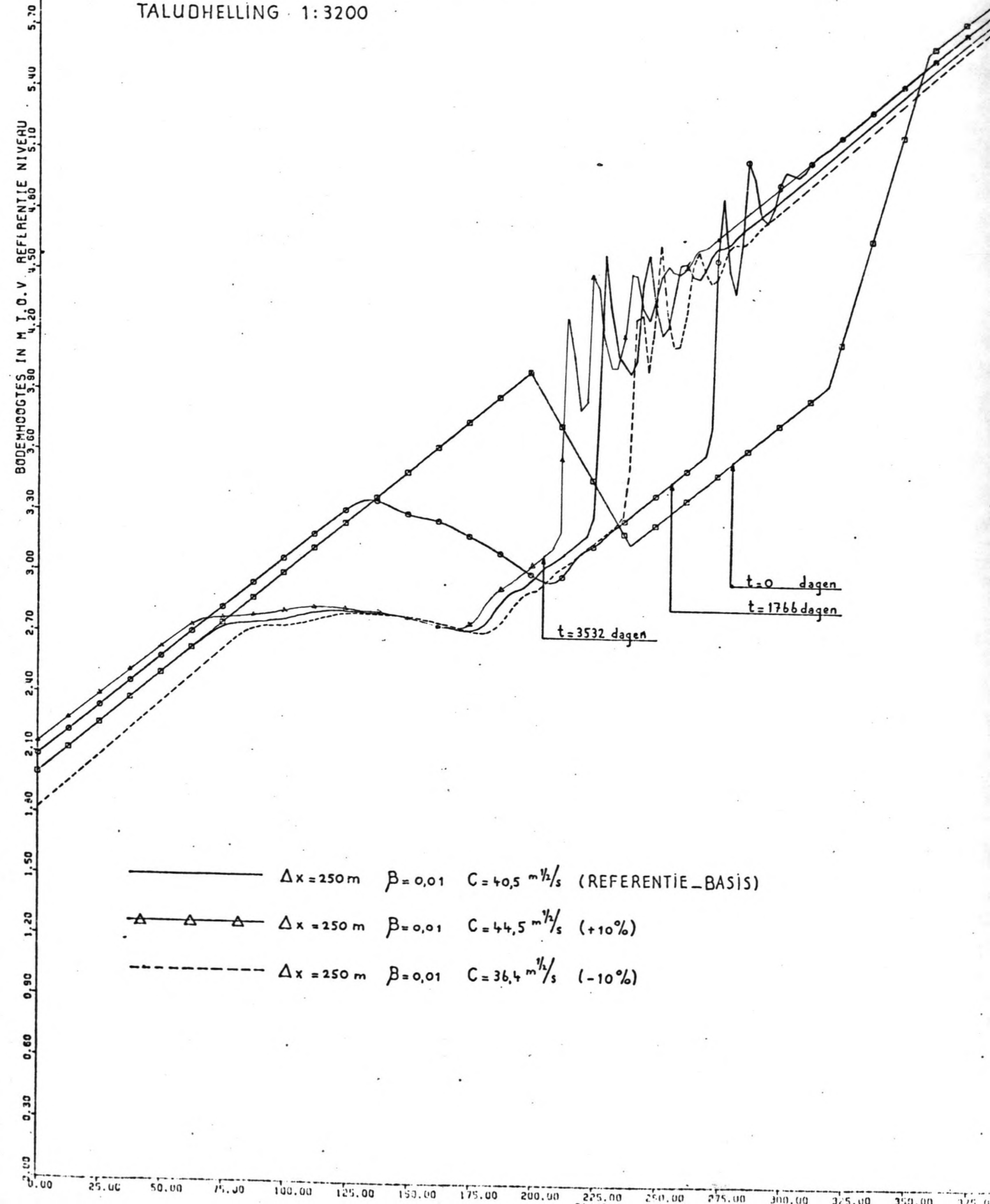


GEVOELIGHEIDSONDERZOEK

VARIATIE TOTALE RUWHEID

GATDIEPTE 1,25 m / GATLENGTE 16 km

TALUDHELLING 1:3200



GEVOELIGHEIDSONDERZOEK

VARIATIE BODEMVERHANG

GATDIEPTE 1,25 m / GATLENGTE 16 km

TALUDHELLING 1:3200

BODEMHOOGTES IN M T.O.V. REFERENTIE NIVEAU

5,10
5,00
4,90
4,80
4,70
4,60
4,50
4,40
4,30
4,20
4,10
4,00
3,90
3,80
3,70
3,60
3,50
3,40
3,30
3,20
3,10
3,00
2,90
2,80
2,70
2,60
2,50
2,40
2,30
2,20
2,10
2,00
1,90
1,80
1,70
1,60
1,50
1,40
1,30
1,20
1,10
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00

t = 0 dagen
t = 0 dagen
t = 0 dagen
t = 3532 dagen
t = 3532 dagen
t = 3532 dagen

— $\Delta x = 250 \text{ m}$ $\beta = 0,01$ $i_b = 10 \cdot 10^{-5}$ (REFERENTIE-BASIS)

— $\Delta x = 250 \text{ m}$ $\beta = 0,01$ $i_b = 11,5 \cdot 10^{-5}$ (+15 %)

- - - $\Delta x = 250 \text{ m}$ $\beta = 0,01$ $i_b = 8,5 \cdot 10^{-5}$ (-15 %)

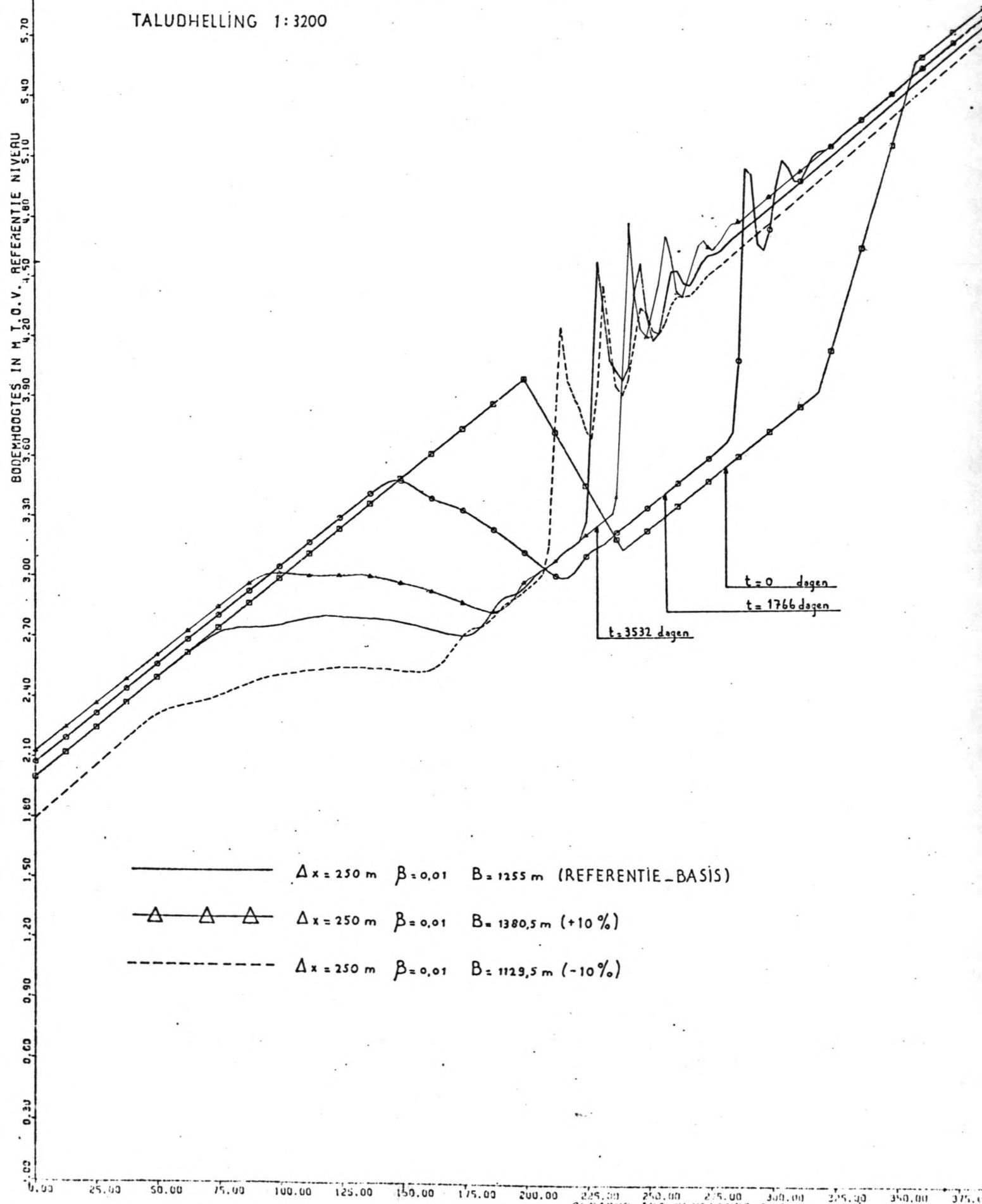
AFSTAND TOT BENEDENRAND IN M $\times 10^4$

GEVOELIGHEIDSONDERZOEK

VARIATIE RIVIERBREEDTE

GATDIEPTE 1,25 m / GATLENGTE 16 km

TALUDHELLING 1:3200



§ 10-5 Gevolgde methode voor de keuze van de ruimtestap voor de gebaggerde gaten op de Niger.

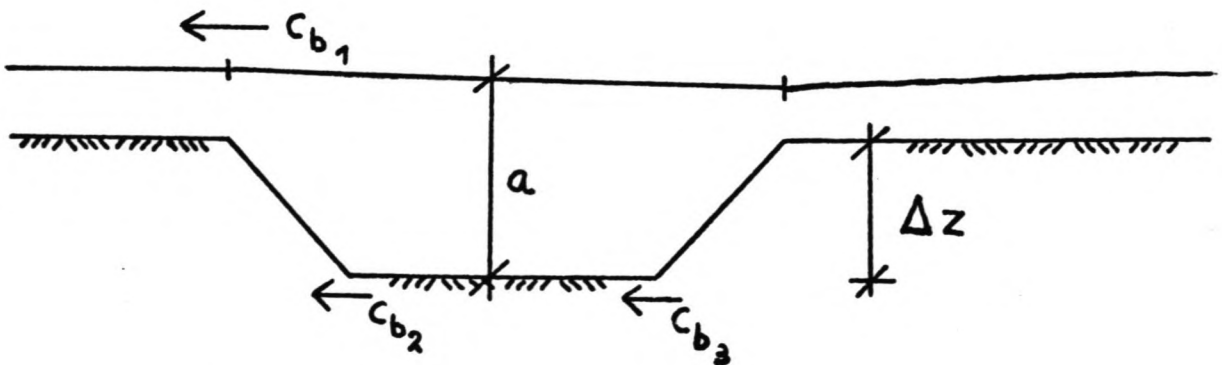
De methode waarmee een keuze voor de ruimtestap per gebaggerd gat op de rivier de Niger wordt gemaakt, verloopt als volgt:

Op $t=0$ wordt een stuwkromme over het gebaggerde gat berekend. Met behulp van de in figuur 10-11 aangegeven karakteristieke voortplantingssnelheden, is met de formule $c_b = \{c_{b1} + (c_{b2} + c_{b3})/2\}^2$ een gemiddelde karakteristieke voortplantingssnelheid te bepalen waarmee geacht wordt dat het gat zich zal voortplanten. Met formule 9-4.8 is dan de dempingstijd voor het gat te berekenen, waarbij voor a de waterdiepte in het gat wordt genomen.

Met de geschatte relatieve fouten in de fysische parameters en de kwadratische voortplantingswet van fouten is de relatieve fout in de dempingstijd te bepalen. De absolute fysische fout in de demping van het gat is nu te berekenen met de formule:

$$(r_{Td} \ t) / T_d * \exp (-t / T_d) * \Delta z$$

10-5.1



figuur 10-11

Door voor een bepaalde gatvorm morfologische berekeningen te maken met verschillende ruimtestappen over een bepaalde rekenperiode en de eis te stellen dat het onderlinge verschil tussen de bodemliggingen van het gat bij opvolgende ruimtestappen kleiner of gelijk moet zijn dan de absolute fysische fout in demping, kan een ruimtestap worden bepaald. In formulevorm volgt dan:

$$(Z_1 - Z_2) \leq (r_{T_d} t) / T_d * \exp(-t / T_d) * \Delta z$$

$(Z_1 - Z_2)$ = het verschil tussen twee numerieke oplossingen van de bodemligging van het gat na een rekenperiode t

r_{T_d} = de relatieve fout in de dempingstijd

t = de rekenperiode

T_d = de dempingstijd

Δz = de diepte van het gebaggerde gat

[m]

[-]

[s]

[s]

[m]

§ 10-6 Samenvatting

In deze paragraaf worden de belangrijkste conclusies van hoofdstuk 10 samengevat.

- 1) Het linkergedeelte van het criterium in § 9-5.1 geeft een goede afschatting van de numerieke fout in de amplitude van een kleine sinusvormige verstoring.
- 2) Het aantal in beschouwing te nemen golfcomponenten om met behulp van formule 9-5.3 tot een keuze van de ruimtestap te komen, kan, zoals blijkt uit § 10-3 niet gekoppeld worden aan de taludhelling van het gebaggerde gat in de beginsituatie van de morfologische berekeningen. Daarvoor wijken de berekende en gemeten fouten in de numerieke oplossingen bij het talud 1:3200 te veel van elkaar af.

Verder valt op dat de bodemligging van de gebaggerde gaten met taludhelling van 1:400 en 1:3200 na ongeveer 9,5 jaar rekenen bij stapgrootten van 125 m en 250 m, nagenoeg hetzelfde zijn. (zie figuren 10-3 en 10-4). Dit is een indicatie dat het aantal componenten dat in beschouwing moet worden genomen niet of niet alleen aan de taludhelling gekoppeld moet worden.

Omdat het aantal componenten dat in de berekening moet worden meegenomen niet is te bepalen kan het rechterdeel van criterium 9-5.3 niet **getoetst** worden. Het linker- en rechterdeel van criterium 9-5.4 is niet **getoetst** om dat de onderlinge verschillen in de faseverschuiving niet te meten zijn.

3. Met de kwadratische voortplantingswet van fouten kan een redelijke schatting worden gemaakt van de relatieve fout in de dempingstijd van een gebaggerd gat tengevolge van fouten in de constante van de sedimenttransportformule, de Chezy-waarde en het bodemverhang. Bij een

fout in de rivierbreedte geeft de schatting een slecht resultaat. Eveneens kan met de kwadratische voortplantingswet van fouten een redelijke afschatting worden gemaakt van de relatieve fout in de verplaatsing van het gebaggerde gat tengevolge van de fouten in de eerder genoemde fysische parameters.

4. Zoals al opgemerkt, is het niet mogelijk om met behulp van de criteria uit § 9-5.1 en § 9-5.2 een ruimtestap te bepalen. Daarom wordt voor de rivier de Niger de in § 10-5 beschreven methode gevolgd.

HOOFDSTUK 11: Interpretatie berekeningsresultaten

§ 11-0 Inleiding

Het doel van dit hoofdstuk is om met behulp van morfologische berekeningen voor diverse gatvormen in verschillende riviertrajecten van de rivier de Niger tot een onderlinge vergelijking te komen van de voortplanting en de demping van de gatvormen.

Nadat in § 11-1 de gatvormen zijn bepaald, worden in § 11-2 de ruimtestappen gekozen waarmee de gaten worden doorgerekend. De berekeningsresultaten zijn te vinden in § 11-3.

In § 11-4 wordt het mechanisme van voortplanting en demping van een gebaggerd gat besproken, waarna in § 11-5 met behulp van dit mechanisme en de berekeningsresultaten de diverse gatvormen met elkaar vergeleken worden.

In § 11-6 wordt de ligging van de diverse gaten na 25 jaar met elkaar vergeleken.

Tenslotte wordt de betrouwbaarheid van de berekeningsresultaten in verband met optredende numerieke lekken op de randen en de voortplanting van een fout in de bovenstroomse randvoorwaarde in § 11-7 bekeken.

§ 11-1 De afmetingen van de doorgerekende gebaggerde gaten en
de rivierverbreding

Zoals in § 6-2 is vermeld, kan op verschillende manieren de zandwinning op de rivier de Niger in het riviertraject Shintaku-Agnebode plaatsvinden. In het kader van dit afstudeerwerk wordt voornamelijk aandacht besteed aan de winning van het zand door het baggeren van een gat in de rivierbodem. Aan de zandwinning door middel van het weg-baggeren van een zandbank wordt in dit hoofdstuk slechts geringe aandacht besteed.

Uitgangspunten bij het schematiseren van de verschillende mogelijke gatvormen en het wegbaggeren van een zandbank zijn:

de benodigde hoeveelheid zand ten behoeve van het opspuiten van een industrieterrein voor een staalindustrie bedraagt 20 à 25 miljoen m³ (zie doelstelling hoofdstuk 0);

de geschematiseerde rivier voor het beschouwde traject Shintaku-Agnebode (zie hoofdstuk 7);

de winning van het zand door het baggeren van gaten vindt plaats over de volle breedte van de geschematiseerde rivier.

Daarnaast legt het computerprogramma een beperking op ten aanzien van de te kiezen verlopen in zowel verticale als horizontale richting. Het verloop moet dusdanig gekozen worden dat minimaal 2 ruimtestappen in het verloopstuk passen.

In totaal zijn een zestal gebaggerde gaten geschematiseerd. Een viertal gaten ligt in het riviertraject Ajaokuta-Agnebode; twee

andere gaten in de Rocky Section. Zie voor de afmetingen van de gaten tabel 11-1.

BREEDTE GAT (m)	GATLENGTE (m)	GATDIEPTE (m)	TALUDHELLING	GEWONNEN m ³ ZAND
1255	8000	2,5	1:400	22 $\times$ 10 ⁶
1255	4000	5	1:100	22 $\times$ 10 ⁶
1255	2250	10	1:50	22 $\times$ 10 ⁶
1255	1500	20	1:25	25 $\times$ 10 ⁶
740	13000	2,5	1:400	22 $\times$ 10 ⁶
740	7000	5	1:200	22 $\times$ 10 ⁶

tabel 11-1

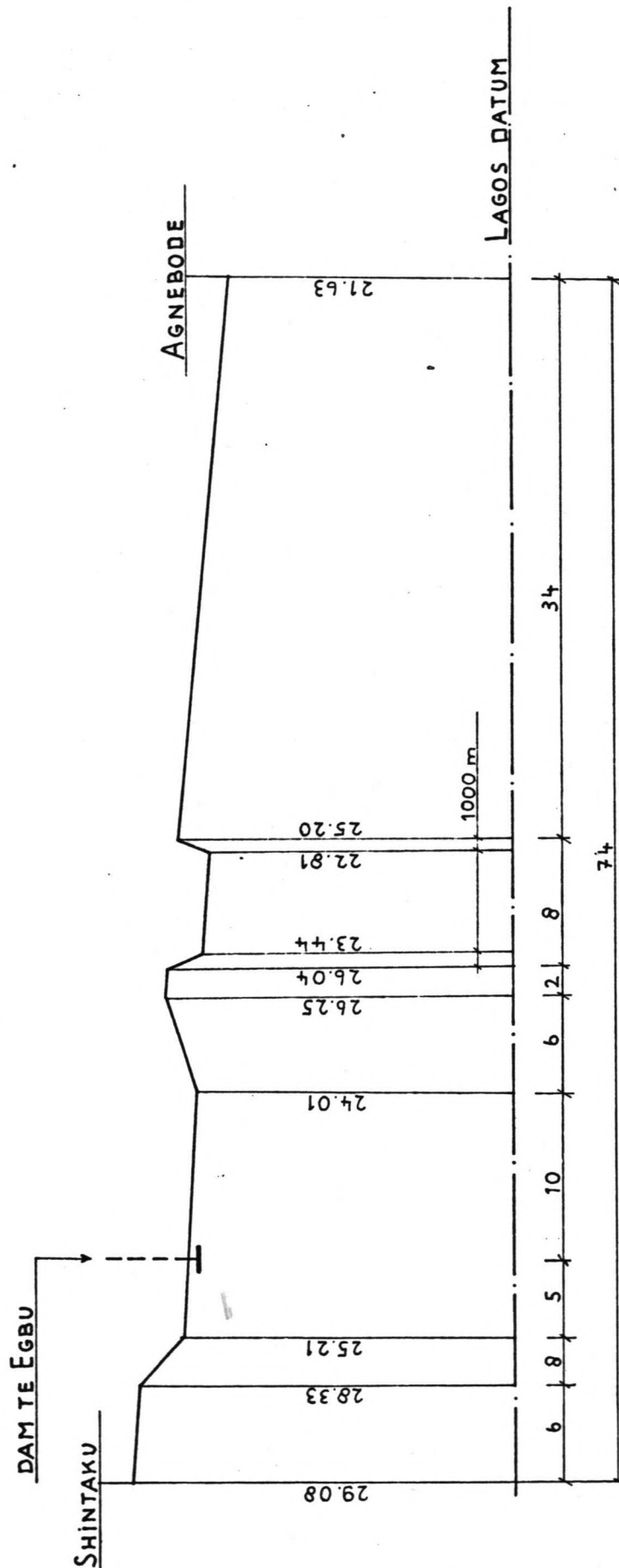
Voor de langsdoorsneden van het riviertraject Shintaku-Agenbode met de gebaggerde gaten op t=0, zie de figuren 11-1 tot en met 11-6.

Het wegbaggeren van een zandbank kan geschematiseerd worden tot een rivierversbreiding. Voor de schematisatie hiervan zie figuur 11-7.

Figuur 11-1

Gebaggerd gat in riviertraject Ajaokuta-Agnebode

Gatdiepte 2,5 m
Taludhelling 1:400



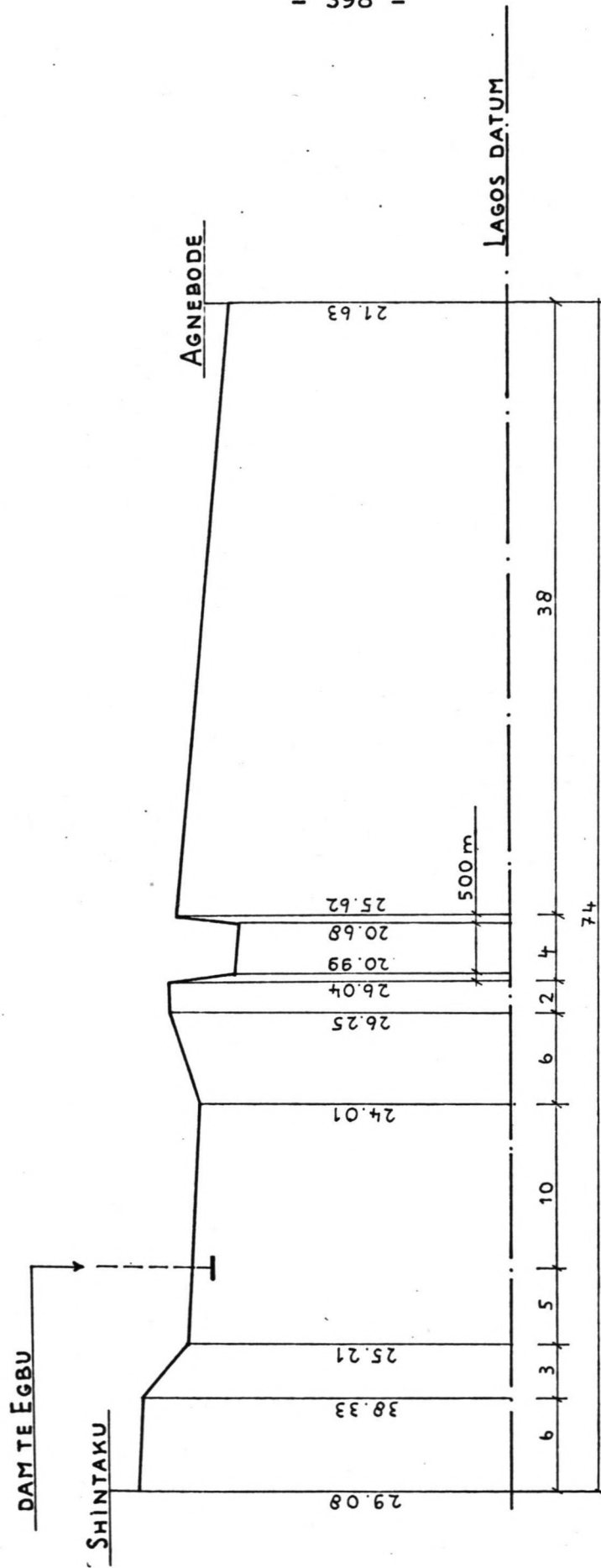
HOOGTEMATEN IN m
LENGTEMATEN IN km

Figuur 11-2

Gebaggerd gat in riviertraject Ajaokuta-Agnebode

Gatdiepte 5 m

Taludhelling 1:100



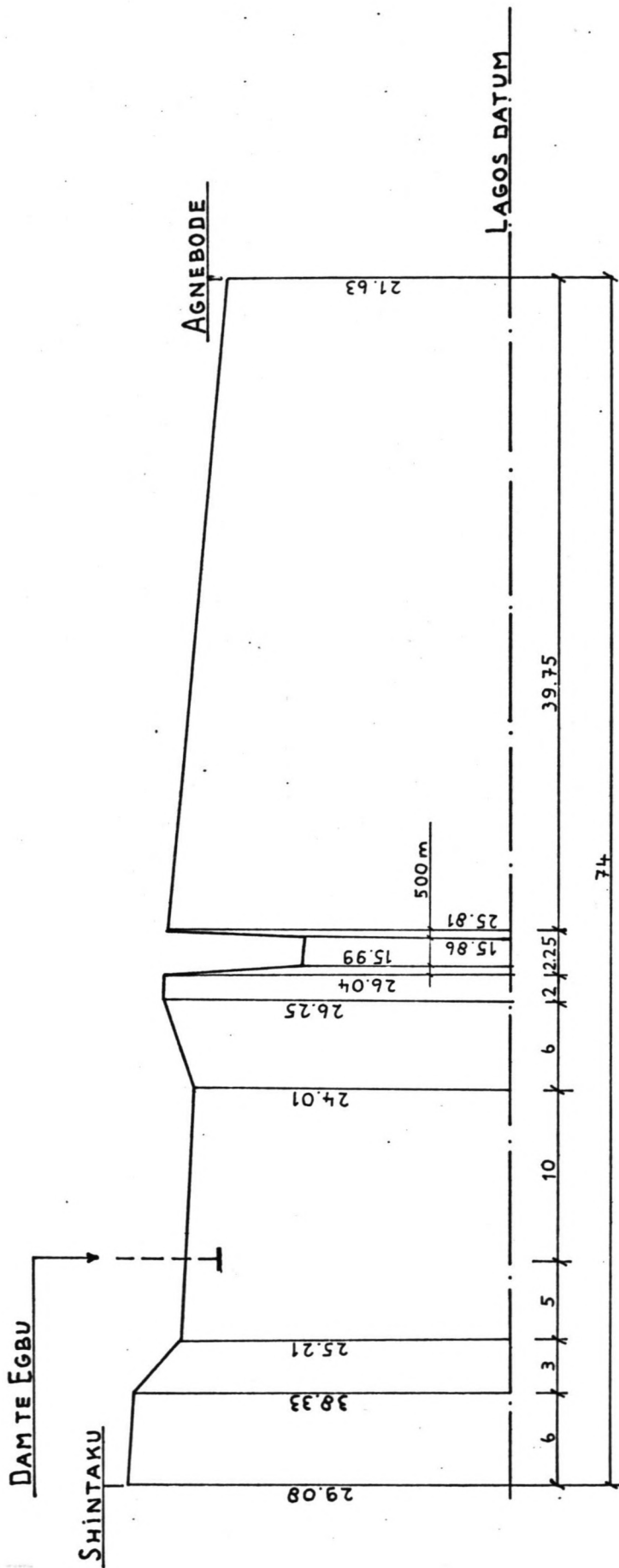
HOOGTEMATEN IN m
LENGTEMATEN IN km

Figuur 11-3

Gebaggerd gat in riviertraject Ajaokuta-Agnebode

Gatdiepte 10 m

Taludhelling 1:50



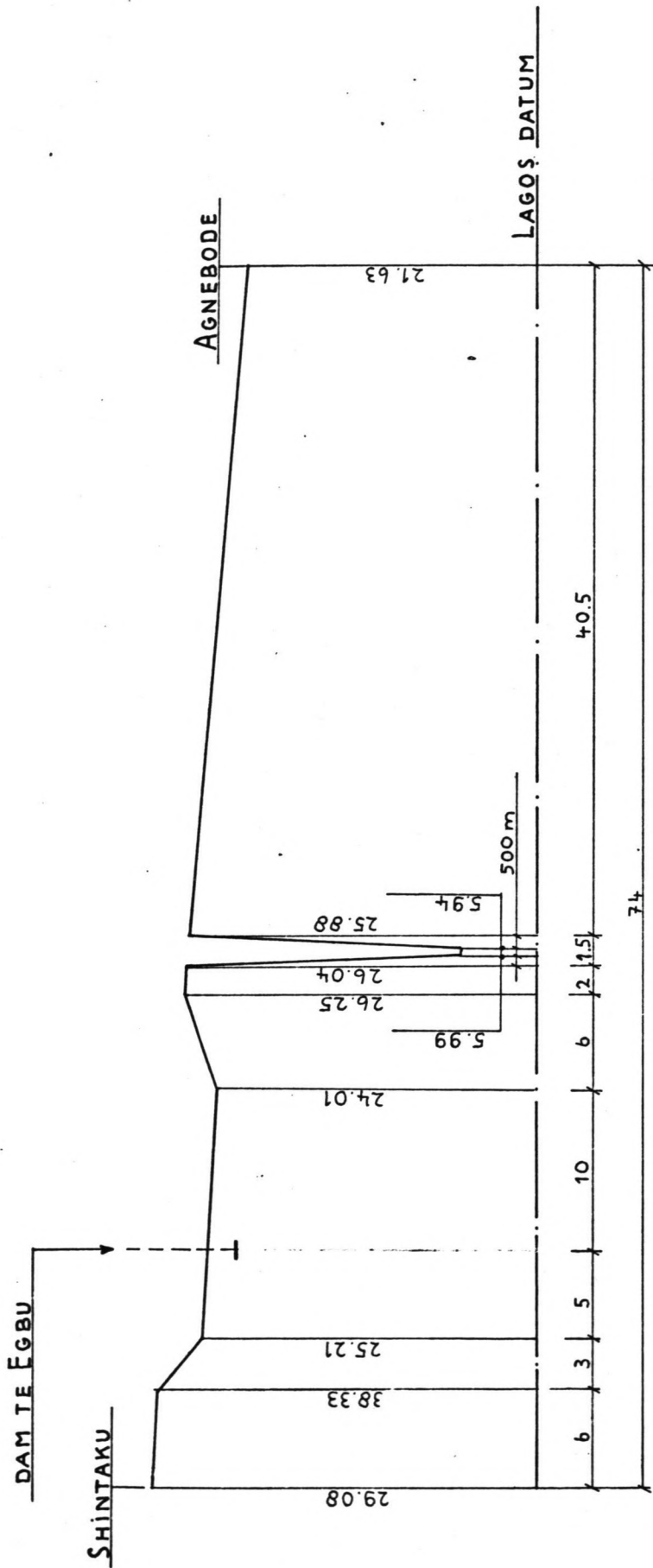
HOOGTEMATEN IN m
LENGTEMATEN IN km

Figuur 11-4

Gebaggerd gat in riviertraject Alaokuta-Agnebode

Gatdiepte 20 m

Taludhelling 1:25



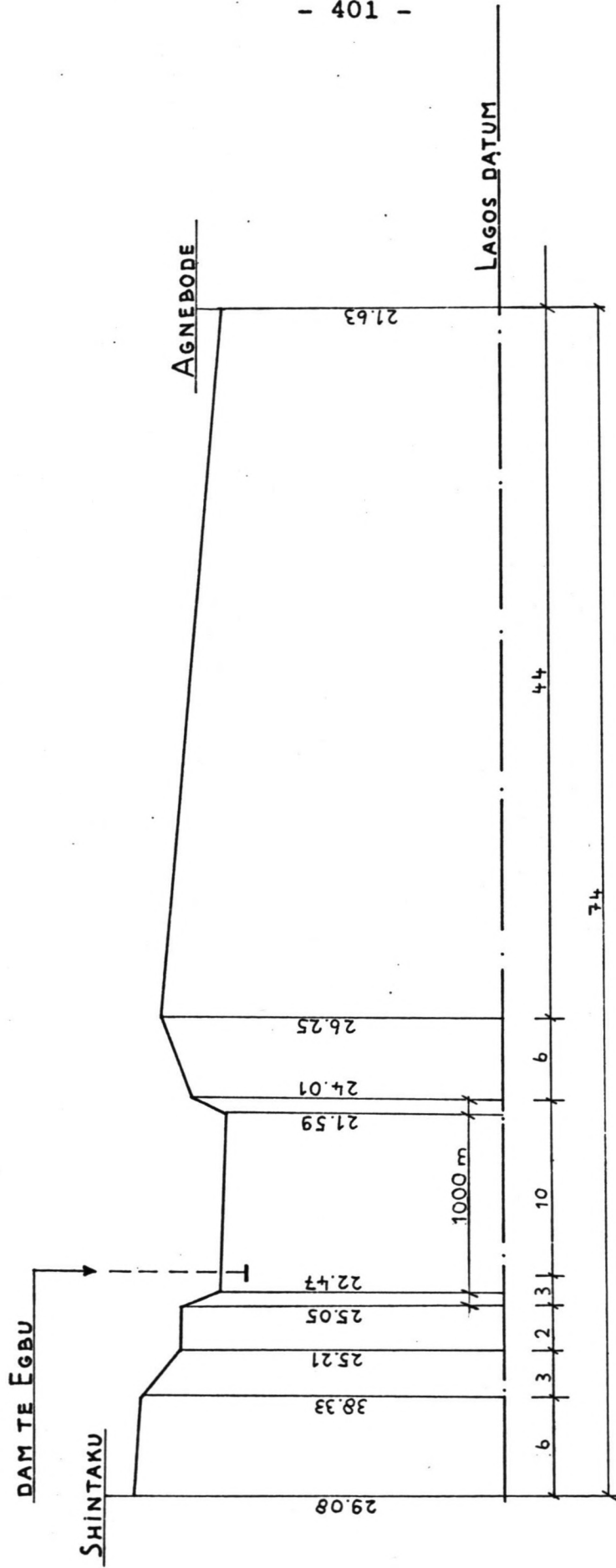
HOOGTEMATEN IN m
LENGTEMATEN IN km

Figuur 11-5

Gebaggerd gat in de Rocky Section

Gatdiepte 2,5 m

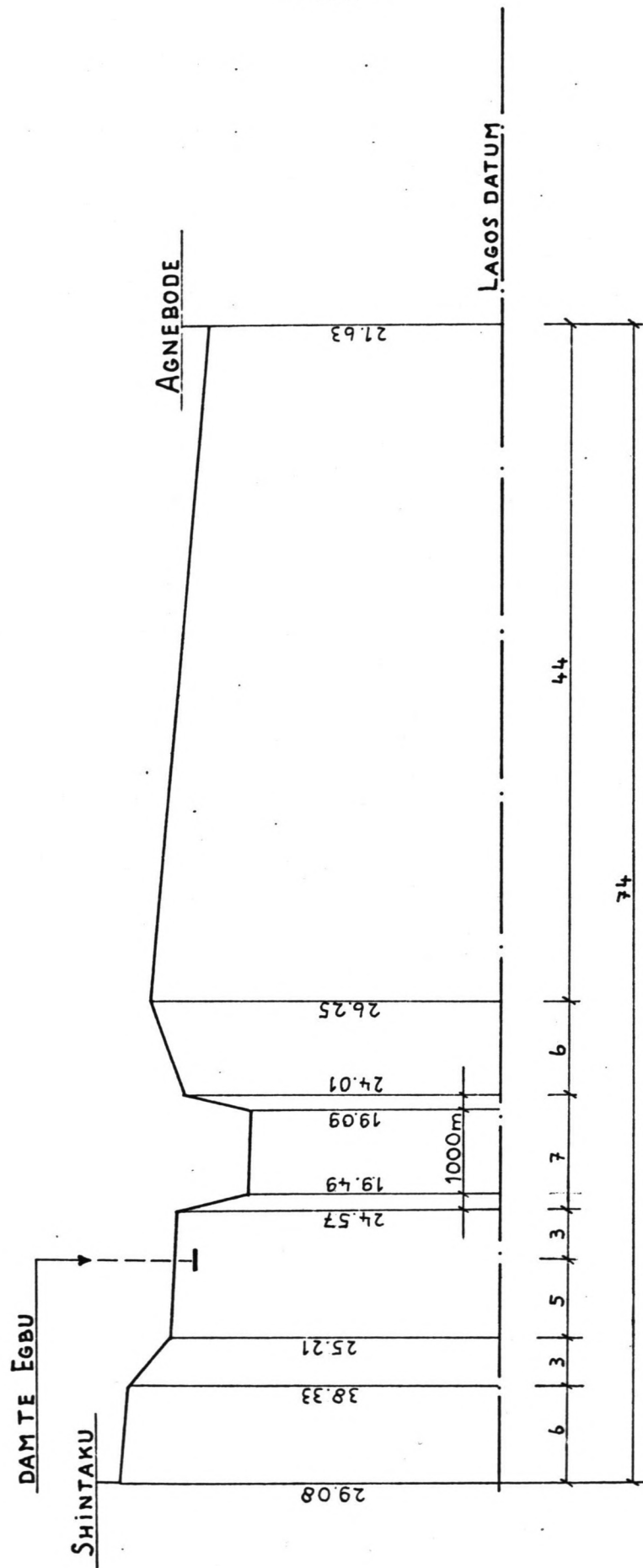
Taludhelling 1:400



Figuur 11-6

Gebaggerd gat in de Rocky Section

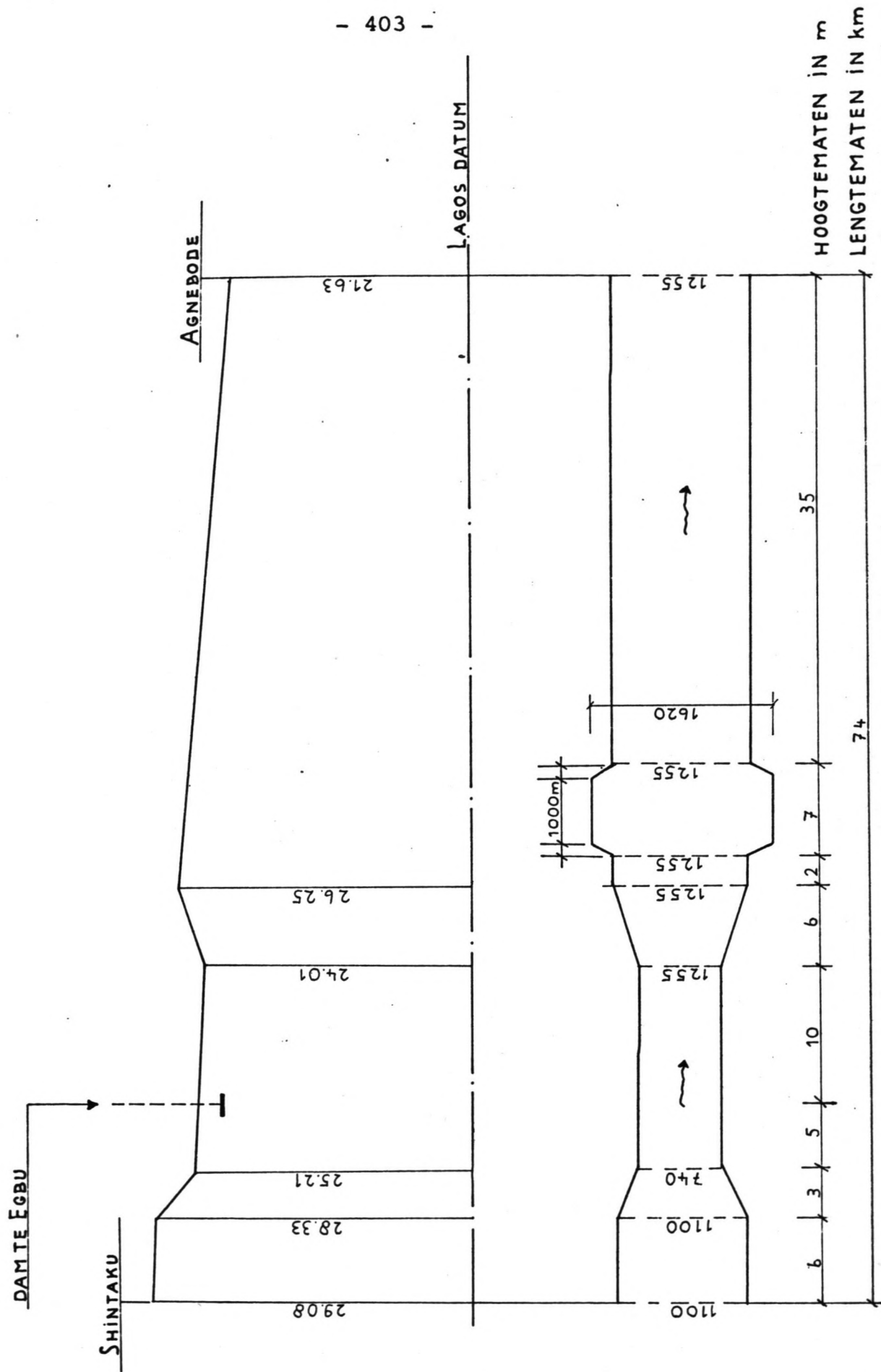
Gatdiepte 5 m
Taludhelling 1:200



HOOGTEMATEN IN m
LENGTEMATEN IN km

Figuur 11-7

Rivierverbreding in traject Ajaokuta-Agnebode



§ 11-2 De ruimtestappen bij de morfologische berekeningen
van de verschillende gatvormen en de rivierverbreding.

Met de methode zoals in § 10-5 is beschreven, is voor de verschillende gatvormen de ruimtestap bepaald. Voor elk gebaggerd gat zijn de onderlinge verschillen in de bodemliggingen voor een drietal ruimtestappen vergeleken met de fysische fout in de demping van het gat. Dit is gedaan met de bodemliggingen na $10\frac{1}{2}$ jaar rekenen.

De berekeningen zijn te vinden in appendix VII. De resultaten zijn samengevat in tabel 11-2.

PLAATS GAT	GATDIEPTE	GEKOZEN Δx
Ajaokuta - Agnebode	2,5 m	250 m
	5 m	250 m
	10 m	62,50 m
	20 m	
Rockey Section	2,5 m	250 m
	5 m	250 m
Rivierverbreding Aj. - Ag.		250 m

tabel 11-2

Behalve zandwinning door middel van het baggeren van een gat, kan zand gewonnen worden door het wegbaggeren van een zandbank in de rivier. Het wegbaggeren van een zandbank wordt in het morfologische model geschematiseerd tot een rivierversbreiding. De ruimtestap is bij deze berekening gekozen door de resultaten van de morfologische berekeningen bij verschillende ruimtestappen na $10\frac{1}{2}$ jaar rekenen met elkaar te vergelijken.

De gekozen stapgrootte voor de vervolgberekening van $10\frac{1}{2}$ tot 25 jaar is 250 m.

§ 11-3 Berekeningsresultaten

In de figuren 11-8 tot en met 11-11 zijn de resultaten van de morfologische berekeningen van de gebaggerde gaten in het riviertraject Ajaokuta-Agnebode te zien.

De gaten van 2,5 , 5 en 10 m diepte zijn doorgerekend over een periode van 25 jaar. Bij het gat van 20 m diepte is gerekend tot aan het moment waarop de dam te Egbu gereed is. Dit is slechts een periode van $10\frac{1}{2}$ jaar. Zoals uit § 11-2 blijkt moet voor deze gatvorm een ruimtestap kleiner dan 62,50 m genomen worden. Gezien het beschikbare rekenbudget was het uitvoeren van een morfologische berekening over de periode van $10\frac{1}{2}$ jaar tot 25 jaar niet mogelijk.

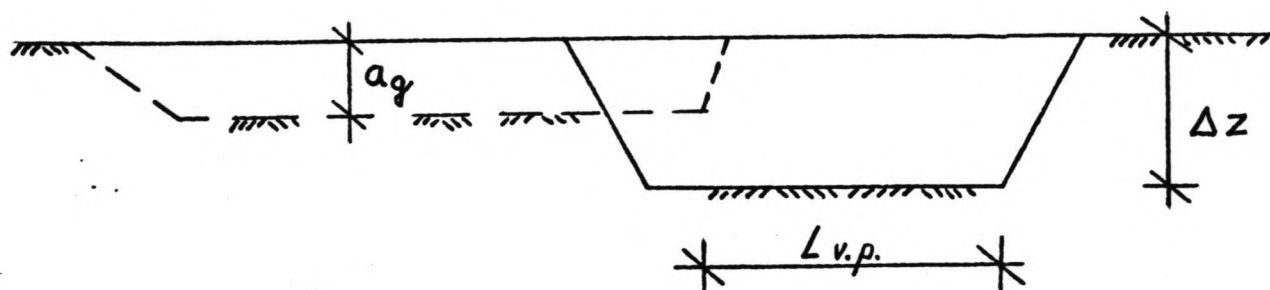
In de figuren 11-12 en 11-13 zijn de resultaten van de berekeningen van de gaten van respectievelijk 2,5 en 5 m diepte in de Rockey Section te zien. Beide gaten zijn doorgerekend over een periode van 25 jaar.

Tenslotte is in figuur 11-14 het resultaat te zien van het wegbaggeren van een zandbank in het riviertraject Ajaokuta-Agnebode na 25 jaar, waarbij het in de rivier winnen van het zand, geschematiseerd is tot rivierbreeding symmetrisch ten opzichte van de as van de rivier.

Om de gebaggerde gaten in de verschillende riviertrajecten te kunnen vergelijken is uit de figuren 11-8 tot en met 11-13 de voortplanting en de demping van de gaten opgemeten.

Ten aanzien van de voortplanting is de verplaatsing van het onderste punt van het bovenstroomse talud bepaald (L.v.p.) (zie figuur 11-15).

Ten aanzien van de demping is de verhouding tussen het diepst gelegen punt van het gat en de oorspronkelijke gatdiepte bepaald. (zie figuur 11-15). Vorenstaande is gedaan op de in de figuren 11-8 tot en met 11-13 gegeven tijdstippen.



————: situatie op $t=0$

- - - - -: situatie op $t=t_1$

figuur 11-15

De opgemeten waarden voor $L_{v.p.}$ en a_g zijn te zien in tabel 11-3. In deze tabel zijn eveneens de berekende waarden voor $a_g / \Delta z$ opgenomen.

Met behulp van de gegevens uit tabel 11-3 zijn de voortplanting en de demping als functie van de tijd uit te zetten. Dit is gedaan in de grafieken 11-1 en 11-2.

In § 11-5 zullen een aantal opmerkingen worden gemaakt ten aanzien van de verschillen in demping en voortplanting van de verschillende gaten.

Tabel 11-3

Rekenperiode		0 - 10½ jaar								10½ - 25 jaar							
Tijdstip		1916 etmalen				3831 etmalen				6478 etmalen				9125 etmalen			
Traject	Gatdiepte (m)	L.v.p. (m)	ag (m)	ag/Δz	L.v.p. (m)	ag (m)	ag/Δz (m)	L.v.p. (m)	ag (m)	L.v.p. (m)	ag/Δz	L v.p.	ag	ag/Δz			
Ajaokuta Agnebode	2,5	2598	2,44	0,976	5118	2,36	0,944	8583	2,08	12913	0,832	1,40	0,560				
	5	1457	5,00	1	2835	5,00	1	4922	2,76	8504	0,552	1,72	0,344				
	10	551	10,00	1	1260	9,30	0,930	2874	3,25	6181	0,325	1,91	0,191				
Rocky Section	2,5	2598	2,49	0,996	6299	2,49	0,996	10787	2,41	14567	0,964	1,65	0,660				
	5	1850	4,90	0,980	3780	4,90	0,980	6378	4,60	9134	0,920	2,34	0,468				

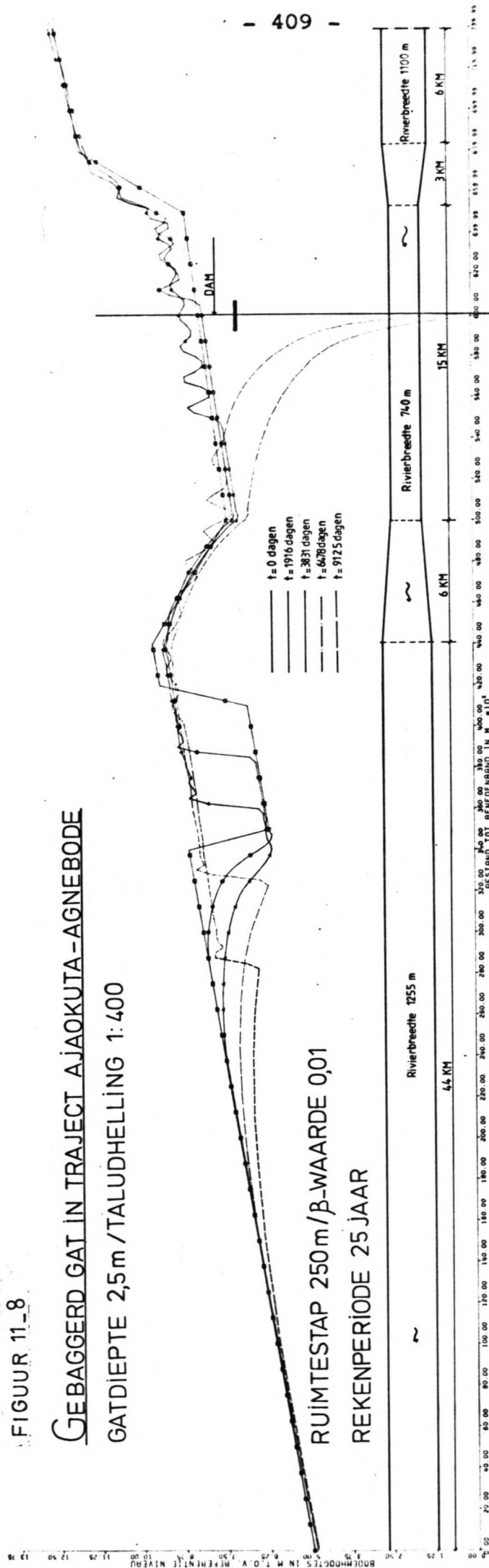
FIGUUR 11_8

GEBAGGERD GAT IN TRAJECT AJAOKUTA-AGNEBODE

GATDIEPTE 2,5m / TALUDHELLING 1: 400

RUIJTESTAP 250m / β -WAARDE 0,01

REKENPERIODE 25 JAAR



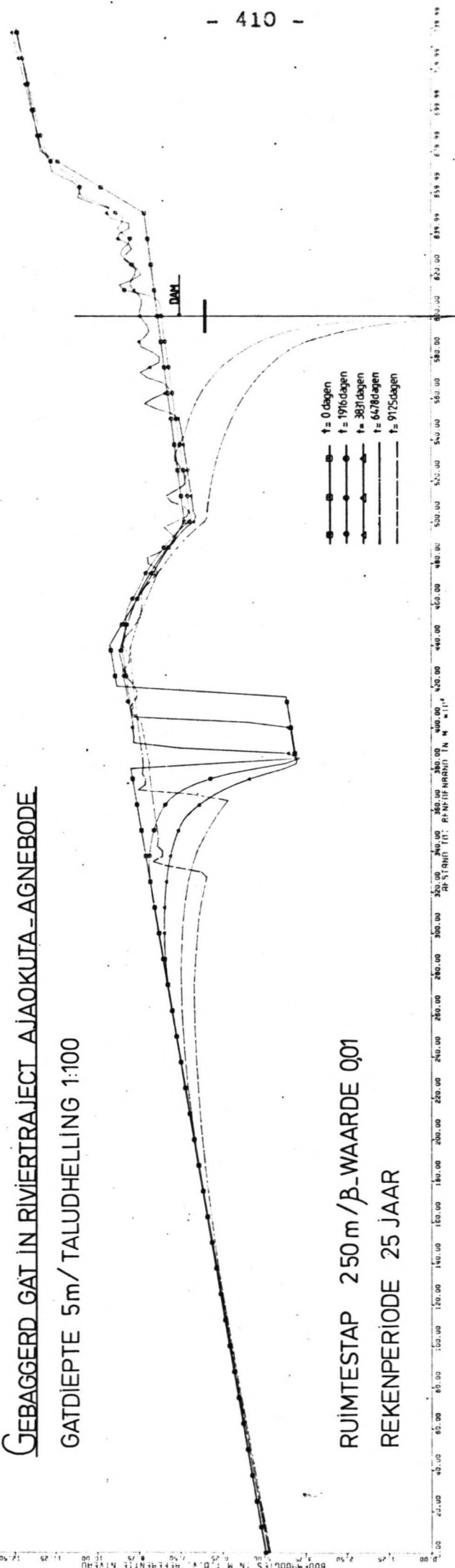
FIGUUR 11_9

GEBAGGERD GAT IN RIVIERTRAJECT AJAOKUTA-AGNEBODE

GATDIEPTE 5m/ TALUDHELLING 1:100

RUIMTESTAP 250m/ β -WAARDE 0,01

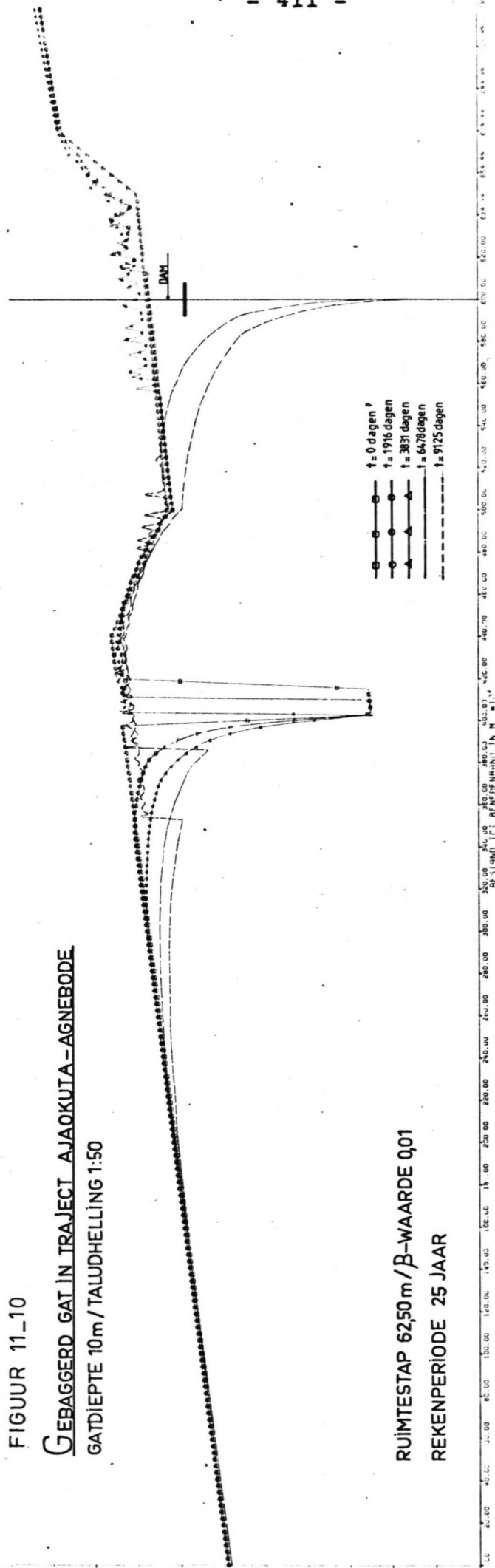
REKENPERIODE 25 JAAR



FIGUUR 11_10

GEBAGGERD GAT IN TRAJECT AJAOKUTA-AGNEBODE
GATDIEPTE 10m / TALUDHELLING 1:50

RUIMTESTAP 6250m / β -WAARDE 0,01
REKENPERIODE 25 JAAR

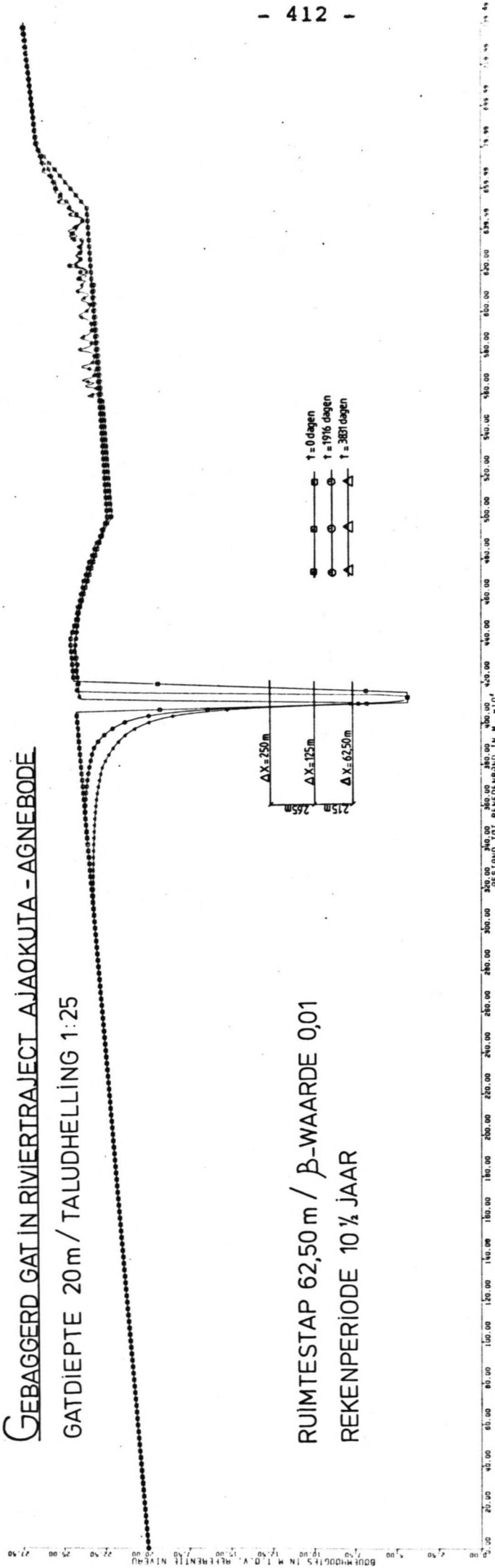


FIGUUR 11_11

GEBAGGERD GAT IN RIVIERTRAJECT AJAOKUTA - AGNEBODE

GATDIEPTE 20 m / TALUDHELLING 1:25

RUIMTESTAP 62,50 m / β -WAARDE 0,01
REKENPERIODE 10 ½ JAAR

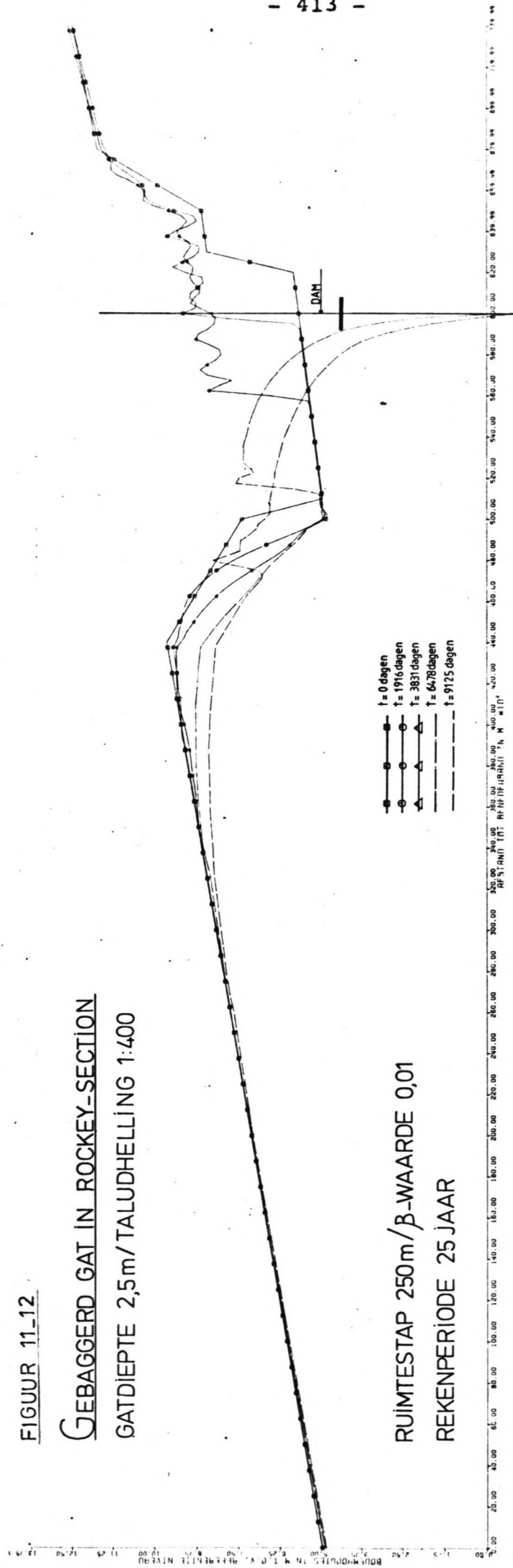


FIGUUR 11-12

GEBAGGERD GAT IN ROCKEY-SECTION

GATDIEPTE 2,5m/TALUDHELLING 1:400

RUIJTESTAP 250m/ β -WAARDE 0,01
REKENPERIODE 25 JAAR

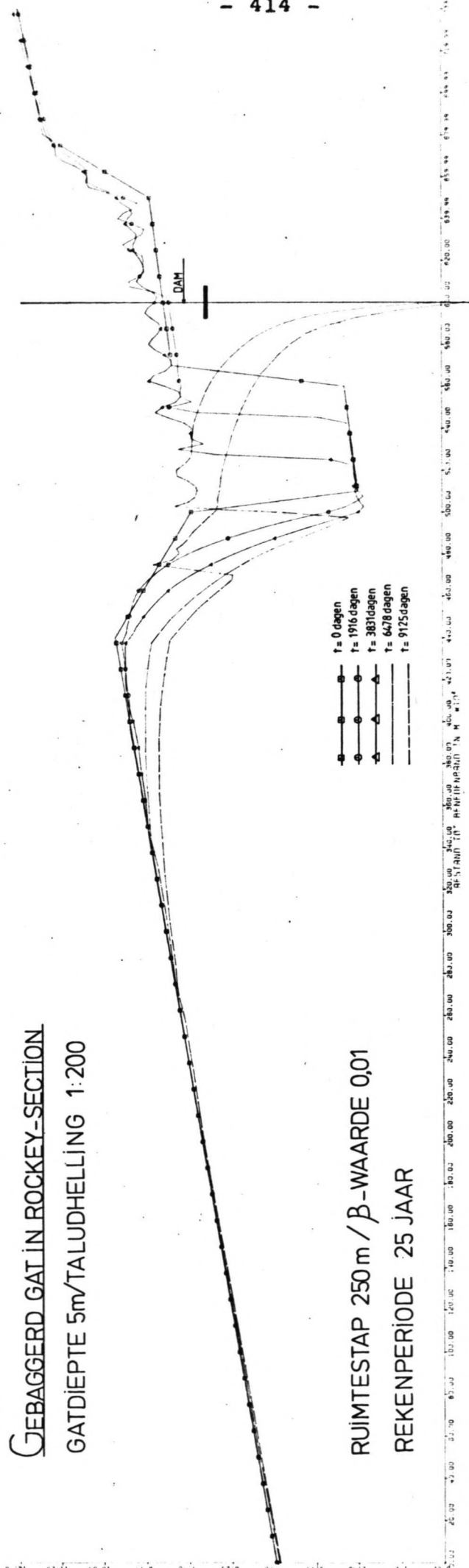


FIGUUR 11_13

GEBAGGERD GAT IN ROCKEY-SECTION

GATDIEPTE 5m/TALUDHELLING 1:200

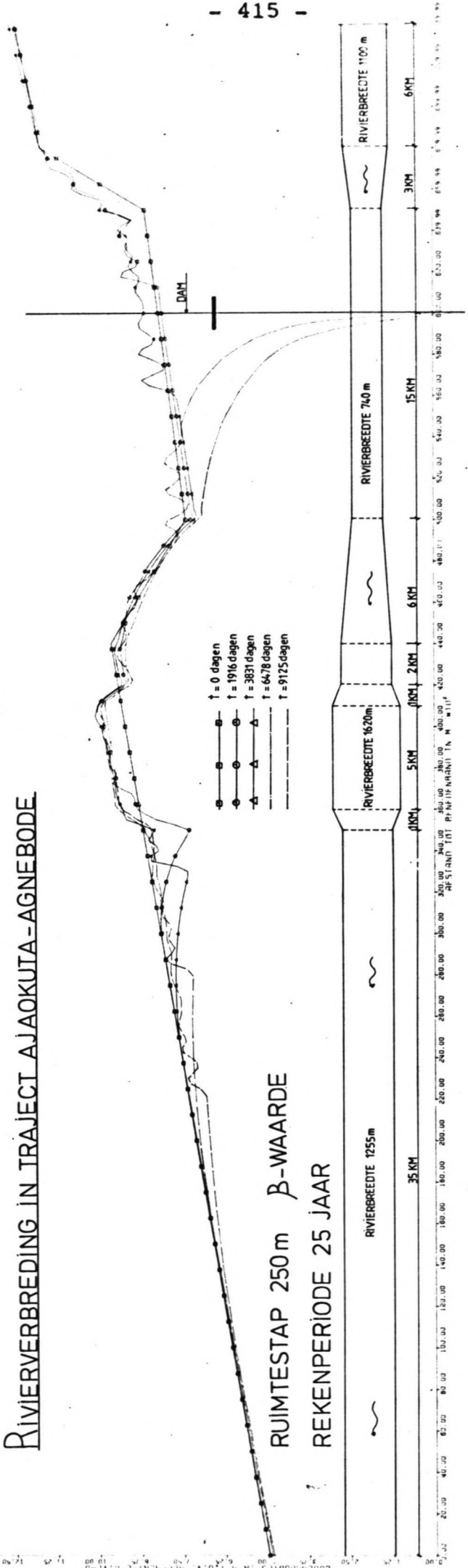
RUIMTESTAP 250 m / β -WAARDE 0,01
REKENPERIODE 25 JAAR



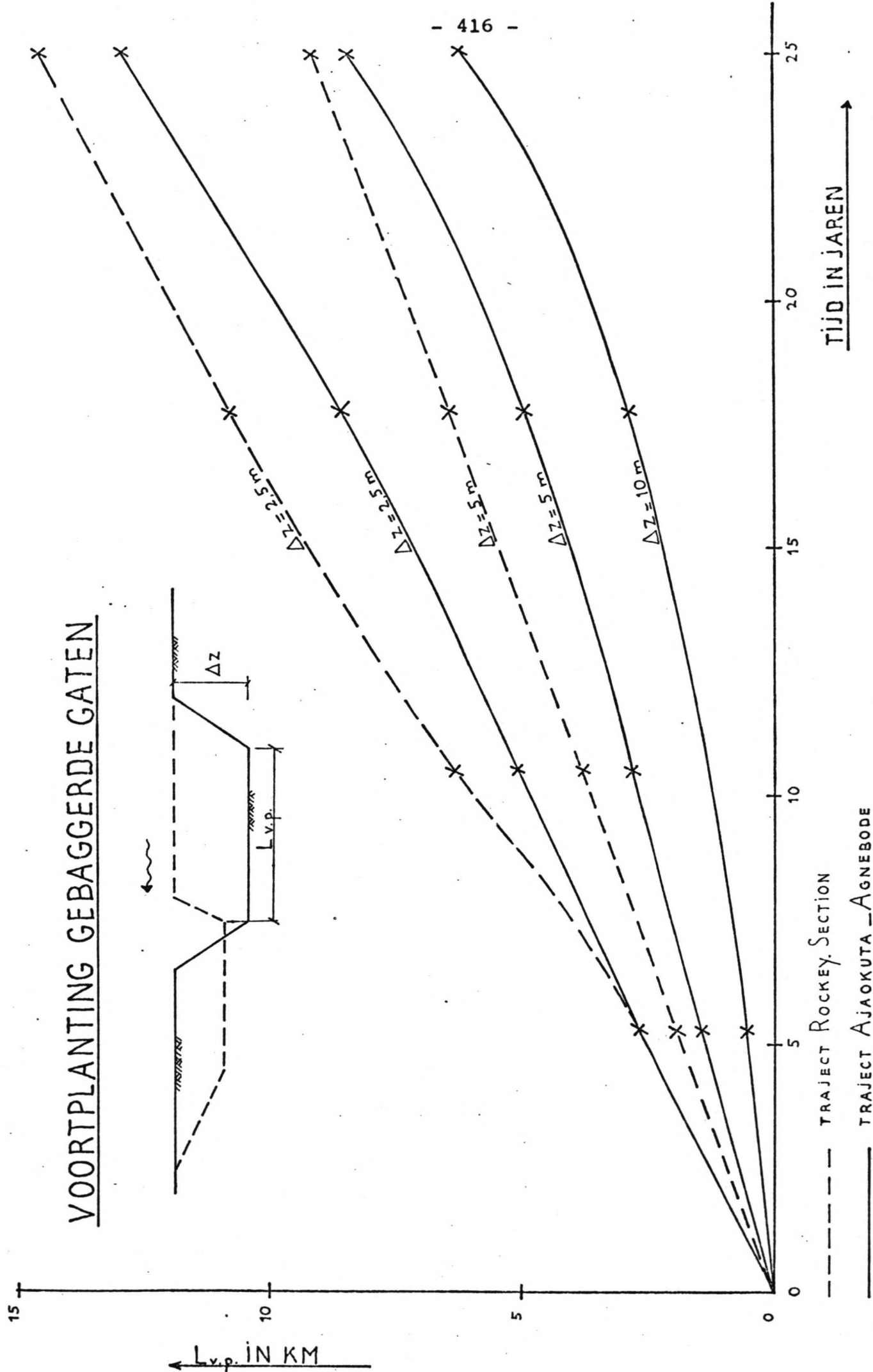
FIGUUR 11_14

RIVIERVERBREIDING IN TRAJECT AJAOKUTA-AGNEBODE

RUIMTESTAP 250 m β -WAARDE
REKENPERIODE 25 JAAR

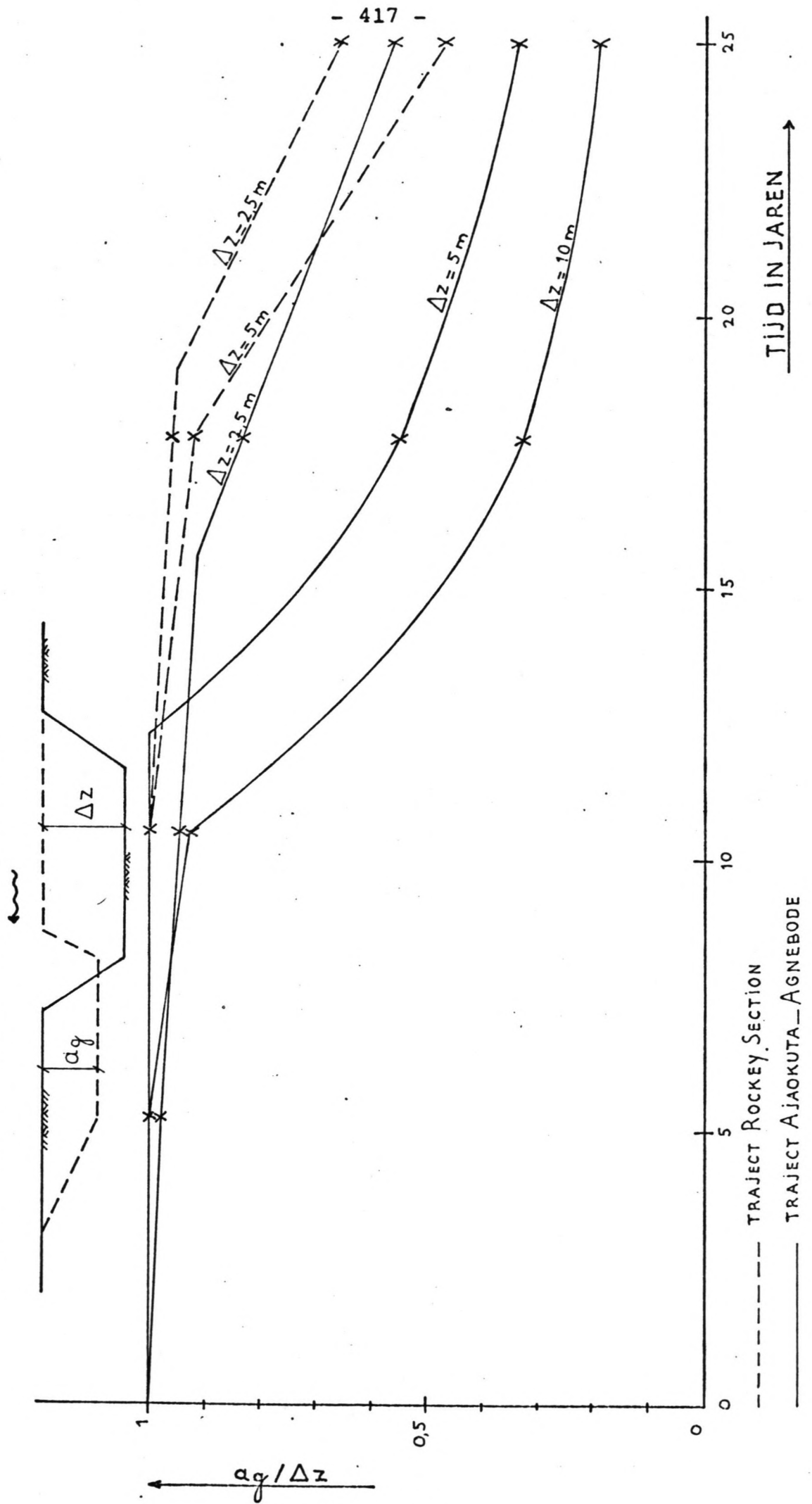


VOORTPLANTING GEBAGGERDE GATEN



GRAFIEK 11_1

DEMPING GEBAGGERDE GATEN



GRAFIEK 11.2

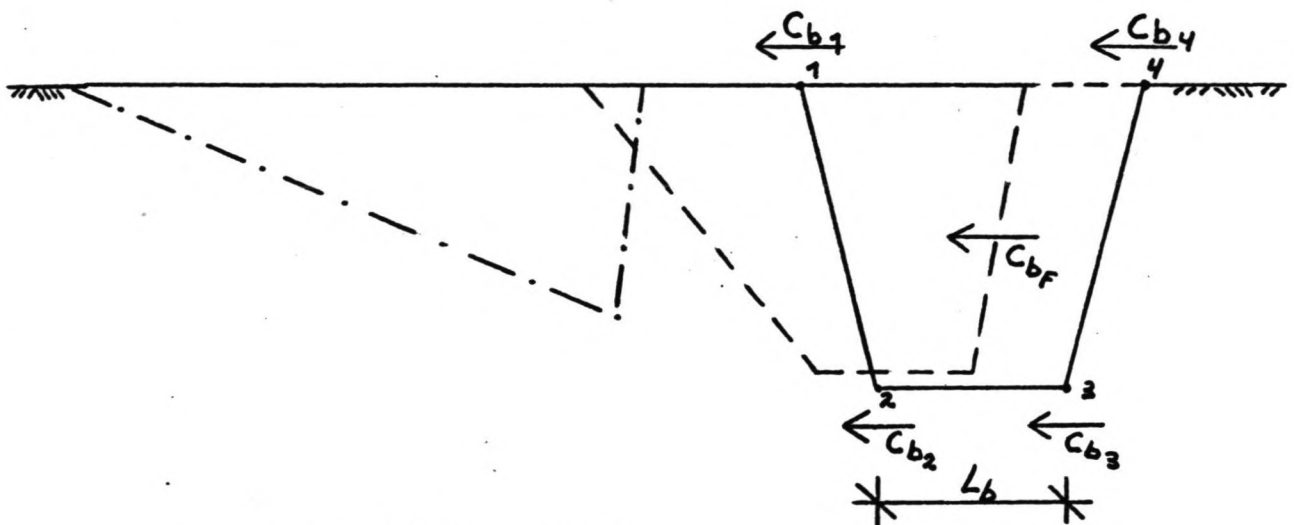
§ 11-4 Het mechanisme van een gebaggerd gat

Alvorens de verschillen in demping en voortplanting van de gebaggerde gaten te bespreken, wordt in deze paragraaf het mechanisme van de gebaggerde gaten besproken.

In het mechanisme zijn een tweetal fasen te onderscheiden:

- 1) voor het bereiken van de puntvorm;
- 2) na het bereiken van de puntvorm.

Aan de hand van onderstaand figuur zal het mechanisme worden toegelicht.



- _____ : situatie op $t=0$
 ----- : situatie voor het bereiken van de puntvorm
 -.-.-.-.- : situatie na het bereiken van de puntvorm

figuur 11-16

ad 1

In eerste instantie zal punt 4 zich sneller verplaatsen dan punt 3 omdat de karakteristieke voortplantingssnelheid van punt 4 groter is dan van punt 3. Dit resulteert dan ook in het steiler worden van het bovenstroomse talud.

Op het moment dat beide karakteristieken elkaar inhalen ontstaat een soort schokgolf waarna het bovenstroomse talud als een "golffront" met een snelheid (c_{bf}) van ongeveer het gemiddelde van c_{b3} en c_{b4} verder loopt.

De karakteristieke voortplantingssnelheid in punt 1 is groter dan die in punt 2. Dit heeft tot gevolg dat het benedenstroomse talud steeds flauwer wordt.

In deze fase is de demping zeer klein. Verplaatsing van het front heeft tot gevolg dat de bodemlengte van het gebaggerde gat (L_b) korter wordt.

ad 2:

Omdat $c_{b2} < c_{bf}$ zal het front op een bepaald moment punt 2 inhalen. Op dat moment ontstaat de puntvorm.

In deze fase neemt de demping plotseling sterk toe.

Verplaatsing van het front heeft immers een afname van de diepte van het gat tot gevolg. Het front zal steeds sneller gaan lopen omdat de karakteristieke voortplantingssnelheid in de punt van het gat toeneemt.

Het hierboven beschreven mechanisme kan met behulp van karakteristieken in een $x - t$ diagram getekend worden. Dit is gedaan in figuur 11-17.

Uit bovenstaande is eveneens te verklaren dat bij diepe gaten met eenzelfde volume als ondiepe gaten, eerder de puntvorm wordt bereikt waardoor eerder de sterke demping optreedt.

Immers er geldt:

$$t_p = L_b / (c_{bf} - c_{b2})$$
$$L_{b0} > L_{bd} \text{ en } (c_{bf} - c_{b2})_0 > (c_{bf} - c_{b2})_d$$

11-4.1

0 = ondiep

d = diep

t_p = het tijdstip waarop de puntvorm wordt bereikt [jaar]

Weliswaar is de voortplantingssnelheid van het front bij het ondiepe gat groter, echter de kleinere waarde voor L_b bij het diepe gat door dezelfde volumina van de gaten kan van doorslaggevende betekenis zijn ten aanzien van het bereiken van de puntvorm.

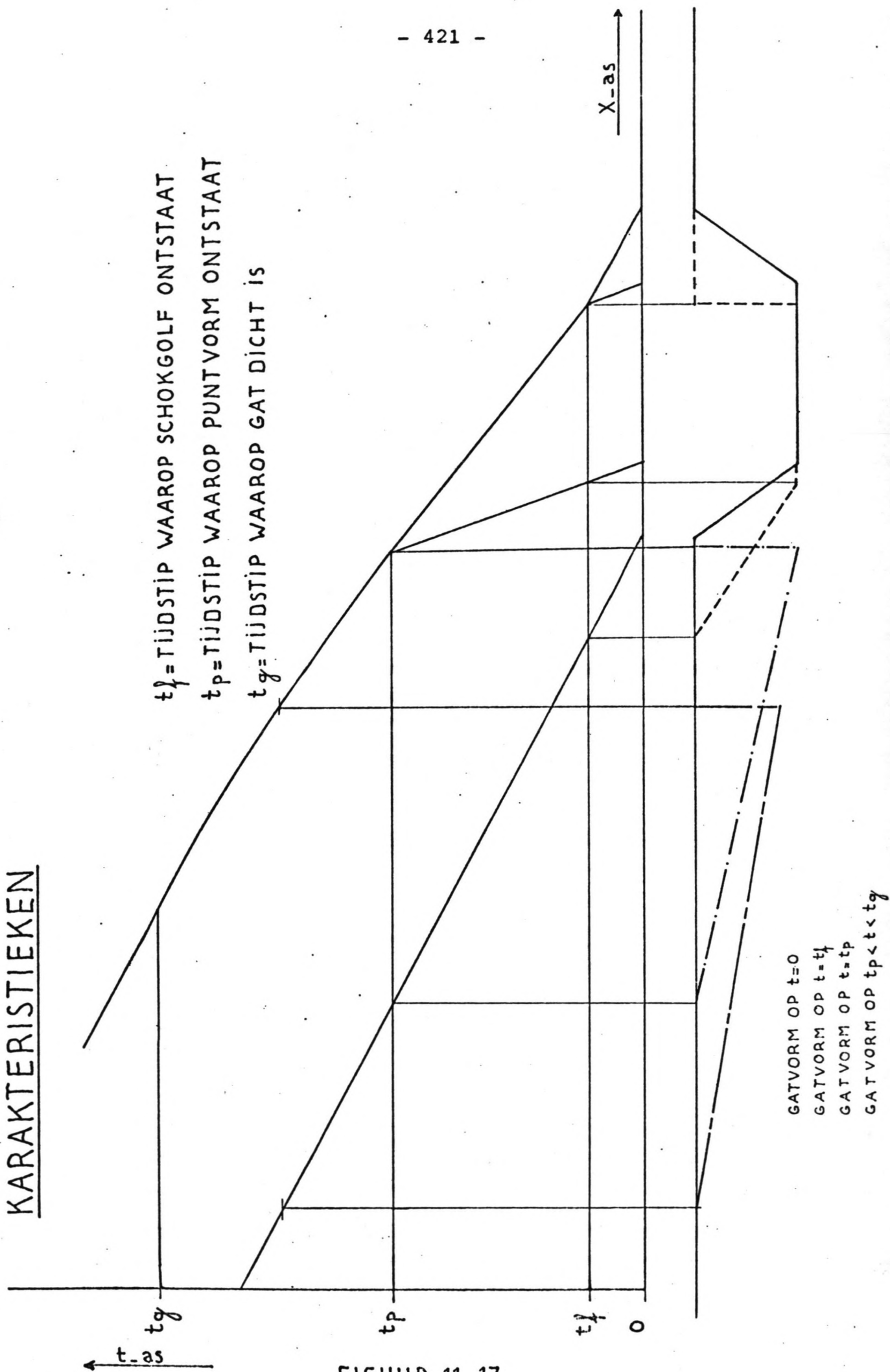
Volgens bovenvermelde mechanisme is het moment waarop de puntvorm wordt bereikt uit te rekenen. Met behulp van de in de figuren 11-8 tot en met 11-13 kunnen door meting C_{bf} en C_{b2} worden bepaald.

Met behulp van formule 11-4.1 is dan het tijdstip t_p te berekenen.

Dit is gedaan voor het viertal gaten in het traject Ajaokuta-Agnebode en het tweetal gaten in de Rockey Section. Er is tevens gecontroleerd of de berekende waarden voor t_p vallen binnen de perioden waarop volgens de figuren 11-8 tot en met 11-13 de puntvorm bereikt moet zijn.

Voor resultaten zie tabel 11-4.

KARAKTERISTIEKEN



FIGUUR 11_17

Tabel 11-4

TRAJECT	GATDIEPTE (m)	c_{bf} (m/jaar)	c_{b_2} (m/jaar)	L_b (m)	t_p (jaar)	t_p in periode volgens figuren
Djakula Agnébode	2,5	488	98	6000	15,4	10,5 - 17,7
	5	270	26	3000	12,3	10,5 - 17,7
	10	120	0	1250	10,4	5,2 - 10,5
	20	49	0	500	10,2	5,2 - 10,5
Rocky Section	2,5	705	0	11000	15,6	17,7 - 25
	5	360	98	5000	19,1	10,5 - 17,7

§ 11-5 De verschillen in demping en voortplanting tussen de diverse gatvormen.

Aan de hand van de grafieken 11-1 en 11-2 zullen de verschillen in voortplanting en demping van de diverse gaten in deze paragraaf besproken worden.

De voortplanting van de gaten (grafiek 11-1):

- Het front van de diepe gaten plant zich langzamer voort dan bij de ondiepe gaten. Dit komt omdat het gemiddelde van de karakteristieke voortplantingssnelheden in de punten 3 en 4 (zie figuur 11-16) voor de ondiepe gaten groter is dan voor de diepe gaten.
- Na het bereiken van de puntvorm neemt de voortplantingssnelheid toe voor alle gaten met uitzondering het gat van 2,5 m diep in de Rocky Section. Toename van de voortplantingssnelheid is het gevolg van het ondieper worden van het gat.
- Bij het vergelijken van de voortplantingssnelheden van dezelfde gatdiepten in de Rocky Section en het traject Ajaokuta-Agnebode blijkt dat de fronten van de gaten in de Rocky Section sneller lopen dan in het traject Ajaokuta-Agnebode. Waarschijnlijk is dit een gevolg van de hogere snelheden in de Rocky Section waardoor immers de karakteristieke voortplantingssnelheden van het front groter zijn. ($c_b :: u^n$).
- De puntvormen ontstaan echter voor de gaten in de Rocky Section later dan voor dezelfde gatdiepten in het traject Ajaokuta-Agnebode omdat de gaten in de Rocky Section langer zijn.

De demping van de gaten (grafiek 11-2):

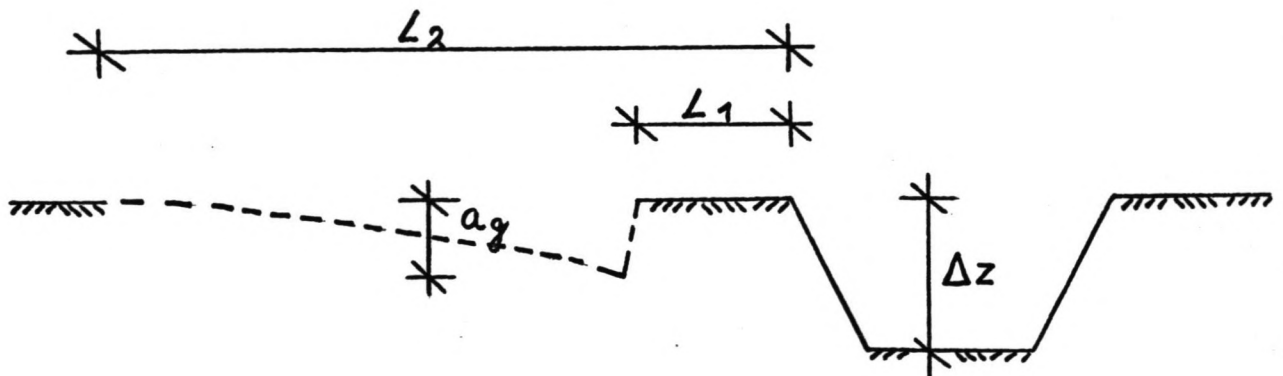
- Alle gaten krijgen na verloop van tijd de puntvorm, waarna de demping vrij plotseling sterk toeneemt.
- Naarmate het gat dieper is in een bepaald traject wordt eerder de puntvorm bereikt. Blijkbaar is de kleinere waarde van L_p van doorslaggevende betekenis. (zie § 11-4).
- De gaten in de Rockey Section zijn relatief minder gedempt dan dezelfde gaten in het traject Ajaokuta-Agnebode. Dit komt doordat de gaten in de Rockey Section later de puntvorm bereiken dan de gaten in het traject Ajaokuta-Agnebode.
- Na het bereiken van de puntvorm dempt het gat van 2,5 m in de Rockey Section sterker (snellere afname van de gatdiepte) dan hetzelfde gat in het traject Ajaokuta-Agnebode. Voor de gaten van 5 m diep verloopt de afname van de gatdiepte voor de verschillende trajecten vrijwel even snel. Het is moeilijk hiervoor een verklaring te geven.

§ 11-6 De ligging en de overgebleven volumina van de diverse gatvormen na 25 jaar.

Om de situatie van de diverse gatvormen na 25 jaar met elkaar te kunnen vergelijken is zowel naar de ligging als het overgebleven volumen van de diverse gatvormen gekeken.

De ligging wordt bepaald door:

- 1) het meest bovenstrooms gelegen punt van de overgebleven gatvorm (L_1);
- 2) het meest benedenstrooms gelegen punt van de overgebleven gatvorm (L_2);
- 3) het diepste punt van de overgebleven gatvorm (a_g)



_____ : gatvorm op $t=0$
----- : gatvorm op $t=25$ jaar

figuur 11-18

Ten aanzien van het meest benedenstrooms gelegen punt wordt opgemerkt dat dit enigszins arbitrair uit de figuren 11-8 tot en met 11-13 bepaald is.

De overgebleven volumina zijn met behulp van de bekende rivierbreedten en oppervlakte bepaling met trapeziabepaald.

De ligging en de resterende volumina zijn in tabel 11-5 samengevat.

TRAJECT	$\Delta z(m)$	$L_1(m)$	$L_2-L_1(m)$	$q_0(m)$	$V_{25} (m^3)$	%
Ajaokuta Agneboode	2,5	5900	25000	1,40	$12,7 \times 10^6$	58
	5	5100	25000	1,72	$14,4 \times 10^6$	65
	10	4300	25000	1,91	$14,0 \times 10^6$	64
Rockey Section	2,5	2600	25000	1,65	$17,7 \times 10^6$	80
	5	3100	25000	2,34	$19,2 \times 10^6$	86

tabel 11-5

Tenslotte wordt opgemerkt dat het volume van een gebaggerd gat voor 100% aanwezig blijft, wanneer na de zandontrekking geen zand aan de rivier wordt toegevoegd. Immers de massabalans is geldig.

De uitschuringen strekken zich na verloop van tijd echter over een dermate lang traject van de rivier uit dat er van de gatvorm niets overblijft.

§ 11-7 De betrouwbaarheid van de berekeningsresultaten.

Bij de morfologische berekeningen is gebruik gemaakt van een zogenaamd conservatief differentie schema voor de continuïteitsvergelijking van het sediment. Dit schema is echter niet conservatief op de randen van het beschouwde riviertraject, zodat numerieke zandlekken kunnen ontstaan. (zie § 8-7).

Uiteraard mogen deze lekken niet te groot worden omdat dan de berekeningsresultaten niet betrouwbaar zijn. Daarom is nagegaan hoe groot de met het computerprogramma berekende lekken zijn ten opzichte van de volumina van de gebaggerde gaten op $t=0$. Zie voor de resultaten tabel 11-6.

Tevens is nagegaan of de afstand waarover een fout in de bovenstroomse randvoorwaarde zich kan hebben voortgeplant kleiner is dan de afstand van die bovenrand tot het meest bovenstrooms gelegen punt van de gebaggerde gaten op $t=10,5$ jaar. Wanneer immers de eerste afstand groter is dan de tweede, is het resultaat van de berekening onbetrouwbaar. Zie tabel 11-7.

Uit de tabellen 11-6 en 11-7 blijkt dat de berekeningresultaten ten aanzien van bovengenoemde punten betrouwbaar zijn.

Tabel 11-6

PERIODE			0-10½ jaar	10½-25 jaar	0-25 jaar	
TRAJECT	GATDIEPTE	ΔX (m)	Lekkage (m ³)	Lekkage (m ³)	Lekkage (m ³)	percentages t.o.v. volume gat
Aqakula Aqabode	2,5	250	+ 120607	- 721797	- 601190	2,7 %
	5	250	+ 117223	- 724198	- 606975	2,8 %
	10	62,5	+ 28828	- 237438	- 208610	0,9 % *
	20	62,5	+ 28555			
Pocay Aqabode	2,5	250	+ 145771	- 714144	- 568373	2,6 %
	5	250	+ 129172	- 707456	- 578284	2,6 %
rivierver- breiding		250	+ 105372	- 704160	- 598788	2,7 %

* Bij de berekening van het gat met een diepte van 10 m ontstaat een kleinere numerieke lekkage dan bij de berekeningen van de gaten van 2,5 en 5 m diepte omdat de ruimentestap kleiner is. Zie ook § 8-7.

TRAJECT	GATDIEPTE (m)	Δx (m)	L_f (km)	L_{bo} (km)
Agnobode Agnobode	2,5	250	15,9	37,5
	5	250	15,7	34,8
	10	62,5	15,4	33,6
	20	62,5	15,3	32,8
Baxey Baxey	2,5	250	17,2	17,7
	5	250	16,4	20,9
rivierver- breiding		250	15,1	32,0

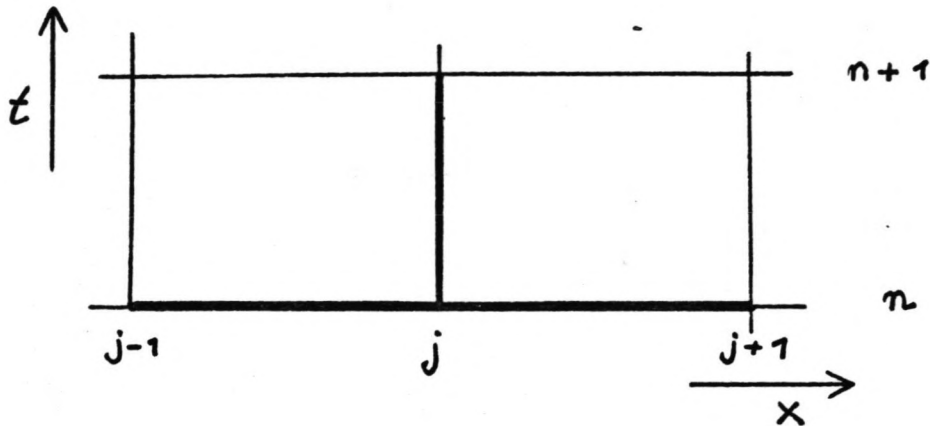
L_f = de afstand waarover een fout in de bovenstroomse randvoorwaarde zich kan hebben voortgeplant.

L_{bo} = de afstand van de bovenrand tot het meest bovenstrooms gelegen punt van het gebaggerde gat na 10½ jaar.

A P P E N D I X I
=====

- afleiding van de amplificatiefactoren
 voor het Modified Lax schema
 het Lax-Wendroff schema
 het Upstream schema

Modified-Lax schema



Het rekenmolecuul is hierboven getekend. De simple wave vergelijking levert onderstaande differentie vergelijking

$$\frac{z_{b_j}^{n+1} - z_{b_j}^n}{\Delta t} + c_b \frac{z_{b_{j+1}}^n - z_{b_{j-1}}^n}{2 \Delta x} - \alpha \frac{z_{b_{j+1}}^n - 2 z_{b_j}^n + z_{b_{j-1}}^n}{2 \Delta t} = 0$$

De beginwaarde is: $z_{b_j}^n = \hat{z}_b \cdot \exp(i j \xi)$
 $z_{b_{j+1}}^n = \hat{z}_b \cdot \exp(i (j+1) \xi)$
 $z_{b_{j-1}}^n = \hat{z}_b \cdot \exp(i (j-1) \xi)$

en $\xi = k \cdot \Delta x = 2\pi * \Delta x / \lambda$

$\sigma = c_b \cdot (\Delta t / \Delta x)$: het courant getal

De bovenstaande vergelijking is nu om te werken tot

$$z_{b_j}^{n+1} = \hat{z}_b \cdot \exp(i j \xi) \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sigma \exp(i \xi) + \frac{1}{2} \sigma \exp(-i \xi) + \frac{1}{2} \alpha \exp(i \xi) - \alpha + \frac{1}{2} \alpha \exp(-i \xi) \right\}$$

verder geldt

$$\begin{aligned}\cos \xi &= (\exp(i\xi) + \exp(-i\xi)) / 2 \\ \sin \xi &= (\exp(i\xi) - \exp(-i\xi)) / 2i\end{aligned}$$

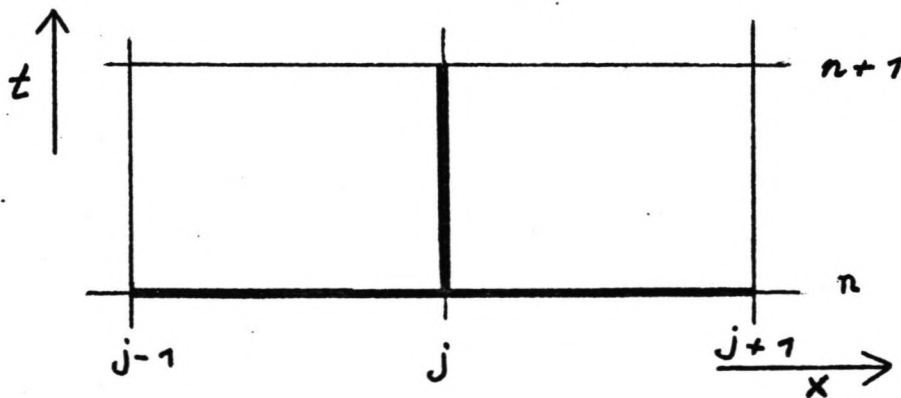
De vergelijking is nu verder te vereenvoudigen tot

$$Z_{b_j}^{n+1} = Z_{b_j}^n * \{1 - \sigma i \sin \xi + \alpha \cos \xi - \alpha\}$$

De amplificatie factor (ρ) is nu gelijk aan

$$\rho = 1 - \alpha + \alpha \cos \xi - \sigma i \sin \xi$$

Lax-Wendroff schema



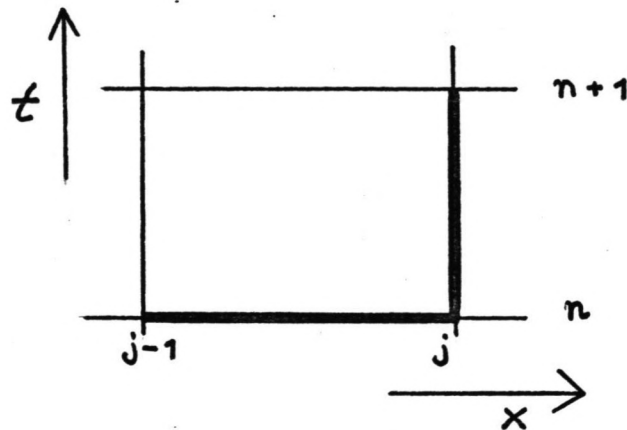
Het rekenmolecuul van het Lax-Wendroff schema is gelijk aan het modified-Lax schema. De waarde voor α in het modified-Lax schema wordt in het Lax-Wendroff schema gelijk gesteld aan σ^2 , op dezelfde wijze als voor het modified-Lax schema kan voor de

APPENDIX I

amplificatie factor (ρ) worden afgeleid.

$$\rho = 1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \xi - \sigma i \sin \xi$$

Upstream-schema



Het rekenmolecuul is hierboven getekend. De Simple wave vergelijking levert onderstaande differentie vergelijking.

$$\frac{z_{bj}^{n+1} - z_{bj}^n}{\Delta t} + c_b \frac{z_{bj}^n - z_{bj-1}^n}{\Delta x} = 0$$

De beginvoorwaarde is ook nu

$$z_{bj}^n = \hat{z}_b \exp(ij\xi)$$

$$z_{bj-1}^n = \hat{z}_b \exp(i(j-1)\xi)$$

APPENDIX I

en $\xi = k \cdot \Delta x = 2\pi \cdot \Delta x / \lambda$

$\sigma = c_b \cdot (\Delta t / \Delta x)$ het Courant getal

De differentie vergelijking is om te werken tot

$$z_{bj}^{n+1} = \hat{z}_b \exp(ij\xi) * \{1 - \sigma + \sigma \exp(-i\xi)\}$$

ook geldt: $\exp(-i\xi) = \cos \xi - i \sin \xi$

Voor de amplificatie factor ($\rho = z_{bj}^{n+1} / z_{bj}^n$)

volgt, rekening houdend met de richting van de voortplantingssnelheid c_b

$$\rho = 1 - |\sigma| + |\sigma| \cos \xi - \sigma i \sin \xi$$

A P P E N D I X I I
=====

- de formule voor c_r en d waarmee de grafieken 8-1 t/m 8-6 zijn getekend

APPENDIX II

De grafieken 8-1 tot en met 8-6 zijn gemaakt door de waarden voor d en c_R bij de diverse ξ en σ waardes te berekenen met de hierna volgende formules, waarbij $\beta = 0,01$ is genomen.

Modified-Lax

$$\rho = 1 - \alpha + \alpha \cos \xi - i \sigma \sin \xi \quad n_t = 2\pi / \sigma \xi$$

$$d = |\rho|^{n_t} = \left\{ (1 - \alpha + \alpha \cos \xi)^2 + (\sigma \sin \xi)^2 \right\}^{\frac{\pi}{\sigma \xi}}$$

$$C_R = \frac{-n_t \arg(\rho)}{2\pi} = -\frac{1}{\sigma \xi} \arctg \left\{ \frac{-\sigma \sin \xi}{1 - \alpha + \alpha \cos \xi} \right\}$$

Lax-Wendroff

$$\rho = 1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \xi - i \sigma \sin \xi$$

$$d = \left\{ (1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \xi)^2 + (\sigma \sin \xi)^2 \right\}^{\frac{\pi}{\sigma \xi}}$$

$$C_R = -(1/\sigma \xi) \arctg \left\{ -\sigma \sin \xi / (1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \xi) \right\}$$

Upstream

$$\rho = 1 - |\sigma| + |\sigma| \cos \xi - i \sigma \sin \xi$$

$$d = \left\{ (1 - \sigma + \sigma \cos \xi)^2 + (\sigma \sin \xi)^2 \right\}^{\frac{\pi}{\sigma \xi}}$$

$$C_R = -(1/\sigma \xi) \arctg \left\{ -\sigma \sin \xi / (1 - \sigma + \sigma \cos \xi) \right\}$$

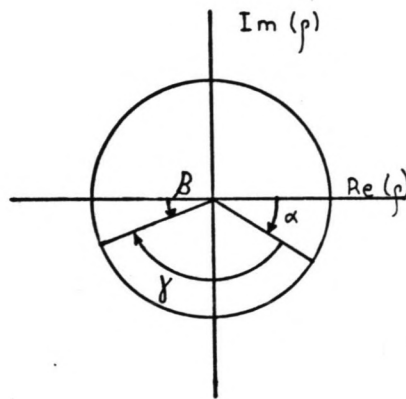
APPENDIX II

Over de berekening van de c_r waardes nog de volgende opmerking.

Wanneer het $\text{Re}(\rho) > 0$ dan is de fase-verschuiving hoek α .

Als het $\text{Re}(\rho) < 0$ dan is de fase-verschuiving hoek β (zie figuur).

In verband met de tekenafspraken is in het laatste geval hoek $\gamma = \pi - \beta$ de juiste hoek.



Daarom zijn bij de berekening van de c_r -waardes de volgende twee formules gebruikt:

$$\arg(\rho) > 0 \longrightarrow c_r = -\frac{1}{\sigma_f} \arg(\rho)$$

$$\arg(\rho) < 0 \longrightarrow c_r = -\frac{1}{\sigma_f} \arg(\rho) + \frac{\pi}{\sigma_f}$$

A P P E N D I X I I I
=====

stabiliteitsanalyse voor
het modified-Lax schema
het Lax-Wendroff schema
het Upstream schema

Modified-Lax

$$\rho = 1 - \alpha + \alpha \cos \xi - i \sigma \sin \xi$$

Het Von Neumann criterium luidt: $|\rho| < 1$,

zodat onderstaande vergelijking kan worden gevonden

$$2\alpha(\cos \xi - 1) + \alpha^2(\cos \xi - 1)^2 - \sigma^2(\cos^2 \xi - 1) \leq 0$$

Omdat geldt $0 \leq \xi \leq \pi$, geldt ook $-1 \leq \cos \xi \leq 1$, zodat ook geldt $-2 \leq (\cos \xi - 1) \leq 0$.

Indien bovenstaande vergelijking wordt gedeeld door de negatieve factor $(\cos \xi - 1)$ volgt:

$$2\alpha + \alpha^2(\cos \xi - 1) - \sigma^2(\cos \xi + 1) \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{Indien } \xi = 0 \rightarrow 2\alpha - 2\sigma^2 \geq 0 & \text{of } \sigma^2 \leq \alpha \\ \xi = \pi \rightarrow 2\alpha - 2\alpha^2 \geq 0 & \text{of } 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array}$$

Voor ξ waarden tussen 0 en π wordt aan het Von Neumann criterium voldaan indien

$$\sigma^2 \leq \alpha \leq 1$$

Indien $\alpha = 1$ is het Von Neumann criterium voor het modified-Lax schema gelijk aan het C.F.L. criterium, voor $\alpha < 1$ is het Von Neumann criterium strenger.

Lax-Wendroff

$$\rho = 1 - \sigma^2 + \sigma^2 \cos \xi - i \sigma \sin \xi$$

Het Von Neumann criterium ($|\rho| < 1$) levert voor het Lax-Wendroff schema - na deling door $\sigma^2 \cdot (\cos \xi - 1)$ - onderstaande vergelijking:

$$2 + \sigma^2 (\cos \xi - 1) - (\cos \xi + 1) \gg 0$$

Indien

$$\xi = 0 \rightarrow 2 - 2 = 0$$

$$\xi = \pi \rightarrow 2 - 2\sigma^2 \gg 0 \text{ op } |\sigma| \leq 1$$

Voor ξ waarden tussen 0 en π wordt aan het Von Neumann criterium voldaan indien

$$|\sigma| \leq 1$$

Conclusie:

Voor het Lax-Wendroff schema levert het Von Neumann criterium dezelfde stabiliteitsvoorwaarde op als het C.F.L. criterium.

Upstream

$$\rho = 1 - |\sigma| + |\sigma| \cos \xi - i \sigma \sin \xi$$

APPENDIX III

Het Von Neumann criterium ($|\rho| < 1$) levert voor het Upstream schema
- na deling door $(\cos \varphi - 1)$ - onderstaande vergelijking

$$2|\sigma| + |\sigma|^2 (\cos \varphi - 1) - |\sigma|^2 (\cos \varphi + 1) \neq 0$$

Indien

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\rightarrow 2|\sigma| - 2|\sigma|^2 \neq 0 \quad \text{of} \quad |\sigma| \leq 1 \\ \varphi = \pi &\rightarrow 2|\sigma| - 2|\sigma|^2 \neq 0 \quad \text{of} \quad |\sigma| \leq 1 \end{aligned}$$

Voor φ waardes tussen 0 en π wordt aan het Von Neumann criterium voldaan indien

$$|\sigma| \leq 1$$

Conclusie:

Voor het Upstream schema levert het Von Neumann criterium dezelfde stabiliteits voorwaarde op als het C.F.L. criterium.

A P P E N D I X I V
=====

de afbreekfouten bij de simple-wave
vergelijking voor
het modified-Lax schema
het Lax-Wendroff schema
het Upstream schema

APPENDIX IV

In deze appendix worden de afbreekfouten bij de simple wave vergelijking bepaald, zoals aangegeven door Warning R.F. en Hyett B.J. (1974)

Modified-Lax

De simple wave vergelijking ($\partial^2 z / \partial t + c \partial^2 z / \partial x = 0$) toegepast op het rekenmolecuul - zie appendix I - levert onderstaande differentie vergelijking op

$$\frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} + c \left(\frac{z_{j+1}^n - z_{j-1}^n}{2 \Delta x} \right) - \alpha \left(\frac{z_{j+1}^n - 2 z_j^n + z_{j-1}^n}{2 \Delta t} \right) = 0$$

Door nu z_j^{n+1} , z_{j+1}^n en z_{j-1}^n in een taylorreeks te ontwikkelen in het punt z_j^n naar respectievelijk t , x en x kan worden gevonden

$$\frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 z}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^3}{24} \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + O(\Delta t^4)$$

$$c \left(\frac{z_{j+1}^n - z_{j-1}^n}{2 \Delta x} \right) = c \frac{\partial z}{\partial x} + c \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + c \frac{\Delta x^4}{120} \frac{\partial^5 z}{\partial x^5} + O(\Delta x^6)$$

$$\alpha \left(\frac{z_{j+1}^n - 2 z_j^n + z_{j-1}^n}{2 \Delta t} \right) = \frac{\Delta x^2}{2 \Delta t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{24 \Delta t} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + O\left(\frac{\Delta x^6}{\Delta t}\right)$$

Wanneer derde en hogere orde termen worden verwaarloosd, kan de differentievergelijking herschreven worden tot

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \alpha \frac{\Delta x^2}{2 \Delta t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 z}{\partial t^3} + c \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0$$

APPENDIX IV

In de bijgevoegde tabel is vorenstaande vergelijking omgewerkt naar de onderstaande

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} (\alpha - \sigma^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6\Delta t} \left\{ -\sigma(-3\alpha + 1 + 2\sigma^2) \right\} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

zodat

$$\begin{aligned} j_2 &= \beta = \alpha - \sigma^2 \\ j_3 &= -\sigma(-3\alpha + 1 + 2\sigma^2) = -\sigma(1 - \sigma^2 - 3\beta) \end{aligned}$$

De differentie vergelijking voor de simple-wave vergelijking is consistent met de differentiaal vergelijking voor de simple-wave vergelijking. Want voor $\Delta x \rightarrow 0$ en $\Delta t \rightarrow 0$ gaat de differentie vergelijking over in de differentiaal vergelijking, vermits de afgeleides van z naar x eindige waarden hebben.

Lax-Wendroff

Voor Lax-Wendroff kan op dezelfde wijze worden afgeleid dat

$$\begin{aligned} j_2 &= 0 \\ j_3 &= -\sigma(1 - \sigma^2) \end{aligned}$$

Upstream

Voor het Upstream-schema kan op dezelfde wijze worden afgeleid dat

$$\begin{aligned} j_2 &= |\sigma|(1 - |\sigma|) \\ j_3 &= -|\sigma|(2|\sigma| - 1)(|\sigma| - 1) \end{aligned}$$

A P P E N D I X V
=====

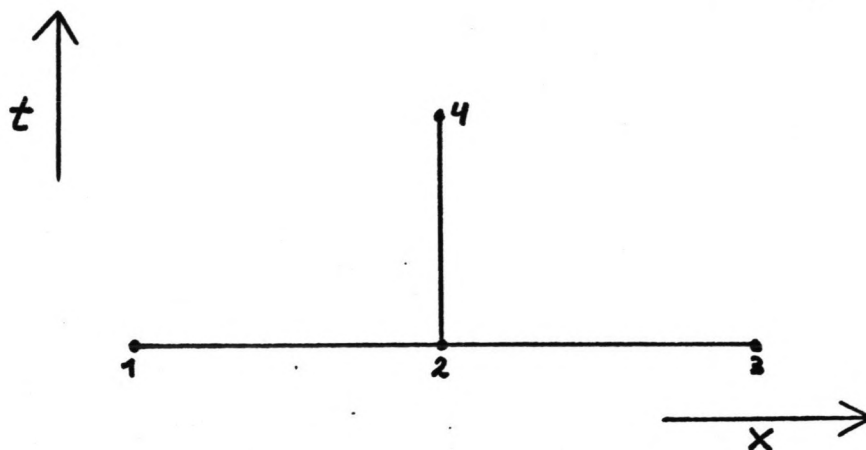
Verklaring waarom in voorgaande
bijlagen enkel het Upstream schema
is beschouwd en niet ook het
Godunov schema

APPENDIX V

Wanneer het Godunors-schema wordt toegepast op de lineaire vergelijking

$$\partial z_b / \partial t + c_b \partial z_b / \partial x = 0$$

dan blijkt dat dit hetzelfde rekenschema is als het upstream-schema van Perdrau en Gunge. Immers er geldt:



$$\alpha = \sigma = c_b \Delta t / \Delta x$$

$$\frac{z_4 - \left\{ \frac{1}{2} c_{b2} (\Delta t / \Delta x) z_1 + (1 - c_{b2} \Delta t / \Delta x) z_2 + \frac{1}{2} c_{b2} (\Delta t / \Delta x) z_3 \right\} + c_{b2} (z_3 - z_1)}{\Delta t} = 0$$

$$\frac{z_4 - z_2}{\Delta t} - \frac{\left\{ c_{b2} z_1 - 2 c_{b2} z_2 + c_{b2} z_3 \right\}}{2 \Delta x} + \frac{c_{b2} (z_3 - z_1)}{2 \Delta x} = 0$$

$$\frac{z_4 - z_2}{\Delta t} + \frac{c_{b2} (z_2 - z_1)}{\Delta x} = 0$$

Zoals in § 8-4.2 is te zien geeft het rekenmolecuul van het upstream-schema dezelfde differentie vergelijking.

A P P E N D I X V I
=====

Overzicht van de in hoofdstuk 10
uitgevoerde berekeningen met ver-
wijzingen naar de paragraaf- en
figuurnummers.

PARAGRAAF	FIGUUR	Jobnr.	OMSCHRIJVING	$\Delta x(m)$	β
§ 10-2	10-1	6789	1 cm - golf	62,50	0,01
§ 10-2	10-2	8417	1 cm - golf	62,50	0,5
§ 10-2		2271	Toetsing uniforme stroming denkbeeldige rivier	250	0,01
§ 10-3	10-3	9953	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	125	0,01
		13	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	250	0,01
		20	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	500	0,01
		25	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	1000	0,01
		27	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	2000	0,01
§ 10-3	10-4	753	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:400	125	0,01
		755	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:400	250	0,01
§ 10-3		9230	Stuwkr omme -berekening, gatdiepte 1,25 m/talud 1:400	250	0,01
§ 10-4	10-5	9944	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	125	0,05
		9957	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	250	0,05
		17	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	500	0,05
		22	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	1000	0,05
		26	Gatdiepte 1,25 m/ talud 1:3200	2000	0,05

PARAGRAAF	FIGUUR	Jobnr.	OMSCHRIJVING	x(m)	
10-4	10-6	9414	Gevoeligheidsonderzoek k + 20%	250	0,01
		9417	Gevoeligheidsonderzoek k - 20%	250	0,01
		13	Gevoeligheidsonderzoek k	250	0,01
10-4	10-7	9234	Gevoeligheidsonderzoek C + 10%	250	0,01
		9227	Gevoeligheidsonderzoek C - 10%	250	0,01
		13	Gevoeligheidsonderzoek C	250	0,01
10-4	10-8	9214	Gevoeligheidsonderzoek i_b + 15%	250	0,01
		9249	Gevoeligheidsonderzoek i_b - 15%	250	0,01
		13	Gevoeligheidsonderzoek i_b	250	0,01
10-4	10-9	9222	Gevoeligheidsonderzoek B + 10%	250	0,01
		9215	Gevoeligheidsonderzoek B - 10%	250	0,01
		13	Gevoeligheidsonderzoek B	250	0,01

A P P E N D I X V I I

Bepaling van de ruimtestappen
voor de verschillende gebagger-
de gaten op de rivier de Niger.

Gebruikte formules:

1) de absolute fysische fout in de demping van het gebaggerde gat =

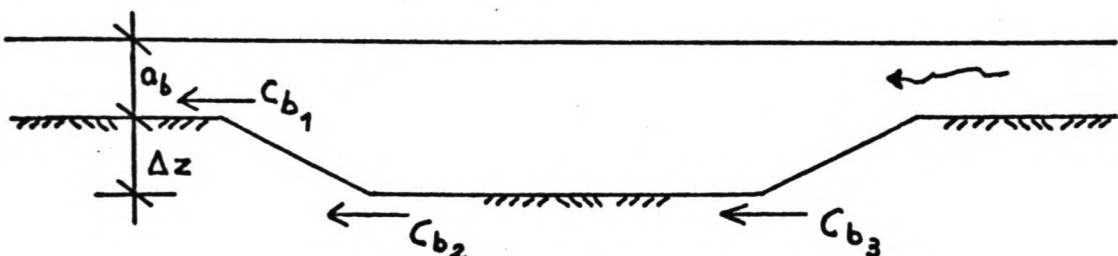
$$|n_{Td} t / T_d| * \exp(-t / T_d) * \Delta z$$

2) $T_d = a / (3 i_b c_b)$ met $a = a_b + \Delta z$ en

$$c_b = \{c_{b1} + (c_{b2} + c_{b3}) / 2\} / 2$$

n_{Td}	= de relatieve fysische fout in de dempingstijd	[-]
T_d	= de dempingstijd	[s]
t	= de rekenperiode	[s]
Δz	= de gatdiepte	[m]
a	= de totale waterdiepte	[m]
a_b	= de waterdiepte direct benedenstrooms van het gebaggerde gat	[m]
i_b	= het bodemverhang	
c_b	= de "gemiddelde" karakteristieke voortplantingssnelheid van het gebaggerde gat	[m/s]

Voor de plaatsen van de karakteristieke voortplantingssnelheden c_{b1} , c_{b2} en c_{b3} , zie onderstaand figuur. De waarden van de bovenvermelde karakteristieke voortplantingssnelheden worden gevonden door op $t=0$ stuwkrommeberekeningen uit te voeren voor de diverse gatvormen. (zie appendix IX).



Bij de berekeningen van de absolute fysische fout in de demping is voort de waarde 10,5 in de formule ingevuld omdat de numerieke resultaten na 10,5 jaar rekenen met elkaar worden vergeleken.

Voor de relatieve fout in de dempingstijd wordt een waarde van 30% genomen. Deze waarde is bepaald in appendix VIII.

De bepaling van de ruimtestappen voor een viertal gaten in het riviertraject Ajaokuta-Agnebode en een tweetal gaten in de Rocky Section is in tabelvorm op de volgende bladzijden weergegeven.

PLAATS GAT	GATLENGTE (m)	Δz (m)	c_{b1} (m/j)	c_{b2} (m/j)	c_{b3} (m/j)	c_b (m/j)	a_b (m)	a (m)	$i_b^{\#}$ 10^{-5}	T_d (j)	ABSOLUTE FYSISCHE FOUT IN DENPINT (m)
Agnabode Q. J. J. K. J. K.	8000	2,5	1309	285	365	817	6,92	9,42	10,5	36,6	0,21
	4000	5	1324	226	297	793	6,91	11,91	10,5	47,7	0,34
	2250	10	1324	0	0	662	6,91	16,91	10,5	81,1	0,45
	1500	20	1324	0	0	662	6,91	26,91	10,5	129,0	0,60
Section Rackey	13000	2,5	1597	541	597	1083	9,75	12,25	8	47,1	0,17
	7000	5	1588	214	236	907	9,75	14,75	8	67,8	0,26

* Voor de waarden voor c_{b1} , c_{b2} , c_{b3} en a_b zie de stuwkromme-berekeningen waarna in appendix IX verwezen wordt.

Tabel

PLAATS GAT	GATLENGTE (m)	Δz (m)	Δx (m)	GEMETEN VERSCHIL MET MIDDELSTE Δx (m)	ABSOLUTE FYSISCH FOOT IN DEMPING (m)	GEKOZEN RUIMTESTAP (m)
Ajaokuta- Agnebode	8000	2,5	125 250 500	0,05 0,10	0,21	250
Ajaokuta- Agnebode	4000	5	125 250 500	0,05 0,35	0,34	250
Ajaokuta- Agnebode	2250	10	62,5 125 250	0,64 1,07	0,45	62,5
Ajaokuta- Agnebode	1500	20	62,5 125 250	2,16 2,76	0,60	
Rockey- Section	13000	2,5	125 250 500	0 0,05	0,17	250
Rockey- Section	7000	5	125 250 500	0,10 0,15	0,26	250

A P P E N D I X V I I I

Bepaling van de relatieve
fout in de dempingstijd
(r_{t_d}) ten gevolge van
fouten in een aantal fy-
sische parameters.

APPENDIX VIII

Zoals uit hoofdstuk 9 blijkt kan met behulp van de kwadratische voortplantingswet van fouten een goede afschatting worden gemaakt van de relatieve fout in de dempingstijd van een gebaggerd gat. Alvorens met de in de paragrafen § 9-4.1. ~~en~~ § 9-4.3 gegeven formules de waarde voor τ_d te kunnen berekenen, moeten de fouten in de fysische parameters bekend zijn.

De fouten in de fysische parameters

I) Voor de relatieve fout in de geschematiseerde rivierbreedte (B) wordt 5% geschat.

$$\text{II) } i_b = \Delta z / L$$

i_b	= het bodemverhang	[—]
Δz	= het bodemverval	[m]
L	= de lengte van het riviertraject	[m]

$$\tau_L = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1000}{74000} = 0,01 \quad \text{en} \quad \tau_z = \frac{\Delta \Delta z}{\Delta z} = \frac{0,5}{1,47} = 0,07$$

De waarden voor ΔL en $\Delta \Delta z$ zijn geschat.

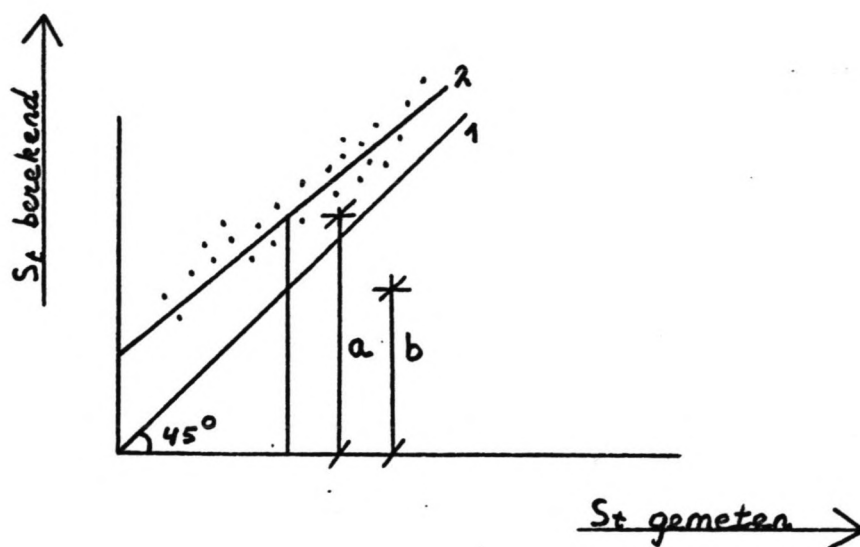
Met behulp van de kwadratische voortplantingswet van fouten volgt:

$$\tau_{i_b} = (\tau_{\Delta z}^2 + \tau_L^2)^{1/2}$$

Voor de relatieve fout in het bodemverhang (i_b) wordt 7% gevonden.

III) De relatieve fout in de totale ruwheid (C) wordt geschat op 5%.

IV) Bij de morfologische berekeningen wordt gebruik gemaakt van de sedimenttransport-formule van Meijer-Peter en Müller (zie hoofdstuk 2). De formule is te schrijven als $S_t = k \phi(B, a, C)$. De fout in de constante k kan bepaald worden met behulp van de gemeten en berekende waarden voor S_t bij Q dominant.



- lijn 1 $\longrightarrow$ S_t gemeten = S_t berekend
 lijn 2 $\longrightarrow$ lijn met behulp van lineaire regressie getrokken door de uitgezette punten.

In tabel 4-4 is te zien dat het gemeten sedimenttransport bij dominante afvoer $\approx 10 \pm 10^3$ m³/dag bedraagt. Uit figuur 2-12 is de waarde voor a op te meten. Met de formule $r_K = \{(a-b)/b\} \times 100\%$ volgt voor r_K de waarde van 11%.

Samenvattend:

FYSISCHE PARAMETER	RELATIEVE FOUT
rivierbreedte (B)	5 %
bodemverhang (i_b)	7 %
totale ruwheid (C)	5 %
constante sed. tr. for. (k)	11%

Met formule 9-4.1 is voor de relatieve fout in de waterdiepte een waarde van 5% uit te rekenen. Vervolgens wordt met de formules 9-4.7 de relatieve fout in de karakteristieke voortplantingssnelheid (c_b) bepaald. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een Z-waarde van 0,076 die met formule 9-4.6 en onderstaande waarden voor de verschillende parameters berekend is.

$$K_s = 2,76 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d_{50} = 0,78 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta = 1,68$$

$$Q = 9417 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$i_b = 10,5 \times 10^{-5}$$

$$a = 7,05 \text{ m}$$

$$B = 1255 \text{ m}$$

Met een waarde voor τ_{cb} van 29% en formule 9-4.9 is tenslotte de relatieve fout in de dempingstijd berekend. Deze blijkt een waarde van 30% te hebben.

A P P E N D I X I X

Overzicht van de in hoofdstuk
nummer 11 uitgevoerde bereke-
ningen met verwijzing naar de
paragraafnummers.

Alle morfologische berekeningen zijn uitgevoerd met $\beta = 0,01$

Paragraaf	Figuur	Reken periode in jaren	Job num- mer	gat- diepte (m)	Δx in (m)	riviertraject waarin verstoring op t=0 is aangebracht
§10-2	11-1	0-10,5	1619	2,5	500	Ajaokuta-Agnebode
		0-10,5	1609	2,5	250	Ajaokuta-Agnebode
		0-10,5	1602	2,5	125	Ajaokuta-Agnebode
		10,5-25	1880	2,5	250	Ajaokuta-Agnebode
§10-2	11-2	0-10,5	4554	5	500	Ajaokuta-Agnebode
		0-10,5	4544	5	250	Ajaokuta-Agnebode
		0-10,5	4549	5	125	Ajaokuta-Agnebode
		10,5-25	1877	5	250	Ajaokuta-Agnebode
§10-2	11-3	0-10,5	6257	10	250	Ajaokuta-Agnebode
		0-10,5	6255	10	125	Ajaokuta-Agnebode
		0-10,5	639	10	62,5	Ajaokuta-Agnebode
		10,5-25	7164	10	62,5	Ajaokuta-Agnebode
§10-2	11-4	0-10,5	515	20	250	Ajaokuta-Agnebode
		0-10,5	509	20	125	Ajaokuta-Agnebode
		0-10,5	2818	20	62,5	Ajaokuta-Agnebode
§10-2	11-5	0-10,5	2905	2,5	500	Rockey-Section
		0-10,5	5252	2,5	250	Rockey-Section
		0-10,5	2901	2,5	125	Rockey-Section
		10,5-25	8609	2,5	250	Rockey-Section
§10-2	11-6	0-10,5	2973	5	500	Rockey-Section
		0-10,5	2969	5	250	Rockey-Section
		0-10,5	2965	5	125	Rockey-Section
		10,5-25	8612	5	250	Rockey-Section
§10-2	11-7	0-10,5	542		500	riv. verbr. Aj.-Agn.
		0-10,5	530		250	riv. verbr. Aj.-Agn.
		0-10,5	537		125	riv. verbr. Aj.-Agn.
		10,5-25	5675		250	riv. verbr. Aj.-Agn.

Stuwkromme berekeningen op $t=0$ over de gebaggerde gaten
zoals getekend in figuur 11-1 tot en met figuur 11-6.

Paragraaf	figuur	job nummer	gat diepte (m)	Δx (m)	riviertraject waarin gebaggerd gat is gelegen
§ 10-2	11-1	2625	2,5	250	Ajaokuta-Agnebode
§ 10-2	11-2	3755	5	250	Ajaokuta-Agnebode
§ 10-2	11-3	3785	10	250	Ajaokuta-Agnebode
§ 10-2	11-4	3789	20	250	Ajaokuta-Agnebode
§ 10-2	11-5	3728	2,5	250	Rockey-Section
§ 10-2	11-6	3744	5	250	Rockey-Section

LITERATUURLIJST

Vreugdenhil, C.B. en de Vries, M. (1973) --Analytical approaches to non-steady bedload transport; publicatie nr. 578 deel IV, Waterloopkundig Laboratorium Delft.

Vreugdenhil, C.B. (1977) - Use of computer for hydraulic engineering problems; publicatie nr. 185, Waterloopkundig Laboratorium.

Vreugdenhil, C.B. (1979) - Waterloopkundige berekeningen I; collegedictaat b 84, T.H. Delft.

Vreugdenhil C.B. (1981) - Numerical effects in models for river morphology (nog niet gepubliceerd).

De Vries M. (1976) - Morphological computations; collegedictaat f 10 A, T.H. Delft.

Warming R.F. en Hyett B.J. (1974) - The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods, Journal of Computations en Physics 14,2, 159-179.

