

waterloopkundig laboratorium
delft hydraulics laboratory

stormvloedkering Oosterschelde

drukken aan de bovenzijde van de asfalt-
mastieklaag van de stortebedden

AFGEHANDELD

verslag modelonderzoek

M 1673

december 1980

- 8 JULI 1981

BIBLIOTHEEK
Waterloopkundig Laboratorium
Postbus 177 - D

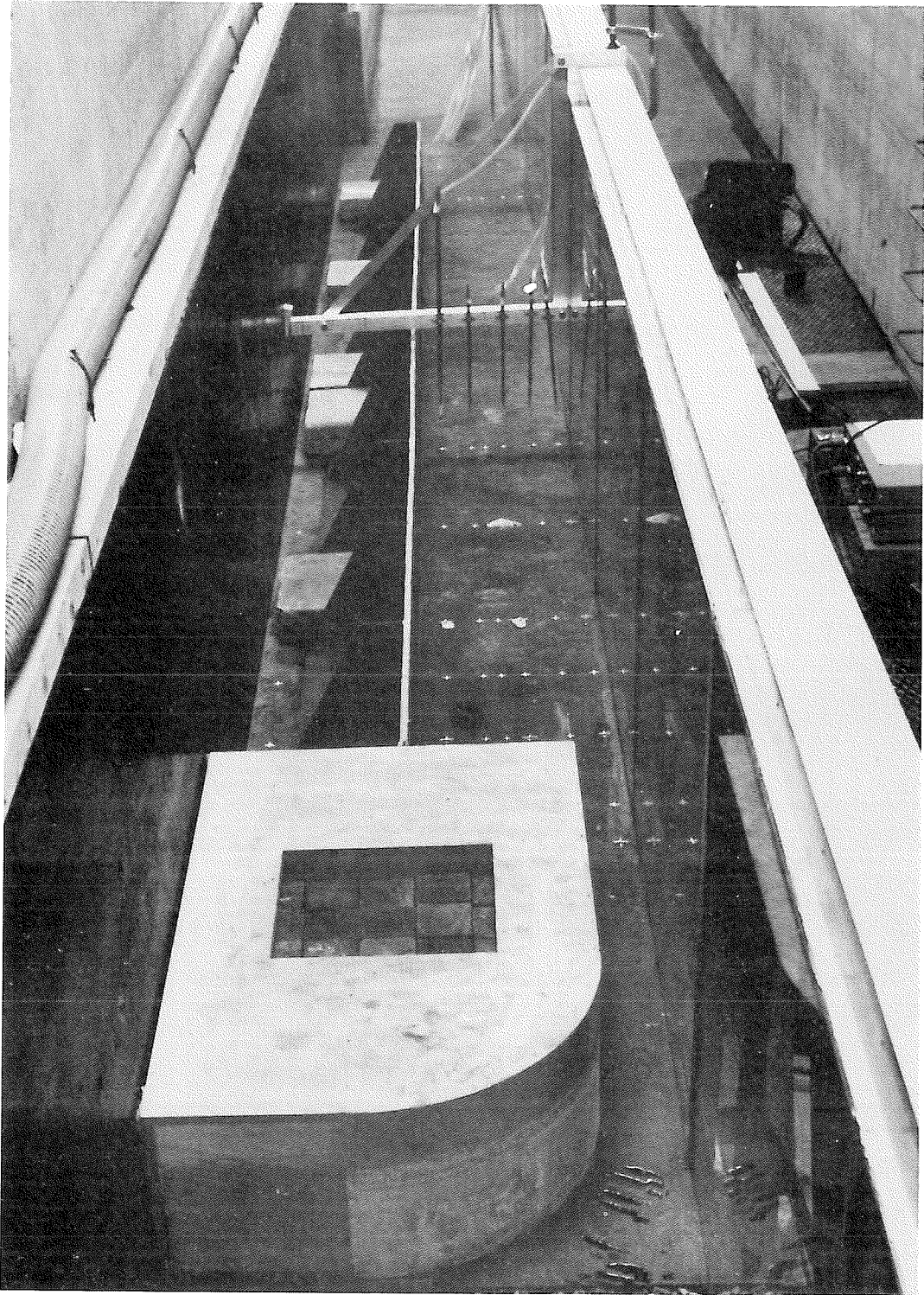
stormvloedkering Oosterschelde

drukken aan de bovenzijde van de asfalt-
mastieklaag van de stortebedden

verslag modelonderzoek

M 1673

december 1980



Proefopstelling plotselinge verwijding.

INHOUD

	blz.
1. <u>Inleiding</u>	1
2. <u>Ontwerpfilosofie</u>	2
2.1 Keuze los gestort stortebed of asfaltmastiek.....	2
2.2 Horizontale dimensionering.....	2
2.3 Vertikale dimensionering.....	4
3. <u>Conclusies</u>	6
4. <u>Drukken aan de bovenzijde van de asfaltlaag</u>	8
4.1 Gemeten drukverloop.....	8
4.2 Horizontaal stroombeeld.....	9
4.2.1 Impulsvergelijking.....	9
4.2.2 Onderzoek in schaalmodel.....	11
4.2.3 Onderzoek in mathematisch model.....	12
4.2.4 Conclusie.....	13
4.3 Vertikaal stroombeeld.....	14
4.3.1 Drukken bij de bodem.....	14
4.3.2 Afwijking van de hydrostatische druk.....	14
4.3.3 Verloop waterspiegel.....	16
4.3.4 Conclusie.....	17
5. <u>Slotopmerkingen</u>	19

Literatuur

Bijlage 1: Het k- ϵ turbulentiemodel

Bijlage 2: Berekening van de kromtestraal van stroomlijnen boven een knik in de bodem.

TABELLEN

- 1 Berekening verval bij plotselinge verwijding
- 2 Berekening verloop waterspiegel uit verandering impuls
- 3 Berekening afwijking van de hydrostatische druk bij de bodem

FIGUREN

- 1 Meetresultaten, $V_1 \approx 5$ m/s
- 2 Meetresultaten, $V_1 \approx 10$ m/s
- 3 Verloop stroomsnelheden in raai A
- 4 Verloop stroomsnelheden in raai B
- 5 Verloop waterspiegel in raai A
- 6 Verloop totale impuls en afgeleide waterspiegel, $V_1 \approx 5$ m/s
- 7 Verloop totale impuls en afgeleide waterspiegel, $V_1 \approx 10$ m/s
- 8 Snelheidsveld in mathematisch model, $V_1 \approx 5$ m/s
- 9 Waterspiegel in mathematisch model, $V_1 \approx 5$ m/s
- 10 Afwijking van de hydrostatische druk bij de bodem
- 11 Resulterende opwaartse druk

STORMVLOEDKERING OOSTERSCHELDE

DRUKKEN AAN DE BOVENZIJDEN VAN DE ASFALTMASTIEKLAAG VAN DE STORTEBEDDEN

1. Inleiding

In het kader van het onderzoek ten behoeve van de stormvloedkering van de Oosterschelde, is uitgebreid theoretisch en experimenteel onderzoek verricht naar de stabiliteit van een bodemverdediging, bestaande uit asfaltmastiek.

Het zwaartepunt van het onderzoek heeft gelegen op de verticale dimensionering van de asfaltlaag, met andere woorden de dikte van de laag en de vraag of de laag wel of niet zou moeten worden bestort met stortsteen. Door onderzoek te verrichten naar de te verwachten opwaartse drukken en naar de sterkte-eigenschappen van de asfaltlaag kon een antwoord worden gegeven op bovenstaande vraag.

In hoofdstuk 2 wordt nader ingegaan op de ontwerp-filosofie, die ten grondslag ligt aan het ontwerp van de asfalt-mastieklaag. In hoofdstuk 4 wordt nader ingegaan op de details van de uitgevoerde theoretische en experimentele onderzoeken.

In samenwerking met de Hoofdafdeling Waterloopkunde van de Deltadienst, is het onderzoek uitgevoerd door ir. A.F.F. de Graauw van het Waterloopkundig Laboratorium. Hij heeft tevens dit verslag samengesteld.

2. Ontwerpfilosofie

2.1 Keuze losgestort stortbed of asfaltmastiék

De functie van de bodemverdediging aan weerszijden van de stormvloedkering is het vormen van een zanddichte bescherming van de bodem; gebruikelijke constructies bestaan uit granulaire filters, of uit kunststoffilters, afgestort met stortsteen. Beide typen constructies zijn dus zanddicht, maar waterdoorlatend. In geval van zware stroomaanval, zoals bij een weigerende schuif in de stormvloedkering moet de toplaag van een dergelijke verdediging uit zware stortsteen bestaan (massa van enkele tonnen). Hierdoor moet de filterconstructie uit een groter aantal lagen bestaan en lopen de kosten aanzienlijk op.

Een geheel ander type constructie bestaat uit een asfaltmastiéklaag, die dus zowel waterdicht als zanddicht is. Het voordeel van deze constructie is dat deze relatief goedkoop is en bestand is tegen hoge stroomsnelheden (mits de nodige uitvoeringseisen in acht worden genomen). Het nadeel komt voort uit het waterdichte karakter van de verdediging, omdat hierdoor opwaartse drukken voor oplichting van de laag kunnen zorgen. Deze opwaartse drukken kunnen zowel uit de ondergrond komen (drukkracht onder de asfaltlaag), als van de stroming zelf (zuigkracht boven de asfaltlaag). Indien dus deze opwaartse drukken zodanig beperkt zijn dat de asfaltlaag niet wordt opgebroken, levert asfaltmastiék een uitstekende bodemverdediging op. Indien de opwaartse drukken te veel zouden oplopen, dan zou altijd nog (lokaal) tot bestorten van de asfaltlaag kunnen worden overgegaan. In dat geval zou niet het volle financiële voordeel worden behaald, maar op het moment van de keuze voor een verdediging bestaande uit asfaltmastiék (begin 1979), werd verwacht dat er zeker een groot financieel voordeel zou overblijven.

2.2 Horizontale dimensionering

Dit onderdeel van de dimensionering wordt hier slechts volledigheidshalve genoemd. Het hiervoor uitgevoerde onderzoek is reeds elders gerapporteerd [8, 9, 10, 11, 12] . In het onderhavige verslag zal slechts de ontwerp-filosofie worden weergegeven, alsmede de grote lijnen van de resultaten.

Onder horizontale dimensionering wordt verstaan het bepalen van het begin en het einde van de asfaltlaag als functie van de sluitgatllocatie.

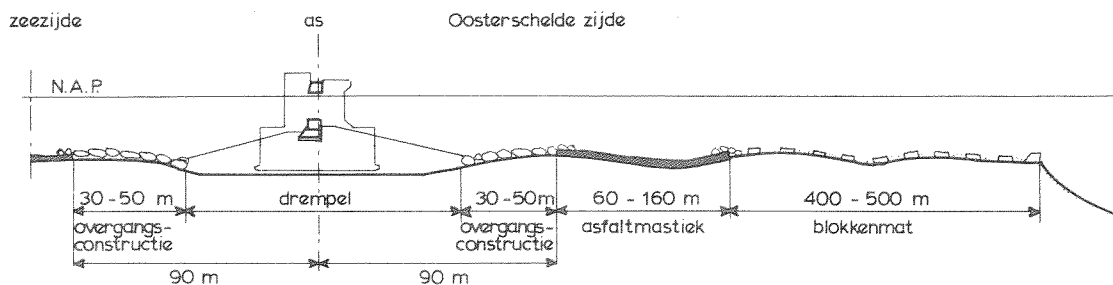
Het einde van de asfaltlaag is bepaald aan de hand van een afgeleid criterium, namelijk het zanddichtheids criterium van de blokkenmat. De blokkenmat vormt de bodembescherming op grotere afstand van de kering en moet uiteraard zanddicht zijn. Er wordt verondersteld dat de zanddichtheid van de blokkenmat verloren gaat wanneer de staalslakken, die als ballast fungeren tussen de blokken, door de stroomsnelheid instabiel worden. Uit proeven is gebleken dat op de locaties waar stortsteen 60 - 300 kg nog stabiel is, na het optreden van een situatie met weigerende schuif nog minimaal 110 kg/m^2 staalslakken op de mat aanwezig is [13]. Uitgaande hiervan is het einde van het asfaltmestiek (c.q. het begin van de blokkenmat met staalslakken) bepaald aan de hand van de stabiliteit van stortsteen 60 - 300 kg.

Dit onderzoek vond plaats in het detailmodel van de sluitgaten van de Oosterschelde (M 1001). In dit drie-dimensionale model van de stormvloedkering, werd voor een groot aantal sluitgatlocaties de benodigde lengte van de asfaltmestieklaag bepaald [2, 10, 11].

Het begin van de asfaltmestieklaag werd bepaald door het feit dat een waterdoorlatende "overgangsconstructie" benodigd was tussen de drempelsteen en de bodemverdediging. Tijdens het ontwerpen van het stortebed stond namelijk, nog niet geheel vast dat de toplaag van de drempel niet uit een gesloten laag (asfalt) zou gaan bestaan. In een dergelijk geval was een waterdoorlatende overgangsconstructie van enkele tientallen meters van groot belang, om opwaartse drukken onder het verder benedenstrooms liggende asfaltmestiek te reduceren.

Gekozen is voor een begin van het asfaltmestiek op 90 m uit de as van de kering in alle sluitgaten. Afhankelijk van de sluitgatlocatie, betekent dit dat het begin van het asfaltmestiek op 30 à 50 m vanaf de drempelsteen ligt.

Schematisch kan de horizontale dimensionering van de verschillende bodembeschermingen in de omgeving van de stormvloedkering, als volgt worden weergegeven:



2.3 Vertikale dimensionering

Onder verticale dimensionering wordt verstaan het gewicht dat voor de asfaltlaag benodigd is (met eventuele bestorting) teneinde de opwaartse krachten te kunnen weerstaan.

De vraag die zich dan onmiddellijk voordoet is welke vervorming van het asfaltmestiek wordt toegelaten. Er kunnen verschillende criteria worden genoemd:

- a de asfaltlaag moet altijd op de bodem aansluiten. Met andere woorden het gewicht moet altijd groter zijn dan de opwaartse druk,
- b de asfaltlaag mag over een beperkt gebied enigszins worden opgelicht, zodat een waterbel wordt gevormd. In dit geval gaan de sterkte-eigenschappen van de asfaltlaag en grondwaterstromingen naar de bel een belangrijke rol spelen.

Er is uitdrukkelijk voor het tweede criterium gekozen, waardoor de ontwerp-berekeningen lastiger worden. De bezwijkmechanismen van de asfaltlaag vallen verder buiten het bestek van dit verslag. Aanvullende informatie is in [1] gegeven. In het onderhavige verslag zal de aandacht worden gericht op de grootte van de opwaartse drukken op de asfaltlaag.

Er wordt van uitgegaan dat de asfaltlaag één geheel vormt en derhalve als een doorgaand waterdicht vlies kan worden beschouwd. Onvolkomenheden in de laag, die het gevolg zouden zijn van de uitvoeringsmethoden, vallen eveneens buiten het bestek van dit verslag. Er zullen wel enkele eisen aan de uitvoering kunnen worden gesteld (hoofdstuk 5).

Rest dus nu de vraag hoe groot de opwaartse drukken op de asfaltmestieklaag zijn. In eerste instantie moet een onderscheid worden gemaakt tussen de situatie van een volledig gesloten kering en de situatie van een gesloten kering met een weigerende schuif. Als randvoorwaarden zijn vervallen van respectievelijk 6,2 en 4,2 m aangehouden. Bij weigerende schuif wordt een kleiner verval gehanteerd teneinde rekening te houden met de kleine kans op voorkomen van een weigerende schuif.

In het geval van een volledig gesloten kering bestaat de opwaartse druk geheel uit de druk die via het grondwater vanaf de zeezijde tot onder de asfaltlaag doordringt. Aangezien de grondwaterstroming zeer goed door een potentiaalstroom

wordt benaderd, kan deze druk uit metingen in een elektrisch analogon worden bepaald. De resultaten van dit onderzoek zijn in [2] samengevat.

In het geval van een weigerende schuif, levert het stroombeeld boven de asfaltlaag eveneens een bijdrage aan de opwaartse druk op de asfaltlaag. Het bepalen van deze bijdrage is nu het onderwerp van dit verslag. In hoofdstuk 4 zal hierop worden ingegaan.

De resulterende opwaartse druk volgt dan tenslotte uit superpositie van de opwaartse drukken tengevolge van de vrije stroming boven de asfaltlaag en van de grondwaterstroming onder de asfaltlaag. Aan de hand daarvan kunnen dan de sterkteberekeningen van de asfaltlaag worden gemaakt voor verschillende dikten van de laag. Afhankelijk van de daaruit verkregen vervormingen en de toegelaten vervormingen kan worden beslist of de asfaltlaag lokaal moet worden geballast door middel van stortsteen.

Uit het onderhavige én de overige onderzoeken (zie literatuur) kunnen de volgende algemene conclusies worden getrokken met betrekking tot de toepassing van asfaltmastiek als bodemverdediging:

- a een bodemverdediging tegen stroomaanval, bestaande uit een dunne laag asfaltmastiek, blijkt zowel in technisch als in economisch opzicht een aantrekkelijke constructie te zijn. Er dienen echter hoge eisen aan de uitvoering te worden gesteld, zodat de asfaltmastiek-laag één geheel gaat vormen en een redelijk uniforme dikte krijgt,
- b bij de horizontale dimensionering van de asfaltlaag, wordt het einde ervan bepaald door de stabiliteit onder stroomaanval van de verder benedenstrooms liggende bodembescherming. Het is van belang juist bovenstrooms van het begin van de asfaltlaag een waterdoorlatende filterconstructie aan te leggen om de opwaartse drukken onder de asfaltlaag te beperken.

3. Conclusies

De volgende conclusies kunnen uit het onderhavige onderzoek worden getrokken:

- 1 De opwaartse drukken op de asfaltlaag kunnen bij de verticale dimensionering worden onderverdeeld naar herkomst. De opwaartse drukken tengevolge van de grondwaterstroming kunnen met behulp van een elektrisch analogon worden bepaald. De opwaartse (zuig-)drukken tengevolge van het stroombeeld boven de asfaltlaag kunnen door middel van berekeningen, aangevuld door metingen in een model, worden benaderd.
- 2 De opwaartse drukken tengevolge van het stroombeeld boven de asfaltlaag, worden enerzijds veroorzaakt door het horizontale stroombeeld (spreiding van de straal en oplopen van de waterspiegel in stroomrichting) en anderzijds door het verticale stroombeeld (kromme stroomlijnen en verloop van de waterspiegel tengevolge van variatie in bodemligging).
- 3 In de omgeving van het begin van de asfaltlaag is het horizontale stroombeeld van ondergeschikt belang ten opzichte van het verticale stroombeeld. Drukmetingen bij de bodem in een smalle goot zullen derhalve, in dat gebied, een redelijke benadering leveren van de werkelijke drukken. Verder benedenstrooms zullen de afwijkingen groter worden, omdat in de goot het oplopen van de waterspiegel groter is. Drukmetingen in een smalle goot dienen derhalve altijd gepaard te gaan met een degelijke meting van de stroomsnelheden en van de waterspiegel teneinde controleberekeningen te kunnen uitvoeren.
- 4 De opwaartse drukken op de asfaltlaag zijn hoofdzakelijk afhankelijk van:
 - a de knikken in de bodem (hoek en afronding),
 - b het begin en het einde van de asfaltlaag in relatie tot de ligging van de knikken (terugkoppeling naar horizontale dimensionering),
 - c de stroomsnelheidsverdelingen (vertikaal en horizontaal).
- 5 De berekeningen geven een geschematiseerde situatie weer. In het prototype zullen, naar verwachting, opwaartse drukken van maximaal 0,30 à 0,50 m waterkolom (lokaal) kunnen optreden, hetgeen inhoudt dat lokaal de opwaartse druk het aanwezige gewicht ($\approx 0,25$ m waterkolom) van de asfaltlaag overtreft.
- 6 Indien wordt gekozen voor een ontwerp-filosofie waarin beperkte oplichting van de asfaltlaag wordt toegestaan, dan moeten hoge eisen aan de kwaliteit van

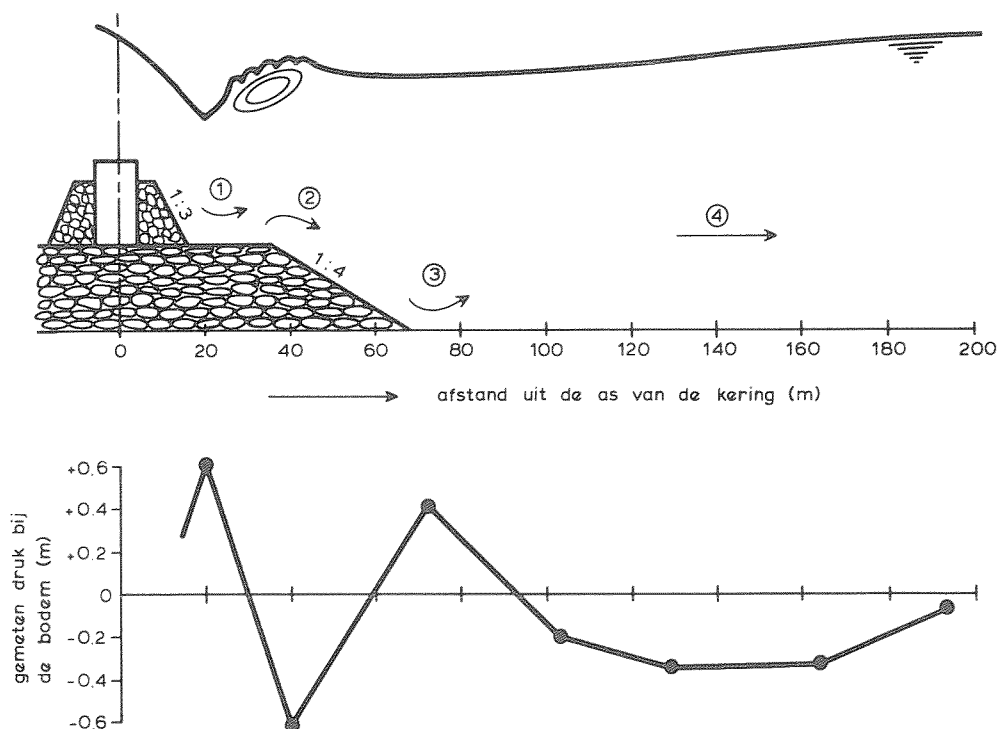
die laag worden gesteld:

- de asfaltlaag moet overal aanwezig zijn en van redelijk uniforme dikte zijn. Gaten van bepaalde minimale afmetingen kunnen tot bezwijken van de stormvloedkering leiden ingeval van een weigerende schuif,
- de asfaltlaag moet als een geheel functioneren. De verschillende stroken waaruit de asfaltlaag bestaat, moeten dus goed aan elkaar hechten. Aanwezigheid van zandlenzen tussen de stroken is niet toegestaan,
- door de stroken vanuit beide oevers aan te leggen ontstaat bij weigerende schuif de kleinste belasting op de overlappen van de stroken.

4. Drukken aan de bovenzijde van de asfaltlaag

4.1 Gemeten drukverloop

Reeds begin 1978 werden drukken gemeten aan de bovenzijde van de asfaltlaag [6]. De metingen vonden plaats met behulp van drukdozen in een 5 m brede goot (de Pentagoot), waarin een drie-dimensionaal deel van de stormvloedkering op schaal 1:30 was ingebouwd. In de onderstaande schets is een overzicht gegeven van de gemeten drukken bij de bodem, in de as van de straat, bij een arbitrair gekozen verval van 7 m over de kering (deze keuze vond plaats vóór de definitieve keuze van de extreme randvoorwaarden).



Deze resultaten konden eerst niet bevredigend worden verklaard. Na uitgebreid onderzoek, waarop in de volgende paragrafen zal worden ingegaan, werden de volgende zones onderscheiden:

- zone 1: hoge druk tengevolge van omhoog gekromde stroomlijnen,
- zone 2: lage druk tengevolge van omlaag gekromde stroomlijnen,
- zone 3: hoge druk tengevolge van omhoog gekromde stroomlijnen,
- zone 4: hydrostatische drukverdeling mag worden aangenomen, de toename van de druk bij de bodem is het gevolg van het oplopen van de waterspiegel tengevolge van horizontale spreiding van de straat.

Tot de drempelteen (zones 1, 2 en 3), worden de drukken bij de bodem voornamelijk beheerst door het vertikale stroombeeld. De straal spreidt niet in horizontale richting en het hart van de straal kan worden vergeleken met de zogenaamde "potential core" uit de straal-theorie [5].

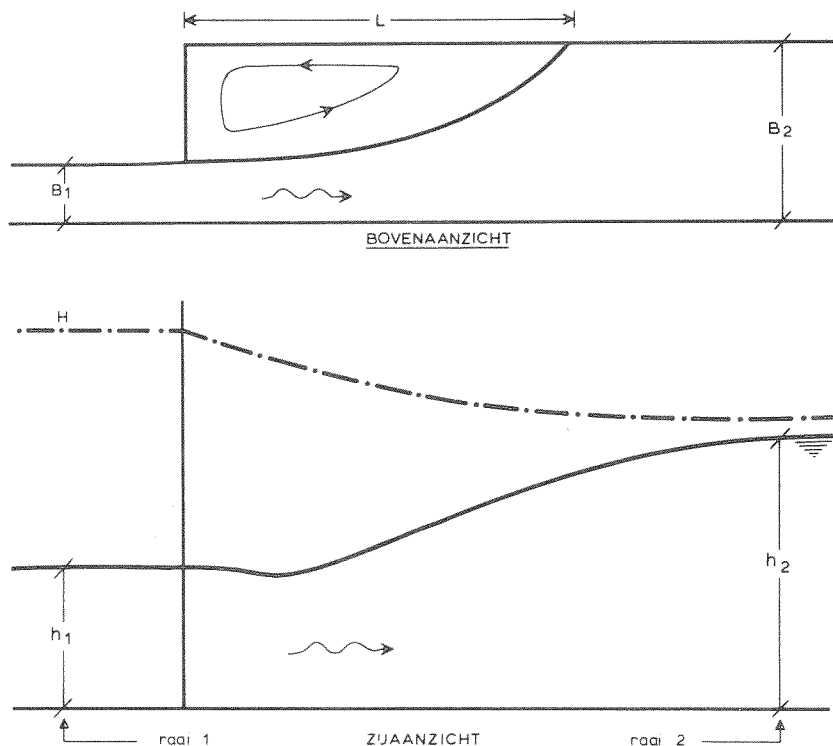
Boven de asfaltlaag (zone 4) wordt het stroombeeld overheerst door de horizontale spreiding van de straal. Bij een horizontale bodem, zoals in bovenstaande schets, leidt dit tot een oplopende waterspiegel. Indien de bodem zelf oploopt, dan kan, tengevolge van de snelheidstoename (wet van Bernoulli), de resulterende waterspiegel toch nog aflopen in stroomrichting.

In zone 4 zijn modeffecten te verwachten tengevolge van de beperkte breedte van de goot. Dit zal niet het geval zijn in de zones 1, 2 en 3. Het genoemde modeffect in zone 4 werd gekwantificeerd door middel van theoretisch en experimenteel onderzoek aan het horizontale stroombeeld.

4.2 Horizontaal stroombeeld

4.2.1 Impulsvergelijking

De horizontale spreiding van de straal benedenstrooms van de kering kan worden vergeleken met een plotselinge verwijding in een goot met horizontale bodem.



De impulsvergelijking tussen raai 1 en 2 uit de bovenstaande schets leidt tot:

$$\frac{1}{2}\rho g B_2 h_1^2 - \frac{1}{2}\rho g B_2 h_2^2 = -\rho h_1 B_1 V_1^2 + \rho h_2 B_2 V_2^2 \quad (1)$$

Na enige wiskundige bewerkingen en introductie van de continuïteitsvergelijking:

$$B_1 h_1 V_1 = B_2 h_2 V_2 = Q \quad (2)$$

volgt:

$$h_2^3 - \left(h_1^2 + \frac{2Q^2}{g B_1 B_2 h_1}\right) h_2 + \frac{2Q^2}{g B_2^2} = 0 \quad (3)$$

waarin:

Q	= debiet	(m ³ /s)
h ₁	= bovenstroomse waterdiepte	(m)
h ₂	= benedenstroomse waterdiepte	(m)
B ₁	= bovenstroomse breedte	(m)
B ₂	= benedenstroomse breedte	(m)
g	= versnelling van zwaartekracht	(m/s ²)

Vergelijking (3) is een 3e graads vergelijking, waaruit h₂ als functie van de overige parameters is op te lossen.

Het blijkt dat het verval (h₂-h₁) een functie is van de verhouding B₁:B₂. Van belang is dat (voor B₁:B₂ < 1:2) het verval (h₂-h₁) áfneemt bij afnemende waarde van B₁:B₂. Dit betekent dat in een smalle goot de horizontale spreiding een grotere oploop van de waterspiegel tot gevolg heeft dan in een bredere goot. Aangezien in het beschouwde gebied (zone 4) de druk hydrostatisch verloopt geldt het bovenstaande dus ook voor de drukken aan de bodem.

De impulsvergelijking (3) kan slechts een beeld geven van het te bereiken verval tussen twee raaien (1 en 2) waar de stroomsnelheden uniform verdeeld zijn. Het verloop van de waterspiegel tussen deze raaien blijft daarmee onbekend. Dit verloop is echter wel van belang aangezien de asfaltlaag minder lang is dan de afstand tussen de raaien 1 en 2.

Teneinde het verloop van de waterspiegel tussen de raaien 1 en 2 te bepalen werden enkele modelproeven uitgevoerd en werden berekeningen met een mathematisch model uitgevoerd.

4.2.2 Onderzoek in schaalmodel

In een 0,75 m brede goot (de Tussenpadgoot) zijn proeven uitgevoerd met drie verschillende plotselinge verwijdingen (zie foto). De verhouding $B_1:B_2$ was achter-eenvolgens gelijk aan 1:2, 1:3,3 en 1:6. De verhouding 1:3,3 komt overeen met de verhouding zoals in de Pentagoot is ingebouwd. De schaalfactor van het model, gebaseerd op de bovenstroomse breedte B_1 , was $n_1 = n_h = 180$. Gezien het symmetrische karakter van het stroombeeld in horizontale richting, is de gootwand in de as van de straal gekozen. De waterdiepte aan de benedenstroomse zijde was in alle gevallen gelijk aan 27 m (prototype). De proeven zijn uitgevoerd met 2 bovenstroomse stroomsnelheden $V_1 = 5$ en 10 m/s.

In een groot aantal punten zijn de volgende grootheden gemeten:

- stroomsnelheid, gemiddeld over de hoogte, uitgedrukt in verhouding tot de instroomsnelheid V_1 ,
- ligging van de waterspiegel ten opzichte van de benedenwaterstand.

De snelheidsmetingen zijn uitgevoerd met behulp van een micromolen. De aanloop-snelheid hiervan is 0,40 m/s (prototype). Bij de grote snelheden in de hoofdstroom en de neer is de nauwkeurigheid van de meting $\pm 1\%$. In het hart van de neer en de wervelstraat tussen hoofdstroom en neer is de nauwkeurigheid veel kleiner door de relatief kleine snelheden (aanloopsnelheid), respectievelijk de grote turbulentie. In de hoofdstroom was de middelingstijd gelijk aan ca. 50 s, in de wervelstraat en het hart van de neer bedroeg deze 100 à 200 s.

De snelheidsvertikalen bestonden uit 3 punten op 20%, 45% en 80% van de benedenstroomse waterdiepte (27 m prototype).

In de figuren 1 en 2 zijn alle meetgegevens verzameld.

In de figuren 3 en 4 is het verloop van de stroomsnelheden in respectievelijk raai A (as van de straal) en raai B (bij de wand) weergegeven. In deze figuren is tevens het resultaat van de berekeningen met het mathematische model opgenomen, hierop wordt in de volgende paragraaf teruggekomen. Uit figuur 3 kan worden gezien dat in de directe omgeving van de verwijding de stroomsnelheid eerst niet afneemt. Uit figuur 4 is een schatting van de neerlengte en van de maximale retoursnelheid in de neer af te leiden:

$B_1:B_2$	neerlengte (l) $(B_2-B_1):1$	max. retoursnelh. (V_r) V_r/V_1
1:2	1:6,7	0,18
1:3,3	1:6,7	0,22
1:6	1:6,9	0,35

Het blijkt dat de neerlengte vrij eenduidig is als functie van de stapgrootte ($B_2 - B_1$). De maximale retoursnelheid varieert globaal tussen $1/5$ en $1/3$ van de uitstroomsnelheid V_1 afhankelijk van de stapgrootte.

In figuur 5 is het verloop van de waterspiegel in de as van de straal weergegeven. Het blijkt dat de waterspiegel een S-vormig verloop heeft. In de direkte omgeving van de verwijding zakt de waterspiegel zelfs enigszins. Gecombineerd met de reeds genoemde kleine snelheidsafname, leidt dit tot een gering energieverlies in de direkte omgeving van de verwijding.

Toepassing van de impulsvergelijking (3) laat zien dat het verval ($h_2 - h_1$) goed wordt voorspeld, mits de wandwrijving in de berekening wordt meegenomen. De wandwrijving leidt tot een reductie van het berekende verval. Deze reductie is gelijk aan:

$$\Delta h_w = \frac{L V^2}{C^2 R} \quad (4)$$

waarin:

L = beschouwde afstand = 900 m

V^2 = gemiddelde stroomsnelheid = $1/2 (V_1^2 + V_2^2)$

met: V_1 = gemeten instroomsnelheid

V_2 = berekend uit continuïteit

= $Q/B_2 h_2$

R = hydraulische straal = $B_2 h_2 / (B_2 + 2h_2)$

C = ruwheid = $65 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$

In tabel 1 is het resultaat van de berekeningen gegeven. Vergelijking van beide laatste kolommen toont aan dat de voorspelling redelijk is.

De verandering van impuls tussen de diverse raaien, waarin in het model de stroomsnelheden zijn gemeten, maakt het mogelijk de consistentie van de gemeten stroomsnelheden en waterspiegels na te gaan. In tabel 2 is voor de onderzochte situaties de impuls per tijdseenheid in de verschillende dwarsraaien gegeven. Deze impuls is over de hoogte (z) en de breedte (y) van de goot geïntegreerd. De daaruit te berekenen waterspiegels zijn dus gemiddelden over de breedte van de goot. De resultaten zijn in figuur 6 en 7 weergegeven. Gezegd mag worden dat het stroombeeld, in het licht van de impulsvergelijking, op een enkele uitzondering na consistent is.

4.2.3 Onderzoek in mathematisch model

Toegepast is een (nog) experimenteel "k- ϵ turbulentie model" waarin het stroombeeld over de vertikaal is geïntegreerd. Karakteristiek voor dit type modellen is dat de turbulente viscositeit (eddy viscosity) een functie is van de kinetische energie van de turbulente snelheidsfluctuaties (k) en van de turbulente dissipatie (ϵ) (zie bijlage 1). Daarin zijn de in de goot onderzochte situaties nagebootst met een instroomsnelheid van 5 m/s. Uit de figuren 3, 4 en 5 blijkt dat het schaalmodel en het mathematisch model analoge resultaten opleveren. In beide modellen zijn dezelfde tendenzen aanwezig met betrekking tot het verloop van de stroomsnelheden en van de waterspiegel. Over het algemeen lijken de processen in het mathematisch model iets sneller te verlopen. Dit is te wijten aan een iets te grote ruwheid in het mathematisch model, ten opzichte van het schaalmodel.

Het mathematisch model heeft voordeel, ten opzichte van het schaalmodel, dat daarin de nauwkeurigheid van het meetinstrument geen rol speelt en dat in een groot aantal punten "gemeten" kan worden. In figuur 8 en 9 is een overzicht gegeven van het snelheidsveld en van de waterspiegel. Met name uit de laatstgenoemde figuur blijkt iets dat de metingen in het schaalmodel niet eenduidig konden aantonen, namelijk dat in het gebied van het hart van de neer een verlaagde waterspiegel aanwezig is. De verlaagde waterspiegel in de neer kan worden gezien als het gevolg van de neerstroming: de komvormige waterspiegel wordt beheerst door de centrifugaalkrachten. De neerstroming zelf wordt aangedreven door de schuifspanningen langs de hoofdstroom.

4.2.4 Conclusie

Uit het onderzoek naar het horizontale stroombeeld kan worden geconcludeerd dat, benedenstrooms van een verwijding, de waterspiegel eerst vrijwel horizontaal verloopt en dan oploopt. De grootte van beide gebieden is een functie van de stapgrootte B_1/B_2 .

Verder bleek dat (voor $B_1:B_2 < 1:2$) de oploop van de waterspiegel kleiner wordt bij afnemende grootte van $B_1:B_2$.

Uit beide aspecten volgt dat de oploop van de waterspiegel in een smalle goot groter zal zijn dan in het prototype.

Uit het stroombeeldonderzoek in het detailmodel van de sluitgaten is gebleken

dat, boven het gebied waar de asfaltmastieklaag komt te liggen, de waterspiegel nagenoeg horizontaal verloopt: oploop van de waterspiegel niet groter dan 0,10 m over een afstand in stroomrichting van enkele honderden meters [12].

4.3 Vertikaal stroombeeld

4.3.1 Drukken bij de bodem

Wanneer stroomlijnen in het verticale vlak gekromd zijn, ontstaan afwijkingen van de hydrostatische druk. Deze afwijkingen zijn te berekenen met behulp van de formule van Euler (paragraaf 4.3.2).

De volgende stap in de benadering van de drukken bij de bodem, moet dan zijn de bepaling van de als referentieniveau aangehouden hydrostatische druk. Naast de reeds genoemde invloeden van het horizontale stroombeeld (paragraaf 4.2.4), speelt tevens het verloop van de bodem in verticale richting een rol voor de waterspiegel. Het verloop van de waterspiegel kan worden benaderd met de wet van Bernoulli (paragraaf 4.3.3).

4.3.2 Afwijking van de hydrostatische druk

Zoals hierboven gezegd, kan de afwijking van de hydrostatische druk tengevolge van kromme stroomlijnen worden berekend met behulp van de formule van Euler:

$$\Delta h_1 = - \int_{n_1}^{n_0} \frac{V^2}{Rg} dn \quad (5)$$

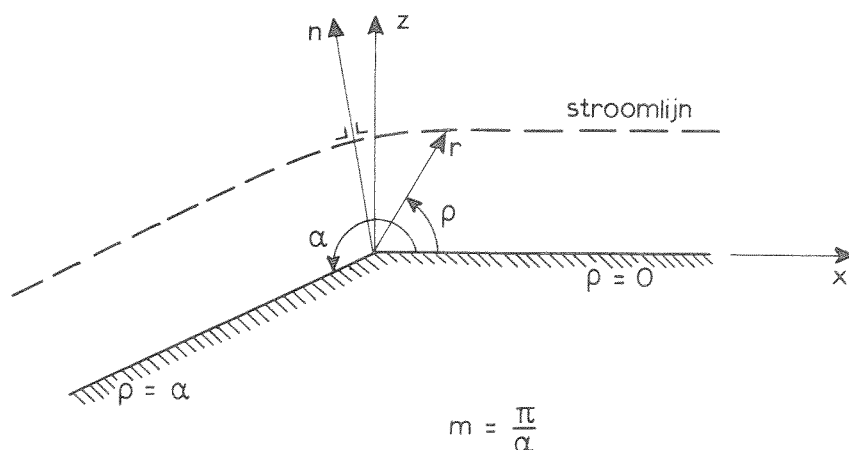
waarin:

Δh_1	= afwijking van de hydrostatische druk op afstand n_1 van de bodem langs de n-as	(m)
n	= richting loodrecht op de stroomlijnen	(m)
n_0	= wateroppervlak	(m)
V	= lokale stroomsnelheid	(m/s)
R	= kromtestraal van de lokale stroomlijnen	(m)
g	= versnelling van de zwaartekracht	(m/s ²)

In vergelijking (5) moeten de waarden van V en R uit modelonderzoek worden afgeleid. De waarde van V zal geen problemen opleveren, aangezien deze rechtstreeks in het model kan worden gemeten. Het is echter vrijwel ondoenlijk om de waarde

van R uit stroombeeldmetingen af te leiden door het geringe aantal meetpunten. Er is derhalve naar andere mogelijkheden gezocht. Er werd gebruik gemaakt van de potentiaaltheorie. In het vertragingengebied benedenstrooms van de weigerende schuif is een grote turbulentie aanwezig, al kan dit nog meevallen door de eerder genoemde "potential core" (paragraaf 4.1). Toepassing van de potentiaaltheorie als geheel zou minstens twijfelachtig kunnen worden genoemd. Een reële aanname is echter wel dat de stroomlijnen vrij redelijk door de potentiaalstroming kunnen worden benaderd.

Toepassing van de potentiaaltheorie op oneindig diep water boven een knik in de bodem levert een analytische relatie op voor de kromtestraal R.



$$R = \frac{r}{m-1} \cdot \frac{\cos^{\frac{3}{2}} \frac{2(m-1)\rho}{3m-4}}{\sin^{\frac{3}{2}} \frac{2(m-1)\rho}{3m-4}} \quad (6)$$

Vergelijking (6) wordt in bijlage 2 afgeleid uit de potentiaaltheorie [3, blz. 69].

Als voorbeeld, wordt in figuur 10 de berekende afwijking van de hydrostatische druk bij de bodem gegeven, bij een aflopende bodem onder helling 1:3 (drempel), dan oplopende bodem onder helling 1:7 (talud cunet) en dan horizontale bodem. De bijbehorende stroomsnelheidsvertikalen, (gemeten in de Pentagoot, M 1451 - T 377), zijn tevens weergegeven. In tabel 3 zijn de benodigde berekeningen uitgevoerd.

Het blijkt dat bij de concave knik in de bodem een overdruk van ca. 0,95 m boven de knik aanwezig is. Boven de convexe knik heerst een onderdruk van ca. 0,35 m.

Opgemerkt wordt dat de berekende afwijkingen van de hydrostatische druk bij de bodem om 2 redenen aan de hoge kant zijn, ten opzichte van het prototype:

- a in het prototype zullen de knikken in de bodem niet scherp zijn, zoals in de berekening is aangenomen. Indien de kromtestraal van de bodem bij de knik bekend is, dan kan de berekening worden uitgevoerd voor de stroomlijn boven de theoretische scherpe knik met dezelfde kromtestraal. Dit betekent dat in vergelijking (5) de waarde van n_1 overeenkomt met een kleine afstand boven de theoretische scherpe knik in de bodem,
- b in het prototype is de waterdiepte niet oneindig, zoals in de berekening is aangenomen. De werkelijke stroomlijnen zijn minder gekromd (vooral bij de waterspiegel). Berekeningen met een beperkte waterdiepte zouden vele malen ingewikkelder zijn dan de nu reeds lange berekeningen (bijlage 2). Er is derhalve hiervan afgezien.

Tenslotte dient te worden herhaald dat de in figuur 10 gegeven resultaten slechts een voorbeeld weergeven van een van de vele mogelijke situaties langs de stormvloedkering. De verwachting is wel dat dit voorbeeld de meest ongunstige situatie weerspiegelt.

4.3.3 Verloop waterspiegel

Tenslotte moet het referentieniveau, ten opzichte waarvan de in 4.3.2 berekende afwijkingen van de hydrostatische druk gelden, worden bepaald.

Indien wordt aangenomen dat het energieverlies in de bovenste stroomlijn (c.q. de waterspiegel), benedenstrooms van de dekneer van de watersprong, klein is, dan kan het verloop van de waterspiegel uit de wet van Bernoulli worden afgeleid.

$$\frac{dh_o}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{V_o^2}{2g} \right) \quad (7)$$

waarin:

h_o	= waterdiepte	(m)
V_o	= stroomsnelheid aan het wateroppervlak	(m/s)
x	= richting evenwijdig aan de stroming	(m)
g	= versnelling van de zwaartekracht	(m/s ²)

De waarde van de stroomsnelheid aan het wateroppervlak V_0 volgt uit de metingen in het model (figuur 10).

Opgemerkt dient te worden dat het op deze wijze gevonden verloop van de waterspiegel, in principe, het resultaat is van zowel de horizontale (spreiding) als van de verticale (eerst spreiding, dan vernauwing) geometrie van de straal, zoals deze in de goot plaatsvindt. Uit paragraaf 4.2.4 bleek reeds dat het waterspiegelverloop tengevolge van de horizontale spreiding in de goot niet geheel overeenkomt met de situatie in het prototype. Deze fout wordt hier dus in de berekening geïntroduceerd, aangezien gebruik wordt gemaakt van de in de goot gemeten stroomsnelheden aan het wateroppervlak. In het gebied in de omgeving van de drempelteen is deze fout echter verwaarloosbaar, omdat ter plaatse nog nauwelijks van enige horizontale spreiding sprake is (deze begint pas verder benedenstrooms, paragraaf 4.2.4).

4.3.4 Conclusie

De resulterende druk bij de bodem volgt tenslotte uit de superpositie van de afwijkingen van de hydrostatische druk op het verloop van de waterspiegel (c.q. de hydrostatische druk). Figuur 11 geeft het resultaat weer. In deze figuur is als "A" de afwijking van de hydrostatische druk gegeven, als "B" het verloop van de waterspiegel en als "C" de grondwaterdruk onder de asfaltlaag. Dit laatste volgt uit metingen in een elektrisch analogon en valt verder buiten het bestek van het onderhavige verslag (zie [1]). De totale druk is als "A+B+C" weergegeven. Het blijkt dat over een groot deel van de aangenomen asfaltlaag, opwaartse drukken van 0,30 à 0,55 m aanwezig zijn.

Hierbij moet echter worden opgemerkt dat de ligging van de asfaltlaag ten opzichte van de as van de kering in figuur 11 niet overeenkomt met de werkelijkheid. Indien het begin van de asfaltlaag verder uit de drempelteen ligt, dan verandert het beeld aanzienlijk.

Om dit in te zien moet worden bedacht dat de grondwaterdruk (lijn "C") dan eveneens verschuift. Indien de asfaltlaag juist bovenstrooms van de convexe knik in de bodem begint kunnen de drukpieken van de lijnen "A" en "C" samenvallen, zodat lokaal een grote opwaartse druk ontstaat. Indien de asfaltlaag benedenstrooms van de convexe knik begint, blijft alleen de grondwaterdruk (lijn "C") als opwaartse druk over.

De verwachting is dat het laatste het geval zal zijn in het prototype, als de asfaltlaag op 90 m uit de as van de kering begint. Afwijkingen van de hydrostatische druk zijn dan toch nog wel denkbaar bij onregelmatigheden in de bodem (ribbels e.d.).

Concluderend kan dus worden gesteld dat de opwaartse drukken op de asfaltlaag vooral afhankelijk zijn van:

- a de knikken in de bodem (hoek en afronding),
- b het begin en het einde van de asfaltlaag in relatie tot de ligging van de knikken,
- c de stroomsnelheidsverdelingen (vertikaal en horizontaal).

5. Slotopmerkingen

- 1 Met behulp van de in hoofdstuk 4 uitgevoerde berekeningen, is het mogelijk een schatting te geven van de opwaartse drukken op een asfaltmastieklaag op de bodem.

In het geval van de stormvloedkering van de Oosterschelde, waar de bodemverdediging onder water, op diepten variërend tussen 10 en 35 m, moet worden aangelegd kunnen aanzienlijke onregelmatigheden in de bodem voorkomen. Het is derhalve van belang de uitgevoerde berekeningen te relativieren.

Eigenlijk kan niet veel meer worden gezegd dan dat opwaartse drukken tussen 0,30 en 0,50 m zeer wel denkbaar en verklaarbaar zijn, met de reserve dat (lokale) uitschieters mogelijk zijn.

- 2 Gedacht wordt aan een asfaltmastieklaag van ca. 0,25 m dikte, die dus bij een opwaartse druk van 0,25 m waterkolom opgelicht wordt. Het is van groot belang na te gaan wat de bezwijkmechanismen zijn, indien een waterbel onder de asfaltlaag ontstaat.

Het blijkt dat 2 verschijnselen het volume van de waterbel beperken:

- a toestroming van grondwater is beperkt door de doorlatendheid van de ondergrond en door de beperkte duur van een storm gedurende welke een weigerende schuif kan optreden,
- b stijfheid en membraan-spanningen in de asfaltlaag beperken de vervorming.

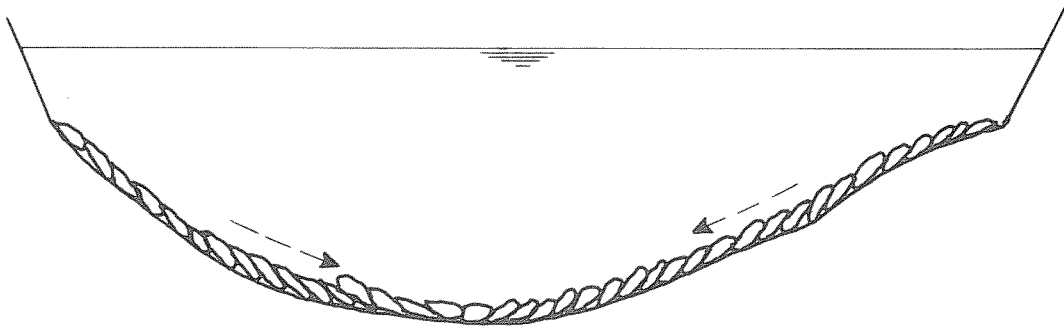
Hieraan wordt uitgebreide aandacht besteed in [1].

- 3 Er is steeds uitgegaan van een doorlopende asfaltlaag van uniforme dikte. Gezien de opbouw van de asfaltlaag uit 3 stroken van 0,08 m dikte, die elkaar dakpansgewijs overlappen, kunnen allerlei onregelmatigheden in de dikte van de laag ontstaan. Er is zelfs een kleine kans op "dikte nul". Afhankelijk van de toegelaten faalkans van de asfaltlaag zal hieraan bij de uitvoering veel aandacht moeten worden besteed.

- 4 Er is tevens uitgegaan van een asfaltlaag die als één geheel kan worden gezien. Dit betekent dat de hechting van de stroken op elkaar optimaal moet zijn. Indien dit niet het geval zou zijn, tengevolge van bijvoorbeeld een aanzandingslaag tussen 2 stroken, ontstaat een dubbel gevaar voor bezwijken:

- a als ter plaatse de opwaartse druk groot is en een waterbel dreigt te ontstaan, waardoor een scheur ter plaatse van de aanzandingslaag ontstaat,
- b als ter plaatse een scheve aanstroming op de overlappen aanwezig is, waardoor een slecht gehechte strook kan worden opgelicht en omklappen [14, 15, 16]

5 Wat het laatste betreft, kan worden opgemerkt dat de stroming bij een weigerende schuif steeds naar de dichtsbijzijnde oever trekt, tengevolge van stroomrefractie [12]. Aangezien de asfaltstroken dakpansgewijs worden gelegd, moet ervoor worden gezorgd dat de stroming "van het dak afglijdt", dat wil zeggen de stroken vanuit beide oevers van het sluitgat naar het midden aanleggen:



LITERATUUR

- 1 BURG, J.A., GRAAUW, A.F.F. de, GROOT, M.B. de
Bed protection adjacent to the barrier
Symposium on hydraulics aspects of coastal structures
Delft, December 1980
- 2 BURG, J.A
Concept stortebed nota, 1979
2 PROBU-N-79051, Rijkswaterstaat, Deltadienst
- 3 LAMB, H.
Hydrodynamics
Cambridge, 1963
- 4 MEULENBELD, B., BAART, W.K.
Analyse voor propaedeutische examens deel 2
Stam 1969
- 5 RAJARATNAM, N.
Turbulent jets
Developments in water science 5
Elsevier 1976
- 6 Waterloopkundig Laboratorium
Drukken aan de bovenzijde van de drempel en het stortebed bij een weigerende
schuif
Verslag modelonderzoek M 1451-4, maart 1978
- 7 Waterloopkundig Laboratorium
Nabeschouwing drukmetingen aan de bovenzijde van het stortebed bij een wei-
gerende schuif
Verslag M 1001/M 1451, nota, september 1979
- 8 Waterloopkundig Laboratorium
Stroombeeld weigerende schuif situatie
M 1451, concept discussienota, april 1979

- 9 Waterloopkundig Laboratorium,
Stabiliteitsonderzoek toplaag drempel en dorpelaanstortingen, betrouwbaarheid modelonderzoek
M 1451/M 1460/R 1339, nota, januari 1979
- 10 Waterloopkundig Laboratorium,
Oriënterend onderzoek naar de lengte van het vaste stortebed in verband met weigerende schuif
Verslag M 1001-9, november 1977
- 11 Waterloopkundig Laboratorium
Onderzoek naar de stabiliteit van de stortebedden bij weigerende schuif
Verslag M 1001-22, juli 1980
- 12 Waterloopkundig Laboratorium
Stroombeeldanalyse bij een weigerende schuif
Verslag M 1001-23, in 1980 te verschijnen
- 13 Waterloopkundig Laboratorium
Zanddichtheid en stabiliteit van blokkenmatten
M 1451, discussienota, juni 1979
- 14 Waterloopkundig Laboratorium
Stabiliteit van de rand van de bodembescherming
Verslag modelonderzoek R 460-IV, 1971
- 15 Waterloopkundig Laboratorium
Stroombestendigheid asfaltmastiek
Verslag onderzoek R 1522, in 1980 te verschijnen
- 16 Waterloopkundig Laboratorium
Drukverdeling aan de rand van een asfaltmastiexlab bij diverse aanstroomrichtingen
LV 1254, briefverslag, mei 1980

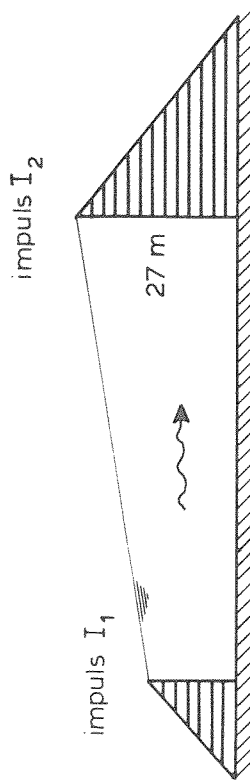
B_2 (m)	h_1 (m)	V_1 (m/s)	Q (m ³ /s)	V_2 (m/s)	V^2	R (m)	h_2 (m)	$h_2 - h_1$ (m)	Δh_w (m)	$\Delta h_{ber} =$ $h_2 - h_1 - \Delta h_w$ (m)	Δh_{gem} (m)
45	26,60	4,96	2969	2,44	15,28	12,27	27,23	0,63	0,26	0,37	0,40
75	26,60	5,12	3064	1,51	14,25	15,70	27,16	0,56	0,20	0,36	0,40
135	26,75	4,94	2973	0,82	12,54	19,29	27,09	0,34	0,14	0,20	0,25
45	25,13	10,01	5660	4,66	60,96	12,27	27,79	2,66	1,06	1,60	1,87
75	25,15	10,46	5919	2,92	58,97	15,70	27,47	2,32	0,80	1,52	1,85
135	26,23	10,00	5902	1,62	51,31	19,29	27,62	1,39	0,57	0,82	0,77

In alle proeven: $B_1 = 22,5$ m
 $h_2 = 27$ m

Tabel 1: Berekening verval bij plotselinge verwijding

situatie	V_1 (m/s)	$I = \int \rho V^2 dydz. \quad (\text{KN})$																		
		x=0	x=25m	x=50m	x=100m	x=150m	x=200m	x=300m	x=400m	x=600m	x=900m									
<u>$V_i \approx 5 \text{ m/s}$</u>																				
1:2	4,96	14 723	15 618	15 178	13 650	11 553	10 909	7 780	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1:3,3	5,12	15 689	17 330	10 876	16 735	15 859	14 814	9 897	5 994	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1:6	4,94	14 687	12 106	11 601	11 973	12 813	12 902	12 326	14 933	10 798	2 471									
<u>$V_i \approx 10 \text{ m/s}$</u>																				
1:2	10,01	56 656	58 339	56 315	47 253	-	29 252	24 125	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1:3,3	10,46	61 913	61 765	-	54 611	-	49 306	36 842	15 216	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1:6	10,00	59 018	58 613	51 510	52 857	-	50 635	60 013	60 586	29 817	10 125									

Berekening waterspiegel:



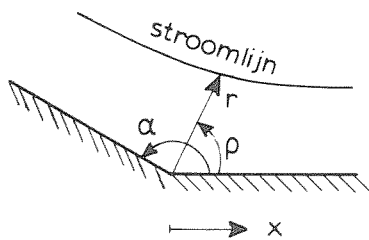
$$\frac{1}{2} \rho g h_1^2 B_1 \rightarrow h_1 = \sqrt{\frac{2}{g B_2} (3576 B_2 - \Delta I)}$$

$$\frac{1}{2} \rho g h_2^2 B_2 = 3576 B_2 \quad (\text{kN})$$

met $\Delta I = I_1 - I_2 =$ verandering van impuls

Tabel 2: Berekening verloop waterspiegel uit verandering impuls

r (m)=	1,8	3,8	5,9	7,8	10,4	12,8	16,2
$-\frac{1}{R}$ (m^{-1})	0,068	0,032	0,021	0,016	0,012	0,010	0,008
V (m/s)=	4,5	5,8	5,7	4,9	3,6	3,2	2,9
dz (m)=	2,8	2,05	2,00	2,25	2,50	2,90	5,5
Δp (m)=	0,39	0,23	0,14	0,09	0,04	0,03	0,04



$$\underline{x = 0 \text{ m}} \quad (\rho = \frac{\alpha}{2})$$

$$\alpha = 180^\circ - \text{arccotg } 7 - \text{arccotg } 3 = 153,5^\circ$$

$$m = \frac{180^\circ}{\alpha} = 1,173$$

$$-\frac{1}{R} = -\frac{m-1}{r} \cdot \frac{\sin \frac{|3m-4|}{2(m-1)} \rho}{\cos^{3/2} \alpha} = -\frac{m-1}{r} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\cos^{3/2} \alpha} = \underline{0,123}$$

V = ontleend aan snelheidsvertikaal op 45 m uit as kering (figuur 10)

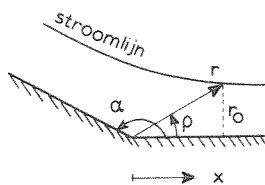
dz = meewerkende hoogte

$$\Delta p = -\frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{R} \cdot dz$$

$$\Delta h_b = \sum \Delta p \approx \underline{0,95 \text{ m}}$$

Tabel 3a: Berekening afwijking van de hydrostatische druk bij de bodem op $x = 0 \text{ m}$ uit concave knik.

r_o (m)	1,8	3,8	5,9	7,8	10,4	12,8	16,2
r_o (m)	3,5	4,8	6,6	8,4	10,8	13,1	16,5
ρ	31°	52°	63°	68°	74°	78°	79°
$\frac{m-1}{r}$ (m^{-1})	0,049	0,036	0,026	0,021	0,016	0,013	0,010
$\frac{\sin 3m-4 \rho}{\cos^{3/2} 2(m-1)\rho}$ (-)	-0,26	-0,46	-0,56	-0,62	-0,68	-0,72	-0,74
$-\frac{1}{R}$ (m^{-1})	0,013	0,017	0,015	0,013	0,011	0,009	0,007
V (m/s)	4,5	5,8	5,7	4,9	3,6	3,2	2,9
dz (m)	2,8	2,05	2,00	2,25	2,50	2,90	5,5
Δp (m)	0,074	0,116	0,096	0,072	0,036	0,028	0,035



$$\underline{\underline{x = 3 \text{ m}}}$$

$$\alpha = 153,5^\circ, \quad m = 1,173$$

$$-\frac{1}{R} = -\frac{m-1}{r} \frac{\sin |3m-4| \rho}{\cos^{3/2} 2(m-1)\rho}$$

V = ontleend aan snelheidsvertikaal op 45 m uit as kering (figuur 10)

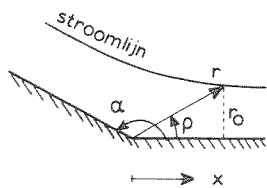
dz = meewerkende hoogte

$$\Delta p = -\frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{R} \cdot dz$$

$$\Delta h_b = \sum \Delta p = \underline{\underline{0,46 \text{ m}}}$$

Tabel 3b: Berekening afwijking van de hydrostatische druk bij de bodem op $x = 3 \text{ m}$ uit concave knik.

r_0 (m)	1,8	3,8	5,9	7,8	10,4	12,8	16,2
r (m)	10,2	10,7	11,6	12,7	14,4	16,2	19,0
ρ	10°	21°	30°	38°	46°	52°	58°
$\frac{m-1}{r}$ (m^{-1})	0,017	0,016	0,015	0,014	0,012	0,011	0,009
$\frac{\sin 3m-4 \rho}{\cos^{3/2}2(m-1)\rho}$ (-)	-0,084	-0,175	-0,255	-0,326	-0,399	-0,456	-0,514
$-\frac{1}{R}$ (m^{-1})	0,0014	0,003	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005
V (m/s)	4,5	5,8	5,7	4,9	3,6	3,2	2,9
dz (m)	2,8	2,05	2,00	2,25	2,50	2,90	5,5
Δp (m)	0,008	0,020	0,025	0,025	0,016	0,015	0,022



$$\underline{\underline{x = 10 \text{ m}}}$$

$$\alpha = 153,5^\circ, \quad m = 1,173$$

$$-\frac{1}{R} = -\frac{m-1}{r} \cdot \frac{\sin|3m-4|\rho}{\cos^{3/2}2(m-1)\rho}$$

V = ontleend aan snelheidsvertikaal op 45 m uit as kering (figuur 10)

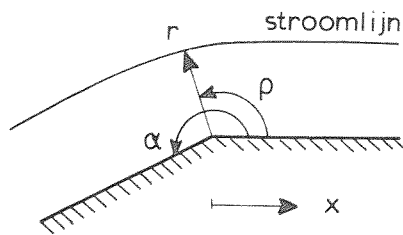
dz = meewerkende hoogte

$$\Delta p = -\frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{R} \cdot dz$$

$$\Delta h_b = \sum \Delta p = \underline{\underline{0,13 \text{ m}}}$$

Tabel 3c: Berekening afwijking van de hydrostatische druk bij de bodem op $x = 10 \text{ m}$ uit concave knik.

r (m)	2	4	6	8	10	12
$-\frac{1}{R}$ (m ⁻¹)	-0,021	-0,010	-0,007	-0,005	-0,004	-0,003
V (m/s)	5,2	5,8	5,5	4,9	4,5	4,2
dz (m)	3	2	2	2	2	3,5
Δp (m)	-0,17	-0,07	-0,04	-0,03	-0,02	-0,02



$$\underline{\underline{x = 0 \text{ m}}} \quad (\rho = \frac{\alpha}{2})$$

$$\alpha = \text{arccotg } 7 + 180^\circ = 188,1^\circ$$

$$m = \frac{180^\circ}{\alpha} = 0,957$$

$$-\frac{1}{R} = -\frac{m-1}{r} \cdot \frac{\sin |3m-4| \rho}{\cos^{3/2} 2(m-1)\rho} = -\frac{m-1}{r} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\cos^{3/2} \alpha} = -\frac{0,0419}{r}$$

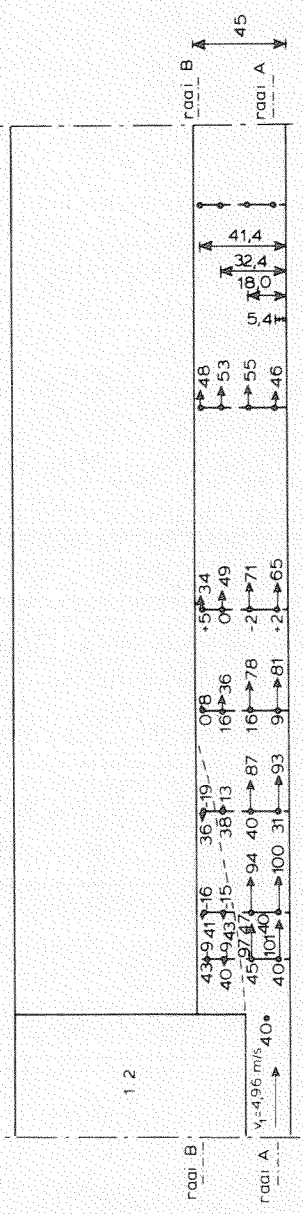
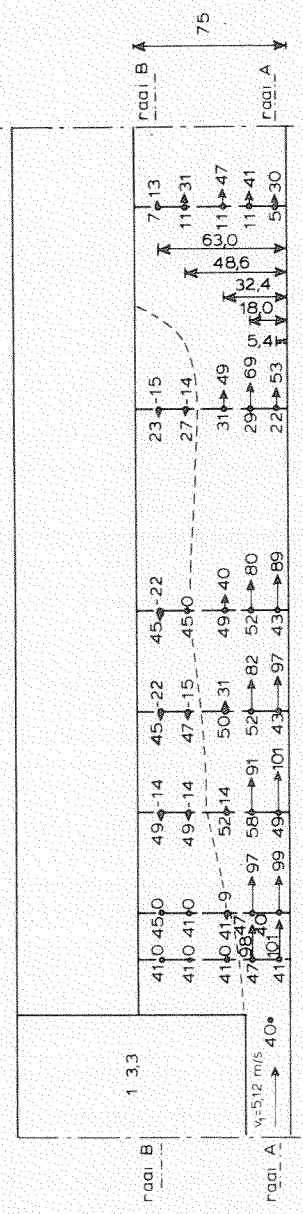
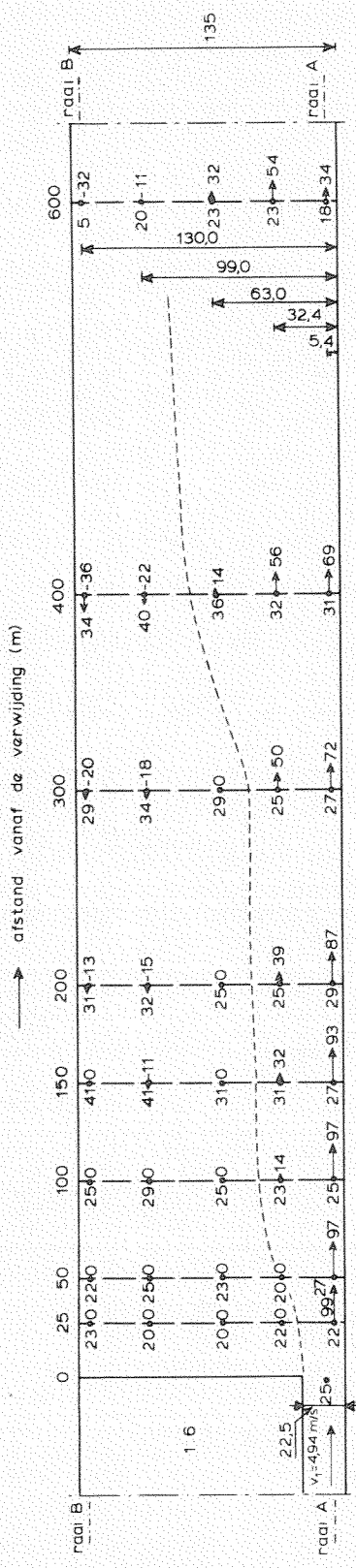
V = ontleend aansnelheidsvertikaal op 90 m uit as kering (figuur 10)

dz = meewerkende hoogte

$$\Delta p = -\frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{R} \cdot dz$$

$$\Delta h_b = \sum^h \Delta p = 0,35 \text{ m}$$

Tabel 3d: Berekening afwijking van de hydrostatische druk op x = 0 m uit de convexe knik.



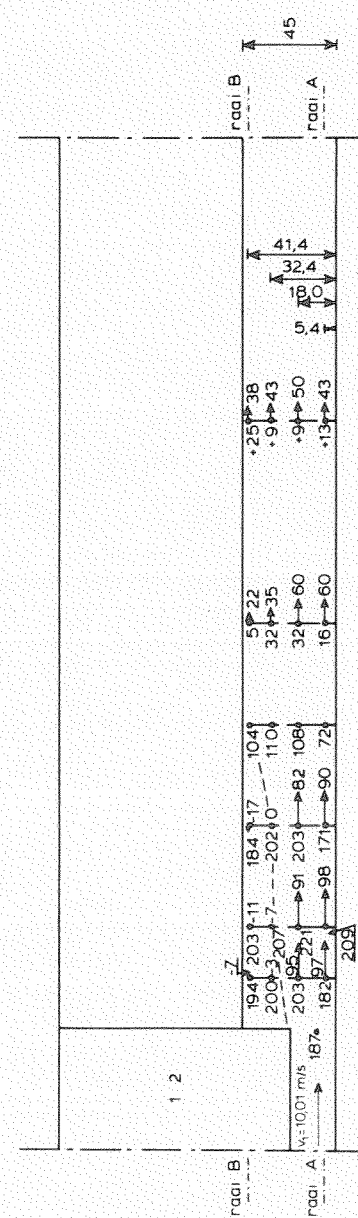
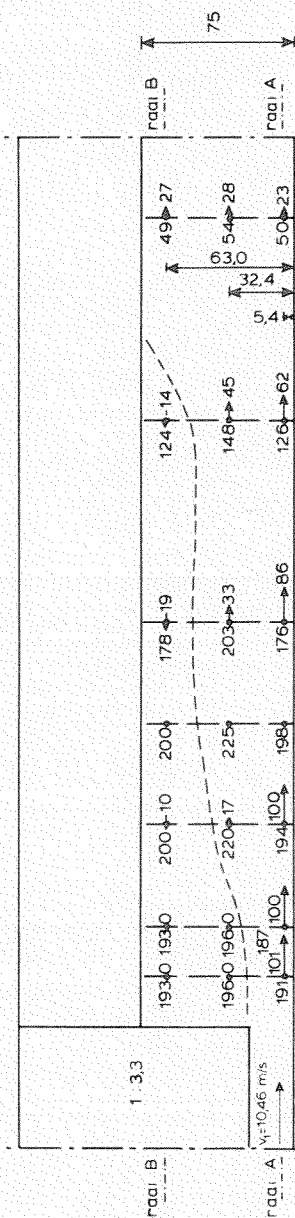
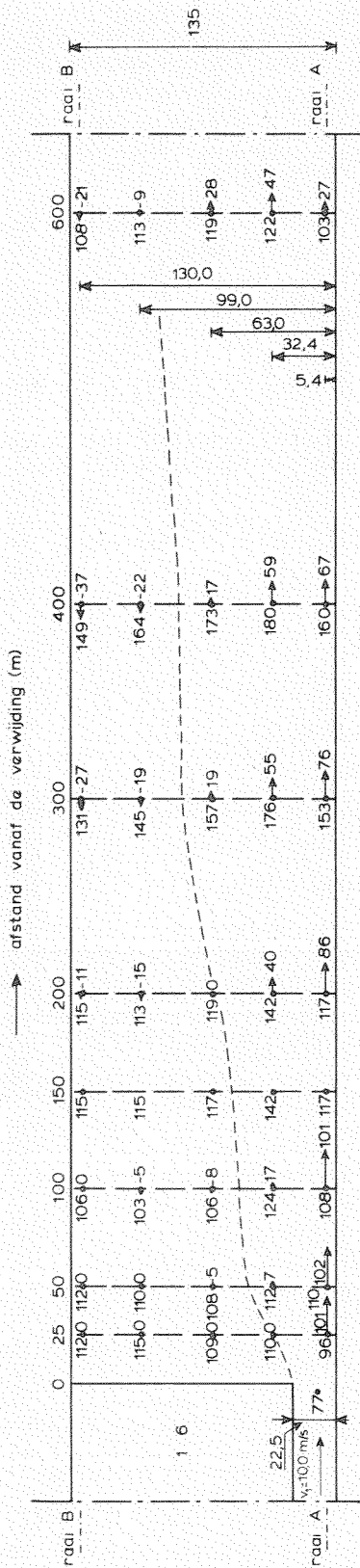
verklaring
 meetraal
 meetpunt
 41
 101
 percentage van v_1
 waterspiegel (cm)
 tov beneden w.s.

maten in m

MEETRESULTATEN

$v_1 \approx 5$ m/s

SCHAAL 1:2000



verklaring

meetraai

meetpunt

percentage van v_1

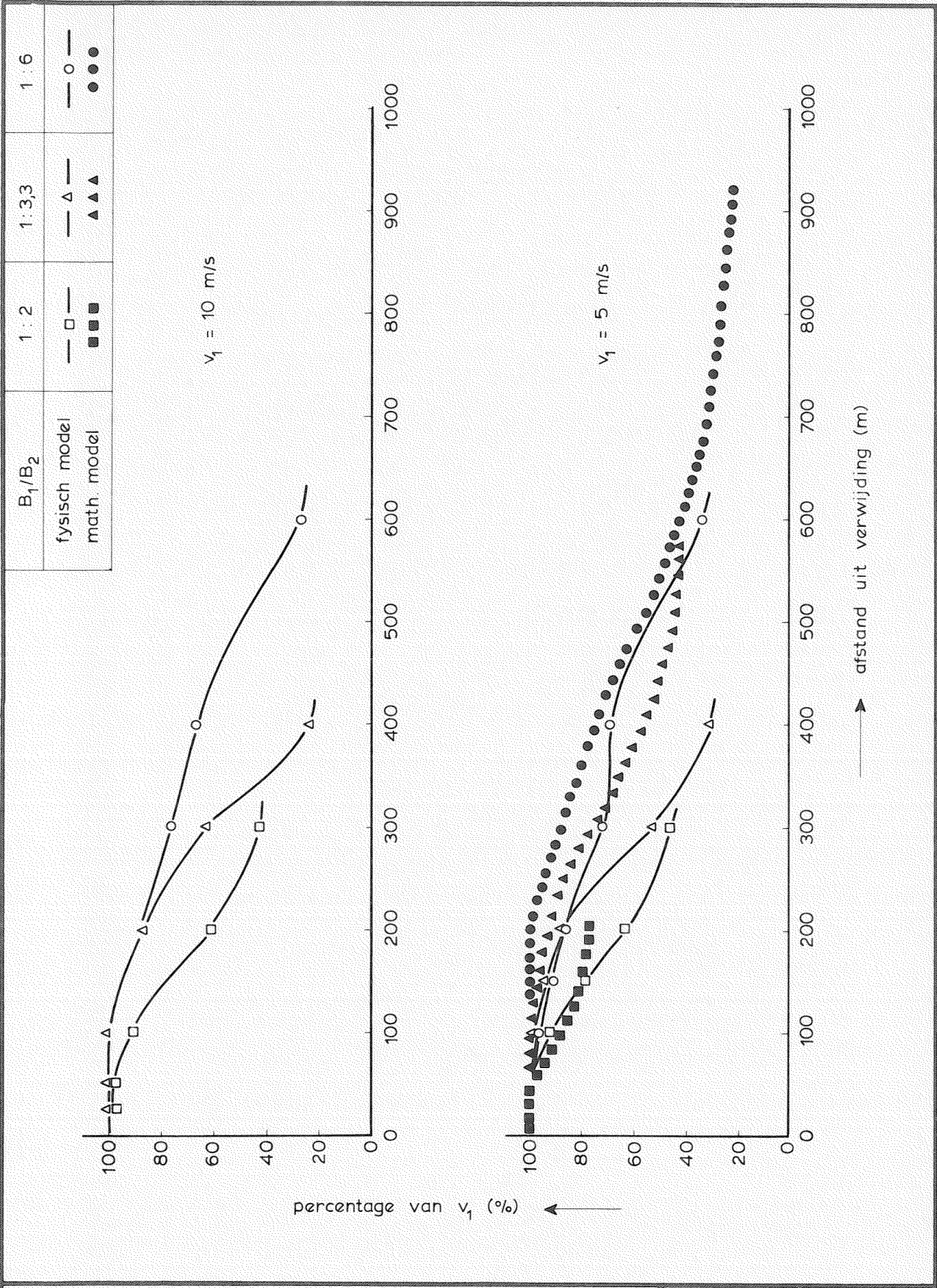
waterspiegel (cm) tov beneden w.s

maten in m

MEETRESULTATEN

$v_1 \approx 10 \text{ m/s}$

SCHAAL 1: 2000

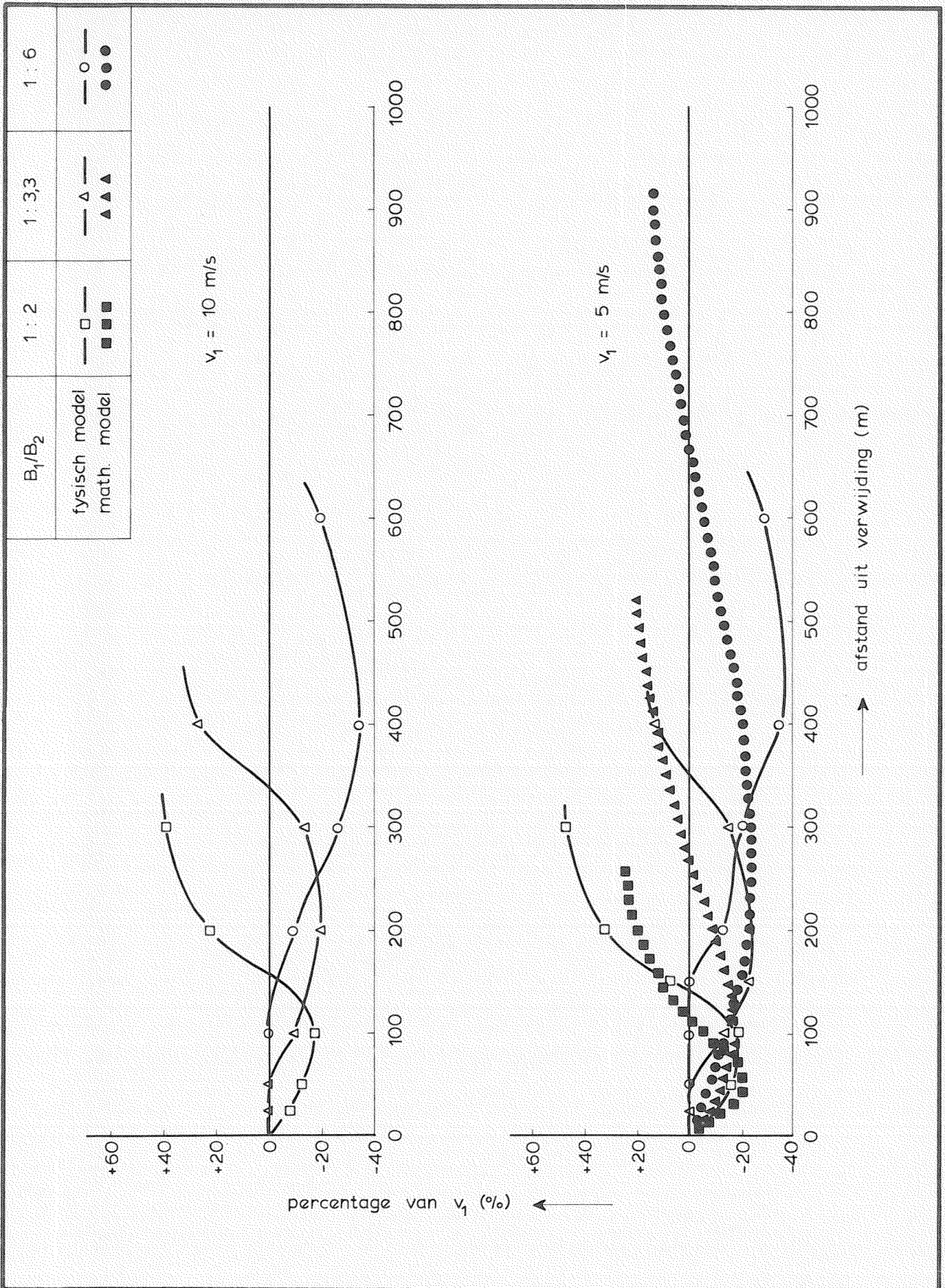


VERLOOP STROOMSNELHEDEN IN RAAI A

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

M 1673

FIG. 3



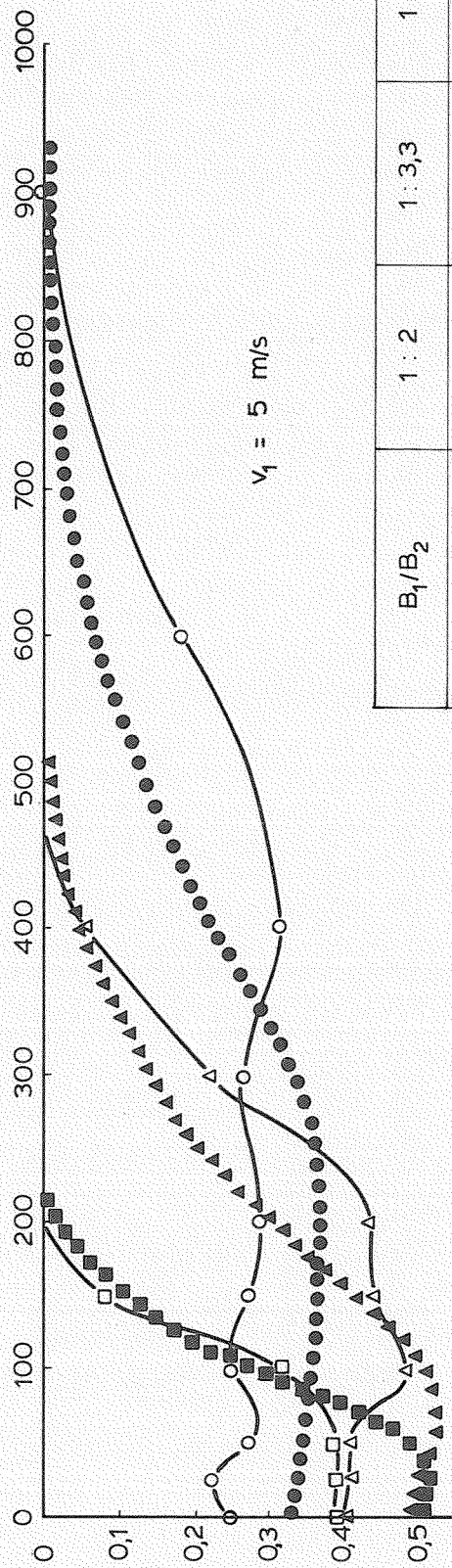
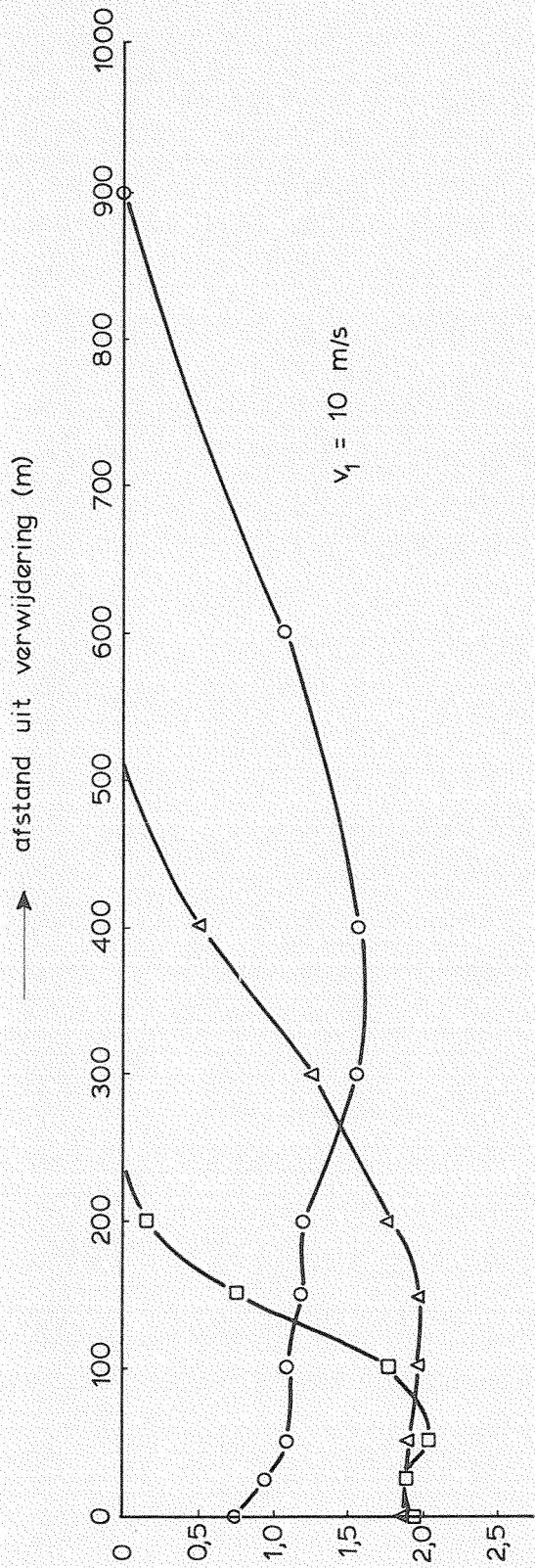
→ afstand uit verwijding (m)

VERLOOP STROOMSNELHEDEN IN RAAI B

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

M 1673

FIG. 4



→ afstand uit verwijdering (m)

→ waterspiegeldaling t.o.v. benedenwaterstand (m)

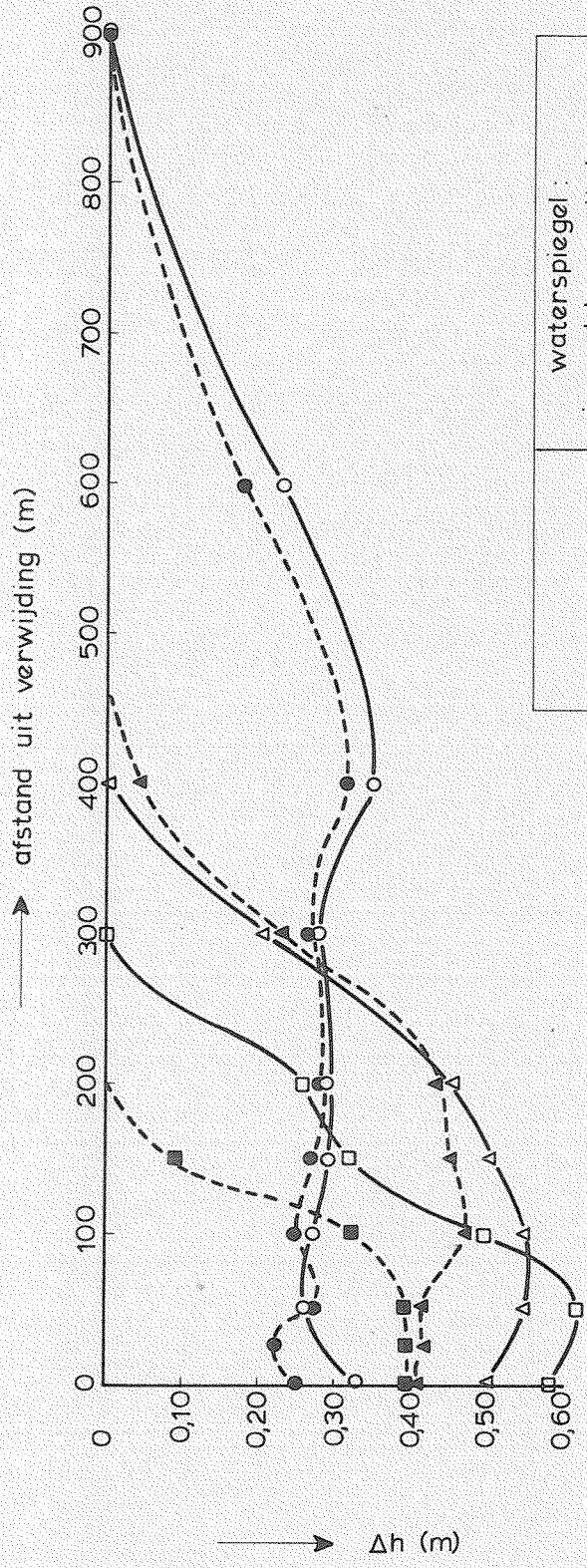
B_1/B_2	1 : 2	1 : 3,3	1 : 6
fysisch model	— □ —	— △ —	— ○ —
math. model	■ ■ ■	▲ ▲ ▲	● ● ●

VERLOOP WATERSPIEGEL IN RAAI A

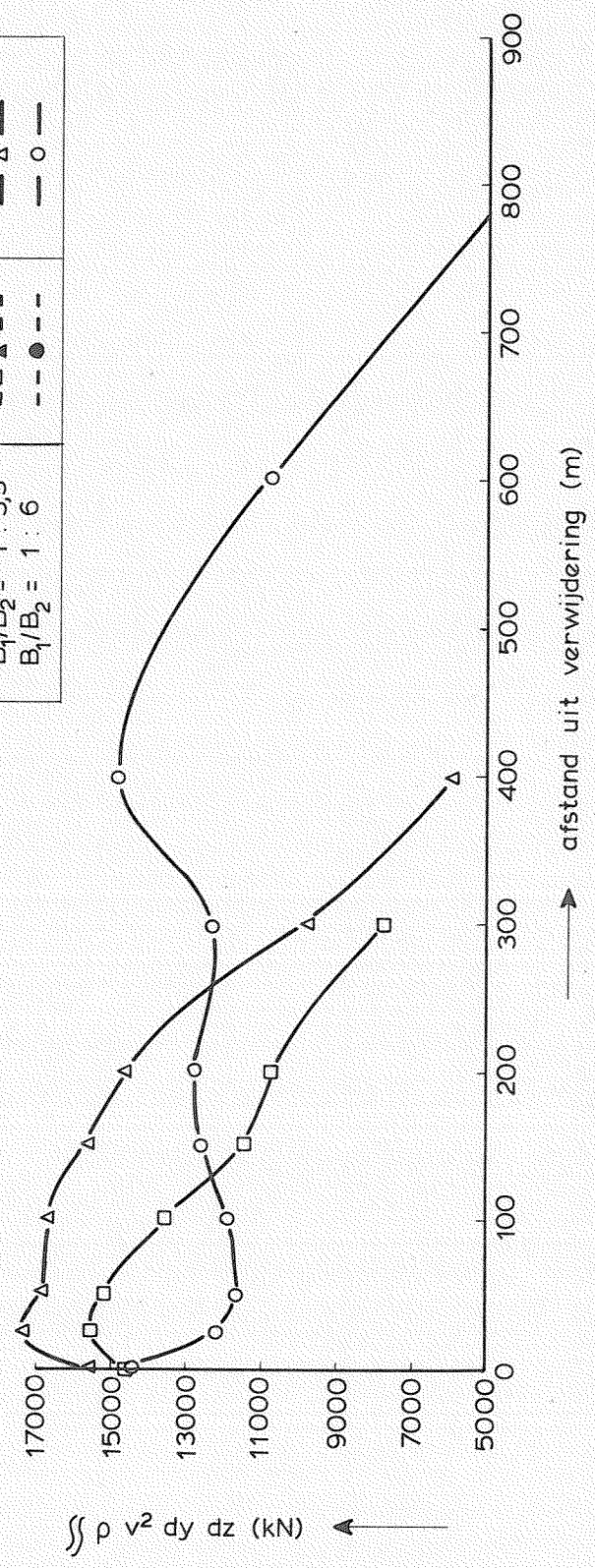
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

M 1673

FIG. 5



	waterspiegel :	
	in model	uit impuls
$B_1/B_2 = 1 : 2$	---■---	---□---
$B_1/B_2 = 1 : 3,3$	---▲---	---△---
$B_1/B_2 = 1 : 6$	---●---	---○---



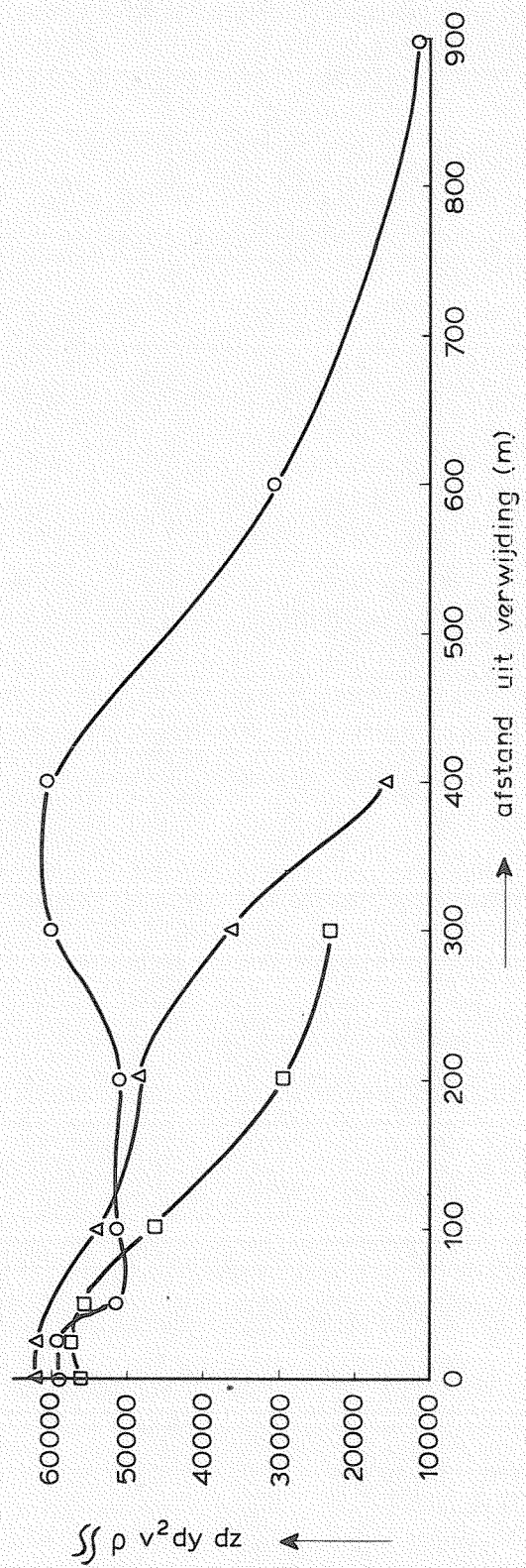
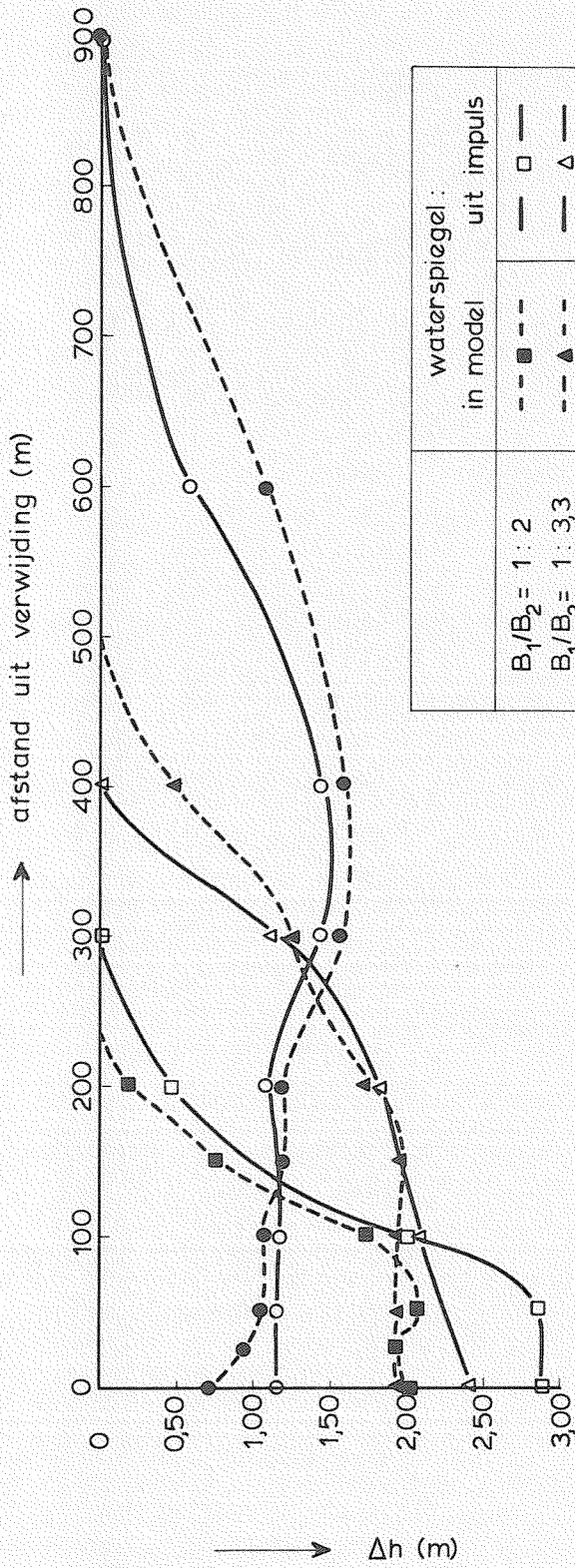
VERLOOP TOTALE IMPULS EN
AFGELEIDE WATERSPIEGEL

$v_1 \approx 5 \text{ m/s}$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

M 1673

FIG. 6



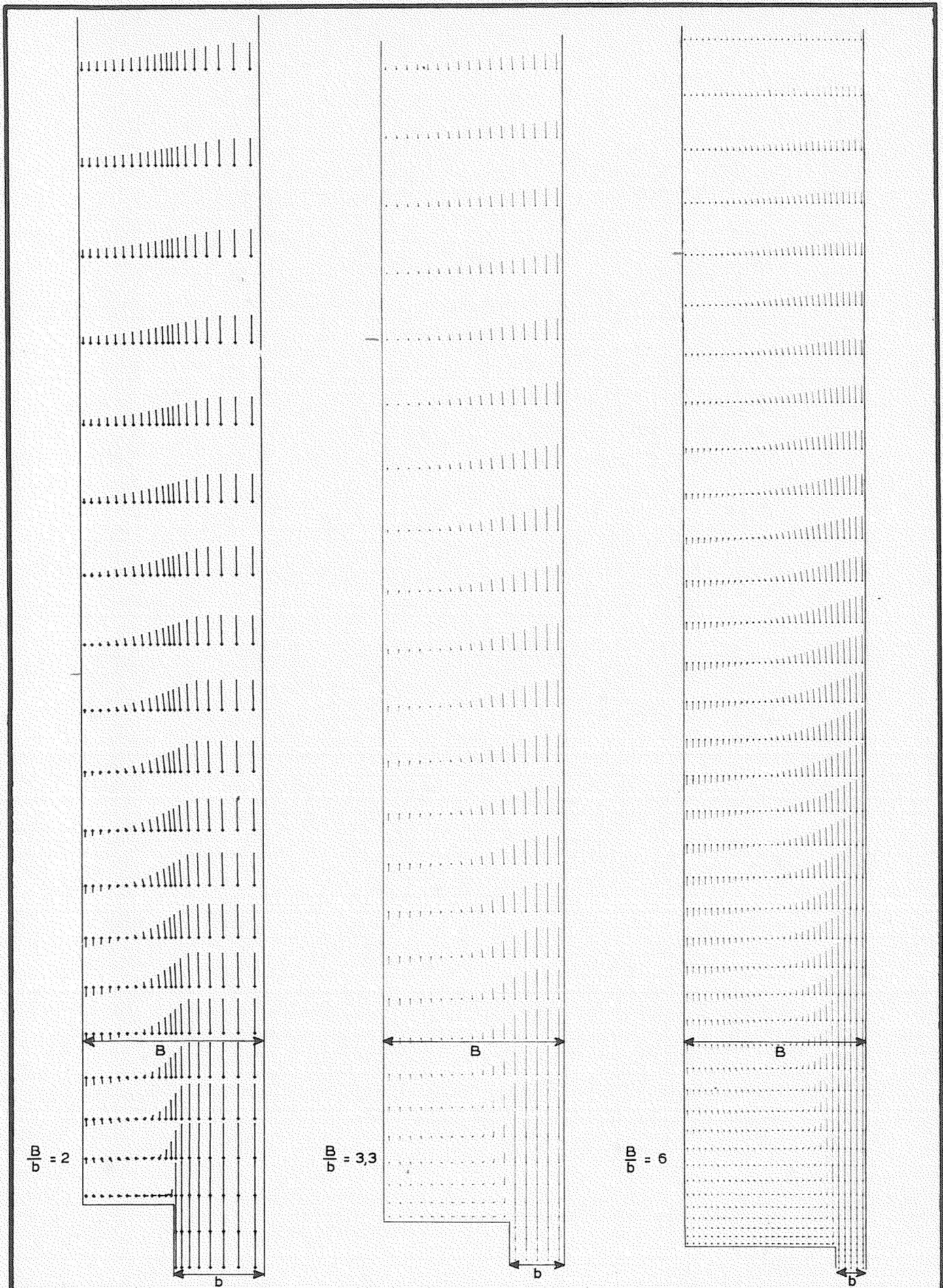
VERLOOP TOTALE IMPULS EN
AFGELEIDE WATERSPIEGEL

$v_1 \approx 10 \text{ m/s}$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

M 1673

FIG. 7



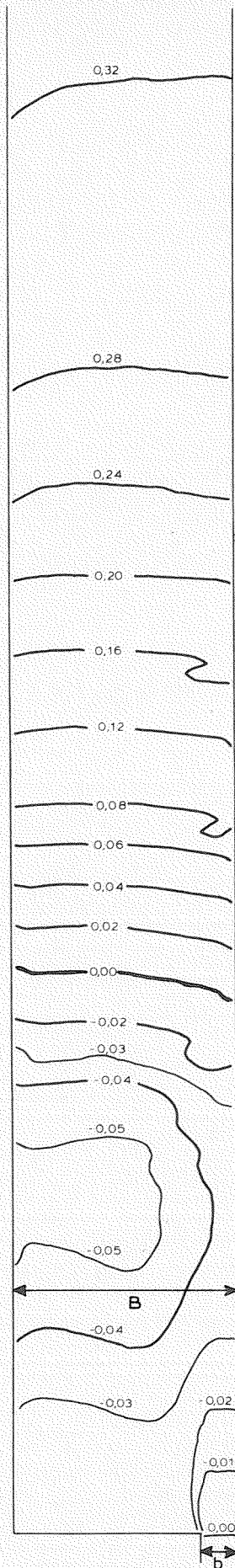
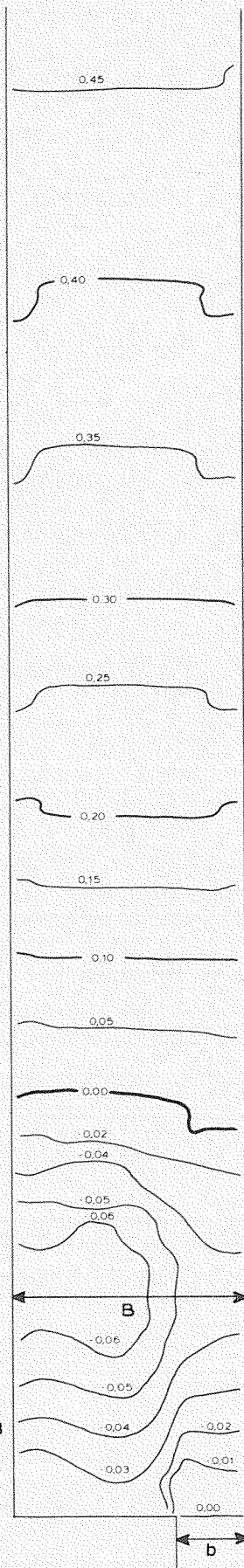
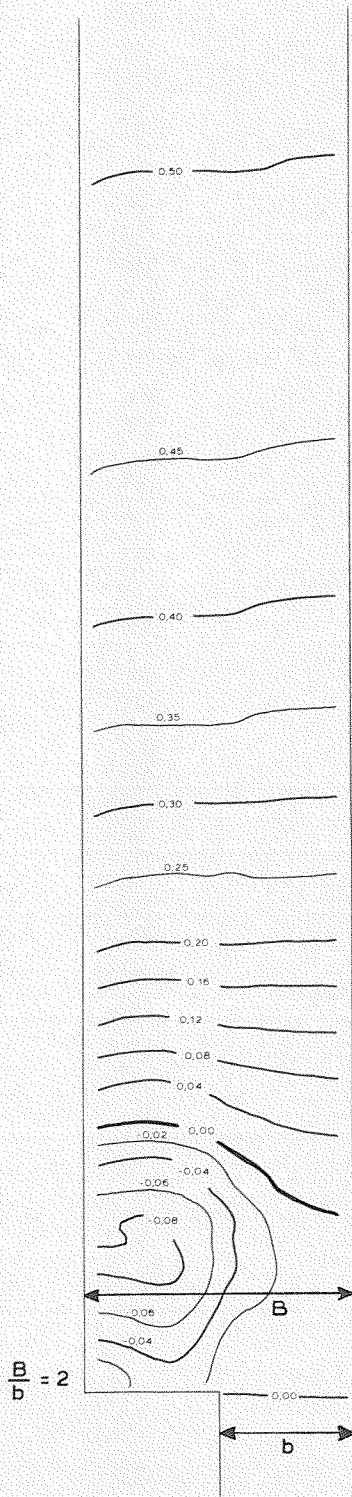
SNELHEIDSVELD IN MATHEMATISCH MODEL

$v_1 \approx 5 \text{ m/s}$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

M 1673

FIG. 8



maten in m prototype t.o.v. bovenstroomse waterstand

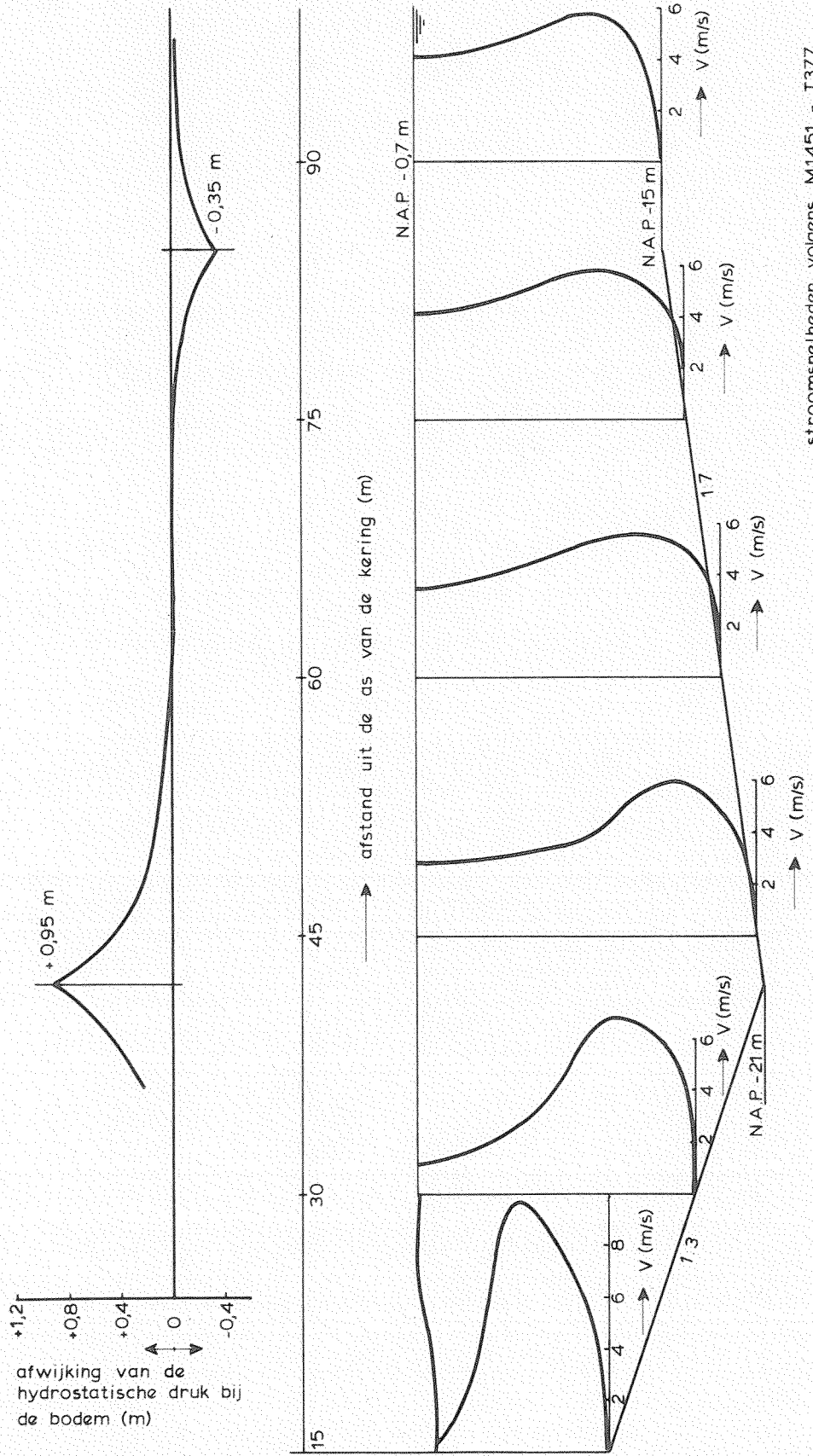
WATERSPIEGEL IN MATHEMATISCH MODEL

$v_1 \approx 5 \text{ m/s}$

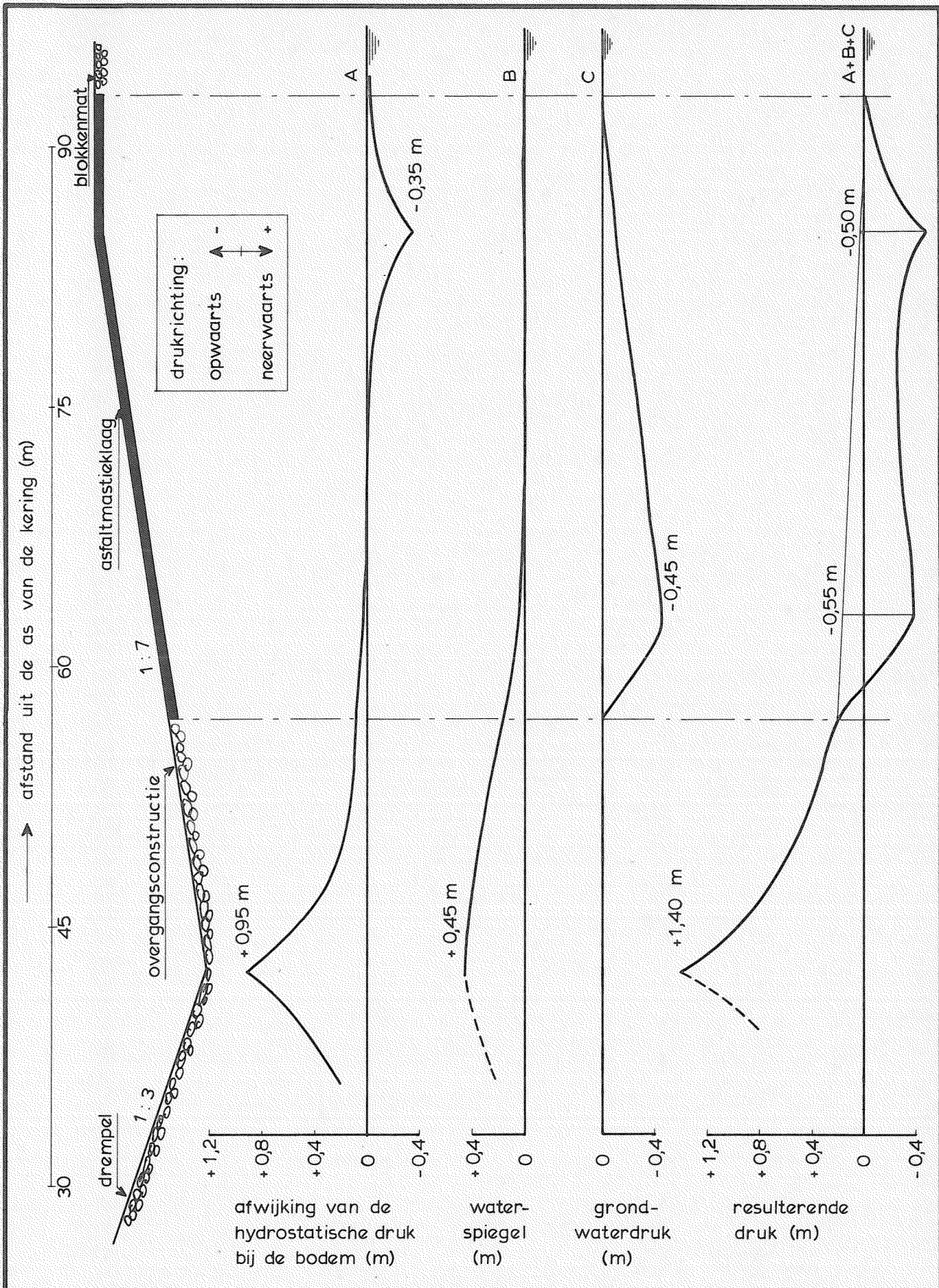
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

M 1673

FIG. 9



AFWIJING VAN DE HYDROSTATISCHE
DRUK BIJ DE BODEM

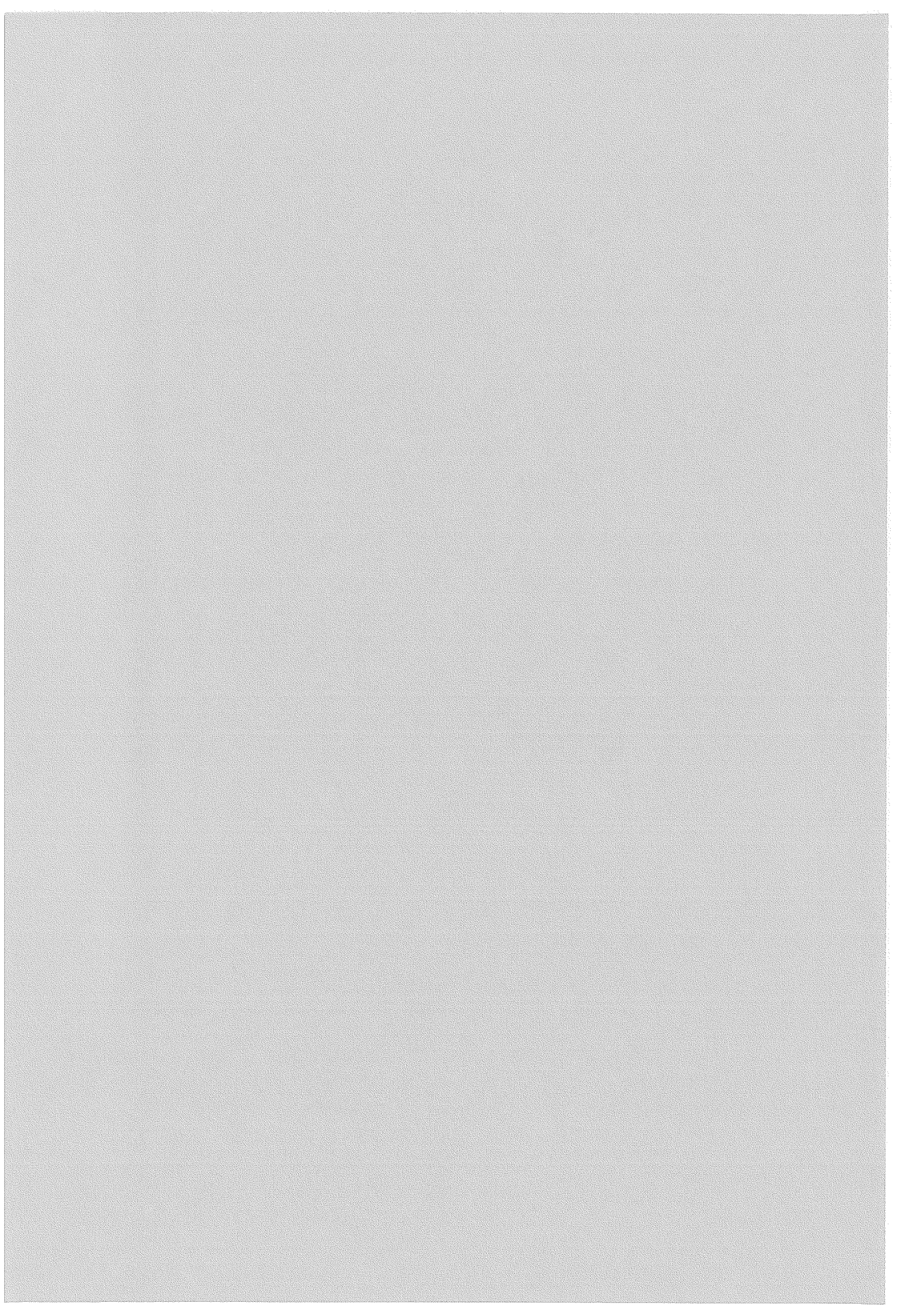


RESULTERENDE OPWAARTSE DRUK

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

M 1673

FIG. 11



Bijlage 1: het k-ε turbulentie model

Indien in de Navier-Stokes vergelijking de stroomsnelheid V wordt vervangen door de som van de gemiddelde stroomsnelheid \bar{U} en de snelheidsfluctuatie u , dan volgt, in combinatie met de continuïteitsvergelijking de bewegingsvergelijking en na middeling in de tijd (z.g. Reynolds vergelijking):

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\overline{\partial u_i u_j}}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 \bar{U}_i \quad (1)$$

waarin is:

\bar{U} = gemiddelde stroomsnelheid (m/s)

u = turbulente snelheidsfluctuaties (m/s)

p = druk (N/m²)

ρ = dichtheid water (kg/m³)

ν = kinematische viscositeit (m²/s)

t = tijd (s)

x_i = coördinaten (m)

$i = 1$: stroomrichting (x)

$i = 2$: vertikaal loodrecht op stroomrichting (z)

$i = 3$: horizontaal loodrecht op stroomrichting (y)

NB. Bij herhaling van index wordt gesommeerd, b.v.:

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} \quad \text{voor } i = 1$$

$$= \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_3} \quad \text{voor } i = 2$$

enz.

Vergelijking (1) geeft dus op deze wijze voor alle (3) richtingen een uitdrukking weer.

De vorm van vergelijking (1) is zodanig dat de grootheid $\rho u_i u_j$ als spanningen kunnen worden gezien, de Reynolds spanningen:

$$\tau_{ij} = - \rho \overline{u_i u_j} \quad (2)$$

Er zijn dus 6 verschillende schuifspanningscomponenten. De componenten ρU_1^2 , ρU_2^2 en ρU_3^2 zijn de normaalspanningen in de 3 hoofdrichtingen.

De Reynoldsspanningen zijn extra onbekenden. Om het systeem op te kunnen lossen moeten dus extra vergelijkingen worden gevonden. Deze vergelijkingen zijn benaderingen die het karakter van het turbulente model bepalen. In eerste instantie kunnen de Reynoldsspanningen worden geschreven als een product van een viscositeit en een snelheidsgradiënt (Boussinesq):

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \rho \overline{u_i^2} \quad (3)$$

waarin:

μ = "eddy-viscosity" (dynamische turbulente viscositeit) (N.S/m²)

$\delta_{ij} = 1$ als $i = j$

$= 0$ als $i \neq j$

Het concept van de "eddy-viscosity" is in analogie met laminaire stroming uitgevoerd, (formule van Poiseuille).

De constante (viscositeit μ) blijkt dan werkelijk een constante te zijn in alle stromingssituaties. Bij turbulente stroming blijkt echter dat de turbulente viscositeit niet constant is. Er is derhalve verder gezocht naar een uitdrukking voor μ .

In het onderhavige k- ϵ model, is de volgende uitdrukking gekozen:

$$\mu = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4)$$

waarin:

k = kinetische energie van de turbulente snelheidsfluctuaties $= \frac{1}{2} \overline{u_i^2}$ (m²/s²)

ϵ = turbulente dissipatie (m²/s³)

C_μ = constante (-)

Relatie (4) volgt uit het besef dat de parameters k en ϵ een maatgevende rol moeten spelen en uit dimensie-analyse.

Relatie (4) kan (in combinatie met (3)) worden gezien als de basis-hypothese van dit turbulentiemodel. Deze hypothese zal gerechtvaardigd blijken te zijn indien de "constante" C_μ werkelijk constant is voor alle stromingssituaties. De ervaring die thans aanwezig is met dit type modellen toont aan dat C_μ niet altijd constant is, maar in een groot aantal gevallen wel.

Uitdrukkingen voor k en ϵ werden afgeleid uit:

- a de energievergelijking,
- b de dissipatievergelijking.

Ad. a De energievergelijking geeft de verandering van de turbulente kinetische energie in de ruimte en/of de tijd (zogenaamde "totale differentiaal"):

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\rho u_j k^1} + \overline{u_j p} \right] - \overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad (5)$$

Hierin worden de volgende benaderingen toegepast:

$$- \left[\overline{\rho u_j k^1} + \overline{u_j p} \right] = \frac{\mu}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (6)$$

$$- \overline{\rho u_i u_j} = \mu \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] \quad (3)$$

$$\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \rho \epsilon \quad (7)$$

Na substitutie in (5) volgt voor het horizontale 2 dimensionale geval:

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \rho \epsilon \quad (8)$$

Ad. b De dissipatievergelijking geeft de verandering van de turbulente dissipatie in de ruimte en/of de tijd:

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} &= -2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right] \\ &= -2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_1} = - \left[\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_1} \right]^2 \end{aligned}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_k \varepsilon^1} + \frac{2\nu}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right] \quad (9)$$

De volgende benaderingen worden toegepast:

$$2\nu \left[\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_1}} + \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_k}} \right] = \left[C_1 \frac{u_i u_k}{k} + C_1 \delta_{ik} \right] \varepsilon \quad (10)$$

$$2 \left[\overline{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial u_k}{\partial x_1}} + \left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_1} \right)^2 \right] = C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (11)$$

$$- \left[\overline{\rho \varepsilon^1 u_k} + 2\nu \frac{\partial p}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right] = \frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \quad (12)$$

Na substitutie in (9) volgt voor het horizontale 2 dimensionale geval:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_1 \frac{\mu \varepsilon}{k} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 - C_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \quad (13)$$

In de bovenstaande vergelijkingen zijn k^1 en ε^1 de momentane waarden van k en ε .

Tenslotte kan worden vermeld dat de constanten in de bovengenoemde vergelijkingen (8) en (13) volgen uit ijking op eenvoudige en goed bekende gevallen (zoals afname van isotrope turbulentie achter een rooster en grenslaagstromingen). Het volgende wordt hierbij gevonden:

$$\left. \begin{aligned} C_\mu &= 0,09 \\ C_1 &= 1,44 \\ C_2 &= 1,92 \\ \sigma_k &= 1,0 \\ \sigma_\varepsilon &= 1,3 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Na invoering van randvoorwaarden kunnen de differentiaalvergelijkingen (8) en (13) voor k en ε simultaan (numeriek) worden opgelost in combinatie met de impuls- en de continuïteitsvergelijkingen, alsmede de relaties (3) en (4).

Concluderend kan dus worden gesteld dat het k- ϵ turbulentie op 3 series hypothesen berust:

- a geldigheid van het concept "eddy viscosity" waardoor de Reynoldsspanningen een functie zijn van de snelheidsgradiënten (relatie 3),
- b geldigheid van de relatie voor de eddy viscosity als functie van de kinetische energie van de turbulente snelheidsfluctuaties (k) en van de turbulente dissipatie (ϵ), met constante C_{μ} voor alle stromingssituaties (relatie 4),
- c geldigheid van de benaderingen in de energie- en de dissipatievergelijking (relaties 6, 7 en 10, 11, 12).

LITERATUUR

BRADSHAW, P.

An introduction to turbulence and its measurement
Pergamon Press, Oxford, 1971

SPALDING, D.B. et al.

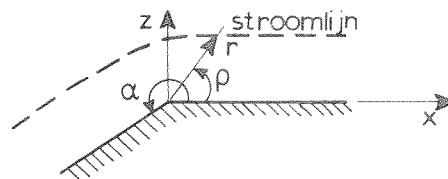
Turbulence models and their experimental verification
Heat Transfer Section, Imperial College London, 1974

Bijlage 2: Berekening van de kromtestraal van stroomlijnen boven een knik in de bodem.

Als uitgangspunt voor de potentiaal theorie, kan [3] dienen (blz. 69). Daar wordt gesteld dat voor de stroomlijnen boven een knik in de bodem geldt:

$$\Psi = a r^m \sin m\rho = \text{constant, met } m = \frac{\pi}{\alpha} \quad (1)$$

Per definitie is α de hoek van de knik (aan de natte zijde gemeten).



Voor de richting van de stroomlijn volgt:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial z} dz = 0 \quad (2)$$

Voor de kromming volgt:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\partial\Psi}{\partial z} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \quad (3)$$

De kromtestraal is dan:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = - \frac{1}{\frac{\partial\Psi}{\partial z}} \left\{ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right\} \quad (4)$$

In het vervolg zullen de diverse parameters uit (4) worden bepaald na overgang op poolcoördinaten.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial x} &= \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z} &= \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

uit [4] blz. 55 volgt met $F = \Psi$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \rho} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \rho} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

verder:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \rho} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}
 \end{aligned}$$

Uit (2) en (5) volgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} \\
 &= \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Bij overgang op poolcoördinaten geldt (zie [4], blz. 54-55):

$$x = r \cos \rho \quad , \quad z = r \sin \rho
 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= - \frac{\sin \rho}{r} & , & \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\sin 2\rho}{r^2} \\
 \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{\cos \rho}{r} & , & \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = - \frac{\sin 2\rho}{r^2} \\
 \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \rho & , & \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sin^2 \rho}{r} \\
 \frac{\partial r}{\partial z} &= \sin \rho & , & \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{\cos^2 \rho}{r}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} = -\frac{\sin 2\rho}{2r}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial z} = -\frac{\cos 2\rho}{r^2} \quad (9)$$

dan kan (6) als volgt worden omgewerkt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\sin^2 \rho}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{\sin 2\rho}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{\sin 2\rho}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial r} \\ &+ \cos^2 \rho \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \rho}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= \frac{\cos^2 \rho}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - \frac{\sin 2\rho}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{\sin 2\rho}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial r} \\ &+ \sin^2 \rho \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \rho}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} &= -\frac{\sin 2\rho}{2r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - \frac{\cos 2\rho}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \\ &+ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \rho} \cdot \frac{\cos 2\rho}{r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \cdot \frac{\sin 2\rho}{2} - \frac{\sin 2\rho}{2r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (10)$$

Na substitutie van (10) en (5) in (3) volgt:

$$\begin{aligned} &\sin^2 \rho \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right] \\ &+ \cos^2 \rho \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} \right] \\ &+ \sin 2\rho \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial r} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{dz}{dx}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \left(\frac{dz}{dx}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial r} \right] \end{aligned}$$

(vervolg blz. 4)

$$\begin{aligned}
 & + \cos 2 \rho \left[\frac{2}{r} \left(\frac{dz}{dx} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \rho} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{dz}{dx} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right] \\
 & + \frac{d^2 z}{dx^2} \left[\frac{\cos \rho}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \sin \rho \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Introductie van (1) levert:

$$\Psi = a r^m \sin m \rho \tag{1}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} &= a m r^m \cos m \rho \\
 \frac{\partial \rho}{\partial r} &= a m r^{m-1} \sin m \rho \\
 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} &= -a m^2 r^m \sin m \rho \\
 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} &= a m(m-1) r^{m-2} \sin m \rho \\
 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial r} &= a m^2 r^{m-1} \cos m \rho
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Bij substitutie van (12) in (11) volgt, na enkele vereenvoudigingen:

$$\begin{aligned}
 & (m-1) \left[1 - \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \sin (m-2) \rho + 2(m-1) \left(\frac{dz}{dx} \right) \cos (m-2) \rho \\
 & + \frac{d^2 z}{dx^2} r \cos (m-1) \rho = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

Bij substitutie van (12) in (7) volgt:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} (m-1) \rho \tag{14}$$

Na substitutie van (14) in (13) volgt:

$$\begin{aligned}
 & (m-1) \sin m \rho + \frac{d^2 z}{dx^2} r \cos^3 (m-1) \rho = 0, \text{ of:} \\
 & \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{m-1}{r} \cdot \frac{\sin (3m-4) \rho}{\cos^3 (m-1) \rho}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Volgens [4] (blz. 104) geldt voor de kromtestraal:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|} \quad (16)$$

Na substitutie van (14) en (15) volgt:

$$R = \frac{r}{m-1} \cdot \frac{\cos^{3/2} \frac{2(m-1)\rho}{3m-4}}{\sin \frac{2(m-1)\rho}{3m-4}} \quad (17)$$

p.o. box 177

2600 mh delft

the netherlands