



NIET-PERMANENTE GRONDWATER-
PROBLEMEN MET EEN Z.G.
VRIJE GRONDWATERSPIEGEL

Oplossingen voor een twee-dimen-
sionaal toetsprobleem m.b.v. de
eindige elementen methode

G. J. VAN EIJK

R 73 / 7 / D

Vloeistofmechanica

Afd. Weg- en Waterbouwkunde

Technische Hogeschool Delft

NIET - PERMANENTE GRONDWATERPROBLEMEN
MET EEN Z.G. VRIJE GRONDWATERSPIEGEL

Oplossingen voor een twee-dimensionaal
toetsprobleem, met behulp van de
"Eindige Elementen Methode".

DEEL ONTWERP GRONDWATER-MECHANICA

In opdracht van Dr. Ir. A. Verruijt
en Ir. C. Verspuy.

Uitgevoerd door: G.J. van Eijk.

mei 1973.

<u>I N H O U D</u>	blz.
I. <u>Inleiding.</u>	6
II. <u>Algemene beschouwingen betreffende het toets- probleem.</u>	9
II.1. Beschrijving van het toetsprobleem	9
II.2. Mogelijke benaderingswijzen:	11
1. Eindige differentiemethode	11
2. Electriche analoge modellen	12
3. Spleetmodel	13
4. Eindige elementen methode	13
III. <u>Toepassing van de variatie rekening</u>	15
III.1. Inleiding	15
III.2. De relatie tussen de variatie reke- ning en de differentiaal vergelijking	15
III.3. Toepassing van de variatie rekening op twee-dimensionale grondwaterpro- blemen	18
IV. <u>Beschrijving van de "eindige elementen metho- de".</u>	21
IV.1. Beschrijving van de berekening	21
IV.1.1. Vorm van de elementen	22
IV.1.2. Aantal parameters per element	22
IV.1.3. Afleiding van de vergelijkingen bij driehoekige elementen	22
IV.1.4. Toepassing van de kinematische voorwaar- de bij <u>niet-permanente</u> stroming	32
IV.2. Opmerkingen met betrekking tot de ver- deling van de debieten aan het vrije oppervlak	36
IV.3. Toepassing van de elementen methode op een klein probleem zonder de hulp van de computer	38

V.	<u>Oplossing van het toetsprobleem met behulp van de eindige elementen methode</u>	54
V.1.	Afmetingen van het toetsprobleem	54
V.2.	Toepassing van de elementen methode op het toetsprobleem	55
V.2.1.	Onderverdeling in elementen	55
V.2.2.	Aantal iteraties bij de bepaling van de stijghoogte in het inwendige (Gauss-Seidel iteratie)	58
V.2.3.	Variatie van de over-relaxatie factor (relax)	59
V.2.4.	Aantal iteraties bij de bepaling van het vrije oppervlak	60
V.2.5.	De grootte van de tijdstap in verband met instabiliteit	62
VI.	<u>Beschrijving van het computer programma</u>	69
VI.1.	Inleiding	69
VI.2.	Algemene declaraties + input	71
VI.3.	Type randen en geometrie	73
VI.4.	Bepaling van de structuur van de elementen	75
VI.5.	Bepaling van TY (type knooppunt) en PE (doorlatendheid per element)	77
VI.6.	Bepaling van de onderlinge contacten tussen de knooppunten (CT)	78
VI.7.	Bepaling van de coördinaten van de knooppunten (CO)	81
VI.8.	Bepalen van de eerste schatting voor PHI	82
VI.9.	Bepaling van de begin waarden van de matrix en de loadvector	83
VI.10.	Bepaling van de matrix coëfficiënten	83
VI.11.	Gauss-Seidel iteratie	85
VI.12.	Bepaling van de "Nodal Flows" (naar de knooppunten toe gerichte specifieke debieten)	88
VI.13.	Bepaling van de schijnbare verdamping H(I)	89
VI.14.	Iteratie van de positie van het vrije oppervlak	91

VI.15. De uitvoer van het vrije oppervlak en eventueel begin van de volgende tijdstap	93
Lijst van symbolen en afkortingen bij programma LM6, LM6A en LM6B	95
VII. <u>Interpretatie van de eindige elementen methode in relatie met een eindige differentie methode</u>	98
VII.1. Beschrijving van het rekenproces bij de differentie methode zoals toegepast in literatuur 7 (blz. 54-64)	99
VII.2. Het rekenschema bij de elementen methode (programma LM6)	102
VII.3. Vergelijking van de rekenschema's	104
VII.4. Foutbeschouwing bij de bepaling van het vrije oppervlak met behulp van een reeksontwikkeling volgens Taylor	106
VII.5. Gedrag van de matrix coëfficiënten P ("rekenmolecuul")	108
VIII. <u>Bespreking van de resultaten</u>	115
IX. <u>Conclusies en suggesties voor de voortzetting van het onderzoek</u>	119
Literatuur opgave	121
Overzicht van de Bijlagen	123

Hoofdstuk I. Inleiding.

In dit rapport wordt een twee-dimensionale grondwaterstroming door een grondmassief beschouwd.

Sinds 1969 wordt door de Deltadienst van Rijkswaterstaat, het Laboratorium voor Grondmechanica en de Technische Hogeschool te Delft samengewerkt bij de oplossing van twee-dimensionale grondwaterproblemen.

Het doel is het ontwerpen van een Electrisch Netwerk Analogon voor Grondwaterproblemen (ELNAG).

Hierbij heeft men een toetsprobleem opgesteld om verschillende methoden van oplossing te vergelijken.

In het kader hiervan zijn reeds verschillende afstudeerrapporten aan de Technische Hogeschool verschenen (zie: lit. (4 en 7)).

De oplossing van de differentiaal vergelijkingen, welke het toetsprobleem beschrijven, wordt in dit rapport verkregen door toepassing van de "variatierekening" met behulp van de "eindige elementenmethode".

In hoofdstuk II wordt een beschrijving van het toetsprobleem gegeven, waarbij tevens enkele reeds toegepaste oplossingswijzen genoemd worden.

De volgende hoofdstukken vormen de hoofdmoot van het rapport. De toepassing van de variatierekening wordt in het derde hoofdstuk beschreven en is gebaseerd op kennis, verkregen uit lit. (2), in hoofdzaak (2a).

In deze beknopte uiteenzetting wordt aangetoond dat het minimaliseren van een bepaalde integraal in de variatierekening equivalent is met het oplossen van een overeenkomstige differentiaalvergelijking. Tevens worden de vergelijkingen gegeven, volgens welke met behulp van de eindige elementenmethode geminimaliseerd kan worden.

Vervolgens wordt in hoofdstuk IV een uitgebreide afleiding van de vergelijkingen volgens de eindige elementenmethode voor driehoekige elementen gegeven, gebaseerd op de principes van lit. (5).

Door een toepassing van deze vergelijkingen op een eenvoudig voorbeeld wordt de werkwijze duidelijk gemaakt.

In hoofdstuk V wordt voor een aantal factoren en grootheden uit het rekenproces (bijv. het aantal elementen en de tijdstapgrootte) de optimale waarde bepaald in verband met de invloed op de resultaten.

Vervolgens wordt in het zesde hoofdstuk het computerprogramma uitgebreid beschreven.

Door lector dr. ir. A. Verruyt is in 1971 een computerprogramma geschreven voor een twee-dimensionale niet-permanente grondwaterstroming, gebaseerd op de eindige elementenmethode, het programma "LM6".

Dit programma (op ponskaarten) is in dit onderzoek toegepast op het toetsprobleem, waarbij ten behoeve van het onderzoek in hoofdstuk V extra uitvoer gecreëerd is. Verder is het programma ondermeer uitgebreid met een zelfsturende test voor de nauwkeurigheid en de mogelijkheid een freatische lijn als beginvoorwaarde in te lezen. (zie hoofdstuk VI)

Van deze programma's LM6A en LM6B is een beschrijving + stroomschema opgesteld.

In hoofdstuk VII wordt het rekenproces van de elementenmethode vergeleken met dat van de differentiemethode volgens lit. (7), waarbij de verschillen aan een nadere beschouwing worden onderworpen.

Vervolgens wordt in hoofdstuk VIII een bespreking van de resultaten gegeven. De hoogte van de vrije waterspiegel in de dam in een raai vlakbij de bewegende randvoorwaarde geeft enig verschil te zien ten opzichte van de resultaten verkregen met behulp van de differentiemethode volgens lit. (7).

Met een fijnere onderverdeling (meer elementen) is het mogelijk dit verschil te verkleinen, doch dit kost veel rekentijd.

Voor de fysische grootheden van de grond zoals de doorlatendheidscoëfficiënt en het effectieve poriëngehalte zijn gemiddelde waarden aangehouden (overeenkomstig lit. (7)).

In het laatste hoofdstuk (IX) worden conclusies getrokken en suggesties gedaan voor een eventuele voortzetting van het onderzoek.

Gebleken is dat bij een te grove onderverdeling (te grote elementen) het resultaat onnauwkeurig blijft, hoe klein de tijdstapgrootte ook genomen wordt.

(zie bijlage VIII. 2)

Tevens blijkt de rekentijd vrijwel overeen te komen met de differentiëmethode volgens lit. (7), zodat op grond hiervan geen voorkeur voor één van beide methoden aantoonbaar is.

Het verdient aanbeveling de onderverdeling te verfijnen waar de kromming van de freatische lijn groter is.

Hoofdstuk II. Algemene beschouwingen betreffende het toetsprobleem.

II.1. Beschrijving van het toetsprobleem.

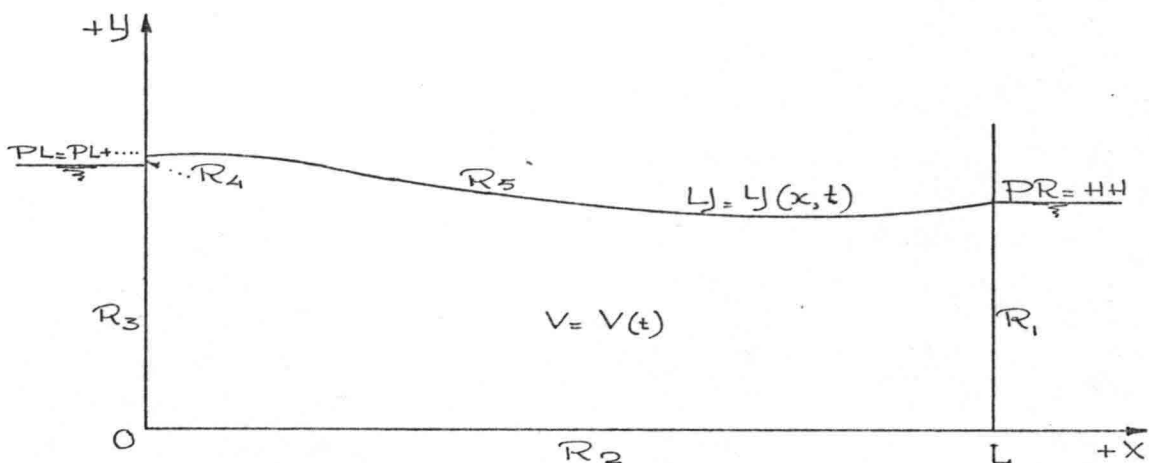


FIG. II.1

In de bovenstaande figuur is een dam aangegeven met links een in de tijd veranderlijke en rechts een constante waterstand, waarbij de dam op een ondoorlatende basis rust.

Gevraagd wordt het verloop van de freatische lijn in het zandblok bij de gegeven randvoorwaarden.

Het zandmassief wordt hierbij homogeen en isotroop verondersteld, terwijl de capillaire stijghoogte gelijk aan nul gesteld wordt. In het kader van dit onderzoek is het niet zinvol een afleiding van de differentiaal vergelijking te geven, daar deze reeds in verschillende afstudeerrapporten is opgenomen. (zie bijv. lit. (7,HII)) Aangezien de bewegende randvoorwaarde bij het programma LM6 zich bevindt aan de linkerzijde, waar $x=0$, terwijl het toetsprobleem opgezet is met rechts de veranderlijke randvoorwaarde, waar $x=L$, worden de vergelijkingen gegeven met de symbolen, welke in de elementenmethode (lit. (5)) en het program LM6 gebruikt zijn.

De modificaties betreffende volgende symbolen:

vrije waterspiegel: $Z = y$

stijghoogte: $h = \varphi$

effectieve poriëngehalte: $n_e = \beta$

De berging aan het vrije oppervlak in een tijdje dt = de hoeveelheid, die in dt instroomt - de hoeveelheid die in dt uitstroomt.

$$\beta \frac{\partial y}{\partial t} dt dx = V_y dx dt - h dx dt - V_x \frac{\partial y}{\partial x} dx dt$$

na deling door $dt \cdot dx$ volgt:

$$\beta \frac{\partial y}{\partial t} = V_y - h - V_x \frac{\partial y}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (\text{II.5})$$

Voor deze differentiaalvergelijkingen is geen analytische oplossing mogelijk. In het onderstaande zal een korte beschrijving worden gegeven van de verschillende methoden, waarmee een oplossing verkregen is.

II.2. Mogelijke benaderingswijzen:

1. De eindige differentie methode.

Bij een dergelijke methode wordt zowel in de plaats als in de tijd gediscretiseerd met behulp van een roosterwerk van punten op afstanden Δx en Δy en tijdstappen ter grootte van Δt .

Deze algemene methode is gebaseerd op het vervangen van de differentiaalquotiënten uit de differentiaalvergelijkingen door de differentiequotiënten dat wil zeggen door eindige differentie benaderingen.

In het onderstaande zal het eenvoudige principe in het kort vermeld worden.

In figuur II.3 is een roosterwerk getekend met als "maaswijdte" Δx en "maashoogte" Δy . De knooppunten van het roosterwerk worden aangeduid door de nummers 0, 1, 2, 3, 4 en hebben een gegeven of geschatte stijghoogte φ .

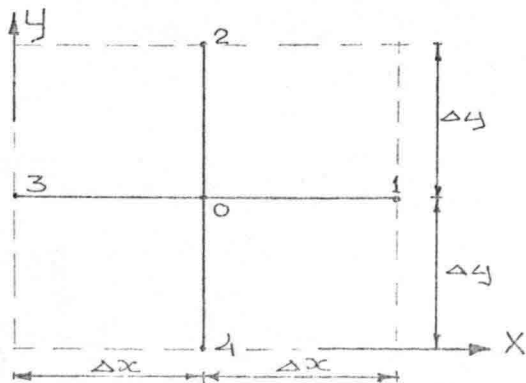


FIG. II.3

De verhouding $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ wordt a genoemd.

Voor de punten halverwege 3-0 en 0-1, resp. op $-\frac{1}{2}\Delta x$ en $+\frac{1}{2}\Delta x$ gelegen, wordt de 1^e afgeleide bepaald:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{-\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\varphi_0 - \varphi_3}{\Delta x} ; \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{+\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta x}$$

Nu wordt de 2^e afgeleide in het punt 0:

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 = \frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{+\frac{\Delta x}{2}} - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x} = \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{(\Delta x)^2}$$

Wanneer men dit ook voor de Y richting doet, kan men de differentiaalvergelijking van Laplace als volgt benaderen:

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_0 = \frac{\varphi_1 + a^2 \varphi_2 + \varphi_3 + a^2 \varphi_4 - (2 + 2a^2) \varphi_0}{\Delta x^2}$$

waaruit
$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + a^2 \varphi_2 + \varphi_3 + a^2 \varphi_4}{2 + 2a^2}$$

Voor ieder punt krijgt men een dergelijke vergelijking, zodat uiteindelijk n vergelijkingen met n onbekenden resulteren, wat veel rekenwerk oplevert. Door de ontwikkeling van de computer is dit bezwaar verdwenen. Met behulp van een reeksontwikkeling volgens Taylor is na te gaan welke fout gemaakt wordt bij de vervanging van een differentiaalquotient door een differentiequotient. In verband met mogelijke instabiliteit moeten de tijdstappen niet te groot genomen worden. In het afstudeerontwerp van de heer B.S. van der Weide is deze methode toegepast op het toetsprobleem (zie lit. (7)) en wordt daar dan ook uitgebreid besproken.

2. Electrische analoge modellen.

Bij deze modellen wordt een electrisch probleem in de plaats gesteld van een grondwaterprobleem.

Hierbij wordt gebruik gemaakt van de analogie tussen een electrische stroom in een geleider en een vloeistofstroming door een grondmassief, waarbij de electrische grootheden in de plaats komen van de hydraulische grootheden.

Voor permanente problemen maakt men reeds gebruik van het folie analogon (Teledeltospapier), wat sinds 1958 door Rijkswaterstaat ook voor niet-permanente problemen toegepast wordt.

Van meer recente datum is de ontwikkeling van het zogenaamde "Weerstandsnetwerkmodel", bestaande uit een netwerk van weerstanden, schakelelementen en condensatoren. Als men beschikt over de benodigde apparatuur is het werken met een dergelijk model eenvoudig, snel en instructief, terwijl ook aan de nauwkeurigheid hoge eisen gesteld kunnen worden. Een voordeel van deze methode ten opzichte van de numerieke methoden is dat het proces continu in de tijd verloopt. Voor nadere informatie wordt verwezen naar het afstudeerrapport van ir. C. Verspuy (lit. (6)).

3. Spleetmodel.

Dit wordt ook wel Hele-Shaw- of parallele plaatmodel genoemd en berust op de analogie tussen de stroming van een viskeuze vloeistof tussen twee evenwijdige platen, (waarvoor de wet van Poiseuille geldt) en de stroming van water door een grondmassief.

Met dit model kan zowel permanente als niet-permanente stroming gesimuleerd worden. Dit model werkt bijzonder instructief, daar de grondwaterbeweging direct waargenomen of gefilmd kan worden.

Voor een uitgebreide behandeling en bespreking van de resultaten kan in het kader van dit onderzoek worden verwezen naar het afstudeerrapport van de heer J.G. Sinke (zie lit. (4)), waarin deze methode toegepast is op het toetsprobleem.

4. De eindige elementen methode.

Deze methode wordt in dit onderzoek toegepast op het toetsprobleem en is een bijzondere toepassing van de Algemene Variatie methoden (zie lit. (2 en 5)).

Deze methode dankt zijn naam aan de toegepaste discretisering namelijk een onderverdeling in eindige elementen. Evenals in II.2.1 wordt in de tijd gediscrètiseerd. In de nu volgende hoofdstukken III en IV.1 wordt deze methode uitgebreid beschreven terwijl in IV.3 ter toelichting een eenvoudig voorbeeld is uitgewerkt.

Hoofdstuk III. Toepassing van de Variatierekening.

III.1. Inleiding.

Bij het oplossen van een differentiaalvergelijking met bijbehorende randvoorwaarden kan men de Variatierekening toepassen, waarbij een passende oppervlakteintegraal geminimaliseerd wordt.

Bij de toepassing van de Algemene Variatiemethode kunnen de volgende twee punten onderscheiden worden:

1^e. Uitgangspunt: een integraal bestaand over een gegeven gebied met een gegeven rand. Aan het einde van de volgende paragraaf wordt aangegeven aan welke eis deze integraal moet voldoen indien een dergelijke integraal niet gegeven is en men deze integraal moet zoeken.

2^e. Deze integraal minimaliseren door een functie te zoeken welke de integraal minimaal maakt.

In de praktijk gaat men uit van een bepaalde groep van functies, waaruit men die functie kiest welke het minimum van de integraal het beste benadert. Deze functie is dan de oplossing.

Alvorens deze twee punten uit te werken en toe te passen zal eerst de relatie tussen de Variatierekening en de differentiaalvergelijking beschouwd worden. Aangetoond wordt in III.2 dat het oplossen van een randvoorwaarde probleem voor een differentiaalvergelijking, wiskundig hetzelfde is als het minimaliseren van die integraal, waarvoor de gegeven differentiaalvergelijking gelijk is aan de Euler-Lagrange vergelijking in de Variatierekening. (zie lit. (2))

III.2. De relatie tussen de Variatierekening en de differentiaalvergelijking.

In deze beschouwing is om redenen van didactische aard voor de algemene integraal een functie gekozen, welke leidt tot de differentiaalvergelijkingen van Poisson en Laplace.

Beschouw de integraal:

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2 \int (x,y) \varphi \right] dx dy \dots (3.1)$$

Deze integraal bestaat over het gebied R, wat door de rand S begrensd wordt. De grootte van de integraal hangt af van de gekozen functie $\varphi = \varphi(x,y)$.

Het doel is nu het vinden van een functie $\varphi(x,y)$ met zijn eerste en tweede partiële afgeleiden continu in R, welke de waarde $\varphi = \varphi(s)$ op S verkrijgt en de integraal U minimaal maakt.

Veronderstel dat de functie $\varphi(x,y)$ de integraal minimaliseert.

Stel $\eta(x,y)$ is een continue functie, met continue eerste en tweede afgeleiden, die op de rand S de waarde nul heeft. Dan voldoet de functie $\varphi(x,y) + \alpha \eta(x,y)$ aan dezelfde randvoorwaarde als $\varphi(x,y)$ en door α voldoende klein te maken kan men het verschil met $\varphi(x,y)$ zo klein maken als men wenst. Daar $\varphi(x,y)$ de integraal minimaal maakt zal de integraal voor $\alpha \neq 0$ (en klein) grotere waarden bereiken: $U(\varphi + \alpha \eta) \geq U(\varphi)$

Men kan het ook anders formuleren:

De integraal $U(\varphi + \alpha \eta)$ als functie van α wordt voor $\alpha = 0$ minimaal, dus $\left. \frac{dU(\varphi + \alpha \eta)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$

Men noemt $\delta U = \left[\frac{d}{d\alpha} U(\varphi + \alpha \eta) \right]_{\alpha=0} \cdot 1 \dots \dots \dots (3.2)$

de variatie (3.2) van de integraal U.

Men kan nu ook zeggen: Als de functie φ de integraal een extremum moet geven is het noodzakelijk dat de variatie van de integraal (δU) gelijk aan nul is, wat ook de waarde van $\eta(x,y)$ is.

$$\delta U = \left[\frac{d}{d\alpha} U(\varphi + \alpha \eta) \right]_{\alpha=0} = 0 \dots \dots \dots (3.2)$$

waarbij U gegeven is door de vergelijking 3.1

$$\delta U = \frac{1}{2} \iint_R \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + 2 \int \eta \right] dx dy = 0 \dots (3.3)$$

Van vergelijking 3.3 zullen we de eerste twee termen herleiden.

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{R}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] dx dy = \\ & = \iint_{\mathcal{R}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] dx dy - \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \eta dx dy \end{aligned}$$

Wanneer nu op de eerste integraal het theorema van Green toegepast wordt, dat wil zeggen transformatie van oppervlakte integraal tot een lijn integraal wordt dit:

$$= \int_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \eta dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta dx \right) - \iint_{\mathcal{R}} \Delta \varphi \eta dx dy$$

Daar $\eta(x,y) = 0$ op \mathcal{S} (per definitie) is de 1^e vorm

$$\int_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \eta dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta dx \right) \quad \text{gelijk aan nul.}$$

Voor de eerste twee termen van vergelijking 3.3 kan men nu dus schrijven: $-\iint_{\mathcal{R}} \Delta \varphi \eta dx dy$, waardoor vergelijking 3.3 als volgt luidt:

$$\delta U = - \iint_{\mathcal{R}} (\Delta \varphi - f) \eta dx dy$$

Eerder is beweerd dat $\delta U = 0$, wat ook de waarde van $\eta(x,y)$ is. Dan moet gelden: $(\Delta \varphi - f) = 0$

Waaruit:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x,y) \dots (\text{vergl. van Poisson}) \dots (3.4)$$

Hieruit blijkt dus dat het minimaliseren van de integraal $U = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{R}} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2 f(x,y) \varphi \right] dx dy$

onder de conditie $\varphi = \varphi(\mathcal{S})$ op de rand \mathcal{S} , leidt tot de differentiaalvergelijking $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x,y)$

Wanneer $f(x,y) = 0$ wordt de vergelijking $\Delta \varphi = 0$ dit is de vergelijking van Laplace.

Daar deze werkwijze nogal tijdrovend is, maakt men in de praktijk gebruik van een andere relatie tussen integraal en differentiaalvergelijking (zie lit. (2)), welke in het onderstaande gegeven en toegepast zal worden.

Stel de integraal: $U(\varphi) = \iint_R f(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}) dx dy$

De aan U te stellen eis is, dat bij toepassing hierop van de Euler vergelijking (zie lit. (2)):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\frac{\partial \varphi}{\partial x})} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\frac{\partial \varphi}{\partial y})} \right\} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

de gegeven partiële differentiaalvergelijking hieraan gelijk moet zijn. Toegepast op $U = \frac{1}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2 f(x, y) \varphi \right] dx dy$

$$\text{volgt hieruit: } \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} - 2 f(x, y) \right] = 0$$

hetgeen in overeenstemming is met het bovenstaande.

III.3. Toepassing van de variatierekening op twee-dimensionale grondwaterproblemen.

In deze paragraaf worden de formules gegeven, waarvan in het volgende hoofdstuk gebruik wordt gemaakt.

Eerst zal een overzicht worden gegeven van de in deze paragraaf gebruikte functies en begrippen.

Overzicht:

1. Integraal U over gebied R met rand \mathcal{S} (doelmatig gekozen zie III.2).
2. Bepaal δU ten gevolge van variatie $\delta \varphi$ van φ .
3. Toepassing van Theorema van Green bij vereenvoudiging van δU .
4. Invoeren van een functionaal V , waarvoor geldt $\delta V = 0$.
5. Stel de oplossing is: $\varphi = \varphi(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$
6. $\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = 0$; waarin $k = 1, 2, \dots, m$. Hieruit volgt α_k , zodat $\varphi = \varphi(x, y, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ bekend is.

De vergelijkingen voor de twee-dimensionale grondwaterstroming kunnen als volgt worden samengevat (zie Hoofdstuk II).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{vergl. van Laplace})$$

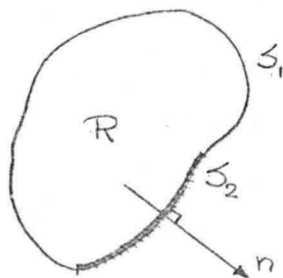
en als randvoorwaarden:

$$\varphi = f \quad \text{op het gedeelte } S_1 \text{ van de rand} \dots (3.4^a)$$

$$q_n = -k \frac{\partial \varphi}{\partial n} = g \quad \dots \quad S_2 \quad \dots \quad (3.4^b)$$

hierbij is $S_1 + S_2$ gelijk aan de rand S van het gebied R (zie figuur III.1)

Bij deze formules is de terminologie aangehouden, welke in de bekende literatuur (zie lit. (5)) gebruikelijk is en zijn de randvoorwaarden zoals beschreven in II.1 vervangen door die, welke gelden langs de delen van de rand S_1 en S_2 .



Verder geldt: Als $S_1 = 0$, is $\int_S g ds = 0$, wat betekent dat er in het gebied R evenveel water in- als uitstroomt.

De functies f en g moeten gegeven zijn.

We beschouwen nu de functionaal U (zie III.2)

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \left[k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.5)$$

en de variatie van U als $\varphi(x,y)$ gevarieerd wordt met $\delta \varphi$.

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2} \iint_R \left[2k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial y} \right] dx dy = \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \varphi k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta \varphi k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] dx dy + \\ &\quad - \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] \delta \varphi dx dy \end{aligned}$$

De tweede integraal is nul. (zie boven, vergelijking van Laplace).

Op de eerste integraal kan men het theorema van Green

$$\text{toepassen waardoor } \delta U = \int_S \delta \varphi \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds$$

Daar op de rand S_1 geldt: $\delta \varphi = 0$ volgt hieruit dat er alleen variatie in U is ten gevolge van de rand S_2 ,

waardoor :

$$\delta U = \int_{S_2} \delta \varphi k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds$$

Door $g = -k \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ volgt na substitutie :

$$\delta U + \int_{S_2} \delta \varphi \cdot g \cdot ds = 0 \dots\dots\dots(3.6)$$

We kunnen nu een functionaal V invoeren gedefinieerd door $V = U + \int_{S_2} \varphi g ds$ (3.7)

Door deze definitie is $\delta V = \delta U + \int_{S_2} \delta \varphi g ds = 0 \dots(3.8)$

Als nu langs S_2 geldt dat $g = 0$ is dit bijvoorbeeld een ondoorlatende rand en blijkt V gelijk aan U te zijn. Bij het zoeken van de functie, die de functionaal minimaal maakt, gaat men uit van een bepaalde groep van functies. Men kiest nu de functie, die de beste benadering geeft.

Stel $\varphi = \varphi(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \dots\dots(3.9)$, waarin $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ onbekende parameters zijn, terwijl $\varphi = f$ op rand S_1 (gegeven randvoorwaarde).

Na substitutie van (3.9) en (3.5) in (3.7) en toepassing van (3.8) volgt tenslotte $\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = 0$, waarin $k=1, 2, \dots, m$,

waaruit de m parameters α_k opgelost kunnen worden. Substitutie van α_k in (3.9) geeft de benaderende oplossing van het probleem.

Deze methode is uitvoerbaar, zolang de randen van de gebieden te beschrijven zijn door een bepaalde functie. In zeer veel gevallen is het echter onmogelijk om een rand door een analytische uitdrukking te beschrijven.

Reden waarom het gebied onderverdeeld wordt in een AANTAL elementaire gebieden, die elk hun bijdrage aan de functionaal leveren. (discretiseren)

Men noemt dit de "eindige elementen methode", welke in het volgende Hoofdstuk uitgewerkt wordt.

Hoofdstuk IV. Beschrijving van de "eindige elementen methode".

IV.1. Beschrijving van de berekening.

Uit het voorgaande is reeds bekend dat de eindige elementen methode beschouwd kan worden als een bijzondere toepassing van de algemene variatiemethoden. In deze paragraaf worden de uit het vorige hoofdstuk volgende vergelijkingen gegeven, gebaseerd op een onderverdeling van het beschouwde gebied in elementen. (discretisering)

Het in Hoofdstuk III gegeven schema wordt bij toepassing van de elementen methode op de niet-permanente grondwaterstroming in deze paragraaf tot onderstaand overzicht uitgebreid:

Overzicht:

1. Vorm van de elementen.
2. Aantal parameters per element (de stijghoogte in de hoekpunten).
3. De stijghoogte in het inwendige van het element:

$$\varphi = a_1 x + a_2 y + a_3$$
4. Bepaling van de vergelijkingen voor a_1 , a_2 en a_3 .
5. $U = \sum_{j=1}^n U_j$, waarbij j het betreffende element is in het inwendige en het aantal elementen in het inwendige is n .

U is dus samengesteld uit bijdragen van de elementen. Daar de stijghoogten in de hoekpunten als parameters fungeren wordt het dus een bijdrage volgend uit waarden in de knooppunten van het betreffende element.

6. $U^* = \int_{S_2} \varphi g ds$ Bijdrage van de elementen gelegen aan de rand S_2 ten gevolge van waarden in de knooppunten van deze elementen.

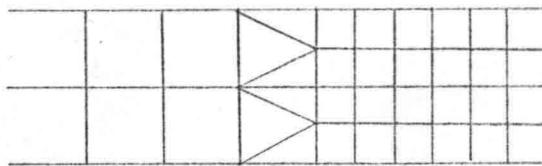
7. $V = U + U^*$

8. $\delta V = 0$

De uitwerking hiervan wordt in Hoofdstuk IV.1.1 t/m IV.1.4 gegeven.

IV.1.1. Vorm van de elementen.

Voor de elementen kiest men meestal een eenvoudige vorm, bijvoorbeeld een driehoekige of een rechthoekige, terwijl ook combinaties mogelijk zijn. Deze combinaties zou men kunnen toepassen bij de overgang van een grove naar een fijne verdeling bij vierkanten (of rechthoeken) (zie figuur IV.1).



F14.IV.1

De invoer van de gegevens van de elementen wordt meer gecompliceerd, doordat de regelmaat verbroken is. Bij het programma LM6 is door de ontwerper gekozen voor elementen met een driehoekige vorm, hiermee blijkt de bewegende vrije grondwaterspiegel goed benaderd te kunnen worden.

IV.1.2. Aantal parameters per element.

Meestal neemt men in ieder hoekpunt van een element een parameter. In dit geval neemt men de waarde van de stijghoogte φ in de hoekpunten als parameter. Wenst men de nauwkeurigheid te vergroten dan kan men meer parameters per element nemen bijvoorbeeld behalve de drie in de hoekpunten nog drie halverwege de zijden. De hoekpunten van de elementen worden de knooppunten genoemd.

IV.1.3. Afleiding van de vergelijkingen bij driehoekige elementen.

De knooppunten worden vastgelegd met hun x- en y-coördinaten. Wanneer we nu in alle punten de stijghoogte φ uitzetten, verkrijgen we in het algemeen een gekromd vlak. Dit vlak wordt benaderd door een facetten oppervlak, door de uitgezette stijghoogten in de knooppunten door rechte lijnen met elkaar te verbinden.

De waarden in de knooppunten (de juiste stijghoogte) worden nu zo gekozen, dat de functionaal (zie 3.7)

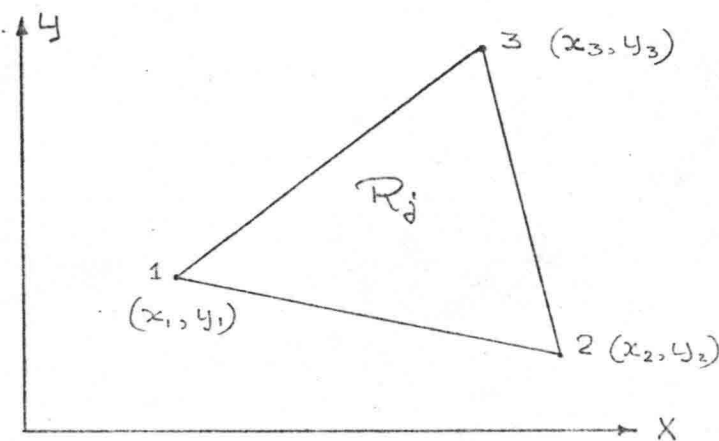
$$V = \frac{1}{2} \iint_R \left\{ k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \int_{S_2} \varphi q ds \dots\dots\dots (4.1)$$

minimaal wordt.

Voor de waarde van de stijghoogte φ binnen een element wordt een eenvoudig verband met x en y aangenomen.

In dit geval bij driehoekige elementen heeft men een lineair verloop tussen de knooppunten aanvaard.

In het onderstaande zal de bijdrage V_j aan de functionaal $V (= \sum_j V_j)$ ten gevolge van het element R_j beschouwd worden.



F14. IV.2

Voor de stijghoogte φ in element R_j geldt:

$$\boxed{\varphi = a_1 x + a_2 y + a_3} \dots\dots\dots (4.2)$$

De parameters a_1 , a_2 en a_3 worden bepaald door de waarde van φ in de knooppunten 1, 2 en 3, namelijk φ_1 , φ_2 en φ_3 (zie figuur IV.2)

We hebben nu drie vergelijkingen met drie onbekenden. Deze vergelijkingen luiden als volgt:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 \\ \varphi_2 &= a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 \\ \varphi_3 &= a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

De onbekenden a_1 , a_2 en a_3 worden nu bepaald bijvoorbeeld met behulp van de Regel van Cramer:

$$\begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{cases} = a_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = \\ &= x_1(y_1 - y_3 + y_2 - y_1) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = \\ &= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \quad \dots\dots\dots(4.4^a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Da_1 &= \begin{vmatrix} \varphi_1 & y_1 & 1 \\ \varphi_2 & y_2 & 1 \\ \varphi_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & y_1 & 1 \\ \varphi_2 - \varphi_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ \varphi_3 - \varphi_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (\varphi_2 - \varphi_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(\varphi_3 - \varphi_1) = \\ &= (y_1 - y_3 + y_2 - y_1)\varphi_1 + (y_3 - y_1)\varphi_2 + (y_1 - y_2)\varphi_3 = \\ &= (y_2 - y_3)\varphi_1 + (y_3 - y_1)\varphi_2 + (y_1 - y_2)\varphi_3 \end{aligned}$$

$$\text{Stel: } \left. \begin{aligned} y_2 - y_3 &= b_1 \\ y_3 - y_1 &= b_2 \\ y_1 - y_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.5)$$

$$\text{Waardoor } D = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \quad \dots\dots\dots(4.4^b)$$

en

$$a_1 = \frac{Da_1}{D} = \frac{b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3}{x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3}$$

In de literatuur wordt D vaak Δ genoemd

$$\text{waaruit } a_1 = \frac{b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3}{\Delta} \quad \dots\dots\dots(4.6)$$

$$Da_2 = \begin{vmatrix} x_1 & \varphi_1 & 1 \\ x_2 & \varphi_2 & 1 \\ x_3 & \varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \varphi_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & \varphi_2 - \varphi_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & \varphi_3 - \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(\varphi_3 - \varphi_1) - (x_3 - x_1)(\varphi_2 - \varphi_1) =$$

$$= \varphi_1(x_3 - x_1 - x_2 + x_1) + \varphi_2(x_1 - x_3) + \varphi_3(x_2 - x_1)$$

$$\text{Stel: } \left. \begin{array}{l} x_3 - x_2 = c_1 \\ x_1 - x_3 = c_2 \\ x_2 - x_1 = c_3 \end{array} \right\} \dots \dots (4.7)$$

D (of Δ) kan men ook op andere wijze schrijven:

$$D = \varphi_1(x_1 - x_2 + x_3 - x_1) + \varphi_2(x_1 - x_3) + \varphi_3(x_2 - x_1) =$$

$$= \varphi_1 c_1 + \varphi_2 c_2 + \varphi_3 c_3 (= \Delta) \dots \dots (4.4^c)$$

waardoor
$$a_2 = \frac{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3}{\Delta} \dots \dots (4.8)$$

Zoals later zal blijken speelt de waarde a_3 in het verdere verloop geen rol meer.

Voor de volledigheid wordt hier de uitdrukking gegeven:

$$a_3 = \frac{d_1 \varphi_1 + d_2 \varphi_2 + d_3 \varphi_3}{\Delta} \dots \dots (4.9)$$

a_3 is als volgt te bepalen:

$$Da_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \varphi_1 \\ x_2 & y_2 & \varphi_2 \\ x_3 & y_3 & \varphi_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi_1(x_2 y_3 - y_2 x_3) - \varphi_2(x_1 y_3 - x_3 y_1) + \varphi_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Wanneer we nu voor:
$$\left. \begin{array}{l} x_2 y_3 - y_2 x_3 = d_1 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 = d_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 = d_3 \end{array} \right\} \dots \dots (4.10)$$

schrijven volgt voor a_3 de bovenvermelde waarde.
(zie 4.9.)

Uit de waarden d_1, d_2, d_3 blijkt dat de waarde van Δ ook bepaald kan worden uit sommatie van d_1, d_2 en d_3 dus $\Delta = d_1 + d_2 + d_3$ (4.4^d)

De bijdrage U_j van element R_j aan de functionaal (zie vergelijking (4.1)) kan nu bepaald worden:

(zie Overzicht punt 5) $U = \sum_{j=1}^n U_j$

De doorlatendheidscoëfficiënt voor element R_j is k (constant voor het gehele massief).

Binnen het element R_j geldt per definitie:

$\varphi = a_1 x + a_2 y + a_3$ (2.2)

waaruit $\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= a_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= a_2 \end{aligned} \right\}$ waarbij a_1 en a_2 constanten zijn. (4.11)

$U = \frac{1}{2} k \iint_R \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$

Voor de bijdrage U_j geldt nu:

$U_j = \frac{1}{2} k [a_1^2 + a_2^2] \iint_{R_j} dx dy$

Hierin is $\iint_{R_j} dx dy$ het oppervlak van het driehoekige element, wat gelijk is aan $\frac{1}{2} |\Delta|$, waarbij de waarde van Δ in de vergelijkingen (4.4) gegeven is.

$U_j = \frac{1}{4} |\Delta| k (a_1^2 + a_2^2)$ (4.12)

a_1 en a_2 volgen uit de vergelijkingen (4.6 en 4.8)

$a_1 = \frac{b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3}{\Delta}$

$a_2 = \frac{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3}{\Delta}$

De vergelijking (4.12) is een kwadratische functie in φ_1, φ_2 en φ_3 en kan nu als volgt geschreven worden:

$U_j = \frac{k}{4|\Delta|} \left[\varphi_1 \{ (b_1^2 + c_1^2) \varphi_1 + (b_1 b_2 + c_1 c_2) \varphi_2 + (b_1 b_3 + c_1 c_3) \varphi_3 \} + \varphi_2 \{ (b_1 b_2 + c_1 c_2) \varphi_1 + (b_2^2 + c_2^2) \varphi_2 + (b_2 b_3 + c_2 c_3) \varphi_3 \} + \varphi_3 \{ (b_1 b_3 + c_1 c_3) \varphi_1 + (b_2 b_3 + c_2 c_3) \varphi_2 + (b_3^2 + c_3^2) \varphi_3 \} \right]$ (4.13)

Het is eenvoudiger om U_j te schrijven als sommatie van termen, gebaseerd op waarden in de knooppunten van element R_j

$$U_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 P_{kl}^j \varphi_k \varphi_l \quad \dots (4.14)$$

Hierin geldt voor P voor het element R_j :

$$P_{kl}^j = \frac{k}{2|\Delta|} \{ (b_k b_l + c_k c_l) \} \quad \dots (4.15)$$

Voor het element R_j ziet P^j er dus als volgt uit:

	$k=1$	2	3
$l=1$	P_{11}	P_{12}	P_{13}
2	P_{21}	P_{22}	P_{23}
3	P_{31}	P_{32}	P_{33}

P^j is symmetrisch gekozen

De bijdrage U_j van element R_j (zie vergelijking (4.14)) wordt gevormd door grootheden, welke gelden in de knooppunten van het betreffende element R_j .

De uitdrukking voor U wordt gevormd door de som van de bijdragen U_j van alle elementen: $U = \sum_{j=1}^n U_j$ (n = het aantal elementen)

Voor U heeft men dan een uitdrukking met de produkten van de stijghoogte φ in alle knooppunten.

Uit de vergelijking (4.14) volgt dan:

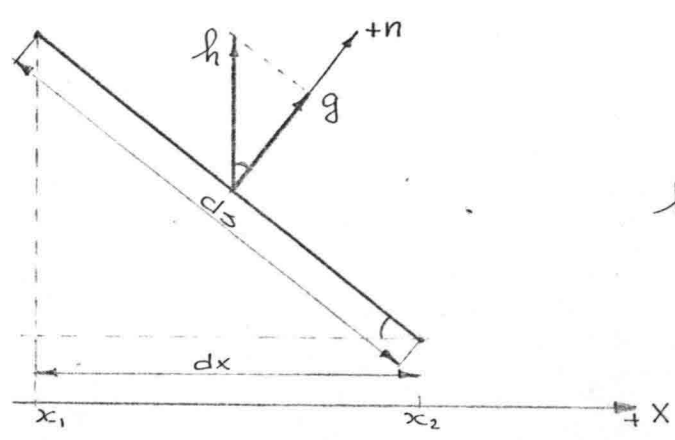
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad \dots (4.16)$$

waarbij P opgebouwd is uit bijdragen van de elementen volgens (4.15) terwijl m het totaal aantal knooppunten voorstelt waarbij $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ de stijghoogte is in de knooppunten.

In het volgende zal de tweede term van de vergelijking (3.7) nader bepaald worden (bijdrage van de rand S_2), welke hier gemakshalve U^* genoemd is.

$$U^* = \int_{S_2} \varphi q ds \quad \dots (4.17)$$

hierin is $g = -k \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (zie vergelijking (3.4^a))



$$h = \frac{ds}{dx} \cdot g$$

FIG. IV.3

In het begin van deze paragraaf is voor φ een lineair verloop tussen de knooppunten aangenomen, daar ook de rand door rechte lijnen benaderd wordt. Het specifieke debiet g loodrecht op S_2 wordt verondersteld lineair te verlopen langs S_2 .

Op praktische gronden zal inplaats van g de verticale component h van g in rekening gebracht worden. (zie figuur IV.3)

Hierdoor wordt het mogelijk regenval in te voeren.

Hierbij is $g \cdot ds = h \cdot dx$ (4.18^a) waardoor vergelijking (4.17) nu luidt: $U_j^* = \int_{x_1}^{x_2} \varphi h dx$ (4.18^b)

waarin U_j^* de bijdrage van element R_j aan U^* is.

Er wordt verondersteld dat ook h lineair verloopt tussen de knooppunten van de grens S_2 waardoor:

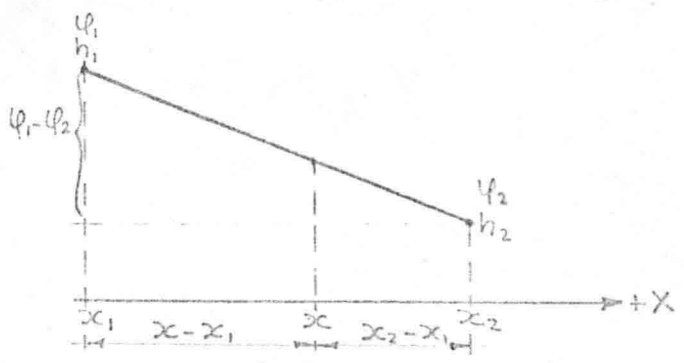


FIG IV.4

$$\varphi_x = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} \varphi_2 + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \varphi_2 + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \varphi_1$$

evenzo volgt voor $h_x = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} h_2 + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} h_1$

Hierdoor wordt vergelijking (4.18) nu:

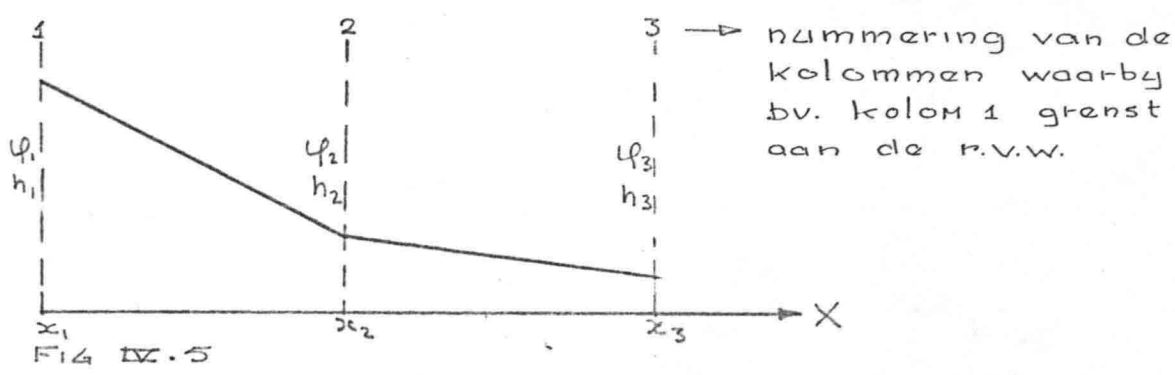
$$\begin{aligned}
 U_j^* &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{(x_2-x)}{(x_2-x_1)} \varphi_1 + \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \varphi_2 \right] \left[\frac{(x_2-x)}{(x_2-x_1)} h_1 + \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} h_2 \right] \right\} dx = \\
 &= \frac{1}{(x_2-x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ (x_2^2 - 2xx_2 + x^2) h_1 + (x_2x - x_2x_1 - x^2 + xx_1) h_2 \right\} \varphi_1 + \\
 &\quad + \left\{ (xx_2 - x^2 - x_1x_2 + x_1x) h_1 + (x^2 - 2xx_1 + x_1^2) h_2 \right\} \varphi_2 \Big|_{x_1}^{x_2} = \\
 &= \frac{1}{(x_2-x_1)^2} \left[\left\{ (xx_2^2 - x^2x_2 + \frac{x^3}{3}) h_1 + (\frac{x_2x^2}{2} - x_2x_1x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}x_1) h_2 \right\} \varphi_1 + \right. \\
 &\quad + \left\{ (\frac{x^2x_2}{2} - \frac{x^3}{3} - x_1x_2x + x_1\frac{x^2}{2}) h_1 + \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}x_1 + x_1^2x) h_2 \right\} \varphi_2 \right] \Big|_{x_1}^{x_2} = \\
 &= \frac{1}{(x_2-x_1)^2} \left[\left\{ (x_2^3 - x_1x_2^2 - x_2^3 + x_1^2x_2 + \frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^3}{3}) h_1 + \right. \right. \\
 &\quad + \left. \left. (\frac{x_2^3}{2} - \frac{x_2x_1^2}{2} - x_2^2x_1 + x_1x_1^2 - \frac{x_2^3}{3} + \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_2^2x_1}{2} - \frac{x_1^3}{2}) h_2 \right\} \varphi_1 + \right. \\
 &\quad + \left\{ (\frac{x_2^3}{2} - \frac{x_2x_1^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} + \frac{x_1^3}{3} - x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + \frac{x_1x_2^2}{2} - \frac{x_1^3}{2}) h_1 + \right. \\
 &\quad \left. + (\frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^3}{3} - x_2^2x_1 + x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1^3) h_2 \right\} \varphi_2 = \\
 &= \frac{1}{(x_2-x_1)^2} \left[\left\{ \frac{2}{6} (x_2^3 - 3x_2^2x_1 + 3x_2x_1^2 - x_1^3) h_1 + \frac{1}{6} (x_2^3 - x_1^3 - 3x_2^2x_1 + 3x_2x_1^2) h_2 \right\} \varphi_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{6} (x_2^3 - x_1^3 + 3x_2^2x_1 - 3x_1^2x_2) h_1 + \frac{2}{6} (x_2^3 - x_1^3 - 3x_2^2x_1 + 3x_2x_1^2) h_2 \right\} \varphi_2 \right]
 \end{aligned}$$

$$U_j^* = \frac{1}{6} (x_2-x_1) \left\{ (2h_1 + h_2) \varphi_1 + (h_1 + 2h_2) \varphi_2 \right\} \quad \dots (4.19)$$

De formule (4.19) geeft de bijdrage aan U^* van één element, namelijk R_j , liggend aan de rand S_2 .

Ter verkrijging van U^* dient men dus de bijdragen van alle elementen langs de rand S_2 te sommeren.

Ter verduidelijking wordt hier eerst over twee elementen gesommeerd (U_2^*), daar de coëfficiënten uit deze vorm later in de berekening veel gebruikt zullen worden.



$$U_2^* = \frac{1}{2}(x_2-x_1) \{ (2h_1+h_2)\varphi_1 + (h_1+2h_2)\varphi_2 \} + \frac{1}{2}(x_3-x_2) \{ (2h_2+h_3)\varphi_2 + (h_2+2h_3)\varphi_3 \}$$

De coëfficiënten van φ_j worden q_j genoemd waardoor:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}(x_2-x_1)(2h_1+h_2) \\ q_2 &= \frac{1}{2}(x_2-x_1)(h_1+2h_2) + \frac{1}{2}(x_3-x_2)(2h_2+h_3) \end{aligned} \right\} \dots (4.20)$$

Alle coëfficiënten q van de inwendige kolommen hebben dezelfde vorm als q_2 en de laatste kolom heeft een coëfficiënt q overeenkomstig q_1 .

In het geval van een regelmatige verdeling ($x_2-x_1 = x_3-x_2 = dw$) kan men q_2 vereenvoudigen tot

$$q_2 = \frac{1}{2} dw (h_1 + 4h_2 + h_3)$$

Voor U^* kunnen we nu schrijven:

$$U^* = \sum_{j=1}^m q_j \varphi_j \dots (4.21)$$

Hierin is m het totaal aantal knooppunten.

Voor U^* worden alleen de bijdragen in rekening gebracht van de knooppunten aan de bovenrand (de rand S_2), waar water toegevoerd of onttrokken wordt. Voor alle niet op deze rand liggende knooppunten moet dus $q_j = 0$ gesteld worden.

Uit de vergelijkingen (4.2), (4.6), (4.8) en (4.9) blijkt dat binnen element R_j de stijghoogte φ een functie is van $x, y, \varphi_1, \varphi_2$ en φ_3

Over het gehele gebied R met m knooppunten zal nu gelden: $\varphi = \varphi(x, y, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, $\dots (4.22)$

waarbij φ op de rand S_1 gelijk is aan: $\varphi = f$

Substitueert men nu $\varphi = \varphi(x, y, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ in de vergelijking (3.7), dan wordt de functionaal: $V = V(x, y, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ $\dots (4.23)$

Deze functionaal moet volgens vergelijking (3.8)

geminimaliseerd worden waaruit volgt:

$$\delta V = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \cdot \delta \varphi_i = 0 \quad \dots (2.24)$$

Dit moet volgens Hoofdstuk III.2 gelden voor alle $\delta \varphi_i$ waaruit volgt: $\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0 \quad \dots (2.25)$

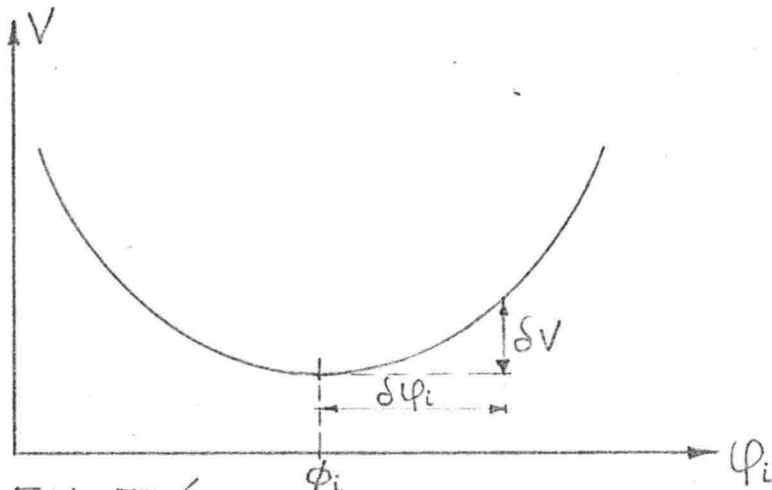


FIG IV.6

Door deze eis ($\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0$) wordt de waarde φ_i bepaald, want alleen als $\varphi_i = \varphi_i$ geldt: (zie ook figuur IV.6) $\delta V = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \cdot \delta \varphi_i = 0$ onafhankelijk van de waarde $\delta \varphi_i$.

Daar de functionaal per definitie gelijk is aan $V = U + U^*$ (zie vergelijking 3.7, 4.1 en 4.17) verkrijgt men door substitutie van (4.16) en (4.21) in $V = U + U^*$ de uitdrukking (4.26)

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_i \varphi_j + \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j \quad \dots (4.26)$$

Op de rand S_1 zijn de waarden van φ gegeven.

De overige parameters φ worden bepaald door minimalisering van V (vergelijking (3.8) en (4.25)) zodat:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0 \quad \dots (4.25)$$

waarin i alle waarden k ($k = 1, 2, \dots, m$) aanneemt, behalve die waar φ bekend is.

Daar $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi_i} = \begin{cases} 1, \text{voor } k=i \\ 0, \text{voor } k \neq i \end{cases}$ volgt hieruit voor $\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}$:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m P_{kj} \varphi_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_{ik} \varphi_i + Q_k = 0$$

Omdat we hier te maken hebben met een symmetrische matrix, doet het er niet toe of we nemen $i = 1, 2, 3, \dots, m$ of $j = 1, 2, 3, \dots, m$. Verder was $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi_i} = 1$ voor $k = i$ waardoor:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} &= \sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_j + Q_i = 0 \\ \text{of } \sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_j &= -Q_i \end{aligned} \right\} \dots (4.27)$$

Hierbij neemt i alle waarden aan waarvoor φ onbekend is (zie boven).

Bij φ_j neemt j alle waarden aan, inclusief de waarden waarvoor φ reeds bekend is. Men kan nu alle onbekende waarden groeperen, waardoor alle onbekenden in het linker lid staan.

Stel dat alle waarden $1, 2, \dots, m$ worden voorgesteld door T en het deel van T , wat de nummers van de knooppunten waar φ onbekend is, bevat door T^* . Hierdoor wordt (4.27)

$$\sum_{j \in T^*} P_{ij} \varphi_j = Q_i - \sum_{\substack{j \in T \\ j \notin T^*}} P_{ij} \varphi_j \quad \text{waarby } i \in T^* \quad \dots (4.28)$$

Het symbool \in betekent: behorende tot.

Het symbool \notin betekent: niet behorende tot.

IV.1.4. Toepassing van de kinematische voorwaarde bij niet-permanente stroming.

In dit gedeelte zal de niet-permanente stroming met een vrij oppervlak beschouwd worden. Hierbij zal de berging ten gevolge van volumetrische deformatie verwaarloosd worden.

Langs het vrije oppervlak gelden de onderstaande vergelijkingen (zie Hoofdstuk II.1), waarbij vergelijking (4.30) afgeleid is uit de massabalans voor een elementje aan het vrije oppervlak. (zie vergelijking (2.5))

$$\varphi = y \quad \dots (4.29)$$

$$\beta \frac{\partial y}{\partial t} = v_y - h - v_x \frac{\partial y}{\partial x} \quad \dots (4.30)$$

Hierin is β de effectieve porositeit ook wel n_e genoemd, terwijl h gelijk is aan de verdamping (of regenval als h kleiner dan nul is) en Y gelijk is aan Y coördinaat van het vrije oppervlak.

Wanneer men nu een hoeveelheid h^* invoert, gedefinieerd als $h^* = h + \beta \frac{\partial y}{\partial t}$... (4.31)

wordt de vergelijking (4.30): $v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x} = h^*$... (4.32)

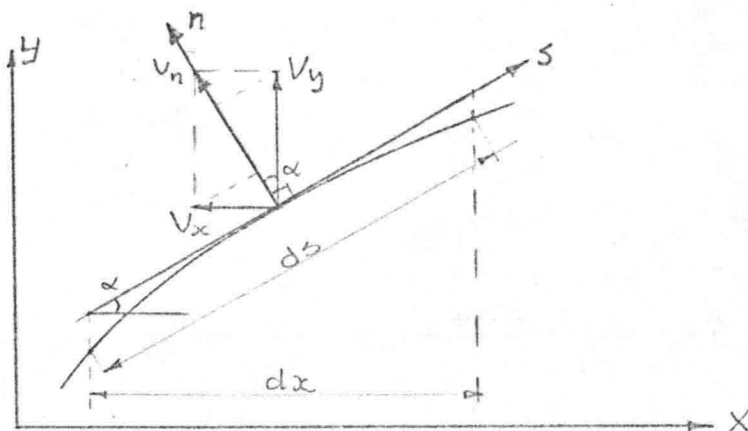


FIG. IV.7

Uit de figuur IV.7 volgt: $dx = ds \cos \alpha$, waarin α de hellingshoek van het vrije oppervlak is en S eraan evenwijdig loopt.

$$v_n = v_y \cos \alpha - v_x \sin \alpha = \left[v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x} \right] \frac{dx}{ds}$$

waarin n loodrecht op het vrije oppervlak staat

Voor vergelijking (4.32) volgt nu

$$v_n \cdot ds = h^* \cdot dx \quad \dots (4.33)$$

Nu de tijdsafhankelijke randvoorwaarde op deze wijze geschreven kan worden, komt zij overeen met de vergelijking (4.18^a) (zie IV.1.3), waarbij h^* overeenkomt met de verdamping h .

Het verschil met IV.1.3 is echter dat de waarde van h opgegeven wordt, terwijl hier de h* berekend moet worden.

In het onderstaande zal de berekening besproken worden. Uitgangspunt is een stationaire begintoestand, waarbij de veranderende randvoorwaarde start op het tijdstip t = 0. De hoogte van het vrije oppervlak in het begin wordt y^0 genoemd.

Nu wordt in de tijd gediscretiseerd en wordt het vrije oppervlak op het tijdstip Δt als volgt bepaald:

Men stelt $\varphi = y_0$ en past dan de formules van IV.1.3 toe. Wanneer de nieuwe waarden voor φ voldoende nauwkeurig zijn bepaald, berekent men voor de punten langs het vrije oppervlak de naar de knooppunten gerichte debieten q_i volgens vergelijking (4.27).

$$q_i = - \sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_j$$

De waarden h_i^* worden nu bepaald uit q_i volgens de vergelijkingen (4.20) waarbij h door h* vervangen wordt.

In de vergelijking (4.31) kan men $\frac{\partial y}{\partial t}$ benaderen door

$\frac{y^1 - y^0}{\Delta t}$ waarin y^1 de nieuwe positie van het vrije oppervlak is. De vergelijking (4.31) luidt nu voor knooppunt i: $h_i^* = h_i + \beta \frac{(y_i^1 - y_i^0)}{\Delta t}$

Voor de nieuwe positie van het vrije oppervlak y_i^1 volgt hieruit:

$$y_i^1 = y_i^0 + \Delta t \frac{(h_i^* - h_i)}{\beta} \dots (4.34)$$

Hierbij is y^0 de waarde aan het begin van een tijdstap ter grootte van Δt en y^1 de waarde aan het eind van de tijdstap.

Van de in deze paragraaf afgeleide vergelijkingen wordt in Hoofdstuk IV.3 een eenvoudige toepassing gegeven op een klein voorbeeld. Hierbij wordt tevens een vergelijking gemaakt met de iteratieve manier van oplossen, zoals gebruikt in het computer programma LM6, waarmee voor het toetsprobleem een oplossing verkregen is.

In Hoofdstuk IV.1.3 is de coëfficiënt P per definitie gelijk aan de vergelijking (4.15) te weten:

$$P_{kl}^j = \frac{k}{2|\Delta|} \{ b_k b_l + c_k c_l \}$$

Wanneer de driehoekige elementen gevormd worden door diagonalen te trekken in een rechthoekig roosterwerk, blijkt de coëfficiënt P volgens de diagonalen de waarde nul te verkrijgen. Steeds wordt namelijk één van de waarden b (zie vergelijking 4.5) en c (zie vergelijking 4.7) gelijk aan nul. Op dit "gedrag" van de matrix coëfficiënt P wordt in Hoofdstuk VII.5 teruggekomen.

Bij het toetsprobleem en het voorbeeld (Hoofdstuk IV.3) treedt geen regenval of verdamping op, reden waarom in het vervolg voor h in de vergelijkingen de waarde nul ingevoerd wordt. Voor de toepassing van deze vergelijkingen wordt het volgende overzicht gegeven.

Overzicht bij de niet-stationaire grondwaterstroming.

1. $\sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_j = 0$ volgens vergelijking (4.27)
(geen verdamping of evaporatie)
voor de punten in het inwendige
waarbij
2. $q_i = - \sum_{j=1}^{m'} P_{ij} \varphi_j$ voor de punten aan de rand met
vrije waterspiegel
3. h_i^* berekenen uit (4.20):
$$q_i = \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(h_{i-1} + 2h_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(2h_i + h_{i+1})$$
4. Bepaling vrij oppervlak volgens de vergelijking (4.34):
$$y_i' = y_i^0 + \Delta t \frac{h_i^*}{B}$$

Er van uitgaande dat een derde gedeelte van het oppervlak van de driehoeken ABC en CDE afstroomt, verkrijgt men de vergelijking (4.20).

$$q_2 = dw \left\{ h_2 + \frac{1}{3}(h_1 - h_2) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(h_2 - h_3) \cdot \frac{1}{2} \right\} = \\ = \frac{1}{6} dw \{ h_1 + 4h_2 + h_3 \}$$

Wanneer er inplaats van $\frac{1}{3}$, nu $\frac{1}{4}$ afstroomt, wordt het vrije oppervlak gegeven door de lijn GHI (onderbroken lijn met aan weerszijden gearceerde $\Delta\Delta$).

Hierbij wordt q voorgesteld door de hoeveelheid water, die per raai geborgen wordt gedurende de tijdstap tussen de positie van de waterspiegel aan het begin en aan het einde van de tijdstap (zie figuur IV.9).

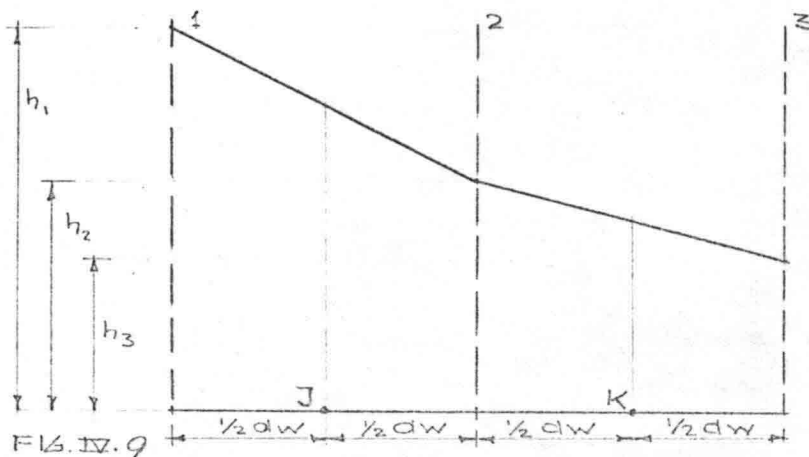


FIG. IV.9

Wanneer men q_2 bepaalt als het oppervlak tussen J en K (figuur IV.9) blijkt dit overeen te komen met de bovengenoemde factor $\frac{1}{4}$:

$$q_2 = \frac{1}{4} dw \left\{ h_2 + \frac{h_1 + h_2}{2} + h_2 + \frac{h_2 + h_3}{2} \right\} = \frac{1}{4} dw \left\{ 3h_2 + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3 \right\} = \\ = \frac{1}{8} dw \{ h_1 + 6h_2 + h_3 \} \quad \dots(4.35)$$

Het is ook mogelijk inplaats van $\frac{1}{3}$ de factor $\frac{1}{2}$ te nemen, wat overeenkomt met de helft van het oppervlak tussen 1 en 3 namelijk:

$$q_2 = \frac{1}{2} dw \left\{ \frac{h_1 + h_2 + h_2 + h_3}{2} \right\} \\ = \frac{1}{4} dw \{ h_1 + 2h_2 + h_3 \} \quad \dots(4.36)$$

Er van uitgaande dat een derde gedeelte van het oppervlak van de driehoeken ABC en CDE afstroomt, verkrijgt men de vergelijking (4.20).

$$\begin{aligned}
 q_2 &= dw \left\{ h_2 + \frac{1}{3}(h_1 - h_2) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(h_2 - h_3) \cdot \frac{1}{2} \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} dw \left\{ h_1 + 4 h_2 + h_3 \right\}
 \end{aligned}$$

Wanneer er inplaats van $\frac{1}{3}$ nu $\frac{1}{4}$ afstroomt, wordt het vrije oppervlak gegeven door de lijn GHI (onderbroken lijn met aan weerszijden gearceerde $\Delta\Delta$).

Hierbij wordt q voorgesteld door de hoeveelheid water, die per raai geborgen wordt gedurende de tijdstap tussen de positie van de waterspiegel aan het begin en aan het einde van de tijdstap (zie figuur IV.9).

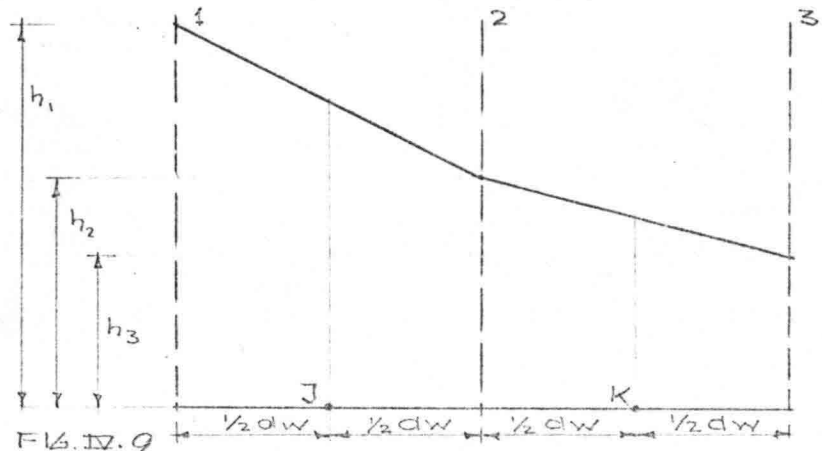


FIG. IV.9

Wanneer men q_2 bepaalt als het oppervlak tussen J en K (figuur IV.9) blijkt dit overeen te komen met de bovengenoemde factor $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \frac{1}{4} dw \left\{ h_2 + \frac{h_1 + h_2}{2} + h_2 + \frac{h_2 + h_3}{2} \right\} = \frac{1}{4} dw \left\{ 3 h_2 + \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} h_3 \right\} = \\
 &= \frac{1}{8} dw \left\{ h_1 + 6 h_2 + h_3 \right\} \quad \dots (4.35)
 \end{aligned}$$

Het is ook mogelijk inplaats van $\frac{1}{3}$ de factor $\frac{1}{2}$ te nemen, wat overeenkomt met de helft van het oppervlak tussen 1 en 3 namelijk:

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \frac{1}{2} dw \left\{ \frac{h_1 + h_2 + h_2 + h_3}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} dw \left\{ h_1 + 2 h_2 + h_3 \right\} \quad \dots (4.36)
 \end{aligned}$$

Bij de formule (4.35) stroomt er geen water door de dam, daarentegen bij de formule (4.36) gaat er veel water door de dam, terwijl de formule (4.20) zich qua gedrag hiertussen bevindt.

Wanneer de afstand dw voldoende klein wordt genomen verdwijnen deze verschillen nagenoeg.

IV.3. Toepassing van de elementen methode op een klein probleem zonder de hulp van de computer.

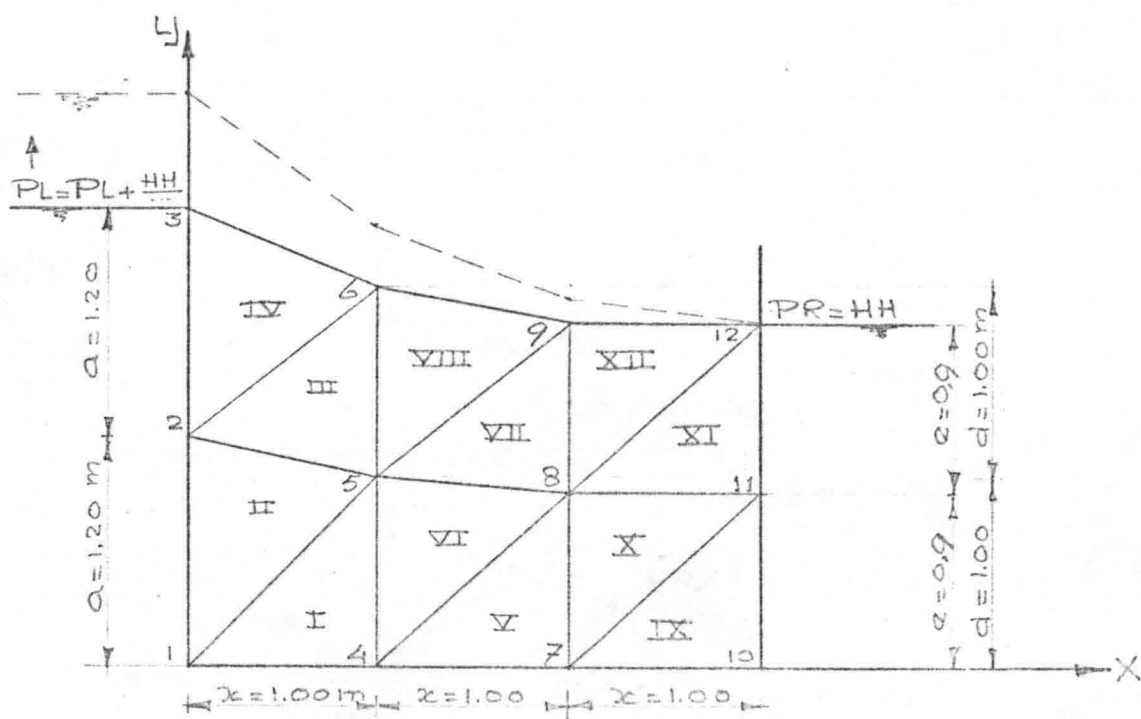


FIG. IV.10

In de bovenstaande figuur zijn de afmetingen van het voorbeeld gegeven. De randen voldoen aan dezelfde voorwaarden, welke ook voor het toetsprobleem gelden. De onderverdeling van dit voorbeeld wordt als volgt gekenmerkt:

NR = 3 dit is het aantal rijen knooppunten.

NC = 4 dit is het aantal kolommen knooppunten.

Hierbij zijn de knooppunten regelmatig verdeeld.

Overeenkomstig de formules uit IV.1.3 wordt nu de coëfficiëntenmatrix berekend, welke bestaat uit de bijdragen van alle elementen aan de coëfficiënt P.

Zowel de knooppunten als de elementen zijn op een bepaalde manier genummerd, respectievelijk 1, 2, 3... en I, II, III....

Daar er geen regenval of verdamping is wordt de vergelijking (4.27): $\sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_j = 0$

waarbij m het totaal aantal knooppunten is.

Wanneer hieruit φ_j bepaald is, wordt overeenkomstig de formules uit IV.1.4 het vrije oppervlak berekend met behulp van de vergelijkingen (4.27), (4.20) en (4.34) te weten q_i, h_i^* en y_i .

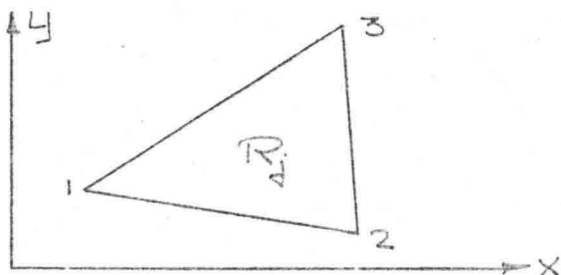
Voor een element R_j wordt de P gegeven door formule (4.15):

$$P_{kl}^j = \frac{K}{2|\Delta|} \{ b_k b_l + c_k c_l \}$$

waarbij $k = 1, 2, 3$

$l = 1, 2, 3$

$K =$ doorlatendheid van de grond (is constant)



De knooppunten per element zijn bij de afleiding van de formules in IV.1.3 volgens bijgaande figuur genummerd (linksom).

Voor b en c gelden per definitie de volgende waarden (4.5 en 4.7):

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

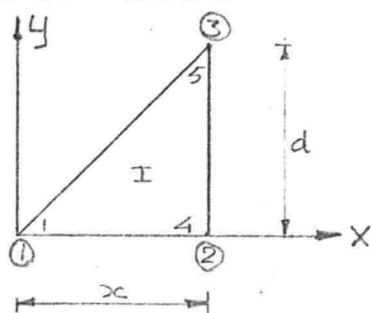
$$c_2 = x_1 - x_3$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_3 = x_2 - x_1$$

In het onderstaande zal de P per element berekend worden:

Element I



$$P_{kl}^j = \frac{K}{2|\Delta|} (b_k b_l + c_k c_l)$$

In dit voorbeeld wordt voor K de waarde 1 genomen.

$\frac{\Delta}{2}$ = het oppervlak van het element (voor element 1: $\Delta = xd$)

$$b_1 = y_2 - y_3 = -d$$

$$c_1 = x_3 - x_2 = 0$$

$$b_2 = y_3 - y_1 = +d$$

$$c_2 = x_1 - x_3 = -x$$

$$b_3 = y_1 - y_2 = 0$$

$$c_3 = x_2 - x_1 = +x$$

$$P_{11} = \frac{d^2}{2xd}$$

$$P_{44} = \frac{d^2 + x^2}{2xd}$$

$$P_{55} = +\frac{x^2}{2xd}$$

$$P_{14} = -\frac{d^2}{2xd}$$

$$P_{41} = \frac{-d^2}{2xd}$$

$$P_{51} = 0$$

$$P_{15} = 0$$

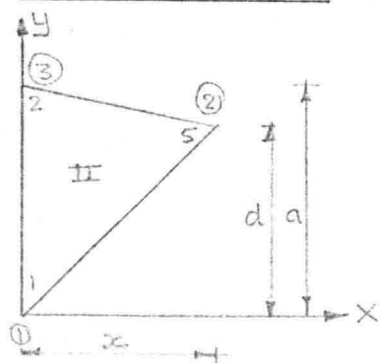
$$P_{45} = \frac{-x^2}{2xd}$$

$$P_{54} = \frac{-x^2}{2xd}$$

NB: P is symmetrisch gekozen, zodat

$$P_{14} = P_{41} \quad P_{15} = P_{51} \quad P_{45} = P_{54}$$

Element II



$$\Delta = xa$$

$$b_1 = d - a$$

$$c_1 = -x$$

$$b_2 = a$$

$$c_2 = 0$$

$$b_3 = d$$

$$c_3 = +x$$

$$P_{11} = \frac{1}{2xa} \{ (d-a)^2 + x^2 \}$$

$$P_{55} = \frac{1}{2xa} \{ a^2 \}$$

$$P_{15} = \frac{1}{2xa} \{ a(d-a) + 0 \}$$

$$P_{51} = \frac{1}{2xa} \{ a(d-a) \}$$

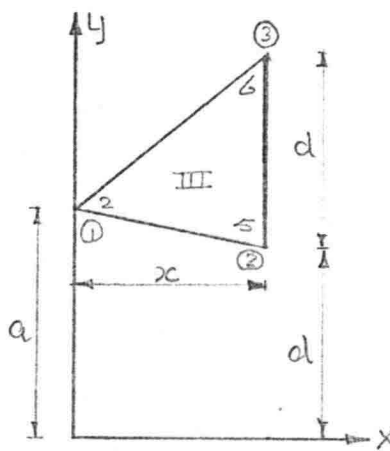
$$P_{12} = \frac{1}{2xa} \{ -d(d-a) - x^2 \}$$

$$P_{52} = \frac{1}{2xa} \{ -ad \}$$

$$P_{22} = \frac{1}{2xa} \{ d^2 + x^2 \}$$

$$P_{21} = \frac{1}{2xa} \{ -d(d-a) - x^2 \}$$

$$P_{25} = \frac{1}{2xa} \{ -ad \}$$

Element III

$$\Delta = xd$$

$$b_1 = -d \quad c_1 = 0$$

$$b_2 = 2d - a \quad c_2 = -x$$

$$b_3 = a - d \quad c_3 = +x$$

$$P_{22} = \frac{1}{2xd} \{ d^2 \}$$

$$P_{25} = \frac{1}{2xd} \{ -d(2d-a) \}$$

$$P_{26} = \frac{1}{2xd} \{ -d(a-d) \}$$

$$P_{55} = \frac{1}{2xd} \{ (2d-a)^2 + x^2 \}$$

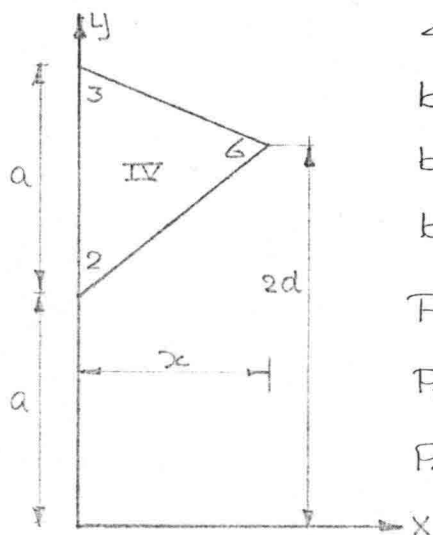
$$P_{66} = \frac{1}{2xd} \{ (a-d)^2 + x^2 \}$$

$$P_{52} = \frac{1}{2xd} \{ -d(2d-a) \}$$

$$P_{62} = \frac{1}{2xd} \{ -d(a-d) \}$$

$$P_{56} = \frac{1}{2xd} \{ (2d-a)(a-d) - x^2 \}$$

$$P_{65} = \frac{1}{2xd} \{ (2d-a)(a-d) - x^2 \}$$

Element IV

$$\Delta = xa$$

$$b_1 = 2(d-a) \quad c_1 = -x$$

$$b_2 = a \quad c_2 = 0$$

$$b_3 = a - 2d \quad c_3 = x$$

$$P_{22} = \frac{1}{2xa} \{ [2(d-a)]^2 + x^2 \}$$

$$P_{26} = \frac{1}{2xa} \{ 2a(d-a) \}$$

$$P_{23} = \frac{1}{2xa} \{ 2(d-a)(a-2d) - x^2 \}$$

$$P_{66} = \frac{1}{2xa} \{ a^2 \}$$

$$P_{33} = \frac{1}{2xa} \{ (a-2d)^2 + x^2 \}$$

$$P_{22} = \frac{1}{2xa} \{ 2a(d-a) \}$$

$$P_{32} = \frac{1}{2xa} \{ 2(d-a)(a-2d) - x^2 \}$$

$$P_{63} = \frac{1}{2xa} \{ a(a-2d) \}$$

$$P_{36} = \frac{1}{2xa} \{ a(a-2d) \}$$

Element V

Dit element is te vergelijken met element I en de matrix coëfficiënten P volgen hieruit door a en d respectievelijk te vervangen door d en e , waarbij in plaats van 1, 4 en 5 de knooppunten 4, 7 en 8 gebruikt worden.

$$\begin{aligned} P_{44} &= \frac{1}{2xe} \{e^2\} & P_{77} &= \frac{1}{2xe} \{e^2 + x^2\} & P_{88} &= \frac{1}{2xe} \{x^2\} \\ P_{47} &= \frac{1}{2xe} \{-e^2\} & P_{74} &= \frac{1}{2xe} \{-e^2\} & P_{84} &= \frac{1}{2xe} \{0\} \\ P_{48} &= \frac{1}{2xe} \{0\} & P_{78} &= \frac{1}{2xe} \{-x^2\} & P_{87} &= \frac{1}{2xe} \{-x^2\} \end{aligned}$$

Element VI

Te vergelijken met element II, echter $a=d$ en $d=e$

$$\begin{aligned} P_{44} &= \frac{1}{2xd} \{(e-d)^2 + x^2\} & P_{88} &= \frac{1}{2xd} \{d^2\} & P_{55} &= \frac{1}{2xd} \{e^2 + x^2\} \\ P_{48} &= \frac{1}{2xd} \{d(e-d)\} & P_{84} &= \frac{1}{2xd} \{d(e-d)\} & P_{54} &= \frac{1}{2xd} \{-e(e-d) - x^2\} \\ P_{45} &= \frac{1}{2xd} \{-e(e-d) - x^2\} & P_{85} &= \frac{1}{2xd} \{-(de)\} & P_{58} &= \frac{1}{2xd} \{-(de)\} \end{aligned}$$

Element VII

Te vergelijken met element III, echter $a=d$ en $d=e$

$$\begin{aligned} P_{55} &= \frac{1}{2xe} \{e^2\} & P_{88} &= \frac{1}{2xe} \{(2e-d)^2 + x^2\} \\ P_{58} &= \frac{1}{2xe} \{-e(2e-d)\} & P_{85} &= \frac{1}{2xe} \{-e(2e-d)\} \\ P_{59} &= \frac{1}{2xe} \{-e(d-e)\} & P_{89} &= \frac{1}{2xe} \{(2e-d)(d-e) - x^2\} \\ P_{99} &= \frac{1}{2xe} \{(d-e)^2 + x^2\} \\ P_{95} &= \frac{1}{2xe} \{-e(d-e)\} \\ P_{98} &= \frac{1}{2xe} \{(2e-d)(d-e) - x^2\} \end{aligned}$$

Element VIII

Te vergelijken met element IV echter a=d en d=e

$$\begin{aligned}
P_{55} &= \frac{1}{2xd} \{ \{2(e-d)\}^2 + x^2 \} & P_{99} &= \frac{1}{2xd} \{ d^2 \} \\
P_{59} &= \frac{1}{2xd} \{ 2d(e-d) \} & P_{95} &= \frac{1}{2xd} \{ 2d(e-d) \} \\
P_{56} &= \frac{1}{2xd} \{ 2(e-d)(d-2e) - x^2 \} & P_{96} &= \frac{1}{2xd} \{ d(d-2e) \} \\
P_{66} &= \frac{1}{2xd} \{ (d-2e)^2 + x^2 \} \\
P_{65} &= \frac{1}{2xd} \{ 2(e-d)(d-2e) - x^2 \} \\
P_{69} &= \frac{1}{2xd} \{ d(d-2e) \}
\end{aligned}$$

Element IX

De coëff. P komen overeen met die van element V (zelfde geometrie)

$$\begin{aligned}
P_{77} &= \frac{1}{2xe} \{ e^2 \} & P_{1010} &= \frac{1}{2xe} \{ e^2 + x^2 \} & P_{1111} &= \frac{1}{2xe} \{ x^2 \} \\
P_{710} &= \frac{1}{2xe} \{ -e^2 \} & P_{107} &= \frac{1}{2xe} \{ -e^2 \} & P_{117} &= \frac{1}{2xe} \{ 0 \} \\
P_{711} &= \frac{1}{2xe} \{ 0 \} & P_{1011} &= \frac{1}{2xe} \{ -x^2 \} & P_{1110} &= \frac{1}{2xe} \{ -x^2 \}
\end{aligned}$$

Element X

Te vergelijken met element VI, echter d=e, waardoor de coëff P langs de diagonalen gelijk aan nul wordt.

$$\begin{aligned}
P_{77} &= \frac{1}{2xe} \{ x^2 \} & P_{1111} &= \frac{1}{2xe} \{ e^2 \} & P_{88} &= \frac{1}{2xe} \{ e^2 + x^2 \} \\
P_{711} &= \frac{1}{2xe} \{ 0 \} & P_{117} &= \frac{1}{2xe} \{ 0 \} & P_{87} &= \frac{1}{2xe} \{ -x^2 \} \\
P_{78} &= \frac{1}{2xe} \{ -x^2 \} & P_{118} &= \frac{1}{2xe} \{ -e^2 \} & P_{811} &= \frac{1}{2xe} \{ -e^2 \}
\end{aligned}$$

Element XI

De coëff. P komen overeen met die van element IX

$$\begin{array}{lll}
 P_{88} = \frac{1}{2xe} \{ e^2 \} & P_{1111} = \frac{1}{2xe} \{ e^2 + x^2 \} & P_{1212} = \frac{1}{2xe} \{ x^2 \} \\
 P_{811} = \frac{1}{2xe} \{ -e^2 \} & P_{118} = \frac{1}{2xe} \{ -e^2 \} & P_{128} = \frac{1}{2xe} \{ 0 \} \\
 P_{812} = \frac{1}{2xe} \{ 0 \} & P_{112} = \frac{1}{2xe} \{ -x^2 \} & P_{1211} = \frac{1}{2xe} \{ -x^2 \}
 \end{array}$$

Element XII

De coëff. P komen overeen met die van element X

$$\begin{array}{lll}
 P_{88} = \frac{1}{2xe} \{ x^2 \} & P_{1212} = \frac{1}{2xe} \{ e^2 \} & P_{99} = \frac{1}{2xe} \{ e^2 + x^2 \} \\
 P_{812} = \frac{1}{2xe} \{ 0 \} & P_{128} = \frac{1}{2xe} \{ 0 \} & P_{98} = \frac{1}{2xe} \{ -x^2 \} \\
 P_{89} = \frac{1}{2xe} \{ -x^2 \} & P_{129} = \frac{1}{2xe} \{ -e^2 \} & P_{912} = \frac{1}{2xe} \{ -e^2 \}
 \end{array}$$

In de bovenstaande uitdrukkingen is P uitgedrukt in de letters a, d, e en x, opdat bij wijziging van de waterspiegel de coëfficiënten P snel bepaald kunnen worden. Dit geldt echter niet voor de elementen IX t/m XII, daar door de horizontale waterspiegel verschillende coëfficiënten P sterk vereenvoudigd of geheel weggevallen zijn.

De coëfficiënten P langs de diagonalen zijn hier namelijk geheel verdwenen!

Wanneer de waterspiegel een kleine helling aanneemt moeten deze coëfficiënten er weer ingebracht worden. De reeds bepaalde coëfficiënten kunnen nu ter illustratie in een matrix gezet worden, waarbij zowel horizontaal als vertikaal het aantal knooppunten m (bij programma LM6 NOD genoemd) uitgezet wordt. (zie bladzijde 46)

De coëfficiënten P worden namelijk per element bepaald, geldend voor de knooppunten van dat element. Verder is hier toevallig het aantal knooppunten gelijk aan het aantal elementen.

Het aantal knooppunten (NOD) is gelijk aan het produkt van het aantal rijen (NR) en kolommen (NC):

$$NOD = NR \times NC = 3 \times 4 = 12$$

Het aantal elementen wordt NEL genoemd waarbij:

$$NEL = 2 \times (NR - 1) (NC - 1) \quad NEL = 2 (3 - 1) (4 - 1) = 12$$

De in de matrix geplaatste coëfficiënt P_{ij} wordt samengesteld uit bijdragen uit alle elementen. Hieronder zal voor knooppunt 5 de coëfficiënt P_{55} uitgeschreven worden:

$$P_{55} = \frac{1}{2xd} (x^2) + \frac{1}{2xa} (a^2) + \frac{1}{2xd} \{ (2d-a)^2 + x^2 \} + \frac{1}{2xd} \{ e^2 + x^2 \} + \frac{1}{2xe} (e^2) +$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 tgv element I tgv el. II tgv el. III tgv el. VI tgv. el. VII

$$+ \frac{1}{2xd} \{ [2(e-d)]^2 + x^2 \}$$

\uparrow
 tgv element VIII

$$P_{55} = \frac{1}{2xd} [x^2 + a^2 + 4d^2 - 4ad + a^2 + e^2 + x^2 + 4e^2 - 8ed + 4d^2 + x^2] + \frac{1}{2xe} [e^2] + \frac{1}{2xa} [a^2]$$

$$= \frac{1}{2xd} [4x^2 + 8d^2 + 5e^2 + a^2 - 3ad - 7ed]$$

Bij het invullen van de matrix wordt uitgegaan van de volgende waarden:

$$\left. \begin{array}{l} x = d = 1,00 \text{ m} \\ a = 1,20 \text{ m} \\ e = 0,90 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ waardoor bv. } P_{55} = 3,795$$

De in het voorbeeld aangenomen ligging van de vrije grondwaterspiegel wordt nu vastgehouden (φ bovenrand), waarna de nieuwe stijghoogte in het inwendige bepaald wordt, welke een gevolg is van de veranderde randvoorwaarde.

Coëfficiëntenmatrice

		aantal knooppunten j →												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
aantal knooppunten i ↓	1	+ 0,933	- 0,333		- 0,5	- 0,1								
	2	- 0,333	+ 1,816	- 0,283		- 0,9	- 0,3							
	3		- 0,283	+ 0,683			- 0,4							
	4	- 0,5			+ 1,955	- 0,955			- 0,45	- 0,05				
	5	- 0,1	- 0,9		- 0,955	+ 3,795	- 0,84			- 0,85	- 0,15			
	6		- 0,3	- 0,4		- 0,84	+ 1,94				- 0,4			
	7				- 0,45				+ 2,0	- 1,1		- 0,45		
	8					- 0,05	- 0,85		- 1,1	+ 3,96	- 1,06		- 0,9	
	9						- 0,15	- 0,4		- 1,06	+ 2,06			- 0,45
	10								- 0,45		+ 1,00	- 0,55		
	11									- 0,9		- 0,55	+ 2,00	- 0,55
	12										- 0,45		- 0,55	+ 1,00

De stijghoogte in het inwendige wordt per raai constant verondersteld en wel gelijk aan de hoogte van het vrije oppervlak. (schatting φ)

De ligging (Y-coördinaat) van de inwendige punten wordt hier altijd bepaald door de hoogte per raai te delen door $(NR - 1)$, wat hier gelijk aan 2 is.

De stijghoogte in de 1^e raai wordt gelijkgesteld aan de veranderlijke randvoorwaarde (PL).

Neem aan dat de linker randvoorwaarde (=PL) per tijdstap ($= \Delta t$) verandert met de waarde $\frac{HH}{3}$ dus:

$$PL = PL + \frac{HH}{3} = 2.40 + \frac{1.80}{3}$$

De rechter randvoorwaarde is: $PR = HH = 1,80$ m.

Verdere gegevens:

- $\varphi_1 = \varphi_2 = 3.00$ m
- $\varphi_3 = 2.40$
- $\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 2.00$
- $\varphi_7 = \varphi_8 = \varphi_9 = 1,80$
- $\varphi_{10} = \varphi_{11} = \varphi_{12} = 1,80 = HH$

Met behulp van de in de matrix geschreven coëfficiënten P kunnen nu de vergelijkingen (4.27): $\sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_j = 0$

opgelost worden voor de inwendige punten.

Voor deze knooppunten (4, 5, 7, 8) luiden de vergelijkingen als volgt:

$$P_{41} \varphi_1 + P_{44} \varphi_4 + P_{45} \varphi_5 + P_{47} \varphi_7 + P_{48} \varphi_8 = 0$$

$$\varphi_4 = - \frac{(P_{41} \varphi_1 + P_{45} \varphi_5 + P_{47} \varphi_7 + P_{48} \varphi_8)}{P_{44}}$$

$$\varphi_4 = \frac{0,5 \times 300 + 0,95 \cdot 2,00 + 0,45 \cdot 1,80 + 0,05 \cdot 1,8}{1,955} = \frac{4,31}{1,955} = 2,20 \text{ m}$$

$$\varphi_5 = - \frac{(P_{51} \varphi_1 + P_{52} \varphi_2 + P_{54} \varphi_4 + P_{56} \varphi_6 + P_{58} \varphi_8 + P_{59} \varphi_9)}{P_{55}}$$

$$\varphi_5 = \frac{0,1 \cdot 3,00 + 0,9 \cdot 3,00 + 0,955 \cdot 2,20 + 0,84 \cdot 2,00 + 0,85 \cdot 1,80 + 0,15 \cdot 1,80}{3,795} = 2,26$$

$$\varphi_7 = - \frac{(P_{74} \varphi_4 + P_{78} \varphi_8 + P_{710} \varphi_{10})}{P_{77}}$$

$$\varphi_7 = \frac{0,45 \cdot 2,20 + 1,1 \times 1,80 + 0,45 \cdot 1,80}{2,00} = 1,89$$

Bij toepassing van $\text{relax} = 1,5$ verkrijgt men na de eerste iteratie de onderstaande waarden voor de stijghoogte:

$$\varphi_4 = 2,00 + 1,5(2,20 - 2,00) = 2,30$$

$$\varphi_5 = 2,00 + 1,5(2,26 - 2,00) = 2,39$$

$$\varphi_7 = 1,80 + 1,5(1,89 - 1,80) = 1,93$$

$$\varphi_8 = 1,80 + 1,5(1,93 - 1,80) = 1,99$$

Na een tweede iteratie worden de volgende waarden verkregen:

$$\varphi_4 = \frac{0,5 \cdot 3,00 + 0,955 \cdot 2,39 + 0,45 \cdot 1,93 + 0,05 \cdot 1,99}{1,955} = 2,43$$

$$\varphi_4 = 2,30 - 1,5(2,30 - 2,43) = 2,49^5$$

$$\varphi_5 = \frac{0,1 \cdot 3,00 + 0,9 \cdot 3,00 + 0,955 \cdot 2,49^5 + 0,82 \cdot 2,00 + 0,85 \cdot 1,99 + 0,15 \cdot 1,80}{3,795} = 2,39$$

$$\varphi_5 = 2,39 - 1,5(2,39 - 2,39) = 2,39$$

$$\varphi_7 = \frac{0,45 \cdot 2,49^5 + 1,1 \cdot 1,99 + 0,45 \cdot 1,80}{2,00} = 2,06$$

$$\varphi_7 = 1,93 - 1,5(1,93 - 2,06) = 2,12^5$$

$$\varphi_8 = \frac{0,05 \cdot 2,49^5 + 0,85 \cdot 2,39 + 1,1 \cdot 2,12^5 + 1,06 \cdot 1,80 + 0,9 \cdot 1,80}{3,96} = 2,02^5$$

$$\varphi_8 = 1,99 - 1,5(1,99 - 2,02^5) = 2,04$$

Beschouw nu ter illustratie het verloop van φ_4 (zie figuur IV.11):

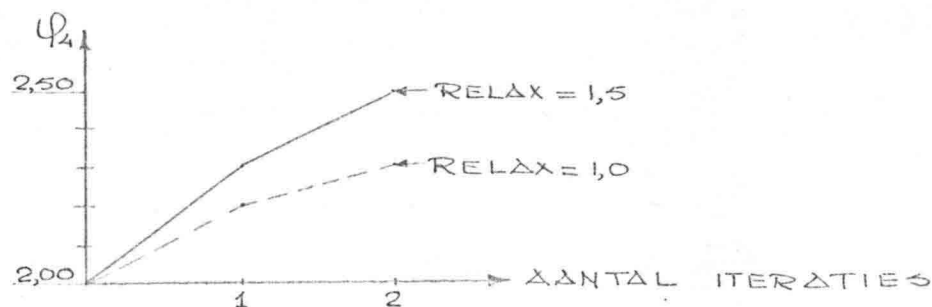


FIG. IV. 11

Stel dat φ uiteindelijk de volgende waarden verkrijgt:

$$\varphi_4 \approx \varphi_5 = 2,50 \quad \varphi_7 \approx \varphi_8 = 2,10$$

Nu wordt q_i bepaald volgens vergelijking (4.27) voor de knooppunten aan de bovenrand: $q_i = - \sum_{j=1}^m P_{ij} \varphi_j$

$$q_3 = - \{ P_{33} \varphi_3 + P_{32} \varphi_2 + P_{36} \varphi_6 \} =$$

$$= - \{ 0,683 \cdot 2,40 - 0,283 \cdot 3,00 - 0,4 \cdot 2,00 \} = +0,01$$

$$q_6 = -1,94 \cdot 2,00 + 0,3 \cdot 3,00 + 0,4 \cdot 2,40 + 0,85 \cdot 2,50 + 0,4 \cdot 1,80 = +0,82$$

$$q_9 = -2,06 \cdot 1,80 + 0,15 \cdot 2,50 + 0,4 \cdot 2,00 + 1,06 \cdot 2,10 + 0,45 \cdot 1,80 = +0,5$$

$$q_{12} = -1,00 \cdot 1,80 + 0,45 \cdot 1,80 + 0,55 \cdot 1,80 = 0,0$$

Uit de aldus verkregen waarden voor q kan de schijnbare verdamping h bepaald worden door toepassing van de vergelijkingen (4.20).

$$q_3 = \frac{1}{6} (x_6 - x_3) (2h_3 + h_6)$$

$$0,01 = \frac{1}{6} \cdot 1 (2h_3 + h_6) \quad \text{waaruit } h_3 = 0,03 - \frac{1}{2} h_6$$

$$q_6 = \frac{1}{6} (x_6 - x_3) (2h_6 + h_3) + \frac{1}{6} (x_9 - x_6) (2h_6 + h_9) = \frac{1}{6} (h_3 + 4h_6 + h_9)$$

$$\text{zodat } 0,82 = \frac{1}{6} (h_3 + 4h_6 + h_9)$$

$$q_9 = \frac{1}{6} \cdot 1 (h_6 + 4h_9 + h_{12}) \rightarrow 0,5 = \frac{1}{6} (h_6 + 4h_9 + h_{12})$$

$$q_{12} = \frac{1}{6} (x_{12} - x_9) (2h_{12} + h_9)$$

$$0,0 = \frac{1}{6} (2h_{12} + h_9) \quad \text{waaruit: } h_{12} = -\frac{1}{2} h_9$$

Dit zijn dus vier vergelijkingen met vier onbekenden, die hier door substitutie van de eerste en de vierde vergelijking in respectievelijk de tweede en de derde vergelijking terug te brengen zijn tot twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\left. \begin{aligned} 6 \cdot 0,82 &= 0,03 - \frac{1}{2} h_6 + 4h_6 + h_9 \\ 6 \cdot 0,5 &= h_6 + 4h_9 - \frac{1}{2} h_9 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{array}{r|l} 4,89 &= 3,5 h_6 + h_9 \\ 3,00 &= h_6 + 3,5 h_9 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1x \\ 35x \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} 4,89 = 3,5 h_6 + h_9 \\ 10,50 = 3,5 h_6 + 12,25 h_9 - \\ \hline 5,61 = 11,25 h_9 \end{array}$$

$$h_9 = \frac{5,61}{11,25} = +0,498$$

$$h_6 = 3,00 - 1,743 = +1,257$$

$$h_3 = 0,03 - 0,628 = -0,598$$

$$h_{12} = -0,5 \cdot 0,498 = -0,249$$

In het computerprogramma LM6 worden de in het algemeen bestaande n vergelijkingen met n onbekenden iteratief opgelost.

Hierbij is n het aantal knooppunten aan het vrije oppervlak.

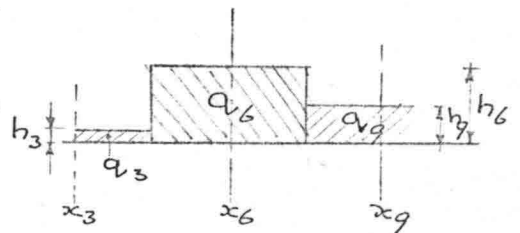
Eerst wordt een schatting gemaakt voor de waarde van h :

$$h_3 = \frac{q_3}{\frac{1}{2}(x_6 - x_3)} = +0,02$$

$$h_6 = \frac{q_6}{\frac{1}{2}(x_6 - x_3) + \frac{1}{2}(x_9 - x_6)} = +0,82$$

$$h_9 = \frac{q_9}{\frac{1}{2}(x_9 - x_6) + \frac{1}{2}(x_{12} - x_9)} = +0,50$$

$$h_{12} = \frac{q_{12}}{\frac{1}{2}(x_{12} - x_9)} = 0,0$$



Nu worden de uiteindelijke waarden van h bepaald door in de vergelijkingen (4.20) hierboven vermelde waarden van h (beginschatting) in te vullen. Dit wordt j maal herhaald door de gevonden waarde steeds weer in te vullen. (Bij LM6 is $j = 10$)

De vergelijkingen (4.20) luiden:

$$q_3 = \frac{1}{8}(x_6 - x_3)(2h_3 + h_6) \quad \text{waartuit:}$$

$$h_3 = \frac{6q_3}{2} - \frac{1}{2}h_6 = 3q_3 - \frac{1}{2}h_6 = 3 \cdot 0,01 - \frac{0,82}{2} = -0,38$$

$$q_6 = \frac{1}{6}(h_3 + 4h_6 + h_9) \quad \text{waartuit:}$$

$$h_6 = \frac{6}{4}q_6 - \frac{h_3}{4} - \frac{h_9}{4} = \frac{3}{2}q_6 - \frac{1}{4}h_3 - \frac{1}{4}h_9 = +\frac{3}{2} \cdot 0,82 + \frac{0,38}{4} - \frac{0,50}{4} = +1,20$$

$$\text{evenzo } h_9 = \frac{3}{2}q_9 - \frac{1}{4}h_6 - \frac{1}{4}h_{12}$$

$$h_9 = +\frac{3}{2} \cdot 0,5 - \frac{1,20}{4} - 0 = +0,45$$

$$\text{zo ook } h_{12} = 3q_{12} - \frac{1}{2}h_9 = 0 - \frac{0,45}{2} = -0,225$$

Met deze waarden als uitgangspunt worden de vergelijkingen (4.20) weer toegepast.

$$h_3 = 3 \cdot 0,01 - \frac{1,20}{2} = -0,57$$

$$h_6 = \frac{3}{2} \cdot 0,82 + \frac{1}{4} \cdot 0,57 - \frac{1}{4} \cdot 0,45 = +1,26$$

$$h_9 = \frac{3}{2} \cdot 0,5 - \frac{1}{4} \cdot 1,26 - \frac{1}{4} \cdot 0,225 = +0,491$$

$$h_{12} = -\frac{1}{2} \cdot 0,491 = -0,246$$

Wordt dit nog eenmaal herhaald, dan blijkt er vrijwel geen verschil meer te zijn met de op één na laatst bepaalde waarden.

$$h_3 = 3 \cdot 0,01 - \frac{1,26}{2} = -0,60$$

$$h_6 = \frac{3}{2} \cdot 0,82 + \frac{1}{4} \cdot 0,60 - \frac{1}{4} \cdot 0,491 = +1,257$$

$$h_9 = \frac{3}{2} \cdot 0,50 - \frac{1}{4} \cdot 1,257 + \frac{1}{4} \cdot 0,246 = +0,498$$

$$h_{12} = 0 - \frac{0,498}{2} = -0,249$$

Op deze wijze wordt snel een stabiele oplossing voor de vergelijkingen (4.20) verkregen.

Nu de waarden voor de schijnbare verdamping (h) berekend zijn kan met behulp van vergelijking (4.34) het vrije oppervlak bepaald worden: $y'_i = y_i^0 + \Delta t \cdot \frac{h_i}{\beta}$ hierin is:

- y_i^0 = uitgangspositie van het vrije oppervlak aan het begin van de tijdstap
- y'_i = nieuwe positie van het vrije oppervlak
- Δt = de grootte van de tijdstap: stel $\Delta t = 0,05$ h(our)
- i = knooppunten van de bovenrand behalve de eerste en de laatste
- β = (of n_e) = effectieve porositeit: stel $\beta = 0,2$

$$y'_6 = 2,00 + 0,05 \cdot \frac{1,257}{0,2} = 2,314$$

$$y'_9 = 1,80 + 0,05 \cdot \frac{0,498}{0,2} = 1,924$$

$$y'_3 = PL = 3,00$$

$$y'_{12} = PR = 1,80$$

In het programma LM6 wordt de bepaling van het vrije oppervlak met behulp van een iteratie (twee- of driemaal) bepaald.

Hierbij wordt uit de vergelijking 4.34 een soort "predictor corrector methode" ontwikkeld.

Dit zal in Hoofdstuk V.2.4 behandeld worden.

Hoofdstuk V. Oplossing van het toetsprobleem met behulp van de eindige elementenmethode.

V.1. Afmetingen van het toetsprobleem.

De veranderlijke randvoorwaarde bevindt zich in het programma LM6 aan de linkerzijde van het zandmassief (x = 0, zie figuur V.1) en wordt PL genoemd. In de andere rapporten (zie lit. (4 en 7)) betreffende het toetsprobleem bevindt de veranderlijke randvoorwaarde zich namelijk aan de rechterzijde (x = 1).

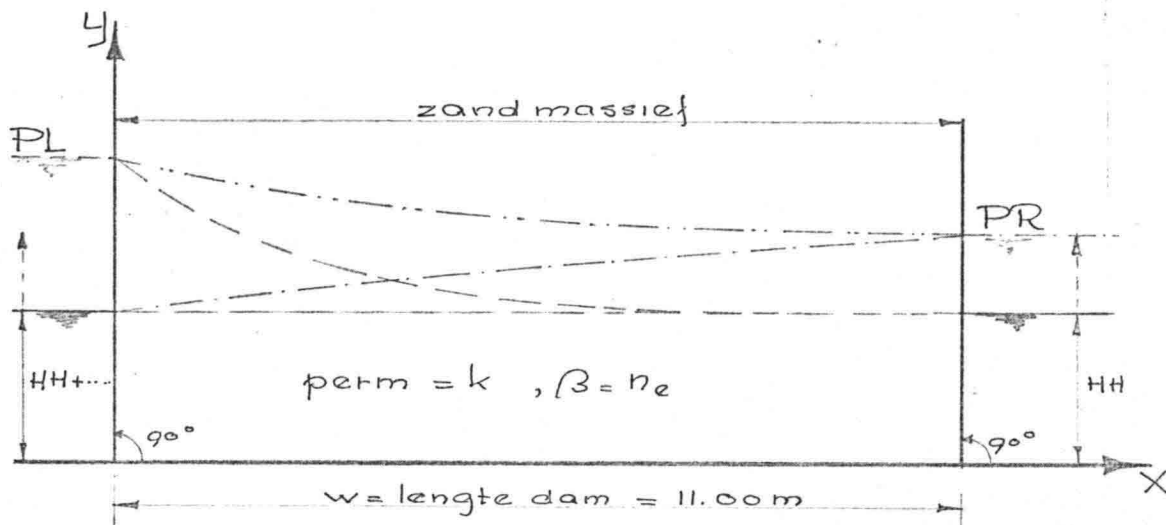


FIG. V.1

Voor de veranderlijke randvoorwaarde zijn twee mogelijkheden onderzocht, namelijk een lineaire stijging en een cosinusvormig verloop.

a. lineaire stijging: waarbij $HH = 2.00 \text{ m}$. (horizontale beginstand zie figuur V.2).

Wanneer de tijdstapgrootte Δt genoemd wordt is het aantal tijdstappen voor volledige stijging van de randvoorwaarde gelijk aan $\frac{2.00}{\Delta t} = n$

De verandering per tijdstap zal nu gelijk aan

$$\frac{2.00}{n} = \frac{HH}{n} \text{ zijn.}$$

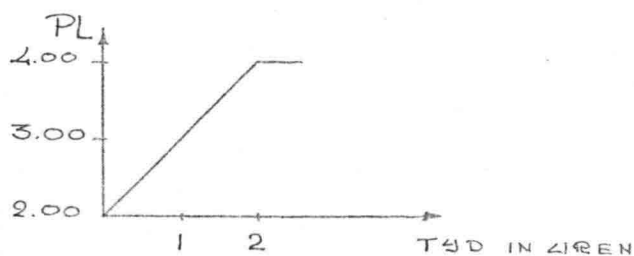
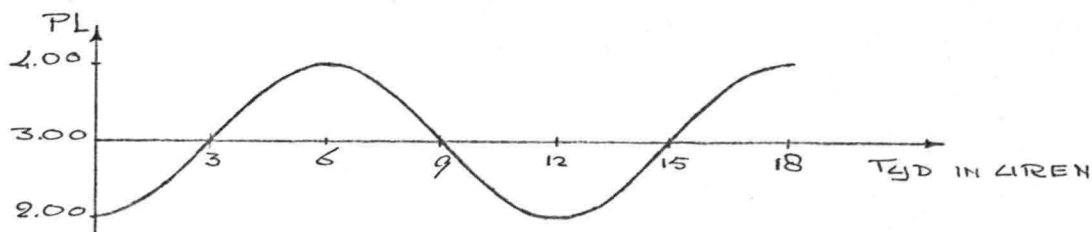


FIG. V.2

- b. stijging volgens een negatieve cosinus, waarbij de middenstand gelijk is aan $HH = 3.00$, terwijl de amplitude 1.00 m. bedraagt. (zie figuur V.3)



F14. V. 3

De start is hierbij vanuit een permanentie, waarvoor de waarden, verkregen volgens Dupuit-Forchheimer zijn aangehouden. (punt-streep lijn in figuur V.1) Voor de doorlatendheidscoëfficiënt is de volgende waarde aangehouden: permeability = $k = 10^{-4}$ m/sec = $0,36$ m/h. Voor het effectieve poriëngehalte : $\beta = (n_e) = 0,2$

V.2. Toepassing van de elementenmethode op het toetsprobleem.

In Hoofdstuk IV is de elementenmethode beschreven met formules welke direct toepasbaar zijn voor het toetsprobleem. Uit Hoofdstuk VI blijkt de verwerking van de formules in het computerprogramma LM6.

In deze paragraaf zal nu een aantal factoren, welke niet direct uit de formules volgen, worden beschreven.

V.2.1. Onderverdeling in elementen.

De onderverdeling in elementen wordt bepaald door het aantal rijen (NR genoemd) en het aantal kolommen (NC genoemd). De verticale verdeling wordt bepaald door het aantal rijen. Wanneer bijvoorbeeld de hoogte HH in vieren gedeeld wordt, heeft NR de waarde 5. Evenzo de horizontale verdeling (in $(NC - 1)$) met behulp van het aantal kolommen NC .

In dit roosterwerk worden nu de driehoekige elementen gevormd door diagonalen van links onder naar rechts boven (overeenkomstig het programma LM6).

In figuur V.4 is deze verdeling aangegeven, waarbij tevens het "meegroeien" van de elementen met de randvoorwaarde te zien is.

In deze figuur geldt: 5×17

$$NR = 5$$

$$NC = 17$$

$$2 \times (NR - 1)(NC - 1) = 4 \times 16 \times 2 = 128 \text{ elementen.}$$

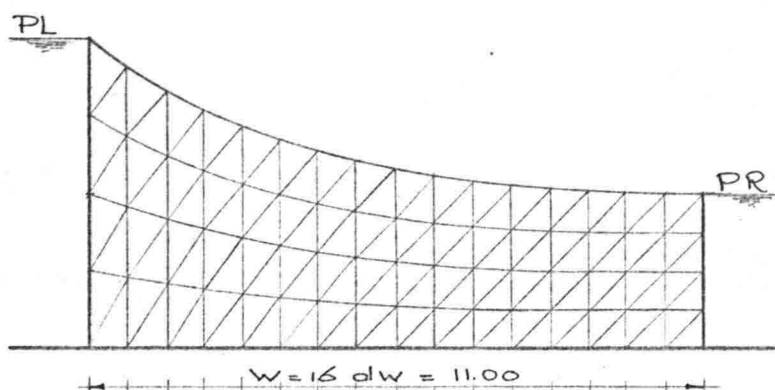


FIG. V.4

Bij de onderverdelingen zijn de volgende waarden aangehouden:

$$\begin{array}{l} NR \times NC = 5 \times 9 \quad , \quad 5 \times 17 \\ \quad \quad \quad 9 \times 9 \quad , \quad 9 \times 17 \quad , \quad 9 \times 33 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 17 \times 17 \quad , \quad 17 \times 33 \end{array}$$

Gebleken is dat bepaalde grovere verdelingen te grof zijn om een voldoende nauwkeurig resultaat te verkrijgen. Bij deze verdelingen (5×9 , 9×9 , 5×17) is door verkleining van de tijdstapgrootte of vergroting van het aantal iteraties geen noemenswaardige verbetering van het resultaat te verkrijgen.

Uit figuur V.6 (bijlage V.1) blijkt tevens dat bij een voldoende fijne onderverdeling (9×33) de kleinste tijdstap de beste resultaten geeft. Uit vergelijking van figuur V.5 en V.6 (bijlage V.1) blijkt dat 9×33 gevoeliger is voor de tijdstapgrootte dan 9×17 en dat van een tijdstapgrootte kleiner dan 1 minuut nauwelijks verbetering van de nauwkeurigheid valt te verwachten.

Daar komt nog bij dat bij zeer kleine tijdstappen (kleiner dan 1 minuut) de onnauwkeurigheid soms zelfs groter wordt. Reden waarom als kleinste tijdstapgrootte een waarde van 1 minuut is aangehouden.

Verder is onderzocht of de stand van de diagonaal van invloed is op het resultaat. Bij omkering van de helling van de diagonaal (\backslash in plaats van $/$) is er bij 9×33 nauwelijks verschil in de resultaten opgetreden, zodat de stand van de diagonaal volgens figuur V.4 in het verdere onderzoek gehandhaafd is. Wellicht wordt het verschil ten gevolge van de stand van de diagonaal bij grovere verdeling groter. Dit is niet onderzocht, daar de conclusie is getrokken dat, daar bij 9×33 de stand van de diagonaal niet van invloed is, de verdeling 9×33 voldoende fijn is.

In Hoofdstuk V.2.5 wordt een criterium gegeven voor de grootte van de tijdstap in relatie met de maaswijdte. Uit het onderzoek is gebleken dat:

- a. de rekentijd per tijdstap lineair verloopt met het aantal knooppunten.
- b. Bij kleinere elementen (dat wil zeggen een groter aantal elementen) een kleinere tijdstap behoort, of meer iteraties vereist zijn om een bepaalde nauwkeurigheid te verkrijgen.

De consequenties hiervan blijken zeer duidelijk uit onderstaand voorbeeld:

Stel het aantal elementen $(2)(NR - 1)(NC - 1)$ wordt verdubbeld door $(NR - 1)$ te verdubbelen. Het aantal knooppunten is dan van $NR \times NC$ op $(2 NR - 1)(NC)$ gebracht (circa 2 maal zo groot), waardoor de rekentijd ongeveer met een factor 2 toeneemt.

In Hoofdstuk V.2.5 wordt voor het onder b genoemde een lineair verband gevonden, wat hier dan ook aangehouden zal worden. De kleinste element afmeting is gehalveerd, waardoor de tijdstap ook 2 maal zo klein wordt, zodat het aantal tijdstappen verdubbeld wordt.

Conclusie: De totale rekentijd is evenredig met het kwadraat van het aantal knooppunten.

V.2.2. Aantal iteraties bij de bepaling van de stijghoogte in het inwendige. (Gauss-Seidel iteratie)

De bepaling van de stijghoogte in het inwendige geschiedt door middel van een Gauss-Seidel iteratie. In het voorbeeld (IV.3) is ter verduidelijking deze manier van oplossen toegepast, zodat voor de werkwijze naar Hoofdstuk VI en IV.3 verwezen wordt.

Door de factor relax groter dan 1 te nemen wordt het iteratieproces bespoedigd (zie Hoofdstuk V.2.3).

Tijdens het onderzoek is een zelfsturende test voor de nauwkeurigheid ingebouwd, welke in Hoofdstuk VI beschreven wordt. Hierin wordt regelmatig getest of de vereiste nauwkeurigheid reeds bereikt is, waarbij tevens een minimum en maximum aantal iteraties is vastgelegd.

Daar de waarde van φ gebruikt wordt bij de bepaling van het vrije oppervlak, waaruit de matrix coëfficiënten P bepaald worden is onderzocht welke nauwkeurigheid zinvol is. Hierbij is aan "eis", dit is het verschil tussen twee opeenvolgende waarden voor φ in knooppunt I, de waarde 0,001 m. toegekend. Tevens bleek dat het aantal iteraties voor een bepaalde nauwkeurigheid bij de lineaire RVW toeneemt in de tijd, ofwel bij hetzelfde aantal iteraties wordt de onnauwkeurigheid groter.

Wellicht kan dit verklaard worden door het feit dat in het gedeelte van het massief met horizontale vrije waterspiegel de matrix coëfficiënten volgens de diagonalen aanvankelijk nul zijn. Voor het minimum en maximum aantal iteraties is respectievelijk de waarde 5 en 25 aangehouden.

V.2.3. Variatie van de over-relaxatiefactor (relax).

Bij de Gauss-Seidel iteratie wordt het verschil bepaald tussen een "nieuwe" en een "oude" waarde van de stijghoogte. (zie Hoofdstuk IV.3)

Door dit verschil met een factor (relax, groter dan 1, de zogenaamde over-relaxatie factor) te vermenigvuldigen kan men de Gauss-Seidel iteratie versnellen, omdat de waarde van de stijghoogte als het ware sterker verbeterd wordt.

$$CC = \text{PHI (I)}_{\text{oud}} - \text{PHI (I)}_{\text{nieuw}}$$

$$\text{PHI (I)}_{\text{nieuw}} = \text{PHI (I)}_{\text{oud}} - \text{RELAX} * CC$$

Bij de programma's LM6 A en B is het grootste verschil tussen de laatste en de één na laatste waarde van de stijghoogte, DIG genaamd, (Difference by the Iteration according to Gauss-Seidel) bepaald en uitgevoerd.

Door de waarde van relax te laten variëren van 1,1 tot 1,7 is de waarde van DIG tot 1/100 DIG teruggebracht (bij een constant aantal iteraties, zie bijlage V.1 figuur V.7).

Door nu de nauwkeurigheid tot de vereiste (= eis) terug te brengen (minder iteraties) is een aanzienlijke tijdsbesparing gerealiseerd.

Bij dit probleem is de waarde 1.7 optimaal gebleken. In de praktijk moet men voor ieder probleem de meest gunstige waarde voor relax zoeken. Het blijkt namelijk dat deze factor "probleem-afhankelijk" is. (voor LM6 zie figuur V.7 bijlage V.1)

Door de grote waarde van relax zal ook na veel iteraties er altijd nog een waarde voor DIG zijn, welke teruggebracht kan worden door na een bepaald aantal iteraties voor relax een kleinere waarde te nemen. Verdere verfijning door middel van een trapsgewijze afnemen van relax is hier niet zinvol gebleken, daar het aantal benodigde iteraties tussen de 5 en 20 gelegen is.

V.2.4. Aantal iteraties bij de bepaling van het vrije oppervlak.

Het aantal iteraties bij de bepaling van het vrije oppervlak wordt NIFS genoemd (Number of Iterations in the calculation of a new Free Surface).

In het programma LM6 wordt voor nifs de waarde 2 of 3 gekozen. Het vrije oppervlak wordt bepaald volgens $y' = y^0 + \Delta t \cdot \left(\frac{h^*}{\beta} - h \right)$ welke vergelijking in Hoofdstuk II.2 en Hoofdstuk IV.1.4 is afgeleid.

Hierin is $h^* = h + \beta \frac{\partial y}{\partial t}$ per definitie en daar $h = 0$ volgt hieruit $h^* = \beta \frac{\partial y}{\partial t}$, zodat voor het vrije oppervlak eenvoudig $y' = y^0 + \Delta t \frac{\partial y}{\partial t}$ geschreven wordt.

Gedurende de tijdstap Δt zal de stijging van het vrije oppervlak niet lineair plaats vinden. In figuur V.5 is een verloop volgens A-B verondersteld (aanvankelijk snelle stijging door groot verhang), met B als hoogte van het vrije oppervlak na Δt .

Het doel is nu het punt B zo goed mogelijk te benaderen met behulp van de eerste afgeleide.

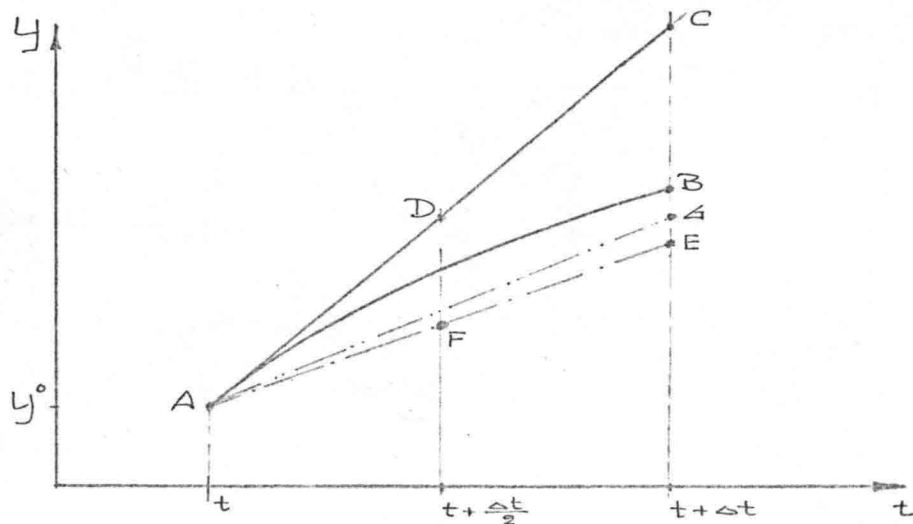


FIG. V. 5

Uit de berekening volgt de afgeleide in het punt A. Vanuit A wordt punt D als schatting voor het vrije oppervlak bepaald door $\frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$ (voorwaarts in de tijd).

In het programma LM6 luidt deze vergelijking:

$$y' = y^o + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{h^*}{\beta}$$

Uit de hoogte van de vrije waterspiegel volgens D worden nu de matrix coëfficiënten P bepaald, waarmee volgens het rekenprogramma de afgeleide in het punt D bepaald wordt (afgeleide op $t + \frac{1}{2} \Delta t$) in figuur V.5 als punt-streep lijn aangegeven.

Daarna wordt de afgeleide, gebaseerd op de schatting voor punt D (centraal in de tijd) gebruikt om de definitieve ligging van het vrije oppervlak te vinden (lijnstuk AE).

In het programma LM6 luidt de vergelijking:

$$y' = y^o + \Delta t \cdot \frac{h^*}{\beta}$$

Deze wijze van oplossen is te beschouwen als een "predictor-corrector methode".

De vergelijking $y' = y^o + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{h^*}{\beta}$ is de predictor en is een "voorwaartse" differentie-benadering in t.

De vergelijking $y' = y^o + \Delta t \cdot \frac{h^*}{\beta}$ is de corrector en kan worden beschouwd als een "centrale" differentie-benadering in t.

Wordt bij het programma LM6 voor nifs de waarde 3 gekozen, dan wordt in plaats van E het punt F bepaald. Daarna wordt overeenkomstig de gang van zaken voor punt D de afgeleide in F bepaald, welke dient ter bepaling van punt G.

In de loop van het onderzoek is op grond van de verbetering van de resultaten bij 9 x 17 een voorkeur voor nifs = 3 ontstaan. Met nifs = 3 en een tijdstap-grootte ts = 3 minuten is het zelfde resultaat behaald als met nifs = 2 en ts = 1 minuut, waarbij de reken-tijd voor het eerste geval ongeveer een factor 2 minder is. Bij 9 x 33 is daarom ts = 1 minuut, nifs = 2 en ts = 2½ minuut, nifs = 3 onderzocht, waaruit gebleken is, dat het tweede geval wel tijd-winst oplevert (ongeveer een factor 2) maar minder nauwkeurig is.


Wellicht is een tijdstapgrootte van $2\frac{1}{2}$ minuut aan de grote kant voor de verdeling 9×33 . Vergelijking van nifs = 2 en nifs = 3 bij een zelfde tijdstapgrootte geeft een vloeiender verloop van de vrije waterspiegel gedurende de eerste tijdstappen bij nifs = 3. Tevens is gebleken dat na een aantal tijdstappen wellicht met nifs = 2 volstaan kan worden, omdat relatief steeds minder verschil tussen nifs = 2 en nifs = 3 optreedt.

V.2.5. De grootte van de tijdstap in verband met instabiliteit.


Bij het voorbeeld (IV.3) is reeds gebleken dat de grootte van de tijdstap onder meer recht evenredig is met $\frac{\beta}{K}$

Van de randvoorwaarde wordt altijd een verloop in de tijd gegeven. Uit de gegeven tijdsduur (T) en de gekozen tijdstapgrootte (Δt) volgt dan voor LM6 het aantal tijdstappen $n + 1$ waarbij $n = \frac{T}{\Delta t}$. Deze extra tijdstap is nodig omdat op $t = 0$ (is 1^e tijdstap) bij LM6 de zogenaamde nulwaarde van het freatisch vlak wordt uitgevoerd. (zie Hoofdstuk VI). Voor de grootte van de verandering per tijdstap is geen vast verband gevonden met de grootte van de tijdstap.

Vergeleken met de differentiemethode (volgens (lit.7)) is hier nog een extra factor in het geding, namelijk de nauwkeurigheid van de matrix coëfficiënten P.

Wanneer het vrije oppervlak een enigszins zaagtandvormig verloop krijgt  zal namelijk ook de coëfficiënt P dienovereenkomstig bepaald worden.

Bij een langzame stijging verdwijnt dit minder snel dan bij een wat snellere stijging. In Hoofdstuk VII.5 zal hier nader op ingegaan worden. Normaliter is dit

-verloop na enkele tijdstappen verdwenen.

Wanneer dit niet gebeurt kan na verloop van tijd door de steeds aanpassende matrix coëfficiënten P het resultaat steeds slechter worden. (zie Hoofdstuk VII.5)

a. Opmerkingen betreffende stabiliteit.

In het onderstaande zal getracht worden een stabiliteits-criterium op te stellen. Het uitgangspunt is een fout δ in Δ peil=(verandering van de vrije grondwaterspiegel), die in de loop van de berekening steeds kleiner moet worden. (analoog aan Van der Weide, literatuur (7) bladzijde 63)

Bij deze beschouwing wordt uitgegaan van figuur V.6, waarin de elementen als gelijkbenige driehoeken voorkomen, ($x = y$) met knooppunt 8 als knooppunt met een fout in Δ peil. De hoogte van de vrije grondwaterspiegel (top) in punt 8 wordt verondersteld een fout ter grootte van δ te hebben.

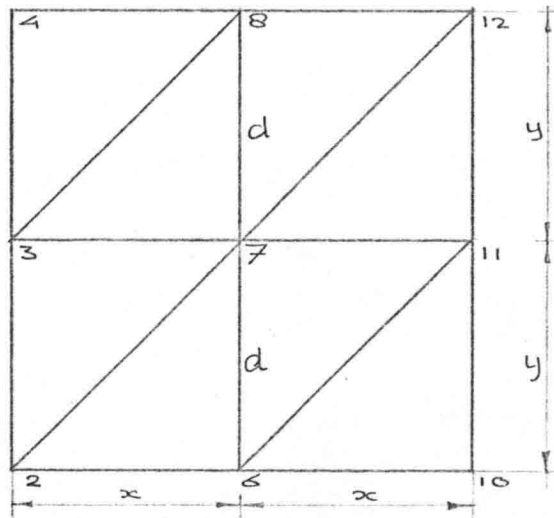


FIG. V.6

De eerste schatting in de raai (6, 7, 8) voor de stijghoogte φ vertoont nu ook een fout δ .

Daar $d = \frac{top}{n}$, waarin n het aantal elementen boven elkaar is, is de fout in d gelijk aan $\frac{\delta}{n}$.

Voor de matrix coëfficiënt P wordt de fout ten gevolge van $\frac{\delta}{n}$ in d verwaarloosd, daar de verandering van P zeer klein is ten opzichte van de fout δ in φ .

In Hoofdstuk IV is voor P de volgende vergelijking afgeleid (vergelijking 4.15):

$$P_{kl} = \frac{K}{2\Delta} (b_k b_l + c_k c_l)$$

Stel de fout in b gelijk aan $\frac{\delta}{n}$.

$$\text{De fout in } P = \frac{K}{2xy} \left(\frac{\delta^2}{n^2} \right)$$

$$\text{Daar } x = y = \frac{\text{top}}{n} \text{ wordt de fout in } P = \frac{K}{2 \left(\frac{\text{top}}{n} \right)^2} \cdot \frac{\delta}{n^2} = \frac{K \delta^2}{2 (\text{top})^2}$$

Daar bij de aanname δ kleiner dan top verondersteld is, is δ^2 veel kleiner dan top^2 .

De stijghoogten in het inwendige worden nu door middel van een relaxatie-procedure (Gauss-Seidel iteratie) bepaald. Hier zal één iteratie worden uitgevoerd.

Daar $x = y$ geldt in het inwendige:

$$\varphi_7 = \frac{\varphi_3 + \varphi_8 + \varphi_{11} + \varphi_6}{4}$$

Ten gevolge van de fout δ in φ_7 is de fout in φ_3 gelijk aan $\frac{\delta}{4}$ en wordt de fout in φ_6 gelijk aan $\frac{\delta}{2}$ waardoor:

$$\text{fout in } \varphi_7 = \frac{\frac{\delta}{4} + \delta + \frac{\delta}{2}}{4} = \frac{7}{16} \delta$$

Deze waarde $\left(\frac{7}{16} \delta \right)$ wordt in de loop van het iteratie proces steeds kleiner, gemakshalve zullen we echter deze waarde aanhouden.

Voor de nu volgende formules wordt naar Hoofdstuk IV verwezen.

$$q \text{ wordt bepaald volgens: } q_8 = K (\varphi_4 + \varphi_{12} + 2\varphi_7 - 4\varphi_8)$$

$$\text{De fout in } q_8 = K (2 \cdot \frac{7}{16} \delta - 4\delta) = \frac{25}{8} \delta K$$

(fout in φ_7 en φ_8 is gelijk gericht)

$$\text{Uit } q \text{ volgt de } h \text{ volgens: } q_8 = \frac{1}{8} (x) (h_4 + 4h_8 + h_{12})$$

$$\text{Veronderstel: } h_4 \approx h_8 \approx h_{12} \text{ waardoor } h_8 = \frac{q_8}{x}$$

$$\text{fout in } h_8 = \frac{25}{8} \frac{\delta K}{x}$$

Nu wordt het vrije oppervlak bepaald volgens

$$y' = y^0 + \Delta t \cdot \frac{h}{3} \text{ zodat } \Delta \text{ peil} = y' - y^0 = \frac{\Delta t \cdot h}{3}$$

$$\text{fout in } \Delta \text{ peil} = \frac{\Delta t}{3} \cdot \frac{25}{8} \cdot \frac{\delta K}{x} \text{ welke kleiner dan } \delta \text{ moet zijn.}$$

waaruit:

$$\Delta t < \frac{8 \beta x}{25 K} \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{\beta x}{K} \text{ zodat het criterium aldus}$$

geformuleerd wordt:

$$\Delta t < \frac{\beta \cdot x}{3 K}$$

Dit komt overeen met de helit van wat door de heer B.S. van der Weide is gevonden bij toepassing van de differentiemethode (lit. (7)).

In het programma LM6 heeft lector dr.ir. A. Verruyt een iets ander criterium gegeven namelijk:

$$\Delta t < \frac{\beta \cdot y^2}{2 \cdot K \cdot HH}$$

Hierin is $HH = n \cdot x = n \cdot y$ (by gelykbenige driehoeken)

waardoor $\Delta t < \frac{\beta \cdot x}{2 n K}$

Dit zal kleinere waarden voor Δt geven.

Bij het toetsprobleem gelden de volgende waarden:

$$k = 0,36 \text{ m/h} \quad x = 0,34 \text{ m} \quad \beta = 0,2 \quad HH = 2 \text{ m} \text{ en } n = 8$$

Volgens criterium Verruyt: $\Delta t < \frac{0,2 (0,25)^2}{2 \cdot 0,36 \cdot 2,00} = 0,00868 \text{ uur}$

volgens $\Delta t < \frac{\beta \cdot x}{3 k}$ verkrijgt men $\Delta t < \frac{0,2 \cdot 0,25}{3 \cdot 0,36} = 0,045 \text{ uur}$

Hierin is 0,25 gelyk aan de kleinste element afmeting.

Bij de computer uitvoer bleek bij de randvoorwaarde met negatieve cosinus een tijdstap ter grootte van 0,083333 instabiliteit te veroorzaken (bij $HH = 3.00$), volgens het criterium is Δt kleiner dan 0,06 uur noodzakelijk.

Het gevonden criterium blijkt voor de hier onderzochte gevallen zeer goede waarden te geven.

b. Opmerkingen bij de computer resultaten (LM6).

Betreft: 9×33 , $ts = 0,016667$, $nts = 7$,
 $nifs = 3$, $relax = 1,7 - 1,0$

Bezie raai op 0,6875m. vanaf PL, de linkerrandvoorwaarde (LRVW), bij $PL = 2,10 \text{ m.}$

Eerst zal de uitwerking van h op de verandering van de vrije grondwaterspiegel bezien worden:

$$h = 0,033022$$
$$FS = 2,005208 + 0,016667 \times \frac{0,033022}{0,2} =$$
$$= \text{,,} + 0,002745 = 2,007953$$

Bij de gegeven tijdstap blijkt dus dat de bijdrage van h aan het vrije oppervlak ongeveer $0,1 h$ is.

Conclusie: Een fout in h werkt slechts voor 10% door in het vrije oppervlak.

Bij de gegeven waarde van h blijkt $q = 0,0144$ te zijn.

q is bepaald volgens de formule $q = \sum P \cdot \varphi$

Wanneer φ gemakshalve (circa) $2,00$ m. gesteld wordt blijkt voor $\sum P$ de volgende waarde te volgen:

$$\sum P = \frac{q}{\varphi} \approx \frac{0,0144}{2} = 0,0072$$

Afgezien van een fout in P blijkt dus een fout in φ voor slechts een fractie (circa 1%) in q door te werken.

Resumerend: Van een fout in de stijghoogte φ blijft minder dan circa 1% over bij het nieuwe vrije oppervlak.

Op grond van deze overwegingen zou men de nauwkeurigheid in φ niet zo hoog op hoeven voeren, reden waarom in het programma LM6 voor deze nauwkeurigheid (eis) de waarde $0,001$ is aangehouden.

c. Invloed van de grootte van de tijdstap op de benadering van de afgeleide.

In dit gedeelte wordt de afgeleide, waarmee het vrije oppervlak wordt bepaald, aan een nadere beschouwing onderworpen.

Daartoe wordt in figuur V.7 het verloop uitgezet van het vrije oppervlak in een punt op 34 cm. vanaf de LRVW bij een grotere en een kleine tijdstap-grootte, respectievelijk $2\frac{1}{2}$ en 1 minuut. Dit is tevens een illustratie van het in Hoofdstuk V.2.1 en Hoofdstuk V.2.4 gestelde.

De gegevens zijn ontleend aan de uitvoer van het programma LM6 met als gegevens:

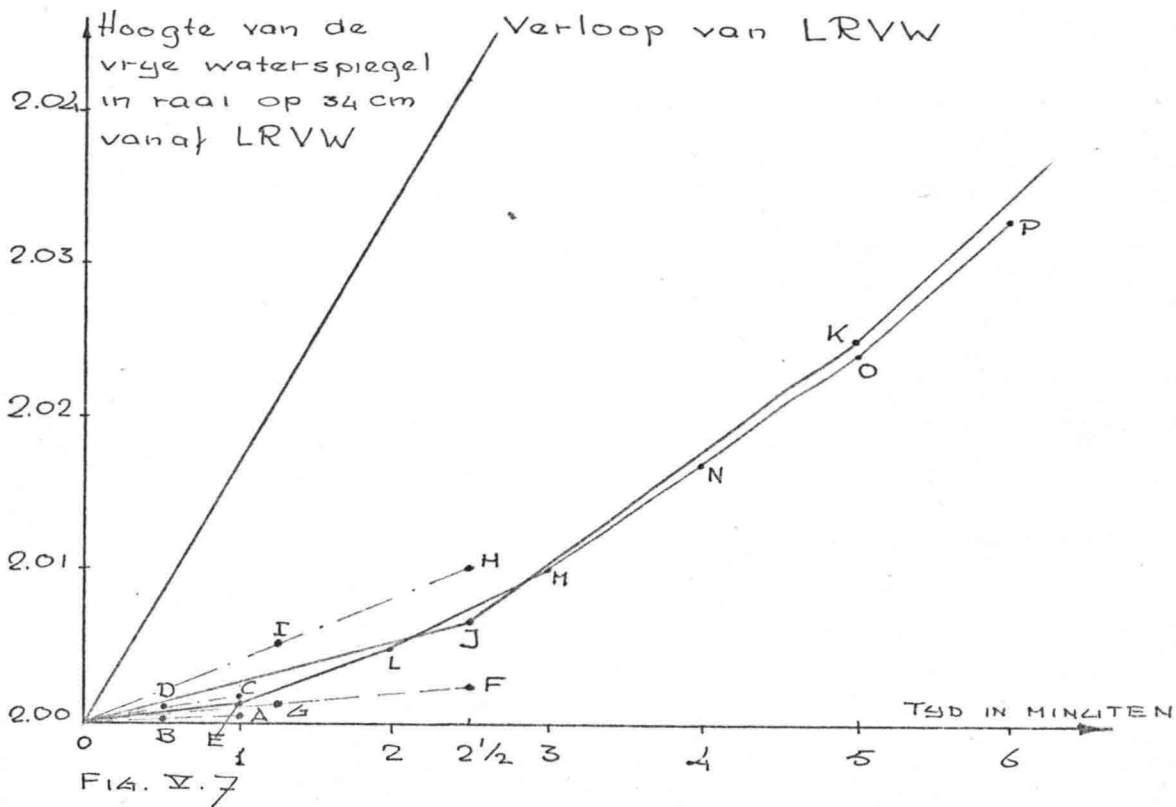
Lineaire stijging,

Onderverdeling 9×33 ,

Nifs = 3 , relax = $1,7$

$t_s = 1$ minuut = $0,016667$ h en $t_s = 2\frac{1}{2}$ minuut = $0,041667$ h.

Voor de eerste tijdstap wordt in overeenstemming met figuur V.5 ook de eerste en tweede schatting van het vrije oppervlak aangegeven.



In overeenstemming met Hoofdstuk V.2.4 wordt de waarde $\frac{h}{\beta}$ bepaald, waarbij h uit de computer-uitvoer volgt en $\beta = 0,2$ (is gegeven).

Bepaling van de schatting voor de afgeleide $(\frac{h}{\beta})$ bij een tijdstapgrootte gelijk aan 1 minuut = 0,016667 uur.

$$\frac{h_1}{\beta} = \frac{0,004801}{0,2} = 0,024 \quad (= \text{punt A in figuur V.7})$$

"centraal in de tijd" \rightarrow factor $\frac{1}{2}$ \rightarrow punt B in figuur V.7

$$\frac{h_2}{\beta} = \frac{0,019394}{0,2} = 0,969 \quad (= \text{punt C, factor } \frac{1}{2} \rightarrow \text{punt D.})$$

$$\frac{h}{\beta} = \frac{0,016783}{0,2} = 0,0839 \quad (= \text{punt E})$$

Verder verloop volgens L, M, N, O, P (in figuur V.7).

Tijdstapgrootte gelijk aan $2\frac{1}{2}$ minuut = 0,041667 uur.

$$\frac{h_1}{\beta} = \frac{0,012015}{0,2} = 0,06 \quad \text{punt F, met factor } \frac{1}{2} \text{ volgt punt G.}$$

$$\frac{h_2}{\beta} = \frac{0,049084}{0,2} = 0,24504 \quad \text{punt H, met factor } \frac{1}{2} \text{ volgt punt I.}$$

$$\frac{h}{\beta} = \frac{0,031691}{0,2} = 0,158 \quad \text{punt J.}$$

Verder verloop volgens J, K.

Het resultaat, verkregen met $t_s = 1$ minuut blijkt beter dan het resultaat met $t_s = 2\frac{1}{2}$ minuut (te hoog). Dit is geheel in overeenstemming met het in Hoofdstuk V.2.1 geconstateerde op grond van de figuren V.5 en V.6 van bijlage V.1..

Tevens blijkt dat de eerste schatting voor de afgeleide kleiner is dan de tweede schatting. Dit is niet in overeenstemming met wat in Hoofdstuk V.2.4 plausibel gemaakt is, namelijk het verloop AB in figuur V.5.

De eerste schatting voor de afgeleide (op het tijdstip nul) geeft voor $t_s = 1$ minuut en $t_s = 2\frac{1}{2}$ minuut verschillende waarden.

De beginhelling van het verloop AB in figuur V.5 is blijkbaar afhankelijk van de waarde van t_s . Bij gebrek aan vergelijkende gegevens uit andere onderzoeken wordt volstaan met het signaleren van deze feiten.

Hoofdstuk VI. Beschrijving van het computerprogramma

VI.I. Inleiding.

Het computerprogramma LM6 is geschreven door lector dr.ir.A.Verruijt in Fortran IV.

De invoer vindt plaats met behulp van ponskaarten.

Uitgaande van het programma LM6 is tijdens dit onderzoek het programma uitgebreid en gewijzigd tot respectievelijk de programma's LM6A en LM6B.

De uitbreiding tot het programma LM6A bestaat in hoofdzaak uit de volgende punten:

- a. Aanpassing van de dimensies en toevoeging van extra grootheden.
- b. Extra uitvoer om eventuele onregelmatigheden en verschillen te signaleren. Daartoe worden de per tijdstap extra uit te voeren grootheden opgeborgen in het geheugen, omdat zij anders overschreven zouden zijn aangezien de uitvoer aan het eind van iedere tijdstap plaatsvindt. Deze tijdelijke extra uitvoer heeft vooral gedurende de testfase veel nut gehad en kan na afloop van deze fase zondermeer verwijderd worden. In deze beschrijving is zij echter nog opgenomen.
- c. Voor nifs is veelvuldig de waarde 3 aangehouden, maar bij een voldoende fijne onderverdeling in elementen (met bijbehorende tijdstapgrootte) is het uiteindelijk resultaat nauwelijks beïnvloed. Wel is het verloop van het vrije oppervlak gedurende de eerste vijf à tien tijdstappen vloeiender gebleken, reden waarom bij het programma LM6A voor nifs nog de waarde drie is aangehouden.
- d. Een zelfsturende progressieve test voor de nauwkeurigheid van de stijghoogte bij de Gauss-Seidel iteratie, waarbij voor eis (dit is een maat voor de nauwkeurigheid) een waarde 0,001 meter is aangehouden. Het benodigd aantal iteraties is mede hierdoor tussen de 5 en 20 komen te liggen (zie V.2.2.).

Het programma LM6A is voorzien van een lineair stijgende randvoorwaarde (PL).

De wijziging van het programma LM6A tot LM6B is als volgt gerealiseerd:

- a. Het aanbrengen van een cosinus-vormige randvoorwaarde (PL) waarbij tevens de statement $time = time + ts$ boven de statement $PL = HH - HH/3 * COS (TIME * PI/6)$ geplaatst moest worden.
- b. In plaats van een horizontale begintoestand is een ligging van de freatische lijn bepaald volgens Dupuit-Forchheimer als uitgangspunt genomen. Door een extra read-statement worden de m.b.v. de parabool van Dupuit-Forchheimer bepaalde waarden ingevoerd en zijn een aantal statements aangepast. In het programma is reeds enige verklarende tekst opgenomen, wat te herkennen is aan de letter C in de eerste ponspositie.

In deze programma's LM6A en B wordt overeenkomstig programma LM6 de vrije waterspiegel berekend in een dam, welke voorzien is van rechte taluds en opgebouwd uit een homogeen en isotroop poreus materiaal, waarbij de dam rust op een ondoorlatende horizontale basis. De waterstand aan de linkerzijde van de dam is veranderlijk en aan de rechterzijde constant. De regeldrukker voorziet de Source-statements van een nummering, welke bij de beschrijving gebruikt zal worden. De beschrijving wordt gebaseerd op het programma LM6A, waarbij tevens de aanvulling tot LM6B gegeven zal worden.

Daar het programma LM6A een uitbreiding is van het programma LM6 met + 50 statements, kan men uitgaande van het programma LM6 deze beschrijving ook zeer goed hiervoor gebruiken door de niet in programma LM6 genoemde statements weg te laten.

Voor het programma LM6A is een Stroomschema bijgevoegd (bijlage VI.1.), waarvoor ten aanzien van LM6B en LM6 hetzelfde geldt als bij de beschrijving.

De tekst van de programma's is bijgevoegd op de bijlagen VI.2. (LM6), VI.3 (LM6A) en VI.4. (LM6B).

VI.2. Algemene Declaraties + input.

Regel 1,2.

Door deze "type-declaratie statements" wordt het type van de variabelen vastgelegd. Deze statements dienen ter informatie van de compiler, wanneer statements waarin deze variabelen voorkomen, vertaald moeten worden. Wanneer deze statements ontbreken wordt er bij Fortran vanuit gegaan, dat de variabelen waarvan de naam begint met één van de letters I,J,K,L,M,N, integer (* 4) variabelen zijn, alle andere variabelen worden beschouwd als real (* 4) variabelen. Dit noemt men de zg. "predefined-conventie" van Fortran. Het onderscheid tussen real en integer bestaat uit het al of niet aanwezig zijn van een decimale punt (dus integer stelt gehele getallen voor).

Regel 3-9.

De dimensies van de variabelen worden opgegeven, opdat de computer de benodigde ruimte per variabele kan bepalen.

bijv. (CO(400,2) betekent maximaal 400 punten.

N.B.: Bij de job-kaart is opgegeven hoeveel k-bytes (geheugenruimte) in totaal vereist is bijv. 128 K of 160 k (n x 32 k).

Regel 10-11.

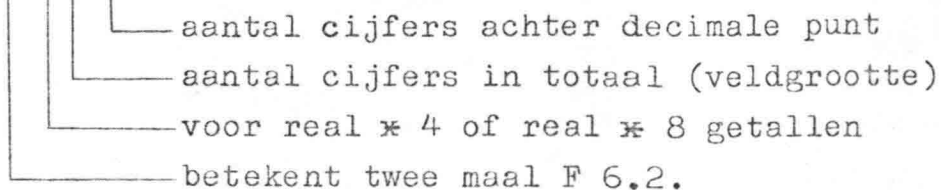
Dit is het inlezen van de le getalkaart bevattend AL en AR

READ (5,1) AL,AR

1 Format (2 F6.2)

B-ij read (5,1) refereert 5 naar een invoerapparaat en 1 naar statement nr. 1 d.i. Format (2 F6.2) wat een specificatie statement is en dient om de compiler van informatie te voorzien.

Format (2 F6.2)



AL en AR zijn de hoeken van het linker- respectievelijk rechter talud, gemeten vanaf de nul richting (naar rechts) tegen de klok in.

Regel 12-13.

De tweede getalkaart wordt ingelezen bevattend NR en NC, waarbij tweemaal de Format (I3) gebruikt wordt.

integer _____ | _____ veldgrootte

NR = het aantal rijen knooppunten

NC = het aantal kolommen knooppunten.

Regel 14-15.

Dit is het inlezen van de derde getalkaart bestaande uit vier getallen geponst volgens Format (F12.6) en bestaande uit: W, Perm, Bèta, HH.

Hierbij is:

W de lengte van de horizontale basis van de dam

Perm is de doorlatendheidscoëfficiënt van het materiaal
van de dam

B-èta is het effectieve poriëngetal

HH de hoogte van de waterspiegel bij het begin.

Regel 16-17.

De vierde getalkaart wordt ingelezen bevattend maxit, nts, nifs, relax, ts, eis, waarbij 3 maal Format I 6, 2 maal Format F 12.6 en 1 maal Format F 12.8 gebruikt wordt.

maxit is het aantal iteraties bij de bepaling van PHI
(Gauss-Seidel iteratie)

nts = aantal tijdstappen

nifs = aantal iteraties bij de berekening van het vrije
oppervlak

relax = over-relaxatiefactor bij de Gauss-Seidel iteratie

ts = de grootte van de tijdstap

eis = nauwkeurigheid bij de bepaling van PHI

N.B.: Naast de nummering voor programma LM6A wordt de
nummering voor programma LM6B tussen haakjes gegeven!

Regel 18. (20).

KLM = teller voor het aantal iteraties bij de bepaling van het vrije oppervlak.

Regel (18-19). (pr. LM6B)

Nu wordt een 5e getalkaart ingelezen bevattend de waarde FSP (I) met 9 getallen per kaart. Bij NC betekent dit 4 getalkaarten (6 getallen op de laatste kaart). FSP = Free Surface bij the start from a Permanent Condition.

Regel 19. (21)

ITS = teller, welke het aantal uitgevoerde tijdstappen aangeeft.

Regel 20. (22)

Time = 0.0. Dit is het begin tijdstip en wordt per tijdstap met de waarde TS verhoogd.

Regel 21-23. (23-25)

De grootte van AL en AR wordt omgerekend in radialen.

VI.3. Type randen en geometrie.

Regel 24. (26)

B-ij deze statement wordt de onderrand regelmatig verdeeld, waarbij dw de afstand tussen de onderrandknooppunten is.

Regel 25-29. (27-31)

Dit is de bepaling van de coördinaten van de onderrand knooppunten, waarbij tevens het type van de rand en de stijghoogte bij het begin bepaald worden. Men noemt dit een "do statement" ook wel als loop of lus aangeduid, waarvan de betekenis als volgt is:

Do 5 I = 1,NC.

De statement 5 (regel 28) is de laatste opdracht binnen de lus, waarvan I de lusvariabele is. De beginwaarde van I is 1, welke waarde steeds met 1 verhoogd wordt, tot $I = NC$, welke waarde het aantal knooppunten op de onder-rand voorstelt. Na beëindiging van regel 29 wordt namelijk steeds getest of I kleiner dan NC is

zo ja: spring naar regel 25 en verhoog I met 1

zo nee: ga verder bij regel 30.

Bas (I,1) = x -coördinaat van de onderrand knooppunten
= (I-1) dw

Bas (I,2) = y -coördinaat van de onderrand knooppunten
= 0.0.

TB (I) = 1 = Type Bas = type onderrand = ondoorlatend.

B-ij de typen van de knooppunten onderscheidt men:

0 = inwendig punt

1 = ondoorlatende rand

2 = gegeven stijghoogte

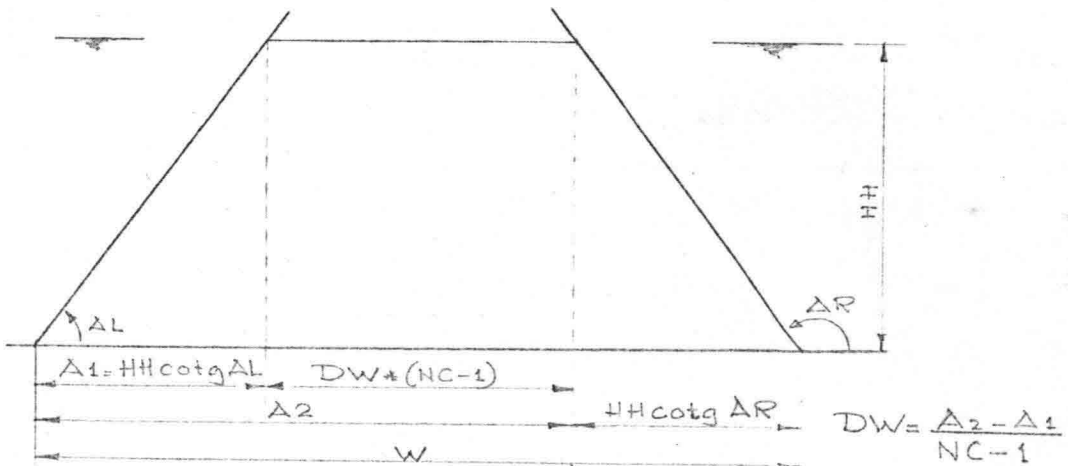
PB (I) = stijghoogte langs onderrand = HH.

Regel 30-31. (32-33)

Het eerste en laatste knooppunt van de onderrand is van een andere type nl. gelijk aan respectievelijk linker- en rechterrand (TB = 2 = gegeven PHI).

Regel 32-34. (34-36)

De onderverdeling van de knooppunten van de bovenrand wordt bepaald in verband met eventuele talud hellingen.



De bovenrand betekent dus de bovenbegrenzing van het waterlichaam in de dam.

Regel 35-39. (37-41)

De bepaling van de coördinaten van de bovenrand knooppunten, het type van de rand en de stijghoogte van de knooppunten op deze rand. Dit gebeurt weer met een Do-statement waarbij $I = 1, NC =$ aantal bovenrand knooppunten. $Top(I, 1 = x$ -coördinaat bovenrand knooppunt $= A \cdot 1 + (I-1)dw$.

$Top(I, 2) = y$ -coördinaat bovenrand knooppunt $= HH$

$TT(I) = 2$ d.w.z. type Top $=$ type bovenrand $=$ gegeven PHI

$PT(I) = HH =$ stijghoogte langs bovenrand.

Regel 40-41. (42-43)

Vaststelling van het type rand links en rechts

$TL = TR = 2$ d.w.z. voor de knooppunten op die randen is PHI gegeven.

Regel 42-43. (44-45)

De stijghoogten links en rechts worden vastgesteld ($PL = PR = HH$).

Regel 44-45. (46-47)

Dit is de bepaling van het aantal knooppunten ($NOD = NR \times NC$) en het aantal elementen ($NEL = 2 \times (NR-1) \times (NC-1)$).

VI.4. Bepaling van de structuur van de elementen.Regel 46-47. (48-49)

$L = NC - 1$ d.w.z. aantal kolommen $- 1$.

$LL = NR - 1$ d.w.z. aantal rijen $- 1$.

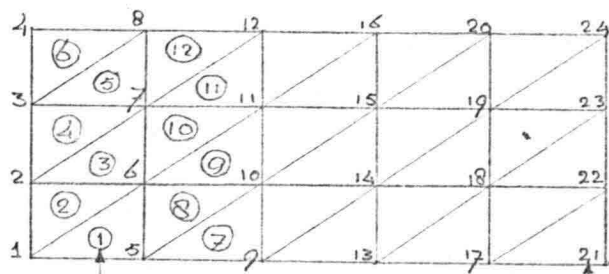
Regel 48-60. (50-62)

Do statement $I = 1, L$.

49 (51) $II = (I-1) \times NR + 1$ d.w.z. alle bodempunten behalve de laatste.

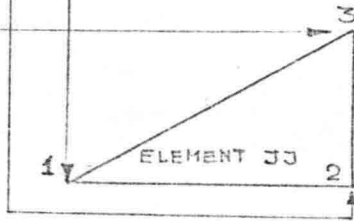
50-60 (52-62) Do statement $J = 1, LL$ dit is een zg. geneste lus (binnen lus 47-59) en wordt dus voor iedere waarde van I volledig uitgevoerd ($J = 1, LL$)

- 51 (53) $JJ = 2 * (I-1) * LL+2 * J-1$ d.w.z. alle oneven elementen.
- 52 (54) $JJJ = JJ+1$ d.w.z. alle even elementen.
- 53 (55) $III = II+J$ d.w.z. alle punten behalve de punten op de laatste kolom en op de onderrand.

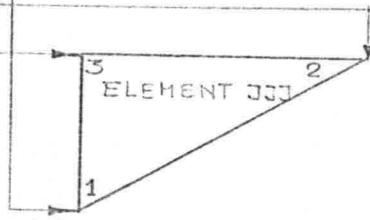


↑ element nummer
↑ knooppunt nummer
 In bovenstaande figuur is $NR = 4$ en $NC = 6$, waarbij de taluds vertikaal zijn genomen.

- 54-56 (56-58) $ST(JJ,1) = III - 1$
- $ST(JJ,2) = III + NR - 1$
- $ST(JJ,3) = III + NR$



- 57-59 (59-61) $ST(JJJ,1) = III - 1$
- $ST(JJJ,2) = III + NR$
- $ST(JJJ,3) = III$



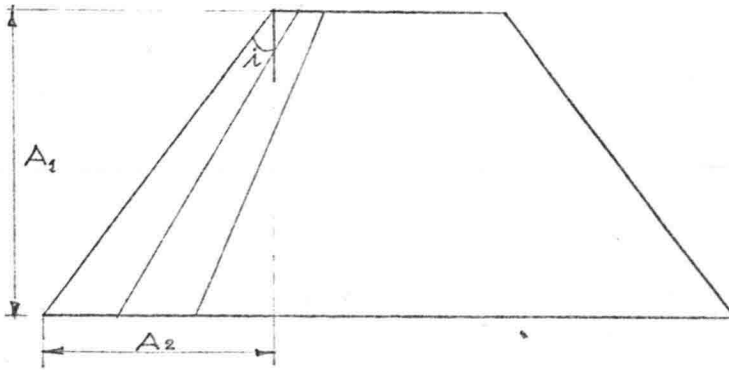
B-ij de statements 54-59 (56-61) worden de elementen opgebouwd, waarbij de nummering van de knooppunten per element linksom genomen wordt (1,2,3).

60 (62) De lus wordt hier beëindigd door een continue statement.

Regel 61-65. (63-67)

Dit is de berekening van de helling per kolom m.b.v. een do statement met $I = 1, NC$

Slope (I) = $\frac{A2}{A1}$.



VI.5. Bepaling van TY (type knooppunt) en PE (doorlatendheid per element).

Regel 66-67. (68-69)

TY(I) = 0 voor alle knooppunten d.w.z. inwendig punt. De randen worden in de volgende statements overschreven.

Regel 68-70. (70-72)

De knooppunten in de 1e kolom krijgen als type TL (= Type linkerrand) d.w.z. knooppunten waarvan PHI gegeven is.

De knooppunten in de laatste kolom krijgen als type TR (= Type rechterrand) d.w.z. knooppunten met gegeven PHI.

Regel 71-74. (73-76)

Dit is de bepaling van het type voor de onder- en bovenrand knooppunten, alle knooppunten van de onder- rand krijgen als type aanduiding TB(I).

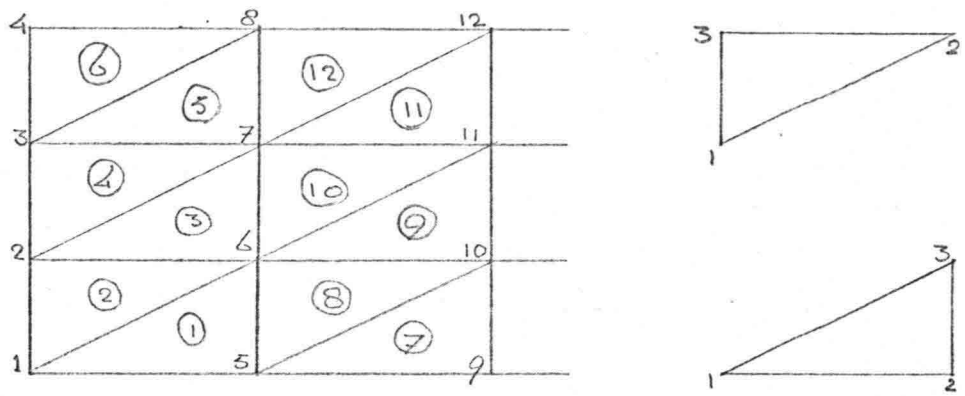
TB(I) is eerder gelijk aan 1 gesteld d.w.z. ondoorlatende rand. Hierbij is het 1e en laatste knooppunt van de onderrand dus overschreven, daar deze eerst als TL respectievelijk TR opgegeven waren.

Alle punten van de bovenrand krijgen TT(I) als type knooppunt. Reeds eerder is TT(I) als 2 opgegeven d.w.z. gegeven PHI. Ook hier worden de 1e en laatste knooppunten van de rand overschreven, de waarde verandert echter niet daar $TL = TR = TT = 2$.

Regel 75-76. (77-78)

De waarde PE(I) (= doorlatendheids-coëfficiënt) wordt voor elk element constant=PERM gehouden.

VI.6. Bepaling van de onderlinge contacten tussen de knooppunten (CT).



Door deze bewerking is het mogelijk een $n \times n$ matrix door een $n \times 8$ matrix te vervangen.
 (Bij het programma LM6 is een $n \times 12$ matrix toegepast).
 Dit is het invullen van de contact matrix.
 Uitgaande van knooppunt I, waarbij $I = 1, NOD$, wordt gezien met welke knooppunten een element gevormd wordt. Hierbij wordt de volgorde der elementen door de variabele J geregeld ($J = 1, NEL$) waarbij de knooppunten per element op de bekende manier genummerd zijn nl. linksom met behulp van de lusvariabele $II = 1, 3$.

CONTACT MATRIX

CT(I,1)	CT(I,2)	CT(I,3)	CT(I,4)	CT(I,5)	CT(I,6)	CT(I,7)	CT(I,8)
1	5	6	2				4
2
3
4
5
6	1	5	2	7	10	11	7
⋮							
NOD							

In kolom 8 staat het aantal knooppunten dat met elkaar een element vormt (CT(I,8)) dat is het aantal ingevulde kolommen.

Regel 77-98. (79-100)

Do statement (lus) met I = 1,NOD als lusvariabele.

Regel 78-81. (80-83)

CT(I,1) = I dit is de eerste kolom in de contactmatrix.

CT(I,8) = 1 is de laatste kolom in de contactmatrix (bij knooppunt I) waaraan de waarde 1 toegekend wordt.

Deze waarde 1 wordt overschreven zodra er een volgend knooppunt achter I in de matrix geschreven wordt: dus CT(I,2) → CT(I,8) = 2. zie regel 94 (96). K = 1.

De waarde van K geeft het aantal volgeschreven kolommen in de matrix aan (zie ook regel 94 (96)).

J = 1 De elementen zijn genummerd door de variabele J waarbij J maximaal de waarde NEL kan krijgen.

J = 1 = 1e element.

Regel 82. (84)

Statement nr. 281. De waarde van J wordt getest.

Als J groter is dan het aantal elementen, de variabele I met 1 verhogen (volgende knooppunt), of indien I groter is dan NOD de lus beëindigen.

Regel 83-85. (85-87)

Do statement tot regel 85 (87) met II = 1,3 als lusvariabele. Als knooppunt I overeenkomt met ST(J,II) d.w.z. als knooppunt I een hoekpunt is van element J een sprong opdracht uitvoeren naar statement 283 (regel 87 (89)).

Regel 86. (88)

Indien aan regel 84 (86) niet voldaan wordt, d.w.z. I behoort niet tot element J, wordt naar statement 284 gesprongen (regel 96 (98) wat betekent, dat het volgende element beschouwd wordt.

Regel 87-95. (89-97)

In deze lus vindt het inschrijven in de contactmatrix plaats.

- 87 (89) $II = 1,3$ is de lusvariabele.
Deze lus wordt alleen uitgevoerd als aan regel 84 (86) voldaan is.
- 88 (90) $JJ = ST(J,II)$ waarbij J het element nr. is en $II = 1,2$ of 3 , terwijl JJ het nr. van een knooppunt is.
Het is nodig $ST(J,II)$ opnieuw te benoemen omdat het op regel 90 (92) vergeleken wordt met $CT(I,L)$.
- 89-91 Dit is een lus binnen lus 285 met $L = 1, K$ als (91-93) lusvariabele.
- 90 (92) $IF(CT(I,L).EQ.JJ) GOTO 285$.
Als aan deze voorwaarde voldaan is wordt naar statement 285 gesprongen d.w.z. II met 1 waarde verhogen (volgende hoekpunt van het beschouwde element) of het volgende element beschouwen ($J = J + 1$) als II groter dan 3 zou worden.

Deze test is aangebracht omdat regel 84 (86) geldt. Daar deze waarde hier ook weer naar voren komt en reeds in de contactmatrix geschreven is nl. $CT(I,1)$ op regel 78 (80) moet hij uit het inschrijfproces (regel 92-95 (94-97)) gelicht worden. Indien regel 90 (92) niet de sprong naar 285 (regel 95 (97)) bewerkstelligt moeten deze waarden van JJ in de contactmatrix worden ingeschreven (regel 93 (95)). Dit vindt plaats door K met 1 waarde te verhogen ($K = K+1$).

- 92-95 $CT(I,K) = JJ$. De waarde van JJ is bepaald (94-97) in regel 88 (90)
 $CT(I,8) = K$ d.w.z. totaal aantal knooppunten op één regel in de contactmatrix.

Regel 96-97. (98-99)

Bij dezelfde waarde van I wordt nu het volgende element beschouwd.

Regel 98. (100)

Wanneer $I = NOD$ bereikt is, beëindigt men het berekenen van de contacten (statement 280).

Na de voorgaande informatieverwerking en de opbouw van de elementen kan nu met het Rekenprogramma begonnen worden.

VI.7. Bepaling van de coördinaten van de knooppunten (CO).

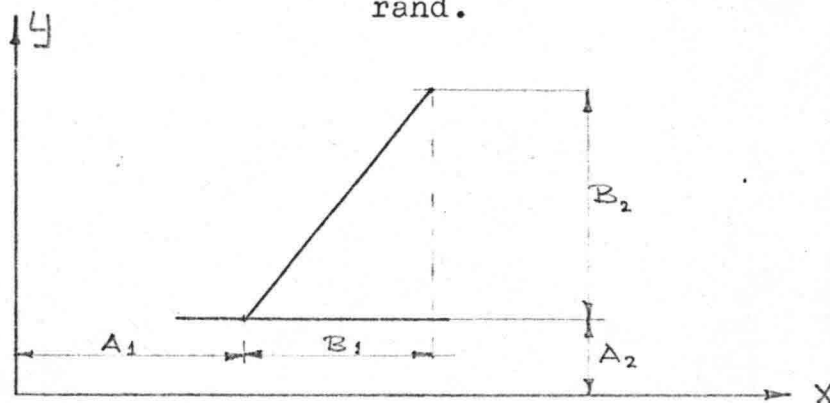
Regel 99-112. (101-114).

Statement 41 een lus met $I = 1, NC$ als variabele.

100-101 (102-103) Bas (I,1) = x coördinaat van de onder-rand knooppunten (is reeds eerder bepaald).

Bas (I,2) = y coördinaat van de onder-rand knooppunten (is reeds eerder bepaald).

102-104 (104-106) Top (I,1) en Top (I,2) van de boven-rand.



105-112 (107-114) Dit is een lus binnen regel 99-112 (101-114) met $J = 1, NR$ als lusvariabele.

106 (108)

$$III = II + J = (I - 1) NR + J.$$

Door deze regel worden alle knooppunten voorgesteld, waarbij I de kolom aangeeft waar het knooppunt op ligt en J de hoogte op deze kolom bepaalt.

107-109 (109-111) $A_{JN} = \frac{AJ}{AN} = \frac{J-1}{NR-1}$ Hierbij wordt de kolom (raai) in $(NR-1)$ gelijke stukken verdeeld.

110-111 (112-113) CO (III,1) = x-coördinaat, hierbij stelt III alle knooppunten voor.
CO (III,2) = y-coördinaat.

Deze regels rangschikken de knooppunten regelmatig tussen de onderen bovenrand.

Bij het begin wordt de waarde van Top (I,2) vastgesteld als HH (FSP(I)), volgens regel 37 (39) daarna geeft regel 243-244 (240-241) de waarde van Top (I,2). Voor Top (I,1) geldt een overeenkomstige procedure.

VI.8. Bepalen van de eerste schatting voor PHI.

Regel 113-117. (115-119)

Lus met $I = 1, NC$ als variabele.

116-117 (118-119) Lus binnen 113-117 (115-119) met $J = 1, NR$ als variabele.

De statement 117 (119) bepaalt de PHI in alle knooppunten. De stijghoogten van de punten worden per kolom constant verondersteld en wel gelijk aan de y-coördinaat van het bovenste knooppunt (bovenrand) van deze kolom. Hierna worden de afwijkende waarden van PHI aan de rand overschreven. (118-120 (120-122)).

Regel 118-120. (120-122)

De waarden van PHI voor de knooppunten in de eerste kolom worden gelijk gesteld aan de randvoorwaarde (PL). Het bovenste knooppunt van de eerste kolom krijgt als waarde voor PHI de y-coördinaat van dat punt.

VI.9. Bepaling van de begin waarden van de matrix en de loadvector.

Regel 121-124. (123-126)

Do statement met $I = 1, NOD$ als lusvariabele.

$LA(I) = 0.0$ Met $LA(I)$ kan aan het rechterlid van de vergelijking $\sum P.\varphi = 0$ (uit de Gauss-Seidel iteratie) een andere waarde gegeven worden.

Bij statement 290 wordt voor $P(I, J)$ een matrix gevormd ($I = 1, NOD; J = 1, 8$) en overal de waarde 0.0 toegekend, welke later eventueel overschreven wordt (bij regel 151 (153)).

VI.10. Bepaling van de matrix coëfficiënten.

Regel 125-156. (127-158)

Do statement met $I = 1, NEL$ als variabele.

126-127 (128-129) De knooppunten worden per element benoemd en wel $NO(1)$ $NO(2)$ en $NO(3)$.

128-131 (130-133) In deze lus worden de coördinaten van de hoekpunten van element I bepaald, waarbij K van 1 tot 3 loopt, $J = NO(K)$.
 $X(K) = CO(J, 1) = x$ coördinaat van de knooppunten 1 t/m 3 van element I .
 $Y(K) = CO(J, 2) = y$ coördinaat van de knooppunten 1 t/m 3 van element I .

132-137 (134-139) Dit is de bepaling van de coëfficiënten B en C voor element I , overeenkomstig de vergelijkingen 4.5 en 4.7 (zie H.IV)

138-143 (140-145) Hier wordt de bijdrage van element I aan de verschillende coëfficiënten P bepaald. Dit geschiedt volgens de formules 4.4 b en 4.15 uit H. IV.

144-155 (146-157) Lus met $J = 1, 3$ als variabele. JJ is het beschouwde knooppunt van element I . $II = CT(JJ, 8)$, d.w.z. II staat in de contactmatrix op regel JJ in kolom 8, dit is het aantal volgeschreven kolommen op regel JJ .

147-154 (149-156) Lus met $K = 1, II$ als variabele.
 148-153 (150-155) Lus met $L = 1, 3$ als variabele.
 149-150 (151-152) IF (NO(L).EQ.CT(JJ,K)) GOTO 390
 GOTO 380.

Dit is een test, waarbij nagegaan wordt of NO(L) in de contactmatrix op plaats K staat bij regel JJ. Indien dit niet het geval is L met 1 verhogen (150 (152)).

151 (153) Indien aan 149 (151) voldaan is, de bijdrage AA(J,L) van dit element aan P(JJ,K) toevoegen.

152 (154) GOTO 370 dit is een onvoorwaardelijke sprongopdracht en betekent dat K met 1 verhoogd wordt.

153-156 (155-158) Door deze statements worden de bovenvermelde lussen beëindigd wanneer de maximum waarde voor de lus variabele bereikt is.

Ter illustratie van deze paragraaf wordt voor het voorbeeld uit VI.6. een gedeelte van de coëfficiënten matrix gegeven.

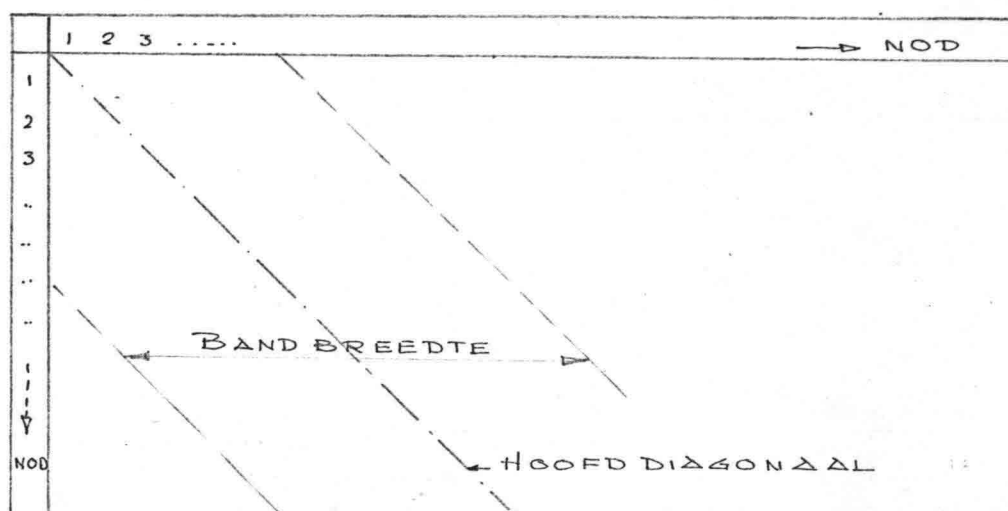
COEFFICIENTEN MATRIX.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	P ₁₁	P ₁₅	P ₁₆	P ₁₂				
2			
3					
4				
5			
6	P ₆₆	P ₆₁	P ₆₅	P ₆₂	P ₆₇	P ₆₁₀	P ₆₁₁	
⋮								
∨								
NOD								

b.v. $P(6,1) = P 66$ $P(6,2) = P 61$

De opbouw is analoog aan de contact matrix, welke reeds eerder geformeerd is.

Door de hierboven beschreven programmatische voorzieningen is de coëfficiënten matrix (zie ook H.IV.3), welke in het algemeen $NOD \times NOD$ groot is, vervangen door het volgeschreven gedeelte hiervan (de bandbreedte langs de hoofddiagonaal). Men spreekt nu dan ook van een band matrix, welke in dit geval de afmetingen $NOD \times 8$ heeft.



VI.11. Gauss-Seidel iteratie.

De matrix vergelijkingen $\sum P_i \varphi$ worden opgelost met behulp van een Gauss-Seidel iteratie, waarbij de nieuw berekende waarde vergeleken wordt met de oude waarde.

Regel 157. (159)

De teller van het aantal iteraties wordt IT genoemd en wordt na één iteratie steeds 1 waarde hoger gezet (zie regel 170).

Regel 158-159. (160-161)

Relax = 1.7 en $K = 1$, ($K = 2$).

Als gedurende het iteratie proces de waarde van Relax na bijv. 20 iteraties veranderd wordt (zie 171 (173), Relax = 1) moet steeds de waarde voor Relax bij IT = 1,20 worden in gelezen.

Met de constante K wordt vastgelegd wanneer met het testen van de nauwkeurigheid van PHI wordt begonnen (bij $L = 5 \times K$ iteraties).

Regel 160-169. (162-171)

Lus met I = 1,NOD als variabele.

- 161 (163) Door deze statement worden de knooppunten waarvan de PHI gegeven is (TY = 2) overgeslagen.
- 162 (164) Dit is het rechterlid van de vergelijking $\sum P_i \varphi = CC$, waaraan de waarde LA(I) wordt toegekend.
- 164-165 Lus met als variabele J = 1,II (= CT(I,8) = (166-167) aantal kolommen in de matrix).
- 165-166 $CC = CC - P(I,J) \times PHI(CT(I,J))$
- (167-168) $CC = \frac{CC}{P(I,1)}$

Dit is de zg. "relaxatie" stap en CC (regel 166 (168) geeft de nieuwe waarde van PHI als volgt:

$$CC = - \frac{1}{P(I,1)} \left\{ \begin{array}{l} P(I,2) * PHI(CT(I,2)) + P(I,3) * \\ PHI(CT(I,3)) + \dots + \dots + \\ P(I,CT(I,8)) * PHI(CT(I,CT(I,8))) \end{array} \right\}$$

bijv. I = 6

$$CC = - \frac{1}{P66} \left\{ \begin{array}{l} P61 * \varphi_1 + P65 * \varphi_5 + P62 * \varphi_2 + \\ P67 * \varphi_7 + P6.10 * \varphi_{10} + \\ P6.11 * \varphi_{11}. \end{array} \right\}$$

- 167 (169) Nu wordt het verschil bepaald tussen PHI(I), zijnde de uitgangswaarde voor PHI en de nu berekende CC (een nieuwe waarde voor PHI).
- 168 (170) Door dit verschil (regel 167 (169)) met een factor Relax (groter dan 1) te vermenigvuldigen kan men het iteratie proces bespoedigen. De waarde van PHI wordt namelijk sterker "verbeterd" dan het "verschil" volgens regel 167 (169) zou doen.
 $PHI(I) = PHI(I) - RELAX * CC$
 ↑
 nieuwe waarde voor PHI.

Regel 170. (172)

Wanneer lus 520 I = 1,NOD volledig uitgevoerd is, heeft men één iteratie voltooid en wordt de teller IT verhoogd met de waarde 1.

Regel 171-176. (173-178)

IF(IT.EQ.20) RELAX = 1.0

Na een doelmatig aantal iteraties wordt aan relax een kleinere waarde gegeven (zie H. V.)

$L = 5 * K$

$M = L + 1$

Ter bepaling van de nauwkeurigheid van de stijghoogte PHI wordt de waarde voor PHI bij twee opeenvolgende iteraties vergeleken (L en L + 1). Dit gebeurt om de 5 iteraties, waarbij de grootte van K bepalend is voor de aanvang van het testen (bijv. K = 2 d.w.z. na 10 iteraties).

IF(IT.EQ.M) GOTO 540 dat is een voorwaardelijke sprong opdracht naar regel 181 (183).

Eén iteratie eerder is dan $PSI = PHI$, d.w.z. PHI opgeborgen in PSI,

bij IF(IT.EQ.L) GOTO 550 dat is een voorwaardelijke sprong opdracht naar regel 177 (179).

Is IT niet gelijk aan L of M dan wordt aan de volgende iteratie begonnen (GOTO 510).

Regel 177-180. (179-182)

Als regel 175 (177) de sprong naar deze statements bewerkstelligt, wordt de waarde van PHI opgeborgen in een geheugenplaats gekenmerkt door $PSI(I)$ ($I = 1, NOD$) en wordt nog een iteratie uitgevoerd, doordat in regel 180 (182) naar statement 510 (regel 160 (162)) gesprongen wordt.

Regel 181. (183)

Dit is het initialiseren van DIG.

Regel 182-185. (184-187)

Lus met $I = 1, NOD$ als variabele, waarin voor ieder knooppunt het verschil bepaald wordt tussen de laatste en de één na laatste waarde voor PHI (regel 183 (185)) waarna de grootste van deze NOD verschillen bepaald wordt (regel 184 (186)). De waarde van DIG is een maat voor de nauwkeurigheid van het iteratie proces.

Regel 186-189. (188-191)

IF(DIG.LT.EIS) GOTO 553.

IF(IT.GT.MAXIT) GOTO 553.

K = K + 1.

GOTO 510.

Hier wordt getest of DIG kleiner dan EIS (dit is de vereiste nauwkeurigheid voor PHI) is.

Zo ja, dan wordt de iteratie beëindigd. Maxit is het maximum aantal iteraties en voorkomt een zinloos groot aantal iteraties (bovengrens). Is de vereiste nauwkeurigheid niet bereikt, dan worden er nog 5 iteraties uitgevoerd ($K = K + 1$) waarna weer getest wordt.

Regel 190-191. (192)

Ten behoeve van latere uitvoer wordt de hier verkregen waarde van DIG opgeborgen in het geheugen.

Bij het programma LM6A (NIFS = 3), worden deze plaatsen in het geheugen gedefinieerd door DIG1 (bij KLM = 0) en DIG2 (bij KLM = 1).

Daar bij LM6B voor NIFS de waarde 2 is aangehouden, kan men volstaan met de statement DIG1 (bij KLM = 0).

VI.12. Bepaling van de "Nodal Flows". (naar de knooppunten toe gerichte specifieke debieten)

Dit is de bepaling van de hoeveelheid water, die ten gevolge van de veranderde stijghoogte in het inwendige, boven (of onder) de vastgehouden bovenbegrenzing komt, geconcentreerd in de knooppunten van de bovenrand.

Regel 192-198. (193-199)

Lus met I = 1, NC als variabele.

193 (194) De knooppunten van de bovenrand worden aangeduid door K.

194 (195) Dit is het initialiseren van Q(I).

- 195 (196) Het aantal knooppunten op één regel met K in de contact matrix wordt L genoemd.
- 196-198 Lus met $J = 1, L$ als variabele waarbij J de (197-199) kolom in de contact- en P -matrix bepaalt.
- 197 (198) Bepaling $Q(I)$ overeenkomstig vergelijking 4.27 uit H.IV.

Regel 199-202. (200-202)

Lus met als variabele $I = 1, NC$ om de waarden van $Q(I)$ op te bergen in $Q1(I)$ (bij $KLM = 0$) indien uitvoer van deze waarden gewenst wordt ter vergelijking met $Q(I)$.

Bij het programma LM6A, waarbij NIFS = 3 wordt ook nog de geheugenplaats $Q2(I)$ bij $KLM = 1$ gedefinieerd.

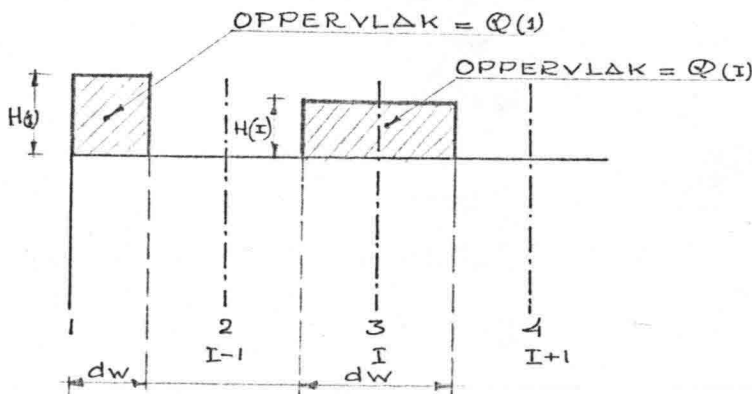
VI.13. Bepaling van de schijnbare verdamping $H(I)$.

Uit de waarden van $Q(I)$ wordt $H(I)$ bepaald volgens de formules 4.20 uit H.IV. Hiertoe wordt in de regels 203-210 een beginschatting voor $H(I)$ gemaakt, welke waarde in de bovenbedoelde vergelijkingen ingevuld wordt (regel 211-220). De definitieve waarde van $H(I)$ is na een aantal (hier: $J = 10$) herhalingen van 211-220 bereikt.

Regel 203-210.

Bepaling van een schatting voor $H(I)$.

203-204 Bepaling $H(1)$ zie figuur.



206-208 Lus met $I = 2, L (= NC - 1)$ als variabele ter bepaling van $H(I)$.
 Daar de eerste en de laatste knooppunten een afwijkende bepaling van $H(I)$ hebben (niet symmetrisch) moeten deze H 's apart bepaald worden. In de voorgaande figuur is $H(I)$ aanschouwelijk gemaakt.

209-210 Bepaling $H(NC)$ analoog aan $H(1)$.

Regel 211-221.

Bepaling $H(I)$.

211-221 Lus met $J = 1, 10$ als variabele.

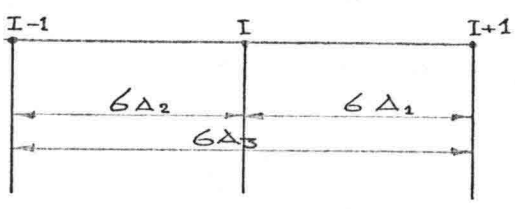
212 $A1$ komt overeen met $1/3$ dw van regel 203.

213 $H(1) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{Q(1)}{A-1} - H(2) \right\}$

214-218 Lus met $I = 2, L$ als variabele

$A3 = A1 + A2$ (zie figuur)

$$H(I) = \frac{Q(I) - A1 * H(I + 1) - A2 * H(I - 1)}{2 * A3}$$



Bij verticale kolommen geldt: $dw = 6A2 = 6A1 = 3A3$.
 De vergelijking wordt dan $H(I) = \frac{6}{4} \frac{Q(I)}{dw} - \frac{1}{4} H(I + 1) - \frac{1}{4} H(I - 1)$

219-220 Bepaling $H(NC)$ overeenkomstig de bepaling van $H(1)$.

Regel 222-225. (222-224)

Lus met als variabele $I = 1, NC$ om de waarden van $H(I)$ op te bergen in $H1(I)$ (bij $KLM = 0$) indien uitvoer van deze waarden gewenst wordt ter vergelijking met $H(I)$.
 Bij het programma LM6A, waarbij NIFS de waarde 3 heeft, wordt ook nog de geheugenplaats $H2(I)$ bij $KLM = 1$ gedefinieerd.

VI.14. Iteratie van de positie van het vrije oppervlak.

De ligging van het vrije oppervlak wordt bepaald volgens een "predictor-corrector methode", waarin regel 233-234 (232-233) als predictor fungeert (voorwaarts in de tijd) en regel 243-244 (240-241) als corrector dienst doet (centraal in de tijd) (zie H.V.2.4.)

Regel 227.(226)

De teller KLM wordt met één verhoogd als teken dat er met een iteratie begonnen is.

Regel 228.(227)

Als $KLM > 1$ bij Statement 406 (regel 231(230)) verder gaan, daar regel 229-230 (228-229) dan reeds uitgevoerd is.

Regel 229-230. (228-229)

Lus met $I = 1, NC$ als variabele (voor de knooppunten van de bovenrand) waarmee de Y-coördinaat van de bovenrand knooppunten in geheugenplaats gedefinieerd door $POS(I)$ geborgen wordt.

Regel 231. (230)

Als $KLM = NIFS$ d.w.z. de laatste iteratie van het vrije oppervlak is bereikt, bij statement 408 regel 241 (238) verder gaan.

Regel 232-233. (231-232)

Lus met $I = 2, II (= NC - 1)$ als variabele. Van de berekende verandering van $TOP(I, 2)$ wordt de helft genomen. (statement 407)

Regel 234. (233)

Voor het eerste knooppunt wordt de verandering gekoppeld aan PL.

Regel 235-239. (234-236)

Lus met $I = 1, NC$ als variabele, waarmee de hoogte van het vrije oppervlak na de eerste iteratie, waarbij $KLM = 1$, opgeborgen wordt in geheugenplaats gedefinieerd door $FS1(I)$, indien uitvoer gewenst is ter vergelijking met de definitieve ligging van het vrije oppervlak $TOP(I,2)$.

Bij LM6A (met NIFS = 3) wordt ook nog de geheugenplaats $FS2(I)$ (bij $KLM = 2$) gedefinieerd.

Regel 240. (237)

Bij statement 410 vervolgen (onvoorwaardelijke sprong opdracht).

Regel 241. (238)

Vervolg statement waarnaar eerder verwezen is. (regel 231 (230)).

Regel 242-243. (239-240)

Lus met $I = 2, II (= NC - 1)$ als variabele ter bepaling van de positie van het vrije oppervlak volgens vergelijking 4.34 (H.IV).

Regel 244. (241)

Bepaling positie van het vrije oppervlak voor de eerste kolom (= PL).

Regel 245. (242)

De teller KLM wordt weer nul gemaakt in verband met een volgende tijdstap.

Regel 246. (243)

Vervolg statement waarnaar eerder verwezen is. (regel 240 (237)).

Regel 247-248. (244-245)

Lus met $I = 1, NC$ als variabele ter bepaling van de horizontale coördinaten van de bovenrand knooppunten.

Regel 249. (246)

Dit is een test voor de waarde van KLM en zorgt er voor dat het programma na de "predictor" herhaald wordt, teneinde de "corrector" te bepalen.

VI.15. De uitvoer van het vrije oppervlak en eventueel begin van de volgende tijdstap.

Regel 250. (247)

Als ITS groter dan nul is bij statement 610 (regel 255 (252) verder gaan.

Regel 251-252. (248-249)

WRITE (6,601) Hierbij refereert 6 naar de regeldrukker en 601 naar een statement (specificatie).

601 Format (1H1, 'Finite Element Method')

Deze statement maakt het afdrukken van tekst mogelijk bij gebruik van ' '.

1H1 betekent een nieuwe bladzijde

1H betekent een nieuwe regel

1H0 betekent twee nieuwe regels.

Regel 253-254. (250-251)

Programma LM6 wordt onder Finite Element Method afgedrukt.

Regel 255-274. (252-271)

Dit is de uitvoer per tijdstap.

255-262 (252-259) Nu wordt achtereenvolgens uitgevoerd

TIME =

NODAL FLOWS AND APPARENT EVAPORATION

263-268 (260-265) 1 nieuwe pagina nemen (1H1).

FIRST, SECOND AND DEFINITE POSITION OF FREE SURFACE.

(FIRST AND DEFINITE POSITION OF FREE SURFACE).

269-274 (266-271) AFTER 15 ITERATIONS THE DIFFERENCE
IN THE VALUES OF PHI IS APPROXIMATELY
DIG1, DIG2, DIG. (DIG1, DIG).

Einde uitvoer en toelichting bij verandering van de
tijdstep.

De waterspiegel aan de linkerzijde van de dam (PL)
verandert per tijdstep, hetwelk in overeenstemming
moet zijn met regel 275 (273).

Regel 275. (273)

De verandering van PL per tijdstep.

Regel 276. (272)

TIME = TIME + TS. De tijd wordt met 1 tijdstep vermeerderd.

Regel 277. (274)

ITS = ITS + 1. De teller voor het aantal gedane tijdstep-
pen wordt met 1 verhoogd.

Regel 278. (275)

Bij deze test wordt bezien of het maximum aantal tijd-
stappen al bereikt is (NTS) zo niet, dan wordt het pro-
gramma bij statement 41 vervolgd.

Regel 279. (276)

STOP. Deze statement stopt de uitvoering van een pro-
gramma.

Regel 280. (277)

END. Dit is de laatste statement van een programma.

Lijst van symbolen en afkortingen bij Programma LM6, LM6A en LM6B.

AA(J,K)	Bijdrage per element aan de matrix coëfficiënt P, welke voor een knooppunt van het betreffende element geldt.
AL	de hellingshoek van het linker talud.
AR	de hellingshoek van het rechter talud
BAS(I,1)	X-coördinaat van de onderrand
BAS(I,2)	Y-coördinaat van de onderrand
BETA	effectieve porositeit
CO(I,1)	X-coördinaat van alle knooppunten
CO(I,2)	Y-coördinaat van alle knooppunten
CT(I,J)	contacten per knooppunt, hierbij zijn J de knooppuntnummers, die één element met knooppunt I vormen
DIG	Het <u>grootste</u> verschil $/\text{PHI}(I) - \text{PSI}(I)/$
DIG 1	DIG in eerste instantie (wanneer KLM = 0), voor latere uitvoer in geheugen opgeborgen
DIG 2	DIG in tweede instantie (wanneer KLM = 1), voor latere uitvoer in geheugen opgeborgen
DI	Het verschil $/\text{PHI}(I) - \text{PSI}(I)/$
EIS	Nauwkeurigheds-EIS (bovengrens) welke aan DIG gesteld wordt
FS 1	vrije oppervlak in 1e instantie (bij KLM = 1)
FS 2	vrije oppervlak in 2e instantie (bij KLM = 2)
FSP	vrije oppervlak, wanneer bij de start een dergelijk vrij oppervlak wordt ingelezen (permanentie)
H	Schijnbare verdamping
H 1	Schijnbare verdamping in 1e instantie (bij KLM = 0) voor latere uitvoer in geheugen opgeborgen
H 2	Schijnbare verdamping in 2e instantie (bij KLM = 1) voor latere uitvoer in geheugen opgeborgen

HH	hoogte van de vrije waterspiegel van de vaste randvoorwaarde, bij ontbreken van FSP tevens beginstand voor de berekening (in meters)
IT	teller voor het aantal iteraties bij de Gauss-Seidel-procedure
ITS	teller, welke het aantal uitgevoerde tijdstappen aangeeft
KLM	teller voor het aantal iteraties bij de bepaling van het vrije oppervlak
LA	Bronsterkte (hier echter gelijk aan 0,0)
MAXIT	maximum aantal iteraties bij de Gauss-Seidel iteratie
NC	aantal kolommen
NEL	aantal elementen
NIFS	aantal iteraties bij de bepaling van het vrije oppervlak
NO(J)	knooppunt J van element I
NOD	aantal knooppunten
NR	aantal rijen
P(J,K)	matrix coëfficiënt
PB(I)	stijghoogte van de onderrandknooppunten
PERM	doorlatendheidscoëfficiënt
PHI(I)	de stijghoogte in de knooppunten
PL	stijghoogte van de linkerrand
POS(I,2)	Y-coördinaat van de bovenrand tijdens de iteratie van het vrije oppervlak
PR	stijghoogte van de rechterrand
PSI(I)	de stijghoogte van de knooppunten op bepaalde momenten in de Gauss-Seidel iteratie
PT	stijghoogte in de bovenrandknooppunten
Q	naar het knooppunt gerichte debiet
Q 1	Q in 1e instantie (bij KLM = 0) voor latere uitvoer in geheugen opgeborgen
Q 2	Q in 2e instantie (bij KLM = 1) voor latere uitvoer in geheugen opgeborgen
RELAX	over-relaxatiefactor bij de Gauss-Seidel iteratie

SLOPE(I) helling der kolommen
ST(JJ,II) structuur der elementen (welke knooppunten samen één element vormen)
TB type onderrand
TIME tijd, verstreken sinds het begin van de beweging van PL
TL type linkerrand
TOP(I,1) X-coördinaat van de bovenrand
TOP(I,2) Y-coördinaat van de bovenrand
TR type rechterrand
TS de grootte van de tijdstap
TT type bovenrand
W grootte van de basis van de dam (in meters)
X X-coördinaat bij de berekening van de matrix coëfficiënten
Y Y-coördinaat bij de berekening van de matrix coëfficiënten

Hoofdstuk VII. Interpretatie van de eindige elementen-
methode in relatie met een eindige
differentiemethode.

Tijdens dit onderzoek is mij door ir. C. Verspuy gevraagd het rekenproces van de eindige elementenmethode meer doorzichtig te maken en zo mogelijk een fysische interpretatie te geven in relatie met de eindige differentiemethode.

Voor het principe van de differentiemethode wordt naar Hoofdstuk II.2 verwezen.

Wanneer in dit hoofdstuk gesproken wordt over de differentiemethode, wordt hiermee steeds bedoeld de differentiemethode, welke door de heer B.S. van der Weide in zijn afstudeerrapport (lit. (7)) is toegepast.

Door de Dienst Informatie Verwerking (DIV) van Rijkswaterstaat is namelijk onder andere ook de differentiemethode toegepast op het toetsprobleem. Na een korte beschrijving van de in lit. (7) gevolgde werkwijze bij de oplossing van de vergelijkingen van het toetsprobleem worden de rekenschema's van de differentiemethode en van de elementenmethode met elkaar vergeleken.

In Hoofdstuk VII.4 wordt de gedane verwaarlozing bij de bepaling van het vrije oppervlak aan een nadere beschouwing met behulp van een reeksontwikkeling volgens Taylor onderworpen.

Aan het slot van dit hoofdstuk wordt het gedrag van het "rekenmolecuul" (matrix coëfficiënten P) gedemonstreed en wordt de overeenkomst met de differentiemethode bij rechthoekige maasvorm vastgesteld.

VII.I. Beschrijving van het rekenproces bij de differentiemethode zoals toegepast in literatuur 7 (blz. 54 - 64).

Naast de fysische grootheden zijn de in lit. (7) gebruikte tussen haakjes opgenomen.

a. Uitgangspunt: Bekende begintoestand (tijdstip t).

Gebruikte nomenclatuur in lit. (7):

(h_0) = linker randvoorwaarde

$(h_{1(t)})$ = rechter randvoorwaarde

$(\text{peil } (i))$ = vrije waterspiegel

$(h(i))$ = stijghoogten in alle punten.

b. De veranderlijke randvoorwaarde verandert ($t + \Delta t$).

c. Stijghoogte in het inwendige verandert (onmiddellijk).

Deze nieuwe stijghoogten (h_{massief}) worden bepaald met behulp van een relaxatieproces.

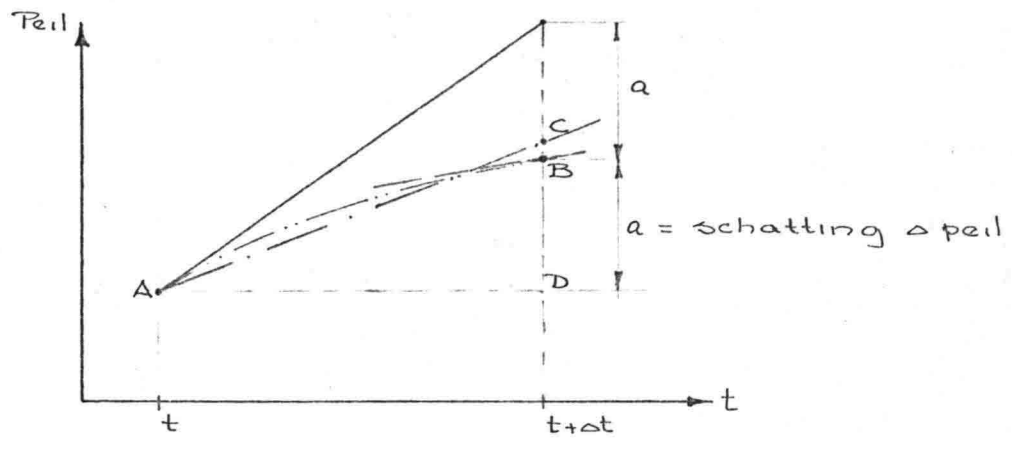
De bovenrand wordt aanvankelijk vastgehouden, waardoor de stijghoogte en ligging van de freatische lijn (voor de bovenste knooppunten) gelijk zijn aan de begintoestand.

d. Schat de vrije waterspiegel na Δt (veronderstelling: waterspiegel verandert evenwijdig) uitgaande van de hoogte van het vrije oppervlak op tijdstip t en de stijghoogte op de bovenrand (op tijdstip t) en de stijghoogte op een punt onder de bovenrand met de waarde onder c verkregen. Uit de stijghoogten worden de snelheden bepaald ($v = -ki$). Uit de continuïteitsvergelijking van een elementje aan het vrije oppervlak en de berging wordt de schatting voor de vrije waterspiegel op $t + \Delta t$ bepaald (empirisch gebleken: factor $\frac{1}{2}$).

e. Schat de potentiaal verdeling op $t + \Delta t$ (op bovenrand peil $i = h(i)$). Eerst voor de punten op de bovenrand (aanneme verhang in verticale richting = constant). Daarna de punten in het inwendige (massief) met behulp van een relaxatieproces.

- f. Bepaling van het nieuwe vrije oppervlak
 (PEIL (i) = peil (i) + Δ peil (i)) volgens d,
 echter nu wordt uit het gemiddelde van de waarden
 op t en t + Δ t de waarde Δ peil bepaald. (centraal
 in de tijd)
- g. Dit kan herhaald worden:
 Eerst stijghoogten aanpassen volgens e. en daarna
 weer Δ peil bepalen volgens f. (het gemiddelde
 van oude en onder f. gevonden waarde).

Bij d. geschiedt de schatting voor het vrije oppervlak
 op t + Δ t voorwaarts in de tijd (empirisch bleek
 factor $\frac{1}{2}$, lijn AB).



De definitieve waarde voor de verandering van het
 vrije oppervlak per tijdstap (Δ peil) is gebaseerd
 op het gemiddelde van het verhang in A en in B.
 Hieruit volgt het punt C, zodat (Δ peil) = DC.
 Eventueel kan de hier verkregen waarde volgens
 g. als schatting voor een betere waarde gebruikt
 worden.

Het rekenproces kan als volgt in een schema geplaatst worden.

1. Tijdstip t : alles bekend (begintoestand of voorgaande berekening).

2. Randvoorwaarden ($t + \Delta t$) invoeren: schatting stijghoogte ($t + \Delta t$), en verandering van het vrije oppervlak (Δpeil).
Door relaxatie wordt de stijghoogte in het massief bepaald.
Schatting voor de vrije waterspiegel uit snelheden en continuïteit (factor $\frac{1}{2}$).

3. Bepaling van de potentiaalverdeling ten gevolge van de verandering van het vrije oppervlak ($\Delta \text{peil} (t + \Delta t)$):
Voor de punten op de bovenrand (verhang in verticale richting is constant).
Voor de punten in het massief door middel van een relaxatieproces.

4. Bepalen van het nieuwe vrije oppervlak ($\text{peil} (t + \Delta t) = \text{peil} (t) + \Delta \text{peil} (t + \Delta t)$) met behulp van centrale differentie benadering en controle op ligging van de bovenrand.

5. Nauwkeurigheds criteria.

6. Uitvoer van de definitieve waarden op $t + \Delta t$.



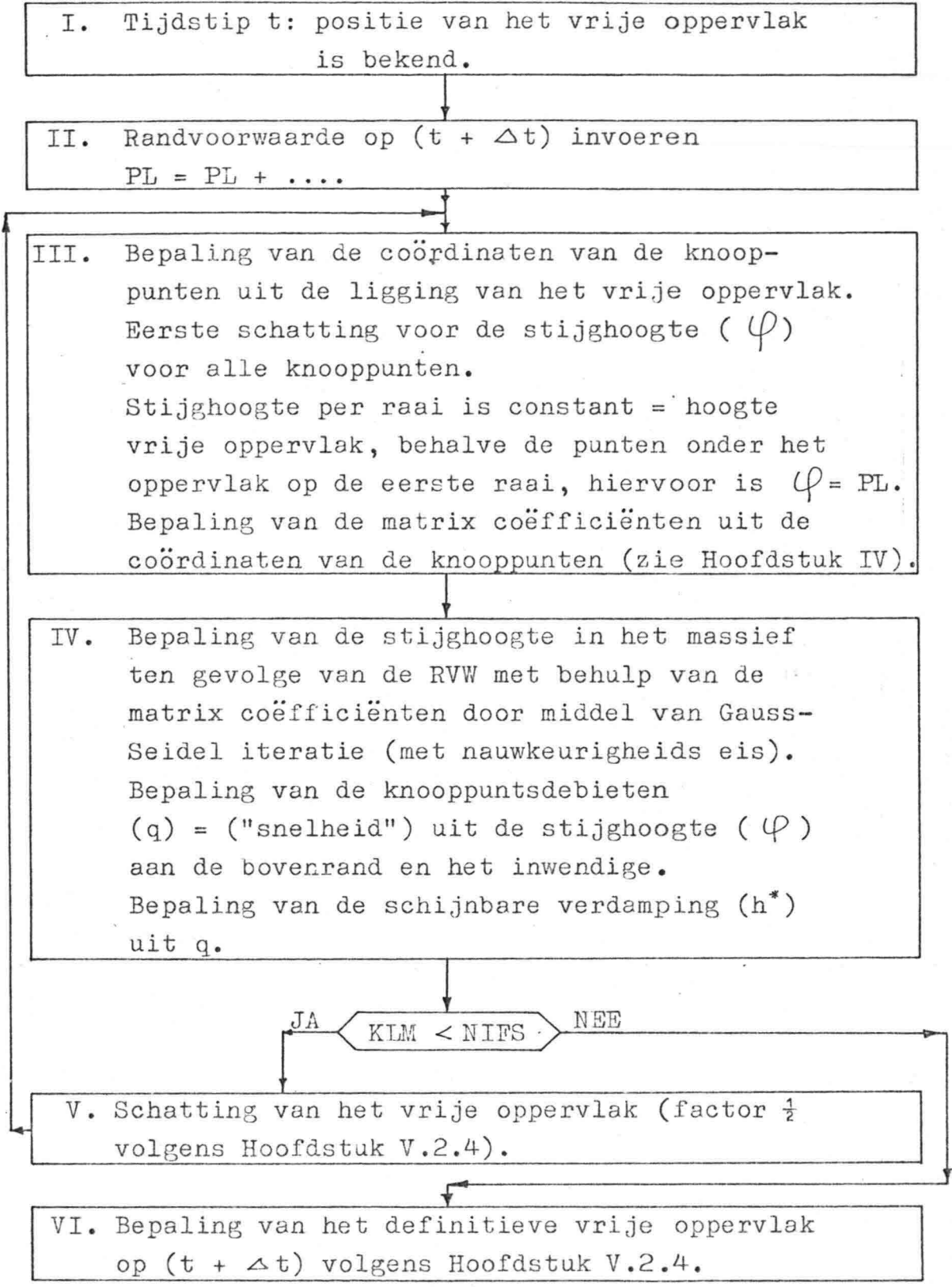
VII.2. Het rekenschema bij de elementenmethode
(programma LM6).

Zoals bekend is de onderverdeling bij de differentiemethode een vast roosterwerk waarbij zonnodig punten aan- of afschakelen (zie lit. (7)).

Bij de elementenmethode worden de elementen (in vertikale richting) groter, of kleiner (zie figuur V.4) overeenkomstig de beweging van het vrije oppervlak.

Reden waarom de coördinaten van de knooppunten steeds opnieuw bepaald moeten worden, wat ook in de matrix coëfficiënten (P) doorwerkt.

Daar in Hoofdstuk VI het volledige rekenprogramma en in Hoofdstuk V.2.4 de bepaling van het vrije oppervlak beschreven is, zal hier slechts een schema van de berekening gegeven worden, waarbij dezelfde nomenclatuur is aangehouden als in de Hoofdstukken III t/m VI.



N.B. De teller KLM dient om te bepalen of het aantal iteraties van het vrije oppervlak bereikt is. (zie Hoofdstuk V.2.4 en Hoofdstuk VI)

VII.3. Vergelijking van de rekenschema's.

Bij de differentiemethode zijn de blokken in het schema genummerd volgens 1 t/m 6, terwijl het schema van de elementenmethode LM6 de nummering I t/m VI heeft.

Het vergelijken zal per blok geschieden uitgaande van de differentiemethode. Per blok van de differentiemethode zal de overeenkomstige bewerking in de blokken van LM6 genoemd worden. Tevens zullen de significante verschillen aangegeven worden.

Blok 1.

Bij LM6 is alleen de positie van het vrije oppervlak bekend.

Blok 2.

De schatting van de stijghoogte in het massief gebeurt bij LM6 in blok IV.

Bij de elementenmethode is het rekenmolecuul niet constant (coëfficiënten P), terwijl de stijghoogten in het inwendige met behulp van een Gauss-Seidel iteratie bepaald worden. Bij de differentiemethode (lit. (7)) wordt het massief bij de relaxatie afwisselend vertikaal en horizontaal doorlopen.

De schatting van het vrije oppervlak vindt bij LM6 plaats in blok V. In beide gevallen is deze schatting gebaseerd op de "snelheden" en de continuïteit van een elementje aan het vrije oppervlak waarbij een factor $\frac{1}{2}$ in rekening gebracht wordt. (zie bijvoorbeeld Hoofdstuk V.2.4 en Hoofdstuk VI en literatuur 7 blz. 60)

Blok 3.

Bepaling van de stijghoogte ten gevolge van de schatting van het vrije oppervlak:

Voor de bovenrand in blok III, waarbij tevens de matrix coëfficiënten (P) aangepast worden.

Voor het massief in blok IV (weer met behulp van Gauss-Seidel iteratie).

Blok 4.

Bij het vergelijken zal eerst voor nifs (zie Hoofdstuk V.2.4 en Hoofdstuk VI) de waarde 2 aangehouden worden. De bepaling van de vrije waterspiegel bij de differentiemethode is gebaseerd op het gemiddelde van de afgeleide aan het begin en eind van Δt (Hoofdstuk VII.1).

Bij LM6 wordt de afgeleide op $(t + \frac{1}{2} \Delta t)$ bepaald (Hoofdstuk V.2.4) waaruit de hoogte van het vrije oppervlak in blok VI bepaald wordt.

Blok 5.

Indien hier blijkt dat de berekening nog een keer vanaf 3 moet gebeuren komt dit overeen met nifs = 3 in LM6. Wanneer blijkt dat na het doorwerken van 3 en 4 de vereiste nauwkeurigheid bij 5 bereikt is worden deze waarden in blok 6 uitgevoerd.

Bij nifs = 3 bij LM6 wordt in plaats van VI zoals beschreven onder blok 4 nu nog een keer volgens V het vrije oppervlak op $(t + \frac{\Delta t}{2})$ geschat.

Via III en IV wordt een verbeterde waarde voor de afgeleide op $(t + \frac{1}{2} \Delta t)$ bepaald, waaruit in VI het definitieve vrije oppervlak berekend wordt.

Uit deze vergelijking van de schema's blijkt dat de belangrijkste verschillen in blok 2 en blok 4 aan het licht komen.

Bij de elementenmethode is het rekenmolecuul namelijk niet constant doch moet steeds berekend worden uit de positie van het vrije oppervlak. Hierdoor wordt de rekentijd vergroot in vergelijking met de differentiemethode (lit. (7)).

In blok 4 blijkt een verschil in de bepaling van het vrije oppervlak.

Hiervoor zal in Hoofdstuk VII.4 een beschouwing met behulp van de reeksen volgens Taylor-Mc. Laurin gegeven worden.

VII.4. Fout beschouwing in de bepaling van het vrije oppervlak met behulp van de reeksen van Taylor-Mc. Laurin.

In Hoofdstuk VII.1 is de bepaling van het vrije oppervlak bij de differentiemethode aangegaan, terwijl de bepaling volgens LM6 in Hoofdstuk V.2.4 beschreven is.

In het onderstaande zal met behulp van de reeksontwikkeling volgens Taylor getracht worden een inzicht in de gedane verwaarlozingen te verkrijgen.

Bepaling vrij oppervlak volgens LM6:

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \Delta t \cdot \frac{\partial Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t}$$

volgens Taylor:

$$Y(t+\Delta t) = Y(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t} + \frac{(\frac{\Delta t}{2})^2}{2!} \frac{\partial^2 Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t^2} + \frac{(\frac{\Delta t}{2})^3}{3!} \frac{\partial^3 Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t^3} + \dots$$

$$Y(t) = Y(t + \frac{\Delta t}{2}) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t} + \frac{(\frac{\Delta t}{2})^2}{2!} \frac{\partial^2 Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t^2} - \frac{(\frac{\Delta t}{2})^3}{3!} \frac{\partial^3 Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t^3} + \dots$$

waaruit:

$$Y(t+\Delta t) - Y(t) = \Delta t \cdot \frac{\partial Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t} + \frac{\Delta t^3}{24} \cdot \frac{\partial^3 Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t^3}$$

zodat:

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \Delta t \cdot \frac{\partial Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t} + \underbrace{\frac{\Delta t^3}{24} \cdot \frac{\partial^3 Y(t + \frac{\Delta t}{2})}{\partial t^3}}_{\text{Dus een fout van de orde } \frac{\partial^3 Y}{\partial t^3}}$$

Bepaling vrij oppervlak volgens de differentiemethode (lit. (7)):

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \Delta t \left\{ \frac{\frac{\partial Y(t)}{\partial t} + \frac{\partial Y(t+\Delta t)}{\partial t}}{2} \right\}$$

Reeksen volgens Taylor:

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \Delta t \cdot \frac{\partial Y(t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial t^2} + \dots$$

$$Y(t) = Y(t+\Delta t) - \Delta t \cdot \frac{\partial Y(t+\Delta t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 Y(t+\Delta t)}{\partial t^2} - \dots$$

waardoor:

$$Y(t+\Delta t) - Y(t) = Y(t) - Y(t+\Delta t) + \Delta t \left(\frac{\partial Y(t)}{\partial t} + \frac{\partial Y(t+\Delta t)}{\partial t} \right) + \\ + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 Y(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y(t+\Delta t)}{\partial t^2} \right) \right)$$

zodat voor $Y(t+\Delta t)$ volgt:

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \Delta t \left\{ \frac{\frac{\partial Y(t)}{\partial t} + \frac{\partial Y(t+\Delta t)}{\partial t}}{2} \right\} + \frac{\Delta t^2}{4} \left\{ \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y(t+\Delta t)}{\partial t^2} \right\}$$

Ook hier wordt blijkbaar een fout van de orde $\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3}$ gemaakt.

Zowel bij de elementen- als bij de differentiemethode wordt dus een fout van de orde $\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3}$ gemaakt.

De fout bij LM6 is kleiner door de vermenigvuldigingsfactor, namelijk $\frac{1}{24}$ in plaats van $\frac{1}{4}$ bij de differentiemethode volgens literatuur 7.

Daar de derde afgeleide zeer klein is, zal dit wellicht niet veel invloed hebben.

VII.5. Gedrag van de matrix coëfficiënten P
("rekenmolecuul").

De waarde van de matrix coëfficiënten P is afhankelijk van de coördinaten van de knooppunten van het betreffende element (zie afleiding van de formules in Hoofdstuk IV.1.3).

In Hoofdstuk IV.3 is reeds aangegeven dat bij een verandering van het vrije oppervlak de coördinaten van de knooppunten aangepast worden, waaruit volgens het bovenstaande een nieuwe matrix coëfficiënt P volgt. In het onderstaande zal de wijziging van deze matrix coëfficiënten, "het gedrag van P", nader beschouwd worden, terwijl aan het slot een vergelijking met het "rekenmolecuul" van de hier beschouwde differentiemethode (lit. (7)) volgt.

Hierbij zal uitgegaan worden van de matrix coëfficiënten voor de knooppunten 5 en 6 uit het voorbeeld van Hoofdstuk IV.3.

Voor knooppunt 5 luiden de coëfficiënten:

$$P_{51} = \frac{a}{2xa} (d-a)$$

$$P_{52} = \frac{1}{2xa} (-ad) + \frac{1}{2xd} [-d(2d-a)]$$

$$P_{54} = \frac{1}{2xd} (-x^2) + \frac{1}{2xa} [-e(e-d) - x^2]$$

$$P_{55} = \frac{1}{2xd} (x^2) + \frac{1}{2xa} (a^2) + \frac{1}{2xd} [(2d-a)^2 + x^2] + \frac{1}{2xd} (e^2 + x^2) + \frac{1}{2xe} (e^2) + \frac{1}{2xd} [\{2(e-d)\}^2 + x^2]$$

$$P_{56} = \frac{1}{2xd} [(2d-a)(a-d) - x^2] + \frac{1}{2xa} [2(e-d)(d-2e) - x^2]$$

$$P_{58} = \frac{1}{2xa} (-de) + \frac{1}{2xe} [-e(2e-d)]$$

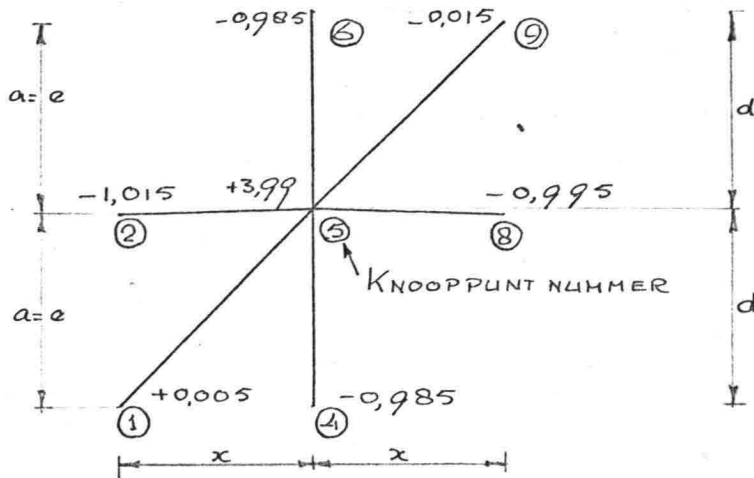
$$P_{59} = \frac{1}{2xe} [e(d-e)] + \frac{1}{2xd} [2d(e-d)]$$

Nu zal het gevolg van een afwijking van 1% van de hoogte boven de bodem van het vrije oppervlak in de raai 4, 5, 6 beschouwd worden, waarbij verschillende gevallen onderzocht worden.

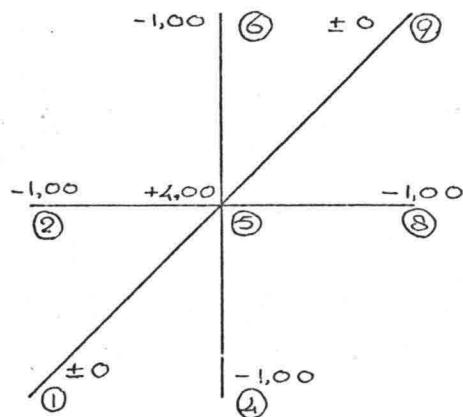
Geval I A:

Hierbij wordt aan $a = e = x$ de waarde 1,00 toegekend
terwijl $d = 1,01$ m.

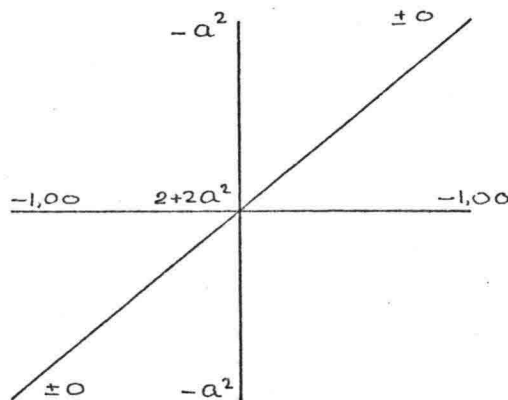
Hiermee wordt het volgende "rekenmolecuul" verkregen:

Geval I B:

$a = d = e = x = 1,00$



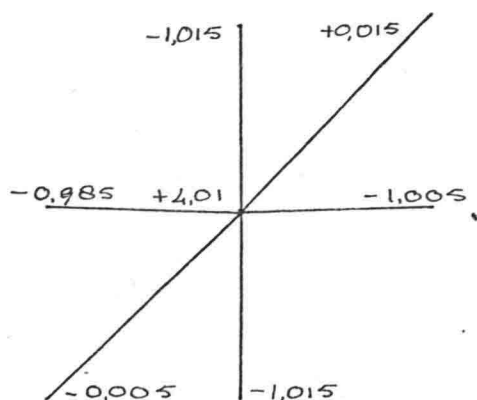
Wanneer $x \neq 1,00$, dus $x = a \neq d$ komt deze verhouding
in het rekenmolecuul:



Geval I C:

$$a = e = x = 1,00$$

$$d = 0,99$$



Bij vergelijking van I A en I C blijkt dat de diagonalen via nul (I B) van teken omslaan (zie ook Hoofdstuk IV.3). Bij I A blijkt de tendens de afwijking (1%) nog sneller weg te werken (bij de iteratie) dan bij I B, waar het gemiddelde wordt genomen. Bij I C wordt dit iets minder snel gedaan dan bij I B. Het blijkt dus dat een verlaging iets minder snel weggewerkt wordt, wat bij de uitvoer van LM6 ook te zien is bij $x = 0,68$.

Voor knooppunt 6 luiden de matrix coëfficiënten:

$$P_{62} = \frac{1}{2xd} [-d(a-d)] + \frac{1}{2xa} [2a(d-a)]$$

$$P_{63} = \frac{1}{2xa} [a(a-2d)]$$

$$P_{65} = \frac{1}{2xd} [(2d-a)(a-d) - x^2] + \frac{1}{2xd} [2(e-d)(d-2e) - x^2]$$

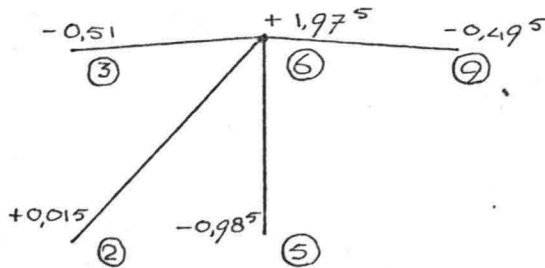
$$P_{66} = \frac{1}{2xd} [(a-d)^2 + x^2] + \frac{1}{2xa} [a^2] + \frac{1}{2xd} [(d-2e)^2 + x^2]$$

$$P_{69} = \frac{1}{2xd} [d(d-2e)]$$

Overeenkomstig de gevolgde werkwijze bij knooppunt 5 zullen hier ook drie gevallen onderscheiden worden:

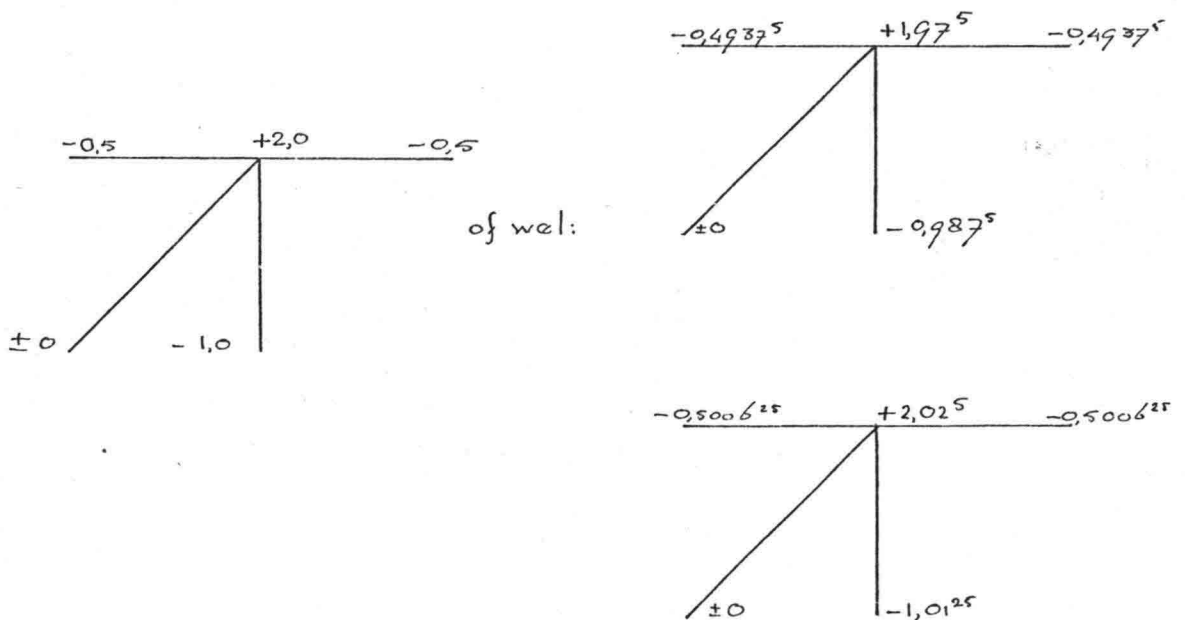
Geval II A:

$a = e = x = 1,00$ en $d = 1,01$



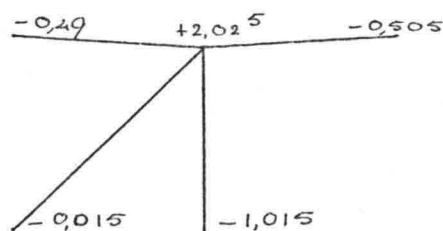
Geval II B:

$a = e = x = d = 1,00$



Geval II C:

$a = e = x = 1,00$ en $d = 0,99$



Uit deze rekenmoleculen wordt de nodalflow q bepaald, waaruit met behulp van h het vrije oppervlak volgt. Vergelijking van II A en II C leert dat in beide gevallen de "fouten" versterkt worden. Bij II A een positieve q voor knooppunt 6, dit betekent een stijging en bij II C een negatieve q voor knooppunt 6 (daling) terwijl bij II B voor q de waarde nul gevonden wordt.

De indruk bestaat dat het omslaan van het teken van de diagonalen een kleine fluctuatie in het vrije oppervlak kan veroorzaken, tezamen met het onder I A, B en C gestelde (gebleken bij de uitvoer van LM6 op 68 cm. vanaf PL).

Deze afwijkingen zijn zo klein en verdwijnen bij een voldoende fijne verdeling zo snel dat hun invloed verwaarloosd wordt.

Het is namelijk gebleken dat dit op het uiteindelijk resultaat geen invloed heeft (vergelijking van een programma met minder en meer fluctuatie bij PL = 2,25, 9 x 33).

Bij de gevallen I en II is een afwijking in het vrije oppervlak van 1% genomen. Neemt men hiervoor bij voorbeeld 10%, dan blijkt dat de grote waarden sterker in rekening gebracht worden en zal iedere tijdstap een grotere afwijking te zien geven (instabiliteit). De "werking" van de diagonalen wordt in het blok omhoog gaande steeds meer versterkt (P krijgt een steeds grotere waarde), wat veroorzaakt wordt door de hellings verandering ($a \neq d \neq e$).

Bij rechthoekige mazen (geval I B en II B) is het rekenmolecuul gelijk aan dat van de differentiemethode zoals beschreven in Hoofdstuk II.3.2 en literatuur 7, Hoofdstuk III.3.1 (geen P langs de diagonalen (zie ook Hoofdstuk IV.3)).

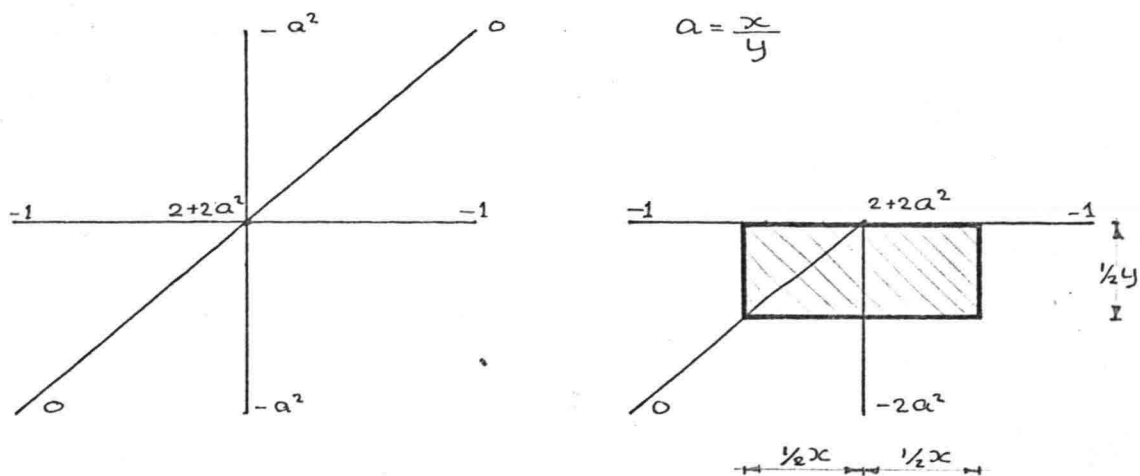


FIG. VII.1

Bij rechthoekige mazen komt de elementenmethode neer op de continuïteitsvergelijking voor een mootje

$\frac{1}{2}y \times x$ aan het vrije oppervlak.

Bij een hellend vrij oppervlak is dit gecompliceerder. Hier zal weer knooppunt 6 uit het voorbeeld van Hoofdstuk IV.3 beschouwd worden.

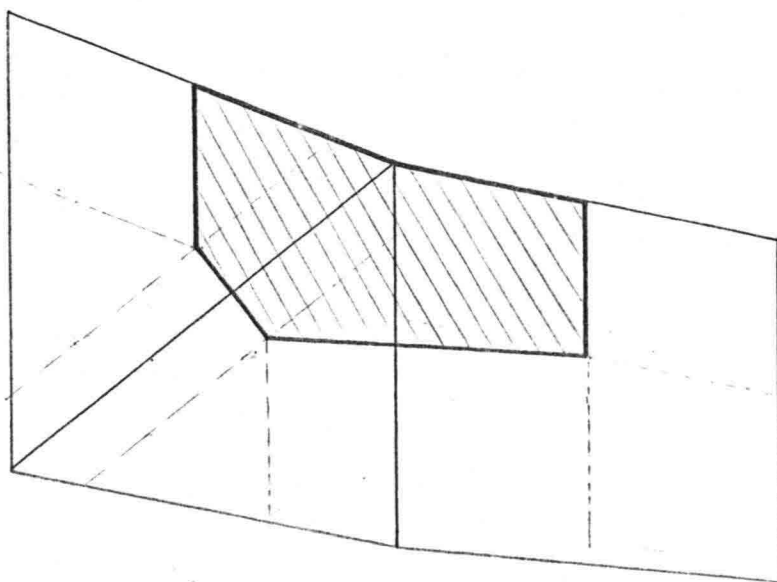
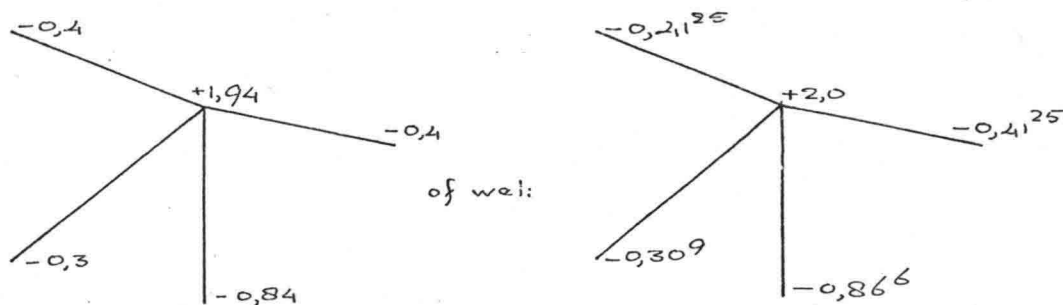


FIG VII.2

Men kan het nu als volgt voorstellen:

Bij de elementenmethode wordt de continuïteitsvergelijking opgezet voor een systeem van "buizen" volgens de grenslijnen van de elementen.

Dit kan geïnterpreteerd worden als de continuïteitsvergelijking voor het gearceerde mootje uit figuur VII.2.

Hoofdstuk VIII. Bespreking van de resultaten.

De volledige computeruitvoer berust bij de docent Grondwatermechanica van de Technische Hogeschool te Delft.

Bij het toetsprobleem met lineair stijgende randvoorwaarde is tijdens het testen gedurende de eerste tien à vijftwintig minuten het resultaat verkregen met behulp van 9×33 (is onderverdeling), $t_s = 1$ minuut (is tijdstapgrootte) en $nifs = 3$ (is aantal iteraties bij bepaling van het vrije oppervlak) bijzonder gunstig gebleken.

Reden waarom voor dit toetsprobleem deze bovengenoemde waarden zijn aangehouden.

De verschillen tussen de resultaten, welke verkregen zijn met behulp van $nifs = 2$ en die volgens $nifs = 3$, ter grootte van enkele millimeters in het begin, zijn in de loop van de berekening nauwelijks toegenomen, zodat voortaan voor dit toetsprobleem gevoeglijk voor $nifs$ de waarde 2 aangehouden kan worden. (zie bijlage VIII.2)

Wanneer men nu ook nog voor de tijdstapgrootte t_s de waarde 1,5 minuut in plaats van 1 minuut neemt, geeft dit een aanzienlijke reductie op de rekentijd met een factor $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Daar de rekentijd voor 9×33 , $t_s = 1$ minuut, $nifs = 3$ en nts (is aantal tijdstappen) = 121 (gedurende 2 uur) circa 13 minuten bedraagt, volgt hieruit een rekentijd van circa 6 minuten (zie bijlage V.1 : figuur V.6 en figuur V.8 en bijlage VIII.2).

Zelfs een ietwat onregelmatig verloop van de hoogte van het vrije oppervlak gedurende de eerste tijdstappen blijkt niet of nauwelijks invloed op het uiteindelijke resultaat uit te oefenen, zodat een tijdstapgrootte van 2 à $2\frac{1}{2}$ minuut (volgens het criterium, gegeven in Hoofdstuk V.2.5 nog toelaatbaar), zeer wel mogelijk is, waardoor de rekentijd wederom gereduceerd wordt tot bijvoorbeeld circa 4 minuten.

Op bijlage VIII.1 A is te zien dat er in het begin enig verschil is in de resultaten verkregen met behulp van:

9 x 33, 1 minuut, nifs = 3

9 x 33, 1 minuut, nifs = 2

17 x 33, 1 minuut, nifs = 2

Bijlage VIII.1 B kan als vervolg hierop gezien worden, waarbij de resultaten van 9 x 17 en 17 x 17 de keus voor 9 x 33 duidelijk maken. De uiteindelijke keus voor 9 x 33, ts = 1 minuut, nifs = 3 is mede op deze bijlage gebaseerd, hoewel ook daar de verschillen tussen nifs = 2 en nifs = 3 al klein zijn.

Hierbij is echter gebleken (bijlage VIII.2) dat de verschillen niet of nauwelijks groter geworden zijn met als gevolg de reeds eerder vermelde reductie van de rekentijd.

De reeds eerder (in Hoofdstuk V) gemaakte opmerking, namelijk dat er van een voldoende fijne onderverdeling (9 x 33) moet worden uitgegaan, wordt ook door deze bijlage gestaafd.

Uit de bijlagen VIII.2 en VIII.3 blijkt duidelijk waarom aan de onderverdeling 9 x 33 de voorkeur is gegeven boven 9 x 17 en 17 x 17.

De uiteindelijke resultaten voor de lineair stijgende randvoorwaarde worden weergegeven op de bijlagen VIII.4 en VIII.5.

Op bijlage VIII.4 is het zandblok getekend met om de vijftien minuten de ligging van het vrije oppervlak, terwijl op de volgende bijlage (VIII.5) de hoogte van het vrije oppervlak per raai continu in de tijd is weergegeven, waarbij tevens de resultaten vergeleken worden met die, welke bij toepassing van de differentiemethode volgens lit. (7) verkregen zijn.

Hierbij blijkt de hoogte van de vrije waterspiegel in raai 8 volgens de elementenmethode iets hoger dan bij de resultaten volgens lit. (7) gevonden is (zie de bijlage VIII.5).

Wellicht wordt dit mede veroorzaakt door de in dit rapport (Hoofdstuk IV) toegepaste benadering van de vrije waterspiegel (zie figuur VIII.1, rechte lijnstukken), waardoor een iets groter doorstromingsprofiel ter beschikking staat.

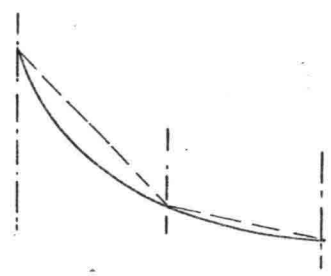


FIG. VIII.1

Bij een onderverdeling 17 x 33, $t_s = 1$ minuut is voor de hoogte van de vrije waterspiegel in raai 8 een iets kleinere waarde gevonden (gedurende de eerste tijdstappen).

Daar met een dergelijke onderverdeling erg veel rekentijd gemoeid is, is van verdere uitvoering afgezien.

Het feit, dat een fijnere onderverdeling nog van invloed is, leidt in het volgende Hoofdstuk tot de suggestie een variërende raaiafstand toe te passen. Uit de bijlagen VIII.4 en 5 blijkt verder dat de voornoemde verschillen in raai 8 slechts tot maximaal 5% van de totale stijging van de randvoorwaarde oplopen.

Voor de periodiek verlopende randvoorwaarde worden de resultaten op de bijlagen VIII.6 en VIII.7 gegeven.

Het zandblok, met om het uur de hoogte van de vrije waterspiegel aangegeven, is op bijlage VIII.6 te vinden.

Het verloop van de hoogte van het vrije oppervlak in de raaien is op bijlage VIII.7 continu in de tijd over een tijdsduur van 6 uur (een halve periode) aangegeven, waarbij tevens de waarden verkregen volgens lit. (7) aangeduid zijn.

De verschillen tussen beide methoden blijken hier minimaal te zijn (maximaal circa 0,02 m. in raai 8). Dat zich bij de lineair stijgende randvoorwaarde grotere verschillen voordoen moet vooral gezocht worden in de discontinue en snellere stijging van de randvoorwaarde.

De rekentijd voor het toetsprobleem met de periodiek verlopende randvoorwaarde gedurende 6 uur heeft ongeveer 10 minuten bedragen (9×33 , $t_s = 2\frac{1}{2}$ minuut, $nifs = 2$ en $nts = 145$ (aantal tijdstappen)).

Voor 18 uur (= $1\frac{1}{2}$ periode) zou dus een rekentijd van circa 30 minuten benodigd zijn.

In vergelijking met lit. (7) blijkt dit niet ongunstig, daar in dat geval (lit. (7)) een rekentijd van ruim 40 minuten benodigd is.

Hoofdstuk IX. Conclusies en suggesties voor de voortzetting van het onderzoek.

De oplossing van het toetsprobleem verkregen met behulp van het programma LM6 komt in grote mate overeen met de oplossing welke reeds eerder door de heer B.S. van der Weide (differentiemethode volgens literatuur 7) bepaald is.

Vooraf bij het eigenlijke toetsprobleem, met de periodiek verlopende randvoorwaarde, treden nauwelijks verschillen op vergeleken met de resultaten volgens lit. (7).

Hoewel bij het programma LM6 steeds weer de matrix coëfficiënten P berekend moeten worden, namelijk minstens tweemaal per tijdstap (bij nifs = 2), is het mogelijk gebleken een gunstige rekentijd te realiseren. Dit is vooral te danken aan een aantal genomen maatregelen namelijk:

1. Een gunstige onderverdeling in grotere elementen namelijk onderverdeling 9×33 (= NR x NC) terwijl bij lit. (7) een onderverdeling van 16×32 aangehouden is (te vergelijken met 17×33 in de terminologie van LM6).
2. Het effect van de verhoging van de waarde van nifs (aantal iteraties bij de bepaling van het vrije oppervlak) van 2 tot 3 moet niet overschat worden en dient op langere termijn bezien te worden.
3. Bij de bepaling van de stijghoogte in het inwendige (Gauss-Seidel iteratie) is een zelfsturende progressieve test opgenomen, welke het aantal iteraties bepaalt in relatie met het bereiken van een doelmatige nauwkeurigheid (= "eis"), waarbij tevens het iteratie proces versneld is door invoering van een grote over-relaxatiefactor (relax = 1,7).

4. Het in Hoofdstuk V.2.5 gegeven eenvoudige, doch voor dit soort problemen reëel gebleken criterium voor de grootte van de tijdstap.

De taluds bij dit toetsprobleem staan vertikaal. Met het programma LM6 is het zondermeer mogelijk de taludhellingen te wijzigen, doordat het programma op dit onderdeel universeel is.

Hoewel er een vrij gunstig resultaat behaald is, geven ervaringen opgedaan tijdens het onderzoek en het testen van diverse mogelijkheden en onmogelijkheden aanleiding tot een aantal suggesties voor de voortzetting van dit onderzoek.

Het onderzoek naar (eventuele) verbeteringen tezamen met de literatuurstudie en beschrijving van de Variatierekening, de elementenmethode (de Hoofdstukken III en IV), de beschrijving + stroomschema voor het computerprogramma en de analyse in Hoofdstuk VII heeft erg veel tijd gekost.

Daarom zijn een aantal facetten, die tijdens dit onderzoek naar voren kwamen, niet nader onderzocht uit tijdgebrek.

Deze facetten kunnen als volgt worden omschreven:

1. Een "flexibele horizontale onderverdeling" (raaiafstand) dat wil zeggen daar waar het vrije oppervlak sterker gekromd is een fijnere onderverdeling toepassen.
2. In het gedeelte van de dam waarin nauwelijks iets verandert minder vaak itereren.
3. Overeenkomstig het in lit. (7) toegepaste principe, een schatting maken voor de verandering per tijdstap (bij voorbeeld gelijk aan de verandering gedurende de vorige tijdstap).
4. Inplaats van het in Hoofdstuk IV aangenomen lineaire verloop van de stijghoogte tussen de knooppunten een kwadratisch verloop aanhouden, met als nadeel meer rekenwerk (ingewikkelder matrix coëfficiënten).

LITERATUUR OPGAVE

1. Van den Akker, C.
"Een mathematisch model voor de berekening van de gevolgen van een grondwater onttrekking in het geval van twee watervoerende pakketten gescheiden door een semi-permeabele laag".
Rapport van het Hoofdontwerp Grondwatermechanica, T.H. Delft 1972.
2. a. Kantorovich, C.V. en Krylov, V.I.
"Approximate methods of higher Analyses", Noordhoff Ltd., Groningen 1958.
b. Courant, R. en Hilbert, D.
"Methoden der Mathematischen Physik I", 2e auflage, Springer, Berlin 1930.
c. Pars, C.A.
"An introduction to the Calculus of Variations", Heinemann, London.
3. Roosma, E.
"Elementen methode in niet-lineaire Grondwaterstroming" R 1971/2/D.
Rapport van het deelontwerp Grondwatermechanica, T.H. Delft 1971.
4. Sinke, J.G.
"Onderzoek van enige tweedimensionale problemen met behulp van een spleetmodel met nieuwe randvoorwaarde apparatuur".
Rapport van het deelontwerp Vloeistofmechanica, T.H. Delft 1972.
5. Verruijt, A.
"Theory of Groundwaterflow", Mac Millan, London 1970.

6. Verspuy, C.

"Richtlijnen voor het ontwerpen en gebruiken van een elektrisch analogon voor niet-permanente grondwaterstroming, bestaande uit een netwerk van weerstanden, schakelelementen en condensatoren".

Rapport van het Hoofdontwerp Vloeistofmechanica,
T.H. Delft 1966.

7. Van der Weide, B.S.

"Oplossingen van enige tweedimensionale problemen met behulp van de computer TR4".

Rapport van het deelontwerp Vloeistofmechanica,
T.H. Delft 1969.

8. Jellema, Tj.

"Fortran IV Taalbeschrijving",

Rekencentrum T.H. Delft, afdeling instructie en voorlichting, 1971.

OVERZICHT VAN DE BIJLAGEN

- V.1. Diverse figuren betreffende de nauwkeurigheid in verband met tijdstap grootte, onderverdeling en rekentijd.
- VI.1. Stroomschema voor de programma's LM6A en LM6B (LM6).
- VI.2. Computer programma LM6 (7 pagina's)
- VI.3. Computer programma LM6A (8 pagina's)
- VI.4. Computer programma LM6B (8 pagina's)
- VIII.1A. Detail van zandblok bij lineaire stijging gedurende 15 minuten.
- VIII.1B. Detail van zandblok bij lineaire stijging bij time = 15 minuten.
- VIII.2. Vergelijking van de hoogte van het freatisch vlak in de tijd gedurende 1 uur.
- VIII.3. Vergelijking van de hoogte van het freatisch vlak in de tijd gedurende 15 minuten.
- VIII.4. Resultaten van het vrije oppervlak in het zandblok bij lineaire stijging.
- VIII.5. Resultaten van het vrije oppervlak per raai in de tijd bij lineaire stijging.
- VIII.6. Resultaten van het vrije oppervlak in het zandblok bij periodieke randvoorwaarde.
- VIII.7. Resultaten van het vrije oppervlak per raai in de tijd bij periodieke randvoorwaarde.

