

A.W. Grootendorst
B. Meulenbeld

ANALYSE

DEEL 1, Functies van één veranderlijke

2114047

analyse 1

Bibliotheek TU Delft



C 2324055

**0790
507
2**

Analysis I

analyse 1

Dr. B. Meulenbeld, *oud-hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft*

Dr. A.W. Grootendorst, *oud-hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft*

tiende druk



CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Meulenbeld, B.

Analyse / B. Meulenbeld, A.W. Grootendorst. – Delft : Delftsche U.M.

Uitg. van de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

1. – Ill. Met reg.

Oorspr. titel: Analyse voor propaedeutische examens : dl. 1 / B. Meulenbeld en W.K.

Baart. – Haarlem : Stam, 1957.

ISBN 90-6562-064-8

SISO 515 UDC 517(075.8)

Trefw.: wiskunde

analyse

Dr. B. Meulenbeld, oud-hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft
Dr. A.W. Grootendorst, oud-hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft

© VSSD

Tiende druk 1994

Delftse Uitgevers Maatschappij b.v.

P.O. Box 2851, 2601 CW Delft, The Netherlands

Tel. 015-123725, telefax 015-143724

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90 6562 064 8

Delftse Uitgevers Maatschappij — 1994

Voorbericht bij de zesde druk

Deze uitgave is de zesde druk van het boek *Analyse 1* voor propaedeutische examens van Meulenbeld-Baart.

In deze druk zijn zeer ingrijpende veranderingen aangebracht, die enerzijds toegeschreven kunnen worden aan een verbeterde, scherpere wiskundige behandeling van de stof, anderzijds aan een aanpassing aan nieuwe omstandigheden en ideeën, noodzakelijk geworden door de veranderde onderwijsmethoden in de wiskunde aan de scholen voor V.W.O. en H.B.O., zodat naar de ondergetekenden hopen, de in 1974 aankomende studenten geen aanpassingsmoeilijkheden op dit terrein zullen hebben. Wat betreft de notaties zij opgemerkt dat als leidraad heeft gediend het eindrapport van de Nomenclatuurcommissie, gepubliceerd in het tijdschrift „Euclides” (48e jaargang 1972/1973, nr. 8).

Al onderscheidt deze uitgave zich van de vorige door een strengere behandeling van de stof, toch zal de lezer merken dat in sommige gevallen waar dit naar de mening van de auteurs wenselijk en mogelijk was, een iets minder strakke formulering gekozen is. De lezer stote zich daaraan niet en denke aan het woord van Luther: „Jede Konsequenz führt zum Teufel”.

De ontwikkeling van het hoger beroepsonderwijs wettigt de verwachting, dat ook studenten van dit onderwijs „nieuwe stijl” in dit boek een goede aansluiting aan het technisch hoger onderwijs kunnen vinden.

De tweede ondergetekende is bereid gevonden voortaan aan de verzorging van dit leerboek mede te werken.

Als steeds houden de schrijvers zich voor opbouwende kritiek ten zeerste aanbevolen.

Delft, juli 1974.

De schrijvers
B. Meulenbeld
A. W. Grootendorst

Voorbericht bij de zevende druk

Deze zevende druk onderscheidt zich van de vorige door een aantal verbeteringen en verduidelijkingen in de tekst. Speciaal hebben wij het hoofdstuk over uniforme convergentie van rijen en reeksen uitgebreid. Ook werd een hoofdstuk toegevoegd over bewerkingen met integralen die van een parameter afhangen. Gaarne danken we degenen die ons voorstellen tot verbeteringen deden.

Delft, februari 1980

De schrijvers
B. Meulenbeld
A. W. Grootendorst

Voorbericht bij de achtste druk

Deze achtste druk is een nagenoeg ongewijzigde herdruk van de voorafgaande. Zoals de lezer bemerkt zal hebben is deze druk verzorgd door de VSSD. Volgaarne willen wij deze vereniging bedanken voor de bereidwilligheid en de keurige uitvoering van dit werk. Naar aanleiding van een vaak gemaakte opmerking over het ontbreken van oefenvraagstukken willen wij wijzen op het bestaan van een aantal vraagstukkenbundels in de Nederlandse taal, die goed aansluiten bij de behandelde stof.

Als steeds houden wij ons aanbevolen voor constructieve opmerkingen.

Delft, juli 1985

De schrijvers

B. Meulenbeld

A.W. Grootendorst

Voorbericht bij de negende druk

Het onderscheid tussen deze druk en de vorige is gering: enkele zetfouten en andere onjuistheden werden gecorrigeerd, en op enkele plaatsen werden kleine verduidelijkingen toegevoegd.

De belangstelling voor voorstellen tot verbeteringen blijft bij ondergetekenden leven.

Delft, november 1987

De schrijvers

B. Meulenbeld

A.W. Grootendorst

Voorbericht bij de tiende druk

In deze nieuwe druk zijn allereerst enkele ongerechtigheden verwijderd die bij vorige uitgaven toch nog aan de aandacht van de schrijvers waren ontgaan. Voorts is de gelegenheid aangegrepen om enkele aanvullingen op te nemen, zoals een toelichting bij de logaritmische en de exponentiële functie en een opmerking over computeralgebra die een toenemende rol speelt bij het primitiveren. Ook zijn enkele opgaven met uitwerkingen toegevoegd m.b.t. uniforme convergentie en differentieerbaarheid van functies van twee variabelen. De betreffende opgaven zijn voor een deel ontleend aan de m.o.-examens.

De schrijvers danken Dr. F. de Kok voor zijn aanvullende opmerkingen bij de reeksontwikkeling van de arctangensfunctie en die van de reële logaritmische functie. Dank ook aan de uitgever die voor de voortreffelijke uitvoering zorg droeg.

Ook nu weer stellen de auteurs constructieve opmerkingen zeer op prijs.

Delft, augustus 1994

De schrijvers

B. Meulenbeld

A.W. Grootendorst

Inhoud

Hoofdstuk 1

Beginselen van de differentiaal- en integraalrekening

1	De natuurlijke getallen; ordening	13	functie. Hogere afgeleiden	55
2	Gehele en rationale getallen	15	17 Regels voor het differentiëren	58
3	Supremum en infimum. Reële getallen	17	18 Differentiaalquotiënten van rationale functies	61
4	De getallenrechte; intervallen	20	19 Het begrip booglengthe bij een cirkel. Radiaal. Goniometrische functies	63
5	Volledige inductie	21	20 De afgeleiden van goniometrische functies	67
6	De driehoek van Pascal. Het binomium van Newton	23	21 Limieteigenschappen van sarnengestelde functies	69
7	Het functiebegrip. Omgeving	26	22 Het differentiëren van een samengestelde functie. Kettingregel	72
8	Absolute waarde. Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz	30	23 Linker- en rechterdifferentiaalquotiënt. Differentieerbaarheid in een interval	76
9	Het limietbegrip	34	24 Primitieve functies	78
10	Het rekenen met limieten	40	25 Het invoeren van een nieuwe veranderlijke	79
11	Continuïteit	45	26 Differentialen	81
12	Rekenregels voor continue functies. Voorbeelden van continue functies	47	27 Partiële integratie	85
13	Eigenschappen van een functie die continu is in een gesloten interval	47	28 Het oppervlaktebegrip	86
14	Stelling van Weierstrasz. Tussenwaardestelling	49	29 Eigenschappen van onderintegraal en bovenintegraal	88
15	Het differentiaalquotiënt	52	30 Hoofdstelling van de integraalrekening	91
16	Verband tussen continuïteit en differentieerbaarheid. De afgeleide		31 Bepaalde integraal en oppervlakte	94
			32 Bepaalde integraal en primitieve	100

33	Numerieke integratie. Rechthoeksregels	103
34	Numerieke integratie. Trapeziumregel	107
35	Numerieke integratie. Regel van Simpson. Parabolische regel	107
36	De logaritmische functie	109
37	Inverse functies	114
38	De exponentiële functie	119
39	De algemene exponentiële functie en de algemene machtsfunctie	121
40	Logaritmische en exponentiële ongelijkheden	126
41	Betrekking tussen de monotonie van een functie en het teken van haar afgeleide	128
42	Enige logaritmische en exponentiële limieten	130
43	De algemene logaritme	132
44	De cyclometrische functies	133
45	Enige cyclometrische betrekkingen	138
46	Overzicht van enige differentiaalquotënten, primitieve functies, differentiaal, limieten en ongelijkheden	141

Hoofdstuk 2

Complexe getallen

47	Vectoren	145
48	Invoering van complexe getallen	146
49	Modulus en argument	148
50	Som en verschil van complexe getallen	149
51	Produkt van complexe getallen	151
52	Deling van complexe getallen	154
53	De vierkantsvergelijking	157
54	De binomiaalvergelijking	160
55	Analytische meetkunde in het complexe vlak	162
56	Puntransformaties in het complexe vlak	167
57	De exponentiële functie van een complexe veranderlijke	173

58	De logaritmische functie van een complexe veranderlijke	177
----	--	-----

Hoofdstuk 3

Extreme waarden. Het schetsen van krommen

59	Het theorema van Rolle en de middelwaardestelling	180
60	De middelwaardestelling voor twee functies	186
61	Extreme waarden 1	190
62	Extreme waarden 2	195
63	Ongelijkheden	197
64	Meetkundige betekenis van het teken van f' . Buigpunten	199
65	Het schetsen van krommen	203
66	Hogere afgeleiden. Regel van Leibniz	205

Hoofdstuk 4

Systematische berekening van de primitieven van enige klassen van functies

67	$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$	210
68	De primitieven van een rationale functie van x . Breuksplitsing	214
69	Berekening van $\int \cos^n x dx$ en $\int \sin^n x dx$ ($n \in \mathbf{Z}$)	218
70	Berekening van $\int \cos^n x \sin^m x dx$ ($n, m \in \mathbf{Z}$)	221
71	De primitieven van een rationale functie van $\sin x$ en $\cos x$	224
72	De primitieven van irrationale algebraïsche functies	228
73	De primitieven van $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Integraalafels	229

Hoofdstuk 5

Oeigenlijke integralen

74	Eindige discontinuïteiten van de integrand in het integratie-interval	242
75	Oeigenlijke integralen 1	243
76	Majorantencriterium 1	245
77	Gevolg van majorantencriterium 1	247
78	Majorantencriterium 2	249
79	Oeigenlijke integralen 2	252
80	Convergentieonderzoek van oeigenlijke integralen van de tweede soort	254
81	Singulariteit van de integrand voor een inwendig punt van het integratie-interval. Gammafunctie	255

Hoofdstuk 6

Rijen

82	De stelling van Bolzano-Weierstrasz	259
83	Aftelbare verzameling. Rijen	260
84	Convergentie en divergentie van rijen	263
85	Algemeen convergentiekenmerk van Cauchy	264
86	Monotone rijen	265
87	Voorbeelden van rijen	266
88	De limietstellingen van Cauchy	273
89	Rijen met complexe termen	280

Hoofdstuk 7

Reeksen

90	Het reeksbegrip	284
91	Algemeen convergentiekenmerk voor reeksen	287
92	Enige algemene stellingen over reeksen	288
93	Het integraalcriterium	289

94	Majorantencriterium 1	293
95	Majorantencriterium 2	296
96	De convergentiekenmerken van Cauchy en d'Alembert	298
97	Betrekking tussen de kenmerken van Cauchy en d'Alembert	304
98	Reeksen met positieve en negatieve termen. Absolute en voorwaardelijke convergentie	304
99	Alternerende reeksen. Kenmerk van Leibniz	306
100	Reeksen met complexe termen	311
101	Machtreeksen	312
102	Eenduidigheid van een machtreeksontwikkeling. Het ordesympool van Landau	316
103	Benadering van een functie door een veelterm met rest	319
104	De resttermen van Cauchy en Lagrange	321
105	De ontwikkeling volgens Taylor-Maclaurin	322
106	Toepassing van de formules van Taylor op bekende functies	323
107	Ontwikkeling van een functie in een veelterm met rest door integratie	326
108	De reeksontwikkeling van Taylor-Maclaurin	330
109	Toepassing van reeksontwikkelingen bij het berekenen van limieten	335
110	Het differentiëren en integreren van machtreeksen	339
111	FuncTierijen. Uniforme of gelijkmatige convergentie	345
112	FuncTierieeksen. Uniforme of gelijkmatige convergentie	349
113	Continuïteit van limietfunctie en somfunctie bij uniforme convergentie	352
114	Het criterium van Weierstrasz	354
115	Het integreren van uniform convergente rijen en reeksen	359
116	Het differentiëren van uniform convergente rijen en reeksen	361
117	Numerieke berekeningen.	

Schatting van de restterm	362
118 Divergente reeksen.	
Sommeerbaarheid	365

Hoofdstuk 8

Vergelijkingen

119 Algebraïsche vergelijkingen	367
120 Meervoudige wortels van een algebraïsche vergelijking	369
121 Rationale wortels van een algebraïsche vergelijking met gehele rationale coëfficiënten	370
122 Het opsporen van de reële wortels van een vergelijking	372
123 Het benaderen van de wortels van een vergelijking	374
124 Grafische methode. Iteratie	376
125 Complexe wortels	378

Hoofdstuk 9

Numerieke integratie en differentiatie. Hyperbolische functies

126 De interpolatieformule van Lagrange	379
127 Schatting van de fout bij interpolatie	382
128 Numerieke integratie met behulp van de veeltermen van Lagrange	383
129 Numerieke differentiatie	386
130 De hyperbolische functies	388
131 De inversen der hyperbolische functies	390
132 De formules van Stirling	393

Hoofdstuk 10

Functies van twee veranderlijken

133 Het functiebegrip. Omgeving. Gebied	398
134 Het limietbegrip	405
135 Continuïteit	408
136 Partiële differentiatie	410
137 Meetkundige betekenis van de partiële afgeleiden	412
138 Partiële afgeleiden van de tweede orde	412
139 Differentieerbaarheid van een functie van twee veranderlijken. Totale differentiaal	415
140 Richtingsafgeleide	419
141 Samengestelde functies	426
142 Het differentiëren van samengestelde functies. Kettingregel	428
143 Het differentiëren van samengestelde functies (vervolg)	432
144 Functies van meer dan twee veranderlijken	435

Hoofdstuk 11

Integralen die van een parameter afhangen

145 Eigenlijke integralen	436
146 Oneigenlijke integralen	438
Register	444

Beknopte lijst van gebruikte symbolen

$a = b$	a gelijk aan b
$a \neq b$	a niet gelijk aan b
$a \approx b$	a „ongeveer” gelijk aan b
$a > b$	a groter dan b
$a \geq b$	a groter dan b of a gelijk aan b
$a < b$	a kleiner dan b
$a \leq b$	a kleiner dan b of a gelijk aan b
\Rightarrow	impliceert; als ..., dan ...; hieruit volgt
\Leftrightarrow	is equivalent met; is gelijkwaardig met
\wedge	en
\vee	of
$V = \{a, b, c\}$	V is de verzameling van de elementen a , b en c
$V = \{x P(x)\}$	V is de verzameling van alle elementen x die de eigenschap P hebben
\emptyset	de lege verzameling
$a \in V$	a is een element van V
$p \notin V$	p is niet een element van V
$V \subset W$	V is een deelverzameling van W
$V \not\subset W$	V is geen deelverzameling van W
$C \cap D$	de doorsnede van C en D („ C door D ”)
$E \cup F$	de vereniging van E en F („ E met F ”)
$A \setminus B$	„ A , en daaruit weggelaten B ”; $\{x \in A x \notin B\}$
$V \times W$	de verzameling geordende paren (x, y) , waarvoor geldt $x \in V \wedge y \in W$
\mathbb{N}	de verzameling natuurlijke getallen, d.w.z. 1, 2, 3, ...
\mathbb{Z}	de verzameling gehele getallen
\mathbb{Q}	de verzameling rationale getallen
\mathbb{R}	de verzameling reële getallen
\mathbb{C}	de verzameling complexe getallen
\circ	operatieteken
\forall [...]	voor iedere a en b , element van \mathbb{R} geldt ... („alquantor”)
\exists [...]	er is een $x \in V$, waarvoor geldt ... („existentiequantor”)
$n!$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ($n \in \mathbb{N}$); spreek uit: n -faculteit
$\sum_{k=1}^n a_k$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Beknoper lijst van gebruikte symbolen

\mathbb{N}	de verzameling natuurlijke getallen	\mathbb{N}
\mathbb{Z}	de verzameling gehele getallen	\mathbb{Z}
\mathbb{Q}	de verzameling rationale getallen	\mathbb{Q}
\mathbb{R}	de verzameling reële getallen	\mathbb{R}
\mathbb{C}	de verzameling complexe getallen	\mathbb{C}
\mathbb{O}	operatoren	\mathbb{O}
\mathbb{A}	voor ieder a en b element van \mathbb{R} geldt... („aligator“)	\mathbb{A}
\mathbb{E}	er is een $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt... („existentieoperator“)	\mathbb{E}
\mathbb{W}	$1, 2, 3, \dots, n$ ($n \in \mathbb{N}$): spreuk uit n -faculteit	\mathbb{W}
\mathbb{X}	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$	\mathbb{X}
\mathbb{F}	de verzameling getonde paren ((a, b) , waarvoor geldt...)	\mathbb{F}
\mathbb{E}	de verzameling \mathbb{R} en \mathbb{C} („E-tom E“)	\mathbb{E}
\mathbb{C}	de verzameling \mathbb{R} en \mathbb{C} („C door D“)	\mathbb{C}
\mathbb{W}	de geen beschrijving van \mathbb{W}	\mathbb{W}
\mathbb{A}	\mathbb{N} is een deelverzameling van \mathbb{W}	\mathbb{A}
\mathbb{E}	\mathbb{N} is een deel van element van \mathbb{N}	\mathbb{E}
\mathbb{E}	\mathbb{N} is een element van \mathbb{N}	\mathbb{E}
\mathbb{E}	de lage verzameling	\mathbb{E}
\mathbb{E}	\mathbb{N} is de verzameling van alle elementen x die de eigenschap \mathbb{P} hebben	\mathbb{E}
\mathbb{E}	is equivalent met: is gelijkwaardig met	\mathbb{E}
\mathbb{E}	impliciet; als... dan...; hierin volgt	\mathbb{E}
\mathbb{E}	een kleiner dan b of a gelijk aan b	\mathbb{E}
\mathbb{E}	een kleiner dan b	\mathbb{E}
\mathbb{E}	een groter dan b of a gelijk aan b	\mathbb{E}
\mathbb{E}	een groter dan b	\mathbb{E}
\mathbb{E}	„engere“ „dikker“ dan b	\mathbb{E}
\mathbb{E}	een niet gelijk aan b	\mathbb{E}
\mathbb{E}	een gelijk aan b	\mathbb{E}

Beginnelsen van de differentiaal- en integraalrekening

1 De natuurlijke getallen; ordening

Analyse is de studie van functies die gedefinieerd zijn op de verzameling van de reële getallen. We zullen daarom eerst – in het kort – uiteenzetten wat reële getallen zijn en welke eigenschappen zij hebben, en daarna wat men onder functies verstaat.

We gaan daarbij uit van de verzameling \mathbb{N} der *natuurlijke getallen* 1, 2, 3, ..., die we bekend veronderstellen. Voor deze getallen gelden de axioma's van Peano (1858–1932). Op grond daarvan kunnen we de natuurlijke getallen optellen en vermenigvuldigen, d.w.z. er bestaat een bewerking, optelling genaamd, die aan ieder geordend paar natuurlijke getallen (a, b) een natuurlijk getal toevoegt dat we de *som* noemen en aangeven met $a + b$. Ook is er een bewerking, vermenigvuldiging genaamd, die aan een dergelijk paar een natuurlijk getal toevoegt dat we *produkt* noemen, en aangeven met $a \times b$ (of $a \cdot b$ of ab). Optelling en vermenigvuldiging zijn dus afbeeldingen van het Cartesische produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}\}$ in \mathbb{N} . Voor deze bewerkingen gelden de volgende regels (af te leiden uit de axioma's van Peano):

Eigenschappen van de optelling

De optelling is *commutatief*: (1.1)

$$a + b = b + a$$

De optelling is *associatief*: (1.2)

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Voor de optelling geldt de *vereenvoudigingswet*, d.w.z.: (1.3)

$$\text{uit } a + c = b + c \text{ volgt } a = b$$

Eigenschappen van de vermenigvuldiging

De vermenigvuldiging is *commutatief*: (1.4)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

De vermenigvuldiging is *associatief*: (1.5)

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Voor de vermenigvuldiging is er een eenduidig bepaald *neutraal element*, notatie 1, zodanig dat: (1.6)

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{N}$$

Voor de vermenigvuldiging geldt de *vereenvoudigingswet*, d.w.z.: (1.7)

$$\text{uit } a \cdot c = b \cdot c \text{ volgt } a = b$$

Verder gelden de *distributieve wetten* die de optelling en de vermenigvuldiging verbinden:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (1.8)$$

en op grond van de *commutativiteit* van de vermenigvuldiging:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (1.9)$$

De verzameling \mathbb{N} heeft ook nog een ander soort eigenschappen, nl. de z.g. *ordeningseigenschappen*. Men kan in \mathbb{N} een *ordening* invoeren. Daartoe definiëren we eerst de begrippen „kleiner dan” en „groter dan”.

Als a en $b \in \mathbb{N}$, dan zegt men dat a kleiner is dan b (notatie $a < b$), als er een natuurlijk getal n bestaat, zodanig dat $a + n = b$. Men kan dan ook zeggen dat b groter is dan a (notatie $b > a$).

De relatie $a \leq b$ betekent dat een van de volgende beweringen juist is: $a < b$ of $a = b$. Analoog: $a \geq b$.

Men kan nu bewijzen dat voor \mathbb{N} de volgende eigenschappen gelden.

Als a en $b \in \mathbb{N}$, dan geldt juist één van de volgende relaties: (1.10)

$$\text{of } a = b, \text{ of } a < b, \text{ of } b < a \text{ (trichotomiewet)}$$

Als a, b en $c \in \mathbb{N}$ met $a < b$ en $b < c$, dan geldt: (1.11)

$$a < c \text{ (transitieve wet)}$$

Als a, b en $c \in \mathbb{N}$, dan geldt: (1.12)

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \text{ (monotoniewet)}$$

Als a, b en $c \in \mathbb{N}$, dan geldt: (1.13)

$$a < b \Leftrightarrow ac < bc \text{ (monotoniewet)}$$

Iedere niet-lege deelverzameling van \mathbb{N} heeft een kleinste element. (1.14)

2 Gehele en rationale getallen

Aangezien bij gegeven a en $b \in \mathbb{N}$ de vergelijking $a + x = b$ niet steeds oplosbaar is met $x \in \mathbb{N}$, breidde men – via een in de algebra gebruikelijk procédé, waarop we hier niet verder ingaan – de verzameling \mathbb{N} uit met behulp van het getal 0 en de negatieve getallen tot de verzameling \mathbb{Z} der gehele getallen:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Behalve de eigenschappen (1.1)...(1.3) gelden dan in \mathbb{Z} nog de volgende eigenschappen: Er is een eenduidig bepaald *neutraal element*, notatie 0, zodanig dat:

$$a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$$

Bij iedere $a \in \mathbb{Z}$ bestaat een eenduidig bepaald *tegengesteld element*, notatie $-a$, zodanig dat:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Gevolg:

De vergelijking $a + x = b$ heeft een eenduidig bepaalde oplossing, nl.:

$$x = b + (-a)$$

genoteerd als:

$$x = b - a$$

De eigenschappen voor de vermenigvuldiging (1.4)...(1.6) evenals de distributieve wetten (1.8) en (1.9) gelden voor alle a, b en $c \in \mathbb{Z}$.

Verder geldt in \mathbb{Z} i.p.v. de *vereenvoudigingswet* (1.7) de wet: als $a \neq 0$, dan volgt uit $a \cdot b = a \cdot c$ dat $b = c$.

Gelijkwaardig hiermede is de eigenschap: uit $a \cdot b = 0$ volgt $a = 0$ of $b = 0$. Men drukt dit ook uit door te zeggen dat \mathbb{Z} geen *nuldelers* bezit.

Een systeem dat de genoemde eigenschappen van \mathbb{Z} bezit, noemt men een *integriteitsgebied*.

Aangezien bij gegeven a en $b \in \mathbb{Z}$ ($a \neq 0$) de vergelijking $ax = b$ niet steeds een oplossing bezit met $x \in \mathbb{Z}$, breidde men \mathbb{Z} uit tot de verzameling \mathbb{Q} van de *rationale*

getallen (meetbare getallen), bestaande uit „quotiënten” $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) van gehele getallen. \mathbb{Q} bezit dan behalve de genoemde eigenschappen van \mathbb{Z} ook nog de volgende eigenschappen: Bij iedere $a \in \mathbb{Q}$ ($a \neq 0$) bestaat een eenduidig bepaald *invers element*, notatie a^{-1} of $\frac{1}{a}$, met de eigenschap:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Gevolg:

De vergelijking $ax = b$ ($a \neq 0$) heeft een eenduidig bepaalde oplossing, nl.:

$$x = b \cdot \frac{1}{a}$$

genoteerd als:

$$x = \frac{b}{a}$$

Bij de uitbreidingen van \mathbb{N} tot \mathbb{Z} , en van \mathbb{Z} tot \mathbb{Q} was het noodzakelijk en ook mogelijk de ordening „voort te zetten”, d.w.z. voor de nieuw ingevoerde getallen ook de relatie „ $<$ ” (en „ $>$ ”) in te voeren, die dan zo gedefinieerd kan worden dat de orde-relaties die al bestonden in \mathbb{N} niet verstoord worden. De getallen groter dan 0 worden dan *positieve*, de getallen kleiner dan 0, *negatieve getallen* genoemd. Voor de ordening in \mathbb{Q} gelden dan ook de regels (1.10), (1.11) en (1.12), terwijl het analogon van (1.13) luidt:

Als $a, b, c \in \mathbb{Q}$ en $c > 0$ (!), dan geldt:

(1.13a)

$$a < b \Leftrightarrow ac < bc$$

Voorts geldt: voor elk rationaal getal r bestaat een natuurlijk getal n , zodanig dat $n > r$ (*Stelling van Archimedes*).

Een systeem dat al de bovengenoemde eigenschappen van \mathbb{Q} heeft, noemt men een (Archimedisches) *geordend* (commutatief) lichaam.

Tenslotte moge het volgende overzicht de zaak verduidelijken:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \\ 0 \\ \{\dots, -3, -2, -1\} \end{array} \right\} \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbb{N} \\ 0 \\ \{\dots, -3, -2, -1\} \end{array}} \right\} \mathbb{Q} \\ \left. \begin{array}{l} \{\dots, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{2}{3}, \dots, \frac{5}{7}, \dots\} \end{array} \right\}$$

3 Supremum en infimum. Reële getallen

Met behulp van het begrip ordening kan men de volgende definities geven.

Definitie 1

Een getallenverzameling V heet naar boven begrensd, indien er een getal M bestaat, zodanig dat:

$$a \leq M \quad (\forall a \in V)$$

M heet dan een *bovengrens* van V .

Het is duidelijk dat als $M_1 \geq M$, ook M_1 een bovengrens is van V .

Definitie 2

Een getallenverzameling V heet naar beneden begrensd, indien er een getal L bestaat, zodanig dat:

$$a \geq L \quad (\forall a \in V)$$

L heet dan een *ondergrens* (*benedengrens*) van V .

Ook is hier duidelijk dat als $L_1 \leq L$, ook L_1 een ondergrens is van V .

Een verzameling die zowel naar boven als naar beneden begrensd is, heet *begrensd*.

Definitie 3

M heet de kleinste bovengrens (kbg) of het supremum van een verzameling V (notatie $M = \sup V$) indien M aan de volgende twee voorwaarden voldoet:

- 1 M is een bovengrens van V ;
- 2 uit $M_1 < M$ volgt: M_1 is geen bovengrens van V .

Voorwaarde 2 betekent dat er een $a \in V$ bestaat, zo dat:

$$M_1 < a \leq M$$

Anders gezegd: als $M = \sup V$, dan bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $a \in V$ zodanig dat:

$$M - \varepsilon < a \leq M$$

Definitie 4

m heet de grootste benedengrens (gbg) of het infimum van een verzameling V (notatie $m = \inf V$) indien m aan de volgende twee voorwaarden voldoet:

- 1 m is een ondergrens van V ;
- 2 uit $m_1 > m$ volgt: m_1 is geen ondergrens van V .

Ook volgt hier: Als $m = \inf V$, dan bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $a \in V$, zodanig dat:

$$m \leq a < m + \varepsilon$$

Opmerking:

Het is bij het bovenstaande in het midden gelaten of het supremum of infimum al dan niet tot V behoort. Als $\sup V$ tot V behoort, dan noemt men dit het maximum van V . Evenzo: als $\inf V$ tot V behoort, noemt men dit het minimum van V .

Voorbeeld 1

Ga na of V een maximum en/of een minimum heeft, als:

$$V = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Oplossing:

$$\sup V = 1; 1 \notin V$$

V heeft dus geen maximum.

$$\inf V = 0; 0 \in V$$

V heeft dus een minimum.

Voorbeeld 2

Ga na of V een maximum en/of een minimum heeft, als:

$$V = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Oplossing:

$$\sup V = 2; 2 \in V$$

V heeft dus een maximum.

$$\inf V = 0; 0 \notin V$$

V heeft dus geen minimum.

Voorbeeld 3

Ga na of V een maximum en/of een minimum heeft, als:

$$V = \left\{ 1 + (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Oplossing:

$$\text{Sup } V = 2; 2 \notin V$$

V heeft dus geen maximum.

$$\text{Inf } V = 0; 0 \notin V$$

V heeft dus geen minimum.

In par. 2 is uiteengezet dat de uitbreiding van \mathbb{N} tot \mathbb{Z} ons in staat stelt de vergelijking $a + x = b$ op te lossen. De uitbreiding van \mathbb{Z} tot \mathbb{Q} maakt het mogelijk de vergelijking $ax = b$ ($a \neq 0$) op te lossen. Een vergelijking van de gedaante $x^n = a$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$) zal echter niet altijd oplosbaar zijn in \mathbb{Q} (bijvoorbeeld $x^2 = 2$ is niet in \mathbb{Q} oplosbaar). Zo ontstaat de behoefte om \mathbb{Q} uit te breiden tot een lichaam dat \mathbb{Q} omvat en waarin genoemde vergelijkingen wel oplosbaar zijn.

Men kan nu bewijzen dat men \mathbb{Q} kan uitbreiden tot (of kan „inbedden” in) een dergelijk lichaam \mathbb{R} , het lichaam der *reële getallen*. \mathbb{R} heeft alle genoemde eigenschappen die \mathbb{Q} heeft (zie par. 2) maar ook nog enkele andere.

Tot \mathbb{R} behoren, behalve de rationale (meetbare) getallen, ook de reële *irrationale* (onmeetbare) getallen, die weer te verdelen zijn in (reële) *algebraïsche* getallen en (reële) *transcendente* getallen. Hierbij noemt men een getal algebraïsch indien het een wortel is van een algebraïsche vergelijking, d.w.z. een vergelijking van de gedaante $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ ($a_i \in \mathbb{Q}$; $m \in \mathbb{N}$). Een algebraïsch getal is dus niet noodzakelijk reëel. Een getal dat niet algebraïsch is, noemt men transcendent. Voorbeelden hiervan zijn π en e (voor de definitie van e zie par. 36).

Men kan bewijzen dat in \mathbb{R} de volgende stelling geldt:

Stelling van de kleinste bovengrens

Iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling in \mathbb{R} bezit een supremum.

Gevolg:

In \mathbb{R} heeft iedere niet-lege, naar beneden begrensde verzameling een infimum.

Bewijs:

Als V een niet-lege naar beneden begrensde verzameling in \mathbb{R} is, dan is $V' = \{-x \mid x \in V\}$ een niet-lege, naar boven begrensde verzameling in \mathbb{R} . V' heeft een supremum M , maar dan is $-M$ het infimum van V .

4 De getallenrechte; intervallen

Een aanschouwelijke wijze om reële getallen voor te stellen verkrijgt men met behulp van de getallenrechte. Men laat daarbij de reële getallen op één-éénduidige wijze corresponderen met de punten van een rechte. Op deze rechte kiest men een punt O (oorsprong) dat men laat overeenkomen met 0 . Verder laat men de positieve getallen corresponderen met punten rechts van O , de negatieve getallen met punten links van O , en wel zo dat als $a < b$ het beeldpunt van a links van dat van b ligt. Men kiest een *eenheidspunt* E rechts van O dat 1 representeert, waardoor de schaal vastgelegd wordt. Op deze wijze verkrijgt men een aanschouwelijk beeld van de verzameling der reële getallen, dat echter uitsluitend heuristische waarde heeft, en waaraan men geen bewijskracht mag ontleenen.

Bepaalde deelverzamelingen van het lichaam der reële getallen zijn van belang, de z.g. **intervallen**. Hierbij onderscheiden we de volgende typen (a en b zijn reële getallen, $a < b$):

Open interval, notatie $\langle a, b \rangle$

$$\text{definitie: } \langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Gesloten interval, notatie $[a, b]$

$$\text{definitie: } [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Half-open interval

Hierbij onderscheidt men twee soorten, nl.: links gesloten, rechts open, notatie $[a, b \rangle$

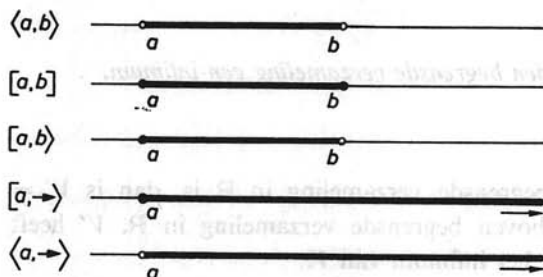
$$\text{definitie: } [a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

rechts gesloten, links open, notatie $\langle a, b]$

$$\text{definitie: } \langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

De punten a en b noemen we *de randpunten of grenzen van het interval*.

Fig. 1



Men kan ook intervallen beschouwen, die aan een of aan beide zijden onbegrensd zijn. Het ontbreken van het grensgetal wordt door een pijl aangegeven. Zo heeft men bijv. $\langle a, \rightarrow \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$. Evenzo $[a, \rightarrow)$, $\langle a, \rightarrow)$, $\langle \leftarrow, a \rangle$, $\langle \leftarrow, a]$, $\langle \leftarrow, \rightarrow)$. Een anschouwelijke voorstelling van de verschillende intervallen vindt men in fig. 1. In de figuren betekent een open cirkeltje dat het betreffende punt niet tot het interval behoort.

5 Volledige inductie

Voor de natuurlijke getallen geldt het volgende principe: Heeft een bepaald natuurlijk getal n_0 de eigenschap E , en kan uit de veronderstelling dat een willekeurig natuurlijk getal p de eigenschap E heeft, besloten worden tot de geldigheid van E voor $p + 1$, dan hebben alle natuurlijke getallen $\geq n_0$ de eigenschap E .

Hierop berust de *bewijsmethode van de volledige inductie*. Deze methode is van toepassing voor beweringen die geldig zijn voor alle natuurlijke getallen. Men bewijst hierbij dat de bewering juist is voor $n = 1$ (1e stap), en vervolgens dat ze geldig is voor $p + 1$, indien ze geldig is voor zeker natuurlijk getal p (2e stap).

Moet men een bewering bewijzen voor $n \geq n_0$ (n_0 geheel), dan bewijst men deze als 1e stap voor $n = n_0$.

Voorbeeld 1

Voor ieder natuurlijk getal n geldt:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Bewijs:

1^e stap: Voor $n = 1$ is de bewering juist:

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

2^e stap: Stel voor zekere p is:

$$\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1)$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} k^2 &= \sum_{k=1}^p k^2 + (p+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1) + (p+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(p+1)\{p(2p+1) + 6(p+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(p+1)(2p^2 + 7p + 6) \\ &= \frac{1}{6}(p+1)(p+2)(2p+3) \end{aligned}$$

De uitkomst $\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{1}{6}(p+1)\{(p+1)+1\}\{2(p+1)+1\}$ is echter de oorspronkelijke bewering, indien men p door $p+1$ vervangt. Deze blijkt juist te zijn als de bewering voor p juist is.

Voorbeeld 2

Voor ieder natuurlijk getal n is het onderstaande getal deelbaar door 7:

$$5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$$

Bewijs:

1^e stap: Voor $n = 1$ is:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n} &= 5 \cdot 3^5 - 2^2 \\ &= 1215 - 4 \\ &= 1211 \\ &= 7 \cdot 173 \end{aligned}$$

Dit getal is dus door 7 deelbaar.

2^e stap: Stel dat voor zekere p de bewering juist is, en vervangen we p door $p+1$, dan volgt:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3^{4p+5} - 2^{2p+2} &= 3^4 \cdot 5 \cdot 3^{4p+1} - 4 \cdot 2^{2p} \\ &= 3^4(5 \cdot 3^{4p+1} - 2^{2p}) + (3^4 - 4)2^{2p} \\ &= 3^4(5 \cdot 3^{4p+1} - 2^{2p}) + 77 \cdot 2^{2p} \end{aligned}$$

Beide termen in het laatste lid zijn deelbaar door 7, dus de bewering is dan ook juist voor $p+1$.

Opmerking:

Bij dit voorbeeld blijkt de noodzakelijkheid ook de eerste stap uit te voeren. Zou men beweren dat $5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$ deelbaar was door 11, dan lukt de 2e stap wel, maar de eerste niet.

Voorbeeld 3

Ongelijkheid van Bernoulli (Jacob Bernoulli, 1654–1705)

Bewering:

$$(1+a)^n > (1+na) \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1, a \in \mathbb{R}, a \text{ vast} > -1 \text{ en } \neq 0)$$

Bewijs:

1^e stap: $n = 2$:

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a \quad (a \neq 0)$$

Voor $n = 2$ is de bewering juist.

2^e stap: Neem aan de bewering is juist voor zekere $p > 1$, dan volgt:

$$\begin{aligned}(1+a)^{p+1} &= (1+a)^p \cdot (1+a) > (1+pa)(1+a) \\ &= 1 + (p+1)a + pa^2 > 1 + (p+1)a\end{aligned}$$

Hierbij is gebruikt dat $(1+a) > 0$, dus $a > -1$. Is nl. $(1+a) < 0$, dan zou het $>$ teken in een $<$ teken overgaan.

Opmerking:

Met behulp van de ordening der natuurlijke getallen kan men nog het z.g. *2e beginsel van volledige inductie* afleiden. Dit luidt als volgt: Stel dat een bepaald natuurlijk getal n_0 de eigenschap E heeft, en dat uit de veronderstelling dat E geldt voor alle natuurlijke getallen *kleiner* dan $p \geq 0$, besloten kan worden dat p de eigenschap E heeft, dan hebben alle natuurlijke getallen $\geq n_0$ de eigenschap E .

Afleiding: Noem de verzameling natuurlijke getallen ($>n_0$) waarvoor E niet geldt V . Dan zijn er twee mogelijkheden.

1. V is leeg. In dit geval geldt E voor alle natuurlijke getallen, en is de bewering bewezen.
2. V is niet leeg. In dat geval heeft V een kleinste element, zeg $n_1 > n_0$. E geldt dan voor alle natuurlijke getallen kleiner dan n_1 (en groter dan n_0). Volgens de aanname geldt E dan ook voor n_1 , hetgeen een tegenspraak oplevert. De onderstelling 2 dat V niet leeg is, is dus onjuist.

Deze eigenschap kan men gebruiken bij het voorbeeld 4 in par. 83 van hoofdstuk 6.

6 De driehoek van Pascal. Het binomium van Newton

Bij vele problemen heeft men de ontwikkeling van $(a+b)^n$ in een veelterm nodig. De coëfficiënten van deze ontwikkeling zijn van links naar rechts dezelfde als van rechts naar links. Deze symmetrie volgt uit

$$(a+b)^n = (b+a)^n \quad (n \text{ geheel } > 0)$$

		1		1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
.....						

Reeds Pascal (1623–1662) heeft een getallenschema opgesteld, waardoor de coëfficiënten voor opvolgende n eenvoudig kunnen worden bepaald. Het is hierboven weergegeven. De n° regel geeft de coëfficiënten in de ontwikkeling van $(a+b)^n$. Het bezwaar hierbij is dat men voor de coëfficiënten van $(a+b)^n$, alle coëfficiënten voor kleinere n moet opschrijven. Newton (1642–1727) heeft voor $(a+b)^n$ een ont-

wikkeling gegeven waarbij men direct voor elke n de coëfficiënten kan neerschrijven, die bekend staat als het binomium van Newton.

Binomium van Newton

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

De **binomialcoëfficiënt** $\binom{n}{k}$ (lees: n over k) is gedefinieerd als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \quad (k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \leq n)$$

Er geldt $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

$$\binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1.$$

Het product $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k$ heet **k -faculteit** en wordt geschreven als $k!$; onder $0!$ zullen we verstaan het getal 1.

Voor een natuurlijk getal n geldt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cdot \frac{(n-k)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 < k < n) \end{aligned}$$

Verwisselt men in deze formule k met $n - k$, dan volgt:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-k+1)!}$$

zodat:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 < k < n) \quad (6.1)$$

Op grond van het feit dat per definitie $0! = 1$ is, geldt (6.1) ook nog indien $k = 0$

en $k = n$, immers:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1 \quad (6.2)$$

(6.1) geldt dus voor $n = 0, 1, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; n .

In verband met deze afspraak kan de binomiaalformule aldus in compacte vorm geschreven worden:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (6.3)$$

Het bewijs van de formule wordt geleverd door volledige inductie.

Bewijs:

1^e stap:

$$\begin{aligned} (a + b)^1 &= \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \\ &= a + b \end{aligned}$$

Dit is juist.

2^e stap: Stel dat de formule juist is voor zekere p ; vermenigvuldig beide leden met $(a + b)$:

$$\begin{aligned} (a + b)^p &= a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \dots + \binom{p}{k-1} a^{p-k+1} b^{k-1} + \\ &\quad + \binom{p}{k} a^{p-k} b^k + \dots + b^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \frac{a + b = a + b}{(a + b)^{p+1} &= a^{p+1} + \left\{ \binom{p}{1} + 1 \right\} a^p b + \dots + \\ &\quad + \left\{ \binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} \right\} a^{p-k+1} b^k + \dots + b^{p+1} \end{aligned}$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} + \frac{p!}{(k-1)!(p+1-k)!} \\ &= \frac{p!(p+1-k)}{k!(p+1-k)!} + \frac{p!k}{k!(p+1-k)!} \\ &= \frac{p!(p+1)}{k!(p+1-k)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!} \\
 &= \binom{p+1}{k}
 \end{aligned}$$

Dus:

$$\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} = \binom{p+1}{k} \quad (6.4)$$

We vinden dus:

$$(a+b)^{p+1} = a^{p+1} + \binom{p+1}{1} a^p b + \dots + \binom{p+1}{k} a^{p+1-k} b^k + \dots + b^{p+1}$$

hetgeen juist het binomium is voor $p+1$. Volgens het principe van de volledige inductie is dus de ontwikkeling juist voor alle natuurlijke getallen n .

Bijzondere gevallen: $a=1, b=\pm 1$

$$\begin{aligned}
 (1 \pm 1)^n &= 1 \pm \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \pm \dots + (\pm 1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 2^n \\ 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

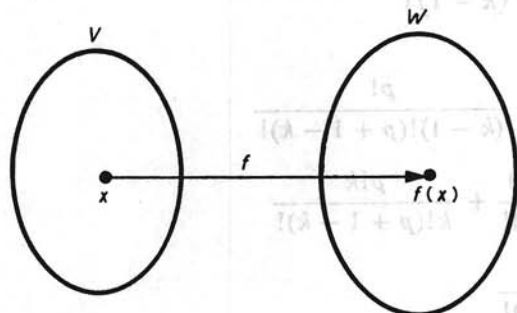
7 Het functiebegrip. Omgeving

Definitie

Een functie f van een verzameling V in een verzameling W is een voorschrift volgens hetwelk aan ieder element van V op eenduidige wijze juist één element van W wordt toegevoegd.

Men spreekt dan van een functie van V naar W ; notatie $f: V \rightarrow W$.

Fig. 2



Men noemt V de *definitieverzameling* van de functie of het *domein* en W het *codomein* (zie fig. 2). Wanneer $x \in V$ door f wordt afgebeeld in W (zie fig. 2a), dan geeft men het beeld van het origineel x aan door $f(x)$, en we schrijven dit als:

$$f: x \mapsto f(x)$$

of:

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

Bijvoorbeeld:

$$f: x \mapsto x^2 + 6x + 5$$

dus:

$$f(x) = x^2 + 6x + 5$$

De verzameling van de beelden van alle elementen van V noemen we de *waardenverzameling* of het *bereik* van f , aangegeven door $f(V)$, dus $f(V) = \{f(x) | x \in V\}$. Als $f(V) = W$, dan noemen we f een *afbeelding van V op W* .

Wanneer elk beeldpunt afkomstig is van juist één origineel, dan noemt men f *één-eenduidig* (ook wel omkeerbaar eenduidig).

Verder hanteert men ook wel de volgende benamingen: Een functie van V op W (waarbij dus elk element van W als beeld optreedt) noemt men een *surjectie*; een één-eenduidige functie van V in W (waarbij niet noodzakelijk elk element van W als beeld optreedt) heet een *injectie*; een functie die zowel surjectie als injectie is, noemt men een *bijctie*.

Een en ander is schematisch weergegeven in fig. 2.

De eenvoudigste voorstelling van een functie verkrijgt men door het gebruik van getallenrechten, een voor de verzameling $\{x\}$, en een voor de waardenverzameling $\{y\}$. Men noemt x de *onafhankelijk veranderlijke*, y de *afhankelijk veranderlijke*. Door een pijltje geeft men weer welke y aan een bepaalde x is toegevoegd (zie fig. 3). De meest gebruikte voorstelling van een functie is die met behulp van een orthogonaal assenstelsel. De bijbehorende getallenparen (x, y) worden als punten weergegeven, waar-

Fig. 2a

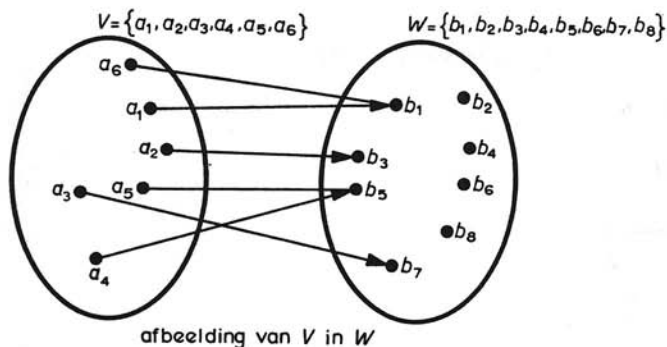


Fig. 2b

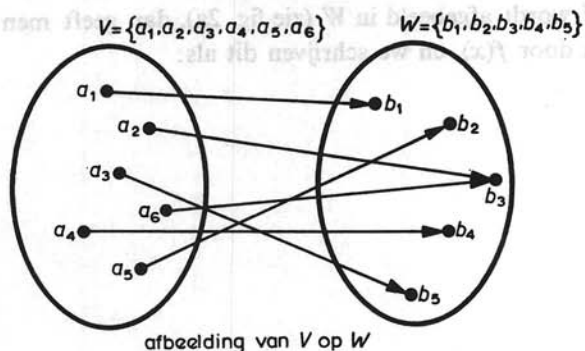
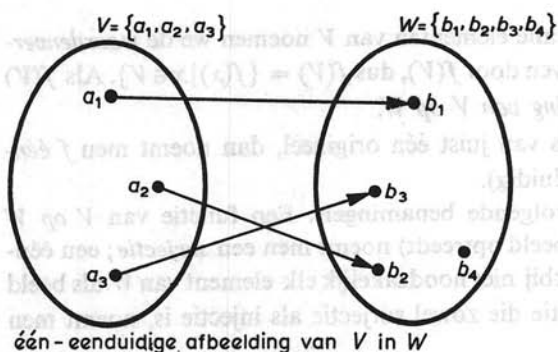


Fig. 2c



bij x de abscis en y de ordinaat voorstelt. De verzameling punten (x, y) is dan vaak een kromme (zie fig. 4).

Voorbeeld 1

Zij $\{x\}$ het interval $[-2, 2]$ (fig. 3). Als functievoorschrift nemen we: kwadrateren, dus $x \mapsto x^2$. De functiewaardenverzameling is het interval $[0, 4]$.

Merk op dat zowel aan $-a$ als aan $+a$ hetzelfde getal a^2 is toegevoegd.

Voorbeeld 2

Op het interval $[-4, 3]$ is een functie f gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{op } [-4, -2), \\ x^2 & \text{op } [-2, 1), \\ 2 - x & \text{op } [1, 3]. \end{cases}$$

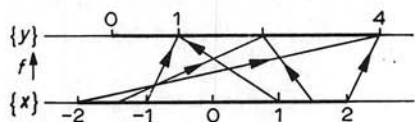
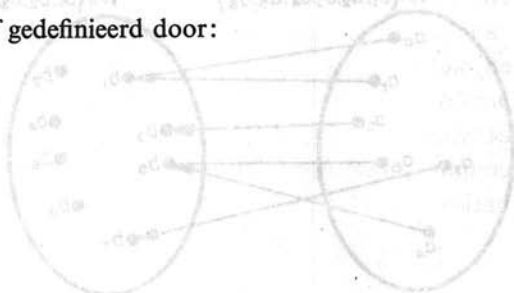


Fig. 3



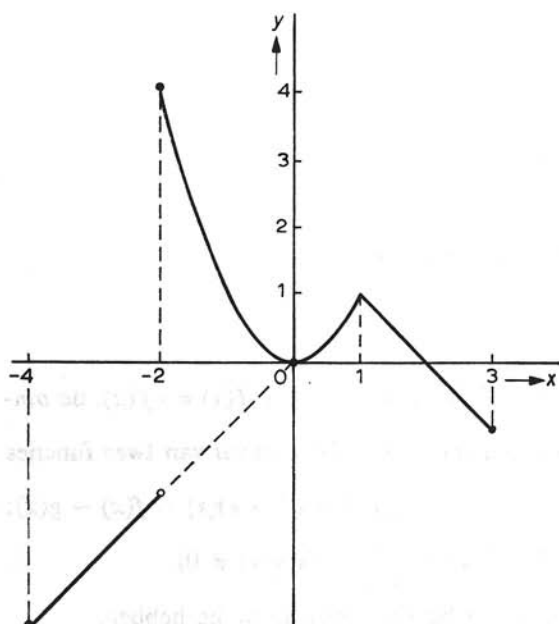


Fig. 4

De grafiek van de functie f op een rechthoekig assenstelsel is weergegeven in fig. 4. Merk op dat in voorbeeld 2 één functie is gegeven door 3 formules.

Opmerking:

Vaak geeft men bij een functie alleen het functievoorschrift aan zonder de definitieverzameling. Met de functie $f: x \mapsto f(x)$ van V naar W bedoelen we dan een functie, waarvan het domein bestaat uit alle $x \in V$, waarvoor $f(x)$ betekenis heeft. Zo is het domein van de functie $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ van \mathbb{R} naar \mathbb{R} de verzameling $[-1, 1]$.

We noemen twee functies f en g , gedefinieerd op een verzameling D , gelijk als $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D$.

Als f en g twee functies zijn die beide gedefinieerd zijn op een deelverzameling D van \mathbb{R} , dan kunnen we uit f en g nieuwe functies afleiden, ook gedefinieerd op D , en wel de *somfunctie* $f + g$, gedefinieerd door $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, en het *produkt* (de produktfunctie) $f \cdot g$, gedefinieerd door $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Het is eenvoudig na te gaan dat voor de optelling en de vermenigvuldiging van functies de commutatieve, associatieve en distributieve wetten gelden. Zo wordt bijv. de distributieve wet als volgt bewezen:

$$\begin{aligned} \{f \cdot (g + h)\}(x) &= f(x) \cdot \{(g + h)(x)\} \\ &= f(x) \cdot \{g(x) + h(x)\} \end{aligned}$$

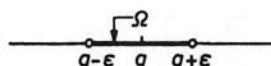


Fig. 4a

$$\begin{aligned}
 &= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) \\
 &= (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x) \\
 &= (f \cdot g + f \cdot h)(x) \text{ voor } \forall x \in D
 \end{aligned}$$

dus:

$$f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$$

De *tegengestelde* van een functie f definieert men door $(-f)(x) = -f(x)$, de *omgekeerde* van f als $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ (indien $f(x) \neq 0$). Het *verschil* van twee functies f en g wordt gedefinieerd door $f - g = f + (-g)$, dus $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$; het *quotiënt* door $\frac{f}{g} = f \cdot g^{-1}$, dus $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (als $g(x) \neq 0$).
In het volgende zullen wij herhaaldelijk het begrip *omgeving* nodig hebben.

Definitie

Een omgeving van een getal a is een open interval dat a bevat.

Zo'n omgeving geven we aan door Ω_a of kortweg Ω . Zo is bijv. het interval $\langle -3, 0 \rangle$ een omgeving van het getal -1 . Echter is ook $\langle -1,001, -0,99 \rangle$ een omgeving van -1 ; de grootte van het interval is bij het begrip omgeving niet vastgelegd. Het interval $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ (fig. 4a), waarin $\varepsilon > 0$ is, noemen we een ε -omgeving van a . Het getal a zelf behoort tot elk van zijn omgevingen en heet *inwendig* punt daarvan.

In verschillende gevallen zullen we te maken hebben met een open interval om a , waarvan a zelf uitgezonderd is. Een dergelijk interval zullen we een *gereduceerde* omgeving van a noemen. Een gereduceerde ε -omgeving van a zullen we daarbij voorstellen door $\langle a - \varepsilon | a + \varepsilon \rangle$ of door Ω'_a .

8 Absolute waarde. Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

Op de getallenrechte hebben de punten overeenkomende met a resp. $-a$ dezelfde afstand tot het nulpunt. Deze afstand noemt men de *absolute waarde* of *modulus* van het reële getal a . Zonder gebruik te maken van het begrip afstand wordt de absolute waarde als volgt gedefinieerd.

Definitie

De absolute waarde of modulus $|a|$ van het reële getal a is a als $a \geq 0$ is, en $-a$ als $a < 0$ is.

Zo is bijv. $|-3| = 3$ en $|3| = 3$. Algemeen is:

$$|-a| = |a|$$

Onder \sqrt{x} ($x > 0$) verstaat men het *positieve* getal y , zo dat $y^2 = x$.

Nu is:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Immers is $a \geq 0$, dan is $|a| = a$, en het kwadraat hiervan is a^2 ; is $a < 0$, dan is $|a| = -a$ en $(-a)^2 = a^2$.

De belangrijkste regels voor het rekenen met absolute waarden (moduli) zijn:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \tag{8.1}$$

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \tag{8.2}$$

Dit is de z.g. *driehoeksongelijkheid*.

Het bewijs van (8.1) volgt direct uit de definitie van $|a|$.

Uit (8.1) leiden we af:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0) \tag{8.3}$$

Bewijs:

$$|b| \cdot \left| \frac{a}{b} \right| = \left| b \cdot \frac{a}{b} \right| = |a| \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Om (8.2) te bewijzen gebruiken we de volgende stelling.

Stelling

Is $-L \leq a \leq L$, dan is $|a| \leq L$ en omgekeerd.

Bewijs:

Meetkundig gezien (fig. 5) betekent deze stelling dat indien a op het interval $[-L, L]$ ligt, a niet verder van het nulpunt ligt dan L . Met behulp van de axioma's uit par. 1 kan men deze stelling als volgt bewijzen.

1 Voor $a = 0$ is de stelling juist, want $0 \leq L$, zoals uit de gegevens van de stelling volgt.

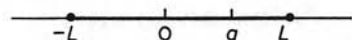
2 Voor $a > 0$ is $|a| = a$, en $a \leq L$ is hetzelfde als $|a| \leq L$.

3 Is $a < 0$, dan is $|a| = -a$. Uit $-L \leq a$ volgt:

$$-L + L - a \leq a + L - a \quad (1.12) \Rightarrow -a \leq L, \text{ dit is } |a| \leq L.$$

Ook het omgekeerde van de stelling is juist, wat eenvoudig kan worden aangetoond. Immers, als gegeven is: $|a| \leq L$, dan merken we op dat, indien $a \geq 0$, geldt $|a| = a$ en dus $a \leq L$. Indien echter $a \leq 0$, dan geldt $|a| = -a$ en dus volgt uit het gegeven: $-a \leq L$ en dus $-L \leq a$. Samengevat volgt uit $|a| \leq L$ de ongelijkheid $-L \leq a \leq L$.

Fig. 5



Bewijs van (8.2)

Is $a + b = 0$, dan is (8.2) triviaal.

Voor $a + b \neq 0$ geldt:

$$\begin{aligned} (8.3) \quad \frac{|a| + |b|}{|a + b|} &= \frac{|a|}{|a + b|} + \frac{|b|}{|a + b|} \quad (\text{op grond van (8.3)}) \\ &= \left| \frac{a}{a + b} \right| + \left| \frac{b}{a + b} \right| \geq \frac{a}{a + b} + \frac{b}{a + b} = 1 \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$(8.4) \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

Vervangt men b door $-b$, dan verkrijgt men ook:

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

waarmee het rechterdeel van (8.2) is bewezen.

Hiermede bewijzen we het linkerdeel van (8.2) aldus:

$$|a| = |a + b - b| \leq |a + b| + |b|$$

$$|b| = |b + a - a| \leq |a + b| + |a|$$

dus:

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

en:

$$|b| - |a| \leq |a + b|$$

zodat:

$$-|a + b| \leq |a| - |b| \leq |a + b|$$

Volgens de bovengenoemde stelling geldt dan:

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a + b| \quad (8.6)$$

vervangt men b door $-b$, dan verkrijgt men ook:

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b| \quad (8.7)$$

Combinatie van (8.4), (8.5), (8.6) en (8.7) geeft (8.2).

Afgeleide eigenschappen:

$$1 \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \quad (8.8)$$

Vooraf herhalen we dat met $\sum_{k=1}^n a_k$ bedoeld wordt de som van alle getallen a_k , waarbij de index k de getallen $1, \dots, n$ doorloopt. Zonder \sum -teken kan (8.8) dus geschreven worden als:

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$$

Het bewijs van (8.8) kan geleverd worden door volledige inductie (zie par. 5).

$$2 \quad \left| \prod_{k=1}^n a_k \right| = \prod_{k=1}^n |a_k| \quad (8.9)$$

Het symbool $\prod_{k=1}^n a_k$ betekent het produkt van alle getallen a_k , waarbij de index k varieert van 1 tot n . Zonder \prod -teken wordt (8.9) geschreven als:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot |a_3| \dots |a_n|$$

Ook het bewijs van (8.7) kan met volledige inductie geleverd worden.

$$|a^n| = |a|^n \quad (n \text{ geheel } \geq 0) \quad (8.10)$$

Eigenschap (8.10) is een bijzonder geval van (8.9).

We vermelden nog enige gevolgen die bij het maken van opgaven veelvuldig worden toegepast.

Gevolg 1:

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

Afleiding:

$$1 \quad |a| = |b| \Rightarrow |a| \cdot |a| = |b| \cdot |b| \Rightarrow a^2 = b^2$$

$$2 \quad a^2 = b^2 \Rightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Rightarrow \text{òf } a = b, \text{ òf } a = -b$$

Beide uitkomsten samen geeft $|a| = |b|$.

Gevolg 2:

$$|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

Afleiding:

$$1 \quad |a| < |b| \Rightarrow |a|^2 < |b|^2 \Rightarrow a^2 < b^2$$

$$2 \quad a^2 < b^2 \Rightarrow (a - b)(a + b) < 0$$

dus a ligt op het interval $\langle -b, b \rangle$ als $b > 0$ is en op het interval $\langle b, -b \rangle$ als $b < 0$ is. In beide gevallen is volgens de hiervoor afgeleide stelling: $|a| < |b|$.

Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz (1789–1857, resp. 1843–1921)

Zijn a_1, \dots, a_n en b_1, \dots, b_n willekeurige reële getallen, dan geldt:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

Bewijs:

Een som van reële kwadraten is altijd positief of 0. Dus geldt voor elke reële x :

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0$$

We kunnen dit schrijven als:

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0 \quad (8.11)$$

waarbij:

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^n b_k^2$$

Daar (8.11) moet gelden voor elke reële x , zal de discriminant van de kwadratische vorm uit het linkerlid ≤ 0 moeten zijn, dus $B^2 - AC \leq 0$, hetgeen te bewijzen was.

9 Het limietbegrip

Laat door het voorschrift:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1), \quad f(1) = 4$$

een functie f gedefinieerd zijn voor alle reële x .

Voor $x \neq 1$ is $f(x) = x + 1$, voor $x = 1$ is $f(x) = 4$. De grafiek van f (fig. 6) is dus

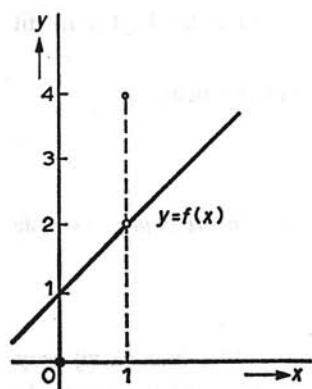


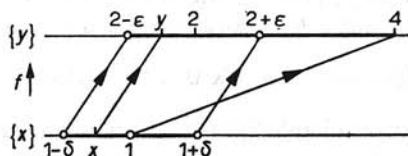
Fig. 6

een rechte, onderbroken voor $x = 1$, voor welke x de functiewaarde 4 bedraagt. Laat men x een getallenverzameling doorlopen, waarvan de elementen steeds dichterbij 1 liggen, dan blijkt dat $f(x) = x + 1$ een getallenverzameling doorloopt, waarvan de elementen steeds dichterbij 2 liggen. Men drukt deze eigenschap aldus uit: de limiet van de functie f is 2, indien x nadert tot 1 (notatie: $x \rightarrow 1$).

Het limietbegrip is het centrale punt in de analyse. Het is daarom gewenst een definitie van limiet te geven die de meest voorkomende gevallen omvat. Indien bij het voorbeeld $y (= f(x))$ dicht bij 2 ligt, betekent dit dat y een punt is van een omgeving van 2, d.i. het open interval $\langle 2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon \rangle$, waarin ε , „klein” gedacht wordt. Hierbij is niet uitgesloten dat $y = 2$ is voor een x die niet gelijk aan 1 is. Daarentegen moet de uitdrukking dat „ x dicht bij 1 ligt”, zo worden opgevat dat $x \neq 1$ is. Dit betekent dat x ligt in een gereduceerde omgeving van 1, die we kunnen aangeven door $\langle 1 - \delta | 1 + \delta \rangle$ met $\delta > 0$. Het is begrijpelijk dat δ afhankelijk is van ε . Is immers ε „zeer klein”, dan zal in het algemeen ook δ „zeer klein” moeten zijn.

Bij het bovenstaande voorbeeld is bij gegeven ε het getal δ zeer eenvoudig te bepalen. Omdat voor $x \neq 1$, $y = f(x) = x + 1$, zal $f(x)$ op het interval $\langle 2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon \rangle$ liggen, als x op het interval $\langle 1 - \varepsilon | 1 + \varepsilon \rangle$ ligt, dus kan hier $\delta = \varepsilon$ genomen worden (fig. 7). Natuurlijk voldoet ook bijv. het interval $\langle 1 - \frac{1}{2}\varepsilon | 1 + \frac{1}{2}\varepsilon \rangle$ aan de gestelde eis. Door deze overwegingen komt men tot de volgende limietdefinitie.

Fig. 7



Definitie 1

Een functie f , gedefinieerd in een gereduceerde omgeving van a , heeft voor $x \rightarrow a$ de limiet L , indien bij iedere omgeving Ω_L een gereduceerde omgeving Ω'_a bestaat, zo dat $f(x)$ in Ω_L ligt, als x in Ω'_a ligt.

In fig. 8 is deze definitie door een plaatje toegelicht. De omgeving Ω_L is het interval $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$ ($\varepsilon > 0$). Ligt $f(x)$ in dit interval, dan is dus $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De gereduceerde omgeving Ω'_a is het interval $\langle a - \delta | a + \delta \rangle$ ($\delta > 0$). Ligt x in dit interval, dan is $0 < |x - a| < \delta$.

Gewoonlijk geeft men de limietdefinitie dan ook in de volgende vorm.

Definitie 2

Een functie f , gedefinieerd in een gereduceerde omgeving van a , heeft voor $x \rightarrow a$ de limiet L , indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ als } 0 < |x - a| < \delta$$

Dat δ van ε afhankelijk is duidt men aan door te schrijven $\delta(\varepsilon)$. Met nadruk zij erop gewezen, dat de toevoeging $\varepsilon \mapsto \delta(\varepsilon)$ geen functie is, daar $\delta(\varepsilon)$ niet eenduidig bepaald is door ε .

Het bovenstaande is de betekenis van de notatie:

$$f(x) \rightarrow L \text{ als } x \rightarrow a$$

(lees: $f(x)$ nadert tot L als x tot a nadert), of van:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

(lees: limiet $f(x)$ als x tot a nadert, is L). Zie fig. 8a.

We kunnen nu bewijzen dat door de bovenstaande definities de limiet L eenduidig is bepaald, d.w.z. dat er geen twee getallen zijn die aan bovengenoemde definities voldoen. Immers, zijn L_1 en L_2 twee zulke getallen, dan kan men bij iedere $\varepsilon_1 > 0$ en $\varepsilon_2 > 0$ de getallen δ_1 en δ_2 zo bepalen dat voldaan is aan:

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon_1, |f(x) - L_2| < \varepsilon_2 \quad (9.1)$$

als $0 < |x - a| < \delta_1$ en $0 < |x - a| < \delta_2$.

Is $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, dan is dus bij iedere positieve ε_1 en ε_2 voor $0 < |x - a| < \delta$ aan beide ongelijkheden (9.1) voldaan.

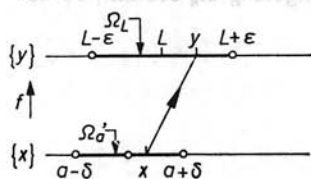
Dit leidt echter tot een tegenspraak indien $L_1 \neq L_2$. In dit geval geldt nl. $|L_1 - L_2| > 0$, en kunnen we voor ε_1 en ε_2 beide kiezen: $\frac{1}{3}|L_1 - L_2|$.

Dan zou echter gelden:

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| = \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{2}{3}|L_1 - L_2| \end{aligned}$$

hetgeen onjuist is. Dus $f(x)$ kan hoogstens één limiet hebben indien x nadert tot a .

Fig. 8



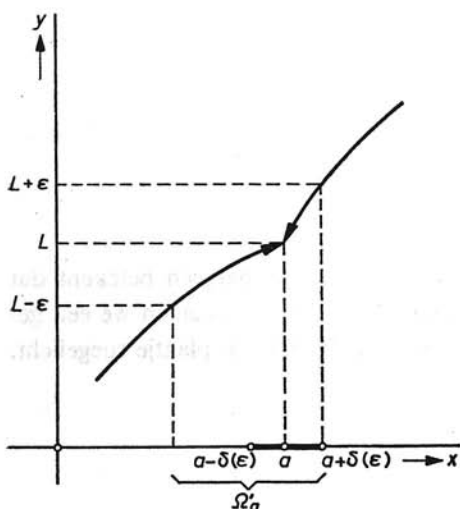


Fig. 8a

Voorbeeld 1

Bepaal:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2$$

Oplossing:

We vermoeden dat de limiet 4 is. We willen dus aantonen dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat $|x^2 - 4| < \varepsilon$ is, als $0 < |x - 2| < \delta$ is. Nu is $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. We beginnen getallen x te beschouwen zo dat $|x - 2| < 1$ is, dus $1 < x < 3$.

Voor zulke x is $3 < x + 2 < 5$, en dus is voor $x \neq 2$:

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < 5|x - 2|$$

Zeker is $|x^2 - 4| < \varepsilon$, als $5|x - 2| \leq \varepsilon$ of $|x - 2| \leq \frac{1}{5}\varepsilon$. We kunnen dus voor δ elk positief getal kiezen dat zowel voldoet aan $\delta < 1$ als aan $\delta \leq \frac{1}{5}\varepsilon$

Het komt voor dat de functie f een limiet heeft, indien x tot a of van links nadert, of van rechts, notatie: $x \uparrow a$, resp. $x \downarrow a$. In het eerste geval noemt men L een *linkerlimiet*, in het tweede geval een *rechterlimiet*.

Definitie 3

Een functie f , gedefinieerd in een gereduceerde linkeromgeving van a , heeft voor $x \uparrow a$ de linkerlimiet L , indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ als } -\delta < x - a < 0$$

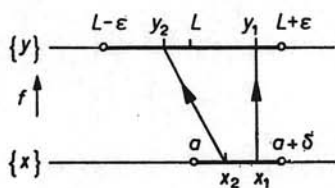


Fig. 9

Voor $-\delta < x - a < 0$ is ook te schrijven: $a - \delta < x < a$, hetgeen betekent dat x op het open interval $\langle a - \delta, a \rangle$ ligt. Het interval $\langle a - \delta, a \rangle$ noemen we een gereduceerde linkeromgeving van a . De definitie is in fig. 9 met een plaatje toegelicht. De notatie voor linkerlimiet is:

$$f(x) \rightarrow L \text{ als } x \uparrow a$$

of:

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$$

Op overeenkomstige wijze luidt de definitie van rechterlimiet als volgt.

Definitie 4

Een functie f , gedefinieerd in een gereduceerde rechteromgeving van a , heeft voor $x \downarrow a$ de rechterlimiet L , indien bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat

$$|f(x) - L| < \epsilon, \text{ als } 0 < x - a < \delta$$

Hierbij ligt dus x op het open interval $\langle a, a + \delta \rangle$, dat we een gereduceerde rechteromgeving van a noemen.

De notatie voor rechterlimiet is:

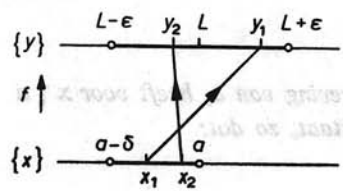
$$f(x) \rightarrow L \text{ als } x \downarrow a$$

of:

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = L$$

Voor een meetkundige toelichting zie men fig. 10.

Fig. 10



Voorbeeld 2

We definiëren een functie f door:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2}$$

voor alle $x \neq 0$. Het domein bevat dus getallen die iedere gestelde grens te boven gaan.

Door te schrijven:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2} = 3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

ziet men dat voor „zeer grote” x , $f(x)$ weinig verschilt van 3, en dat het verschil van $f(x)$ en 3 kleiner wordt naarmate voor x een groter getal genomen wordt.

Laat men x boven alle grenzen toenemen, dan geeft men dit aan door het symbool $x \rightarrow \infty$ (lees: x nadert tot oneindig). Ook als $x \rightarrow \infty$ kan f een limiet hebben. De limietdefinitie luidt in dit geval aldus:

Definitie 5

Een functie f , gedefinieerd voor $x > A$, heeft de limiet L als $x \rightarrow \infty$, indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ bestaat, zo dat:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ als } x > N(\varepsilon)$$

De notatie is:

$$f(x) \rightarrow L \text{ als } x \rightarrow \infty$$

of:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

$N(\varepsilon)$ geeft aan dat N van ε afhangt.

We toetsen de definitie aan het bovenstaande voorbeeld.

$$\left| \frac{3x^2 - x + 1}{x^2} - 3 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-x + 1}{x^2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x - 1}{x^2} \right| < \varepsilon$$

Daar voor $x > 1$ geldt: $|x - 1| < |x|$, is dan $\left| \frac{x - 1}{x^2} \right|$ zeker $< \varepsilon$, indien $\left| \frac{x}{x^2} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ is. Nemen we dus $x > \frac{1}{\varepsilon}$, dan is aan de gestelde eis voldaan. We kunnen dus $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ kiezen, als $\varepsilon < 1$ is, als $\varepsilon > 1$, dan kiezen we $N(\varepsilon) = 1$.

Wanneer het domein getallen bevat die beneden iedere gestelde grens komen, kan f een limiet hebben als x onbepaald afneemt, hetgeen men uitdrukt als: $x \rightarrow -\infty$ (lees: x nadert tot min oneindig).

Definitie 6

De functie f , gedefinieerd voor $x < A$, heeft de limiet L als $x \rightarrow -\infty$, indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ bestaat, zo dat:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ als } x < N(\varepsilon)$$

De notatie is:

$$f(x) \rightarrow L \text{ als } x \rightarrow -\infty$$

of:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Het kan gebeuren dat indien $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$, of $x \rightarrow -\infty$, de functiewaarden $f(x)$ iedere gestelde grens te boven gaan, d.w.z. $f(x) \rightarrow \infty$, of beneden iedere gestelde grens dalen, d.w.z. $f(x) \rightarrow -\infty$. Men kent dan aan de functie de *oneigenlijke* limiet ∞ , resp. $-\infty$ toe. Notatie:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

resp.:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Opmerking:

Voor alle limieten uit bovenstaande definities kan men op soortgelijke wijze als bij definitie 2 de eenduidigheid bewijzen.

Voorbeelden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty; \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = \infty; \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

10 Het rekenen met limieten

In deze paragraaf zijn f en g functies die gedefinieerd zijn in een gereduceerde omgeving Ω'_a van a . We veronderstellen dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ bestaan en respectievelijk de waarden F en G hebben.

We leiden de volgende stellingen af.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (10.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (10.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (10.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0) \quad (10.4)$$

Voorbehoud: De hierboven genoemde limieten moeten „eigenlijk” zijn, dus getallen. Als limieten worden ∞ en $-\infty$ niet beschouwd. Wel gelden de regels ook als $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$.

Bewijs van (10.1)

Daar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$, bestaat er volgens limietdefinitie 2 bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$, zo dat:

$$|f(x) - F| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ en } |g(x) - G| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ als } 0 < |x - a| < \delta$$

waarbij ook $x \in \Omega'_a$.

Nu is, indien $0 < |x - a| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - F - G| &= |(f(x) - F) + (g(x) - G)| \\ &\leq |f(x) - F| + |g(x) - G| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

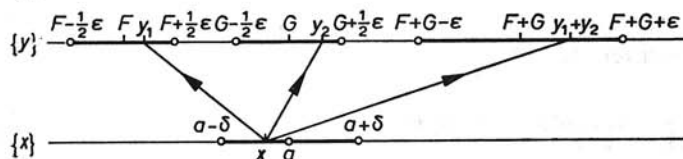
en dit is de betekenis van:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = F + G$$

Het bewijs van (10.1) is in fig. 11 toegelicht. Ligt x in het interval $\langle a - \delta | a + \delta \rangle$, dan ligt $f(x)$ in het interval $\langle F - \frac{1}{2}\varepsilon, F + \frac{1}{2}\varepsilon \rangle$, en $g(x)$ in het interval $\langle G - \frac{1}{2}\varepsilon, G + \frac{1}{2}\varepsilon \rangle$. Dus ligt $f(x) + g(x)$ in het interval $\langle F + G - \varepsilon, F + G + \varepsilon \rangle$. Bij iedere omgeving Ω van $F + G$ bestaat dus een gereduceerde omgeving Ω'_a van a , zo dat $f(x) + g(x)$ in Ω ligt als x ligt in Ω'_a .

Alvorens (10.3) te bewijzen, merken we op dat uit het feit dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat, volgt dat er een omgeving is van a , waar de functiewaarden $f(x)$ begrensd zijn (men noemt dan in die omgeving de functie f begrensd). Immers als $F \neq 0$, dan is $|F| > 0$, en bestaat er een δ zodanig dat $|f(x) - F| < \frac{1}{2}|F|$ als $0 < |x - a| < \delta$, waaruit volgt $-\frac{1}{2}|F| + F < f(x) < \frac{1}{2}|F| + F$ voor $x \in \langle a - \delta | a + \delta \rangle$.

Fig. 11



Is $F = 0$, dan bestaat er een δ zodanig dat $|f(x) - 0| < 1$ als $0 < |x - a| < \delta$, en dus $-1 < f(x) < 1$ voor $x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$.

Bewijs van (10.3)

Bij dit bewijs passen we een kunstgreep toe, nl.:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - F \cdot G &= f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot G + f(x) \cdot G - F \cdot G \\ &= f(x) \{g(x) - G\} + G \{f(x) - F\} \\ |f(x) \cdot g(x) - F \cdot G| &\leq |f(x)| |g(x) - G| + |G| |f(x) - F| \end{aligned} \quad (10.5)$$

We moeten nu aantonen dat bij gegeven $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat, zo dat het rechterlid van (10.5) kleiner is dan ε , als $0 < |x - a| < \delta$ is. Dit bereiken we als volgt:

Omdat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ eindig is bestaat er volgens bovenstaande opmerking een vast positief getal M , zo dat $|f(x)| < M$ is, als x in een zekere gereduceerde omgeving van a ligt.

Bij de positieve getallen $\frac{\varepsilon}{2M}$ en $\frac{\varepsilon}{2\{|G| + 1\}}$ bestaat een δ , zo dat voor $0 < |x - a| < \delta$,

zowel $|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2M}$ als $|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2\{|G| + 1\}}$ is.

(We nemen $\frac{\varepsilon}{2\{|G| + 1\}}$ en niet $\frac{\varepsilon}{2|G|}$, wat men zou verwachten, omdat G wel eens 0 zou kunnen zijn).

Dus is voor $0 < |x - a| < \delta$:

$$|f(x) \cdot g(x) - F \cdot G| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2\{|G| + 1\}} \cdot |G| < \varepsilon$$

waarmee het gestelde bewezen is.

Opmerking:

Door voor f de functie met constante waarde c te nemen volgt uit (10.3):

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot g(x) = c \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Hieruit en uit (10.1) volgt dan onmiddellijk (10.2).

Bewijs van (10.4)

Om (10.4) te bewijzen, bewijzen we eerst:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G \neq 0)$$

Nu is:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| = \left| \frac{G - g(x)}{g(x) \cdot G} \right| = \frac{|g(x) - G|}{|g(x)| \cdot |G|} \quad (10.6)$$

Kiest men in de limietdefinitie van $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ voor ε het getal $\frac{1}{2}|G|$, dan bestaat er een δ_1 zo dat voor $0 < |x - a| < \delta_1$, $|g(x) - G| < \frac{1}{2}|G|$, waaruit volgt volgens de ongelijkheidsrelatie (8.5):

$$|g(x)| > |G| - \frac{1}{2}|G| = \frac{1}{2}|G|$$

Voor deze δ_1 -omgeving van a volgt uit (10.6):

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| = \frac{|g(x) - G|}{|g(x)| \cdot |G|} < \frac{2|g(x) - G|}{G^2} \quad (10.7)$$

Verder bestaat bij iedere $\varepsilon > 0$ een δ_2 zo dat:

$$|g(x) - G| < \frac{1}{2}\varepsilon G^2, \text{ als } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Voor deze δ_2 volgt uit (10.7):

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon G^2}{G^2} = \varepsilon$$

Voor de kleinste (δ) van de getallen δ_1 en δ_2 is dientengevolge:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \varepsilon \text{ als } 0 < |x - a| < \delta$$

hetgeen de betekenis is van:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{G}$$

Voor het bewijs van (10.4) past men verder (10.3) toe aldus:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Uit (10.1) volgt door volledige inductie:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \quad (10.8)$$

Uit (10.3) volgt door volledige inductie:

$$\lim_{x \rightarrow a} \prod_{k=1}^n f_k(x) = \prod_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \quad (10.9)$$

Nog enige andere limieteigenschappen volgen hier.

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)| \quad (10.10)$$

Is $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$, dan bestaat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat:

$$|f(x) - F| < \varepsilon, \text{ als } 0 < |x - a| < \delta$$

Volgens (8.5) is:

$$|f(x) - F| \geq ||f(x)| - |F||$$

dus is a fortiori:

$$||f(x)| - |F|| < \varepsilon, \text{ als } 0 < |x - a| < \delta$$

hetgeen de betekenis is van:

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |F| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$$

Voor het berekenen van limieten wordt vaak gebruik gemaakt van de volgende stelling, die wel insluitingsstelling genoemd wordt.

Insluitingsstelling

Is gegeven dat in een gereduceerde omgeving van a geldt:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

en geldt $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, dan is ook:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Bewijs:

Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$, zo dat $g(x)$ in de omgeving $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$ ligt en $h(x)$ in de omgeving $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$, als x in de gereduceerde omgeving $\langle a - \delta, a + \delta \rangle$ ligt. Blijkens het gestelde ligt voor dezelfde x ook $f(x)$ in de omgeving $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$, d.w.z. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Opmerkingen:

- 1 De in deze paragraaf gegeven bewijzen gaan zonder grote verandering door indien men i.p.v. $x \rightarrow a$ neemt $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$; ze worden hier achterwege gelaten.
- 2 Analoge limietstellingen gelden indien men $x \rightarrow a$ vervangt door $x \downarrow a$ of $x \uparrow a$.

3 De gevallen waarin de toepassing van de limietregels zou leiden tot zinledige uitdrukkingen als $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ komen later ter sprake.

11 Continuïteit 1

In par. 9 hebben we aangetoond dat $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$ juist is wat men zou verwachten nl. 2^2 . Voor deze vaak voorkomende eigenschap heeft men de naam *continuïteit* ingevoerd.

Definitie

De functie f , gedefinieerd in een omgeving van a , dus ook in a , heet *continu* in $x = a$,* indien:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Vervangt men in de limietdefinities 1 en 2 overal L door $f(a)$, dan heeft men de uitvoeriger definitie van continuïteit.

Een functie heet *rechts continu* in $x = a$, indien $\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$ en *links continu* in $x = a$, indien $\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a)$.

Het begrip continuïteit wordt niet gedefinieerd voor $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$.

Wanneer een functie in verschillende intervallen door verschillende voorschriften wordt gegeven, is het vaak nodig dat men bij het onderzoek naar continuïteit apart onderzoekt $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x)$. De functie is dan continu in $x = a$, indien:

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$$

Definitie 2

Een functie heet *continu* in het open interval $\langle a, b \rangle$ als de functie continu is in alle x van $\langle a, b \rangle$.

Definitie 3

Een functie heet *continu* in het gesloten interval $[a, b]$ als de functie continu is in alle x van $\langle a, b \rangle$, bovendien *rechts continu* in $x = a$ en *links continu* in $x = b$.

Zo is bijv. de functie f , gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, (fig. 12) continu in het open interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, d.i. $\langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, terwijl de functie f , gedefinieerd door

* In het vervolg zullen we vaak zeggen: „continu in $x = a$ ” i.p.v. het formeel juiste „continu in a ”.

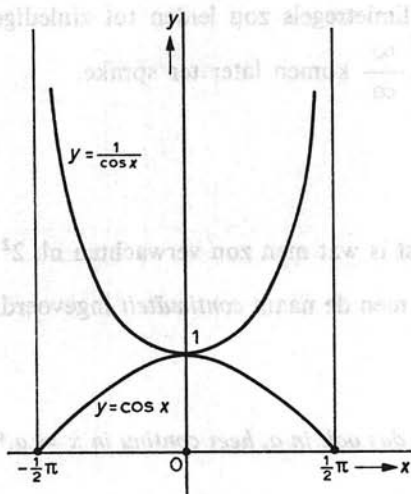


Fig. 12

$f(x) = \cos x$ continu is in het gesloten interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ (zie fig. 12). Het bewijs dat deze functies continu zijn volgt later.

De naam continuïteit berust hierop dat de grafiek van een functie die continu is in een interval $\langle a, b \rangle$, een niet onderbroken kromme is op dat interval.

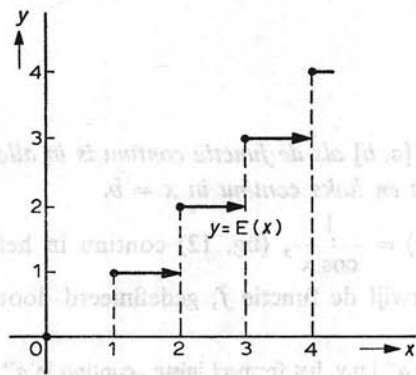
Een functie die niet continu is in $x = a$ noemt men *discontinu* in $x = a$.

Een voorbeeld is de functie van par. 7 voorbeeld 2. Deze is discontinu in $x = -2$.

Een ander voorbeeld is de functie E , gedefinieerd als: $E(x)$ (ook wel genoteerd als $[x]$) is het grootste gehele getal dat kleiner is dan of gelijk aan x (spreek uit: entier x). In het interval $[0, 1)$ is $E(x) = 0$, in het interval $[1, 2)$ is $E(x) = 1$, in het interval $[2, 3)$ is $E(x) = 2$. De functie „maakt een sprong” bij ieder natuurlijk getal (fig. 13). De functie E is dus discontinu in deze punten.

Een uitvoeriger definitie van continuïteit in het interval $[a, b]$ is de volgende.

Fig. 13



Definitie 4

Een functie f , gedefinieerd in het interval $[a, b]$, heet continu in $[a, b]$, indien er bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal δ bestaat, zo dat voor elk tweetal getallen x_1 en $x_2 \in [a, b]$ geldt:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ als } |x_1 - x_2| < \delta$$

Het getal δ is in het algemeen afhankelijk zowel van ε als van x_1 en x_2 .

Bestaat er echter bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal δ , dat *slechts afhankelijk is van ε voor alle x_1 en x_2 van $[a, b]$* , dan noemt men de functie *uniform continu* in $[a, b]$.

Men kan bewijzen dat *een functie die continu is in het gesloten interval $[a, b]$ tevens uniform continu is in dit interval*.

12 Rekenregels voor continue functies. Voorbeelden van continue functies

Uit de rekenregels voor limieten (par. 10) volgen onmiddellijk enige rekenregels voor continue functies.

Zijn de functies f en g continu in $x = a$, dan zijn volgens (10.1)...(10.4) ook continu in a de functies $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ en de functie f/g , de laatste mits $g(a) \neq 0$.

Dat de *identieke* functie f , gedefinieerd door $f(x) = x$, een continue functie in x is voor alle x , is triviaal, indien men de limietdefinitie nagaat, evenals het feit dat f , gedefinieerd door $f(x) = c$ ($c = \text{constant}$), een continue functie is. Het gevolg is dat x^n (n geheel ≥ 0) continu is in alle x (dit volgt uit (10.9)). Verder volgt dat een veelterm in x , meestal een *gehele rationale functie* van x genoemd, in alle x continu is (zie (10.8)).

Tenslotte is de gebroken rationale functie:

$$x \mapsto \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

als quotiënt van twee gehele rationale functies continu, behalve in de nulwaarden van de noemer (zie (10.4)).

13 Eigenschappen van een functie die continu is in een gesloten interval

In deze en de volgende paragraaf bewijzen we enkele belangrijke eigenschappen van continue functies.

Intervalstelling

Wanneer een rij gesloten begrensde intervallen $\{[a_n, b_n] \mid a_n \leq b_n, n \in \mathbb{N}\}$ zo in elkaar geschakeld is dat ieder interval ligt in het voorgaande, dus $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), dan is er minstens één getal G dat tot alle intervallen behoort.

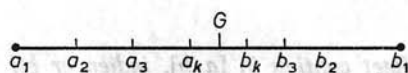


Fig. 14

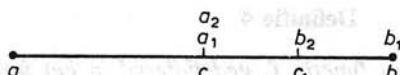


Fig. 15

Bewijs:

In fig. 14 is de ligging van de intervallen aangegeven. De rij $\{a_k\}$ is naar boven begrensd, want elke b_j is een bovengrens; immers als $k \leq j$, dan geldt $a_k \leq a_j$, en dus $a_k \leq a_j \leq b_j$, en als $k \geq j$, dan geldt $b_k \leq b_j$, en dus $a_k \leq b_k \leq b_j$. Volgens de stelling van de kleinste bovengrens (par. 3) heeft de rij $\{a_k\}$ dus een kleinste bovengrens G , waarvoor geldt:

$$a_k \leq G \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

Daar b_k bovengrens is, en G de kleinste bovengrens is, is $G \leq b_k$, zodat:

$$a_k \leq G \leq b_k \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

Stelling

De functiewaardenverzameling van een in een gesloten begrensd interval $[a, b]$ gedefinieerde continue functie f is begrensd.

Bewijs:

We nemen aan dat de functiewaardenverzameling niet begrensd is of, zoals men zegt, dat de functie niet begrensd is, en bewijzen dat dit tot een tegenspraak voert. Verdeel daartoe het interval $[a, b]$ door het midden c in twee gelijke delen (fig. 15). Dan is f op ten minste een der delen niet begrensd. Stel dat dit is $[c, b]$, dan noemen we dit interval $[a_1, b_1]$. Het interval $[a_1, b_1]$ wordt door het midden c_1 in twee gelijke delen verdeeld. Op een der delen, bijv. $[a_1, c_1]$ is de functie niet begrensd; dit deel noemen we $[a_2, b_2]$. Zo doorgaande verkrijgen we een rij ineengeschakelde intervallen $[a_k, b_k]$, waarop f niet begrensd is, en waarbij de lengte van elk interval de helft is van die van het voorgaande.

Volgens de intervalstelling is er een punt G dat tot alle intervallen behoort. Nu is f continu in G , eventueel – als G een randpunt is van $[a, b]$ – links- of rechts continu. Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat dus een $\delta > 0$, zodat:

$$|f(x) - f(G)| < \varepsilon, \text{ als } |x - G| < \delta \text{ en } x \in [a, b] \quad (13.1)$$

Is l de lengte van $[a, b]$, dan is van $[a_k, b_k]$ de lengte $l/2^k$. De lengte van $[a_k, b_k]$ nadert dus met toenemende k tot nul. We kunnen dus k zo groot kiezen dat $l/2^k < \delta$ is. Het interval $[a_k, b_k]$ ligt dan geheel binnen het interval $\langle G - \delta, G + \delta \rangle$. Volgens (13.1) ligt $f(x)$ op $\langle f(G) - \varepsilon, f(G) + \varepsilon \rangle$, dus is f begrensd op $[a_k, b_k]$, terwijl aangenomen is dat op $[a_k, b_k]$ dat binnen $\langle G - \delta, G + \delta \rangle$ ligt, de functie niet begrensd is.

Dit vormt een tegenspraak. Onze onderstelling dat f niet begrensd is, is dus onjuist; de functie is wel begrensd.

Opmerking:

Dat de laatste stelling niet juist is voor een open interval, ziet men eenvoudig aan het voorbeeld van de functie $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ die bijv. continu is in het open interval $\langle 0, 1 \rangle$.

Bij iedere gestelde grens $M > 0$, is voor $x < 1/M$, $f(x) > M$.

Stelling

Een functie die continu is in een gesloten begrensd interval neemt in dit interval zijn supremum en zijn infimum aan en heeft daar dus een maximum en een minimum.

Bewijs:

Stel de op $[a, b]$ gedefinieerde, continue functie f heeft het supremum M , maar neemt M niet aan, dus op het gehele interval $[a, b]$ is $f(x) < M$. De functie g , gedefinieerd door:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

is dan continu in $[a, b]$ (noemer $\neq 0$) en positief, dus heeft g dan volgens de vorige stelling een supremum N . Zeker is dus $g(x) \leq N$. Er geldt dus:

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq N \Rightarrow M - f(x) \geq \frac{1}{N} \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{N}$$

De laatste uitkomst geeft een tegenspraak. Zou nl. $f(x) \leq M - 1/N$ zijn, dan was M niet de „kleinste” bovengrens van f . Onze onderstelling is dus onjuist, de functie neemt op $[a, b]$ de waarde M wel aan.

Dat de functie ook een infimum aanneemt blijkt als volgt. De functie f^* met $f^*(x) = -f(x)$ is continu in $[a, b]$ en neemt dus een supremum M_1 aan. De functie f neemt dus het infimum $-M_1$ aan.

14 Stelling van Weierstrasz. Tussenwaardstelling

Stelling van Weierstrasz (1815–1897)

Is de functie f in het gesloten begrensde interval $[a, b]$ continu, is $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$, dan is er een punt c van het open interval $\langle a, b \rangle$, waarvoor $f(c) = 0$. (Zie fig. 16)

Om deze stelling te bewijzen leiden we eerst een hulpstelling af.

Stelling

Is de functie f continu in $x = c$, en $f(c) > 0$, dan is er een omgeving van c , waar $f(x) > 0$ is.

Bewijs:

Zij $f(c) > 0$ (fig. 16a). Volgens de definitie van continuïteit bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$, een $\delta(\varepsilon)$ zo dat $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ als $|x - c| < \delta(\varepsilon)$. Kies nu voor die ε het getal $f(c)$, (dat kan omdat $f(c) > 0$), dan is er dus een δ_1 , zodanig dat $|f(x) - f(c)| < f(c)$ als $x \in \langle c - \delta_1, c + \delta_1 \rangle$, d.w.z. $f(x)$ ligt dan op het interval $\langle 0, 2f(c) \rangle$. Op het interval $\langle c - \delta_1, c + \delta_1 \rangle$ geldt dus $f(x) > 0$.

Indien $f(c) < 0$ en f continu in $x = c$, geldt evenzo dat er een omgeving van c is, waarop $f(x) < 0$ is.

Analoog bewijst men: als f rechts- (resp. links) continu is in c en $f(c) > 0$, dan is er een rechter (resp. linker) omgeving van c , waar $f(x) > 0$. Vanzelfsprekend kan men in deze laatste zin $f(x) > 0$ vervangen door $f(x) < 0$.

Bewijs van de stelling van Weierstrasz:

Beschouw de verzameling V van de getallen x , waarvoor geldt 1) $x \in [a, b]$, 2) $f(x) < 0$. Deze verzameling is naar boven begrensd, want op V geldt: $x \leq b$. V heeft dus een kleinste bovengrens c . We kunnen aantonen $c \neq a$ en $c \neq b$, dus $c \in \langle a, b \rangle$. Immers als $c = a$, dan zal, omdat $f(a) < 0$, er een rechteromgeving zijn van c , waar geldt $f(x) < 0$, maar dan is c geen bovengrens van V . Verder: als $c = b$, dan zal, omdat $f(b) > 0$ er een linkeromgeving zijn van b , waar geldt: $f(x) > 0$, maar dan is c niet de kleinste bovengrens van V . Derhalve $c \in \langle a, b \rangle$. We tonen nu aan: $f(c) = 0$. Als immers $f(c) < 0$, dan is er een interval $\langle c - \delta, c + \delta \rangle$, waar geldt: $f(x) < 0$; dit houdt in dat ook op $\langle c, c + \delta \rangle$ nog punten liggen van V , maar dat is in tegenspraak met de onderstelling dat c bovengrens is van V . Ook $f(c) > 0$ is uitgesloten, daar er dan een interval $\langle c - \delta, c + \delta \rangle$ is, waar geldt $f(x) > 0$; dit houdt in dat op $\langle c - \delta, c \rangle$ punten liggen die niet tot V behoren, maar dat is in tegenspraak met

Fig. 16

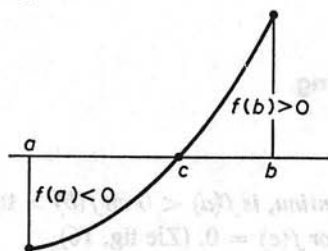
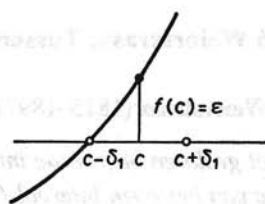


Fig. 16a



de onderstelling dat c de kleinste bovengrens is. Aangezien één van de volgende uitspraken geldt: $f(c) = 0$, $f(c) > 0$ of $f(c) < 0$, moet dus $f(c) = 0$ (zie fig. 16).

Opmerkingen:

- 1 De stelling van Weierstrasz gaat onveranderd door, indien $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$. is. Men hoeft slechts f^* met $f^*(x) = -f(x)$ te beschouwen.
- 2 De eis dat f continu is in het gesloten interval, is noodzakelijk. De stelling geldt nl. niet in een open interval. Zo is bijv. de functie $f: x \mapsto 1/x$ voor $x \neq 0$, $f(0) = -1$, gedefinieerd op het gesloten interval $[0, 1]$, continu in het links open interval $\langle 0, 1]$, terwijl voor geen enkel punt van $\langle 0, 1]$ $f(x) = 0$ is.

Een onmiddellijk gevolg van de stelling van Weierstrasz is de zg. tussenwaardestelling.

Tussenwaardestelling

Is f continu in het gesloten begrensde interval $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $C \in \langle A, B \rangle$, dan is er minstens één punt $c \in \langle a, b \rangle$, waarvoor geldt $f(c) = C$.

Bewijs:

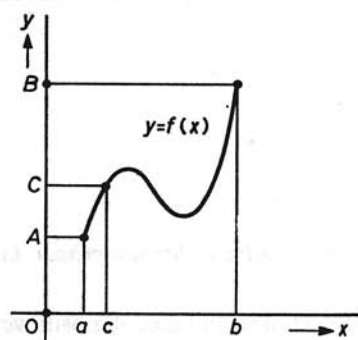
We nemen $B > A$ (fig. 17). De functie φ , gedefinieerd door $\varphi(x) = f(x) - C$, is continu in $[a, b]$, $\varphi(b) = B - C > 0$, $\varphi(a) = A - C < 0$.

Volgens de stelling van Weierstrasz is er dus een $c \in \langle a, b \rangle$, waarvoor $\varphi(c) = 0$. Bijgevolg is $f(c) - C = 0$, d.w.z. $f(c) = C$.

Opmerking:

Indien $B < A$ is, verloopt het bewijs op dezelfde wijze.

Fig. 17



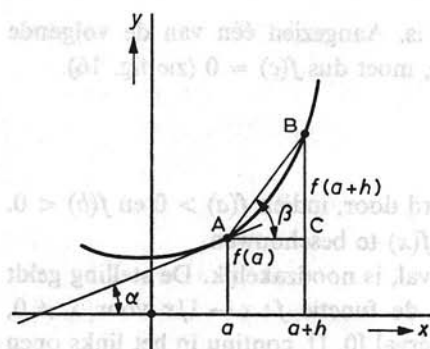


Fig. 18

15 Het differentiaalquotiënt

Om een overzicht van het verloop van een functie f te krijgen maakt men vaak een grafiek op een rechthoekig assenstelsel, door bijbehorende getallenparen $(x, f(x))$ als punten af te zetten. Een nauwkeuriger beeld verkrijgt men door in de gevonden punten ook eventuele raaklijnen te construeren. Een raaklijn is op te vatten als grensgeval van een koorde.

Laat f gedefinieerd zijn in een omgeving van a en laat $a + h$ in die omgeving liggen. Door een punt $A(a, f(a))$ (fig. 18) en een 'naburig' punt $B(a + h, f(a + h))$, waarbij h ook negatief mag zijn, trekt men de koorde AB . De richtingscoëfficiënt van die koorde vindt men uit:

$$\tan \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Neemt men $|h|$ steeds kleiner, dan zal bij de grafiek van vele functies de koorde een limietstand aannemen, waarbij de richting bepaald wordt door:

$$\tan \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \tan \beta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

De limiet, zo deze bestaat, wordt het *differentiaalquotiënt* (DQ) genoemd van de functie f in $x = a$ en bijv. geschreven als $f'(a)$.

Definitie

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Heeft een functie een DQ in $x = a$, dan noemt men de functie *differentieerbaar* in $x = a$.

De hoek α bepaald door $\tan \alpha = f'(a)$ is de hoek die de raaklijn insluit met de positieve

richting van de x -as; wij zullen voor α steeds de hoek nemen gelegen tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$.

Men gebruikt verschillende symboliek voor het aanduiden van het DQ. In plaats van h , de toeneming of *differentie* van x , gebruikt men vaak het symbool Δx (lees: delta x), de toeneming van de functie d.i. $f(a + h) - f(a)$ wordt dienovereenkomstig met Δy aangeduid. Het quotiënt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

noemt men het *differentiequotiënt* van de functie voor $x = a$, behorende bij de aangroeiing $h (= \Delta x)$ van x . De limiet van $\Delta y/\Delta x$ als $\Delta x \rightarrow 0$, het differentiaalquotiënt, wordt ook geschreven als $\frac{dy}{dx}$ (lees: dé y dé x), eventueel met index $x = a$, aldus:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Stelt men $a + h = x$, waaruit volgt $h = x - a$, dan kan men het DQ ook schrijven als:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Is er geen dubbelzinnigheid mogelijk dan schrijft men i.p.v. $\frac{dy}{dx}$ ook y' (lees: y -accent), of Dy , eventueel met index.

De naam differentiaalquotiënt is misleidend. Men zou geneigd zijn het DQ op te willen vatten als quotiënt van twee differentialen, die wij alsnog niet kunnen definiëren. Later (par. 26) komen we hierop terug.

Differentiaalquotiënten komen op ieder gebied van de toegepaste wiskunde voor. Wij noemen slechts de volgende begrippen:

snelheid bij een rechtlijnige beweging: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$;

versnelling bij een rechtlijnige beweging: $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$;

stroom bij een bewegende lading: $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$;

druk in een punt: $p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$;

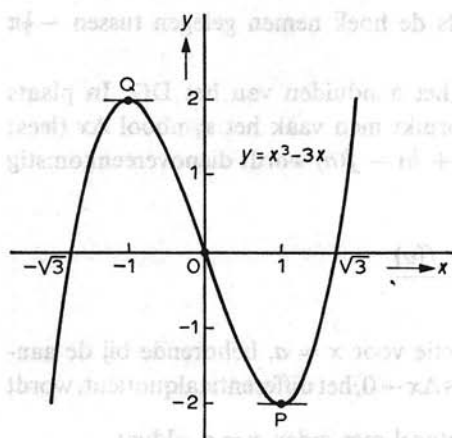


Fig. 19

veldsterkte in een punt: $E = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s}$.

We laten een voorbeeld volgen van het schetsen van een eenvoudige kromme (fig. 19):

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - 3(a+h) - a^3 + 3a}{h}$$

$$= 3a^2 + 3ah + h^2 - 3$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2 - 3)$$

$$= 3a^2 - 3$$

$$= 3(a-1)(a+1)$$

We vinden dus:

$f(0) = 0,$	$f(1) = -2,$	$f(2) = 2,$
$f'(0) = -3,$	$f'(1) = 0,$	$f'(2) = 9,$
$f(3) = 18,$	$f(-1) = 2,$	$f(-2) = -2,$
$f'(3) = 24,$	$f'(-1) = 0,$	$f'(-2) = 9.$

Snijpunten van de grafiek van f met de x -as volgen uit:

$$x^3 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}.$$

In de punten P (1, -2) en Q (-1, 2) heeft de kromme een horizontale raaklijn. In onze figuur zijn P en Q relatief laagste en hoogste punten.

16 Verband tussen continuïteit en differentieerbaarheid. De afgeleide functie. Hogere afgeleiden

Stelling

Is de functie f differentieerbaar in $x = a$, dan is ze continu in $x = a$.

Bewijs:

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (h \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a+h) - f(a)\} &= \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= 0 \cdot f'(a) = 0 \end{aligned}$$

Dus geldt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

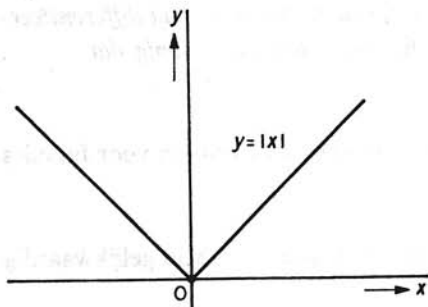
hetgeen de definitie van continuïteit is in $x = a$.

Opmerking:

Het omgekeerde van de stelling is niet juist; het differentieerbaar zijn van een functie is een verdergaande eigenschap dan de continuïteit. Zo is de functie f , gedefinieerd door $f(x) = |x|$ continu in alle x , maar niet differentieerbaar in $x = 0$ (fig. 20). Immers:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$$

Fig. 20



terwijl

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{|x|}{x} = -1$$

Deze limieten zijn niet gelijk, dus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ bestaat niet.

We bezien de definitie van differentieerbaarheid nog eens nader. Laat f een functie zijn, gedefinieerd in een omgeving Ω van a . Volgens par. 15 is f differentieerbaar in $x = a$, indien $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bestaat. We noemden deze limiet $f'(a)$.

Het quotiënt $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ is, bij vaste a , afhankelijk van x (het differentiequotiënt), en is niet gedefinieerd voor $x = a$. We definiëren nu een functie φ op Ω :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \neq a), \quad \varphi(a) = f'(a)$$

en zien dat, indien f differentieerbaar is in $x = a$, de functie φ continu is in $x = a$. De functie φ is, ruwweg gezegd, het „continu gemaakte” differentiequotiënt. We hebben dus:

Als f differentieerbaar is in $x = a$, dan bestaat er een functie φ , continu in $x = a$, zodanig dat:

$$f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$$

Omgekeerd geldt:

Indien er een functie φ bestaat, continu in $x = a$ met de eigenschap dat $f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$, dan is f differentieerbaar in $x = a$ met als afgeleide $\varphi(a)$. Immers dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a).$$

Men kan dus de definitie van differentieerbaarheid ook aldus formuleren:
Een functie f , gedefinieerd in een omgeving Ω van a , is dan en slechts dan differentieerbaar in $x = a$, indien er in Ω een in a continue functie φ bestaat zodanig dat:

$$f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$$

Het voordeel van deze definitie is dat deze gegeneraliseerd kan worden voor functies van meer veranderlijken (zie ook par. 139).

Men kan eenvoudig nagaan dat deze definitie van differentieerbaarheid gelijkwaardig is met de volgende definitie.

Een functie f , gedefinieerd in een omgeving Ω van a , is dan en slechts dan differentieerbaar in $x = a$, indien er een constante A en een van x afhankelijke grootte ε bestaan, zodanig dat in Ω geldt:

$$f(x) - f(a) = (x - a)A + \varepsilon(x - a)$$

waarbij $\varepsilon \rightarrow 0$ indien $x \rightarrow a$.

Het is uit het voorgaande duidelijk dat $A = \varphi(a) = f'(a)$.

Als f differentieerbaar is in ieder punt van een interval Ω , dan kan men in Ω een nieuwe functie f' definiëren door aan $x \in \Omega$ toe te voegen het differentiaalquotiënt van f in x . f' is dus gedefinieerd als

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

waarin:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Men noemt f' de *afgeleide functie* of kortweg *afgeleide*.

Is f' zelf weer differentieerbaar in $x = a$, dan noemt men de limiet:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

de tweede afgeleide van f in $x = a$, en stelt deze voor door $f''(a)$.

Is f tweemaal differentieerbaar in het interval Ω , dan kan men een functie f'' definiëren in Ω :

$$f'' : x \mapsto f''(x)$$

waarin:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Men noemt f'' de *tweede afgeleide functie*, kortweg de *tweede afgeleide*.

Voor $f''(x)$ schrijft men ook wel $\frac{d^2 f}{dx^2}$, of als men schrijft $y = f(x)$: $\frac{d^2 y}{dx^2}$ of y'' .

Zo kan men in het algemeen invoeren de n^{de} afgeleide functie of n^{de} afgeleide

$$f^{(n)} : x \mapsto f^{(n)}(x)$$

waarin:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

indien deze limiet bestaat. Met $f^{(0)}$ wordt dan de functie f zelf bedoeld. Voor $f^{(n)}(x)$ schrijft men ook $\frac{d^n f}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ of $y^{(n)}$.

17 Regels voor het differentiëren

Zijn u en v functies, die op een interval Ω gedefinieerd zijn en in $x \in \Omega$ differentieerbaar zijn, dan bestaan er eenvoudige regels voor het differentiëren van de som, het verschil, het produkt en het quotiënt van deze functies. Ze zijn hieronder in formulevorm vermeld, en wel met twee notaties. Bij de ene notatie wordt het DQ van een

functie f voorgesteld door $\frac{df}{dx}$, bij de andere wordt de afgeleide functie van f aangegeven door Df . Hierin is D de zg. differentiaaloperator.

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad D(u+v) = Du + Dv \qquad (17.1)$$

$$\frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \qquad D(u-v) = Du - Dv \qquad (17.2)$$

$$\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx} \quad (c \text{ constant}) \qquad D(cu) = cDu \qquad (17.3)$$

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = v(x) \frac{du}{dx} + u(x) \frac{dv}{dx} \qquad D(u \cdot v) = vDu + uDv \qquad (17.4)$$

$$\frac{d \frac{u}{v}}{dx} = \frac{v(x) \frac{du}{dx} - u(x) \frac{dv}{dx}}{\{v(x)\}^2}, \quad v(x) \neq 0 \qquad D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vDu - uDv}{v^2} \qquad (17.5)$$

De bewijzen van bovenstaande regels zijn eenvoudig te vinden uitgaande van het differentiequotiënt onder toepassing van de limietregels van par. 10.

Bewijs van (17.1):

Stel $u + v$ voor door f , dan geldt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{u(x+h) + v(x+h) - \{u(x) + v(x)\}}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

Dus:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}
 \end{aligned}$$

zodat:

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Het bewijs van (17.2) verloopt geheel analoog.

Bewijs van (17.3):

Stel cu voor door f , dan geldt:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} \\
 &= c \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h}
 \end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
 &= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}
 \end{aligned}$$

zodat:

$$\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}$$

Bewijs van (17.4):

We stellen $u \cdot v$ voor door f , dan geldt:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
 &= \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
 &= v(x+h) \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}
 \end{aligned}$$

De functie v is differentieerbaar, dus continu in x ; derhalve:

$$\lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) = v(x)$$

zodat:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

Dus:

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = v(x) \cdot \frac{du}{dx} + u(x) \cdot \frac{dv}{dx}$$

Bewijs van (17.5):

We stellen $\frac{u}{v}$ voor door f (daar waar $v(x) \neq 0$). Volgens de stelling over continue functies uit par. 14 bestaat er dan een volle (niet gereduceerde) omgeving Ω van x , waarin v de waarde 0 niet aanneemt. We kiezen nu h zodanig dat $x+h \in \Omega$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)} \right\} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)} \right\} \\ &= \frac{v(x) \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h) \cdot v(x)} \end{aligned}$$

zodat:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{v(x) \frac{du}{dx} - u(x) \frac{dv}{dx}}{\{v(x)\}^2} \end{aligned}$$

waarmede (17.5) is bewezen.

De regels (17.1) en (17.4) zijn door volledige inductie uit te breiden. Zijn $u_1 \dots u_n$ differentieerbare functies van x , dan is:

$$D(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = Du_1 + Du_2 + \dots + Du_n$$

of in verkorte notatie:

$$D \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n Du_k \quad (17.6)$$

Verder is:

$$D(u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_n) = (Du_1)u_2u_3 \dots u_n + u_1(Du_2)u_3 \dots u_n + \\ + u_1u_2D(u_3) \dots u_n + \dots + u_1u_2u_3 \dots (Du_n) \quad (17.7)$$

Onderstelt men dat u_k de waarde nul niet aanneemt ($k = 1 \dots n$), dan is (17.7) in verkorte notatie te schrijven als:

$$\frac{D \prod_{k=1}^n u_k}{\prod_{k=1}^n u_k} = \sum_{k=1}^n \frac{Du_k}{u_k} \quad (\text{regel van Leibniz}) \quad (17.8)$$

Uit (17.7) volgt in het bijzonder als alle functies u_k hetzelfde zijn, dus alle voor te stellen door u :

$$D(u^n) = nu^{n-1}Du \quad (n \text{ geheel } > 0) \quad (17.9)$$

18 Differentiaalquotiënten van rationale functies

Kiezen we als f de constante functie met $f(x) = c$, dan geldt $f(x+h) - f(x) = 0$, dus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0, \text{ dus } f'(x) = 0 \quad \forall x.$$

Is f de identieke functie, dus $f(x) = x$, dan geldt $f(x+h) - f(x) = h$, dus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1. \text{ Dit laatste is meetkundig direct in te zien. De grafiek is}$$

een rechte die met de positieve x -as een hoek $\frac{1}{4}\pi$ insluit, en $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$.

Uit (17.9) volgt voor $u = x$:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad (n \text{ geheel } > 0) \quad (18.1)$$

Met behulp van (18.1) en de regels voor het differentiëren is de afgeleide te berekenen van iedere rationale algebraïsche functie.

Voorbeeld 1Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \\ &= 6x - 2 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \frac{3x - 2}{2x + 3} \quad (x \neq -\frac{3}{2})$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 3) \cdot 3 - (3x - 2) \cdot 2}{(2x + 3)^2} \\ &= \frac{13}{(2x + 3)^2} \end{aligned}$$

Voorbeeld 3Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (n \text{ geheel} > 0)$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{-n-1} \end{aligned}$$

Opmerking:

De uitkomst van voorbeeld 3 laat zien dat (18.1) ook toe te passen is als n geheel maar negatief is.

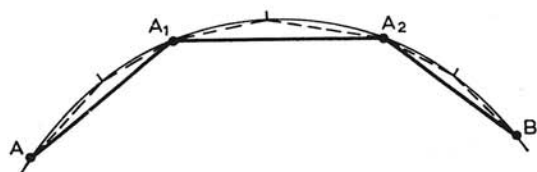


Fig. 21

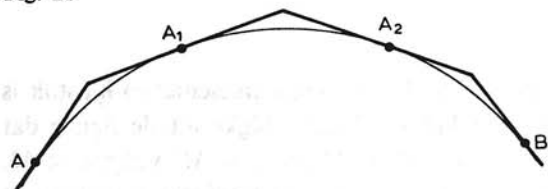


Fig. 22

19 Het begrip booglengte bij een cirkel. Radiaal. Goniometrische functies

Om het begrip booglengte bij een cirkel te definiëren, veronderstellen we het begrip lengte van een recht lijnsegment als bekend. Op de boog AB (fig. 21) van een cirkel nemen we een stel tussenpunten A_1, A_2, \dots, A_n aan. De lengte van het gebroken lijnstuk $AA_1 \dots A_n B$ stellen we L .

Vergroten we het aantal tussenpunten, dan is de lengte L' van het nieuwe lijnstuk *groter* dan L . Dit volgt uit de *driehoeksongelijkheid*: een zijde van een driehoek is kleiner dan de som der beide andere zijden.

We construeren nu een omgeschreven gebroken lijnstuk door in de punten $A, A_1, A_2, \dots, A_n, B$ de raaklijnen te trekken (fig. 22). Stellen we de lengte van dit lijnstuk M , en vergroten we het aantal tussenpunten, dan blijkt uit de driehoeksongelijkheid dat de lengte M' van het nieuwe lijnstuk *kleiner* is dan M . We bewijzen nu de volgende eigenschap.

Eigenschap

De lengte van ieder ingeschreven gebroken lijnstuk is kleiner dan de lengte van een willekeurig omgeschreven gebroken lijnstuk met dezelfde eindpunten.

Bewijs:

In fig. 23 stellen de punten $A, A_1 \dots B$ de hoekpunten voor van een willekeurig ingeschreven lijnstuk, de punten $A, B_1, B_2 \dots B_n, B$ de raakpunten van een of ander omgeschreven lijnstuk. We construeren nu een nieuw ingeschreven lijnstuk door de punten B_1, B_2 enz. als tussenpunten toe te voegen. De lengte L' van het nieuwe lijnstuk is groter dan de lengte L van het oorspronkelijke, wat hierboven bewezen is. We construeren verder een nieuw omgeschreven lijnstuk door de punten A_1, A_2 enz.

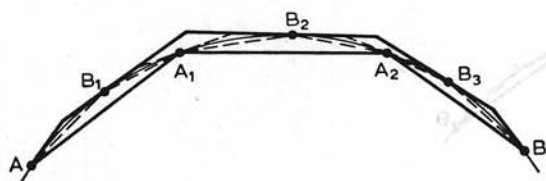


Fig. 23

als raakpunten toe te voegen. De lengte M' van het nieuwe omgeschreven lijnstuk is kleiner dan de lengte M van het oorspronkelijke. Verder blijkt uit de figuur dat $L' < M'$ (driehoeksongelijkheid). Uit $L < L'$, $M' < M$ en $L' < M'$ volgt $L < M$. De ongelijkheid $L < M$ geldt, ongeacht hoe groot men het aantal tussenpunten van het ingeschreven lijnstuk ook neemt.

De getallen die de lengten van de ingeschreven gebroken lijnstukken tussen twee punten voorstellen, vormen een oneindige verzameling $\{L\}$ van getallen met de eigenschap dat ieder getal kleiner is dan of gelijk aan een vast getal M . De verzameling $\{L\}$ is dus begrensd, en M is een bovengrens. Volgens par. 4 bezit dus deze verzameling een kleinste bovengrens.

We definiëren nu als booglengte (s) van de boog AB (fig. 21), de kleinste bovengrens van de verzameling getallen $\{L\}$, die lengten voorstellen van ingeschreven lijnstukken tussen A en B .

$$s = \sup \{L\}$$

Hieruit volgt dat $L \leq s$, hier zelfs $L < s$. Verder is s als kleinste bovengrens kleiner dan elke andere bovengrens, dus $s < M$, zodat:

$$L < s < M$$

Als eenheid van hoek gebruikt men in de „hogere” wiskunde steeds de *radiaal*.

Definitie

Een *radiaal* is de grootte van een hoek die, als middelpuntshoek van een cirkel beschouwd, op een boog staat, waarvan de booglengte gelijk is aan de straal van de cirkel.

Een hoek van 360° bevat dus 2π radialen en $1 \text{ radiaal} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$.

Om een eenvoudige voorstelling van de sinusfunctie, dus $f(x) = \sin x$ (x in radialen) te verkrijgen, nemen we voor de getallenlijn van x een cirkel met straal 1, waarbij we als nulpunt een willekeurig punt O kiezen en als eenheidspunt het punt E zodat OE de booglengte 1 heeft (fig. 24). $\angle EO'O$ is dan juist 1 radiaal. De gehele cirkel-

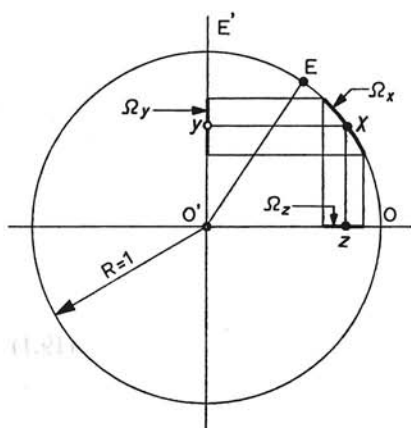


Fig. 24

omtrek komt dan overeen met het interval $[0, 2\pi]$. Als getallenlijn voor de functiewaarden y nemen we de middellijn $O'E'$ evenwijdig aan de raaklijn in O . Als eenheidspunt op de y -rechte kiezen we het snijpunt E' met de cirkel dat aan dezelfde kant van O' ligt als E van O . De projectie van de punten van de cirkel op de middellijn geeft de toevoeging $x \mapsto y (= \sin x)$. Het functiewaardengebied is het interval $[-1, 1]$.

Door middel van deze voorstelling „ziet” men onmiddellijk dat de sinusfunctie continu is in alle x van $[0, 2\pi]$. Uit een omgeving Ω_y van $\sin x$ vindt men immers direct door projectie de bijbehorende omgeving Ω_x van x . In fig. 24 verkrijgt men $z (= \cos x)$ door projectie op de middellijn $O'O \perp O'E'$. De toevoeging van een omgeving Ω_x aan een omgeving Ω_z van $\cos x$ geschiedt als bij de sinus door projectie. Het is duidelijk dat ook de cosinusfunctie continu is in $[0, 2\pi]$.

Daar de sinus- en de cosinusfunctie periodieke functies zijn, $\sin 2\pi = \sin 0$, $\cos 2\pi = \cos 0$, zijn deze functies continu in alle x . Uit deze continuïteit volgt de continuïteit van de functies:

$$x \mapsto \tan x = \sin x / \cos x \quad \{x \neq (n + \frac{1}{2})\pi\}$$

$$x \mapsto \cot x = \cos x / \sin x \quad (x \neq n\pi)$$

Als toepassing van het bovenstaande leiden wij op aanschouwelijke wijze een limiet af, die de grondslag is van de berekening van de afgeleiden der goniometrische functies, nl.:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Afleiding:

Volgens het hierboven behandelde is in fig. 25 de koorde AB kleiner dan de boog AB , en deze laatste is als $kb\theta$ kleiner dan $AC + CB$. Stelt 2α de middelpuntshoek AOB

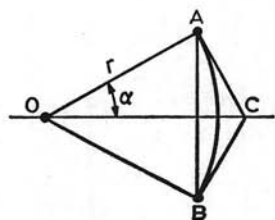


Fig. 25

voor, dan is dus:

$$2r \sin \alpha < 2r\alpha < 2r \tan \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi) \quad (19.1)$$

Na deling door $2r \sin \alpha$ ($\alpha \neq 0$) volgt:

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

of:

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1 \quad (\alpha \neq 0, |\alpha| < \frac{1}{2}\pi) \quad (19.2)$$

De ongelijkheid (19.2) is ook geldig voor $\alpha < 0$, omdat:

$$\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

De cosinusfunctie is continu in $x = 0$, dus is:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha = \cos 0 = 1$$

Hieruit en uit (19.2) volgt onder toepassing van de insluitingsstelling van par. 10:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \quad (19.3)$$

Opmerkingen:

1 Deelt men de beide leden van de ongelijkheid (19.1) door $2r \tan \alpha$, dan volgt:

$$\cos \alpha < \frac{\alpha}{\tan \alpha} < 1$$

of:

$$1 < \frac{\tan \alpha}{\alpha} < \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 0, |\alpha| < \frac{1}{2}\pi) \quad (19.4)$$

Voor $\alpha \rightarrow 0$ volgt uit (19.4) en $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha = 1$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha}{\alpha} = 1 \quad (19.5)$$

We kunnen (19.2) en (19.4) samenvatten tot:

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1 < \frac{\tan \alpha}{\alpha} < \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 0, |\alpha| < \frac{1}{2}\pi) \quad (19.6)$$

2 De limiet (19.3) is niet anders dan $\frac{d \sin x}{dx}$ voor $x = 0$. Is nl. $f(x) = \sin x$, dan is:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Analoog hieraan is (19.5): $\frac{d \tan x}{dx}$ voor $x = 0$.

20 De afgeleiden van goniometrische functies

Is f de sinusfunctie, dus:

$$f(x) = \sin x, \text{ dan is } f'(x) = \cos x \quad (20.1)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= 2 \cos(x + \frac{1}{2}h) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}h}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Is f de cosinusfunctie, dus:

$$f(x) = \cos x, \text{ dan is } f'(x) = -\sin x \quad (20.2)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= -2 \sin(x + \frac{1}{2}h) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}h}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{1}{2}h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

Is f de tangensfunctie, dus:

$$f(x) = \tan x, \text{ dan is } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq (2k+1)\frac{1}{2}\pi) \quad (20.2)$$

Bewijs:

Voor $\cos x \neq 0$, d.i. voor $x \neq (2k+1)\frac{1}{2}\pi$ is:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Toepassing van (15.5) geeft:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Is f de cotangensfunctie, dus:

$$f(x) = \cot x, \text{ dan is } f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi) \quad (20.4)$$

Bewijs:

Voor $\sin x \neq 0$, d.i. voor $x \neq k\pi$ is

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Toepassing van (17.5) geeft:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Opmerking:

De grafiek van de sinusfunctie, dus $f(x) = \sin x$ snijdt de x -as in punten, waarvoor $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$. Voor deze punten is $f'(x) = \cos x = \cos k\pi = (-1)^k$, dus $f'(k\pi) = (-1)^k$.

Omdat $f'(x)$ de tangens is van de hoek die de raaklijn insluit met de positieve richting van de x -as, heeft deze hoek in de snijpunten de grootte $\pm \frac{1}{4}\pi$. Op soortgelijke wijze blijkt dat ook de grafieken van de functies, gedefinieerd door $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ en $f(x) = \cot x$ de x -as snijden onder hoeken van $\frac{1}{4}\pi$ of $-\frac{1}{4}\pi$. Dit geldt slechts bij de keuze van een radiaal als hoekmaat.

21 Limieteigenschappen van samengestelde functies

Laat f een functie zijn, gedefinieerd op een interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, met waardenverzameling Ω , dus:

$$\Omega = \{f(x) \mid x \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$$

Stel g is een functie, gedefinieerd op Ω . We kunnen nu uit f en g een nieuwe functie afleiden, de *samengestelde functie* geheten, *notatie* $g \circ f$, die gedefinieerd is op $\langle \alpha, \beta \rangle$, aldus:

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Voorbeeld 1

De functie $f: x \mapsto 1 + \sin^2 x$ is gedefinieerd op de gehele getallenrechte, met waardenverzameling $[1, 2]$. Op $[1, 2]$ is een functie $g: y \mapsto \sqrt{1 + y^2}$ gedefinieerd. De functie $g \circ f$ is dan op de gehele getallenrechte gedefinieerd door:

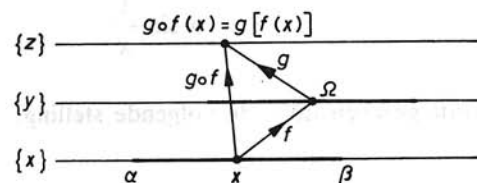
$$g \circ f(x) = \sqrt{1 + (1 + \sin^2 x)^2}$$

In fig. 26 is een en ander anschouwelijk voorgesteld.

We stellen nu het volgende probleem. Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ en $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, zal dan gelden:

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B?$$

Fig. 26



We lichten deze vraag toe met het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2

Als gevraagd wordt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{1 - \frac{\sin x}{x}}$, kan men dan redeneren: stel $\frac{\sin x}{x} = y$,

dus als $x \rightarrow 0$, dan $y \rightarrow 1$, en de gevraagde limiet zal zijn:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{1 - \frac{\sin x}{x}} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1 - y^2}{1 - y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} (1 + y) = 2?\end{aligned}$$

Dat de vraag bij het gestelde probleem niet altijd bevestigend kan worden beantwoord, blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3

Gevraagd wordt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}}$. Volgens de voorgaande redenering stellen we

$x \sin \frac{1}{x} = y$, en merken op: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ en $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, zodat zou gelden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Dat deze redenering onjuist is, ziet men onmiddellijk, daar in iedere omgeving van

$x = 0$ de waarde van $x \sin \frac{1}{x}$ oneindig vaak nul wordt, en dus $\frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}}$ daar niet gedefinieerd is.

Het antwoord op het gestelde probleem wordt gegeven door de volgende stelling.

Stelling 1

Zij f gedefinieerd op een gereduceerde omgeving Ω'_a van a , en zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, terwijl $f(x) \neq A$ voor $x \in \Omega'_a$. Zij verder g gedefinieerd op een gereduceerde omgeving Ω'_A van A , en zij $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$. Dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B \quad (21.1)$$

Bewijs:

Daar $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta_1(\varepsilon)$, zo dat $|g(y) - B| < \varepsilon$ als:

$$0 < |y - A| < \delta_1(\varepsilon) \quad (y \in \Omega'_A)$$

en daar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, bestaat er een $\delta_2(\delta_1)$, zó dat $|f(x) - A| < \delta_1$ als $0 < |x - a| < \delta_2$ ($x \in \Omega'_a$). Wegens $f(x) \neq A$ op Ω'_a geldt niet alleen $|f(x) - A| < \delta_1$, maar zelfs $0 < |f(x) - A| < \delta_1$, en dus bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta_2(\varepsilon)$, zo dat $|g[f(x)] - B| < \varepsilon$ als $0 < |x - a| < \delta_2$, en dit is juist (21.1).

Is g continu in $y = A$, dan geldt $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = g(A)$, en geldt de volgende stelling.

Stelling 2

Zij f gedefinieerd op een gereduceerde omgeving Ω'_a van a , en is $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Zij verder g continu in A , dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g\{\lim_{x \rightarrow a} f(x)\} \quad (21.2)$$

De nevenvoorwaarde dat $f(x) \neq A$ voor $x \in \Omega'_a$ vervalt, daar B aan A is toegevoegd, wegens de continuïteit van f in $y = A$. Neemt nl. g voor $x \neq a$ de waarde A aan, dan wordt toch x door $g \circ f$ afgebeeld op een punt van de omgeving van B , nl. op B zelf.

(21.2) wordt ruwweg aldus uitgedrukt: onder de voorwaarden van stelling 2 geldt: „de limiet van een functie is de functie van de limiet”.

Geldt bovendien nog dat f continu is in $x = a$, dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = g[\lim_{x \rightarrow a} f(x)] = g[f(a)]$$

en dus de volgende stelling.

Stelling 3

Is f continu in $x = a$ met $f(a) = A$, terwijl g continu is in $y = A$, dan is $g \circ f$ continu in $x = a$.

Dit wordt ruwweg aldus uitgedrukt: „een continue functie van een continue functie is continu”.

In voorbeeld 2 is $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(y) = \frac{1 - y^2}{1 - y}$, $a = 0$, $A = 1$, $B = 2$. Verder bestaat er een gereduceerde omgeving van $x = 0$, waar $f(x) \neq 1$, en g is gedefinieerd op een gereduceerde omgeving van 1. Wegens stelling 1 is het in voorbeeld 2 gegeven antwoord juist.

Voorbeeld 4

Bepaal:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)^3$$

Oplissing:

Hier is $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(y) = (1 + y)^3$, $a = 0$, $A = 1$, $B = 8$. g is continu in $y = A = 1$, dus volgens stelling 2 is:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)^3 = \left(1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^3 = (1 + 1)^3 = 8$$

Voorbeeld 5

Bepaal:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^3$$

Oplissing:

Nu is $f(x) = \cos x$, $g(y) = (1 + y)^3$; verder is f continu in $x = 0$, en g continu in $y = A = 1$. Dus volgens stelling 3 is:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^3 = (1 + \cos 0)^3 = 8$$

22 Het differentiëren van een samengestelde functie. Kettingregel

Laten f , g en de samengestelde functie $g \circ f$ gedefinieerd zijn op een interval $\langle a, b \rangle$, dan geldt met betrekking tot de differentieerbaarheid de volgende stelling.

Stelling

Als f differentieerbaar is in $x_0 \in \langle a, b \rangle$ en $f(x_0) = A$, terwijl g differentieerbaar is in A , dan bestaat de afgeleide van de samengestelde functie $g \circ f$ in x_0 , terwijl in x_0 geldt:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

dus:

$$(g \circ f)'(x) = g'\{f(x)\} \cdot f'(x)$$

Deze stelling staat bekend als de *kettingregel*.

Bewijs:

Volgens par. 16 is f differentieerbaar in x_0 , dan en slechts dan, indien er een in x_0 continue functie φ bestaat, zo dat:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot \varphi(x) \quad (22.1)$$

Evenzo is g differentieerbaar in A , dan en slechts dan, als er in A een continue functie ψ bestaat, zo dat:

$$g(y) - g(A) = (y - A) \cdot \psi(y) \quad (22.2)$$

Uit (22.1) en (22.2) volgt, daar f differentieerbaar is in x_0 en g differentieerbaar is in $f(x_0)$:

$$g\{f(x)\} - g\{f(x_0)\} = \{f(x) - f(x_0)\} \cdot \psi\{f(x)\} = (x - x_0) \cdot \varphi(x) \cdot \psi\{f(x)\} \quad (22.3)$$

waarin φ continu is in x_0 en ψ continu is in A . Omdat f continu is in x_0 en $A = f(x_0)$ is volgens par. 21 de functie $\psi \circ f$ continu in x_0 . Het produkt van twee continue functies is weer een continue functie, dus is de functie χ , gedefinieerd door $\chi(x) = \varphi(x) \cdot \psi\{f(x)\}$ continu in x_0 en geldt:

$$\chi(x_0) = \varphi(x_0) \cdot \psi(A) \quad (22.4)$$

Voor (22.3) is dus te schrijven:

$$g\{f(x)\} - g\{f(x_0)\} = (x - x_0) \cdot \chi(x)$$

waarin χ continu is in x_0 . Dit betekent volgens par. 16 dat $g \circ f$ differentieerbaar is in x_0 . Daar verder:

$$\chi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g\{f(x)\} - g\{f(x_0)\}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = (g \circ f)'(x_0)$$

$$\psi(A) = \lim_{y \rightarrow A} \frac{g(y) - g(A)}{y - A} = g'(A)$$

en

$$\varphi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

volgt uit (22.4):

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(A) \cdot f'(x_0) = g'\{f(x_0)\} \cdot f'(x_0)$$

Als dit geldt voor alle $x_0 \in \langle a, b \rangle$, geldt op $\langle a, b \rangle$:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' \quad (22.5)$$

Voorbeeld 1

Bepaal $F'(x)$ als de functie F is gedefinieerd door:

$$F(x) = (x^2 + 1)^3$$

Oplossing:

We vatten nu F op als een samengestelde functie $g \circ f$, waarin f en g gemakkelijk zijn te differentiëren. We stellen daartoe $f(x) = x^2 + 1$ en $g(y) = y^3$. Dan is $f'(x) = 2x$ en $g'(y) = 3y^2$, dus op grond van de kettingregel:

$$F'(x) = g'\{f(x)\} \cdot f'(x)$$

$$= 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x$$

Voorbeeld 2

Bepaal $F'(x)$ als de functie F is gedefinieerd door:

$$F(x) = \sin 2x$$

Oplossing:

We stellen nu $F = g \circ f$ met $f(x) = 2x$ en $g(y) = \sin y$. Dan is:

$$F'(x) = (\cos 2x) \cdot 2$$

$$= 2 \cos 2x$$

Got hetzelfde resultaat komt men ook door $F(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ op te vatten als een produkt:

$$F'(x) = 2 \cos x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot (-\sin x)$$

$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 2 \cos 2x$$

In het bovenstaande is $y = f(x)$. Als we nu ook nog invoeren $z = g(y)$, dan is ook $z = g\{f(x)\} = g \circ f(x)$. Wanneer men bij de notatie geen onderscheid zou maken tussen de functie f en de functiewaarde y , resp. tussen de functie g en de functiewaarde z , dan zou men (22.5) ook kunnen schrijven als:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=A} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$$

Het voordeel van deze schrijfwijze is dat men op deze manier de kettingregel gemakkelijk kan onthouden. Met het hanteren van de regel in deze vorm is echter wel grote oplettendheid geboden. Zo is in $\frac{dz}{dx}$ de „functie” z een geheel andere dan in $\frac{dz}{dy}$.

Bijv. als f gedefinieerd is door $f(x) = x^2 + 1$, en g door $g(y) = \sin y$, dan wordt in $\frac{dz}{dy}$ de „functie” z gedefinieerd als $z(y) = \sin y$, maar in $\frac{dz}{dx}$ is de „functie” z bepaald door $z(x) = \sin(x^2 + 1)$.

De in het begin van deze paragraaf bewezen stelling is uit te breiden tot functies die uit meer dan twee functies zijn samengesteld. Is bijv.:

$$F = h \circ g \circ f$$

d.w.z.:

$$F(x) = h[g\{f(x)\}]$$

dan geldt, als aan de nodige voorwaarden voldaan is:

$$F'(x) = h'[g\{f(x)\}] \cdot g'\{f(x)\} \cdot f'(x)$$

of als we stellen $y = f(x)$, $z = g(y)$ en $u = h(z)$:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dh}{dz} \cdot \frac{dg}{dy} \cdot \frac{df}{dx}$$

of als we – slordig – in de notatie geen onderscheid maken tussen functie en functiewaarde:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Het bewijs wordt geleverd door twee maal de kettingregel toe te passen.

Voorbeeld 3

Bepaal $F'(x)$ als F is gedefinieerd door:

$$F(x) = \tan^3\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \quad \left(x \neq 2, \frac{x+1}{x-2} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$$

Oplossing:

We stellen hierin: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $g(y) = \tan y$ en $h(z) = z^3$. Dus:

$$f'(x) = \frac{(x-2) - (x+1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$h'(z) = 3z^2$$

zodat:

$$F'(x) = 3 \tan^2 \left(\frac{x+1}{x-2} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{x+1}{x-2} \right)} \cdot \frac{-3}{(x-2)^2}$$

23 Linker- en rechterdifferentiaalquotiënt. Differentieerbaarheid in een interval

Bestaat voor de functie f de linkerlimiet:

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dan noemt men deze limiet het *linker differentiaalquotiënt* of de *linker afgeleide in a*. De functie heet dan *links differentieerbaar in a*. Evenzo noemt men de functie *rechts differentieerbaar in a*, indien de *rechter afgeleide*:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

bestaat.

Een functie f heet *differentieerbaar in het open interval $\langle a, b \rangle$* als de functie differentieerbaar is in alle x van $\langle a, b \rangle$.

Een functie f noemt men *differentieerbaar in het gesloten interval $[a, b]$* , als de functie differentieerbaar is in $\langle a, b \rangle$, rechts differentieerbaar is in a , en links differentieerbaar in b .

Voorbeeld

De functie f gedefinieerd door:

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

is differentieerbaar in het interval $\langle -1, 1 \rangle$. Bewijs dit.

Bewijs:

Voor $x \neq 0$ geldt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Uitgaande van de definitie van het differentiequotiënt vinden we voor $x = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} \\ &= x \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Omdat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

volgt

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

De gegeven functie is dus differentieerbaar in $\langle -1, 1 \rangle$.

Opmerking:

De functie f' is niet continu in $x = 0$, want voor $x \rightarrow 0$ heeft $\cos 1/x$ geen limiet. Uit dit voorbeeld blijkt dat een functie die differentieerbaar is, dus zeker continu is, nog geen afgeleide behoeft te bezitten die continu is.

24 Primitieve functies

Definitie

Een primitieve functie F van een functie f is een functie, gedefinieerd door:

$$F'(x) = f(x)$$

Is bijv. f bepaald door $f(x) = \cos x$, dan is de functie F , bepaald door $F(x) = \sin x$, een primitieve functie, want $F'(x) = \cos x$. Eveneens is de functie $F + C$ (C is een willekeurige constante) een primitieve functie, daar $C' = 0$.

Omgekeerd geldt ook dat twee primitieve functies van een gegeven continue functie f slechts een constante kunnen verschillen. Het bewijs van deze bewering volgt later met behulp van de middelwaardstelling (zie par. 59).

Op historische gronden kiest men de notatie $\int f(x)dx$ voor de klasse van alle functies die f tot afgeleide hebben. Als F een primitieve is van f , dan geldt dus:

$$\int f(x)dx = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\} \text{ met } F'(x) = f(x) \quad (24.1)$$

Vaak gebruikt men $\int f(x)dx$ niet om de hele klasse aan te geven, maar ter aanduiding van een of andere *representant* van die klasse, waarbij men in het midden laat welke. Zo zegt men:

$$\int x^2 dx = F \text{ met } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

en laat in het midden welke C men kiest. Zou men echter de klasse bedoelen, dan zou men moeten schrijven:

$$\int x^2 dx = \{F \mid F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C; C \in \mathbb{R}\}$$

Verder zij nog opgemerkt, dat men, als men met $\int x^2 dx$ een representant bedoelt, formeel moet schrijven (daar een primitieve een *functie* is):

$$\int x^2 dx = F \text{ met } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

of:

$$\int x^2 dx: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + C$$

Wij zullen het formaliseren niet zo ver doorvoeren, en schrijven:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$$

al zijn we er ons van bewust dat $\int x^2 dx$ een *functie* is, en $\frac{1}{3}x^3$ een *functiewaarde*. We spreken daarom af, dat we in het vervolg, ter vermindering van verwarring en veel onnodig geschrijf, de *notatie* zullen gebruiken:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

zonder de constante te vermelden; F is hierbij een representant van de klasse weergegeven in (24.1).

Het bepalen van een primitieve functie noemt men *integreren*. Het symbool dx , dat feitelijk overbodig is, geeft aan dat x de zg. *integratieveranderlijke* is. I.p.v. "integreren" zegt men in dit verband ook wel "onbepaald integreren" of "primitiveren".

Van enige eenvoudige functies is hieronder een primitieve vermeld. Ten overvloede zij nogmaals gemeld dat men dus *alle* primitieven van de betrokken functie verkrijgt door bij de genoemde primitieve een willekeurige constante op te tellen. Als de gegeven functie daarbij is voorgesteld door f en de bedoelde primitieve door F , dan geldt:

$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$\int 1 dx = x$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\int \sin x dx = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\int \cos x dx = \sin x$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\cot x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

In feite berust in deze gevallen het bepalen van F daarop dat men zich wel een functie F herinnert, waarvoor geldt $F' = f$. De juistheid van de primitieve volgt door deze te differentiëren.

25 Het invoeren van een nieuwe veranderlijke

Ter berekening van primitieven van functies van samengestelde aard is het vaak gewenst een nieuwe veranderlijke in te voeren. Stelt f een functie voor van x , en is F een primitieve van f , dan is dus:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \tag{25.1}$$

Neem aan dat de variabele x afhangt van een variabele t , en wel aldus: $x = \varphi(t)$, waarbij φ differentieerbaar is in een interval. Dan geldt ook:

$$F(x) = F\{\varphi(t)\} = F \circ \varphi(t)$$

Volgens de kettingregel geldt dan:

$$\frac{dF \circ \varphi}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = f(x) \cdot \frac{d\varphi}{dt} = f \circ \varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \tag{25.2}$$

We hopen nu dat $f \circ \varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ zo eenvoudig is dat we een primitieve daarvan herkennen, waardoor $F \circ \varphi$, en dus ook F bekend wordt.

Voorbeeld 1

Bepaal een primitieve F van f , als:

$$f(x) = (2x + 3)^3$$

Oplossing:

Stel $2x + 3 = t$, dan is $x = \frac{1}{2}(t - 3)$. Dus $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t - 3)$ en $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}$. Daaruit volgt:

$$\frac{dF \circ \varphi}{dt} = (2x + 3)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t^3$$

Hieruit ziet men gemakkelijk $F \circ \varphi(t) = \frac{1}{8}t^4$, dus $F\{\varphi(t)\} = \frac{1}{8}t^4$ en $F(x) = \frac{1}{8}(2x + 3)^4$, en dus geldt:

$$\int (2x + 3)^3 dx = \frac{1}{8}(2x + 3)^4$$

Voorbeeld 2

Bepaal een primitieve F van f , als:

$$f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

Oplossing:

Stel $\sqrt{x} = t$, dus $x = t^2 = \varphi(t)$, en $\frac{d\varphi}{dt} = 2t$. Daaruit volgt:

$$\frac{dF \circ \varphi}{dt} = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot 2t = 2 \cos t$$

Hieruit vinden we $F \circ \varphi(t) = 2 \sin t$ en dus $F(x) = 2 \sin \sqrt{x}$, zodat:

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \sin \sqrt{x}$$

Bij de substitutie $x = \varphi(t)$ gaat f als functie van x over in de functie $f \circ \varphi$ van t , immers $f(x) = f\{\varphi(t)\} = f \circ \varphi(t)$. Stelt men $f \circ \varphi$ voor door f^* en noemt men een primitieve van f (als functie van x) $\text{Pr}_x\{f(x)\}$ en een primitieve van f^* (als functie van t) $\text{Pr}_t\{f^*(t)\}$, dan volgt uit (25.1) en (25.2):

$$\text{Pr}_x\{f(x)\} = \text{Pr}_t\left\{f^*(t) \frac{d\varphi}{dt}\right\}$$

Immers: $\frac{dF}{dx} = f(x)$, dus $F = \text{Pr}_x\{f(x)\}$. Verder geldt:

$$\frac{dF \circ \varphi}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = f(x) \frac{d\varphi}{dt} = f^*(t) \frac{d\varphi}{dt}$$

dus:

$$F\{\varphi(t)\} = \text{Pr}_t \left\{ f^*(t) \frac{d\varphi}{dt} \right\}$$

of:

$$\text{Pr}_x\{f(x)\} = \text{Pr}_t \left\{ f^*(t) \frac{d\varphi}{dt} \right\}$$

26 Differentialen

In par. 16 hebben we gezien dat een functie f differentieerbaar is in x_0 , als

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ bestaat. Deze limiet hebben we $f'(x_0)$ genoemd. Er geldt dus:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon$$

met $\varepsilon \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$, of wel:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \varepsilon h \quad (26.1)$$

Omgekeerd volgt uit par. 16 dat, als er een getal $f'(x_0)$ bestaat, zodanig dat (26.1) geldt met $\varepsilon \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$, f differentieerbaar is in x_0 .

Uit (26.1) ziet men dat bij aangroei van x_0 tot $x_0 + h$ de toename van de functie-waarde gelijk is aan:

$$[\Delta f(x)]_{x=x_0} = f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \varepsilon h$$

met andere woorden dat de aangroei van $f(x)$ in eerste benadering $hf'(x_0)$ is.

Algemeen geldt:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x \quad (26.2)$$

De eerste term in het rechterlid noemt men de *differentiaal* van $f(x)$. Notatie:

$$df(x) = f'(x)\Delta x \quad (26.3)$$

$df(x)$ hangt dus af van twee veranderlijken x en Δx (zie fig. 27).

(26.2) kan in verkorte vorm worden geschreven als $\Delta f = df + \varepsilon\Delta x$.

Past men de definitie (26.3) van de differentiaal toe in het bijzonder op de identieke

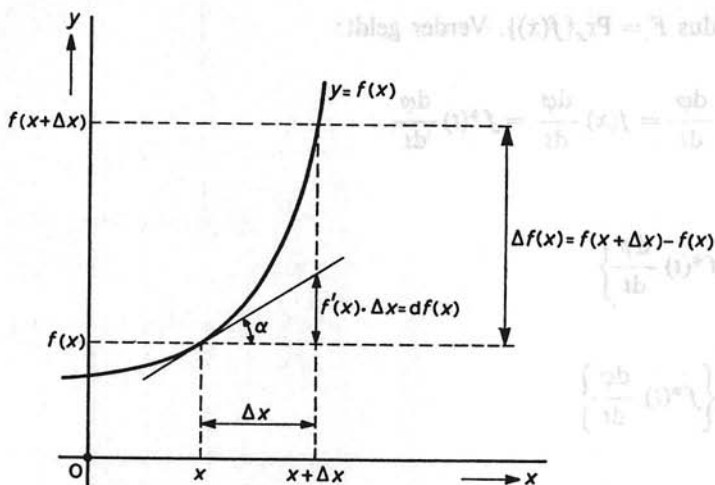


Fig. 27.

functie, dan verkrijgt men:

$$dx = 1 \cdot \Delta x$$

De differentiaal van de identieke functie $x \mapsto x$ is gelijk aan de aangroeiing van de veranderlijke x .

(26.3) kan dus worden geschreven als:

$$df(x) = f'(x) dx$$

Deelt men beide leden door dx , dan verkrijgt men:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

waarin:

$$\frac{df(x)}{dx}$$

niet het vroeger gedefinieerde differentiaalquotiënt voorstelt, maar het quotiënt van differentiaal. Het symbool df/dx heeft dus een dubbele betekenis.

De in par. 17 genoemde regels voor het differentiëren luiden in differentiaalvorm:

$$d(u + v) = du + dv \quad (26.4)$$

$$d(u - v) = du - dv \quad (26.5)$$

$$d(cu) = c du \quad (c \text{ constant}) \quad (26.6)$$

$$d(uv) = v du + u dv \quad (26.7)$$

$$d \frac{u}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (26.8)$$

Is $du = dv$, hetgeen betekent dat de afgeleiden van u en v naar een of andere parameter gelijk zijn, dan zullen u en v slechts een constante verschillen en is dus $u = v + c$.

Is U een primitieve van u , dus $dU = u dx$, V een primitieve van v , dus $dV = v dx$, en F een primitieve van $u + v$, dus $dF = (u + v) dx$, dan is:

$$dF = (u + v) dx = u dx + v dx = dU + dV = d(U + V)$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van (26.4). Voor F geldt dus:

$$F = U + V + C$$

Dit betekent:

Een primitieve van de som van twee functies is de som van primitieven van de functies.

Uit (26.5) volgt op analoge wijze:

Een primitieve van het verschil van twee functies is gelijk aan het verschil van primitieven van de functies.

Uit (26.6) volgt:

Vermenigvuldigt men een functie met een constante, dan wordt een primitieve van die functie met dezelfde constante vermenigvuldigd.

Een gevolg van (26.7) wordt in de volgende paragraaf behandeld.

Enige vaak toegepaste differentiaalformules volgen hier:

$$dx = d(x + C)$$

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) \quad (n \text{ geheel} \neq -1)$$

$$\sin x dx = -d(\cos x + C)$$

$$\cos x dx = d(\sin x + C)$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x + C)$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\cot x + C)$$

We laten thans enige voorbeelden volgen van het toepassen van differentiatie.

Voorbeeld 1

Bepaal $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$, als:

$$f(x) = x \cos x^2$$

Oplossing:

$$dF(x) = x \cos x^2 dx = \cos x^2 \cdot x dx$$

Voor $x dx$ kunnen we schrijven $d(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}dx^2$, en als we $x^2 = t$ stellen en $F(x) = F^*(t)$ volgt:

$$dF(x) = \frac{1}{2} \cos x^2 dx^2$$

dus:

$$dF^*(t) = \frac{1}{2} \cos t dt = \frac{1}{2} d(\sin t)$$

Dus is:

$$F^*(t) = \frac{1}{2} \sin t + C$$

en dus:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

Voorbeeld 2

Gevraagd $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$, als:

$$f(x) = \sin^3 x$$

Oplossing:

$$dF(x) = \sin^3 x dx = \sin^2 x \cdot \sin x dx$$

Nu is $\sin x dx = -d \cos x$, en $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, dus is:

$$dF(x) = \sin^2 x \cdot \sin x dx = -(1 - \cos^2 x) d \cos x$$

$$= (t^2 - 1) dt = t^2 dt - dt = d(\frac{1}{3}t^3) - dt$$

($\cos x = t$ en $F(x) = F^*(t)$).

Dus is:

$$F^*(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + C$$

en dus:

$$F(x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

Voorbeeld 3

Gevraagd $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$, als:

$$f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}dF(x) &= \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \\&= \frac{1}{\cos^2 x} d(\tan x) = (\tan^2 x + 1)d(\tan x) \\&= (t^2 + 1)dt = t^2 dt + dt \\&= d\left(\frac{1}{3}t^3\right) + dt\end{aligned}$$

($\tan x = t$ en $F(x) = F^*(t)$).

Dus is:

$$F^*(t) = \frac{1}{3}t^3 + t + C$$

en dus:

$$F(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C$$

27 Partiële integratie

Uit (17.4) volgt:

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

dus:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

waaruit volgt:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \quad (27.1)$$

of, met differentiaal:

$$\int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int f(x)dg(x)$$

Een primitieve van $f'g$ is dus gelijk aan het produkt fg , verminderd met een primitieve van fg' . In verschillende gevallen is deze laatste eenvoudiger te berekenen dan de eerste. Bij het uitvoeren van de berekening heeft men, daar f' gegeven is, eerst f te

bepalen. Dit vereist een integratie. Omdat men niet ineens de gehele functie $f'g$ integreert, maar slechts het deel (part) f' , noemt men de gevolgde rekenwijze de *methode der partiële integratie*.

Voorbeeld 1

Gevraagd $F(x)$ als:

$$f(x) = x \cos x$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int x d \sin x \\ &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

Dus:

$$F(x) = x \sin x + \cos x + C$$

Voorbeeld 2

Gevraagd $F(x)$ als:

$$f(x) = x^2 \sin x$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= - \int x^2 d \cos x \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x d \sin x \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \end{aligned}$$

Dus:

$$F(x) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

28 Het oppervlaktebegrip

Bij een axiomatische opbouw van de wiskunde, moet het oppervlaktebegrip dat reeds intuïtief aanwezig is, langs axiomatische weg gedefinieerd worden. Hierbij gaan we er van uit dat aan een rechthoek met breedte b en hoogte h per definitie een oppervlakte $b \times h$ wordt toegekend.

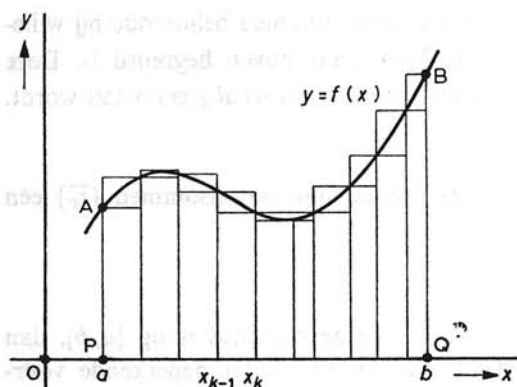


Fig. 28a

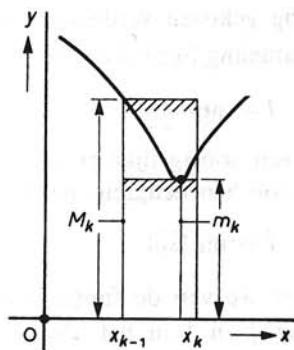


Fig. 28b

We onderstellen f begrensd en niet negatief op het interval $[a, b]$, d.w.z. er bestaat een getal M , zo dat:

$$0 \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

We willen het begrip oppervlakte definiëren van een vlakdeel, begrensd door de grafiek van f , de x -as en de rechten met vergelijking $x = a$, resp. $x = b$ (fig. 28a.)

We verdelen daartoe het interval $[a, b]$ in n delen door tussen $x_0 = a$ en $x_n = b$ willekeurig $(n - 1)$ deelpunten $x_1 \dots x_{n-1}$ aan te nemen. Op het deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ (fig. 28b) heeft f een infimum m_k en een supremum M_k . Het product $m_k(x_k - x_{k-1})$ is per definitie de oppervlakte van een rechthoek die geheel binnen de strook ligt, begrensd door de kromme, de x -as en de rechten met vergelijking $x = x_{k-1}$ en $x = x_k$; de rechthoek met breedte $(x_k - x_{k-1})$ en hoogte M_k omvat deze strook.

De som:

$$\underline{s}_V = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$$

noemt men de *ondersom* bij de gekozen verdeling in n delen van het interval $[a, b]$. Evenzo heet:

$$\overline{s}_V = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$$

de *bovensom* bij de gekozen verdeling V .

Is M een bovengrens van de functie f op $[a, b]$, dan is:

$$\begin{aligned} \underline{s}_V &= \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n M(x_k - x_{k-1}) \\ &= M \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = M(b - a) \end{aligned} \quad (28.1)$$

Uit (28.1) blijkt dat de verzameling $\{s_V\}$ van alle ondersommen behorende bij willekeurig gekozen verdelingen van het interval $[a, b]$ naar boven begrensd is. Deze verzameling heeft dus een kleinste bovengrens, die *onderintegraal* I genoemd wordt.

$$I = \sup \{s_V\}$$

Uit een soortgelijke redenering blijkt dat de verzameling bovensommen $\{\bar{s}_V\}$ een grootste benedengrens heeft, de *bovenintegraal* \bar{I} .

$$\bar{I} = \inf \{\bar{s}_V\}$$

Indien we van de functie slechts onderstellen dat deze begrensd is op $[a, b]$, dan zullen I en \bar{I} in het algemeen verschillend zijn. Slechts onder beperkende voorwaarden, bijv. continuïteit (zie par. 30), is $I = \bar{I}$. De functie heet dan riemann-integreerbaar, kortweg: *integreerbaar op* $[a, b]$. Indien

$$I = \bar{I} = I$$

dan stelt I de *riemann-integraal** van de functie f op het interval $[a, b]$ voor. Per definitie stelt men in dit geval de oppervlakte van de figuur gelijk aan deze integraal, hetgeen bij een constante functie tot het oorspronkelijk oppervlaktebegrip voor een rechthoek terugvoert.

29 Eigenschappen van onderintegraal en bovenintegraal

Het vlakdeel ABQP (fig. 29) is door de loodlijn CR in twee delen verdeeld. We onderstellen f positief, en begrensd op $[a, b]$.

Stelling 1

Is I_1 de onderintegraal over $[a, c]$, I_2 de onderintegraal over $[c, b]$ en I die over $[a, b]$, dan geldt:

$$I_1 + I_2 = I$$

Alvorens deze stelling te bewijzen voeren we enkele definities in, en bewijzen we enkele hulpstellingen.

Definitie

Als V_1 een verdeling van het interval $[a, b]$ is, dan verstaan we onder een *verfijning* V_2 van V_1 een verdeling V_2 van $[a, b]$, die alle deelpunten van V_1 bevat en eventueel nog andere deelpunten heeft (zie fig. 30).

We bewijzen nu de volgende stelling.

* Bernhard Riemann (1826–1866).

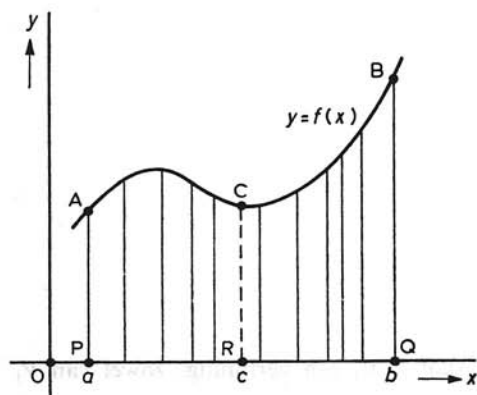
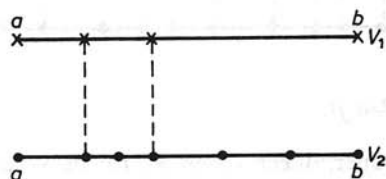


Fig. 29

Fig. 30



Stelling 2

Als V_2 een verfijning is van V_1 , en \underline{s}_{V_1} en \underline{s}_{V_2} de bij V_1 , resp. V_2 behorende ondersommen, dan geldt $\underline{s}_{V_2} \geq \underline{s}_{V_1}$; evenzo geldt voor de bijbehorende bovensommen $\overline{s}_{V_2} \leq \overline{s}_{V_1}$.

We kunnen deze stelling ook formuleren: Bij toenemende verfijning nemen de ondersommen niet af en de bovensommen niet toe.

Bewijs:

Als het deelinterval $[x_k, x_{k+1}]$ bijv. in twee delen verdeeld wordt door een nieuw deelpunt ξ_k , dan geldt voor de infima m'_k en m''_k op elk der deelintervallen $[x_k, \xi_k]$ en $[\xi_k, x_{k+1}]$: $m'_k \geq m_k$ en $m''_k \geq m_k$, als m_k het infimum is op $[x_k, x_{k+1}]$. De bijdrage aan \underline{s}_{V_2} van de twee deelintervallen is dus:

$$m'_k(\xi_k - x_k) + m''_k(x_{k+1} - \xi_k) \geq m_k(x_{k+1} - x_k)$$

Dit geldt (ook bij toevoeging van meerdere deelpunten) voor alle deelintervallen, dus $\underline{s}_{V_2} \geq \underline{s}_{V_1}$. Een analoge redenering geldt voor de bovensommen met als resultaat $\overline{s}_{V_2} \leq \overline{s}_{V_1}$.

Definitie

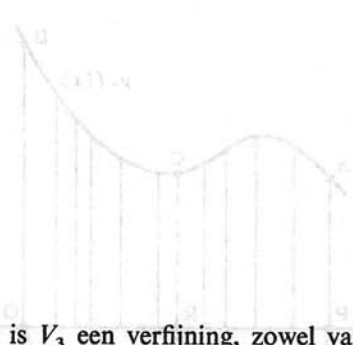
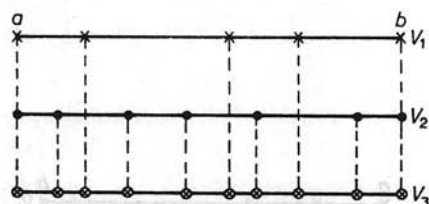
Een verdeling V_3 heet de superpositie van twee verdelingen V_1 en V_2 , als V_3 bestaat uit alle deelpunten van V_1 en V_2 tezamen (zie fig. 31).

Stelling 3

Wanneer V_1 en V_2 willekeurige verdelingen zijn, dan geldt:

$$\underline{s}_{V_1} \leq \overline{s}_{V_2} \quad (29.1)$$

Fig. 31



Bewijs:

Superponeer V_1 en V_2 tot de verdeling V_3 , dan is V_3 een verfijning, zowel van V_1 als van V_2 , dus geldt volgens stelling 2:

$$s_{V_1} \leq s_{V_3} \text{ en } \overline{s_{V_1}} \leq \overline{s_{V_3}} \quad (29.2)$$

en daar bij één verdeling (i.c. V_3) geldt:

$$s_{V_3} \leq \overline{s_{V_3}} \quad (29.3)$$

volgt voor de verdelingen V_1 en V_2 (29.1) uit (29.2) en (29.3).

Stelling 4

Als V een verzameling getallen a_α is en W een verzameling b_β , terwijl $U = V + W$ de verzameling $\{a_i + b_j | a_i \in V, b_j \in W\}$ voorstelt, dan geldt:

$$\sup U = \sup V + \sup W$$

Bewijs:

We stellen $\sup V = A$ en $\sup W = B$. Als $x \in U$, dus $x = a + b$ met $a \in V$, $b \in W$, dan geldt $a \leq A$, $b \leq B$, zodat $x \leq A + B$; dus is $A + B$ een bovengrens van U , waaruit volgt:

$$\sup U \leq A + B$$

Was nu $\sup U < A + B$, bijv.:

$$\sup U = A + B - P \quad (P > 0) \quad (29.4)$$

dan is er een $a' \in V$, zo dat $a' > A - \frac{1}{2}P$, en een $b' \in W$ met $b' > B - \frac{1}{2}P$ (volgt uit de definitie van supremum), maar dan zou er een element van U zijn, nl. $a' + b'$ met $a' + b' > A + B - P$, wat in tegenspraak is met (29.4). Dus moet gelden:

$$\sup U = A + B = \sup V + \sup W$$

Bewijs van stelling 1:

Als \underline{s}_1 een ondersom is over $[a, c]$ en \underline{s}_2 een ondersom over $[c, b]$, dan is $\underline{s}_1 + \underline{s}_2$ een ondersom over $[a, b]$, en dus geldt:

$$\underline{s}_1 + \underline{s}_2 \leq I$$

Als nu V de verzameling is van alle ondersommen van $[a, c]$, en W die van alle ondersommen van $[c, b]$, dan geldt $\underline{s}_1 + \underline{s}_2 \in V + W$. Aangezien voor elke $t \in V + W$ geldt $t \leq I$, is dus I een bovengrens voor $V + W$; maar dan geldt ook voor de kleinste bovengrens $\sup(V + W)$ dat $\sup(V + W) \leq I$. Volgens stelling 4 is $\sup(V + W) = \sup V + \sup W$, en daar $\sup V = \underline{I}_1$, en $\sup W = \underline{I}_2$, geldt:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 \leq I \quad (29.5)$$

We beschouwen nu een verdeling V van $[a, b]$ met bijbehorende ondersom \underline{s} . V zal in het algemeen niet het punt c als deelpunt bevatten. We verfijnen nu V tot V' door het punt c als deelpunt er bij op te nemen. Dan krijgen we een ondersom \underline{s}' , behorende bij die fijnere verdeling en geldt volgens stelling 2 $\underline{s}' \geq \underline{s}$. \underline{s}' is echter ook op te vatten als een ondersom \underline{s}_1 over $[a, c]$, vermeerderd met een ondersom \underline{s}_2 over $[c, b]$, dus geldt:

$$\underline{s} \leq \underline{s}' = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 \leq \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

maar dan geldt ook voor het supremum van alle ondersommen \underline{s} over $[a, b]$, nl. I , dat:

$$I \leq \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad (29.6)$$

Uit (29.5) en (29.6) volgt dan stelling 1.

Opmerking:

Op analoge wijze bewijst men voor de bovenintegralen \bar{I}_1 en \bar{I}_2 over $[a, c]$ en $[c, b]$, dat:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

30 Hoofdstelling van de integraalrekening

We hebben reeds opgemerkt dat de begrensdsheid van een functie f op het interval $[a, b]$ nog niet meebrengt dat $I = \bar{I}$.

We zullen in deze paragraaf aantonen dat zeker $I = \bar{I}$, indien de functie f *continu* en positief is in $[a, b]$. Omdat volgens par. 13 de functie dan zeker begrensd is op $[a, b]$, bestaan de onderintegraal en de bovenintegraal op dit interval.

We nemen $x \in [a, b]$ (fig. 32). De onderintegraal over $[a, x]$ hangt af van x en we zullen die voorstellen door $I(x)$, waarin I de functie is die aan x toevoegt de onderintegraal over $[a, x]$. De onderintegraal over $[a, x + h]$ is dan $I(x + h)$. Volgens

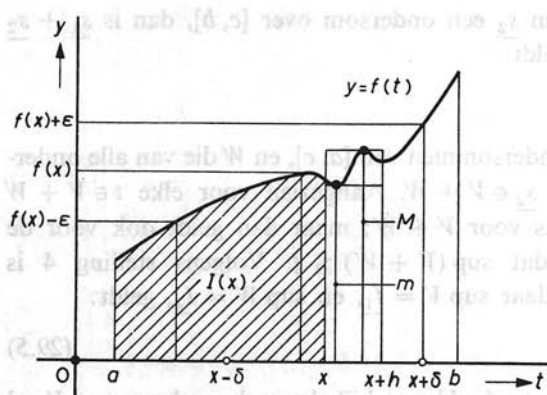


Fig. 32

hetgeen bewezen is in de vorige paragraaf, is $\{I(x+h) - I(x)\}$ de onderintegraal over het interval $[x, x+h]$ als $h > 0$. Omdat f continu is in het gesloten interval $[x, x+h]$ neemt volgens de eigenschap van par. 13 f op dit interval een minimum m en een maximum M aan. Hieruit volgt:

$$mh \leq I(x+h) - I(x) \leq Mh$$

of:

$$m \leq \frac{I(x+h) - I(x)}{h} \leq M \quad (h > 0) \quad (30.1)$$

De ongelijkheid (30.1) is ook geldig als $h < 0$ genomen wordt. Omdat f continu is in $t = x$, bestaat er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$, zodat:

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon, \text{ als } |t - x| = |h| < \delta$$

Op het interval $\langle x - \delta, x + \delta \rangle$ is dus $f(x) - \epsilon < f(t) < f(x) + \epsilon$, en is dus ook:

$$f(x) - \epsilon < m \leq M < f(x) + \epsilon \quad (30.2)$$

Uit (30.1) en (30.2) samen volgt:

$$f(x) - \epsilon < \frac{I(x+h) - I(x)}{h} < f(x) + \epsilon, \text{ als } 0 < |h| < \delta \quad (30.3)$$

Volgens de limietdefinitie en de definitie van afgeleide betekent (30.3) hetzelfde als:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = I'(x) = f(x) \quad (30.4)$$

De betekenis van (30.4) is dat I een primitieve is van f . *Elke continue functie heeft dus een primitieve.*

Op overeenkomstige wijze als hierboven kunnen we voor de bovenintegraal $\bar{I}(x)$ op $[a, x]$ afleiden dat $\bar{I}'(x) = f(x)$. Dus is ook \bar{I} een primitieve van f . Omdat twee

primitieve functies slechts een constante verschillen (zie ook par. 59, Gevolg 4), is:

$$\bar{I}(x) - I(x) = C \text{ op } [a, b]$$

Voor $x = a$ is zowel $\bar{I}(a)$ als $I(a)$ gelijk aan nul, zodat $C = 0$ en

$$I(x) = \bar{I}(x)$$

voor iedere x van $[a, b]$.

Voor de onderintegraal $I(b)$ en de bovenintegraal $\bar{I}(b)$ over $[a, b]$ geldt dus:

$$I(b) = \bar{I}(b) = I$$

d.w.z. een functie die continu is in een gesloten interval is integreerbaar over dat interval.

De integraal van f over het interval $[a, b]$ wordt voorgesteld door:

$$I = \int_a^b f(t) dt \quad (30.5)$$

Men duidt in dit verband $f(t)$ als *integrand* aan, terwijl a de *benedengrens* en b de *bovengrens* van de integraal worden genoemd.

Ook hier geeft het symbool dt aan dat t de *integratieveranderlijke* is. Bij veranderlijke bovengrens x noemt men

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (30.6)$$

de *onbepaalde* integraal van f . Het is duidelijk dat deze onbepaalde integraal een primitieve is van f , immers volgens (30.4) is $I'(x) = f(x)$. Bij vaste grenzen a en b noemt men (30.5) de *bepaalde* integraal.

De eigenschap dat $I'(x) = f(x)$ noemt men de *hoofdstelling van de integraalrekening*. In woorden:

De afgeleide van een onbepaalde integraal met continue integrand naar de bovengrens is gelijk aan de integrand als functie van de bovengrens.

Elke onbepaalde integraal is dus een primitieve. Twee primitieven van eenzelfde functie verschillen slechts in een additieve constante, dus voor elke primitieve F van f geldt:

$$F(x) = C + I(x)$$

We kunnen de hoofdstelling van de integraalrekening gebruiken om de bepaalde integraal van een continue functie f over het interval $[a, b]$ te berekenen, als we een primitieve van f kennen. Volgens deze stelling geldt als $x \in [a, b]$ en $I(x) = \int_a^x f(t) dt$,

dan $\frac{dI(x)}{dx} = f(x)$. Als F nu een primitieve van f is, dan geldt voor $x \in [a, b]$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ en dus: } \frac{dI(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx}$$

zodat

$$I(x) - F(x) = K \quad (\forall x \in [a, b])$$

Kiezen we $x = a$, dan geldt $I(a) - F(a) = K$, of, daar $I(a) = 0$, $K = -F(a)$. Ten slotte is voor $x = b$:

$$I(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + K = F(b) - F(a)$$

$F(b) - F(a)$ is de toeneming van een primitieve tussen de grenzen a en b , hetgeen men ook voorstelt door $[F(t)]_a^b$. Resultaat:

$$I = \int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Voorbeeld

Gevraagd:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt$$

Oplossing:

De sinusfunctie is een primitieve van de cosinusfunctie, zodat:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = \sin t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1 - (-1) = 2$$

31 Bepaalde integraal en oppervlakte

Bij de beschouwingen van par. 28...par. 30 hebben we ondersteld dat $f(t) > 0$ is op het interval $[a, b]$. De gegeven afleidingen gaan echter onveranderd door, indien $f(t)$ op $[a, b]$ eventueel van teken wisselt. We noemen ook in dit geval voor een continue functie:

$$I = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

een bepaalde integraal, en definiëren algemeen als bepaalde integraal van $f(t)$ op $[a, b]$ de *toeneming van een primitieve tussen de benedengrens a en de bovengrens b* . Hierbij kan bovendien de onderstelling $a < b$ vervallen. Echter kan men nu niet meer zeggen dat een bepaalde integraal een oppervlakte voorstelt.

Opmerking:

Tenzij uitdrukkelijk anders is vermeld, veronderstellen we in het vervolg dat bij bepaalde integralen de integrand continu is in het integratie-interval.

Eigenschappen:

$$a \quad \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx \quad (31.1)$$

Bewijs:

Is F een primitieve van f , en G een primitieve van g , dan is:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx &= F(b) - F(a) \pm \{G(b) - G(a)\} \\ &= F(b) \pm G(b) - \{F(a) \pm G(a)\}\end{aligned}$$

Aangezien $F \pm G$ een primitieve is van $f \pm g$ is dus:

$$F(b) \pm G(b) - \{F(a) \pm G(a)\} = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx$$

Op soortgelijke wijze bewijst men:

$$b \quad \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (c \text{ constant}) \quad (31.2)$$

Men kan (31.1) en (31.2) aldus samenvatten:

$$\int_a^b \{\lambda f(x) + \mu g(x)\} dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad (31.2a)$$

$$c \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (31.3)$$

Door verwisseling van de grenzen verandert het teken van de integraal.

Bewijs:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = - \{F(a) - F(b)\} = - \int_b^a f(x) dx$$

$$d \quad \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (31.4)$$

Een bepaalde integraal is te splitsen door het tussenschakelen van grenzen.

Bewijs:

Deze eigenschap volgt onmiddellijk uit de beschouwing in par. 29.

Is $b > a$, $f(x) \geq 0$ en f integreerbaar op $[a, b]$, dan volgt uit par. 28 e.v. dat:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Is $b > a$, f en g integreerbaar op $[a, b]$ en is $g(x) \geq f(x)$, dan is dus volgens (31.1):

$$0 \leq \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

waaruit volgt:

$$e \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (f(x) \leq g(x), a < b) \quad (31.5)$$

Is m een ondergrens en M een bovengrens van f in $[a, b]$, $a < b$, dus $m \leq f(x) \leq M$, dan volgt uit (31.5):

$$f \quad m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \quad (31.6)$$

$$g \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (31.7)$$

Bewijs:

Voor elke functie f en alle waarden van het domein geldt:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Hieruit en uit (31.5) volgt:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

en dus (31.7).

Als f continu is in $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$, zo dat:

$$h \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi) \quad (31.8)$$

Bewijs:

Volgens een stelling uit par. 13 bezit f op $[a, b]$ een maximum M en een minimum m ; dus geldt $\forall x \in [a, b]$:

$$m \leq f(x) \leq M$$

en dus op grond van (31.6):

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

zodat:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Volgens de tussenwaardstelling (par. 14) is er dan een $\xi \in [a, b]$, zodat:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

waaruit (31.8) volgt (zie ook fig. 33).

De bewering (31.8) wordt ook wel de *eerste middelwaardstelling van de integraalrekening* genoemd.

Deze kan op drie manieren worden generaliseerd en wel als volgt (h.1 h.2 h.3).

h.1 Indien f continu is op $[a, b]$ en g positief en continu is op $[a, b]$, dan bestaat er een $\xi \in [a, b]$ zodat:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (31.9)$$

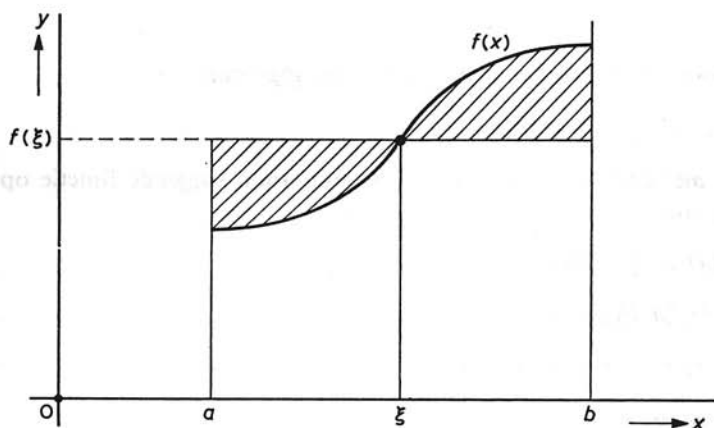


Fig. 33

Bewijs:

Volgens de bovengenoemde stelling uit par. 13 bezit f op $[a, b]$ een maximum M en een minimum m , zodat voor alle $x \in [a, b]$ geldt:

$$m \leq f(x) \leq M$$

Aangezien g positief en continu is op $[a, b]$ volgt:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

dus:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

Er bestaat dus volgens de tussenwaardstelling een $\xi \in [a, b]$ zodat

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

en dus volgt (31.9).

Opmerkingen:

- 1 Indien g negatief en continu is op $[a, b]$ geldt de stelling ook. Ga dit na.
- 2 Neemt men $g(x) \equiv 1$ op $[a, b]$, dan volgt (31.8).

h.2 Indien f bovendien monotoon dalend is, dan bestaat er een $\xi \in [a, b]$ zodat

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx \tag{31.10}$$

Dit resultaat staat bekend als de *stelling van Bonnet* (1819–1892).

Bewijs:

Aangezien f monotoon dalend is, volgt met de overige gegevens:

$$0 \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(a) \int_a^b g(x)dx$$

Nu is de functie G met $G(t) = f(a) \int_a^t g(x)dx$ een monotoon stijgende functie op $[a, b]$ met $G(a) = 0$, dus:

$$G(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq G(b)$$

Er bestaat dus een $\xi \in [a, b]$ zodat

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = G(\xi) = f(a) \int_a^\xi g(x)dx$$

waarmee (31.10) bewezen is.

Op analoge wijze volgt:

Indien f monotoon stijgend is, en de overige onderstellingen van a gelden, dan bestaat er een $\xi \in [a, b]$ zodat

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_\xi^b g(x)dx$$

h.3 Tenslotte vermelden we nog een resultaat dat bekend staat als de tweede middelwaardstelling van de integraalrekening.

Indien op $[a, b]$ g continu is en f ofwel monotoon dalend, ofwel monotoon stijgend met continue eerste afgeleide, dan bestaat er een $\xi \in [a, b]$, zodat

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx \quad (31.11)$$

Bewijs:

Laat de functie G gedefinieerd zijn $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, en dus $G'(x) = g(x)$, dan geldt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)G(x)|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)dx$$

Nu is f monotoon op $[a, b]$, dus $f'(x)$ houdt zijn teken op $[a, b]$. Volgens h.1 bestaat er een $\xi \in [a, b]$ zodat:

$$\int_a^b G(x)f'(x)dx = G(\xi) \int_a^b f'(x)dx$$

en dus:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)G(b) - f(a)G(a) - G(\xi) \int_a^b f'(x)dx \\ &= f(b)G(b) - f(a)G(a) - G(\xi)f(b) + G(\xi)f(a) \\ &= f(a)\{G(\xi) - G(a)\} + f(b)\{G(b) - G(\xi)\} \end{aligned}$$

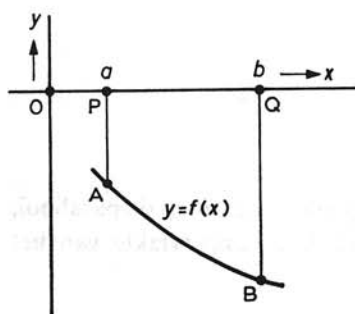


Fig. 34a

$$= f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx$$

waarmee (31.11) bewezen is.

De betrekking die tussen integraal en oppervlakte bestaat, lichten we toe met een figuur. In fig. 34a is $a < b$ en $f(x) < 0$. Nu is:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b \{-f(x)\} dx$$

Bij de integraal $\int_a^b \{-f(x)\} dx$ is $-f(x) > 0$ en $b > a$. Dit stelt dus de oppervlakte A voor van de figuur die uit ABQP door spiegeling t.o.v. de x -as verkregen wordt, dus ook de oppervlakte van ABQP zelf. Dus is in dit geval:

$$\int_a^b f(x) dx = -A$$

Is $f(x) > 0$ en $a > b$ (fig. 34b), dan is:

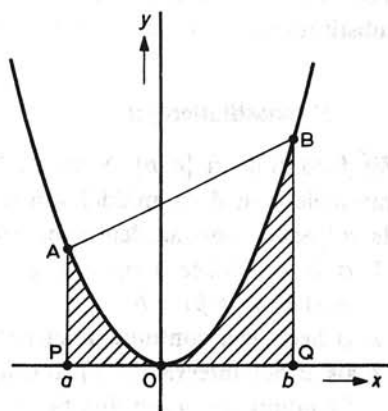
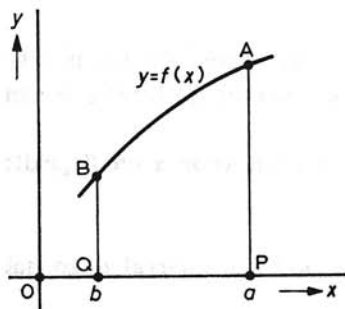
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Omdat $\int_b^a f(x) dx$ de oppervlakte voorstelt van BAPQ is $\int_a^b f(x) dx$ het tegengesteld daarvan.

Is tenslotte $f(x) < 0$ en $a > b$, dan volgt uit

Fig. 34b

Fig. 35



$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = \int_b^a \{-f(x)\} dx$
 dat $\int_a^b f(x) dx$ weer een oppervlakte voorstelt.

Voorbeeld van berekening

Gegeven is de parabool met vergelijking $y = cx^2$ en de punten A en B op de parabool, waarvan de abscissen resp. a en b zijn. Gevraagd wordt de oppervlakte van het segment dat AB van de parabool afsnijdt (fig. 35).

Oplossing:

Het segment is het verschil van de oppervlakte van het trapezium ABQP en van het vlakdeel tussen de parabool en de as. Voor het trapezium geldt:

$$A_1 = \frac{1}{2}PQ(AP + BQ) = \frac{1}{2}(b - a)(ca^2 + cb^2) \\ = \frac{1}{2}c(b - a)(b^2 + a^2)$$

Van het gebied tussen parabool en as is:

$$A_2 = \int_a^b cx^2 dx = \left[\frac{1}{3}cx^3\right]_a^b = \frac{1}{3}c(b^3 - a^3)$$

De gevraagde oppervlakte is:

$$O = A_1 - A_2 \\ = \frac{1}{2}c(b - a)(b^2 + a^2) - \frac{1}{3}c(b - a)(b^2 + ab + a^2) \\ = \frac{1}{6}c(b - a)(b^2 - 2ab + a^2) \\ = \frac{1}{6}c(b - a)^3$$

32 Bepaalde integraal en primitieve

Voor het berekenen van bepaalde integralen kan men weer gebruik maken van de substitutieregels en van de methode der partiële integratie.

De substitutieregels

Zij f continu in $[a, b]$. Voor de berekening van $\int_a^b f(x) dx$ voeren we een nieuwe variabele u in door middel van de substitutie $x = \varphi(u)$, waarbij de functie φ aan de volgende voorwaarden moet voldoen:

- φ is gedefinieerd op een gesloten interval $[\alpha, \beta]$, waarin voor α en β geldt:
 $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
- φ heeft een continue afgeleide in $[\alpha, \beta]$;
- als u het interval $[\alpha, \beta]$ doorloopt, dan doorloopt $\varphi(u)$ een interval I , zo dat f continu is in I , en dus $f \circ \varphi$ continu is in $[\alpha, \beta]$.

De grafiek van φ kan bijv. de gedaante hebben als in fig. 36a of 36b is weergegeven. Als F een primitieve is van f , dan geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F\{\varphi(\beta)\} - F\{\varphi(\alpha)\} = G(\beta) - G(\alpha)$$

waarin $G(u) = F\{\varphi(u)\}$, dus:

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{dG(u)}{du} du = \int_\alpha^\beta F'\{\varphi(u)\} \frac{d\varphi}{du} du$$

Hierin is $F'(x)$ de afgeleide van $F(x)$ naar x , dus $F'(x) = f(x)$, zodat we hebben:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f\{\varphi(u)\} \frac{d\varphi}{du} du \quad (32.1)$$

Deze integraal bestaat, daar $f \circ \varphi$ als continue functie van een continue functie weer continu is, en bovendien φ' volgens aanname continu is.

We hopen nu dat de integraal in het rechterlid van (32.1) gemakkelijker te berekenen is dan die in het linkerlid.

Voorbeeld 1

Bereken:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Oplossing:

Kies voor φ in de substitutie $x = \varphi(u)$ de tangensfunctie, dus $\tan u = x$. Nu zijn de grenzen voor x resp. 0 en 1, dus als grenzen voor u kunnen we kiezen resp. 0 en

Fig. 36a

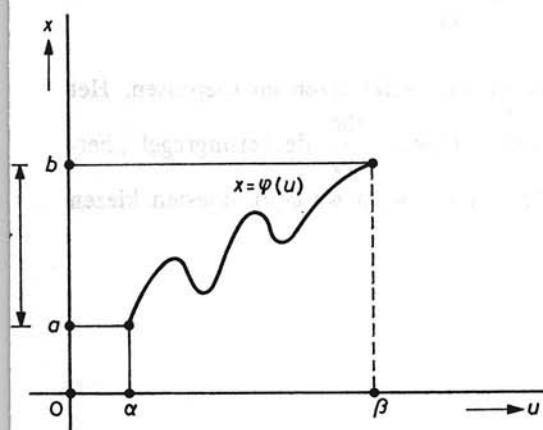
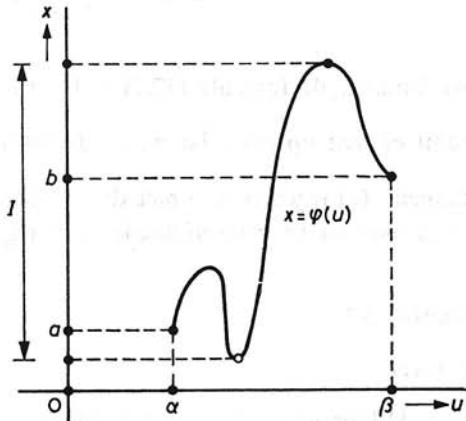


Fig. 36b



$\frac{1}{4}\pi$; $\varphi(u)$ voldoet in $[0, \frac{1}{4}\pi]$ aan de gestelde eisen. De berekening verloopt nu als volgt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos^2 u du \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1+\cos 2u}{2} du \\ &= \frac{1}{2} [u + \frac{1}{2} \sin 2u]_0^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\int_0^1 x^3(1-x)^{16} dx$$

Oplossing:

Het is niet de aangewezen weg om $(1-x)^{16}$ te ontwikkelen door het vele cijferwerk dat daaraan verbonden is. Daarom substitueren we $x = u + 1$. De grenzen voor x zijn 0 en 1, dus als grenzen voor u kiezen we -1 en 0. $\varphi(u) = u + 1$ voldoet op $[-1, 0]$ aan de gestelde voorwaarden.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3(1-x)^{16} dx &= \int_{-1}^0 (u+1)^3(-u)^{16} du \\ &= \int_{-1}^0 \{u^{19} + 3u^{18} + 3u^{17} + u^{16}\} du \\ &= \left[\frac{u^{20}}{20} + 3 \cdot \frac{u^{19}}{19} + 3 \cdot \frac{u^{18}}{18} + \frac{u^{17}}{17} \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{1}{20} + \frac{3}{19} - \frac{3}{18} + \frac{1}{17} \end{aligned}$$

We kunnen de formule (32.1) ook van rechts naar links lezen en toepassen. Het komt er dan op neer dat we in de uitdrukking $f\{\varphi(u)\} \frac{d\varphi}{du}$ de kettingregel „herkennen” (in tegenstelling met de voorbeelden 1 en 2, waar we $\varphi(u)$ moesten kiezen op grond van ervaring of goede ingeving).

Voorbeeld 3

Bereken:

$$\int_0^1 \{\cos(u^3 + u^2)\}(3u^2 + 2u) du$$

Oplossing:

We herkennen hier zonder moeite $\varphi(u) = u^3 + u^2$, daar juist $3u^2 + 2u = \frac{d\varphi}{du}$. We stellen dus: $u^3 + u^2 = x$. Nu loopt x van 0 tot 2 en dus:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{\cos(u^3 + u^2)\}(3u^2 + 2u) du &= \int_0^2 \cos x dx \\ &= [\sin x]_0^2 \\ &= \sin 2\end{aligned}$$

Regel voor partiële integratie

In par. 17 leidden we af, in de onderstelling dat f en g differentieerbaar zijn:

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Als nu f' en g' continu zijn in $[a, b]$, geldt dus:

$$\int_a^b \{f(x)g(x)\}' dx = \int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx$$

zodat:

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

en dus:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx \quad (32.2)$$

De formule (32.2) staat bekend als de regel voor partiële integratie. We hopen weer dat de integraal $\int_a^b g(x)f'(x) dx$ eenvoudiger te berekenen is dan $\int_a^b f(x)g'(x) dx$.

Voorbeeld 4

Bereken:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cos x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cos x dx &= [x \sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x dx \\ &= [x \sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + [\cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} \\ &= \frac{1}{2}\pi - 1\end{aligned}$$

33 Numerieke integratie. Rechthoeksregels

In vele gevallen kan men de bepaalde integraal $\int_a^b f(x) dx$ niet berekenen met behulp van de hoofdstelling van de integraalrekening, daar men geen primitieve kent van f .

Vaak kent men slechts de waarden van f in discrete punten. Men kan dan de waarde van $\int_a^b f(x) dx$ benaderen met z.g. *Riemansommen*, en wel op de volgende wijze. Zij I de gemeenschappelijke waarde van de onderintegraal en de bovenintegraal I van f over $[a, b]$, dus zowel het supremum van de ondersommen als het infimum van de bovensommen van f over $[a, b]$. Zij nu $\varepsilon > 0$, dan is er een verdeling V_1 , zó dat:

$$I \leq \overline{s_{V_1}} < I + \frac{1}{2}\varepsilon \quad (33.1)$$

waarin $\overline{s_{V_1}}$ de bij V_1 behorende bovensom is. Ook is er een verdeling V_2 met ondersom $\underline{s_{V_2}}$, zó dat:

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{s_{V_2}} \leq I \quad (33.2)$$

Wanneer men nu V_1 en V_2 superponeert tot de verdeling V , dan geldt:

$$\begin{cases} I \leq \overline{s_V} \leq \overline{s_{V_1}} \\ \underline{s_{V_2}} \leq \underline{s_V} \leq I \end{cases} \quad (33.3)$$

daar bij verfijning de ondersommen niet dalen, en de bovensommen niet stijgen. Op grond van (33.1) en (33.3) geldt dan ook:

$$I \leq \overline{s_V} < I + \frac{1}{2}\varepsilon \quad (33.4)$$

en op grond van (33.2) en (33.3):

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{s_V} \leq I \quad (33.5)$$

Uit (33.4) en (33.5) volgt:

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{s_V} \leq I \leq \overline{s_V} < I + \frac{1}{2}\varepsilon$$

waaruit:

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{s_V} \leq \overline{s_V} < I + \frac{1}{2}\varepsilon$$

en dus zeker:

$$0 \leq \overline{s_V} - \underline{s_V} < \varepsilon \quad (33.6)$$

Men kan dus door de verdeling fijn genoeg te nemen I willekeurig dicht benaderen, zowel met ondersommen als met bovensommen.

Zij nu weer $[a, b]$ verdeeld in n intervallen door de niet noodzakelijk equidistante deelpunten $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$. Noem deze verdeling V . Neem nu in ieder deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) een *willekeurig* punt ξ_k . Als nu weer m_k en M_k het minimum, resp. het maximum zijn van $f(x)$ op $[x_{k-1}, x_k]$, dan geldt:

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$$

Men vormt nu de som (Riemansom):

$$R = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Deze som hangt niet alleen af van de gekozen verdeling V , maar ook van de keuze van de punten ξ_k (de zg. strooiing σ). Dit drukken we uit door de notatie $\underline{s}_{V,\sigma}$ voor deze som.

Nu geldt:

$$\underline{s}_{V,\sigma} = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq R = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = \bar{s}_{V,\sigma}$$

Hieruit volgt

$$\underline{s}_{V,\sigma} \leq R \leq \bar{s}_{V,\sigma}$$

Daar ook geldt:

$$\underline{s}_{V,\sigma} \leq I \leq \bar{s}_{V,\sigma}$$

vinden we

$$|I - R| \leq \bar{s}_{V,\sigma} - \underline{s}_{V,\sigma}$$

Door V fijn genoeg te kiezen, kan men in verband met (33.6) bereiken dat:

$$|I - R| < \varepsilon$$

ofwel:

$$|I - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0, \text{ willekeurig}) \quad (33.7)$$

We zien dus dat de integraal $I = \int_a^b f(x) dx$ willekeurig dicht te benaderen is door middel van de Riemansommen.

Men schrijft dit als:

$$I \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

In de regel verdeelt men daarbij $[a, b]$ in n gelijke intervallen $[x_{k-1}, x_k]$, zodat

$$x_k - x_{k-1} = h = \frac{b-a}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Neemt men voor ξ_k of telkens het linkeruiteinde x_{k-1} , of het rechteruiteinde x_k van $[x_{k-1}, x_k]$, dan verkrijgt men de benaderingen, die bekend staan als de *rechthoeksregels*.

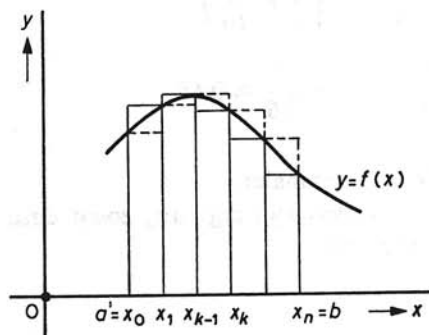


Fig. 37

$$I \approx R_l = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})h = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

$$I \approx R_r = \sum_{k=1}^n f(x_k)h = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

waarbij $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

In fig. 37 stelt R_l de som voor van de oppervlakken van de gestippelde rechthoeken, R_r die van de getrokken rechthoeken.

Voorbeeld

Bereken:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

met behulp van de rechthoeksregels, en gebruik van 9 deelpunten.

Oplossing:

$h = \frac{1}{8}$. We hebben dus de volgende waarden:

$$x: \quad 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1,$$

$$f(x): \quad \frac{8}{8}, \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{11}, \frac{8}{12}, \frac{8}{13}, \frac{8}{14}, \frac{8}{15}, \frac{8}{16}.$$

$$R_l = \frac{1}{8} \left(\frac{8}{8} + \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \frac{8}{12} + \frac{8}{13} + \frac{8}{14} + \frac{8}{15} \right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \approx 0,72.$$

$$R_r = \frac{1}{8} \left(\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \frac{8}{12} + \frac{8}{13} + \frac{8}{14} + \frac{8}{15} + \frac{8}{16} \right)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \approx 0,66.$$

De uitkomst van de integraal is 0,69 nauwkeurig in 2 decimalen.

De benaderingen door middel van deze rechthoeksregels zijn erg ruw, zodat deze voor technische toepassingen vrijwel niet bruikbaar zijn.

34 Numerieke integratie. Trapeziumregel

Het is duidelijk dat men een verbetering van de vorige formules vindt als men het rekenkundig gemiddelde neemt van R_l en R_r . Men verkrijgt dan:

$$I \approx T = \frac{1}{2}(R_l + R_r) = \frac{1}{2}h(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$I \approx T = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

Deze formule noemt men de *trapeziumregel*.

In fig. 38 zijn de bijdragen van het interval $[x_{k-1}, x_k]$ getekend. Bij R_l neemt men als benadering de oppervlakte van de rechthoek $ABD'D$, bij R_r die van de rechthoek $ABCC'$, bij T die van het trapezium $ABCD$.

Bij het voorbeeld van par. 33 vindt men met de trapeziumregel als benadering:

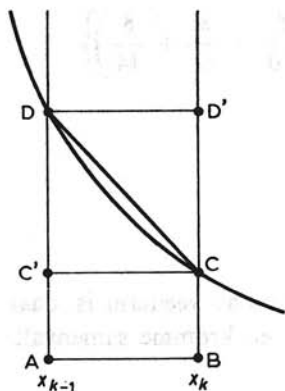
$$T = \frac{1}{8} \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} + \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \frac{8}{12} + \frac{8}{13} + \frac{8}{14} + \frac{8}{15} \right) \approx 0,6941$$

Nauwkeurig in 4 decimalen is 0,6931.

35 Numerieke integratie. Regel van Simpson. Parabolische regel

Bij de trapeziumregel is de kromme in elk deelinterval door een rechte lijn (kooorde) vervangen. Een meer nauwkeurige benadering van de integraal kan men verkrijgen als men de kromme in elk interval door een parabool vervangt met de as evenwijdig aan de y -as, dus een parabool met een vergelijking van de gedaante $y = px^2 + qx + r$. Men verdeelt dan het interval $[a, b]$ in een even aantal ($2n$) gelijke delen, en benadert de kromme met vergelijking $y = f(x)$ in elk tweetal naast elkaar gelegen deelintervallen door zulk een parabool. Deze is door drie punten bepaald, en we nemen daar-

Fig. 38



voor telkens de uiteinden en het midden van het dubbele interval. Zijn de abcissen van de uiteinden bijv. x_1 en x_3 met bijbehorende ordinaten $y_1 = f(x_1)$, $y_3 = f(x_3)$, en de abscis van het midden $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ met ordinaat $y_2 = f(x_2)$, dan is de bijdrage van het interval $[x_1, x_3]$ tot de benaderingswaarde:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_3} (px^2 + qx + r) dx &= \frac{1}{3}p(x_3^3 - x_1^3) + \frac{1}{2}q(x_3^2 - x_1^2) + r(x_3 - x_1) \\ &= \frac{1}{6}(x_3 - x_1)\{2p(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2) + 3q(x_1 + x_3) + 6r\} \\ &= \frac{1}{6}(x_3 - x_1)\{p(x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2) + qx_1 + qx_3 + 4qx_2 + 6r\} \\ &= \frac{1}{6}(x_3 - x_1)\{px_1^2 + qx_1 + r + 4(px_2^2 + qx_2 + r) + px_3^2 + qx_3 + r\} \\ &= \frac{1}{6}(x_3 - x_1)(y_1 + 4y_2 + y_3) \end{aligned}$$

Dit resultaat is bekend als de *Regel van Simpson*.*

In een meer algemene vorm geschreven, luidt deze:

Zijn van een functie f voor de waarden a , $a + h$ en $a + 2h$ de functiewaarden $f(a)$, $f(a + h)$ en $f(a + 2h)$, dan is:

$$\int_a^{a+2h} f(x) dx \approx \frac{1}{3}h\{f(a) + 4f(a + h) + f(a + 2h)\}$$

Zijn de verdeelpunten $x_0 = a$, $x_1, \dots, x_{2n} = b$ en stelt men $y_k = f(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$), en $h = \frac{b - a}{2n}$, dan vindt men door toepassing van deze regel op telkens twee aangrenzende deelintervallen:

$$I \approx S = \frac{1}{3}h\{y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})\}$$

Deze formule noemt men de *parabolische regel*.

In het voorbeeld van par. 33 vindt men door toepassing hiervan:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{24} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + 4 \left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15} \right) + 2 \left(\frac{8}{10} + \frac{8}{12} + \frac{8}{14} \right) \right\} \\ &\approx 0,693155 \end{aligned}$$

In 6 decimalen nauwkeurig is 0,693147.

Opmerkingen:

- 1 De regel van Simpson geldt exact als $f(x)$ een kwadratische veelterm is, daar dan de parabool, die als benadering dient, met de gegeven kromme samenvalt.

* Thomas Simpson (1710-1761).

De regel blijkt ook nog geheel correct te zijn als de gegeven functie een veelterm van de derde graad is.

- 2 Voor een meer uitgebreide behandeling van de numerieke integratie zie men par. 124.

Samenvatting:

Voor het berekenen van de bepaalde integraal $\int_a^b f(x) dx$ staan dus twee methoden ter beschikking en wel:

- 1 Gebruikmaking van de *hoofdstelling* van de integraalrekening waarbij men een primitieve F bepaalt van f en dan met de hoofdstelling stelt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

De bepaling van een primitieve kan gebeuren:

- door direct herkennen;
 - door met behulp van een handige substitutie en de kettingregel de integraal zo om te vormen dat herkennen van een primitieve mogelijk wordt (zie 32.1);
 - door met behulp van partiële integratie de integraal zo om te vormen dat herkennen van een primitieve mogelijk wordt (zie 32.2).
- 2 Met gebruikmaking van de *definitie* van bepaalde integraal. Men benadert dan de bepaalde integraal d.m.v. Riemannsommen (zie 33.7).

36 De logaritmische functie

In par. 30 is aangetoond dat er bij iedere continue functie f een functie F bestaat, gedefinieerd door:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (36.1)$$

die de eigenschap heeft dat $F'(x) = f(x)$. Slechts in enkele gevallen zal F in reeds bekende functies zijn uit te drukken. Meestal wordt door (36.1) een nieuwe functie gedefinieerd.

Van de functie $f: x \mapsto x^{-1}$ ($x \neq 0$) kennen wij nog geen primitieve. We definiëren nu een nieuwe functie de *natuurlijke logaritme*: $x \mapsto \ln x$ (logarithmus naturalis) door de integraal:

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \quad (x > 0)$$

In x is hierdoor gedefinieerd voor alle $x > 0$.

De voorwaarde $x > 0$ is nodig omdat de functie g met $g(t) = t^{-1}$ discontinu is in $t = 0$ (fig. 39).

Is $x > 1$, dan is $\ln x > 0$, want $\int_1^x t^{-1} dt$ is positief omdat de integrand positief en het integratie-interval positief gericht is. Het stelt voor de oppervlakte van de figuur

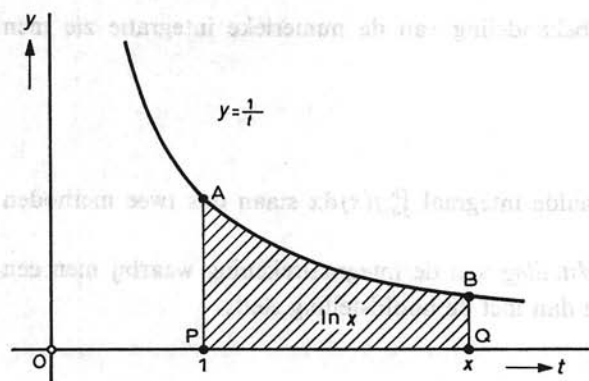


Fig. 39

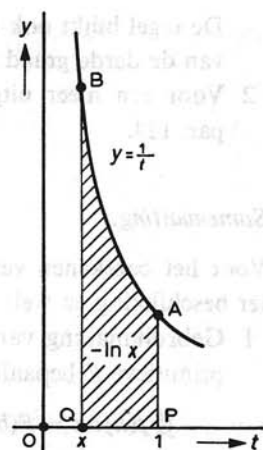


Fig. 40

ABQP. Is $0 < x < 1$, dan is $\ln x < 0$, want $\int_1^x t^{-1} dt = -\int_x^1 t^{-1} dt$, en $\int_x^1 t^{-1} dt$ stelt de oppervlakte van de figuur BAPQ voor (fig. 40). Verder is $\ln 1 = 0$.

Hoofdeigenschap

Is $a > 0$ en $b > 0$, dan is:

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad (36.2)$$

Bewijs:

$$\ln ab = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$$

Substitueer in de laatste integraal $t = au$, dan volgt:

$$\frac{dt}{t} = \frac{d(au)}{au} = \frac{adu}{au} = \frac{du}{u}$$

Voor $t = a$ is $u = 1$, voor $t = ab$ is $u = b$, dus is:

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{du}{u} = \ln b$$

zodat $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Deze laatste eigenschap is aanschouwelijk te maken met fig. 41. Met ieder punt c van $[1, b]$ komt overeen een punt ac van $[a, ab]$. De ordinaat van c is $1/c$, die van ac is $1/ac$, dus $1/a$ keer zo groot. Het lijnstuk RS is a keer zo lang als PQ , terwijl in ieder punt van RS de ordinaat a keer zo klein is als de hoogte van het overeenkom-

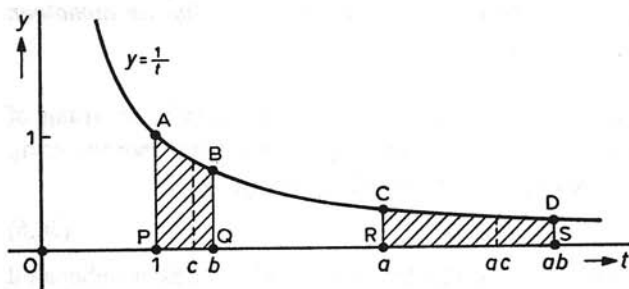


Fig. 41

stige punt van PQ. Het gebied CDSR kan dus tot dekking met ABQP gebracht worden door vermenigvuldiging met de factor a^{-1} in de richting van de t -as en daarna met de factor a in de richting van de y -as.

Uit (36.2) volgt voor $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$\ln abc = \ln ab + \ln c = \ln a + \ln b + \ln c$$

Neemt men $a = b = c$, dan is:

$$\ln a^3 = 3 \ln a$$

Algemeen geldt:

$$\ln a^n = n \ln a \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (36.3)$$

hetgeen door volledige inductie bewezen kan worden.

Voor $ab = 1$ ($a > 0$), dus $b = a^{-1}$ volgt uit (36.2) dat $0 = \ln a + \ln a^{-1}$, dus:

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad (36.4)$$

Is $x_2 > x_1 > 0$, dan volgt door toepassing van (36.2) en (36.4):

$$\ln \frac{x_2}{x_1} = \ln x_2 - \ln x_1$$

Omdat $\frac{x_2}{x_1} > 1$ is, is $\ln \frac{x_2}{x_1} > 0$, dus $\ln x_2 - \ln x_1 > 0$, d.w.z.:

$$\ln x_2 > \ln x_1, \text{ indien } x_2 > x_1 > 0 \quad (36.5)$$

Men noemt wegens (36.5) de logaritmische functie *monotoon stijgend*.

Definitie

Een functie f heet *monotoon* op een interval I , indien voor alle x_1 en x_2 uit I met $x_2 > x_1$

geldt of $f(x_2) > f(x_1)$, of $f(x_2) < f(x_1)$. In het eerste geval heet de functie monotoon stijgend, in het tweede geval monotoon dalend.

De logaritmische functie is dus monotoon stijgend op $\langle 0, \infty \rangle$. Het is de vraag of $\ln x$ bij toenemende x onbeperkt toeneemt, dan wel begrensd is. Om deze vraag op te lossen sluiten we x in tussen twee opeenvolgende gehele machten van 2:

$$2^n \leq x < 2^{n+1} \quad (36.6)$$

Uit de rechter ongelijkheid van (36.6) volgt dat bij toenemende x , ook n onbepaald toeneemt. Uit (36.6) en de monotonie van de logaritmische functie volgt:

$$n \ln 2 \leq \ln x$$

zodat $\ln x$ met x onbeperkt toeneemt, d.w.z.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad (36.7)$$

Door de substitutie $x = t^{-1}$ volgt uit (36.7):

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{t} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = - \infty$$

dus:

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln x = - \infty \quad (36.8)$$

Omdat voor $t > 1$ steeds $t^{-1} < 1$ is, geldt voor $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x dt = x - 1 \Rightarrow \ln x < x \quad (x > 1)$$

of:

$$0 < \frac{\ln x}{x} < 1 \quad (x > 1)$$

Het quotiënt $\frac{\ln x}{x}$ is dus begrensd op $\langle 1, \infty \rangle$. Uit de begrensdheid van dit quotiënt is als volgt af te leiden dat het de limiet nul heeft voor $x \rightarrow \infty$.

$$0 < \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} < \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (x > 1) \quad (36.9)$$

Hieruit volgt door toepassing van de insluitingsstelling (par. 10):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (36.10)$$

Door te stellen $x = 1/t$ volgt tevens:

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

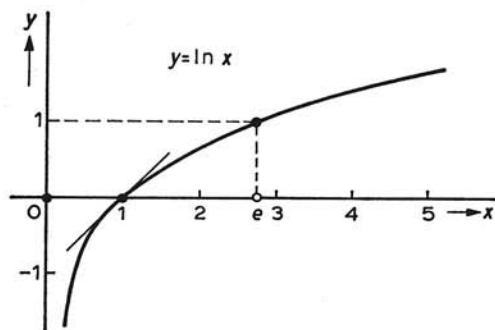


Fig. 42

dus:

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0 \quad (36.11)$$

Omdat bij toenemende x , $\ln x$ monotoon en onbegrensd toeneemt, zal wegens $\ln 1 = 0$, $\ln x$ de waarde 1 juist één keer aannemen.

Het getal x waarvoor $\ln x = 1$, wordt voorgesteld door e .

$$\ln e = 1$$

Het is gebleken dat e een onmeetbaar, zelfs transcendent getal is (zie par. 3 en par. 106).

$$e \approx 2,71828$$

De grafiek van de logaritmische functie is voorgesteld in fig. 42. Deze snijdt de x -as in het punt $(1, 0)$ onder een hoek van $\frac{1}{4}\pi$, omdat $\frac{d \ln x}{dx} = x^{-1}$ voor $x = 1$ de waarde 1 aanneemt.

De functie $x \mapsto \ln |x|$ is gedefinieerd voor alle $x \neq 0$. Voor $x < 0$ is $\ln |x| = \ln(-x)$. De afgeleide van $\ln(-x)$ is gelijk aan $-x^{-1} \cdot (-1) = x^{-1}$.

De functie $x \mapsto \ln |x|$ heeft dus voor $x \neq 0$ als afgeleide x^{-1} . Een primitieve van x^{-1} is dus $x \mapsto \ln |x|$ op $\langle \leftarrow | \rightarrow \rangle$ (zie echter ook de opmerking bij gevolg 3 in par. 59 van hoofdstuk 3).

Enige voorbeelden van het differentiëren van samengestelde functies, waarbij de logaritmische functie betrokken is volgen hier.

Voorbeeld 1

Bepaal $f'(x)$ indien:

$$f(x) = \ln \sqrt{a^2 - x^2} \quad (|x| < |a|)$$

Oplossing:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2} \cdot (-2x) \\ &= \frac{-x}{a^2 - x^2} \end{aligned}$$



Voorbeeld 2

Bepaal $f'(x)$ indien:

$$f(x) = \ln |\sin x|$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\ &= \cot x \end{aligned}$$

37 Inverse functies

In par. 7 hebben we een functie f gedefinieerd als een voorschrift dat aan ieder element x van het domein V van f precies één element y van het codomein W toevoegt. Daarbij is niet uitgesloten dat aan twee of meer verschillende elementen van V hetzelfde element van W is toegevoegd, bijv. $f(x) = x^2$, $V = [-1, 1]$. Is echter iedere $y \in W$ het beeld van *precies één* $x \in V$, dan is door het opgeven van $y \in W$ het origineel $x \in V$ daarvan eenduidig bepaald en de toevoeging $y \mapsto x$ is een functie van W in V en zelfs op V , daar V juist de originelenverzameling is. We noemen deze functie de *inverse functie* van f en noteren die als f^{inv} . Er geldt dus:

$$f^{\text{inv}}\{f(x)\} = x$$

en

$$f\{f^{\text{inv}}(y)\} = y$$

Voorbeeld

Bepaal $f^{\text{inv}}(y)$ indien:

$$y = f(x) = 3x + 5$$

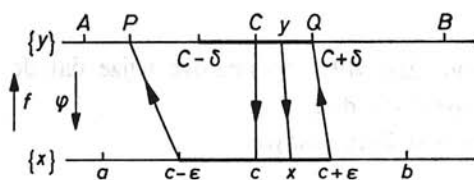


Fig. 43

Oplossing:

$$f^{\text{inv}}(y) = \frac{1}{3}(y - 5)$$

Er zijn geen algemene voorwaarden op te stellen voor de eis dat f een inverse heeft. Er geldt echter de volgende stelling.

Stelling 1

Als f een functie is, die gedefinieerd is op $[a, b]$, continu is in $[a, b]$ en monotoon stijgt, terwijl $f(a) = A$ en $f(b) = B$, dan heeft f een inverse functie f^{inv} , die gedefinieerd is op $[A, B]$, continu is in $[A, B]$ en monotoon stijgt.

Bewijs:

Aangezien een continue functie iedere waarde tussen haar minimum (i.c. A) en haar maximum (i.c. B) aanneemt, zal iedere $y \in [A, B]$ optreden als beeld van een $x \in [a, b]$. Daar f monotoon stijgt, volgt uit $x_2 > x_1$ dat $f(x_2) > f(x_1)$; het is dus niet mogelijk dat één getal $y \in [A, B]$ het beeld is van twee getallen x_1 en $x_2 \in [a, b]$. De toevoeging $f(x) \mapsto x$ is dus eenduidig en we kunnen dus een functie definiëren op $[A, B]$ die aan iedere $y \in [A, B]$ haar origineel (onder de functie f) toevoegt. Dit is de inverse functie f^{inv} van f die we hierna aangeven met φ en waarvoor dus geldt:

$$f\{\varphi(y)\} = y, \quad \forall y \in [A, B]$$

$$\varphi\{f(x)\} = x, \quad \forall x \in [a, b]$$

Zij nu $f(x_1) = y_1$ en $f(x_2) = y_2$. Het monotoon stijgen van f impliceert dat uit $x_1 < x_2$ volgt $f(x_1) < f(x_2)$. Dan impliceert $y_1 < y_2$ dat $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$, daar anders $\varphi(y_1) \geq \varphi(y_2)$ en dus $x_1 \geq x_2$ en dus $f(x_1) \geq f(x_2)$ en $y_1 \geq y_2$.

Stel verder $c = \varphi(C)$ (fig. 43). Kies een ε -omgeving van c , deze wordt door f afgebeeld op een omgeving $\langle P, Q \rangle$ van C . Noemt men δ het kleinste van de stukken PC en CQ , dan ligt x zeker op $\langle c - \varepsilon, c + \varepsilon \rangle$, als y ligt op $\langle C - \delta, C + \delta \rangle$; immers als $P < c - \delta < y < c + \delta < Q$, dan geldt op grond van de monotonie van φ : $\varphi(P) < \varphi(y) < \varphi(Q)$, dus $c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$. Dit betekent dat φ continu is in $y = C$.

Opmerking:

Is de functie f continu en monotoon dalend, dan volgt op analoge wijze dat de functie een inverse φ heeft die continu en monotoon dalend is.

Op dezelfde manier kan men ook de volgende stelling bewijzen.

Stelling 2

Heeft een in $[a, b]$ continue functie met functiewaardenverzameling $[A, B]$ een inverse, dan is de functie monotoon, en is de inverse ook continu in $[A, B]$ en monotoon.

Stelling 3

Is f differentieerbaar in $x = c$, bezit de functie een inverse en is $f'(c) \neq 0$, dan is de inverse functie φ differentieerbaar in $y = f(c) = C$ en geldt:

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{y=C} \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=c} = 1$$

of in verkorte notatie:

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

Bewijs:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{y - C}{x - c}$$

$$\varphi'(C) = \lim_{y \rightarrow C} \frac{\varphi(y) - \varphi(C)}{y - C} = \lim_{y \rightarrow C} \frac{x - c}{y - C}$$

Dus is:

$$\varphi'(C) = \lim_{y \rightarrow C} \frac{x - c}{y - C} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow C} \frac{y - C}{x - c}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow c} \frac{y - C}{x - c}} = \frac{1}{f'(c)} \quad (f'(c) \neq 0)$$

of:

$$\varphi'(C) \cdot f'(c) = 1 \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{y=C} \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=c} = 1$$

De overgang van $y \rightarrow C$ op $x \rightarrow c$ is geoorloofd, want φ is volgens stelling 2 een continue functie van y .

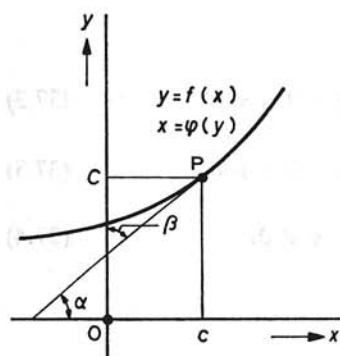


Fig. 44

De hierboven genoemde stelling is aanschouwelijk voorgesteld in fig. 44. De kromme $y = f(x)$ is ook de grafiek van $x = \varphi(y)$. Nu is $f'(c) = \tan \alpha$, waarbij α de hoek is, die de raaklijn insluit met de positieve x -as. Verder is $\varphi'(C) = \tan \beta$, waarin β de hoek voorstelt die dezelfde raaklijn insluit met de positieve y -as. Daar $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, is $\tan \beta = \cot \alpha = 1/\tan \alpha$, dus is:

$$\varphi'(C) = \frac{1}{f'(c)}$$

Als $y = f(x)$, dan geldt voor de inverse functie φ van f : $x = \varphi(y)$. De grafiek van f kan tevens dienen als grafiek van φ , als we tenminste de waarden van de onafhankelijk veranderlijke (nu y) op de y -as uitgezet denken. Voor de figuur is dit wat lastig, en daarom verwisselen we in $x = \varphi(y)$ de y en de x , waardoor we ons de onafhankelijk variabele op de x -as uitgezet denken. Voor de grafiek betekent dit een spiegeling t.o.v. de lijn met vergelijking $y = x$, m.a.w. men verkrijgt de grafiek van de inverse functie φ door de grafiek van f te spiegelen t.o.v. de lijn met vergelijking $y = x$.

De functie $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) is monotoon voor $x > 0$ en differentieerbaar, de functie-waardenverzameling is $\langle 0, \rightarrow \rangle$. Deze functie heeft dus een inverse, voorgesteld door:

$$x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \quad (y > 0)$$

die men voor natuurlijke n de n^e machtswortel noemt, en die gedefinieerd is voor iedere $x > 0$.

Men definieert verder:

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = (x^p)^{\frac{1}{q}} \quad (p \text{ en } q \text{ geheel}) \quad (37.1)$$

waardoor de machtsfunctie $x \mapsto x^a$ gedefinieerd is voor *rationale* a .

We tonen vervolgens aan dat $x^{\frac{p}{q}}$ voldoet aan de drie machtseigenschappen, waaraan

ook x^n voldoet voor n geheel, nl.:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} \quad (a > 0, p, q, r \text{ en } s \text{ geheel; } q \neq 0, s \neq 0) \quad (37.2)$$

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}} \quad (a > 0, p, q, r \text{ en } s \text{ geheel; } q \neq 0, s \neq 0) \quad (37.3)$$

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} \quad (a > 0, b > 0, p \text{ en } q \text{ geheel; } q \neq 0) \quad (37.4)$$

Bewijs van (37.2):

$$\begin{aligned} (a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}})^{qs} &= (a^{\frac{p}{q}})^{qs} \cdot (a^{\frac{r}{s}})^{qs} \\ &= (a^{\frac{1}{q}})^{pqs} \cdot (a^{\frac{1}{s}})^{qrs} \\ &= \{(a^{\frac{1}{q}})^q\}^{ps} \cdot \{(a^{\frac{1}{s}})^s\}^{rq} \\ &= a^{ps} \cdot a^{rq} \\ &= a^{ps+rq} \end{aligned}$$

Bijgevolg is:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

Bewijs van (37.3):

$$\begin{aligned} (a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} &= \{(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{s}}\}^{rs} \\ &= \{(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{s}}\}^{rs} \\ &= \{a^{\frac{p}{q}}\}^{rs} \\ &= \{a^{\frac{1}{q}}\}^{prs} \\ &= (a^{\frac{1}{q}})^{prs} \\ &= a^{pr} \end{aligned}$$

Bijgevolg is:

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$$

Bewijs van (37.4):

$$\begin{aligned} (a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}})^q &= (a^{\frac{p}{q}})^q \cdot (b^{\frac{p}{q}})^q \\ &= a^p \cdot b^p \\ &= (ab)^p \end{aligned}$$

(onder toepassing van (37.3)). Dus is:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (ab)^{\frac{p}{q}}$$

38 De exponentiële functie

De functie $x \mapsto \ln x$ is in $x > 0$ monotoon stijgend en differentieerbaar, de functiewaardenverzameling is $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$. De logaritmische functie heeft dus een inverse die gedefinieerd is voor ieder reëel getal, monotoon stijgend is en differentieerbaar, en slechts positieve waarden aanneemt. Deze functie heet *exponentiële functie* en wordt genoteerd als:

$$x \mapsto \exp x$$

De eigenschappen van $\exp x$ volgen uit die van $\ln x$. Voor $a > 0$ en $b > 0$ is volgens (36.2): $\ln a + \ln b = \ln ab$. Stelt men $\ln a = A$, dus $a = \exp A$, en $\ln b = B$, dus $b = \exp B$, dan volgt:

$$\ln ab = \ln a + \ln b = A + B \Rightarrow ab = \exp(A + B) \Rightarrow$$

$$\exp A \cdot \exp B = \exp(A + B) \quad (38.1)$$

De eigenschap (38.1) noemt men wel de hoofdeigenschap van de exponentiële functie. Uit $\ln 1 = 0$ volgt $1 = \exp 0$. Voor $B = -A$ gaat (38.1) over in:

$$\exp A \cdot \exp(-A) = \exp 0 = 1$$

dus:

$$\exp(-A) = \frac{1}{\exp A} \quad (38.2)$$

Uit (38.1) volgt verder door volledige inductie:

$$\exp \sum_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \exp a_k \quad (38.3)$$

Is $a_k = a$ voor alle k , dan is in het bijzonder:

$$\exp na = (\exp a)^n \quad (38.4)$$

Uit (38.4) volgt voor $na = b$:

$$\exp b = \left(\exp \frac{b}{n} \right)^n \Rightarrow \exp \frac{b}{n} = (\exp b)^{\frac{1}{n}} \quad (38.5)$$

(zie par. 37).

Is b een natuurlijk getal m , dan volgt uit (38.5) en (38.4):

$$\exp \frac{m}{n} = (\exp m)^{\frac{1}{n}} = \{(\exp 1)^m\}^{\frac{1}{n}} = (\exp 1)^{\frac{m}{n}} \quad (38.6)$$

Uit $\ln e = 1$ volgt: $e^{\frac{1}{n}} = \exp 1$, zodat (38.6) ook te schrijven is als:

$$\exp \frac{m}{n} = e^{\frac{m}{n}} \quad (38.7)$$

Uit (38.2) en (38.7) volgt:

$$\exp \left(-\frac{m}{n} \right) = \frac{1}{\exp m/n} = e^{-\frac{m}{n}}$$

zodat:

$$\exp p = e^p$$

geldt voor ieder rationaal getal p . Omdat voor een *rationaal* getal p , $\exp p$ gelijk is aan e tot de macht p , heeft $\exp p$ de naam *exponentiële* functie gekregen.

Daar $\exp x$ gedefinieerd is voor alle x , ook niet-rationale, definieert men:

$$e^x = \exp x$$

voor alle reële x . Hiermede is de betekenis van het symbool e^x (lees: e tot de macht x) eenduidig vastgesteld voor alle $x \in \mathbb{R}$.

De grafiek van $y = \exp x$ volgt door spiegeling van die van $y = \ln x$ (fig. 42) t.o.v. de rechte $y = x$. Ze is weergegeven in fig. 45a.

De afgeleide van de exponentiële functie vindt men als volgt. Als $f(x) = \exp x$, dan

is $x = \varphi(y) = \ln y$, dus wegens $\frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{df}{dx} = 1$ is:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{d(\exp x)}{dx} = 1$$

Fig. 45a

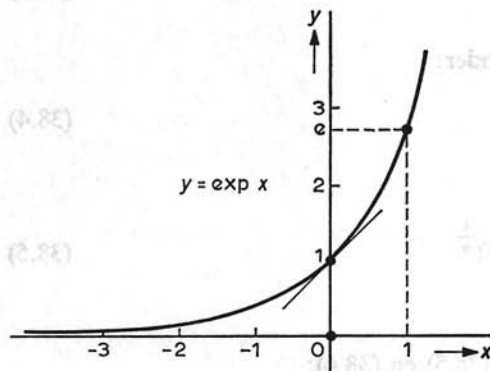
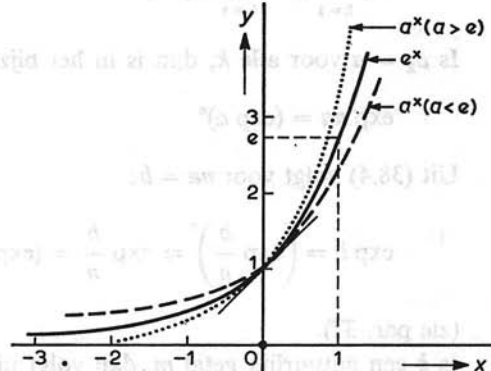


Fig. 45b



of:

$$\frac{d(\exp x)}{dx} = \exp x$$

Enige voorbeelden van het differentiëren volgen hier.

Voorbeeld 1

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \exp x^2$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\exp x^2) 2x \\ &= 2x \cdot \exp x^2 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \exp \sin x$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\exp \sin x) \cos x \\ &= \cos x \cdot \exp \sin x \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = e^{-x} \cos 2x$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \cos 2x - e^{-x} 2 \sin 2x \\ &= -e^{-x}(\cos 2x + 2 \sin 2x) \end{aligned}$$

39 De algemene exponentiële functie en de algemene machtsfunctie

Is $a > 0$, dan definiëren we de algemene macht a^p als

$$a^p = \exp(p \ln a) \quad (a > 0) \quad (39.1)$$

dus:

$$\ln a^p = p \ln a$$

We zullen aantonen dat voor de algemene macht de machtseigenschappen gelden die in par. 37 voor *rationale exponenten* zijn bewezen. Dat zijn dus:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (a > 0) \quad (39.2)$$

$$(a^p)^q = a^{pq} \quad (a > 0) \quad (39.3)$$

$$(ab)^p = a^p b^p \quad (a > 0, b > 0) \quad (39.4)$$

Bewijs van (39.2):

$$a^{p+q} = \exp \{(p+q) \ln a\} = \exp (p \ln a + q \ln a)$$

Door toepassing van (38.1) volgt verder:

$$\exp (p \ln a + q \ln a) = \exp (p \ln a) \cdot \exp (q \ln a) = a^p \cdot a^q$$

Bewijs van (39.3):

$$(a^p)^q = \exp (q \ln a^p) = \exp (qp \ln a) = a^{pq}$$

Bewijs van (39.4):

$$(ab)^p = \exp \{p \ln (ab)\} = \exp (p \ln a + p \ln b)$$

$$= \exp (p \ln a) \cdot \exp (p \ln b) = a^p \cdot b^p$$

De *algemene exponentiële functie* a^x wordt gedefinieerd, door in (39.1) de exponent als veranderlijke te nemen en a constant > 0 en $\neq 1$.

Definitie

$$a^x = \exp (x \ln a) = e^{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Voor de grafiek van a^x , waarbij we onderscheiden: $a > e$ en $a < e$, verwijzen we naar fig. 45b.

Uit (39.2) volgt de hoofdeigenschap van de exponentiële functie.

Hoofdeigenschap

Als $f(x) = a^x$ geldt:

$$f(p+q) = f(p) \cdot f(q) \quad (39.5)$$

De afgeleide van de algemene exponentiële functie wordt met de kettingregel bepaald.

$$f'(x) = a^x = \exp (x \ln a)$$

$$f'(x) = \{\exp(x \ln a)\} \ln a = a^x \ln a$$

$$\text{Als } f(x) = a^x, \text{ dan } f'(x) = a^x \ln a \quad (39.6)$$

Voor $a > 1$ en $x > 0$ is $x \ln a > 0$ en neemt met x toe. Omdat $x \mapsto \exp x$ monotoon stijgend is, is dus ook in dit geval $x \mapsto \exp x \ln a$, d.i. $x \mapsto a^x$ monotoon stijgend. Is $0 < a < 1$ en $x > 0$, dan is $x \ln a < 0$ en neemt af met toenemende x . Dus nu is $x \mapsto \exp x \ln a$, d.i. $x \mapsto a^x$ monotoon dalend. Conclusie: $x \mapsto a^x$ is monotoon stijgend voor $a > 1$ en monotoon dalend voor $0 < a < 1$.

De algemene machtsfunctie $x \mapsto x^p$ wordt gedefinieerd door in (39.1) het grondtal veranderlijk te nemen en de exponent p constant.

Definitie

$$x^p = \exp(p \ln x) = e^{p \ln x} \quad (x > 0, p \text{ constant})$$

Uit (39.4) volgt de hoofdeigenschap voor de machtsfunctie.

Hoofdeigenschap

Als $f(x) = x^p$ geldt:

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad (a > 0, b > 0)$$

De afgeleide van de algemene machtsfunctie vindt men aldus:

$$f(x) = x^p = \exp(p \ln x)$$

$$f'(x) = \{\exp(p \ln x)\} \cdot \frac{p}{x}$$

$$= \frac{p}{x} \cdot x^p$$

$$= px^{p-1}$$

$$\text{Als } f(x) = x^p, \text{ dan } f'(x) = px^{p-1} \quad (\forall p \in \mathbb{R}) \quad (39.7)$$

De uitdrukking (39.7) voor de afgeleide is dus dezelfde als de formule die vroeger is afgeleid voor een machtsfunctie met gehele exponent.

Voor $p > 0$ is $x \mapsto p \ln x$ een monotoon stijgende functie van x en dus geldt dit ook voor $x \mapsto \exp(p \ln x) = x^p$. Voor $p < 0$ is $x \mapsto p \ln x$ dalend, en dit is ook het geval met $x \mapsto \exp(p \ln x) = x^p$.

$\{f(x)\}^{g(x)}$ wordt op soortgelijke wijze gedefinieerd als a^x en x^a .

Definitie

$$\{f(x)\}^{g(x)} = \exp \{g(x) \ln f(x)\} \quad (f(x) > 0)$$

Enige voorbeelden van het differentiëren volgen hier.

Voorbeeld 1

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = x \cdot 2^x$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^x + x \cdot 2^x \ln 2 \\ &= 2^x(1 + x \ln 2) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + h} \quad (h \text{ constant})$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + h}} \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2 + h}}{\sqrt{x^2 + h}} \end{aligned}$$

Voorbeeld 4

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + h}| \quad (h \text{ constant})$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + h}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + h}}{\sqrt{x^2 + h}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + h}} \end{aligned}$$

Voorbeeld 5

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \sqrt[x]{x}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/x} = \exp \frac{\ln x}{x} \\ f'(x) &= \left(\exp \frac{\ln x}{x} \right) \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot \sqrt[x]{x} \end{aligned}$$

Opmerking:

Om van de functie h , gedefinieerd door $h(x) = \{f(x)\}^{g(x)}$ de afgeleide te bepalen, kan men ook als volgt te werk gaan. Men bepaalt $\ln |h(x)|$. De functie $x \mapsto \ln |h(x)|$ is een samengestelde functie van x die gedifferentieerd wordt door toepassing van de kettingregel (eerst de logaritmische functie differentiëren, daarna $x \mapsto |h(x)|$ differentiëren). Uit $\ln |h(x)| = g(x) \ln |f(x)|$ volgt:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \cdot \ln |f(x)| + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

of:

$$h'(x) = h(x) \left\{ g'(x) \cdot \ln |f(x)| + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$$

dus:

$$\frac{d}{dx} [\{f(x)\}^{g(x)}] = \{f(x)\}^{g(x)} \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln |f(x)| + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$$

Deze wijze van berekening wordt gewoonlijk *logaritmisch differentiëren* genoemd. Men kan dit ook in andere gevallen toepassen, bijv. bij de differentiatie van een product.

Voorbeeld

Differentieer:

$$p(x) = f(x)g(x)h(x)$$

Oplossing:

$$\ln |p(x)| = \ln |f(x)| + \ln |g(x)| + \ln |h(x)|$$

zodat:

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}$$

dus:

$$p'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

40 Logaritmische en exponentiële ongelijkheden

Voor $t \in [1, 1+h]$ ($h > 0$) is:

$$\frac{1}{1+h} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$

dus is:

$$\int_1^{1+h} \frac{dt}{1+h} < \int_1^{1+h} \frac{dt}{t} < \int_1^{1+h} dt$$

d.w.z.:

$$\frac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h \quad (40.1)$$

De ongelijkheid (40.1) blijkt aanschouwelijk uit fig. 46.

Omdat nl. $t \mapsto 1/t$ dalend is, is:

$$\text{opp. GBCD} < \text{opp. ABCD} < \text{opp. AECD} \quad (40.2)$$

De ordinaat van B is $1/(1+h)$, die van A is 1, terwijl de breedte der drie gebieden h is. Uit (40.2) volgt (40.1).

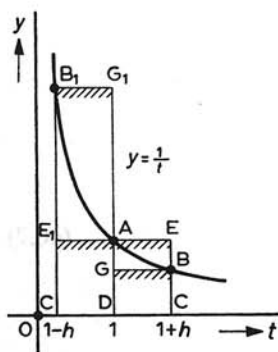


Fig. 46

Voor $t \in [1 - h, 1]$ ($0 < h < 1$) is:

$$\frac{1}{1-h} \geq \frac{1}{t} \geq 1$$

dus:

$$\int_{1-h}^1 \frac{dt}{1-h} > \int_{1-h}^1 \frac{dt}{t} > \int_{1-h}^1 dt$$

d.w.z.:

$$\frac{h}{1-h} > -\ln(1-h) > h \quad (40.3)$$

Ook deze ongelijkheid is uit fig. 46 af te lezen:

$$\text{opp } B_1G_1DC_1 > \text{opp } B_1ADC_1 > \text{opp } E_1ADC_1 \quad (40.4)$$

De ordinaat van B_1 is $1/(1-h)$, de breedte $C_1D = h$. Omdat C_1 links van D ligt is opp. B_1ADC_1 gelijk aan $-\ln(1-h)$. Uit (40.4) volgt nu direct (40.3). Schrijft men (40.3) als:

$$\frac{-h}{1-h} < \ln(1-h) < -h$$

dan heeft deze dezelfde gedaante als (40.1). We kunnen beide samenvatten tot:

$$\frac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h \quad (h > -1, h \neq 0) \quad (40.5)$$

Uit het rechterlid van (40.5) leiden we een exponentiële ongelijkheid af.

Stel $\ln(1+h) = x$, dan is $1+h = \exp x$, dus $h = \exp x - 1$.

Uit het rechterlid van (40.5) volgt dus $x < \exp x - 1$, $x \neq 0$, of:

$$\exp x > 1 + x \quad (x \neq 0) \quad (40.6)$$

Uit (40.6) volgt door vervanging van x door $(-x)$:

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} > 1 - x$$

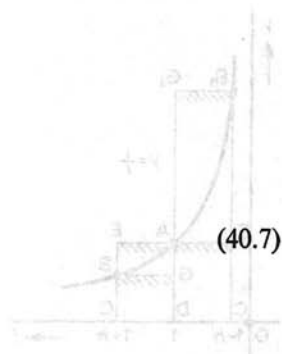
En voor $x < 1$:

$$\exp x < \frac{1}{1-x} \quad (x < 1, x \neq 0) \quad (40.7)$$

Tenslotte geven (40.6) en (40.7) gecombineerd:

$$1 + x < \exp x < \frac{1}{1-x} \quad (x < 1, x \neq 0) \quad (40.8)$$

De linkerongelijkheid van (40.8) is geldig voor iedere $x \neq 0$.



41 Betrekking tussen de monotonie van een functie en het teken van haar afgeleide

In par. 36 is vermeld dat de logaritmische functie een monotoon stijgende functie is. We willen nu dit laatste begrip nader definiëren, en wel zo dat het „stijgend” zijn van een functie een eigenschap is, die deze in een punt bezit, een z.g. „lokale” eigenschap.

Definitie

f heet *stijgend* in x_0 als er een omgeving Ω is van x_0 , zo dat $f(x) > f(x_0)$ als $x > x_0$, $x \in \Omega$ en $f(x) < f(x_0)$ als $x < x_0$, $x \in \Omega$.

Gevolg

f is *monotoon stijgend* op het interval $\langle a, b \rangle$ als f stijgend is in ieder punt van dit interval.

Vervangt men in deze definitie de ongelijkheden $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$ door $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$, dan spreekt men van een *niet-dalende* functie.

Op analoge wijze kan men een dalende en niet-stijgende functie in een punt definiëren.

Is de functie f monotoon stijgend op het interval $[a, b]$ en zijn x en c punten van dit interval, dan is $f(x) > f(c)$ voor $x > c$ en $f(x) < f(c)$ voor $x < c$. We kunnen dit samenvatten tot:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad (x \neq c)$$

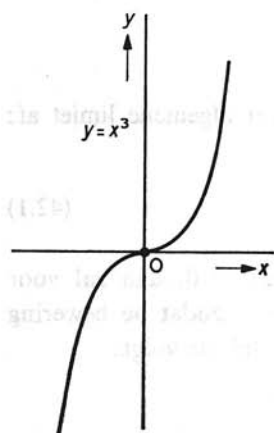


Fig. 47

Hieruit volgt als f differentieerbaar is voor $x = c$:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0$$

Het gelijkteken is niet uitgesloten, omdat de limiet van een positieve grootheid wel nul kan zijn. Is dus f monotoon stijgend en differentieerbaar op het gehele interval, dan is overal $f'(x) \geq 0$.

In fig. 47 is deze eigenschap toegelicht voor de functie $x \mapsto x^3$.

De functie is stijgend voor alle x en differentieerbaar. $f'(0) = 0$, voor $x \neq 0$ is $f'(x) > 0$.

Is omgekeerd f continu in het gesloten interval $[a, b]$, differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$, en is $f'(x) > 0$ in $\langle a, b \rangle$, dan is $f(a) < f(b)$. Dit is een gevolg van de middelwaardestelling die eerst in par. 59 bewezen wordt. Nemen we deze eigenschap als bewezen aan, dan volgt als x_1 en x_2 twee punten van dit interval zijn en $f'(x) > 0$ ($\forall x \in \langle a, b \rangle$), dat $f(x_1) > f(x_2)$ als $x_1 > x_2$ is. Is dus op zeker interval $f'(x) > 0$, dan is f stijgend op dit interval.

Op analoge wijze toont men aan dat als f monotoon dalend is op een interval en differentieerbaar, dat $f'(x) \leq 0$ is op dat interval.

Is omgekeerd $f'(x) < 0$, dan is f onder bovenstaande voorwaarden dalend.

Opmerking:

Is $f'(x) \geq 0$, dan kan men nog niet de conclusie trekken dat f monotoon stijgend is. Is nl. $f'(x) = 0$ voor alle x van een interval, dan is f constant op dit interval. Een soortgelijke redenering geldt als $f'(x) \leq 0$.

42 Enige logaritmische en exponentiële limieten

1 Uit de limiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, leiden we de volgende meer algemene limiet af:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^a} = 0 \quad (p \text{ en } a \text{ constant, } a > 0) \quad (42.1)$$

Aan de exponent p is geen enkele beperking opgelegd. Is $p < 0$, dan zal voor $x \rightarrow \infty$ $(\ln x)^p \rightarrow 0$, terwijl $x^a \rightarrow \infty$. Voor $p = 0$ is de teller 1, zodat de bewering in beide gevallen juist is. Voor $p > 0$ herleiden we het linkerlid als volgt:

$$\frac{(\ln x)^p}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{a/p}} \right)^p = \left(\frac{p}{a} \frac{\ln x^{a/p}}{x^{a/p}} \right)^p = \left(\frac{p}{a} \right)^p \left(\frac{\ln x^{a/p}}{x^{a/p}} \right)^p$$

Stelt men $x^{a/p} = y$, dan zal $y \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$, dus geldt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x^{a/p}}{x^{a/p}} \right)^p = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln y}{y} \right)^p = \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} \right)^p = 0^p = 0$$

Omdat $\left(\frac{p}{a} \right)^p$ een constante is, is de bewering hiermede bewezen.

2 Door in (42.1) te substitueren $\ln x = y$ volgt, daar $y \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^p}{e^{ay}} = 0$$

Stellen we $e^a = b$, dan is omdat $a > 0$ ondersteld is, $b > 1$, dus geldt:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^p}{b^y} = 0 \quad (p \text{ en } b \text{ constant, } b > 1)$$

of in de meer gebruikelijke vorm:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (p \text{ en } a \text{ constant, } a > 1) \quad (42.2)$$

3 Van $f(x) = \sqrt{x}$ is in par. 39 voorbeeld 5 bewezen:

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Voor $x > e$ is $1 - \ln x < 0$, dus $f'(x) < 0$, en volgens par. 41 is dus f monotoon dalend voor $x > e$. Verder is:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \frac{\ln x}{x} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \right) = \exp 0 = 1$$

zodat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1 \quad (42.3)$$

4 Uit (40.5) volgt na deling door h :

$$\begin{cases} \frac{1}{1+h} < \frac{\ln(1+h)}{h} < 1 & (h > 0) \\ \frac{1}{1+h} > \frac{\ln(1+h)}{h} > 1 & (-1 < h < 0) \end{cases} \quad (42.4)$$

Uit (42.4) volgt voor $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad (42.5)$$

De bij berekeningen vaak toegepaste limiet (42.5) is niets anders dan de afgeleide van $x \mapsto \ln x$ voor $x = 1$.

Schrijft men (42.4) als:

$$\begin{cases} \frac{1}{1+h} < \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} < 1 & (h > 0) \\ \frac{1}{1+h} > \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} > 1 & (-1 < h < 0) \end{cases}$$

dan volgt hieruit voor $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1 \quad (42.6)$$

Omdat $x \mapsto \ln x$ een continue functie is van x volgt uit (42.6) onder toepassing van (21.2):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = 1 \quad (42.7)$$

Per definitie is $\ln e = 1$. Omdat $x \mapsto \ln x$ een monotone functie is van x volgt uit (42.7) en $\ln e = 1$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \quad (42.8)$$

Voor $h = \frac{1}{v}$ gaat (42.8) over in:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = \lim_{v \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = e \quad (42.9)$$

Soms *definieert* men het getal e als:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \text{ geheel, } > 0) \quad (42.10)$$

Blijkbaar is (42.10) een bijzonder geval van (42.9).

5 Uit (42.8) volgt door vermindering van alle leden met 1:

$$x < \exp x - 1 < \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \quad (x < 1, x \neq 0)$$

en na deling door x :

$$\begin{cases} 1 < \frac{\exp x - 1}{x} < \frac{1}{1-x} & (0 < x < 1) \\ 1 > \frac{\exp x - 1}{x} > \frac{1}{1-x} & (x < 0) \end{cases} \quad (42.11)$$

Uit (42.11) volgt voor $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1 \quad (42.12)$$

De limiet (42.12) is niets anders dan de afgeleide van $x \mapsto \exp x$ voor $x = 0$.

Uit $\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$ (zie 36.11) leiden we gemakkelijk af:

$$\lim_{x \downarrow 0} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0)$$

en wel door te stellen: $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$ en dus $\lim_{x \downarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{y \downarrow 0} y \ln y^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} y \ln y = 0$

43 De algemene logaritme

De algemene exponentiële functie $x \mapsto a^x$ ($a > 0$) is gedefinieerd voor alle x , differentieerbaar voor alle x , monotoon stijgend voor $a > 1$, monotoon dalend voor $a < 1$, de functiewaardenverzameling is $\langle 0, \rightarrow \rangle$. De functie heeft dus een inverse: de *algemene logaritmische functie*, genoteerd als:

$$x \mapsto {}^a \log x$$

die gedefinieerd is voor $x > 0$, ($a > 0, a \neq 1$), differentieerbaar is voor $x > 0$, monotoon stijgend als $a > 1$ is, en monotoon dalend voor $0 < a < 1$.

Per definitie volgt uit:

$$y = a^x, \text{ dat } x = {}^a \log y \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Omdat $y = \exp(x \ln a)$, is ook $x \ln a = \ln y$, zodat:

$${}^a \log y = \frac{\ln y}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (43.1)$$

Is $f(x) = {}^a \log x = \frac{\ln x}{\ln a}$, dan is $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$. Dus:

$$\text{Als } f(x) = {}^a \log x, \text{ dan } f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (43.2)$$

Uit (43.2) volgt voor $a = e$:

$${}^e \log x = \ln x \quad (43.3)$$

$$\text{Als } f(x) = {}^e \log x, \text{ dan } f'(x) = \frac{1}{x}$$

Het differentiaalquotient van de „e-logaritme” heeft een eenvoudiger gedaante dan dat van de „a-logaritme” ($a \neq e$).

Naar de uitvinder Sir John Napier (of Neper) (1550–1617) noemt men de natuurlijke logaritmen ook *neperiaanse* logaritmen. De betrekking tussen de *gewone* logaritmen (10 als grondtal) oftewel *briggse* logaritmen* en de natuurlijke volgt uit (43.1):

$${}^{10} \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad (43.4)$$

Voor de natuurlijke logaritmen bestaan reeksontwikkelingen (zie par. 107) die de berekening mogelijk maken. Uit de relatie (43.4) berekent men de gewone logaritmen. De factor $1/\ln 10$ heet de *modulus* (M) van het briggse stelsel.

$$M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343 \quad (43.5)$$

Voor omzetting van gewone logaritmen in natuurlijke geldt volgens (43.4):

$$\ln x = \ln 10 \cdot {}^{10} \log x \quad (43.6)$$

bij benadering:

$$\ln x \approx 2,303 \cdot {}^{10} \log x \quad (43.7)$$

44 De cyclometrische functies

Als $f(x) = \sin x$, dan is $f'(x) = \cos x$. Nu is $\cos x > 0$ als $x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, dus als we f definiëren door $f(x) = \sin x$, $\forall x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, dan is f differentieerbaar en monotoon stijgend op zijn domein, en de functiewaardenverzameling is $[-1, 1]$.

* Henry Briggs (1556–1630).

Maar dan heeft f een inverse φ , gedefinieerd op het codomein $[-1, 1]$ van f , die daar monotoon stijgend is en die differentieerbaar is in $\langle -1, 1 \rangle$. In de randpunten is φ nl. niet differentieerbaar, daar de afgeleide van f nul is in $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$. De functiewaardenverzameling van φ is het domein van f , dus $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. We noemen de inverse van f de *arcus sinus (arcsin) functie*.

Enige functiewaarden volgen hier:

$$\arcsin(-1) = -\frac{1}{2}\pi$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$$

De grafiek van $x \mapsto \arcsin x$ vindt men door spiegeling van die van $x \mapsto \sin x$ t.o.v. de rechte met vergelijking $y = x$; deze grafiek is weergegeven in fig. 48a.

Als $y = f(x) = \sin x$, dan geldt: $x = \varphi(y) = \arcsin y$, en omgekeerd; dus:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

(N.B. $x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, dus $\cos x > 0$).

Wanneer we φ als functie van x beschouwen, dan geldt dus:

$$\text{Als } \varphi(x) = \arcsin x, \text{ dan } \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Als $f(x) = \cos x$, dan is $f'(x) = -\sin x$. Nu is $-\sin x$ negatief als $x \in \langle 0, \pi \rangle$, dus als we f definiëren door $f(x) = \cos x$, $\forall x \in [0, \pi]$, dan is f differentieerbaar en monotoon dalend op haar domein, en het codomein is $[-1, 1]$. Maar dan heeft f een inverse φ , gedefinieerd op het codomein $[-1, 1]$ van f , die daar monotoon dalend is, en die differentieerbaar is in $\langle -1, 1 \rangle$. Ook hier is φ in de randpunten niet differentieerbaar. Het codomein van φ is het domein van f , dus $[0, \pi]$. We noemen de inverse van f de *arcus cosinus (arccos) functie*.

Enige functiewaarden zijn:

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\arccos 1 = 0$$

Als $y = f(x) = \cos x$, dan geldt: $x = \varphi(y) = \arccos y$, en omgekeerd, dus:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

(N.B. $x \in \langle 0, \pi \rangle$, dus $\sin x > 0$).

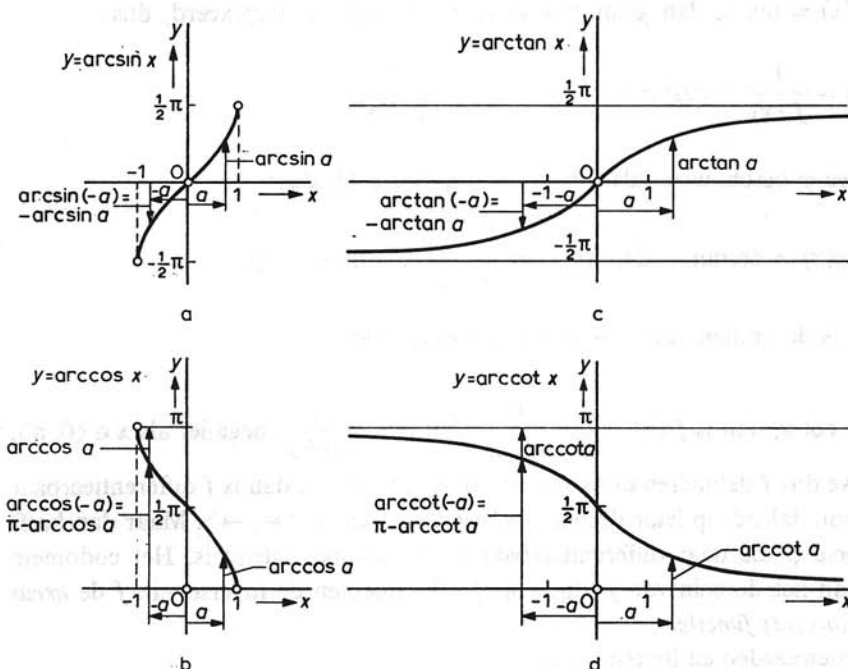


Fig. 48

Wanneer we φ beschouwen als functie van x , dan geldt:

$$\text{Als } \varphi(x) = \arccos x, \text{ dan } \varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

De grafiek van $x \mapsto \arccos x$ is voorgesteld in fig. 48b.

Als $f(x) = \tan x$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Nu is $\frac{1}{\cos^2 x}$ positief als $x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

Als we dus f definiëren door $f(x) = \tan x, \forall x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, dan is f differentieerbaar en monotoon stijgend op zijn domein, en het codomein is de verzameling van alle reële getallen. Maar dan heeft f een inverse φ , die daar differentieerbaar en monotoon stijgend is. Het codomein van φ is het domein van f , dus $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. We noemen de inverse van f de *arcus tangens (arctan) functie*.

Enige functiewaarden en limieten zijn:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{1}{2}\pi$$

$$\arctan 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{1}{2}\pi$$

Als $y = f(x) = \tan x$, dan geldt $x = \varphi(y) = \arctan y$ en omgekeerd, dus:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Wanneer we φ beschouwen als functie van x , dan geldt dus:

$$\text{Als } \varphi(x) = \arctan x, \text{ dan } \varphi'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, x \in \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$$

In fig. 48c is de grafiek van $x \mapsto \arctan x$ voorgesteld.

Als $f(x) = \cot x$, dan is $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Nu is $-\frac{1}{\sin^2 x}$ negatief als $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Wanneer we dus f definiëren door $f(x) = \cot x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, dan is f differentieerbaar en monotoon dalend op haar domein, en het codomein is $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$. Maar dan heeft f een inverse φ die daar differentieerbaar en monotoon dalend is. Het codomein van φ is dan het domein van f , dus $\langle 0, \pi \rangle$. We noemen de inverse van f de *arcus cotangens (arccot) functie*.

Enige functiewaarden en limieten zijn:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

$$\operatorname{arccot} 0 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x = 0$$

Als $y = f(x) = \cot x$, dan geldt: $x = \varphi(y) = \operatorname{arccot} y$ en omgekeerd, dus:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\sin^2 x = \frac{-1}{1 + \cot^2 x} = \frac{-1}{1 + y^2}$$

Wanneer we φ beschouwen als functie van x , dan geldt dus:

$$\text{Als } \varphi(x) = \operatorname{arccot} x, \text{ dan } \varphi'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}, x \in \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$$

In fig. 48d is de grafiek $x \mapsto \operatorname{arccot} x$ voorgesteld.

Opmerking:

De naam *cyclometrische functies* komt hier vandaan dat zij bogen van een cirkel voorstellen (Gr. κύκλος = kring = cirkel).

Enige voorbeelden van het differentiëren volgen hier.

Voorbeeld 1

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Blijkbaar is de gevonden uitkomst tevens de afgeleide van $\arcsin x$. De functie $\arcsin x$ kan dus van de gegeven functie slechts een constante verschillen. Uit een rechthoekige driehoek met schuine zijde 1 en rechthoekszijden resp. x en $\sqrt{1-x^2}$ blijkt dat de gegeven functie juist $\arcsin x$ is en de genoemde constante gelijk is aan nul.

Voorbeeld 2

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

Omdat de gevonden uitkomst juist de afgeleide is van $2 \arctan x$, is dus

$$\arctan \frac{2x}{1-x^2} = 2 \arctan x + c.$$

Op de bepaling van c gaan we hier niet in. Men zie voor enige cyclometrische betrekkingen de volgende paragraaf.

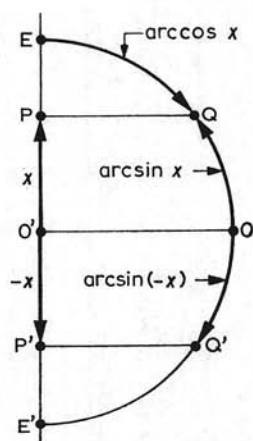


Fig. 49

45 Enige cyclometrische betrekkingen

In par. 19 zijn $\sin x$ en $\cos x$ gegeven door een aan punt op een cirkel zijn projectie op een middellijn toe te voegen (zie fig. 24). Dezelfde figuur kan dienst doen om de functies $x \mapsto \arcsin x$ en $x \mapsto \arccos x$ voor te stellen. Fig. 49 stelt de halve eenheidscirkel voor. De raaklijn in O is evenwijdig aan de middellijn door O' . De toevoeging van een punt P van de rechte aan een punt Q van de cirkel geschiedt door projectie in de richting $O'O$. Stelt men $O'P = x$, dan is $\widehat{OQ} = \arcsin x$. Is $O'P' = -x$, dan is $\widehat{OQ'} = \arcsin(-x)$, hetgeen blijkbaar ook $-\arcsin x$ is. Hieruit volgt:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (45.1)$$

In dezelfde figuur is de boog \widehat{EQ} die vanaf E rechtsonder gemeten wordt gelijk aan $\arccos x$. De boog $\widehat{EQ'}$ is gelijk aan $\arccos(-x)$. Omdat $\widehat{EQ} = \widehat{E'Q'}$ en de halve cirkelomtrek gelijk is aan π , is $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (45.2)$$

Verder blijkt uit de figuur:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi \quad (45.3)$$

welke relatie ook geldig is voor $x < 0$, hetgeen men zich aan de hand van fig. 49 duidelijk kan maken.

Uit (45.3) volgt door differentiëren van beide leden:

$$\begin{aligned} D \arcsin x + D \arccos x &= D \frac{1}{2}\pi = 0 \\ D \arccos x &= -D \arcsin x \end{aligned} \quad (45.4)$$

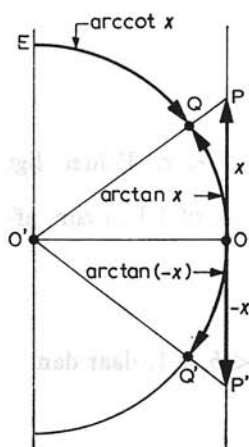


Fig. 50

Hiermede is verklaard waarom de afgeleiden van $\arcsin x$ en $\arccos x$ slechts in teken verschillen.

In fig. 50 is $OP = x$, $OP' = -x$, $\widehat{OQ} = \arctan x$, $\widehat{OQ'} = \arctan(-x)$, $\widehat{EQ} = \arccot x$ en $\widehat{E'Q'} = \arccot(-x)$. Op soortgelijke wijze als hierboven overtuigt men zich van de betrekkingen:

$$\arctan(-x) = -\arctan x \quad (45.5)$$

$$\arccot(-x) = \pi - \arccot x \quad (45.6)$$

$$\arctan x + \arccot x = \frac{1}{2}\pi \quad (45.7)$$

Door differentiëren van de betrekking (45.7) verklaart men waarom de afgeleiden van $\arctan x$ en $\arccot x$ slechts in teken verschillen.

Evenals tussen de goniometrische functies bestaan er tussen de cyclometrische functies vele betrekkingen. Wij leiden slechts als voorbeeld een enkele relatie af, nl. de herleiding van de som van twee boogtangentes tot een enkele.

Voorbeeld

Herleid $\arctan a + \arctan b$ tot de waarde van een enkele cyclometrische functie van a en b .

Oplissing:

Stel $\arctan a = \alpha$ en $\arctan b = \beta$, dan is $\tan \alpha = a$ en $\tan \beta = b$ en $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{a + b}{1 - ab}$$

Hieruit volgt:

$$\arctan a + \arctan b = \alpha + \beta = \arctan \frac{a+b}{1-ab} + k\pi$$

Omdat $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi$, is dus $-\pi < \alpha + \beta < \pi$. Echter ligt $\arctan \frac{a+b}{1-ab}$ tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$. Hieruit volgt dat k dus -1 , 0 , of 1 kan zijn, afhankelijk van de getallen a en b .

Zo is bijv.:

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} \quad \text{voor } -1 < a < 1, -1 < b < 1, \text{ daar dan } -\frac{1}{2}\pi < \alpha + \beta < \frac{1}{2}\pi;$$

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} + \pi \quad \text{voor } a > 1, b > 1, \text{ daar dan } \frac{1}{2}\pi < \alpha + \beta < \pi;$$

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} - \pi \quad \text{voor } a < -1, b < -1, \text{ daar dan } -\pi < \alpha + \beta < -\frac{1}{2}\pi.$$

Voorbeeld van differentiëren

Bepaal $f'(x)$ als:

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

Oplissing:

De functie $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ is gedefinieerd voor alle $x \neq 1$ en is in $x = 1$ discontinu.

Hieruit volgt dat ook $x \mapsto \arctan \frac{1+x}{1-x}$ discontinu is in $x = 1$. Voor $x \neq 1$ is:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Uit dit resultaat blijkt dat de gegeven functie van $x \mapsto \arctan x$ slechts een constante verschilt. Omdat de gegeven functie discontinu is in $x = 1$, kan op het interval $\langle -, 1 \rangle$ de constante een andere waarde hebben dan op $\langle 1, + \rangle$. Ter berekening van deze constante stellen we:

$$\arctan \frac{1+x}{1-x} = \arctan x + C$$

op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$, en bepalen de limiet hiervan als $x \uparrow 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 1} \arctan \frac{1+x}{1-x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \arctan y = \frac{1}{2}\pi \\ &= \arctan 1 + C \\ &= \frac{1}{4}\pi + C \end{aligned}$$

Dus is $C = \frac{1}{4}\pi$ op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$. Op soortgelijke wijze volgt voor het interval $\langle 1, \rightarrow \rangle$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 1} \arctan \frac{1+x}{1-x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \arctan (-y) = -\frac{1}{2}\pi \\ &= \arctan 1 + C \\ &= \frac{1}{4}\pi + C \end{aligned}$$

Op $\langle 1, \rightarrow \rangle$ is dus $C = -\frac{3}{4}\pi$.

46 Overzicht van enige differentiaalquotienten, primitieve functies, differentiaal, limieten en ongelijkheden

Differentiaalquotienten

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \ln |x|$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \cot x$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = \exp x$$

$$f'(x) = \exp x$$

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x \ln a \quad (a > 0)$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot} x$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + h}|$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + h}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$f'(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

$$f(x) = \ln |\sin x|$$

$$f'(x) = \cot x$$

$$f(x) = \ln |\cos x|$$

$$f'(x) = -\tan x$$

Primitieven

$$f(x) = x^n$$

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \ln |x|$$

$$f(x) = \sin x$$

$$F(x) = -\cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$F(x) = \sin x$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$F(x) = \tan x$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$F(x) = -\cot x$$

$$f(x) = \exp x$$

$$F(x) = \exp x$$

$$f(x) = a^x$$

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$F(x) = \arcsin \frac{x}{a} = -\arccos \frac{x}{a}$$

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{x}{a}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + h}}$$

$$F(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + h}|$$

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

$$f(x) = \cot x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$F(x) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$F(x) = \ln |\sin x|$$

$$F(x) = -\ln |\cos x|$$

Differentialen

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) \quad (n \neq -1)$$

$$\exp x dx = d(\exp x + C)$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln |x| + C)$$

$$a^x dx = d\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right) \quad (a > 0)$$

$$\sin x dx = -d(\cos x + C)$$

$$\cos x dx = d(\sin x + C)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d\left(\arcsin \frac{x}{|a|} + C\right)$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x + C)$$

$$= -d\left(\arccos \frac{x}{|a|} + C\right)$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\cot x + C)$$

$$\frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} d\left(\arctan \frac{x}{a} + C\right)$$

$$= -\frac{1}{a} d\left(\operatorname{arccot} \frac{x}{a} + C\right)$$

Limieten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^a} = 0 \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 0} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Ongelijkheden

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > -1, x \neq 0)$$

$$\exp x > 1+x \quad (x \neq 0)$$

$$\exp x < \frac{1}{1-x} \quad (x < 1, x \neq 0)$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad (0 < |x| < \frac{1}{2}\pi)$$

$$(0 < x) \left(0 + \frac{x}{a} \right) b = x b^{\frac{1}{a}}$$

$$\left(0 + \frac{x}{|a|} \arcsin \frac{x}{a} \right) b = \frac{x b}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\left(0 + \frac{x}{|a|} \arccos \frac{x}{a} \right) b = -$$

$$\left(0 + \frac{x}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) b \frac{1}{a} = \frac{x b}{x^2 + a^2}$$

$$\left(0 + \frac{x}{a} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} \right) b \frac{1}{a} = -$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \exp x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} = 0 \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Differentiatien

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Complexe getallen

47 Vectoren

Uit de meetkunde zijn vectoren bekend als lijnsegmenten met richting. Uit twee vectoren \underline{a} en \underline{b} kan men volgens de parallellogramregel een nieuwe vector vormen die $\underline{a} + \underline{b}$ genoemd wordt. Ook kan men uit een vector \underline{a} een nieuwe vector vormen door strekken, d.i. vergroten of verkleinen; deze vector kan men door $\lambda \underline{a}$ voorstellen (λ reëel).

Deze uit de meetkunde bekende vectoren zijn concrete voorbeelden van de vectoren die in de algebra in abstracto zijn gedefinieerd. Een vector is daar een element van een vectorruimte, waarbij een vectorruimte voldoet aan de volgende definitie.

Definitie

Een (reële) vectorruimte V is een verzameling elementen (vectoren genaamd), waarin een optelling is gedefinieerd, d.w.z. aan ieder geordend tweetal elementen \underline{a} resp. \underline{b} ($\underline{a} \in V$, $\underline{b} \in V$) is een element van V toegevoegd, dat men de som noemt en noteert als $\underline{a} + \underline{b}$.

Voorts treden de reële getallen als operatoren (scalairen) op, d.w.z. als $\lambda \in \mathbb{R}$ en $\underline{a} \in V$, dan is er een eenduidig bepaald element in V , dat men het scalaire produkt van λ met \underline{a} noemt en noteert als $\lambda \underline{a}$.

Hierbij gelden de volgende axioma's.

I Axioma's voor de optelling

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \quad (\text{commutatieve eigenschap}) \quad (47.1)$$

$$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} \quad (\text{associatieve eigenschap}) \quad (47.2)$$

$$\text{Er is een vector } \underline{0} \text{ met de eigenschap } \underline{0} + \underline{a} = \underline{a} \text{ voor iedere } \underline{a} \quad (47.3)$$

Iedere vector \underline{a} heeft een tegengestelde $-\underline{a}$ met de eigenschap

$$-\underline{a} + \underline{a} = \underline{0} \quad (47.4)$$

Uit (47.1)...(47.4) volgt dat de vergelijking $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$ juist één oplossing heeft: ten minste één want $\underline{x} = -\underline{a} + \underline{b}$ voldoet, maar ook ten hoogste één. Was nl. \underline{x}_1 een andere oplossing, dan was:

$$\underline{x}_1 = \underline{0} + \underline{x}_1 = -\underline{a} + \underline{a} + \underline{x}_1 = -\underline{a} + \underline{b} = \underline{x}$$

d.w.z. $\underline{x}_1 = \underline{x}$. Er is dus juist één oplossing; deze oplossing heet de verschilvector $\underline{b} - \underline{a}$.

II Axioma's voor de scalaire vermenigvuldiging

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b} \quad (47.5)$$

$$(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a} \quad (47.6)$$

$$(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a}) \quad (47.7)$$

$$1 \cdot \underline{a} = \underline{a} \quad (47.8)$$

Men kan dan bewijzen:

$$0 \cdot \underline{a} = \underline{0} \quad (47.9)$$

$$\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad (47.10)$$

In de taal van de algebra kan men dit aldus kort samenvatten:

Een (reële) vectorruimte is een additief geschreven Abelse groep met een lichaam (i.c. \mathbb{R}) van operatoren.

Voorbeelden van vectoren zijn bijv. getallenrijtjes met een vast aantal, bijv. 3, getallen: $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underline{0} = (0, 0, 0)$. Hierbij definieert men:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3); \lambda\underline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Deze getallenrijtjes komen overeen met de meetkundige vectoren in de ruimte, die de oorsprong als beginpunt hebben. Het getallenrijtje stelt de drie coördinaten van het eindpunt voor op een rechthoekig of scheef assenstelsel.

48 Invoering van complexe getallen

In par. 1-3 is beschreven hoe het getalbegrip is uitgebreid tot dat van de reële getallen. Het feit dat de eenvoudige vierkantsvergelijking $x^2 = -1$ geen oplossing heeft zolang men zich tot de reële getallen beperkt, is aanleiding om het getalbegrip nogmaals uit te breiden door invoering van een meer algemeen soort getallen, waarvan de reële getallen een bijzonder geval zijn. Deze nieuwe getallen en de bewerkingen er-

mede moeten zo worden gedefinieerd dat al de rekenregels voor de reële getallen opgevat als bijzonder geval van deze nieuwe getallen overeenstemmen met de reeds bestaande rekenregels voor deze reële getallen.

Ook meetkundige overwegingen kunnen leiden tot de uitbreiding van het getalbegrip. In par. 4 is reeds opgemerkt dat elk reëel getal kan voorgesteld worden als een punt van een georiënteerde rechte, bijv. een gegeven x -as met 0 als nulpunt. Omgekeerd behoort bij elk punt van de rechte juist een reëel getal, de x -coördinaat.

Beschouwen we nu in plaats van de x -as het geheel platte vlak met een daarin aangebracht coördinatenstelsel xOy , dan kan een geschikt gekozen uitbreiding van het getalbegrip ons in staat stellen getallen, die we *complexe getallen* noemen, toe te voegen aan vectoren of punten in dit vlak, *het complexe vlak* geheten.

We zullen daartoe naast de „gebonden” vectoren, dat zijn vectoren waarvan het beginpunt vast is, „vrije” vectoren onderscheiden. Dit zijn vectoren waarvan richting en grootte vast zijn, maar het beginpunt willekeurig. Men rekent twee vrije vectoren gelijk indien de richtingen dezelfde zijn en de grootten gelijk.

We voeren nu langs meetkundige weg de complexe getallen in, en gaan daarbij uit van twee onderling loodrechte assen, de x -as, resp. y -as (later te noemen de *reële as*, resp. *imaginaire as*). We identificeren de reële getallen met vectoren langs de x -as, het getal 1 correspondeert daarbij met de eenheidsvector \underline{e}_1 in de richting van de positieve x -as en het getal α correspondeert met de vector $\alpha \underline{e}_1$. We merken op: als $\alpha \in \mathbb{R}$ correspondeert met $\alpha \underline{e}_1$ en $\beta \in \mathbb{R}$ met $\beta \underline{e}_1$, dan correspondeert $\alpha + \beta$ met $(\alpha + \beta) \underline{e}_1$ en dat is juist $\alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_1$ op grond van de optelling van vectoren. Verder zal $\lambda \alpha$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) corresponderen met $\lambda \alpha \cdot \underline{e}_1$ en dat is juist $\lambda \cdot (\alpha \underline{e}_1)$ op grond van de vermenigvuldiging van een vector met een scalaire grootte.

De uitbreiding die we aan de reële getallen geven, bestaat nu hierin dat we *iedere* vector in het platte vlak identificeren met een „complex” getal. In de zo verkregen verzameling \mathbb{C} van complexe getallen definiëren we nu een optelling en een vermenigvuldiging met reële getallen, en wel zó dat, als de complexe getallen z_1 en z_2 corresponderen met de vectoren \underline{a}_1 en \underline{a}_2 , de som $z_1 + z_2$ correspondeert met de som $\underline{a}_1 + \underline{a}_2$ van de vectoren \underline{a}_1 en \underline{a}_2 , en gelijk is aan $z_2 + z_1$. Hierbij is de vector-som bepaald door de „parallelogramregel”.

Het produkt λz_1 ($\lambda \in \mathbb{R}$) correspondeert met de vector $\lambda \underline{a}_1$.

In het bijzonder voegen we aan de eenheidsvector \underline{e}_2 in de richting van de positieve y -as toe het complexe getal dat we door i voorstellen en de *imaginaire eenheid* noemen. Met de vector $\lambda \underline{e}_2$ correspondeert dan λi (ook wel genoteerd als $i\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)).

Elke vector \overrightarrow{AB} in het platte vlak (zie fig. 51) kan geschreven worden als de som van twee vectoren \overrightarrow{AC} en \overrightarrow{BC} evenwijdig aan de coördinaatassen. We kunnen \overrightarrow{AC} , resp. \overrightarrow{BC} schrijven als $x \underline{e}_1$, resp. $y \underline{e}_2$. Het complexe getal, dat met \overrightarrow{AB} correspondeert, kunnen we dan schrijven als $x + iy$.

De vector \overrightarrow{OP} vanuit O met dezelfde lengte en richting als \overrightarrow{AB} heeft als eindpunt P met coördinaten (x, y) . Het complexe getal $z = x + iy$ kan worden voorgesteld

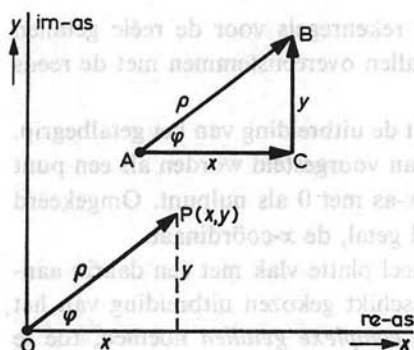


Fig. 15

door zowel het punt $P(x, y)$ als door de vectoren \vec{OP} en \vec{AB} . We spreken dan ook kortweg van het getal z of punt z of vector z .

Ook wordt P wel het *beeldpunt* van z genoemd, en de vector \vec{OP} of \vec{AB} de *beeldvector*. x heet het *reële deel* van z , notatie $x = \text{Re } z$, y heet het *imaginaire deel* van z , notatie $y = \text{Im } z$. Merk op dat y , hoewel reëel, het imaginaire deel van z genoemd wordt.

Is de vector evenwijdig met de x -as, dan valt het complexe getal samen met zijn reële deel: $x + 0i = x$. De reële getallen zijn dus een bijzonder geval van de complexe getallen.

De getallen iy met vectoren evenwijdig aan de y -as heten *zuiver imaginair*. Op de x -as liggen de beeldpunten van alle reële getallen, op de y -as die der zuiver imaginaire getallen. Daarom heet de x -as de *as der reëlen (reële as)*, en de y -as de *as der imaginairen (imaginaire as)*.

Twee vectoren zijn gelijk als ze dezelfde grootte en richting hebben, dus als ze dezelfde projecties op de coördinaatassen hebben. Hieruit volgt: Twee complexe getallen zijn gelijk dan en alleen dan als hun reële en imaginaire delen gelijk zijn; m.a.w. uit $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ volgt $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$. Als een bijzonder geval: uit $x + iy = 0$ volgt $x = 0$ en $y = 0$.

49 Modulus en argument

Men kan de vector \vec{AB} in plaats van door de projecties x en y ook vastleggen door zijn lengte ρ en de hoek φ die \vec{AB} maakt met de positieve richting van de x -as. φ en ρ zijn klaarblijkelijk de poolcoördinaten van punt P met voerhoek φ en voerstraal ρ . Men ziet direct dat $x = \rho \cos \varphi$ en $y = \rho \sin \varphi$, en dus kan men z schrijven als:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Verder is:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho} \quad (49.1)$$

ρ heet de *modulus* van z , notatie $\rho = |z|$,

φ heet het *argument* van z , notatie $\varphi = \arg z$,

x , y en ρ zijn eenduidig bepaald, φ is bepaald op een veelvoud van 2π na.

Als φ behalve aan (49.1) ook voldoet aan $-\pi < \varphi \leq \pi$, dan noemt men deze waarde van φ de hoofdwaaarde van het argument van z . Als $\rho = 0$ is $z = 0$, en is het argument onbepaald.

50 Som en verschil van complexe getallen

Volgens par. 47 is de vectorsom van twee vectoren die vector, welke ontstaat door toepassing van de parallellogramregel. In fig. 52 stelt \vec{OP}_3 de beeldvector voor van de som der vectoren z_1 en z_2 die gegeven zijn door de beeldvectoren \vec{OP}_1 en \vec{OP}_2 . Daar de projectie van de diagonaal gelijk is aan de som van de projecties van de componenten komen we langs meetkundige weg tot de volgende regel voor de optelling van complexe getallen:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

De optelling voldoet aan de commutatieve en de associatieve wet. Dit volgt onmiddellijk uit meetkundige beschouwingen.

De vector $\underline{0}$ correspondeert met het complexe getal 0 dat de eigenschap heeft: $z + 0 = 0 + z = z$, voor alle complexe getallen z .

Het tegengestelde van het complexe getal $z = x + iy$ is het complexe getal $-x + i(-y)$, genoteerd als $-z = -x - iy$.

Men definieert $z_1 - z_2$ (het verschil van z_1 en z_2 in deze volgorde) als $z_1 + (-z_2)$. De hoek α met $0 \leq \alpha < 2\pi$, die de drager van de vector maakt met de positieve reële as, noemt men de *voerhoek*.

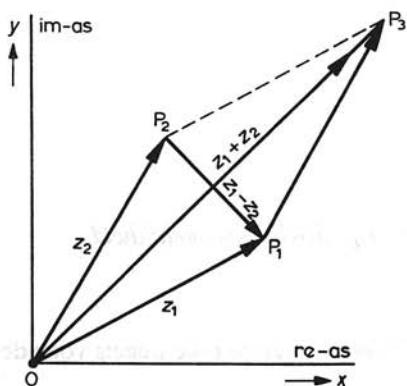


Fig. 52

Men ziet eenvoudig in dat $z_1 - z_2$ de eenduidig bepaalde oplossing is van de vergelijking:

$$z_2 + w = z_1$$

Als $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$, dan geldt:

$$w = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Meetkundig betekent dit dat de aftrekking van een vector $x_2 + iy_2$ van een tweede vector $x_1 + iy_1$ equivalent is met de optelling van de vectoren $x_1 + iy_1$ en $-x_2 - iy_2$, waarbij deze laatste vector gelijke grootte maar tegengestelde richting heeft als $x_2 + iy_2$.

Beschouwt men nu de vector $\overrightarrow{P_2P_1}$ (zie fig. 52), waarvan het beginpunt correspondeert met $z_2 = x_2 + iy_2$, en het eindpunt met $z_1 = x_1 + iy_1$, dan is deze vector het verschil van de vectoren $\overrightarrow{OP_1}$ en $\overrightarrow{OP_2}$, en het bijbehorend complexe getal is $(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$. De lengte van OP_1 is $|z_1|$, die van OP_2 is $|z_2|$, die van $OP_3 = |z_1 + z_2|$. Omdat $OP_3 \leq OP_1 + OP_2$ is dus:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (50.1)$$

Hierin geldt het = teken slechts als $\overrightarrow{OP_1}$ en $\overrightarrow{OP_2}$ gelijk gericht zijn, dus als z_1 en z_2 gelijke argumenten hebben of $2k\pi$ in argument verschillen ($k \in \mathbb{Z}$). Uit (50.1) volgt door volledige inductie:

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| \quad (50.2)$$

Verder volgt uit (50.1):

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| \quad (50.3)$$

en

$$|z_1| = |z_2 + z_1 - z_2| \leq |z_2| + |z_1 - z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

$$|z_2| = |z_1 + z_2 - z_1| \leq |z_1| + |z_2 - z_1| \Rightarrow |z_1 - z_2| \geq |z_2| - |z_1|$$

dus in één formule geschreven:

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (50.4)$$

en dus ook:

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (50.5)$$

Combinatie van (50.1) en (50.5) geeft de z.g. *driehoeksongelijkheid*:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (50.6)$$

De eigenschappen (50.1)...(50.6) komen overeen met de rekenregels voor de absolute waarden bij reële getallen (zie par. 8).

51 Produkt van complexe getallen

We zullen nu op meetkundige wijze het produkt van twee vectoren in het platte vlak definiëren. Het produkt van de daarmee corresponderende complexe getallen correspondeert dan per definitie met het vectorprodukt.

Als produkt van twee vectoren \vec{OP}_1 en \vec{OP}_2 (vanuit O) wordt gedefinieerd die vector \vec{OP}_3 , waarvan de lengte gelijk is aan $OP_1 \cdot OP_2$, en de richting bepaald wordt door de som der voerhoeken van \vec{OP}_1 en \vec{OP}_2 . Zijn (φ_1, ρ_1) en (φ_2, ρ_2) de voerhoeken en moduli van de complexe getallen z_1 en z_2 waarvan P_1 en P_2 de beeldpunten zijn (zie fig. 53), dan heeft de produktvector \vec{OP}_3 van het punt $z_1 z_2 = z_3$ de voerhoek $\varphi_1 + \varphi_2$ (de hoofdwaaarde van het argument is dus $\varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi$, waarbij $k \in \mathbb{Z}$ en zo gekozen dat $\varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi \in \langle -\pi, \pi \rangle$) en de modulus $\rho_1 \rho_2$. We hebben dus:

$$z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

en volgens bovenstaande definitie:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 \{ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \} \end{aligned} \quad (51.1)$$

zodat we de produktregel verkrijgen, als $\rho_1 = \rho_2 = 1$:

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (51.2)$$

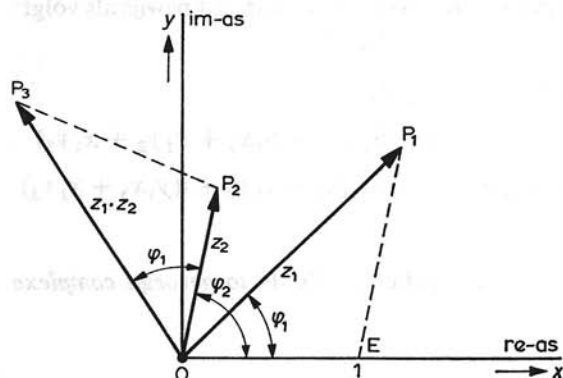
Om de produktregel te vinden als de complexe getallen niet in goniometrische vorm zijn gegeven, schrijven we:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad z_3 = z_1 z_2 = x_3 + iy_3$$

waarbij:

$$x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1, \quad x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2$$

Fig. 53



en dus volgens (51.1):

$$x_3 = \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2), \quad y_3 = \rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

zodat:

$$x_3 = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)$$

$$= \rho_1 \cos \varphi_1 \cdot \rho_2 \cos \varphi_2 - \rho_1 \sin \varphi_1 \cdot \rho_2 \sin \varphi_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

$$y_3 = \rho_1 \rho_2 (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)$$

$$= \rho_1 \sin \varphi_1 \cdot \rho_2 \cos \varphi_2 + \rho_1 \cos \varphi_1 \cdot \rho_2 \sin \varphi_2 = y_1 x_2 + x_1 y_2$$

waaruit volgt:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2) \quad (51.3)$$

Als $y_1 = y_2 = 0$, dan komt deze produktregel overeen met die der reële getallen.

Als $x_1 = x_2 = 0$ en $y_1 = y_2 = 1$, dan volgt uit (51.3):

$$i \cdot i = i^2 = -1 \quad (51.4)$$

m.a.w. *het kwadraat van de imaginaire eenheid is gelijk aan -1* . Men ziet uit de produktregel (51.3) dat de complexe getallen „formeel” kunnen worden vermenigvuldigd als men $i^2 = -1$ neemt.

Verder volgt uit (51.4):

$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad \text{enz.}$$

of in het algemeen:

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$$

voor elk positief geheel getal n

Met behulp van de som- en produktregel bewijst men gemakkelijk, dat voor de bewerkingen optelling en vermenigvuldiging de commutatieve, associatieve en distributieve wet gelden.

Voor de distributieve wet, die het moeilijkst te bewijzen is, verloopt dit bewijs als volgt:

Is $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$, dan is:

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (x_1 + iy_1)\{x_2 + x_3 + i(y_2 + y_3)\} \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 - y_1 y_2 - y_1 y_3 + i(y_1 x_2 + y_1 x_3 + x_1 y_2 + x_1 y_3) \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2) + x_1 x_3 - y_1 y_3 + i(y_1 x_3 + x_1 y_3) \\ &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

Is $z = x + iy$, dan noemt men het complexe getal $x - iy$ de *toegevoegd complexe* van z , aangeduid door \bar{z} :

$$\bar{z} = x - iy$$

In het complexe vlak is \bar{z} het spiegelbeeld van z t.o.v. de reële as. Hieruit volgen de eigenschappen:

$$|z| = |\bar{z}| \quad (51.5)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (51.6)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (51.7)$$

Verder is:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

In woorden: *Het produkt van een complex getal en zijn toegevoegd complexe is gelijk aan het kwadraat van de modulus, en dus reëel.*

Ook ziet men:

$$z + \bar{z} = 2x = 2 \operatorname{Re} z, \text{ en dus reëel.}$$

$$z - \bar{z} = 2iy = 2i \operatorname{Im} z, \text{ en dus zuiver imaginair.}$$

De betrekkingen

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ en } \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 (+ 2k\pi)$$

die uit de definitie van het produkt van twee complexe getallen volgen, kan men met behulp van volledige inductie ook uitbreiden tot meer dan twee factoren:

$$\left| \prod_{l=1}^n z_l \right| = \prod_{l=1}^n |z_l|, \quad \arg \prod_{l=1}^n z_l = \sum_{l=1}^n \arg z_l (+ 2k\pi)$$

met als bijzonder geval:

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \arg z (+ 2k\pi) \quad (n \text{ geheel } \geq 0)$$

zodat als $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$\{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (n \text{ geheel } \geq 0)$$

In het bijzonder voor $\rho = 1$:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (n \text{ geheel } \geq 0) \quad (51.8)$$

Men noemt de eigenschap in (51.8) uitgedrukt, de *stelling van de Moivre*. (1667-1754).

Van de eigenschappen (51.6) en (51.7) maken we een toepassing op het gebied der algebraïsche vergelijkingen (zie ook par. 116).

Eigenschap

Heeft de vergelijking:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

waarin a_0, \dots, a_n reëel zijn, de complexe wortel α , dan heeft deze ook de toegevoegd complexe wortel $\bar{\alpha}$.

Bewijs:

Volgens (51.6) is:

$$\begin{aligned} & \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n} = \\ & = \overline{a_0\alpha^n} + \overline{a_1\alpha^{n-1}} + \dots + \overline{a_{n-1}\alpha} + \overline{a_n} \end{aligned}$$

Verder is volgens (51.7):

$$\overline{a_k\alpha^k} = a_k\bar{\alpha}^k = a_k\bar{\alpha}^k$$

daar a_k reëel is, dus $a_k = \bar{a}_k$, zodat:

$$\begin{aligned} & \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n} = \\ & = a_0\bar{\alpha}^n + a_1\bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_{n-1}\bar{\alpha} + a_n \end{aligned} \quad (51.9)$$

Omdat α een wortel is, is $\sum_{k=0}^n a_k\alpha^k = 0$. Volgens (51.9) is ook $\sum_{k=0}^n a_k\bar{\alpha}^k = 0$, d.w.z. $\bar{\alpha}$ is ook een wortel.

Opmerking:

Dat de complexe wortels in paren als toegevoegd complexe wortels voorkomen, geldt in het algemeen slechts bij vergelijkingen met reële coëfficiënten, daar bij het bewijs gebruikt is dat voor reële a geldt: $a = \bar{a}$.

52 Deling van complexe getallen

De deling van complexe getallen wordt gedefinieerd als de omgekeerde bewerking van de vermenigvuldiging. Men ziet zonder moeite in dat als een complex getal met modulus ρ_1 , en argument φ_1 , gedeeld wordt door een complex getal ($\neq 0$) met modulus ρ_2 en argument φ_2 , het quotiënt de modulus ρ_1/ρ_2 en het argument $(\varphi_1 - \varphi_2) + 2k\pi$ bezit, zodat:

$$\frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \{ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \} \quad (\rho_2 \neq 0) \quad (52.1)$$

We hebben dus:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 (+ 2k\pi)$$

Zijn de getallen gegeven als $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$, dan kunnen, evenals bij het produkt is aangegeven, de moduli en argumenten uitgedrukt worden in x_1, y_1, x_2 en y_2 , en gaat (52.1) over in

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (52.2)$$

een resultaat dat ook kan worden verkregen door de teller en noemer van de breuk in het linkerlid van (52.2) met $x_2 - iy_2$ te vermenigvuldigen.

Samenvattend kunnen we zeggen dat in de verzameling \mathbb{C} der complexe getallen een optelling en een vermenigvuldiging zijn gedefinieerd, waarbij de volgende eigenschappen gelden:

1 *Voor de optelling:*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (\text{commutatieve eigenschap})$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (\text{associatieve eigenschap})$$

Er is een complex getal 0, zodanig dat:

$$z + 0 = 0 + z = z \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

Ieder complex getal z heeft een eenduidig bepaalde tegengestelde $-z$, waarvoor geldt:

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

2 *Voor de vermenigvuldiging:*

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad (\text{commutatieve eigenschap})$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad (\text{associatieve eigenschap})$$

Er is een complex getal 1, zodanig dat

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

Ieder complex getal $z \neq 0$ heeft een eenduidig bepaalde inverse $\frac{1}{z}$, waarvoor geldt:

$$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$$

3 Distributieve eigenschappen:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$$

Een verzameling die deze eigenschappen bezit is, zoals bekend, een lichaam. \mathbb{C} is dus het lichaam der complexe getallen.

Opmerkingen:

- 1 Het lichaam \mathbb{C} der complexe getallen omvat het lichaam \mathbb{R} der reële getallen. Men noemt op grond daarvan \mathbb{C} een uitbreiding van \mathbb{R} . Het voordeel van deze uitbreiding is dat in \mathbb{C} de vergelijking $x^2 = -1$ oplosbaar is. Later (par. 116) zullen we zien dat iedere algebraïsche vergelijking van de graad n met coëfficiënten in \mathbb{C} precies n oplossingen heeft in \mathbb{C} .
- 2 In hoofdstuk 1 zagen we dat het lichaam \mathbb{R} van de reële getallen totaal geordend is, d.w.z.:
 - a als $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, dan geldt precies één van de volgende relaties: $a < b$; $b = a$; $b < a$;
 - b $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$
 - c $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \quad (\forall c \in \mathbb{R})$
 - d als $c > 0$, dan geldt: $a < b \Leftrightarrow ac < bc$

Met nadruk zij erop gewezen dat het niet mogelijk is in \mathbb{C} een relatie in te voeren die aan de vier hierboven genoemde eisen voldoet. Wij zullen hierop niet verder ingaan, maar wijzen erop dat bijv. géén van de volgende relaties kan gelden: $i > 0$, $i = 0$, $i < 0$, daar dit dan zou leiden tot $i^2 = 0$ of $i^2 > 0$, hetgeen onjuist is.

- 3 Wij hebben hier de complexe getallen op meetkundige wijze ingevoerd door ze te identificeren met de vectoren uit de meetkunde van het platte vlak. Er is echter een zuiver algebraïsche wijze mogelijk om de complexe getallen te introduceren. Men beschouwt daartoe het Cartesische product:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

(hierbij geldt: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ en $b = d$) en definieert daarin een optelling en een vermenigvuldiging aldus:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Men kan dan narekenen dat $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ met deze optelling en vermenigvuldiging een (commutatief)lichaam vormt: het lichaam \mathbb{C} der complexe getallen. Alle elementen van de gedaante $(a, 0)$ vormen met de in \mathbb{C} gedefinieerde optelling en vermenigvuldiging een lichaam op zichzelf en dit deellichaam van \mathbb{C} kunnen we identificeren met \mathbb{R} door de één-éénduidige toevoeging $a \leftrightarrow (a, 0)$, zodat we kunnen zeggen dat het lichaam \mathbb{C} het lichaam \mathbb{R} omvat. Als f de afbeelding is die aan $a \in \mathbb{R}$ toevoegt $(a, 0) \in \mathbb{C}$, dus $f: a \mapsto (a, 0)$, dan geldt: $f(a + b) = f(a) + f(b)$ en $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$, zodat het bedoelde deellichaam van \mathbb{C} dezelfde structuur heeft als \mathbb{R} (daarmee isomorf is).

Voorts merken we nog op dat $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, dus als we $(0, 1)$ noteren als i , en $(1, 0)$ als 1 (op grond van de identificatie $1 \leftrightarrow (1, 0)$, dan geldt $i^2 = -1$. Achteraf kan men deze getallen dan weer aanschouwelijk voorstellen als vectoren of punten in het platte vlak.

53 De vierkantsvergelijking

De eenvoudigste vierkantsvergelijking met complexe coëfficiënten is de vergelijking:

$$z^2 = c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (r \geq 0) \quad (53.1)$$

Is $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ een oplossing, dan geldt hiervoor volgens (53.1):

$$\rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

of:

$$\rho^2 \cos 2\varphi = r \cos \alpha$$

$$\rho^2 \sin 2\varphi = r \sin \alpha$$

waaruit men afleidt: $\rho = \sqrt{r}$, $\varphi = \frac{1}{2}\alpha + k\pi$, zodat de oplossingen zijn:

$$z_1 = \sqrt{r} \cdot (\cos \frac{1}{2}\alpha + i \sin \frac{1}{2}\alpha), \quad z_2 = -\sqrt{r} \cdot (\cos \frac{1}{2}\alpha + i \sin \frac{1}{2}\alpha)$$

Hieruit zijn de reële en imaginaire delen te berekenen als r en α gegeven zijn.

Een meetkundige toelichting kan met behulp van fig. 54 worden gegeven. Hierin is z_1 een oplossing, P_1 het beeldpunt van z_1 , C het beeldpunt van c , E het beeldpunt van 1 . Voor de constructie van P_1 bedenke men dat $OC : OP_1 = OP_1 : OE$. OP_1 is dus te construeren als middenevenredige van OC en OE . Het getal z_2 heeft gelijke modulus als z_1 en een argument $\frac{1}{2}\alpha + \pi$.

De meer algemene vergelijking:

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (p \text{ en } q \text{ complex}) \quad (53.2)$$

wordt door kwadraatafsplitsing tot (53.1) teruggebracht.

$$(z + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$$

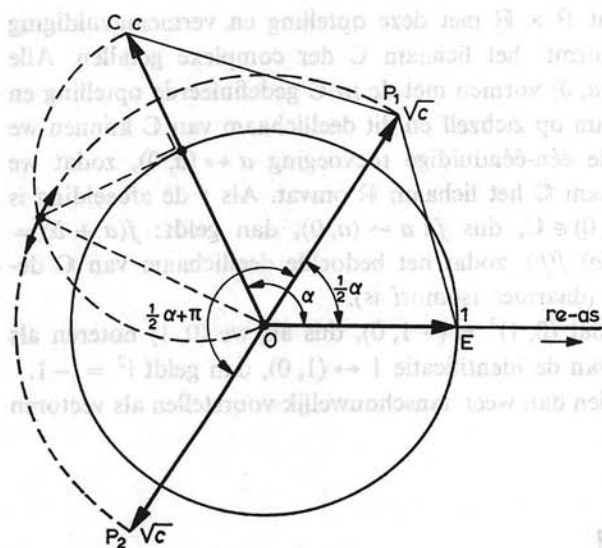


Fig. 54

Stelt men $z + \frac{1}{2}p = w$, dan volgt:

$$w^2 = \frac{1}{4}p^2 - q \quad (53.3)$$

die van het type (53.1) is.

Voorbeeld

Construeer de beeldpunten van de wortels van de vergelijking:

$$z^2 - (2 + 4i)z - 3 + 6i = 0$$

Oplossing:

We splitsen een kwadraat af:

$$\{z - (1 + 2i)\}^2 = 3 - 6i + (1 + 2i)^2 = -2i$$

en stellen

$$\zeta = z - (1 + 2i)$$

dan is op te lossen:

$$\zeta^2 = -2i$$

Uit de oplossingen ζ_1 en ζ_2 , vinden we $z_1 = \zeta_1 + (1 + 2i)$ en $z_2 = \zeta_2 + (1 + 2i)$. De constructie is in fig. 55 weergegeven. Men vindt $\zeta_1 = 1 - i$, $\zeta_2 = -1 + i$, $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3i$.

Een berekening van de wortels zonder gebruik te maken van de constructie laten we hier volgen.

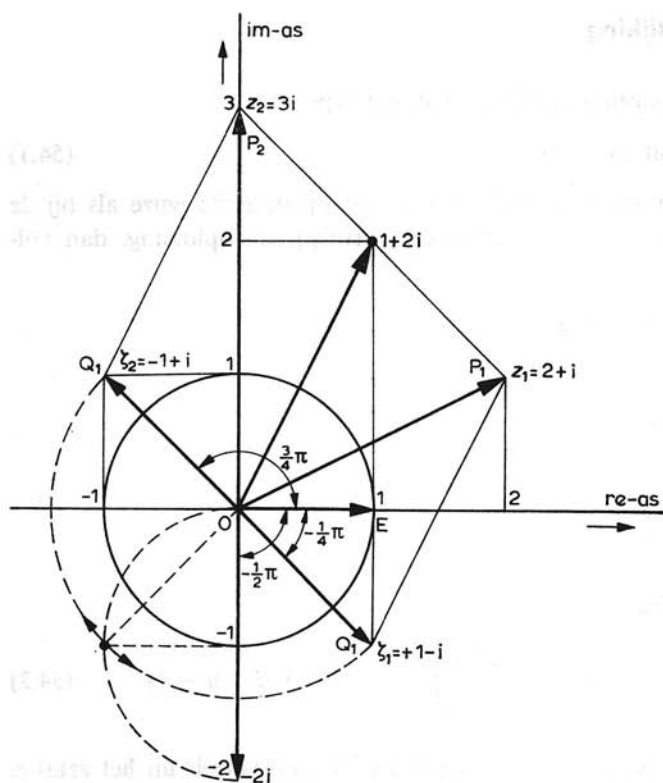


Fig. 55

Stel $\zeta = u + iv$ (u en v reëel), dan is:

$$(u + iv)^2 = -2i, \Rightarrow u^2 - v^2 + 2iuv = -2i$$

Dus is:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ uv = -1 \end{cases} \Rightarrow v = -u^{-1}, \Rightarrow u^2 - \frac{1}{u^2} = 0$$

$$u^4 - 1 = 0 \Rightarrow (u^2 - 1)(u^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1, & v_1 = -1 \\ u_2 = -1, & v_2 = 1 \end{cases}$$

Dus is:

$$\zeta_1 = u_1 + iv_1 = 1 - i, \quad \zeta_2 = u_2 + iv_2 = -1 + i$$

$$z_1 = \zeta_1 + 1 + 2i = 2 + i, \quad z_2 = \zeta_2 + 1 + 2i = 3i$$

54 De binomiaalvergelijking

Een *binomiaalvergelijking* is een vergelijking van het type:

$$z^n = c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (r \geq 0) \quad (54.1)$$

De oplossing van deze binomiaalvergelijking verloopt op dezelfde wijze als bij de vierkantsvergelijking in par. 53. Is $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ een oplossing, dan voldoen ρ en φ aan:

$$\rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

waaruit volgt:

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \alpha + 2k\pi$$

of:

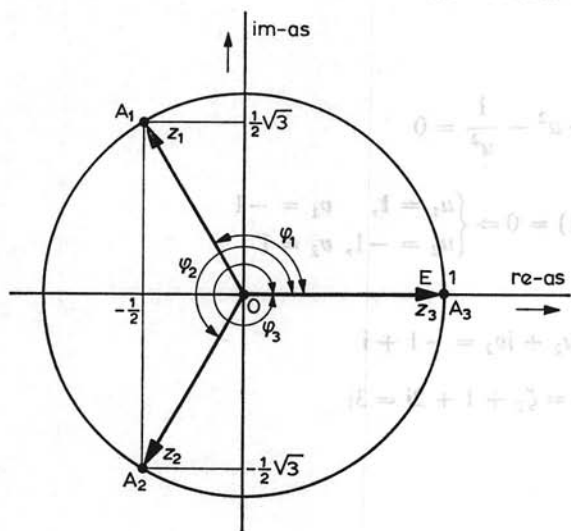
$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$$

zodat we als oplossingen vinden:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (54.2)$$

Men kan de wortels z_k opvatten als de n complexe n^e machtswortels uit het getal c . We zagen dat het echter niet mogelijk is de complexe getallen zo te ordenen als de reële getallen. Het symbool $\sqrt[n]{c}$ heeft dan ook geen eenduidige betekenis. Als voorbeeld zijn in fig. 56 de oplossingen van de binomiaalvergelijking $z^3 = 1$ geïllustreerd.

Fig. 56



Zoals uit het vorige blijkt zijn de beeldpunten van de wortels van $z^n = c$ de hoekpunten van een regelmatige n -hoek, met $\sqrt[n]{r}$ als straal van de omschreven cirkel. In fig. 57 zijn de beeldpunten aangegeven van de vergelijking $z^5 = 1$. Hiervoor geldt:

$$z_k = \cos \frac{2}{5}k\pi + i \sin \frac{2}{5}k\pi \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

De berekening van z_k kan ook op de volgende wijze geschieden:

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

Behalve $z_0 = 1$, worden de wortels berekend uit

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad (54.3)$$

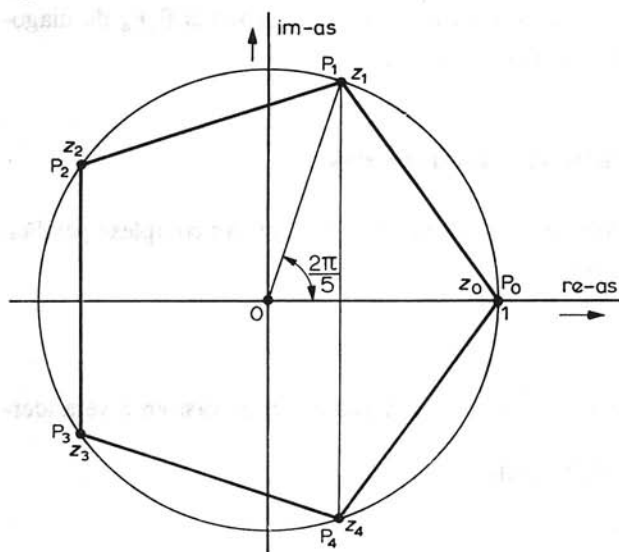
De vergelijking (54.3) noemt men een *wederkerige vergelijking*, omdat de coëfficiënten van links naar rechts en van rechts naar links gelezen hetzelfde zijn. (54.3) is van even graad. Een wederkerige vergelijking van even graad is door de substitutie:

$$w = z + \frac{1}{z} \quad (54.4)$$

terug te brengen tot een vergelijking waarvan de graad de helft is van die van de gegeven vergelijking. We delen eerst de beide leden door z^2 ($z = 0$ is geen wortel), waardoor (54.3) overgaat in:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0 \quad (54.5)$$

Fig. 57



Nu is:

$$w = z + \frac{1}{z} \Rightarrow w^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 - 2$$

Hierdoor gaat (54.5) over in:

$$w^2 - 2 + w + 1 = 0 \Rightarrow w^2 + w - 1 = 0 \quad (54.6)$$

$$w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

We hebben dus verder op te lossen:

$$z + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad z + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

of:

$$z^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})z + 1 = 0, \quad z^2 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})z + 1 = 0$$

De oplossingen zijn resp.:

$$z_{1,4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5} - 1}$$

$$= \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \pm \frac{1}{4}i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$z_{2,3} = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) \pm \frac{1}{4}i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Fig. 57 laat zien dat de afstand P_2P_3 der beeldpunten van z_2 en z_3 , het verschil is van de imaginaire delen van z_2 en z_3 , d.i. $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Daar P_2P_3 de zijde is van een regelmatige vijfhoek beschreven in een cirkel met straal 1, volgt $P_2P_3 = a_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, een uit de meetkunde bekend resultaat. Evenzo is P_1P_4 de diagonaal d_5 die blijkbaar de grootte $\frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ heeft.

55 Analytische meetkunde in het complexe vlak

Krommen en delen van het complexe vlak kunnen met behulp van complexe getallen soms eenvoudig worden voorgesteld.

1 Rechte door twee punten

In fig. 58 is $\vec{OP}_1 = z_1$, $\vec{OP}_2 = z_2$, $\vec{OP} = z$. Hierin zijn z_1 en z_2 vast en z veranderlijk gedacht.

Voor de vrije vectoren $\vec{P_1P}$ en $\vec{P_1P_2}$ geldt:

$$\vec{P_1P} = z - z_1, \quad \vec{P_1P_2} = z_2 - z_1$$

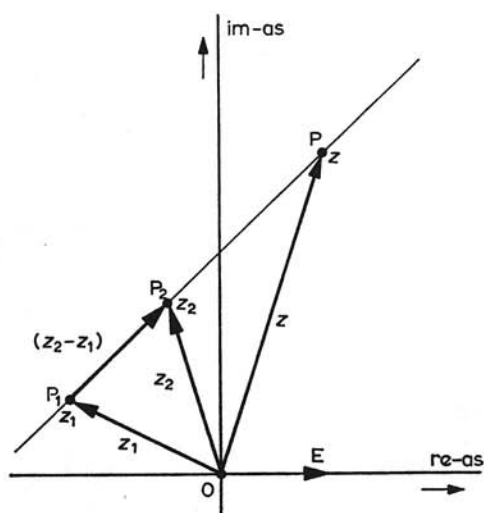


Fig. 58

Omdat $\overrightarrow{P_1P}$ en $\overrightarrow{P_1P_2}$ langs dezelfde lijn vallen is:

$$\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$$

waarin λ reëel is, waaruit volgt:

$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \quad (\lambda \text{ reëel en veranderlijk}) \quad (55.1)$$

Door (55.1) is dus de rechte door P_1 en P_2 voor te stellen.

Toepassing:

Bepaal het snijpunt van de rechte l_1 door de beeldpunten van 1 en $3 + 2i$ met de rechte l_2 door de beeldpunten van $3i$ en $-2 + 5i$.

Oplossing:

Volgens (55.1) geldt:

$$l_1 \dots z - 1 = \lambda(2 + 2i) \quad (\lambda \text{ reëel})$$

$$l_2 \dots z - 3i = \mu(-2 + 2i) \quad (\mu \text{ reëel})$$

Het snijpunt van l_1 en l_2 wordt gevonden uit:

$$1 + \lambda(2 + 2i) = 3i + \mu(-2 + 2i)$$

of:

$$1 + 2\lambda + 2\mu + i(2\lambda - 3 - 2\mu) = 0$$

Het complexe getal $(a + bi)$ (a en b reëel) is slechts dan 0, d.i. het complexe getal $0 + i0$, indien zowel a als b nul is. Hieruit volgt:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2\lambda + 2\mu = 0 \\ -3 + 2\lambda - 2\mu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, \mu = -1$$

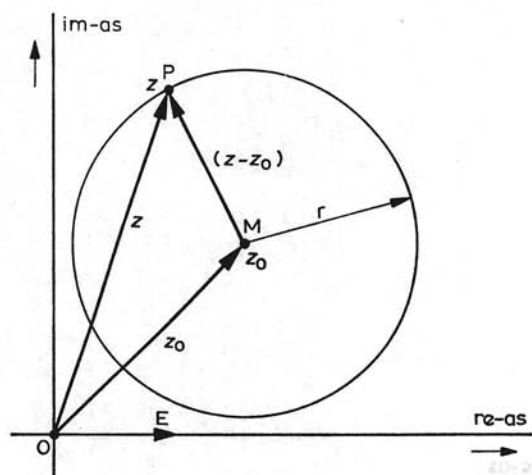


Fig. 59

Het snijpunt is dus het beeldpunt van het complexe getal:

$$z = 1 + \frac{1}{2}(2 + 2i) = 2 + i$$

2 Cirkel met gegeven middelpunt en straal

In fig. 59 is M het beeldpunt van het vaste getal z_0 , P een willekeurig punt van de omtrek van de cirkel met middelpunt M en straal r . Is P het beeldpunt van de veranderlijke z , dan is:

$$\vec{OP} = z, \vec{OM} = z_0, \vec{MP} = (z - z_0)$$

De afstand $MP = |z - z_0|$, dus geldt voor een punt van de cirkel:

$$|z - z_0| = r \quad (55.2)$$

3 Cirkelboog op een gegeven segment

Zij P_1P_2 het gegeven segment (fig. 60), P een willekeurig punt op de cirkelboog P_1PP_2 . Voor ieder punt van deze boog is $\angle P_1PP_2 = \alpha$ constant. Blijkens de figuur is α de hoek waarover men $\vec{P_1P}$ in positieve zin moet draaien om die vector de richting te geven van $\vec{P_2P}$. Is P_1 het beeldpunt van z_1 , P_2 dat van z_2 , P dat van z , dan is $\vec{P_1P} = (z - z_1)$, $\vec{P_2P} = (z - z_2)$, en is α het argument van $\frac{z - z_2}{z - z_1}$. Voor de punten z op de cirkelboog P_1PP_2 geldt dus:

$$\arg \frac{z - z_2}{z - z_1} = \alpha \quad (z \neq z_1) \quad (55.3)$$

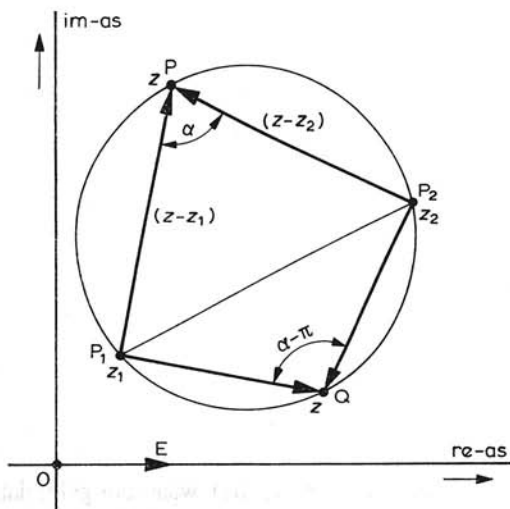


Fig. 60

Op soortgelijke wijze vindt men voor de punten z op de boog P_1QP_2 :

$$\arg \frac{z - z_2}{z - z_1} = \alpha - \pi \quad (z \neq z_1) \quad (55.4)$$

De resultaten (55.3) en (55.4) zijn ook als volgt te formuleren: Voor een punt van de boog P_1PP_2 , dat beeldpunt is van het complexe getal z , geldt dat $(z - z_2)/(z - z_1)$ een variabele modulus ρ heeft en een vast argument α , zodat:

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (\rho \geq 0, \alpha \text{ constant}, z \neq z_1) \quad (55.5)$$

Evenzo geldt voor P_1QP_2 :

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} = \rho\{\cos(\alpha - \pi) + i \sin(\alpha - \pi)\} \quad (\rho \geq 0, \alpha \text{ constant}, z \neq z_1) \quad (55.6)$$

Is in het bijzonder $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, dus $\cos \alpha = 0$ en $\sin \alpha = 1$, dan gaat (55.5) over in:

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} = \rho i \quad (\rho \geq 0, z \neq z_1) \quad (55.7)$$

en (55.6) over in:

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} = -\rho i \quad (\rho \geq 0, z \neq z_1) \quad (55.8)$$

Voor een willekeurig punt van de gehele cirkel met als middellijn de verbindingslijn van de beeldpunten van z_1 en z_2 volgt uit (55.7) en (55.8):

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} = \lambda i \quad (\lambda \text{ reëel}, z \neq z_1) \quad (55.9)$$

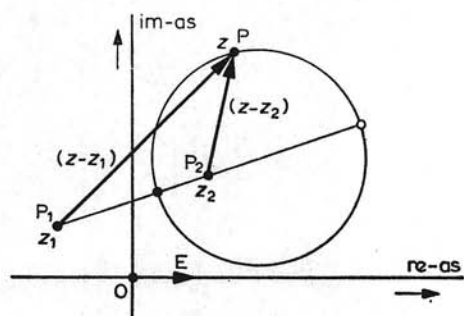


Fig. 61

4 Cirkel van Apollonius (262–190 v. C.)

De cirkel van Apollonius is de verzameling van alle punten P (fig. 61), waarvoor geldt dat de verhouding van de afstanden van P tot twee vaste punten P_1 en P_2 constant is. Zijn z , z_1 en z_2 de complexe getallen behorende bij P, P_1 en P_2 , dan is:

$$\overrightarrow{P_1P} = (z - z_1), \quad \overrightarrow{P_2P} = (z - z_2)$$

Omdat $P_1P : P_2P = \text{constant}$, is dus:

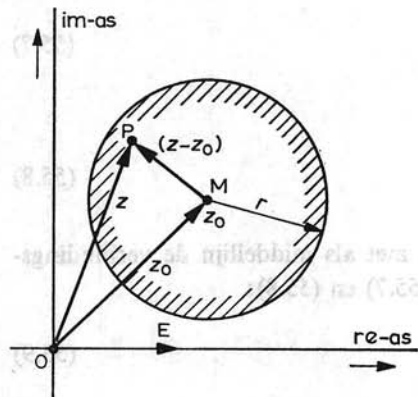
$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = c \quad (c = \text{constant} \geq 0) \quad (55.10)$$

5 Binnengebied van een cirkel

Neemt men het beeldpunt van z (fig. 62) binnen de cirkel met als middelpunt het beeldpunt M van z_0 en met straal r , dan is dus $MP < r$. Aangezien de lengte van MP gelijk is aan $|z - z_0|$ geldt dus voor het binnengebied van de cirkel:

$$|z - z_0| < r \quad (r \text{ constant} \geq 0) \quad (55.11)$$

Fig. 62



Voor het binnengebied en de rand samen geldt:

$$|z - z_0| \leq r \quad (r \text{ constant } \geq 0) \quad (55.12)$$

56 Punttransformaties in het complexe vlak

Een *punttransformatie* in het platte vlak is een transformatie van het platte vlak in zichzelf, waarbij een willekeurig punt van het vlak in het algemeen overgaat in een ander punt van het vlak, en een kromme in een andere kromme. Deze transformaties kunnen soms eenvoudig beschreven worden door gebruik van complexe getallen. Een punt P van het vlak wordt daarbij opgevat als het beeldpunt van een complex getal z , het punt P' dat door de transformatie aan P wordt toegevoegd, wordt opgevat als beeldpunt van het complexe getal z' .

De transformaties die wij in deze paragraaf bespreken, zijn, op enkele uitzonderingen na (nl. (56.11) en (56.12)), alle voor te stellen door $z \mapsto z'$, waarbij

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (56.1)$$

terwijl α , β , γ en δ evenals z' en z complexe getallen zijn.

Een transformatie van het type (56.1) wordt *gebroken lineaire transformatie*, *projectieve transformatie* of *möbiustransformatie* genoemd (A. F. Möbius, 1790–1868).

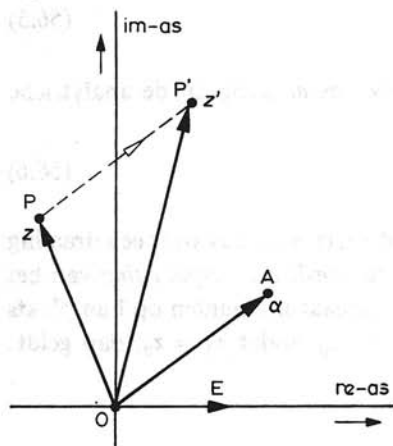
$$a \quad z' = z + \alpha \quad (\alpha \text{ constant}) \quad (56.2)$$

of:

$$\vec{OP}' = \vec{OP} + \vec{OA} \quad (\text{fig. 63})$$

Het blijkt dat een willekeurig punt P dus over een bepaalde afstand (OA) in een bepaalde richting wordt verschoven. Deze transformatie heet *translatie*.

Fig. 63



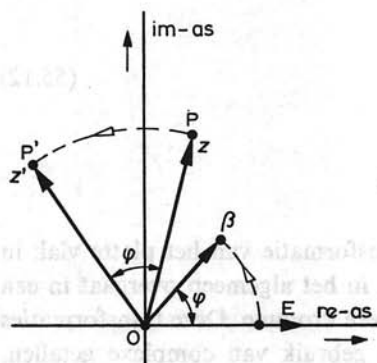


Fig. 64

Stellen we $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$ en $\alpha = a + ib$, dan volgt uit $z' = z + \alpha$:

$$x' + iy' = x + iy + a + ib \Rightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad (56.3)$$

waarmede de *translatieformules* uit de analytische meetkunde verkregen zijn.

b $z' = \beta z$ (β constant, $|\beta| = 1$) (56.4)

Omdat $|\beta| = 1$ wordt de vector \vec{OP} over een hoek $\varphi = \arg \beta$ gedraaid. De transformatie (56.4) stelt dus een *rotatie* voor om de oorsprong O over een hoek φ (fig. 64). Stellen we $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$ en $\beta = \cos \varphi + i \sin \varphi$, dan volgt uit (56.4):

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (x + iy)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + i(x \sin \varphi + y \cos \varphi) \end{aligned}$$

zodat:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} \quad (56.5)$$

De formules (56.5) zijn de *transformatieformules voor de draaiing* uit de analytische meetkunde.

c $z' = \beta z + \alpha$ (α en β constant, $|\beta| = 1$) (56.6)

De formule (56.6) is een combinatie van (56.2) en (56.4), en stelt dus voor een draaiing om O, gevolgd door een translatie. Deze combinatie wordt een *verplaatsing* van het vlak genoemd. Men kan zich afvragen of er bij de verplaatsing punten op hun plaats blijven. Stel er is zo'n punt P_0 , overeenkomende met z_0 , zodat $z'_0 = z_0$, dan geldt:

$$z_0 = \beta z_0 + \alpha \Rightarrow z_0 = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

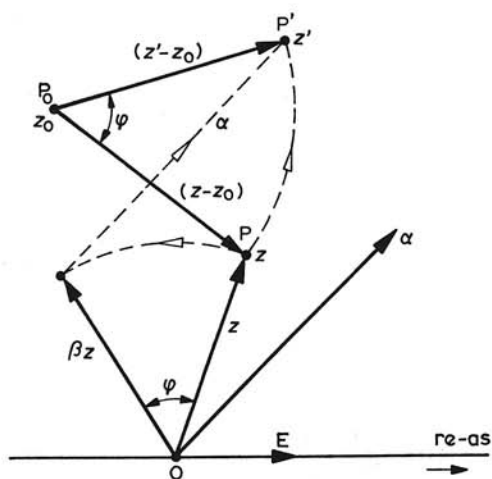


Fig. 65

Er is dus één vast punt, mits $\beta \neq 1$ is.

$$\left. \begin{aligned} z' &= \beta z + \alpha \\ z_0 &= \beta z_0 + \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow z' - z_0 = \beta(z - z_0) \quad \left(z_0 = \frac{\alpha}{1 - \beta} \right) \quad (\text{fig. 65}) \quad (56.7)$$

Uit (56.7) zien we dat een verplaatsing is op te vatten als een rotatie om een geschikt gekozen punt.

d
$$z' = cz \quad (c \text{ reëel} > 0) \quad (56.8)$$

$$\vec{OP}' = c\vec{OP}$$

Dit betekent dat de transformatie (56.8) een strekking is in de verhouding $c : 1$ met centrum O. De transformatie (56.8) is de *vermenigvuldiging* uit de meetkunde.

e
$$z' = \gamma z \quad (\gamma = c(\cos \alpha + i \sin \alpha), c \text{ reëel} > 0) \quad (56.9)$$

De transformatie (56.9) is een *gelijkvormigheidstransformatie*; dit is een draaiing om O gecombineerd met een strekking t.o.v. O.

f
$$z' = \gamma z + \alpha \quad (\gamma \neq 1) \quad (56.10)$$

De transformatie stelt een gelijkvormigheidstransformatie voor gecombineerd met een translatie. Evenals bij (56.7) is er een invariant punt dat bepaald wordt door:

$$z_0 = \gamma z_0 + \alpha \Rightarrow z_0 = \frac{\alpha}{1 - \gamma} \quad (\gamma \neq 1)$$

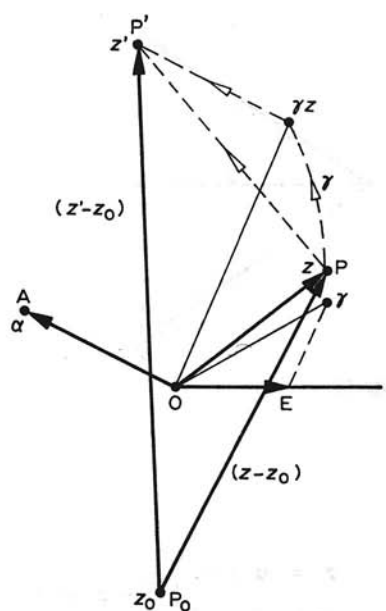


Fig. 66

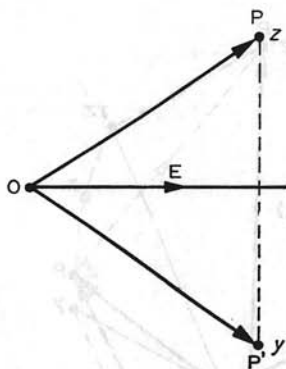


Fig. 67

$$\left. \begin{aligned} z' &= \gamma z + \alpha \\ z_0 &= \gamma z_0 + \alpha \end{aligned} \right\} z' - z_0 = \gamma(z - z_0) \quad \left(z_0 = \frac{\alpha}{1 - \gamma} \right)$$

De transformatie (56.10) stelt dus een gelijkvormigheidstransformatie van het vlak voor, echter niet met O , maar met P_0 als vast punt. (fig. 66.)

Opmerking:

Bij alle tot nu toe besproken transformaties gaan rechten over in rechten, en cirkels in cirkels.

$$g \quad z' = \bar{z} \quad (56.11)$$

Omdat z' de toegevoegd complexe is van z , betekent dit, dat de vector OP' de t.o.v. de reële as gespiegelde vector OP is, op grond van par. 51 (fig. 67).

$$h \quad z' = \frac{1}{\bar{z}} \quad (56.12)$$

Uit $\arg z' = -\arg \bar{z} = \arg z$ en

$$|z'| = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|z|}$$

volgt dat de transformatie (56.12) dus een punt P overvoert in een punt P' , zo dat O , P en P' op een rechte liggen, en $OP' \times OP$ gelijk is aan het kwadraat van de straal van de cirkel met O als middelpunt en de eenheid als straal (eenheidscirkel). De constructie van P' is in fig. 68 uitgevoerd.

De transformatie (56.12) heet *inversie* of *spiegeling t.o.v. een cirkel*, in het behandelde geval spiegeling t.o.v. de eenheidscirkel.

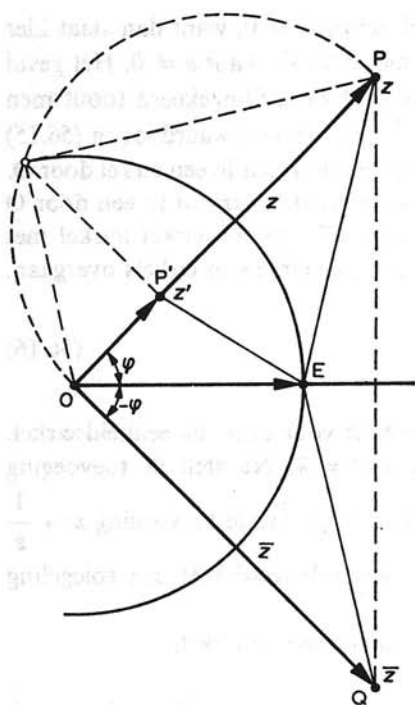


Fig. 68

$$i \quad z' = \frac{a^2}{\bar{z}} \quad (a \text{ reëel en } > 0) \quad (56.13)$$

Op soortgelijke wijze als hierboven blijkt dat (56.13) een inversie is t.o.v. de cirkel met O als middelpunt en a als straal.

We zullen nu aantonen dat bij de transformatie (56.13) in het algemeen *cirkels in cirkels overgaan*. Stellen we $z' = x' + iy'$ en $z = x + iy$, dan volgt:

$$z' = \frac{a^2}{\bar{z}} \Rightarrow \bar{z} = \frac{a^2}{z'} \Rightarrow x - iy = \frac{a^2}{x' + iy'} = \frac{a^2(x' - iy')}{x'^2 + y'^2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{a^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{a^2 y'}{x'^2 + y'^2}$$

De algemene vergelijking van een cirkel is:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (56.14)$$

Door substitutie volgt:

$$\frac{a^4(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2)^2} + \frac{Aa^2 x'}{x'^2 + y'^2} + \frac{Ba^2 y'}{x'^2 + y'^2} + C = 0 \Rightarrow$$

$$a^4 + Aa^2 x' + Ba^2 y' + C(x'^2 + y'^2) = 0 \quad (56.15)$$

Blijkbaar is (56.15) de vergelijking van een cirkel, tenzij $C = 0$, want dan staat hier de vergelijking van een rechte. Deze rechte gaat niet door O , want $a \neq 0$. Het geval $C = 0$ betekent dat de oorspronkelijke cirkel door O gaat. Omgekeerd toont men eenvoudig aan door in (56.14) de termen x^2 en y^2 weg te laten, waardoor in (56.15) de term a^4 verdwijnt, dat een niet door O gaande rechte overgaat in een cirkel door O . Ten slotte kan men aantonen dat een door O gaande rechte overgaat in een door O gaande rechte. Rekent men een rechte als „grensgeval” van een cirkel (cirkel met oneindige straal), dan kan men zeggen dat door inversie cirkels in cirkels overgaan.

$$j \quad z' = \frac{1}{z} \quad (56.16)$$

De toevoeging $z \mapsto w$ met $w = (\bar{z})^{-1}$ stelt een inversie voor t.o.v. de eenheidscirkel. z^{-1} is de toegevoegd complexe van $(\bar{z})^{-1}$, dus is $z' = \bar{w}$. Nu stelt de toevoeging $w \mapsto \bar{w}$ een spiegeling t.o.v. de reële as voor. Hieruit volgt dat de toevoeging $z \mapsto \frac{1}{z}$ een spiegeling t.o.v. de eenheidscirkel voorstelt, gecombineerd met een spiegeling t.o.v. de reële as.

Blijkbaar gaan ook bij de transformatie (56.16) cirkels over in cirkels.

Tot slot tonen we aan dat de in de aanhef genoemde möbiustransformatie $z \mapsto z'$, waarbij:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

terwijl $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle ongelijk nul ondersteld worden, opgebouwd kan worden uit hierboven besproken transformaties.

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta - \frac{\alpha}{\gamma} \delta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 z + \gamma\delta} \quad (56.17)$$

We onderstellen $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$, dus $\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$. Is nl. $\beta\gamma - \alpha\delta = 0$, dan gaat (56.17) over in $z' = \frac{\alpha}{\gamma}$ en worden alle punten getransformeerd in eenzelfde punt. Stellen we:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \alpha', \quad \frac{\gamma^2}{\beta\gamma - \alpha\delta} = \gamma', \quad \frac{\gamma\delta}{\beta\gamma - \alpha\delta} = \delta'$$

dan is (56.17) te schrijven als:

$$z' = \alpha' + \frac{1}{\gamma'z + \delta'}$$

We voeren verder in:

$$u = \gamma'z + \delta', \quad v = \frac{1}{u}, \quad z' = \alpha' + v$$

De transformatie $z \mapsto \gamma'z + \delta'$ is van het type (56.10) of (56.2), $u \mapsto \frac{1}{u}$ van het type (56.16), en $v \mapsto \alpha' + v$ is van het type (56.2).

Bij al deze transformaties gaan cirkels (eventueel rechten) over in cirkels (eventueel rechten); dus is dit ook het geval bij de algemene transformatie (56.1).

57 De exponentiële functie van een complexe veranderlijke

De exponentiële functie $x \mapsto e^x$ is gedefinieerd voor reële x in par. 38. We willen nu $z \mapsto e^z$ definiëren, als z een complex getal $z = x + iy$ is (x en y reëel), en wel zo dat de hoofdeigenschap van de reële exponentiële functie: $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ ook geldt voor niet reële exponenten. We definiëren nu voor reële y :

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

en voor $z = x + iy$ (x en y reëel):

$$e^z = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Is nu $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$, dan geldt:

$$e^{z_1} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1); \quad e^{z_2} = e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)$$

en dus:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \{ \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) \}$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1+x_2} \{ \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) \}$$

of:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

De aldus ingevoerde exponentiële functie $z \mapsto e^z$, gedefinieerd voor alle complexe z , voldoet dus aan de hoofdeigenschap voor exponentiële functies.

Opmerking:

Uit de definitie (voor elke reële φ):

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

volgt in het bijzonder: als

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

dan geldt:

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

dus:

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

Uit:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{en} \quad e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha \quad (\alpha \text{ reëel})$$

volgt:

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha \quad \text{en} \quad e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha$$

dus:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \quad (57.1)$$

De cosinus- en sinusfunctie worden voor complexe variabelen gedefinieerd als volgt:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad (57.2)$$

Uit (57.1) blijkt dan dat deze definitie voor reële z overeenstemt met de „oude” definitie van de cosinus- resp. sinusfunctie.

Nemen we in (57.2) $z = ia$, (a reëel), dan volgt:

$$\cos ia = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}), \quad \sin ia = \frac{1}{2i}(e^{-a} - e^a) = \frac{1}{2i}(e^a - e^{-a}) \quad (57.3)$$

De functie van de reële veranderlijke x :

$$x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

heet hyperbolische cosinus (*cosinus hyperbolicus* x), afgekort tot *cosh*. De functie:

$$x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

heet hyperbolische sinus (*sinus hyperbolicus*), afgekort tot *sinh*.

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (57.4)$$

Voor de grafieken zie blz. 380.

(57.3) is dus ook te schrijven als:

$$\cos ia = \cosh a, \quad \sin ia = i \sinh a$$

Uit (57.4) volgt voor $\cosh a$ en $\sinh a$ de betrekking:

$$\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$$

Zoals men de betrekking $x^2 + y^2 = 1$ in parametervorm kan voorstellen door $x = \cos t$, $y = \sin t$, zo kan men de hyperboolvergelijking $x^2 - y^2 = 1$ in para-

metervorm voorstellen door $x = \cosh t$, $y = \sinh t$. Hiermede zijn de namen *cosinus hyperbolicus* en *sinus hyperbolicus* te verklaren. In Hoofdstuk 9 komen we op de hyperbolische functies terug.

Men kan met voordeel gebruik maken van de exponentiële functie van een complexe veranderlijke voor het afleiden van goniometrische betrekkingen.

Voorbeeld 1

Druk $\sin^4 \varphi$ uit in een som van sinusen en cosinussen van veelvouden van φ .

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin^4 \varphi &= \left\{ \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \right\}^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\varphi} - 4e^{2i\varphi} + 6 - 4e^{-2i\varphi} + e^{-4i\varphi}) \\ &= \frac{1}{16} \{ e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi} - 4(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) + 6 \} \\ &= \frac{1}{16} (2 \cos 4\varphi - 8 \cos 2\varphi + 6) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4\varphi - 4 \cos 2\varphi + 3) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Druk $\cos 4\varphi$ uit in machten van $\sin \varphi$ en $\cos \varphi$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos 4\varphi &= \operatorname{Re}(e^{4i\varphi}) = \operatorname{Re}(e^{i\varphi})^4 = \operatorname{Re}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^4 \\ (\cos \varphi + i \sin \varphi)^4 &= \cos^4 \varphi + 4i \cos^3 \varphi \sin \varphi + \\ &\quad - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 4i \cos \varphi \sin^3 \varphi + \sin^4 \varphi \end{aligned}$$

dus is:

$$\cos 4\varphi = \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$$

Tegelijk vindt men, omdat $\sin 4\varphi = \operatorname{Im}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^4$:

$$\sin 4\varphi = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi.$$

Zijn de reële functies u en v van de reële veranderlijke x differentieerbaar, dan is ook de complexe functie van de reële veranderlijke x : $w = u + v$ differentieerbaar

(bij de gebruikelijke definitie van differentieerbaarheid) en geldt:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx}$$

Zij in het bijzonder $w(x) = e^{\alpha x}$, waarin $\alpha = a + ib$ (a en b reëel en constant), dan is:

$$w(x) = e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sin bx$$

$$\frac{dw}{dx} = a e^{ax} \cos bx - b e^{ax} \sin bx + i(a e^{ax} \sin bx + b e^{ax} \cos bx)$$

$$= a e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + i b e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$= (a + ib) e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$= \alpha e^{\alpha x}$$

We hebben dus gevonden:

$$\text{Als } w(x) = e^{\alpha x}, \text{ dan: } \frac{dw}{dx} = \alpha e^{\alpha x} \quad (\alpha = a + ib) \quad (57.5)$$

juist als bij de reële exponentiële functie.

Heeft u een primitieve U en v een primitieve V , dan heeft $w = u + iv$ een primitieve $W = U + iV$.

Uit (57.5) volgt:

$$\text{Als } w(x) = e^{\alpha x}, \text{ dan geldt } W(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C \quad (57.6)$$

$$(\alpha = a + ib) \quad (\alpha \neq 0, a \text{ en } b \in \mathbb{R})$$

Toepassing:

Bepaal een primitieve van $x \mapsto e^{ax} \cos bx$.

Oplossing:

Laat U een primitieve zijn, dan geldt:

$$U'(x) = e^{ax} \cos bx$$

$$= \operatorname{Re} e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$= \operatorname{Re} e^{\alpha x} \quad (\alpha = a + ib)$$

Als W een primitieve van $x \mapsto e^{\alpha x}$ is, dan geldt:

$$W(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$= \frac{e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)}{a + ib}$$

$$= \frac{e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)(a - ib)}{a^2 + b^2}$$

dus:

$$U(x) = \operatorname{Re} \frac{e^{ax}\{(a \cos bx + b \sin bx + i(a \sin bx - b \cos bx))\}}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

58 De logaritmische functie van een complexe veranderlijke

Als:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (x \text{ en } y \text{ reëel})$$

dan is:

$$|w| = e^x$$

dus:

$$x = \ln |w|$$

en

$$y = \arg w + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Dus als we bij gegeven complexe w stellen $w = e^z$, dan zijn alle oplossingen van deze vergelijking van de gedaante:

$$z = \ln |w| + i \arg w + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Door w is z derhalve niet eenduidig bepaald, maar wanneer we afspreken dat we $\arg w + 2k\pi$ kiezen in $\langle -\pi, \pi]$, dan ligt z wel vast. Deze z noemen we de (complexe) logaritme van w : $\log w$, dus:

$$\log w = \ln |w| + i \arg w \quad (\arg w \in \langle -\pi, \pi])$$

Men noemt dit de *hoofdwaarde* van de logaritme. Op deze wijze is er een functie: $z \mapsto \log z$ gedefinieerd voor alle complexe z . Zo geldt er:

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z \leq \pi)$$

$$\log 1 = \ln |1| + i \arg 1 = 0$$

$$\log(-1) = \ln |1| + i \arg(-1) = \pi i$$

$$\log i = \ln |i| + i \arg i = \frac{1}{2}\pi i$$

$$\log(-i) = \ln |i| + i \arg(-i) = -\frac{1}{2}\pi i$$

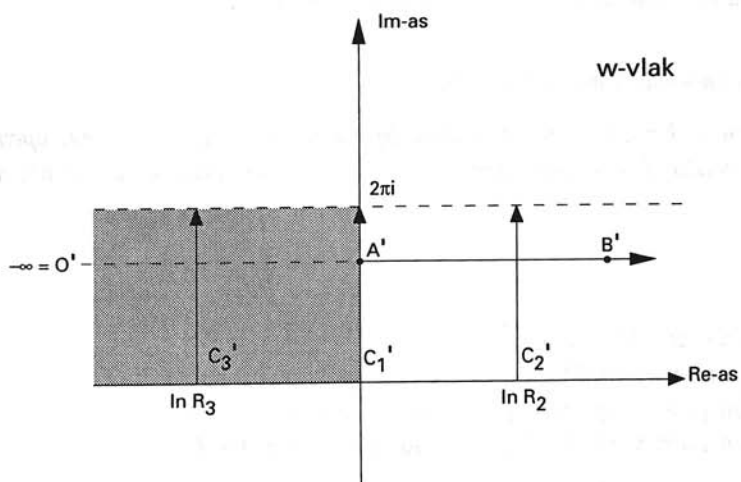
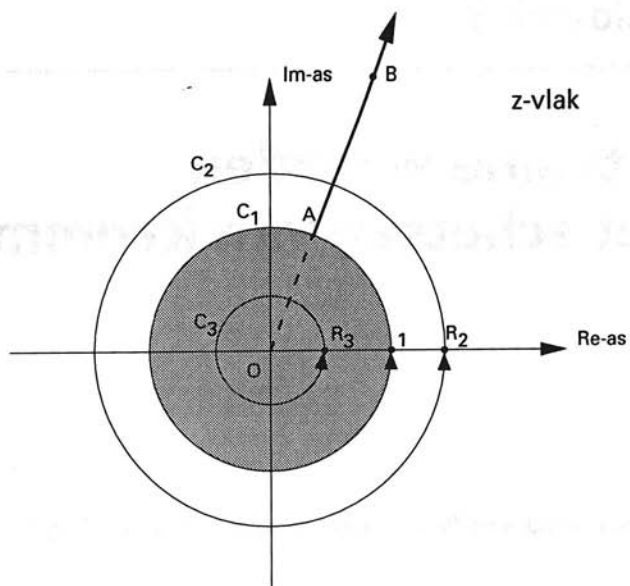
- a. Het z -vlak met $0 < |z| < \infty$ en $0 \leq \arg z < 2\pi$ gaat bij de afbeelding $z \mapsto w = \ln z$ over in een strook S in het w -vlak, met $-\infty < \operatorname{Re} w < \infty$ en $0 \leq \operatorname{Im} w < 2\pi$.
- b. De cirkels in het z -vlak met $|z| = R$ gaan over lijnstukken evenwijdig met de $\operatorname{Im} w$ -as en wel zódat $\operatorname{Re} w = \ln R$ en $0 \leq \operatorname{Im} w < 2\pi$. Het binnengebied van de eenheidscirkel in het z -vlak gaat over in linkerhelft van S .
- c. De halve rechten vanuit O in het z -vlak onder de hoek α met reële as in z -vlak gaan over in rechten evenwijdig met de reële as in het w -vlak waarvoor geldt $\operatorname{Im} w = \alpha$.
- d. De afbeelding $z \rightarrow e^w$ is de inverse afbeelding, deze beeldt S af op het z -vlak. De stroken S_n met $2\pi + k \cdot 2\pi \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi + (k+1)2\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$, vullen het w -vlak op en beelden dit via $z = e^w$ af op een 'stapel' z -vlakken.

De logaritmische functie beeldt dus het gehele z -vlak waarvoor geldt $0 \leq \arg z < 2\pi$ één-éénduidig af op een strook in het w -vlak (met uitzondering van de oorsprong). Men kan echter ook via een bepaalde procedure een afbeelding krijgen waarbij het gehele w -vlak wordt bedekt. Daartoe gaat men uit van de "stapel" z -vlakken, waarbij in de afzonderlijke exemplaren achtereenvolgens geldt:

$$n \cdot 2\pi \leq \arg z < (n+1)2\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Men kan zich de volgende aanschouwelijke procedure voorstellen: men 'knipt' deze exemplaren open langs hun positieve reële as en 'plakt' deze zodanig aan elkaar dat het vlak met $0 \leq \arg z < 2\pi$ via de positieve reële as verbonden wordt met – en dus overgaat in – het daarboven gelegen vlak waarin geldt $2\pi \leq \arg z < 4\pi$. Evenzo plakt men het vlak waarin geldt $-2\pi \leq \arg z < 0$ onder het eerste z -vlak waarin geldt $0 \leq \arg z < 2\pi$, eveneens langs de positieve reële as. Dit procédé zet men voort voor alle vlakken met achtereenvolgens $n \cdot 2\pi \leq \arg z < (n+1)2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Het aldus verkregen oppervlak noemt men een Riemann-oppervlak. De oorsprong heet daarbij vertakkingspunt. Men kan nu dit Riemann-oppervlak – met uitzondering van de oorsprong – één-éénduidig afbeelden op het gehele w -vlak via de functie $z \mapsto w = \ln z$. Met het blad van het Riemann-oppervlak waarvoor geldt $n \cdot 2\pi \leq \arg z < (n+1)2\pi$ correspondeert in het w -vlak een strook waarin geldt $n \cdot 2\pi \leq \operatorname{Im} w < (n+1)2\pi$ en $-\infty < \operatorname{Re} w < \infty$. De inverse functie is daarbij de exponentiële functie.



Extreme waarden

Het schetsen van krommen

59 Het theorema van Rolle en de middelwaardestelling

Aan vele eigenschappen betreffende het verloop van een functie en het gedrag van de afgeleide functie ligt de volgende stelling ten grondslag.

Theorema van Rolle (1652–1719)

Is f continu in het gesloten interval $[a, b]$, en differentieerbaar in het open interval $\langle a, b \rangle$, is verder $f(a) = f(b)$, dan is er minstens één punt $c \in \langle a, b \rangle$, waarvoor $f'(c) = 0$.

Bewijs:

We onderscheiden drie gevallen:

- 1 f is constant op $[a, b]$;
- 2 er is een punt x op $\langle a, b \rangle$, waarvoor $f(x) > f(a)$ ($= f(b)$);
- 3 er is een punt x op $\langle a, b \rangle$, waarvoor $f(x) < f(a)$ ($= f(b)$).

Geval 1

Omdat f constant is op $\langle a, b \rangle$, is $f'(x) = 0$ op $\langle a, b \rangle$. Elk punt van $\langle a, b \rangle$ voldoet dus.

Geval 2

Volgens een stelling van par. 13 neemt een functie die continu is in een gesloten interval, op dit interval een maximum en een minimum aan. Omdat er gegeven is dat voor een of ander punt x van $\langle a, b \rangle$ geldt: $f(x) > f(a)$, wordt dit maximum

aangenomen voor een *inwendig* punt c van $[a, b]$. We tonen aan dat $f'(c) = 0$.

$$\text{Voor } x > c \text{ is } f(x) \leq f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (59.1)$$

$$\text{Voor } x < c \text{ is } f(x) \leq f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (59.2)$$

Omdat f differentieerbaar is in $\langle a, b \rangle$, bestaat $f'(c)$. Volgens (59.1) is dus $f'(c) \leq 0$, en volgens (59.2) is $f'(c) \geq 0$. Bijgevolg is $f'(c) = 0$.

Geval 3 is geheel analoog aan geval 2.

Opmerkingen:

- 1 Geval 2 sluit geval 3 niet uit, de functie kan zowel een maximum als een minimum hebben voor inwendige punten van het interval; dit is echter niet vereist.
- 2 De meetkundige betekenis van het theorema van Rolle is, dat er minstens één punt c op $\langle a, b \rangle$ is, waarvoor de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig loopt aan de x -as (fig. 69).
- 3 De voorwaarde dat f' op het open interval $\langle a, b \rangle$ bestaat, is essentieel. Men zie bijv. fig. 70. In het punt C van de grafiek is de raaklijn verticaal, de functie is dus niet differentieerbaar in $x = c$. In geen enkel punt van de kromme loopt de raaklijn evenwijdig aan de x -as.
- 4 Van f' is slechts geëist dat ze bestaat op het open interval $\langle a, b \rangle$, het is dus niet nodig dat $f'(a)$ of $f'(b)$ bestaan. Men kan als voorbeeld een halve cirkel nemen met de middellijn evenwijdig aan de x -as. In de eindpunten staan de raaklijnen loodrecht op de x -as en is de functie niet differentieerbaar.

Een uitbreiding van de stelling van Rolle is de voor de theorie belangrijke middelwaardestelling.

Fig. 69

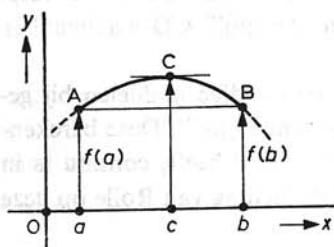
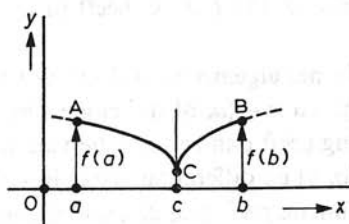


Fig. 70



Middelwaardestelling

Is f continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$, dan is er minstens één punt c van $\langle a, b \rangle$, waarvoor:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bewijs:

We beschouwen op $[a, b]$ de functie φ , gedefinieerd door:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda x \quad (59.3)$$

waarin λ een constante is. φ is continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$. We kiezen nu λ zo dat $\varphi(a) = \varphi(b)$. Er moet dus gelden:

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$$

of wel:

$$\lambda = - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (59.4)$$

Volgens het theorema van Rolle, toegepast op φ , is er dus een punt $c \in \langle a, b \rangle$, waarvoor $\varphi'(c) = 0$, of volgens (59.3):

$$\varphi'(c) = f'(c) + \lambda = 0$$

of:

$$f'(c) = -\lambda$$

en wegens (59.4):

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (c \in \langle a, b \rangle) \quad (59.5)$$

Opmerkingen:

- 1 Meetkundig gezien betekent deze stelling, dat er ergens op $\langle a, b \rangle$ een punt c is, waarvoor de raaklijn in het bijbehorend punt C van de kromme $y = f(x)$ (fig. 71) evenwijdig is aan de koorde AB door de punten behorende bij $x = a$ resp. $x = b$. Dit punt C heeft in fig. 71 de eigenschap dat de „pijl” CD maximaal is.

In het algemene geval kunnen we met eenvoudige meetkundige middelen bij gegeven $x \in [a, b]$ de lengte uitrekenen van de bijbehorende „pijl”. Deze berekening geeft dan een functie van x , die in a en in b de waarde 0 heeft, continu is in $[a, b]$ en differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$. Toepassing van de stelling van Rolle op deze functie geeft dan de middelwaardestelling.

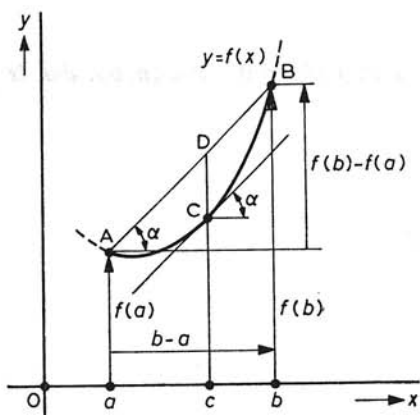


Fig. 71

2 Men schrijft (59.5) vaak in de vorm:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \quad (c \in \langle a, b \rangle)$$

Deze betrekking blijft ook geldig als we a en b verwisselen. Zijn x_1 en x_2 de eindpunten van een interval waarvoor de voorwaarden van de middelwaardstelling gelden, dan is:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi) \quad (\xi \in \langle x_1, x_2 \rangle)$$

Of $x_2 > x_1$, dan wel $x_2 < x_1$, is hierbij van geen betekenis.

Gevolg 1

Is f continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$ en $f'(x) > 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$, dan is f monotoon stijgend op $[a, b]$.

Bewijs:

Zijn x_1 en x_2 punten van $[a, b]$, dan is:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi) \quad (\xi \in \langle x_1, x_2 \rangle)$$

Daar $f'(\xi) > 0$ is, geldt $f(x_2) - f(x_1) > 0$ indien $x_2 - x_1 > 0$, hetgeen betekent dat f monotoon stijgt op $[a, b]$.

Gevolg 2

Is f continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$ en $f'(x) < 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$, dan is f monotoon dalend op $[a, b]$.

Bewijs:

Het bewijs is analoog aan dat onder 1 en wordt aan de lezer overgelaten.

Gevolg 3

Is f continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$ en $f'(x) = 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$, dan is f constant op $[a, b]$.

Bewijs:

Voor elk tweetal punten x_1 en x_2 van $[a, b]$ geldt:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi) = 0$$

dus $f(x_2) = f(x_1) = \text{constant}$.

Gevolg 4

Zijn f en g continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$ en geldt $f'(x) = g'(x), \forall x \in \langle a, b \rangle$, dan is $f - g$ constant op $[a, b]$.

Stel $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, dan is $\varphi'(x) = 0$ op $\langle a, b \rangle$, dus volgens 3 is φ constant op $[a, b]$, waaruit volgt dat $f(x) - g(x)$ een constante is $\forall x \in [a, b]$.

We gaan thans de betekenis van deze gevolgen na. We hebben aangetoond (par. 41) dat indien f monotoon niet-dalend is, geldt $f' \geq 0$. Gevolg 1 toont aan dat omgekeerd, indien $f' > 0$ is, f monotoon stijgt. Is $f' \geq 0$, dan volgt uit de gevolgen 1 en 3 dat f monotoon niet-dalend is. Uit de gevolgen 2 en 3 volgt de overeenkomstige eigenschap voor monotoon dalende of niet-stijgende functies.

Opmerking bij gevolg 3:

Met nadruk zij gewezen op de eisen van continuïteit en differentieerbaarheid in $[a, b]$ respectievelijk $\langle a, b \rangle$. Als bijv. f gedefinieerd is door:

$$f(x) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

$$f(x) = 2, \quad x \in \langle 1, 2 \rangle$$

dan geldt wel $f'(x) = 0$ voor alle x waar de functie differentieerbaar is, maar niet geldt $f(x) = c$ (één constante) voor alle x in het domein.

Opmerking bij gevolg 4:

Ook hier moet op de eisen van continuïteit en differentieerbaarheid scherp worden gelet. Als bijv. de functies f en g gedefinieerd zijn door:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2]$$

$$g(x) = x^2 + 1, \quad x \in [0, 1]$$

$$g(x) = x^2 + 2, \quad x \in \langle 1, 2 \rangle$$

dan geldt wel voor alle x van $[0, 2]$ waar f en g differentieerbaar zijn dat $f'(x) = g'(x)$, doch niet $f(x) - g(x) = C$ (één constante) voor alle x van $[0, 2]$.

Is aan de genoemde eisen wel voldaan, dan zullen f en g inderdaad een constante (gelijk voor het gehele interval) verschillen. Dit betekent dat twee primitieven van dezelfde functie slechts een constante verschillen. Hiervan hebben we reeds in par. 22 e.v. gebruik gemaakt.

De middelwaardestelling kan soms worden toegepast voor het bewijzen van ongelijkheden.

Voorbeeld 1

Te bewijzen:

$$\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2 \text{ voor } x > 0$$

Bewijs:

Stel:

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$$

dan is:

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x \\ &= \frac{x^2}{1+x} \end{aligned}$$

Volgens de middelwaardestelling is:

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \text{ voor zekere } \xi \in \langle 0, x \rangle$$

dus:

$$\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{x\xi^2}{1+\xi} \quad (\xi \in \langle 0, x \rangle)$$

Daar $x > 0$ is, is $\xi > 0$, en is het rechterlid groter dan nul, d.w.z. $f(x) > 0$, waarmee het gestelde bewezen is.

Voorbeeld 2

Te bewijzen:

$$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3 \text{ voor } x > 0$$

Bewijs:

Stel:

$$f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$$

dan is:

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$f(x) = f(x) - f(0) = xf'(\xi) \quad (\xi \in \langle 0, x \rangle)$$

$$f(x) = x(\cos \xi - 1 + \frac{1}{2}\xi^2)$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \cos \xi - 1 + \frac{1}{2}\xi^2 &= -2 \sin^2 \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\xi}{\frac{1}{2}\xi} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Bekend is dat $\frac{\sin x}{x} < 1$ voor $x \neq 0$. Dus is $\cos \xi - 1 + \frac{1}{2}\xi^2 > 0$ voor $x \neq 0$.

Hieruit volgt:

$$f(x) = x(\cos \xi - 1 + \frac{1}{2}\xi^2) > 0 \text{ voor } x > 0$$

waarmede het gestelde bewezen is.

Opmerking:

Het bewijs kan eenvoudiger geleverd worden op een manier die in par. 63 behandeld wordt.

60 De middelwaardstelling voor twee functies

Een uitbreiding van de middelwaardstelling is de volgende stelling.

Stelling

Zijn f en g continu in $[a, b]$, differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$, en is $g'(x) \neq 0$ op $\langle a, b \rangle$, dan is er een punt $c \in \langle a, b \rangle$, waarvoor:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (a < c < b) \quad (60.1)$$

Bewijs:

We beschouwen de functie φ , waarvoor geldt:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x) \quad (60.2)$$

waarin λ een constante is. Deze functie is continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in $\langle a, b \rangle$. We kiezen nu λ zo dat $\varphi(a) = \varphi(b)$. Er moet dus gelden:

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \quad (60.3)$$

Omdat $g'(x) \neq 0$ op $\langle a, b \rangle$ is $g(b) - g(a) = (b - a)g'(\xi) \neq 0$; zodat uit (60.3) volgt:

$$\lambda = - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (60.4)$$

Volgens het theorema van Rolle, toegepast op φ , is er dus een punt $c \in \langle a, b \rangle$, waarvoor $\varphi'(c) = 0$, of volgens (60.2):

$$\varphi'(c) = f'(c) + \lambda g'(c) = 0$$

Daar $g'(c) \neq 0$ is, heeft men:

$$\lambda = - \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (60.5)$$

Uit (60.4) en (60.5) volgt dan (60.1).

Opmerking:

Voor $g(x) = x$ ($\forall x \in [a, b]$) gaat de bovenstaande stelling in de oorspronkelijke middelwaardestelling over.

Uit de hierboven genoemde stelling leidt men eenvoudig een stelling af die gebruikt kan worden voor het berekenen van limieten, en die de regel van de l'Hôpital wordt genoemd.

Regel van de l'Hôpital (1661–1704)

Zijn f en g differentieerbaar in een gereduceerde omgeving van $x = a$, is in deze omgeving $g'(x) \neq 0$, is verder $f(a) = 0$ en $g(a) = 0$, en bestaat $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$, dan is:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bewijs:

Volgens de middelwaardstelling voor twee functies geldt, daar $f(a) = g(a) = 0$;

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (x \neq a, \xi \in \langle a, x \rangle)$$

Bestaat $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$, dan is:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

want ξ ligt tussen a en x , dus is in dit geval:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Voorbeeld 1

Bereken:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2}$$

Oplossing:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{2x} = -2.$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\tan x}$$

Oplossing:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{\cos^{-2} x} = 1$$

Het kan voorkomen dat men na toepassing van de regel weer uitkomt op $\frac{0}{0}$. Soms geeft dan een herhaalde toepassing van de regel resultaat.

Voorbeeld 3

Bereken:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Opmerking:

Men moet zich vooraf overtuigen dat $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ bestaat. Is bijv. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, ($x \neq 0$), $f(0) = 0$, $g(x) = \sin x$, dan is

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} \\ &= \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \end{aligned}$$

De teller in deze breuk heeft geen limiet voor $x = 0$, de noemer wel, dus ook niet de breuk zelf. De regel van de l'Hôpital is dus niet toe te passen. Echter is:

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x}$$

Omdat $\sin \frac{1}{x}$ begrensd is, is $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Verder is:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

zodat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$$

en dus wel bestaat.

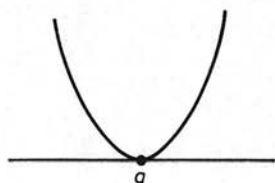
Een functie f , gedefinieerd in een interval dat a als inwendig punt bevat, is voor a extreem, indien er een gereduceerde omgeving van a bestaat, waarop voor elke x $f(x)$ of groter, of kleiner is dan $f(a)$. In het eerste geval heeft de functie voor $x = a$ een *relatief minimum*, in het tweede geval een *relatief maximum*.

We nemen aan dat de functie continu is in $x = a$ en differentieerbaar in de gereduceerde omgeving $\langle a - h | a + h \rangle$. We eisen dus niet dat de functie differentieerbaar is in $x = a$.

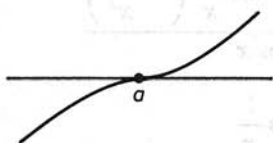
Is nu verder bekend dat $f'(x) < 0$ is, in $\langle a - h, a \rangle$ en $f'(x) > 0$ in $\langle a, a + h \rangle$, dan is $f(x)$ dalend in $\langle a - h, a \rangle$ en stijgend in $[a, a + h)$.

Dit volgt door toepassing van de middelwaardestelling op $[x_1, a]$ en $[a, x_2]$, (waarbij $x_1 \in \langle a - h, a \rangle$ en $x_2 \in \langle a, a + h \rangle$) en de continuïteit van f in $x = a$. Er is dus een gereduceerde omgeving van a , waarvoor $f(x) > f(a)$ is, dus is $f(a)$ een *relatief minimum*.

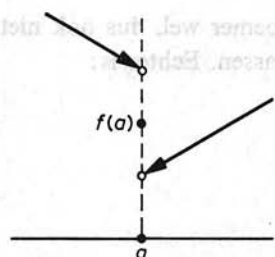
Fig. 72



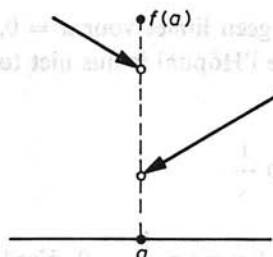
$f'(a) = 0$; extreem in a



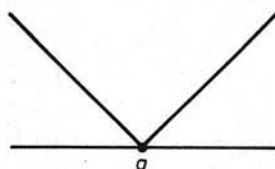
$f'(a) = 0$; geen extreem in a



f' wisselt van teken in a ;
geen extreem in a



f' wisselt van teken in a ;
extreem in a



f' wisselt van teken in a ;
extreem in a

De bovenstaande redenering geldt met voor de hand liggende wijziging voor een relatief maximum.

Om bij een *continue* functie tot een relatief extreem te kunnen besluiten is het dus voldoende, het tekenverloop van f' op een gereduceerde omgeving $\langle a - h | a + h \rangle$ te kennen. Is $f'(x) < 0$ op $\langle a - h, a \rangle$ en $f'(x) > 0$ op $\langle a, a + h \rangle$, dan is $f(a)$ een relatief minimum. Is $f'(x) > 0$ op $\langle a - h, a \rangle$ en $f'(x) < 0$ op $\langle a, a + h \rangle$, dan is $f(a)$ een relatief maximum.

Fig. 72 illustreert dat de voorwaarde $f'(a) = 0$ noch nodig, noch voldoende is voor het optreden van een extreem in $x = a$, en dat tekenwisseling van f' in $x = a$ niet voldoende is voor het optreden van een extreem in $x = a$, indien de functie niet continu is in $x = a$. Als evenwel de functie f continu is in $x = a$, dan is tekenwisseling van f' in $x = a$ een nodige en voldoende voorwaarde voor het optreden van een extreem in $x = a$.

In vele gevallen is de functie ook *differentieerbaar* in $x = a$. Is dit het geval, dan is $f'(a) = 0$, zowel bij een relatief minimum als bij een relatief maximum. We bewijzen dit voor een minimum. Er geldt op $\langle a - h, a \rangle$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

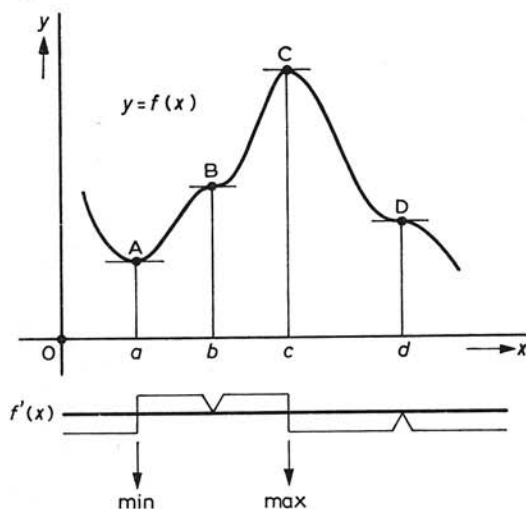
en op $\langle a, a + h \rangle$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

Hieruit volgt:

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, \quad \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

Fig. 72a



Daar de limiet voor $x \rightarrow a$ bestaat, is dus $f'(a) = 0$.
 Is omgekeerd alleen bekend dat $f'(a) = 0$, dan kan men nog niet besluiten tot een
 extreem voor $x = a$.

Ter toelichting diene fig. 72a. In de punten A, B, C en D is $f'(x) = 0$, echter geven
 alleen $x = a$ en $x = c$ extremen. Zoals we in par. 64 zullen aantonen zijn B en D
buigpunten met horizontale raaklijn van de kromme $y = f(x)$. Het tekenverloop
 van f' is op een getallenrechte in de figuur weergegeven.

Behalve relatieve extremen onderscheidt men ook *randextremen*. Hieronder verstaat
 men extremen die optreden aan de rand van het interval waarvoor de functie is
 gedefinieerd.

Voorbeeld 1

Bepaal alle relatieve extremen van de functie f als:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

Oplossing:

$$f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

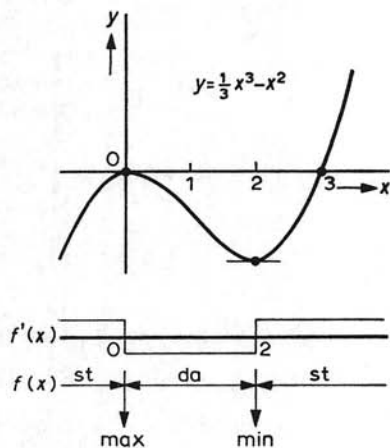
$$f'(0) = 0, f'(2) = 0$$

Voor $x < 0$ en voor $x > 2$ is $f'(x) > 0$, dus f stijgend; voor $0 < x < 2$ is $f'(x) < 0$,
 dus f dalend.

Er is dus een maximum voor $x = 0$, omdat f continu is in $x = 0$, en wel $f(0) = 0$,
 en een minimum voor $x = 2$, $f(2) = -1\frac{1}{3}$ (f continu in $x = 2$).

Het tekenverloop van f' en het verloop van f zijn in fig. 73 geschetst.

Fig. 73



Voorbeeld 2

Bepaal alle relatieve extremen van de functie f als:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$$

Oplossing:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2) = \frac{1}{3}x^2(x - 3)$$

$$f'(0) = 0, \quad f'(3) = 0$$

Voor $x > 3$ is $f'(x) > 0$; voor $x < 0$ en $0 < x < 3$ is $f'(x) < 0$. Bij $x = 0$ treedt geen tekenwisseling van f' op, omdat x^2 een kwadratische factor is. Er is dus een relatief minimum voor $x = 3$, $f(3) = -2\frac{1}{4}$.

Het tekenverloop van f' en het verloop van f zijn geschetst in fig. 74.

Voorbeeld 3

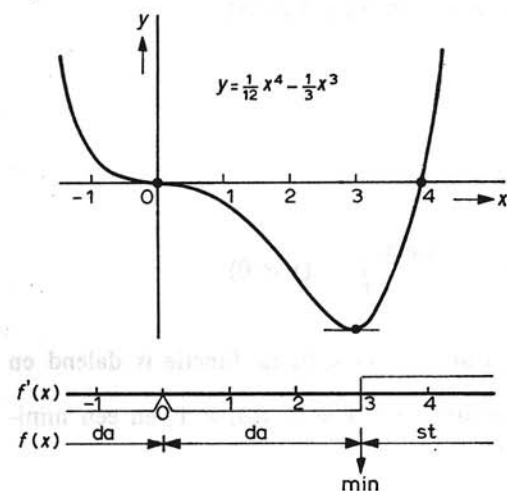
Bepaal alle extremen van f als:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3} \text{ op } [-1, 2]$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}(x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 3x^2) \\ &= \frac{2 - 3x}{3x^{\frac{2}{3}}(1 - x)^{\frac{2}{3}}} \quad (x \neq 0, x \neq 1) \end{aligned}$$

Fig. 74



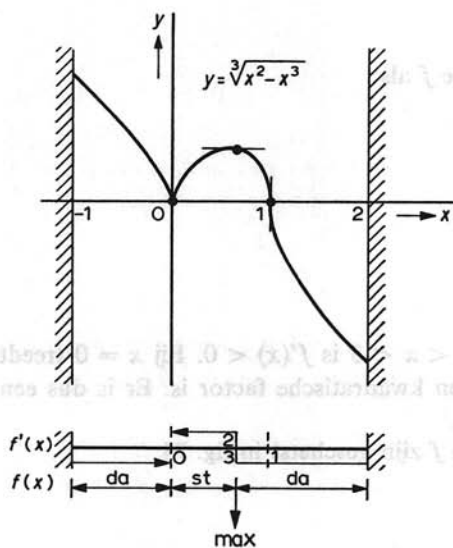


Fig. 75

In $x = 0$ en $x = 1$ is de functie niet differentieerbaar. Tekenwisseling van f' heeft plaats bij $x = 0$ en $x = \frac{2}{3}$.

Voor $x < 0$ is $f'(x) < 0$, voor $0 < x < \frac{2}{3}$ is $f'(x) > 0$, voor $x > \frac{2}{3}$ ($x \neq 1$) is $f'(x) < 0$.

Voor $x = 0$ is f relatief minimaal, $f(0) = 0$, voor $x = \frac{2}{3}$ is f relatief maximaal, $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$. Zoals uit het tekenverloop van f' blijkt is $f(-1) = \sqrt[3]{2}$ een randmaximum en $f(2) = -\sqrt[3]{4}$ een randminimum.

Het tekenverloop van f' en het verloop van f zijn geschetst in fig. 75.

Voorbeeld 4

Bepaal alle extremen van de functie f gegeven op $[0, \frac{1}{2}\pi]$ door:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Oplissing:

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{\tan x}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

Op $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ is $\frac{\tan x}{x} > 1$ en $\cos x > 0$, dus is $f'(x) < 0$; de functie is dalend en heeft slechts randextremen, nl. een maximum voor $x = 0$, $f(0) = 1$, en een minimum voor $x = \frac{1}{2}\pi$, $f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{2}{\pi}$.

62 Extreme waarden 2

We hebben in par. 61 gezien dat, indien voor een functie f geldt dat $f'(a) = 0$, de functie in a een extreem kan hebben. In sommige gevallen biedt het onderzoek van het tekenverloop moeilijkheden terwijl f'' een eenvoudiger gedaante heeft. Er geldt nu de volgende stelling.

Stelling 1

Is $f'(a) = 0$, f' continu in a , en bestaat f'' op de gereduceerde omgeving $\langle a - h | a + h \rangle$, dan heeft f in a een relatief minimum als $f''(x) > 0, \forall x \in \langle a - h | a + h \rangle$, en een relatief maximum als $f''(x) < 0, \forall x \in \langle a - h | a + h \rangle$.

Bewijs:

Onderstellen we nl. $f''(x) > 0$ op $\langle a - h | a + h \rangle$, dan is f' stijgend op $\langle a - h, a + h \rangle$, daar f' continu is in a . Daar $f'(a) = 0$, is dus $f'(x) < 0, \forall x \in \langle a - h, a \rangle$ en $f'(x) > 0, \forall x \in \langle a, a + h \rangle$. Volgens de vorige paragraaf is dus $f(a)$ een minimum. Evenzo volgt dat $f(a)$ een maximum is als $f''(x) < 0, \forall x \in \langle a - h | a + h \rangle$.

Stelling 2

Is $f'(a) = 0$, en bestaat $f''(a)$, dan is $f(a)$ een relatief extreem indien $f''(a) \neq 0$ is, en wel een minimum als $f''(a) > 0$ is, en een maximum als $f''(a) < 0$ is.

Bewijs:

We nemen het geval: $f''(a) > 0$.

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

Omdat $f''(a) > 0$ is, is er een gereduceerde omgeving $\langle a - h | a + h \rangle$, waarop het differentiequotient $(f'(x) - f'(a))/(x - a)$ groter dan nul is. Daar $f'(a) = 0$, is voor deze omgeving $f'(x) < 0$ als $x \in \langle a - h, a \rangle$, dus $x < a$ is, en is $f'(x) > 0$ als $x \in \langle a, a + h \rangle$, dus $x > a$ is. Dus is volgens par. 61 $f(a)$ een minimum.

Het geval: $f''(a) < 0$, wordt op soortgelijke wijze behandeld.

Hoe f zich gedraagt, indien $f'(a) = 0$ en $f''(a) = 0$ moet nader bezien worden. Men kan hierbij gebruik maken van de volgende hulpstelling.

Hulpstelling

Is $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, f' continu in a , bestaat verder f'' op de gereduceerde omgeving $\langle a - h | a + h \rangle$ en is f'' constant van teken op $\langle a - h, a \rangle$ en eveneens op $\langle a, a + h \rangle$, dan heeft f op $\langle a - h | a + h \rangle$ hetzelfde tekenverloop als f'' .

Bewijs:

Neem aan $f''(x) > 0$ op $\langle a - h | a + h \rangle$, dan is f' stijgend op $\langle a - h, a + h \rangle$. Omdat $f'(a) = 0$, en f' continu in a , is $f'(x) < 0$ op $\langle a - h, a \rangle$ en is $f'(x) > 0$ op $\langle a, a + h \rangle$. Hieruit volgt weer dat f dalend is op $\langle a - h, a \rangle$ en stijgend op $\langle a, a + h \rangle$. Daar $f(a) = 0$ is, is $f(x) > 0$ op $\langle a - h, a \rangle$ en is ook $f(x) > 0$ op $\langle a, a + h \rangle$.

Ter verduidelijking zie men fig. 76a, waarin het tekenverloop van f'' , f' en f is weergegeven.

Nemen we aan $f''(x) < 0$ op $\langle a - h, a \rangle$ en $f''(x) > 0$ op $\langle a, a + h \rangle$, dan is f' dalend op $\langle a - h, a \rangle$ en is f' stijgend op $\langle a, a + h \rangle$. Omdat $f'(a) = 0$, is dus $f'(x) > 0$ op $\langle a - h, a \rangle$, en is ook $f'(x) > 0$ op $\langle a, a + h \rangle$. Dus is f stijgend op $\langle a - h, a + h \rangle$. Daar $f(a) = 0$, is $f(x) < 0$ op $\langle a - h, a \rangle$ en is $f(x) > 0$ op $\langle a, a + h \rangle$.

Het tekenverloop van f'' , f' en f is weergegeven in fig. 76b. De overige gevallen worden op soortgelijke wijze behandeld.

Door toepassing van deze hulpstelling bewijzen we de volgende stelling.

Stelling 3

Is voor de functie f , $f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 1 \dots 2n - 1$), is $f^{(2n-1)}$ continu in $x = a$ en bestaat $f^{(2n)}$ op de gereduceerde omgeving $\langle a - h | a + h \rangle$, dan is $f(a)$ een relatief minimum als $f^{(2n)}(x) > 0$ is op $\langle a - h | a + h \rangle$, en een relatief maximum als $f^{(2n)}(x) < 0$ is op dit interval.

Fig. 76a

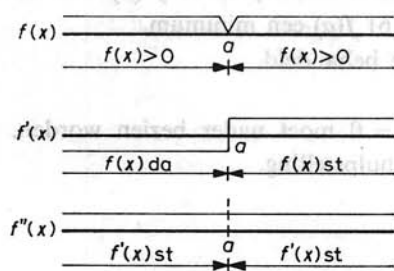
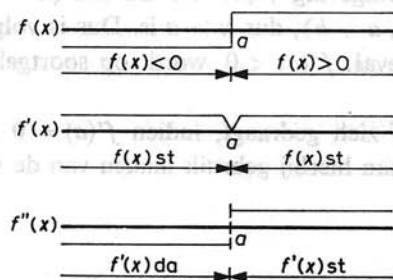


Fig. 76b



Bewijs:

Door herhaald toepassen van de hierboven genoemde hulpstelling volgt dat het tekenverloop van $f^{(2n)}$ op $\langle a - h, a + h \rangle$ hetzelfde is als dat van f'' , waardoor dit geval is teruggebracht tot Stelling 1 van deze paragraaf.

Bestaat $f^{(2n)}(a)$, dan geldt volgende stelling.

Stelling 4

Is voor de functie f , $f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 1 \dots 2n - 1$), en bestaat $f^{(2n)}(a)$, dan is $f(a)$ een relatief minimum als $f^{(2n)}(a) > 0$ is, en een relatief maximum, als $f^{(2n)}(a) < 0$ is.

Bewijs:

Op soortgelijke wijze als bij stelling 2 bewijst men eerst voor het geval $f^{(2n)}(a) > 0$, dat $f^{(2n-2)}$ daalt op $\langle a - h, a \rangle$ en stijgt op $\langle a, a + h \rangle$. Daarna wordt door toepassing van de hulpstelling dit geval teruggebracht tot stelling 1.

Het geval $f^{(2n)}(a) < 0$ behandelt men geheel analoog.

Op soortgelijke wijze bewijst men:

Is voor de functie f , $f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 1 \dots 2n$) en is $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$, dan heeft f geen extreme waarde in $x = a$.

Samenvatting

Is $f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 1, \dots, n - 1$) ($n \geq 2$) en $f^{(n)}(a) \neq 0$, dan is $f(a)$ slechts dan een extreem, als n even is, en wel een minimum als $f^{(n)}(a) > 0$ is, en een maximum als $f^{(n)}(a) < 0$ is.

63 Ongelijkheden

Vele ongelijkheden betreffende functies kunnen bewezen worden door onderzoek van het tekenverloop van de afgeleiden der functies.

Voorbeeld 1

Te bewijzen:

$$0 < \sin x < x - \frac{1}{6}x^3 \text{ voor } x > 0$$

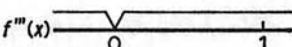
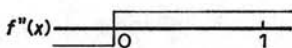
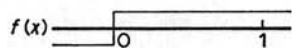


Fig. 77

Oplossing:

Dit voorbeeld is reeds behandeld in par. 59. We geven thans een eenvoudiger oplossing. We definiëren een functie f door:

$$f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3, \text{ dus } f(0) = 0.$$

We differentiëren zo vaak totdat we een afgeleide verkrijgen, waarvan het tekenverloop eenvoudig is na te gaan.

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x + x, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x + 1 = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x, \quad f'''(0) = 0$$

We zien dat $f'''(x) \geq 0$ is voor $x \neq 0$. Hetzelfde geldt volgens de hulpstelling van par. 62 voor $f''(x)$. Dus is f stijgend, en omdat $f(0) = 0$, is $f(x) < 0$ voor $x < 0$ en is $f(x) > 0$ voor $x > 0$. Voor het tekenverloop van de diverse afgeleiden zie men fig. 77.

Voorbeeld 2

Te bewijzen:

$$\cos \frac{1}{2}\pi x \leq 1 - x^2 \text{ voor } 0 \leq x \leq 1$$

Oplossing:

We definiëren een functie f door:

$$f(x) = \cos \frac{1}{2}\pi x - 1 + x^2, \text{ dus } f(0) = 0 \quad \text{en } f(1) = 0, \text{ dan geldt:}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\pi \sin \frac{1}{2}\pi x + 2x, \quad f'(0) = 0; \quad f'(1) = -\frac{1}{2}\pi + 2 > 0$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\pi^2 \cos \frac{1}{2}\pi x + 2, \quad f''(0) = 2 - \frac{1}{4}\pi^2 < 0; \quad f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{1}{8}\pi^3 \sin \frac{1}{2}\pi x, \quad f'''(0) = 0$$

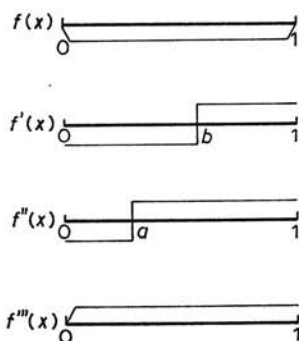


Fig. 78

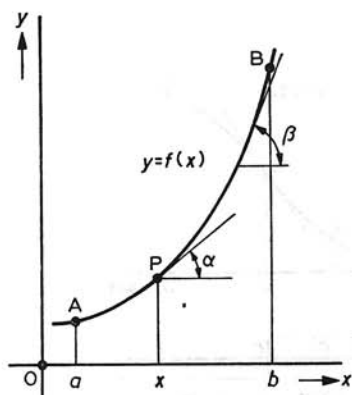


Fig. 79

Op $\langle 0, 1 \rangle$ is $f'''(x) > 0$, dus f'' stijgend. Omdat $f''(0) < 0$ en $f''(1) > 0$ moet voor een getal a tussen 0 en 1, $f''(a) = 0$ zijn (fig. 78), want f'' is continu en stijgend. Hieruit volgt weer dat f' dalend is op $\langle 0, a \rangle$ en stijgend op $\langle a, 1 \rangle$. Daar $f'(0) = 0$, is in een rechteromgeving van 0 $f'(x) < 0$, en omdat $f'(1) > 0$ is in een linkeromgeving van 1, $f'(x) > 0$. Omdat f' continu is, is $f'(x) = 0$ voor een getal $x = b$ tussen 0 en 1. Bijgevolg is f dalend op $\langle 0, b \rangle$ en stijgend op $\langle b, 1 \rangle$. Aangezien $f(0) = 0$, is $f(x)$ in een rechteromgeving van 0 negatief, f daalt tot de functie voor $x = b$ een minimum heeft bereikt, en stijgt vervolgens tot voor $x = 1$ de functie weer 0 is. Op het gehele interval $\langle 0, 1 \rangle$ is dus $f(x) < 0$, wat te bewijzen was.

64 Meetkundige betekenis van het teken van f'' . Buigpunten

In par. 62 hebben we de betekenis van f'' nagegaan in verband met het onderzoek naar extreme waarden. Zoals we in het volgende zullen aantonen, hangt het teken van f'' samen met het min of meer gekromd zijn van de kromme $y = f(x)$.

Zij $\alpha(x)$ de hoek die de raaklijn aan deze kromme in een punt met abscis x insluit met de positieve richting van de x -as (fig. 79), dan is:

$$f'(x) = \tan \alpha(x)$$

We nemen volgens de afspraak van par. 15 voor $\alpha(x)$ een getal van het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, dan is dus:

$$\alpha(x) = \arctan f'(x)$$

dus als $\alpha: x \mapsto \alpha(x)$, geldt:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)}$$

Is op $\langle a, b \rangle$ $f''(x) > 0$, dan is dus ook $\frac{d\alpha}{dx} > 0$, dus is α een stijgende functie van x .

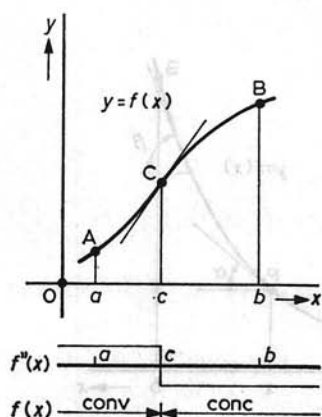


Fig. 80

Dit betekent dat bij toenemende $x \in \langle a, b \rangle$, de hoek $\alpha(x)$ die de raaklijn met de positieve x -as maakt, toeneemt. De raaklijn draait dus hierbij in positieve zin (linksom). De kromme keert dus in dit geval de bolle (convexe) kant naar beneden d.i. de richting van de negatieve y -as. We noemen daarom de kromme *convex* op $\langle a, b \rangle$.

Is op $\langle a, b \rangle$ $f''(x) < 0$, dan blijkt evenzo dat de kromme de holle (concafe) kant keert naar de richting van de negatieve y -as. De kromme heet dan *concaaf* op $\langle a, b \rangle$.

Wisselt op $\langle a, b \rangle$ (fig. 80) voor een inwendig punt c de functie f'' van teken, dan gaat in het punt met abscis c de kromme over van convex in concaaf of omgekeerd.

Heeft in het punt met abscis c de kromme een raaklijn dan buigt in dit punt (C) de kromme door de raaklijn heen, en heet het punt C een *buigpunt* van de kromme.

De raaklijn in C heet *buigraaklijn*.

We merken hierbij op dat de tweede afgeleide niet hoeft te bestaan voor $x = c$.

Is echter f'' continu in c , dan moet volgens de stelling van Weierstrasz (par. 35) $f''(c) = 0$ zijn. Anderszijds is het nul zijn van $f''(c)$ geen criterium voor een buigpunt.

Is nl. $f''(c) = 0$, dan hoeft f'' nog niet van teken te wisselen in c , zoals men aan voorbeeld 2 zal zien.

Omtrent de waarde van $f'(c)$ is ook niets bepaald. Het is mogelijk dat de eerste afgeleide in c niet bestaat (voorbeeld 1). Is $f'(c) = 0$, dan heeft men een buigpunt met horizontale buigraaklijn, zoals in fig. 72 in de punten B en D.

Enkele stellingen, belangrijk voor het verloop van een kromme, zijn de volgende.

Stelling 1

Als f gedefinieerd is op $[a, b]$, en f' een differentieerbare afgeleide in $[a, b]$ bezit, en $f''(x) > 0$ op $\langle a, b \rangle$, dan ligt de grafiek van f op $\langle a, b \rangle$ „boven” de raaklijn in $(a, f(a))$, en „onder” de koorde door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$.

Bewijs:

Stelt men:

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

dan is $g(a) = 0$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$, $g'(a) = 0$, $g''(x) = f''(x)$.

Uit $f''(x) > 0$ op $\langle a, b \rangle$ volgt (zie par. 59, gevolg 1), dat f' en dus g' stijgend is op $[a, b]$.

Daar $g'(a) = 0$ is dus $g'(x) > 0$ op $\langle a, b \rangle$, en dus g stijgend op $[a, b]$. In verband met $g(a) = 0$ volgt $g(x) > 0$ op $\langle a, b \rangle$ en het eerste gedeelte van de bewering.

Om het tweede deel te bewijzen stellen we $h(x) = l(x) - f(x)$, waarin l de lineaire functie is met $l(a) = f(a)$ en $l(b) = f(b)$. De richtingscoëfficiënt van de rechte lijn met vergelijking $l(x) = 0$ is dan:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

en dus is:

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x), \quad h''(x) = -f''(x)$$

Volgens de middelwaardstelling is:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\theta) \text{ met } a < \theta < b$$

zodat:

$$h'(x) = f'(\theta) - f'(x), \text{ en } h'(\theta) = 0$$

Uit $f''(x) > 0$ op $\langle a, b \rangle$ volgt $h''(x) < 0$ op $\langle a, b \rangle$, zodat h' dalend is op $[a, b]$, en wegens $h'(\theta) = 0$ is dus $h'(x) > 0$ voor $x \in [a, \theta]$ en $h'(x) < 0$ voor $x \in \langle \theta, b \rangle$. Hieruit volgt in verband met $h(a) = h(b) = 0$ dat $h(x) > 0$, en dus $l(x) > f(x)$ op $\langle a, b \rangle$, waaruit het tweede deel van de bewering volgt.

Op dezelfde wijze bewijst men de volgende stelling.

Stelling 2

Als f gedefinieerd is op $[a, b]$, en f een differentieerbare afgeleide in $[a, b]$ bezit, en $f''(x) < 0$ op $\langle a, b \rangle$, dan ligt de grafiek van f „onder” de raaklijn in $(a, f(a))$ en „boven” de koorde door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$.

Voorbeeld 1

Onderzoek op buigpunten de grafiek van de functie f , gedefinieerd voor alle x door:

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \sqrt[3]{x}$$

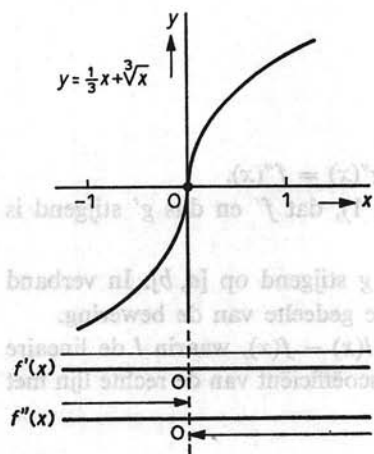


Fig. 81

Oplossing:

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

De tweede afgeleide is positief voor $x < 0$, en negatief voor $x > 0$, terwijl ze niet bestaat voor $x = 0$. De grafiek van f is dus convex voor $x < 0$, en concaaf voor $x > 0$. Uit $f'(x) = \frac{1}{3}(1 + x^{-\frac{2}{3}})$, volgt dat $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$. Naarmate x dichter bij

nul ligt neemt de raaklijn een meer verticale stand aan. In O bestaat f' niet, maar wegens:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{3} + x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \infty$$

heeft de kromme O de y -as als raaklijn.

In fig. 81 is de grafiek geschetst.

Voorbeeld 2

Onderzoek op buigpunten de grafiek van de functie f , gedefinieerd voor alle x door:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$$

Oplossing:

$$f'(x) = x^3 + 1$$

$$f''(x) = 3x^2$$

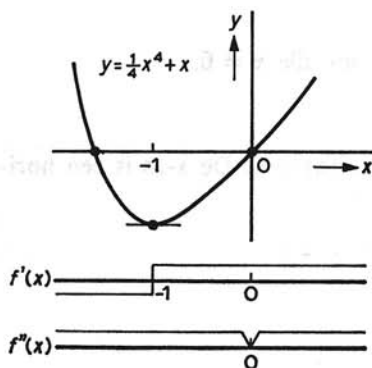


Fig. 82

$f''(x) > 0$ voor $x \neq 0$; de kromme is overal convex. Voor het tekenverloop van f'' en f' , evenals voor het verloop van de grafiek van f zie men fig. 82. Hoewel $f''(0) = 0$ heeft de kromme geen buigpunt voor $x = 0$.

65 Het schetsen van krommen

Bij het schetsen van krommen verdient het aanbeveling de volgende punten bij het onderzoek in acht te nemen:

- 1 Voor welke x is de bijbehorende functie gedefinieerd?
- 2 Bepaal eventuele snijpunten met de coördinaatassen.
- 3 Onderzoek of symmetrieën t.o.v. de coördinaatassen of t.o.v. de oorsprong aanwezig zijn. Is bijv. $f(-x) = f(x)$, $\forall x$ van het definitiegebied, d.w.z. is f even, dan is de grafiek van f symmetrisch t.o.v. de y -as. Is $f(-x) = -f(x)$, d.w.z. is f oneven, dan is er symmetrie t.o.v. de oorsprong.
- 4 Onderzoek (indien mogelijk i.v.m. definitiegebied) het gedrag van f voor grote positieve en negatieve x . Zijn er horizontale asymptoten?
- 5 Ga na of er verticale asymptoten zijn.
- 6 Onderzoek het tekenverloop van f' . Waar is f toenemend, waar afnemend? Zijn er extremen? Waar liggen ze, en hoe groot zijn ze?
- 7 Onderzoek het tekenverloop van f'' . Waar is de kromme convex, waar concaaf? Zijn er buigpunten? Waar liggen ze, en hoe loopt de buigraaklijn?

Voorbeeld

Schets de kromme met vergelijking $y = f(x)$, als de functie f gedefinieerd is voor alle $x \neq 0$ door:

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

Oplossing:

- 1 Blijkt het gegeven is de functie gedefinieerd voor alle $x \neq 0$.
- 2 Er zijn geen snijpunten met de assen.
- 3 Er zijn geen direct zichtbare symmetrieën.
- 4 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \exp(-x^{-1}) = 0 \cdot 1 = 0$; evenzo is $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. De x -as is een horizontale asymptoot.
- 5 Een verticale asymptoot is slechts mogelijk voor $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 0} x^{-1} \exp(-x^{-1}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} t \exp(-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\exp t} = 0 \quad \left(x = \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 0} x^{-1} \exp(-x^{-1}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} -t \exp t \\ &= -\infty \quad \left(x = -\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

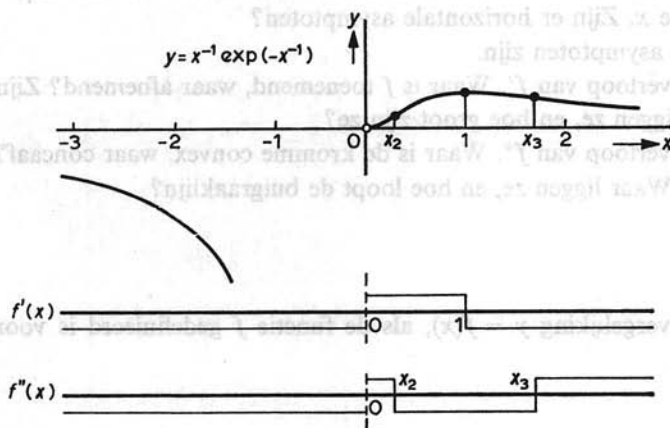
De y -as is een verticale asymptoot.

6

$$f'(x) = \frac{1-x}{x^3} \exp(-x^{-1})$$

Tekenwisseling vindt plaats bij $x = 0$ en $x = 1$. Voor $x < 0$ is $f'(x) < 0$, voor $0 < x < 1$ is $f'(x) > 0$, voor $x > 1$ is $f'(x) < 0$. De functie is dus dalend op $\langle \leftarrow, 0 \rangle$, stijgend op $\langle 0, 1 \rangle$ en dalend op $\langle 1, \rightarrow \rangle$. Ze heeft dus een relatief maximum voor $x = 1$; $f(1) = \exp(-1) = e^{-1}$. Bij $x = 0$ vindt wel tekenwisseling plaats van $f'(x)$, maar $f(0)$ is niet gedefinieerd.

Fig. 83



$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^5} \exp(-x^{-1})$$

Tekenwisseling heeft plaats bij $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $x_3 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor $x < 0$ is $f''(x) < 0$, op $\langle 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \rangle$ is $f''(x) < 0$, voor $x > 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is $f''(x) > 0$. De kromme is convex op $\langle 0, x_2 \rangle$ en $\langle x_3, \rightarrow \rangle$, concaaf op $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ en $\langle x_2, x_3 \rangle$, ze heeft buigpunten voor x_2 en x_3 . De kromme is geschetst in fig. 83.

66 Hogere afgeleiden. Regel van Leibniz (1646–1716)

Het is soms gewenst voor de n° afgeleide een eenvoudige uitdrukking op te stellen, bijv. bij de formule van Taylor (par. 106 e.v.). Dit gelukt slechts bij enkele functies.

Voorbeeld 1

Bepaal de n° afgeleide als:

$$f(x) = e^x$$

Oplossing:

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

Voorbeeld 2

Bepaal de n° afgeleide als:

$$f(x) = -e^{-x}$$

Oplossing:

$$f'(x) = e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x}$$

Voorbeeld 3

Bepaal de n° afgeleide als:

$$f(x) = \sin x$$

Oplossing:

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$$

$$f''(x) = \cos(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi)$$

$$= \sin(x + \pi)$$

Het vermoeden ligt voor de hand dat:

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$$

Dit vermoeden bewijst men eenvoudig door volledige inductie.

Voorbeeld 4

Bepaal de n° afgeleide als:

$$f(x) = \cos x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$$

Oplossing:

Uit voorbeeld 3 volgt onmiddellijk:

$$f^{(n)}(x) = \sin\{x + \frac{1}{2}(n+1)\pi\} = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi)$$

Voorbeeld 5

Bepaal de n° afgeleide als:

$$f(x) = \ln x$$

Oplossing:

$$f'(x) = x^{-1}$$

$$f''(x) = -x^{-2}$$

$$f'''(x) = 2x^{-3}$$

$$f^{IV}(x) = -3!x^{-4}$$

$$f^V(x) = 4!x^{-5}$$

Algemeen geldt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

Voorbeeld 6

Bepaal de n° afgeleide als:

$$f(x) = \frac{1}{x+a}$$

Oplossing:

$$f'(x) = -(x+a)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(x+a)^{-3}$$

$$f'''(x) = -3!(x+a)^{-4}$$

Algemeen:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x+a)^{-(n+1)}$$

Voorbeeld 7

Bepaal de n° afgeleide als:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

Oplossing:

Door toepassing van voorbeeld 6 volgt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} (-1)^n n! \{ (x-1)^{-(n+1)} - (x+1)^{-(n+1)} \}$$

Voorbeeld 8

Bepaal de n° afgeleide als:

$$f(x) = \arctan x$$

Oplossing:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Bij verder differentiëren blijkt dat de hogere afgeleiden onoverzichtelijke rationale functies van x worden. Het is dan ook niet mogelijk een eenvoudige uitdrukking voor $f^{(n)}(x)$ op te stellen. We zullen echter aantonen dat er in het geval van $\arctan x$ een formule op te stellen is die $f^{(n)}(x)$ uitdrukt in een of meer lagere afgeleiden. Een dergelijke formule noemt men een *recursieformule* of *recurrente betrekking*.

Met voordeel kan men in dit geval gebruik maken van een formule voor de n° afgeleide van het produkt van twee functies, die door Leibniz is opgesteld.

Zijn u en v twee voldoende vaak differentieerbare functies van x , en is $y = uv$, dan is:

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv''$$

$$= u''v + 2u'v' + uv''$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv'''$$

$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

De coëfficiënten in deze uitdrukking zijn blijkbaar dezelfde als bij de driehoek van Pascal, of het binomium van Newton.

Stellen we de n° afgeleide van y voor door $D^{(n)}y$, dan geldt de volgende regel.

Regel van Leibniz

Zijn u en v beide n -keer differentieerbare functies van x , dan is:

$$D^{(n)}(uv) = D^{(n)}u \cdot v + \binom{n}{1} D^{(n-1)}u Dv + \dots + \binom{n}{k} D^{(n-k)}u D^{(k)}v + \dots + u D^{(n)}v$$

Het bewijs van deze formule wordt geleverd door volledige inductie, en verloopt geheel parallel aan dat van het binomium van Newton.

Spreekt men af: $D^{(0)}u = u$ en $D^{(0)}v = v$, dan is de formule beknopt aldus te schrijven:

$$D^{(n)}(uv) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{(n-k)}u D^{(k)}v$$

We passen deze formule toe op de functie f , gedefinieerd voor alle x door:

$$f(x) = \arctan x$$

Dan geldt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

dus:

$$f'(x) \cdot (1+x^2) = 1$$

Het linkerlid van de laatste gelijkheid is een produkt van twee factoren. Om als hoogste afgeleide $f^{(n)}$ te vinden, bepalen we van het produkt $f'(x) \cdot (1+x^2)$ de $(n-1)^{\text{ste}}$ afgeleide. Volgens de regel van Leibniz is:

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + \binom{n-1}{1} f^{(n-1)}(x)D(1+x^2) + \binom{n-1}{2} f^{(n-2)}(x)D^{(2)}(1+x^2) = 0 \quad (66.1)$$

De afgeleiden van $(1+x^2)$, hoger dan de tweede, zijn nl. alle nul.

Uit (66.1) volgt verder:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + (n-1)2xf^{(n-1)}(x) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \cdot 2f^{(n-2)}(x) = 0 \quad (n > 1)$$

of:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0 \quad (n > 1) \quad (66.2)$$

De uitdrukking (66.2) drukt $f^{(n)}(x)$ uit in $f^{(n-1)}(x)$ en $f^{(n-2)}(x)$, en is dus een recursieformule voor de afgeleiden van $\arctan x$.

Bij de reeksontwikkeling volgens Maclaurin (par. 108) is het voldoende de opvolgende afgeleiden in $x = 0$ te kennen. Bij $\arctan x$ volgt uit (66.2):

$$f^{(n)}(0) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0) = 0$$

of:

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0) \quad (n > 1) \quad (66.3)$$

Nu is $f(0) = \arctan 0 = 0$, zodat volgens (66.3) ook $f''(0) = 0$, en dus ook $f^{(2n)}(0) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Verder geldt $f'(0) = 1$, zodat $f'''(0) = -2 \cdot 1 = -2!$, $f^{(5)}(0) = -4 \cdot 3f'''(0) = 4!$, en algemeen:

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n)!$$

Opmerking:

Het wordt de lezer overgelaten, om voor de functie f uit voorbeeld 7 een soortgelijke recursieformule op te stellen.

Systematische berekening van de primitieven van enige klassen van functies

Opmerking vooraf:

Wellicht ten overvloede wijzen we er op, dat bij het primitiveren in dit hoofdstuk uitsluitend *representanten* van de verzameling van alle primitieven van de betrokken integrand bepaald worden (zie ook par. 24).

$$67 \quad \int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$$

We denken ons in het volgende alle coëfficiënten reëel.

We onderscheiden bij de hierboven genoemde functie drie gevallen.

- 1 De nulpunten van $ax^2 + bx + c$ zijn reëel en verschillend.
- 2 De nulpunten van $ax^2 + bx + c$ zijn reëel en gelijk.
- 3 De nulpunten van $ax^2 + bx + c$ zijn niet reëel.

Geval 1

Zijn α_1 en α_2 de reële nulpunten van $ax^2 + bx + c$, dan leert de algebra dat de functie $\frac{px + q}{ax^2 + bx + c}$ eenduidig als volgt te splitsen is:

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{px + q}{a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2}$$

waarin A_1 en A_2 constanten zijn. Deze constanten zijn te bepalen door in de identiteit:

$$px + q \equiv A_1 a(x - \alpha_2) + A_2 a(x - \alpha_1)$$

voor x twee willekeurige waarden, bijv. α_1 en α_2 te substitueren.

Voorbeeld

Bereken:

$$\int \frac{-4x + 7}{2x^2 + 3x - 2} dx$$

Oplossing:

$$\frac{-4x + 7}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{-4x + 7}{(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A_1}{2x - 1} + \frac{A_2}{x + 2}$$

$$-4x + 7 \equiv A_1(x + 2) + A_2(2x - 1)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 + 7 = A_1 \cdot 2\frac{1}{2} \Rightarrow A_1 = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow 8 + 7 = A_2 \cdot (-5) \Rightarrow A_2 = -3$$

Dus:

$$\frac{-4x + 7}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{2}{2x - 1} - \frac{3}{x + 2}$$

Dus:

$$\begin{aligned} \int \frac{-4x + 7}{2x^2 + 3x - 2} dx &= \int \frac{2}{2x - 1} dx - \int \frac{3}{x + 2} dx \\ &= \ln |2x - 1| - 3 \ln |x + 2| \end{aligned}$$

Geval 2

In dit geval is de noemer $ax^2 + bx + c$ te schrijven als $a(x - \alpha)^2$. We stellen nu:

$$px + q = p(x - \alpha) + B \quad (B \text{ constant})$$

De gegeven breuk is nu als volgt te splitsen:

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{p(x - \alpha)}{a(x - \alpha)^2} + \frac{B}{a(x - \alpha)^2} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{B_1}{(x - \alpha)^2}$$

Voorbeeld

Bereken:

$$\int \frac{-2x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Oplossing:

Nu is:

$$\frac{-2x + 7}{x^2 - 4x + 4} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{(x - 2)^2}$$

zodat

$$-2x + 7 \equiv A_1(x - 2) + A_2$$

$$x = 2 \Rightarrow 3 = A_2$$

$$x = 0 \Rightarrow 7 = -2A_1 + A_2 \Rightarrow 7 = -2A_1 + 3 \Rightarrow A_2 = -2. \text{ Dus:}$$

$$\frac{-2x + 7}{x^2 - 4x + 4} = \frac{-2x + 7}{(x - 2)^2} = \frac{-2}{x - 2} + \frac{3}{(x - 2)^2}$$

want $-2x + 7 = -2(x - 2) + 3$.

Dus:

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx &= \int \frac{-2}{x - 2} dx + \int \frac{3}{(x - 2)^2} dx \\ &= -2 \ln |x - 2| - \frac{3}{x - 2} \end{aligned}$$

Geval 3

Men bepaalt in dit geval de afgeleide van de noemer, d.i. $2ax + b$, en berekent twee constanten A en B zo dat:

$$px + q = A(2ax + b) + B$$

De breuk is dan als volgt te splitsen:

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = A \cdot \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \frac{B}{ax^2 + bx + c}$$

Een primitieve van de eerste term in het rechterlid is $A \ln |ax^2 + bx + c|$. Om een primitieve van de tweede term te vinden, splitsen wij bij $ax^2 + bx + c$ een kwadraat af, aldus:

$$ax^2 + bx + c = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right\}$$

Daar $ax^2 + bx + c$ definitief is, is de discriminant $b^2 - 4ac < 0$, en is dus $(4ac - b^2)/4a^2$ een positief getal, stel k^2 . Past men verder de substitutie $x + \frac{b}{2a} = t$ toe, dan volgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{B dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{B dx}{a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right\}} \\ &= \int \frac{B dt}{a(t^2 + k^2)} = \frac{B}{ak} \arctan \frac{t}{k} \end{aligned}$$

$$= \frac{B}{ak} \arctan \frac{x + \frac{b}{2a}}{k} \quad \left(k^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

We vinden dus in geval 3:

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx = A \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{B}{ak} \arctan \frac{x + \frac{b}{2a}}{k}$$

Voorbeeld

Bereken:

$$\frac{8x - 1}{4x^2 + 4x + 2} dx$$

Oplossing:

De afgeleide van $4x^2 + 4x + 2$ is $8x + 4$.

$$8x - 1 = 8x + 4 - 5$$

dus:

$$\frac{8x - 1}{4x^2 + 4x + 2} = \frac{8x + 4}{4x^2 + 4x + 2} - \frac{5}{(2x + 1)^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{8x - 1}{4x^2 + 4x + 2} dx &= \int \frac{(8x + 4) dx}{4x^2 + 4x + 2} - \int \frac{2\frac{1}{2} d(2x + 1)}{(2x + 1)^2 + 1} \\ &= \ln(4x^2 + 4x + 2) - 2\frac{1}{2} \arctan(2x + 1) \end{aligned}$$

Ter bepaling van een primitieve van de functie:

$$f(x) = \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c}$$

waarin $P(x)$ een veelterm is van de tweede of hogere graad, deelt men eerst uit, en verkrijgt dan:

$$\frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} = Q(x) + \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}$$

waarin $Q(x)$ een veelterm in x is.

68 De primitieven van een rationale functie van x . Breuksplitsing

Stel dat R een gebroken rationale functie van x is met reële coëfficiënten. Is de teller van hogere graad dan de noemer, dan kan men uitdelen en verkrijgt men:

$$R(x) = G(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

waarin $G(x)$, $P(x)$ en $Q(x)$ veeltermen zijn, en $P(x)$ van lagere graad is dan $Q(x)$. We bepalen ons verder tot:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

De methode ter bepaling van de primitieven hangt af van de aard van de nulpunten van de noemer.

Geval 1

De nulpunten van de noemer zijn reëel en verschillend.

Stel dat de noemer de graad n heeft, en n onderling verschillende nulpunten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. De algebra leert dat de volgende splitsing in *partiële breuken* eenduidig mogelijk is:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x - \alpha_k} \quad (A_k \text{ is constant}) \quad (68.1)$$

Ter bepaling van de coëfficiënten A_k kan men als volgt te werk gaan.

Vermenigvuldig beide leden met $Q(x)$. Deze gaan dan over in identieke veeltermen in x . Bijgevolg moeten de coëfficiënten van x^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) gelijk zijn. Dit geeft juist n lineaire vergelijkingen in de n onbekenden A_k . Eenvoudiger bepaalt men deze coëfficiënten door in de identiteit achtereenvolgens de nulpunten α_k ($k = 1, \dots, n$) te substitueren, zoals wij dit in par. 67 bij geval 1 hebben uitgevoerd.

Geval 2

De nulpunten van de noemer zijn verschillend, er komen echter ook niet-reële nulpunten voor.

Ook in dit geval is een splitsing van de gedaante (68.1) mogelijk (zie par. 119). Omdat $Q(x)$ reële coëfficiënten heeft komen de niet-reële nulpunten paarsgewijze voor als toegevoegd complexe getallen. Naast de breuk $A/(x - \alpha)$ komt nu ook voor de breuk $\bar{A}/(x - \bar{\alpha})$, waarin \bar{A} de toegevoegd complexe van A , en $\bar{\alpha}$ die van α is. Neemt men beide breuken

samen, dan volgt:

$$\frac{A}{x - \alpha} + \frac{\bar{A}}{x - \bar{\alpha}} = \frac{(A + \bar{A})x - (\bar{A}\alpha + A\bar{\alpha})}{x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}}$$

In het rechterlid zijn $\alpha + \bar{\alpha}$, $\alpha\bar{\alpha}$ en $A + \bar{A}$ reëel. Van $\bar{A}\alpha + A\bar{\alpha}$ is de toegevoegd complexe: $A\bar{\alpha} + \bar{A}\alpha$, dus hetzelfde getal. Bijgevolg is ook $\bar{A}\alpha + A\bar{\alpha}$ reëel, en is:

$$\frac{A}{x - \alpha} + \frac{\bar{A}}{x - \bar{\alpha}} = \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} \quad (p, q, a, b, c \text{ reëel}) \quad (68.2)$$

Het bepalen van een primitieve van de breuk uit het rechterlid van (68.2) is in de vorige paragraaf behandeld.

Voorbeeld

Bereken:

$$F(x) = \int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx$$

Oplossing:

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &\equiv A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) \\ &\equiv (A + B)x^2 + (C - B)x + A - C \end{aligned}$$

Dus is:

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 0 \\ C - B &= 2 \\ A - C &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 1\frac{1}{2}, B = -1\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2 + 1}$$

$$F(x) = 1\frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{3}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \arctan x$$

Geval 3

De noemer heeft reële nulpunten, er komen echter ook meervoudige nulpunten voor.

Heeft $Q(x)$ het k -voudige nulpunt α , dan komen volgens de algebra bij de breuk-splitsing o.m. de volgende partiële breuken voor:

$$\frac{B_1}{x - \alpha}, \frac{B_2}{(x - \alpha)^2}, \frac{B_3}{(x - \alpha)^3}, \dots, \frac{B_k}{(x - \alpha)^k}$$

Hierbij kunnen verschillende tellers nul zijn. Echter is $B_k \neq 0$, omdat anders α een hoogstens $(k - 1)$ -voudig nulpunt zou zijn.

Voorbeeld

Bereken:

$$F(x) = \int \frac{-6x^2 + 13x - 4}{(x-1)^3(x+2)} dx$$

De noemer heeft het drievoudige nulpunt 1. Zoals we zullen zien, biedt het voordeel de breuk te transformeren door de substitutie $x - 1 = t$, waardoor de noemer van de nieuwe breuk het drievoudige nulpunt $t = 0$ verkrijgt.

$$\begin{aligned} \frac{-6x^2 + 13x - 4}{(x-1)^3(x+2)} &= \frac{-6t^2 + t + 3}{t^3(t+3)} \\ &= \frac{A}{t+3} + \frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t^2} + \frac{B_3}{t^3} \\ -6t^2 + t + 3 &\equiv At^3 + \left(\frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t^2} + \frac{B_3}{t^3} \right) t^3(t+3) \end{aligned}$$

Substitutie van $t = -3$ geeft $A = 2$. Breng nu de breuk $A/(t+3)$ naar het linkerlid. Na vereenvoudiging van het linkerlid heeft men dan direct B_1 , B_2 en B_3 , aldus:

$$\begin{aligned} \frac{-6t^2 + t + 3}{t^3(t+3)} - \frac{2}{t+3} &= \frac{-2t^3 - 6t^2 + t + 3}{t^3(t+3)} \\ &= \frac{-2t^2 + 1}{t^3} \\ &= \frac{-2}{t} + \frac{1}{t^3} \\ \frac{-6t^2 + t + 3}{t^3(t+3)} &= \frac{2}{t+3} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \end{aligned}$$

Wanneer we weer teruggaan van t naar x , dan blijkt dus:

$$F(x) = \int \left\{ \frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^3} \right\} dx$$

waaruit volgt:

$$F(x) = 2 \ln|x+2| - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)^2}$$

Geval 4

In de noemer komen ook meervoudige niet-reële nulpunten voor.

In dit geval komen bij de breuksplitsing breuken voor van de gedaante

$$\frac{p_1x + q_1}{ax^2 + bx + c}, \frac{p_2x + q_2}{(ax^2 + bx + c)^2}, \dots, \frac{p_kx + q_k}{(ax^2 + bx + c)^k} \quad (p_k, q_k) \neq (0, 0)$$

indien het niet-reële nulpunt α k -voudig is; hierin heeft $ax^2 + bx + c$ de nulpunten α en $\bar{\alpha}$.

Het bepalen van een primitieve van:

$$\frac{p_kx + q_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

is door een lineaire substitutie terug te brengen tot de bepaling van een primitieve van:

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^k}$$

welke breuk te splitsen is in:

$$\frac{Ax}{(x^2 + 1)^k} \quad \text{en} \quad \frac{B}{(x^2 + 1)^k}$$

Hiervan behoeven we alleen de bepaling van een primitieve van de tweede breuk te bespreken, omdat die van de eerste elementair is.

Noemen we $F_k(x)$ een primitieve van $1/(x^2 + 1)^k$ ($k \geq 2$), dan is:

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^k} \\ &= \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 + 1)^k} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^k} \\ &= F_{k-1}(x) - \int \frac{\frac{1}{2}x d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^k} \\ &= F_{k-1}(x) + \frac{x}{2(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{k-1}} \\ &= F_{k-1}(x) + \frac{x}{2(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)} F_{k-1}(x) \end{aligned}$$

dus:

$$F_k(x) = \frac{x}{2(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} F_{k-1}(x) \quad (k \geq 2) \quad (68.3)$$

Hiermede is een recursieformule voor F_k afgeleid. Door herhaalde toepassing van (68.3) komt men op een primitieve van $1/(x^2 + 1)$, d.i. $\arctan x$.

Opmerking:

De primitieve $F_k(x)$ is eenvoudiger te vinden door eerst de goniometrische substitutie $x = \tan t$ toe te passen ($-\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2}$).

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^k} \\ &= \int \frac{dt}{(\tan^2 t + 1)^k \cos^2 t} \\ &= \int \cos^{2k-2} t dt \end{aligned}$$

De primitieven van $\cos^n t$ worden in de volgende paragraaf behandeld.

69 Berekening van $\int \cos^n x dx$ en $\int \sin^n x dx$ ($n \in \mathbb{Z}$)

We stellen $F_n(x) = \int \cos^n x dx$, dan volgt met partiële integratie:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int \cos^n x dx \\ &= \int \cos^{n-1} x d(\sin x) \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int (\cos^{n-2} x - \cos^n x) dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)F_{n-2}(x) - (n-1)F_n(x) \end{aligned}$$

zodat:

$$F_n(x) = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} F_{n-2}(x) \quad (n \neq 0) \quad (69.1)$$

Is n een natuurlijk getal, dan komt men bij herhaalde toepassing van (69.1) op $F_1(x) = \int \cos x dx$ of op $F_0(x) = \int dx$.

Als n negatief geheel is, dan volgt uit (69.1):

$$F_{n-2}(x) = -\frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n-1} + \frac{n}{n-1} F_n(x) \quad (n \neq 1)$$

Stelt men $n-2 = -m$, dan volgt:

$$F_{-m}(x) = \frac{\cos^{-m+1} x \sin x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} F_{-m+2}(x) \quad (m \neq 1) \quad (69.2)$$

Bij herhaalde toepassing van (69.2) komt men bij oneven m op $F_{-1}(x) = \int \frac{dx}{\cos x}$, en deze berekent men als volgt.

$$\begin{aligned} F_{-1}(x) &= \int \frac{dx}{\cos x} \\ &= \int \frac{dx}{\sin(\frac{1}{2}\pi + x)} \\ &= \int \frac{dx}{2 \sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x) \cos(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)} \\ &= \int \frac{dx}{2 \tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x) \cos^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)} \end{aligned}$$

zodat:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln |\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)|$$

In sommige gevallen zijn er eenvoudiger methoden om $F_n(x)$ te berekenen.

1 n is een oneven positief getal: $n = 2m + 1$

$$F_n(x) = \int \cos^{2m+1} x dx = \int \cos^{2m} x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^m d(\sin x)$$

Stellen we nu $\sin x = t$, dan verkrijgen we:

$$F_n(x) = \int (1 - t^2)^m dt$$

Deze integraal is gemakkelijk te berekenen door $(1 - t^2)^m$ te ontwikkelen volgens het binomium van Newton.

2 n is een even negatief getal: $n = -2m$

$$F_n(x) = F_{-2m}(x) = \int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{dx}{\cos^{2m-2} x \cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)^{m-1} d(\tan x)$$

Stellen we nu $\tan x = t$, dan verkrijgen we:

$$F_n(x) = \int (1 + t^2)^{m-1} dt$$

Ook deze primitieve is gemakkelijk te berekenen door $(1 + t^2)^{m-1}$ te ontwikkelen volgens het binomium van Newton.

Opmerking:

Als n een even positief getal is, dan kan men door op de dubbele hoek over te gaan, de graad verlagen. Dit is vooral van belang als n „niet te groot” is. Bijv.:

$$\begin{aligned}F_4(x) &= \int \cos^4 x \, dx \\&= \int \frac{(1 + \cos 2x)^2}{4} \, dx \\&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\cos^2 2x}{4} \right) \, dx \\&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{8} \right) \, dx \\&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x\end{aligned}$$

Wanneer men de bepaalde integraal $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x \, dx$ ($k \in \mathbb{Z}$) moet berekenen, dan biedt de recursieformule (69.1) grote voordelen, daar de z.g. „stoktermen” wegvallen. Zo is bijv.:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x \, dx &= \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{n-2} x \, dx \\&= \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{n-2} x \, dx \quad (n \geq 2)\end{aligned}$$

Voor $n = 5$ volgt door herhaalde toepassing van deze betrekking:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^5 x \, dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \, dx = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$$

De behandeling van $G_n(x) = \int \sin^n x \, dx$ verloopt geheel analoog. De resultaten zijn:

$$G_n(x) = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} G_{n-2} \quad (n \neq 0)$$

$$G_{-m}(x) = -\frac{\sin^{-m+1} x \cos x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} G_{-m+2} \quad (m \neq 1)$$

Bij herhaalde toepassing van deze formules komt men dan tenslotte op:

$$G_{-1}(x) = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln |\tan \frac{1}{2}x|$$

of:

$$G_{-2}(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

Ook blijven de opmerkingen over de gevallen n is oneven positief, n is even negatief en n is even positief, maar niet „al te groot”, geldig.

70 Berekening van $\int \cos^n x \sin^m x$ ($n, m \in \mathbb{Z}$)

De verschillende gevallen die zich hierbij voordoen zullen wij niet algemeen bespreken. We bepalen ons tot voorbeelden, waarbij alle karakteristieke gevallen voor zullen komen. Dikwijls zijn verschillende oplossingsmethoden mogelijk; wij geven slechts die methode welke o.i. het snelste tot het doel voert.

Geval 1

Minstens een der exponenten is positief en oneven.

Voorbeeld 1

Bereken:

$$\int \cos^8 x \sin^3 x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\int \cos^8 x \sin^3 x dx &= - \int \cos^8 x \sin^2 x d(\cos x) \\ &= - \int \cos^8 x (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\ &= - \int t^8 (1 - t^2) dt \quad (t = \cos x)\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\int \cos^3 x \sin^{-4} x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^{-4} x dx &= \int \cos^2 x \sin^{-4} x d(\sin x) \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \sin^{-4} x d(\sin x) \\ &= \int (1 - t^2) t^{-4} dt \quad (t = \sin x)\end{aligned}$$

Geval 2

Minstens een der exponenten is positief en even.

Voorbeeld 1*Bereken:*

$$\int \cos^4 x \sin^9 x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin^8 x dx &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^8 x dx \\ &= \int \sin^8 x dx - 2 \int \sin^{10} x dx + \int \sin^{12} x dx \end{aligned}$$

Hiermede is dit geval teruggebracht tot par. 69.

Voorbeeld 2*Bereken:*

$$\int \sin^4 x \cos^{-3} x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^{-3} x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^{-3} x dx \\ &= \int \cos^{-3} x dx - 2 \int \cos^{-1} x dx + \int \cos x dx \end{aligned}$$

De bepaling is daarmee teruggebracht tot par. 69.

Voorbeeld 3*Bereken:*

$$\int \cos^6 x \sin^{-2} x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x \sin^{-2} x dx &= \int (1 - \sin^2 x)^3 \sin^{-2} x dx \\ &= \int \sin^{-2} x dx - 3 \int dx + 3 \int \sin^2 x dx - \int \sin^4 x dx \end{aligned}$$

Voor verdere berekening zie men par. 69.

Geval 3*De som der (gehele) exponenten is een negatief even getal of nul.***Voorbeeld 1***Bereken:*

$$\int \cos^3 x \sin^{-5} x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^{-5} x dx &= \int \cot^3 x \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= - \int \cot^3 x d(\cot x) \\ &= - \int t^3 dt \quad (t = \cot x)\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\int \cos^{-5} x \sin^{-3} x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\int \cos^{-5} x \sin^{-3} x dx &= \int \frac{dx}{\cos^5 x \sin^3 x} \\ &= \int \frac{(1 + \tan^2 x)^3 d(\tan x)}{\tan^3 x} \\ &= \int (t^2 + 1)^3 t^{-3} dt \quad (t = \tan x)\end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Bereken:

$$\int \cos^4 x \sin^{-4} x dx$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \sin^{-4} x dx &= \int \cot^4 x dx \\ &= - \int \frac{\cot^4 x d(\cot x)}{\cot^2 x + 1} \\ &= - \int \frac{t^4 dt}{t^2 + 1} \quad (t = \cot x)\end{aligned}$$

Na deling past men breuksplitsing toe.

Geval 4

Beide (gehele) exponenten zijn negatief, hun som is oneven.

Dit is het meest bewerkelijke geval.

Voorbeeld

Bereken:

$$F(x) = \int \cos^{-5} x \sin^{-2} x dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x \sin^2 x}$$

Oplossing:

We schrijven in de teller 1 als $(\cos^2 x + \sin^2 x)^k$ en kiezen k geschikt. Is k groot genoeg, dan is dit geval terug te brengen tot de hiervoor behandelde gevallen. Het blijkt dat voor k genomen kan worden het aantal gehelen van de halve som der exponenten, in dit geval dus 3; dit is het kleinste geschikte getal. Dan volgt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^3}{\cos^5 x \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{(\cos^6 x + 3 \cos^4 x \sin^2 x + 3 \cos^2 x \sin^4 x + \sin^6 x) dx}{\cos^5 x \sin^2 x} \\ &= \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} + 3 \int \frac{dx}{\cos x} + 3 \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x} + \int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^5 x} \end{aligned}$$

Opmerkingen:

1. Indien de integrand uitsluitend $\tan x$ (en $\cot x$) bevat, dan kan men door de substitutie: $\tan x = t$ bereiken dat men een integraal verkrijgt met t als integratievariabele. Immers, als $\tan x = t$, dan geldt: $\cot x = \frac{1}{t}$, en $d \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}$, dus $dx = \cos^2 x dt = \frac{dt}{1+t^2}$, zodat $\int F(\tan x) dx$ overgaat in $\int F^*(t) dt$.

2. Bepaalde integralen met integratiegrenzen van 0 tot $k\frac{1}{2}\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) en gedaanten als in de paragrafen 69 en 70 zijn behandeld kunnen op eenvoudigere en snellere wijze berekend worden met behulp van Beta-integralen, die in deel 2 van dit boek behandeld worden.

71 De primitieven van een rationale functie van $\sin x$ en $\cos x$

Een primitieve van een rationale functie van $\sin x$ en $\cos x$ kan door de substitutie: $x = 2 \arctan t$, waaruit volgt: $\tan \frac{1}{2}x = t$, berekend worden als primitieve van een rationale functie van t . Er geldt nl.:

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x + \sin^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x + \sin^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2 \tan \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Omdat $x = 2 \arctan t$, is dus:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Is $R(\cos x, \sin x)$ een rationale functie van $\sin x$ en $\cos x$, en $F(x)$ een primitieve van $R(\cos x, \sin x)$, dan is:

$$F(x) = \int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*(t) dt.$$

Voorbeeld

Bereken:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

Oplossing:

Substitueer $\tan \frac{1}{2}x = t$.

$$x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow t = 1$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sin x + \cos x} \\ &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+2t-t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2dt}{1+2t-t^2} \end{aligned}$$

Breuksplitsing levert:

$$\frac{2}{1+2t-t^2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \left[\ln \left| \frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} \right| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \left(\ln 1 - \ln \frac{-1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right) \\ &= -\sqrt{2} \ln(-1+\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Hoewel de substitutie $\tan \frac{1}{2}x = t$ steeds mogelijk is bij een rationale functie van $\sin x$ en $\cos x$, is deze methode niet steeds de eenvoudigste. $x \mapsto R(\cos x, \sin x)$ heeft in het algemeen de periode 2π , en is juist daarom te schrijven als een functie van $\tan \frac{1}{2}x$, daar deze laatste ook de periode 2π heeft. Heeft echter $R(\cos x, \sin x)$ een kleinere periode, dan kiest men als nieuwe veranderlijke $\tan \lambda x$ met λ zodanig

dat deze dezelfde periode heeft. Heeft $R(\cos x, \sin x)$ bijv. de periode π , dan neemt men $\tan x$ als nieuwe veranderlijke. Daardoor wordt het cijferwerk minder omvattend.

Voorbeeld

Bepaal:

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

Oplossing:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\tan x}{\tan x + 1}$$

Stel $\tan x = t$, dan is:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{\tan x dx}{\tan x + 1} \\ &= \int \frac{t dt}{(t+1)(t^2+1)} \\ &= \int \frac{-\frac{1}{2} dt}{t+1} + \int \frac{\frac{1}{2}(t+1) dt}{t^2+1} \\ &= -\frac{1}{2} \ln |t+1| + \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + \frac{1}{2} \arctan t \\ &= \frac{1}{4} \ln(\tan^2 x + 1) - \frac{1}{2} \ln |\tan x + 1| + \frac{1}{2} \arctan(\tan x) \\ &= -\frac{1}{2} \ln |\cos x| - \frac{1}{2} \ln |\tan x + 1| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k\pi \end{aligned}$$

dus een primitieve is: $-\frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x$

Bij het gebruik van de substitutie $\tan \frac{1}{2}x = t$ moet men bij bepaalde integralen de nodige voorzichtigheid betrachten, omdat $\tan \frac{1}{2}x$ discontinu is voor $x = \pi + 2k\pi$. Zijn bijv. de grenzen van de integraal $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{3}{2}\pi$, dan neemt als x het interval $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ doorloopt, $\tan \frac{1}{2}x$ toe van 1 tot ∞ ($x = \pi$), en daarna van $-\infty$ tot -1 . Men verkrijgt dan integralen met een oneindig integratie-interval (oneigenlijke integralen), die in par. 75 besproken worden. Zou men zonder meer voor de grenzen $t = \tan \frac{1}{2}\pi = 1$ en $t = \tan \frac{3}{2}\pi = -1$ ingevuld hebben, dan zou dit betekenen dat t afneemt van 1 tot -1 , hetgeen klaarblijkelijk onjuist is. We laten een voorbeeld volgen, waarbij door de substitutie $\tan x = t$ een eigenlijke integraal in een oneigenlijke overgaat.

Voorbeeld

Bereken:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x}$$

Oplossing:

Men kan het antwoord bepalen door het verschil van de hierboven gevonden primitieve: $-\frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x$ te nemen voor de waarden $\frac{1}{2}\pi$ en 0. Voert men echter de substitutie $\tan x = t$ uit, dan vindt men voor t het integratie-interval $[0, \rightarrow)$, en gaat de gegeven integraal over in de oneigenlijke integraal:

$$\int_0^{\infty} \frac{t \, dt}{(t+1)(t^2+1)}$$

Deze integraal wordt behandeld in par. 75, voorbeeld 3.

We willen er op wijzen dat bij de gevraagde integraal een eenvoudige oplossing mogelijk is. Stelt men nl. $x = \frac{1}{2}\pi - t$, dan volgt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x} \\ &= - \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \frac{\cos t \, dt}{\cos t + \sin t} \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x \, dx}{\sin x + \cos x} \end{aligned}$$

Dus is:

$$2I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx = \frac{1}{2}\pi, \Rightarrow I = \frac{1}{4}\pi$$

Een eenvoudige bepaling van de primitieven is ook mogelijk bij de integrand:

$$f(x) = \frac{1}{a \sin x + b \cos x} \quad (a \text{ en } b \text{ constant})$$

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= a \left(\sin x + \frac{b}{a} \cos x \right) \\ &= a (\sin x + \tan \varphi \cos x) \\ &= \frac{a \sin(x + \varphi)}{\cos \varphi} \quad \left(\tan \varphi = \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx \\
 &= \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} \\
 &= \int \frac{\cos \varphi dx}{a \sin(x + \varphi)} \\
 &= \int \frac{\cos \varphi d(x + \varphi)}{a \sin(x + \varphi)} \\
 &= \frac{\cos \varphi}{a} \ln |\tan \frac{1}{2}(x + \varphi)|
 \end{aligned}$$

72 De primitieven van irrationale algebraïsche functies

Van deze grote klasse van functies behandelen we slechts die functies, die een rationale functie zijn van x en y , waarbij y een der volgende gedaanten heeft:

$$y = \sqrt[n]{ax + b} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{px + q}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

1 De integrand is van de gedaante $R(x, \sqrt[n]{ax + b})$

Zij F een primitieve, dan is:

$$F(x) = \int R(x, \sqrt[n]{ax + b}) dx$$

Stellen we $\sqrt[n]{ax + b} = t$, dus:

$$x = \frac{t^n - b}{a}$$

dan is:

$$F(x) = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) \cdot \frac{nt^{n-1}}{a} dt$$

De integrand hierin is een rationale functie van t .

De verdere behandeling geschiedt, zoals in par. 68 is uiteengezet.

2 De integrand heeft de gedaante $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}}\right)$

In dit geval stelt men:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}} = t$$

dus:

$$\frac{ax+b}{px+q} = t^n \text{ en } x = \frac{b-qt^n}{-a+pt^n}$$

Hieruit volgt dat $\frac{dx}{dt}$ en dus de integrand een rationale uitdrukking in t is.

Het derde geval behandelen we in de volgende paragraaf.

73 De primitieven van $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Integraalafels

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ is niet reëel, indien ax^2+bx+c negatief definit of negatief semidefinit is. Dit geval schakelen we uit. Ook het geval dat ax^2+bx+c positief semidefinit is schakelen we uit, omdat de wortel dan getrokken kan worden, en we in wezen met een rationale integrand te maken hebben.

In de resterende gevallen kunnen we ax^2+bx+c schrijven als:

$$ax^2+bx+c = a(x-p)^2+q$$

waarbij drie typen te onderscheiden zijn, nl.:

- 1 $a > 0, q > 0$
- 2 $a > 0, q < 0$
- 3 $a < 0, q > 0$

Bij deze drie typen is een lineaire substitutie mogelijk, waardoor het bepalen van een primitieve wordt teruggebracht tot het bepalen van een primitieve van:

- 1 $R(x, \sqrt{x^2+1})$
- 2 $R(x, \sqrt{x^2-1})$
- 3 $R(x, \sqrt{1-x^2})$

De integrand is dus een rationale uitdrukking in x en y , waarin y een der gedaanten: $\sqrt{x^2+1}$, $\sqrt{x^2-1}$ of $\sqrt{1-x^2}$ heeft.

De oplossingsmethode berust hierop dat x en y rationaal uitgedrukt kunnen worden in een parameter t (rationaal parametriseren).

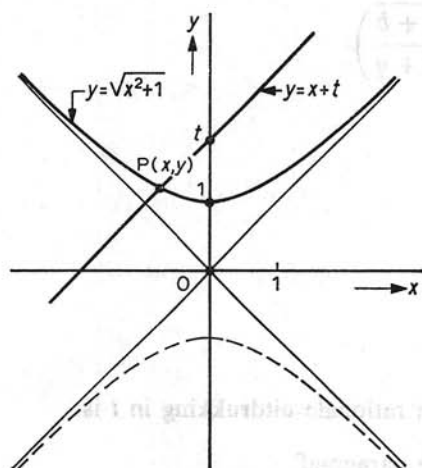


Fig. 84

Geval 1

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

De bijbehorende grafiek is de bovenste helft van de orthogonale hyperbool $y^2 = x^2 + 1$ (fig. 84). Om een bruikbare parametervoorstelling te verkrijgen, snijden we deze hyperbool met de lijnenwaaier

$$y = x + t$$

waarvan de exemplaren behorende bij gegeven waarden van t , evenwijdig lopen aan een asymptoot. (Men kan bijv. ook nemen: $y = -x + t$). Het snijpunt van een waaierexemplaar met de kromme vindt men uit:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} = x + t$$

Door kwadrateren vindt men:

$$x^2 + 1 = x^2 + 2tx + t^2$$

waaruit volgt:

$$x = \frac{1 - t^2}{2t}, \quad y = x + t = \frac{1 + t^2}{2t}, \quad dx = -\frac{(1 + t^2)dt}{2t^2} \quad (73.1)$$

zodat:

$$F(x) = \int R(x, y) dx$$

$$= \int R\left(\frac{1 - t^2}{2t}, \frac{1 + t^2}{2t}\right) \cdot \frac{-(1 + t^2)dt}{2t^2}$$

Voorbeeld 1

Bepaal:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Oplossing:

Door toepassing van (73.1) volgt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= - \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t^2} dt \\ &= - \int \frac{dt}{t} \\ &= - \ln |t| \\ &= - \ln |-x + \sqrt{x^2 + 1}| \\ &= \ln \left| \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}} \right| \\ &= \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned}$$

Opmerking:

We bepalen

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} \quad (k \text{ is constant})$$

op de volgende snelle wijze:

$$\sqrt{x^2 + k} = y \Rightarrow x^2 + k = y^2 \Rightarrow 2x dx = 2y dy \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

Dus is:

$$dF = \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dx + dy}{y + x} = \frac{d(x + y)}{x + y}$$

zodat:

$$\begin{aligned} F(x) &= \ln |x + y| \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Oplossing:

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + t \Rightarrow t = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 1; \quad x = 1 \Rightarrow t = t_1 = -1 + \sqrt{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \int_1^{t_1} \frac{-(1+t^2)dt}{\left(\frac{1-t^2}{2t} + \frac{1+t^2}{2t}\right)2t^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^{t_1} (t^{-1} + t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_1}^1 \left(\frac{1}{t} + t\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln |t| + \frac{1}{4} t^2\right]_{t_1}^1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(-1 + \sqrt{2})$$

Geval 2

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

De grafiek van $y = \sqrt{x^2 - 1}$ is de bovenste helft van de hyperbool $y^2 = x^2 - 1$ (fig. 85). We snijden deze met de lijnenwaaijer:

$$y = x - t$$

Het snijpunt van een waaijerexemplaar met de kromme vindt men uit:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} = x - t$$

Kwadrateren levert:

$$x^2 - 1 = x^2 - 2xt + t^2$$

waaruit volgt:

$$x = \frac{1+t^2}{2t}, \quad y = \frac{1-t^2}{2t}, \quad dx = \frac{(t^2-1)dt}{2t^2}$$

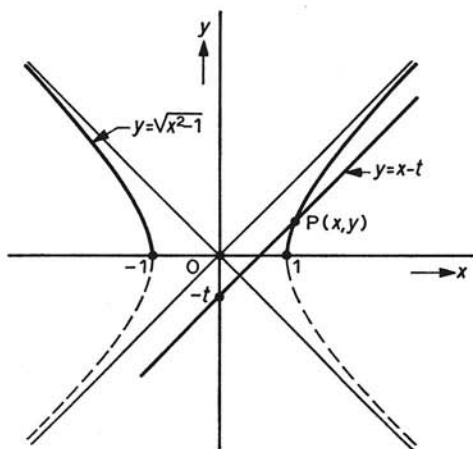


Fig. 85

en

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int R(x, y) dx \\
 &= \int R\left(\frac{1+t^2}{2t}, \frac{1-t^2}{2t}\right) \cdot \frac{t^2-1}{2t^2} dt
 \end{aligned}$$

Opmerking:

Voor de lijnenwaaier hadden we bijv. ook kunnen nemen: $y = x + t$. We kozen: $y = x - t$, omdat in dit geval bij een positieve x een positieve t behoort, hetgeen uit fig. 85 eenvoudig blijkt.

Voorbeeld

Bereken:

$$\int_1^{1\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

Oplossing:

$$\sqrt{x^2 - 1} = x - t \Rightarrow t = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 1; \quad x = 1\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

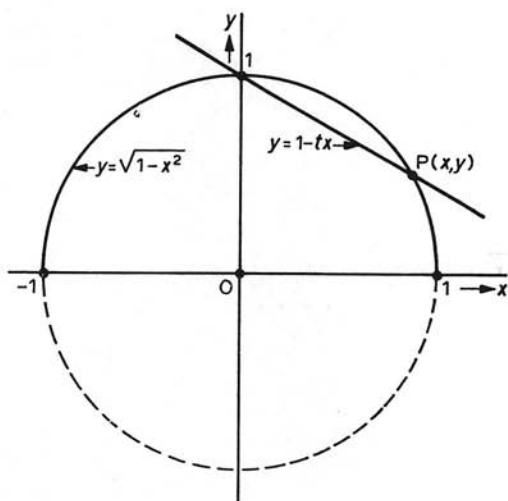


Fig. 86

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-t^2)}{2t} \cdot \frac{2t}{(1+t^2)} \cdot \frac{(t^2-1)}{2t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^2(1+t^2)}
 \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1-t^2)^2}{t^2(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{t^2} - \frac{4}{1+t^2} \right) dt$$

$$\begin{aligned}
 I &= \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} - 4 \arctan t \right) \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
 &= -2 \arctan 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 - 4 \arctan \frac{1}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{4} + 2 \arctan \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Geval 3

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

De grafiek van $y = \sqrt{1-x^2}$ is de bovenste helft van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 86). In dit geval wordt rationalisatie van de kromme verkregen door snijding met een lijnenwaaier, waarvan het gemeenschappelijke punt op de cirkel ligt. Een eenvoudige voorstelling verkrijgt men door voor dit punt het „bovenste” punt van de cirkel te nemen, en de betrokken waaier te schrijven als:

$$y = 1 - tx$$

Daar $-t$ de richtingscoëfficiënt van een willekeurig exemplaar van de waaier is, correspondeert met een positieve x een positieve t en met een negatieve x een negatieve t .

Het snijpunt $\neq (0, 1)$ van de kromme $y = \sqrt{1 - x^2}$ met $y = 1 - tx$ wordt gevonden uit:

$$y = \sqrt{1 - x^2} = 1 - tx$$

Er volgt na kwadrateren:

$$x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} dt$$

en

$$\begin{aligned} F(x) &= \int R(x, y) dx \\ &= \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \cdot \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} dt \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bereken:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$$

Oplossing:

De grenzen bepaalt men hier uit $\sqrt{1 - x^2} = 1 - tx$, waaruit volgt:

$$t = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \quad (x \neq 0)$$

Een moeilijkheid is te bepalen welke waarde van t met $x = 0$ correspondeert, omdat voor $x = 0$, de vergelijking

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - tx$$

in de identiteit $1 = 1$ overgaat. Uit fig. 86 zien we echter dat als het punt (x, y) langs de cirkel tot $(0, 1)$ nadert, de richtingscoëfficiënt van $y = 1 - tx$ tot nul nadert, zodat we met $x = 0$, $t = 0$ kunnen laten corresponderen. Men vindt de waarde $t = 0$ ook door van $(1 - \sqrt{1 - x^2})/x$ de limietwaarde voor $x = 0$ te nemen.

Voor $x = 1$ is $t = 1$, zodat:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{1 + t^2}{1 + 2t - t^2} \cdot \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} dt \end{aligned}$$

Breuksplitting levert:

$$\frac{2(1-t^2)}{(1+2t-t^2)(1+t^2)} = \frac{1-t}{1+t^2} - \frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{2-t}} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt{2-t}}$$
$$I = \left[\arctan t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-1-2t+t^2}{1+t^2} \right| \right]_0^1 = \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$$

Opmerking:

In geval 2 is het herleiden tot een rationale algebraïsche functie algemeen mogelijk door te schrijven:

$$\sqrt{x^2-1} = |x-1| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

en daarna te substitueren:

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

zoals in par. 72 is uiteengezet. Door het optreden van een modulusteken moet men $x-1 \geq 0$ en $x-1 < 0$ onderscheiden.

In geval 3 volgt op soortgelijke wijze:

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

met de substitutie:

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Omdat in $\sqrt{1-x^2}$, $|x|$ niet groter is dan 1, is $|1-x|$ steeds $1-x$. De moeilijkheid met het modulusteken doet zich hier dus niet voor.

We hebben in het hiervoorgaande aangetoond hoe men primitieven van rationale functies van x en $\sqrt{ax^2+bx+c}$ algemeen kan berekenen als primitieven van rationale functies van t . De gevolgde methode is vaak zeer bewerkelijk.

Men slaat dan ook vaak een andere weg in, en past een goniometrische substitutie toe, waardoor men een primitieve van een goniometrische functie te bepalen heeft.

Geval 1

Substitueer $\varphi = \arctan x$, dus:

$$x = \tan \varphi \text{ en } \varphi \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$$

$$F(x) = \int R(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

$$= \int R\left(\tan \varphi, \frac{1}{\cos \varphi}\right) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

N.B. $\sqrt{\tan^2 \varphi + 1} = \frac{1}{\cos \varphi}$, daar $\varphi \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, dus $\cos \varphi > 0$.

Geval 2

Substitueer $\varphi = \arccos \frac{1}{x}$, dus:

$$x = \frac{1}{\cos \varphi} \text{ en } \varphi \in [0, \pi], \varphi \neq \frac{1}{2}\pi$$

$$F(x) = \int R(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx$$

$$= \int R\left(\frac{1}{\cos \varphi}, |\tan \varphi|\right) \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

Geval 3

Substitueer $\varphi = \arcsin x$, dus:

$$x = \sin \varphi \text{ en } \varphi \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$$

$$F(x) = \int R(x, \sqrt{1 - x^2}) dx$$

$$= \int R(\sin \varphi, \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Een onaangenaamheid is in geval 2 het optreden van het modulusteken, waardoor men twee gevallen moet onderscheiden. Bij bepaalde integralen heeft men deze moeilijkheid niet, omdat men vooraf weet op welk interval x gegeven is, waardoor de modulusfunctie eenduidig kan worden vastgelegd.

Ter toelichting nemen we een reeds behandeld voorbeeld van deze paragraaf.

Voorbeeld

Bereken:

$$\int_1^{14} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

Oplossing:

We stellen $\varphi = \arccos \frac{1}{x}$, dus:

$$x = \frac{1}{\cos \varphi} \text{ en } \varphi \in [0, \pi], \varphi \neq \frac{1}{2}\pi$$

Hierbij loopt x van 1 tot $1\frac{1}{2}$. Nu ligt φ dus in het eerste kwadrant en is $\sqrt{x^2 - 1} = \tan \varphi$. Voor de grenzen van φ volgt uit $x = 1$ dat $\varphi_1 = 0$, en uit $x = 1\frac{1}{2}$ dat $\varphi_2 = \arccos \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\varphi_2} \tan \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \int_0^{\varphi_2} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \int_0^{\varphi_2} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) d\varphi \end{aligned}$$

Bijgevolg is:

$$I = [\tan \varphi - \varphi]_0^{\arccos \frac{2}{3}}$$

Met behulp van een figuurtje vindt men: $\arccos \frac{2}{3} = \arctan \frac{3}{4}$, zodat:

$$I = \frac{3}{4} - \arctan \frac{3}{4}$$

Het wordt aan de lezer overgelaten, om aan te tonen dat het gevonden getal hetzelfde is als het eerst gevonden resultaat: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\pi + 2 \arctan \frac{1}{2}$.

Het gegeven voorbeeld is op nog andere wijze te behandelen. Schrijven we:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx^2 \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{t - 1}}{t} dt \quad (t = x^2) \end{aligned}$$

dan is de bepaling van een primitieve teruggebracht tot geval 1 van par. 72, zodat we $\sqrt{t - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ als nieuwe veranderlijke kunnen nemen, aldus:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} = y &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 \Rightarrow 2x dx = 2y dy \\ \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{x^2 - 1} \cdot x dx}{x^2} \\ &= \int \frac{y^2 dy}{y^2 + 1} \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{y^2 + 1} \right) dy \end{aligned}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0; \quad x = 1\frac{1}{4} \Rightarrow y = \sqrt{1\frac{1}{4}^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{1\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{1}{y^2 + 1}\right) dy \\ &= [y - \arctan y]_0^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{4} - \arctan \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Algemene opmerking

In dit hoofdstuk zijn de primitieven berekend van klassen van functies door deze met behulp van substitutie, partiële integratie, of andere technieken te herleiden tot primitieven van „elementaire functies”, waarvan de primitieven direct bekend of eenvoudig aan te geven zijn, en welke in hoofdzaak in par. 46 getabelleerd zijn.

Om bij het bepalen van primitieven rekenwerk aanmerkelijk te bekorten en tijd te besparen, kan men met veel nut gebruik maken van z.g. *integraal tafels*, waarin een groot aantal primitieven van functies zijn opgenomen. Alvorens tot het berekenen van een niet-elementaire primitieve over te gaan verdient het soms aanbeveling eerst de integraal tafel te raadplegen.*

Er zijn ook bepaalde integralen die niet direct berekend kunnen worden met behulp van primitieven, doch wel op een andere wijze, bijv. met behulp van de theorie van dubbelintegralen, of met hulpmiddelen uit de complexe functietheorie, zoals bijv.:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{1}{8}\pi \ln 2$$

We zullen hierop niet verder ingaan.

Voor benaderingsmethoden bij het berekenen van bepaalde integralen, numerieke integratie verwijzen we naar de paragrafen 33...35 en 125.

In de laatste decennia hebben zich op het gebied van de niet-numerieke integratie zeer ingrijpende veranderingen voltrokken en wel dankzij de opkomst van de zogenaamde computer algebra (ook bekend onder vele andere namen zoals: algebraic manipulation, symbolic computation, computational mathematics etc.).

Na de ontwikkeling van een puur arithmetisch opererende computer — ondersteund door de numerieke wiskunde — lag het voor de hand dat men omzag naar de constructie van een machine die niet alleen numerieke problemen aankon, maar ook met letters, met symbolen kon werken, daarbij gesteund door de algebra.

Deze gedachte was echter niet nieuw. Reeds Leibniz (1646–1716) die zelf al een eenvoudige rekenmachine construeerde (omdat hij vond “dat voorname mensen niet het werk van slaven moesten doen” (!)) droomde al van een algoritmische taal een “lingua

characteristica" waarin alle wiskundige manipulaties konden worden uitgedrukt, een soort computeralgebra avant la lettre dus.

Hiermee is tevens een wezenlijk aspect van de computeralgebra genoemd: het algoritmische karakter en de afwezigheid van ad hoc-methoden, zoals duidelijk blijkt bij de toepassing die ons hier voor ogen staat, het primitiveren.

In de vorige paragraaf hebben we ons beziggehouden met het primitiveren van functies uit een zeer beperkte klasse: rationale functies, enkele goniometrische functies en enkele irrationale algebraïsche functies. Hierbij bleek dat we in ieder geval in principe alle rationale functies systematisch kunnen primitiveren. Reeds eerder ontmoetten we exponentiële functies, logaritmische functies en cyclometrische functies, waarvan we met behulp van de tabellen in paragraaf 46 in een aantal gevallen primitieven konden bepalen. De vraag rijst dan al spoedig wanneer "lukt" dit en wanneer "lukt" dit niet, hoe maakt men uit of een functie primitiveerbaar is, wat bedoelt men daar eigenlijk mee en hoe berekent men de primitieve indien deze existeert?

Zo geldt $\int e^x dx = e^x$, maar men kan bewijzen dat $\int e^{x^2} dx$ nooit zal lukken.

Voor vele studenten lijkt het onbepaald integreren dan ook een mengsel van enkele verspreide methoden en een aantal slimme trucjes.

Toch is hier reeds lang geleden (in 1834) orde op zaken gesteld door Joseph Liouville die nodige en voldoende voorwaarden gaf waaraan een functie moet voldoen om primitiveerbaar te zijn. Natuurlijk moet hier een nadere omschrijving bij: welke functies worden bedoeld en wat is precies "primitiveerbaar"? Hierop kunnen wij niet in détail ingaan, daarvoor wordt verwezen naar de literatuur (i.h.b. [4]).

De stelling van Liouville is in de zestiger jaren van deze eeuw in algebraïsche vorm gebracht o.a. door het werk van M. Rosenlicht (1968, 1972) en R.H. Risch (1969, 1970). Zij ontwikkelden tevens algoritmen waarmee kon worden vastgesteld of een gegeven functie primitiveerbaar is en zo ja, wat die primitieve dan wel is.

In diezelfde tijd vond anderzijds op het gebied van programmeertalen een ontwikkeling plaats die het mogelijk maakte per computer met formules te opereren, de hierboven al vermelde computeralgebra.

Een belangrijk punt in die ontwikkeling was de bijdrage van Slagle die in 1961 in LISP (LISt Processor) het programma SAINT (Symbolic Automatic INtegration) schreef. Op dit ogenblik zijn belangrijke computeralgebra programma's o.a: DERIVE, MACSYMA, MAPLE, MATHEMATICA, REDUCE en SCRATCHPAD.

Voor nadere details zij de lezer verwezen naar de hieronder genoemde literatuur.

[1] J.H. Davenport, Y. Siret, E. Tournier, *Computer Algebra*, Academic Press, London etc., 1993, ISBN 0-12-204232-8.

[2] K.O. Geddes, S.R. Czapora, G. Labahn, *Algorithms for Computer Algebra*, Kluwer, Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1992. ISBN 0-7923-9259-0.

[3] B. Mishra, *Algorithmic Algebra*, Springer Verlag, New York etc., 1993, ISBN 0-387-94090-1.

[4] *Vacantiecursus 1994 Computer Algebra*, CWI Syllabus, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1994, ISBN 90-6196-443-1.

Van de vele tabellenverzamelingen noemen we slechts

M. Abramowitz & I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*,
Dover Publ., New York, 1964, ISBN 0-48-661272-4.

H.B. Dwight, *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, MacMillan, New York,
1961, ISBN 0-02-331170-33 (met uitvoerige literatuuropgave).

I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhuk, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press,
Boston etc, 1993, ISBN 0-12-294755-X.

M.R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, McGraw-Hill, New York
etc., 1968, ISBN 0-07-060224-7.

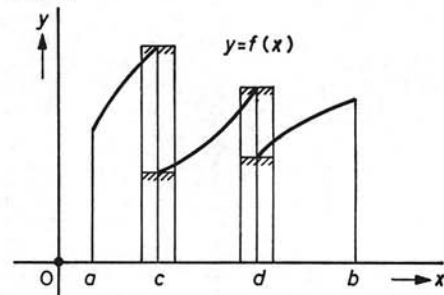
Oneigenlijke integralen

74 Eindige discontinuïteiten van de integrand in het integratie-interval

We hebben in par. 30 aangetoond dat een functie op het interval $[a, b]$ integreerbaar is, als zij in $[a, b]$ continu is. We zullen thans aantonen dat f in $[a, b]$ ook integreerbaar is, indien zij in $[a, b]$ continu is, behalve in een *eindig* aantal punten c, d, \dots , waar de functie een eindige „sprong” vertoont. Hiermede wordt bedoeld dat f in c een eindige discontinuïteit bezit, d.w.z. $\lim_{x \downarrow c} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow c} f(x)$ bestaan beide (hebben dus eindige waarden) en hebben een „eindig” verschil $\neq 0$. Omdat de functie op het gehele interval begrensd is, bestaan de onderintegraal I en de bovenintegraal \bar{I} . We zullen aantonen dat bij de gegeven voorwaarden $I = \bar{I}$, en dus de functie integreerbaar is.

We sluiten de punten c, d , enz., waar de functie een eindige discontinuïteit bezit (fig. 87), op in intervallen, waarvan de gezamenlijke lengte een willekeurig voorgeschreven bedrag ε heeft. De rest van het interval wordt op een of andere wijze ingedeeld. De ondersom voor de intervallen die discontinuïteiten bevatten noemen we \underline{s}_1 , de bovensom \bar{s}_1 . Bij de rest van het interval behoort de ondersom \underline{s}_2 en de bovensom \bar{s}_2 . Dus is $\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$ een ondersom en $\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$ een bovensom voor het

Fig. 87



gehele interval. Op ieder interval dat een discontinuïteit bevat is het verschil tussen het supremum en het infimum van de functie eindig. Onder al deze verschillen is er een het grootste. Is m het grootste verschil, dan is $\bar{s}_1 - s_1 \leq m\varepsilon$. Omdat in de restintervallen de functie continu is, is de onderintegraal I_2 over elk van die deelintervallen, dus ook over alle restintervallen tezamen, gelijk aan de bovenintegraal \bar{I}_2 . Men kan dus de restintervallen zo indelen dat het verschil $\bar{s}_2 - s_2$ kleiner is dan het voorgeschreven positieve getal ε . Bij deze indeling is dus:

$$\bar{s} - s = (\bar{s}_1 - s_1) + (\bar{s}_2 - s_2) < m\varepsilon + \varepsilon = (m + 1)\varepsilon$$

Hieruit blijkt dat het verschil $\bar{s} - s$ willekeurig klein gemaakt kan worden. Bijgevolg moet $I = \bar{I}$ zijn. Immers, $s \leq I \leq \bar{I} \leq \bar{s}$ (zie par. 33). Bij gegeven ε_0 is er dus een verdeling zo dat voor de bijbehorende ondersom s en bovensom \bar{s} geldt $\bar{s} - s < \varepsilon_0$, en dus ook $\bar{I} - I < \varepsilon_0$. Daar dit geldt voor elke $\varepsilon_0 > 0$ moet dus $I = \bar{I}$.

75 Oneigenlijke integralen 1

In par. 74 en de paragrafen 28 e.v. hebben we het integraalbegrip gedefinieerd voor een functie die gegeven is op het eindige interval $[a, b]$. Het is mogelijk dit begrip uit te breiden voor functies die gedefinieerd zijn op het interval $[a, \rightarrow)$ of $(\leftarrow, b]$ of $(\leftarrow, \rightarrow)$. Men drukt dit gewoonlijk uit door te zeggen dat minstens een der grenzen oneindig is.

Het integraalbegrip is ook nog niet gedefinieerd, indien de functie op het interval $[a, b]$ in een of meer punten een andere singulariteit heeft dan een eindige discontinuïteit. Beide gevallen zullen we in het volgende bespreken.

Geval 1

We onderstellen f integreerbaar op het interval $[a, x]$. Bestaat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

dan definiëren we:

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

We noemen $\int_a^\infty f(t) dt$ ook een integraal, en wel een *oneigenlijke integraal van de eerste soort*. Omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$ bestaat noemen we deze oneigenlijke integraal *convergent*. Ook wanneer deze limiet niet bestaat, noemen we $\int_a^\infty f(t) dt$ een oneigenlijke integraal, maar dan een *divergente oneigenlijke integraal van de eerste soort*.

Voorbeeld 1**Onderzoek:**

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt$$

Oplossing:Voor $\alpha \neq 0$ is:

$$\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} = \begin{cases} 0 & (\alpha > 0) \\ \infty & (\alpha < 0) \end{cases}$$

Voor $\alpha > 0$ is dus de gegeven oneigenlijke integraal convergent en heeft de limiet $1/\alpha$.
 Voor $\alpha < 0$ is de integraal divergent. Dit ook is het geval voor $\alpha = 0$, omdat dan

$$\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \int_0^x dt = x \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

Voorbeeld 2**Onderzoek:**

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^p}$$

Oplossing:Voor $p \neq 1$ is:

$$\int_1^x \frac{dt}{t^p} = \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} \right]_1^x$$

$$= \frac{x^{1-p} - 1}{1-p}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p} - 1}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & (p > 1) \\ \infty & (p < 1) \end{cases}$$

Voor het geval $p = 1$ geldt $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, en omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ is de integraal divergent. Er geldt dus:

De integraal $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^p}$ is convergent voor $p > 1$ en divergent voor $p \leq 1$.

Voorbeeld 3

Bereken:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x}$$

Oplossing:

De gegeven integraal is geen oneigenlijke integraal. Substitueren we $\tan x = t$, dan gaat (zie par. 71) de integraal over in de oneigenlijke integraal:

$$\int_0^{\infty} \frac{t \, dt}{(t+1)(t^2+1)}$$

Volgens par. 71 geldt:

$$\int_0^y \frac{t \, dt}{(t+1)(t^2+1)} = -\frac{1}{2} \ln |y+1| + \frac{1}{4} \ln (y^2+1) + \frac{1}{2} \arctan y$$

Van het rechterlid moet de limiet bepaald worden voor $y \rightarrow \infty$. De eerste twee termen van het rechterlid hebben ieder apart geen (eindige) limiet. Neemt men ze samen, dan volgt:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \ln \frac{y^2+1}{(y+1)^2} + \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \arctan y \\ &= \frac{1}{4} \ln 1 + \frac{1}{4} \pi \\ &= \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

Opmerking:

Bovenstaande integraal is reeds op andere wijze berekend in par. 71.

76 Majorantencriterium 1

Het komt in de wiskunde vaak voor dat het niet nodig is de waarde van een oneigenlijke integraal te bepalen, maar dat men kan volstaan met een onderzoek naar de convergentie. Dit onderzoek geschiedt dan vaak door vergelijking met een andere oneigenlijke integraal waarvan de convergentie of divergentie bekend is.

Is voor alle t van het interval $[a, \rightarrow)$ $f(t) \geq 0$ en $g(t) \geq 0$, bovendien $f(t) \leq g(t)$, terwijl $\int_a^x f(t) \, dt$ en $\int_a^x g(t) \, dt$ bestaan $\forall x \geq a$, dan heet $\int_a^{\infty} g(t) \, dt$ een *majorant* van $\int_a^{\infty} f(t) \, dt$.

Is voor alle t van $[a, \rightarrow)$ $f(t) \geq 0$, en bestaat $\int_a^x f(t) \, dt \, \forall x \geq a$, dan is de functie F , bepaald door $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$, een monotoon stijgende functie van x , die voor $x \rightarrow \infty$ of wel begrensd is, of wel onbepaald toeneemt met x . Is F naar boven begrensd, dan hebben de functiewaarden een kbg en bestaat wegens de monotonie

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ (vergelijk par. 86). De integraal is dan convergent; in het andere geval is de integraal divergent.

Op deze eigenschap berust het volgende majorantencriterium.

Majorantencriterium 1

Stel voor $t \geq a$ is $0 \leq f(t) \leq g(t)$. Is $\int_a^\infty g(t) dt$ convergent, dan is ook $\int_a^\infty f(t) dt$ convergent. Is $\int_a^\infty f(t) dt$ divergent, dan ook $\int_a^\infty g(t) dt$.

Bewijs van het eerste deel:

Omdat $\int_a^\infty g(t) dt$ bestaat en de waarde L heeft en $g(t) \geq 0$ is, geldt:

$$\int_a^x g(t) dt \leq \int_a^\infty g(t) dt = L \quad (x \geq a)$$

Daar verder voor $t \geq a$ $0 \leq f(t) \leq g(t)$ is, geldt:

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt \leq L$$

De functie $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ is dus monotoon stijgend en naar boven begrensd, en heeft dus een limiet voor $x \rightarrow \infty$.

Bewijs van het tweede deel:

$$\int_a^x g(t) dt \geq \int_a^x f(t) dt$$

Is $\int_a^\infty f(t) dt$ divergent, dan volgt uit $f(t) \geq 0$, dat $\int_a^x f(t) dt$ met x onbepaald toeneemt. Hetzelfde is dus het geval met $\int_a^x g(t) dt$. Dus heeft de laatste integraal de (oneigenlijke) limiet ∞ voor $x \rightarrow \infty$, en is derhalve divergent.

Voorbeeld 1

Onderzoek op convergentie:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

Oplossing:

Voor $t > 1$ is $0 < e^{-t^2} < e^{-t}$. De integraal $\int_0^\infty e^{-t} dt$ is convergent (par. 75 voorbeeld 1), dus ook de gegeven integraal.

Voorbeeld 2

Onderzoek:

$$\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2} dt$$

Oplossing:

Volgens een standaardlimiet (par. 46) is:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Voor t groot genoeg, geldt dus:

$$0 < \frac{\ln t}{t^2} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\ln t}{t^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

Omdat $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ convergent is, is dus ook $\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ convergent.

77 Gevolg van majorantencriterium I

Uit majorantencriterium I is een ander af te leiden dat vaak eenvoudiger is toe te passen dan het criterium zelf.

Stelling

Is vanaf $t = a$, $f(t) > 0$, $g(t) > 0$, geldt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = L > 0$$

en bestaan $\int_a^x f(t) dt$ en $\int_a^x g(t) dt$ ($x \geq a$), dan zijn $\int_a^{\infty} f(t) dt$ en $\int_a^{\infty} g(t) dt$ beide convergent of beide divergent.

Bewijs:

Voor t groot genoeg (bijv. voor $t \geq t_0$) geldt:

$$\frac{1}{2}L < \frac{f(t)}{g(t)} < 2L$$

dus is:

$$f(t) < 2Lg(t) \quad (t \geq t_0) \tag{77.1}$$

$$\frac{1}{2}Lg(t) < f(t) \quad (t \geq t_0) \tag{77.2}$$

Is nu $\int_a^{\infty} g(t) dt$ convergent, dan volgt uit (77.1) en majorantencriterium I, toegepast op $\int_{t_0}^x f(t) dt$, dat $\int_a^{\infty} f(t) dt$ convergent is. Is $\int_a^{\infty} g(t) dt$ divergent, dan volgt uit (77.2) en majorantencriterium I, toegepast op $\int_{t_0}^x g(t) dt$, dat $\int_a^{\infty} f(t) dt$ divergent is.

Als vergelijkingsfunctie kiest men vaak g , gedefinieerd door:

$$g(t) = \frac{1}{t^p}$$

Bekend is dat de integraal $\int_a^\infty \frac{dt}{t^p}$ ($a > 0$) convergent is voor $p > 1$ en divergent is voor $p \leq 1$ (par. 75, voorbeeld 2). Bestaat nu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)t^p = L > 0$$

dan is $\int_a^\infty f(t)dt$ convergent als $p > 1$ en divergent als $p \leq 1$.

Bestaat L en is $L > 0$, dan zegt men populair dat $f(t)$ „zich gedraagt” als t^{-p} .

Voorbeeld 1

Onderzoek:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

Oplossing:

De gegeven integraal is convergent, want:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{1+t^2} = 1 > 0$$

dus $f(t)$ „gedraagt zich als t^{-2} ” en $\int_a^\infty t^{-2} dt$ is convergent.

Voorbeeld 2

Onderzoek:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

Oplossing:

De gegeven integraal is divergent, want $f(t)$ „gedraagt zich als t^{-1} ”, en $\int_a^\infty t^{-1} dt$ is divergent.

78 Majorantencriterium 2

Uit majorantencriterium 1 volgt een ander criterium, waarmee men soms tot convergentie kan besluiten van de integraal $\int_a^\infty f(t) dt$, indien $f(t)$ met toenemende t van teken blijft wisselen.

Majorantencriterium 2

Is $g(t) \geq 0$, en is vanaf $t = a$:

$$-g(t) \leq f(t) \leq g(t)$$

en bestaan $\int_a^x f(t) dt$ en $\int_a^x g(t) dt \quad \forall x \geq a$, dan is $\int_a^\infty f(t) dt$ convergent, als $\int_a^\infty g(t) dt$ convergeert.

Bewijs:

Zoals fig. 88 laat zien ligt vanaf $t = a$, de grafiek van f geheel tussen de grafiek van g en die van $-g$.

We splitsen f in twee functies, nl.:

$$f_1, \text{ gedefinieerd door } f_1(t) = \begin{cases} f(t) & \text{voor } f(t) \geq 0 \\ 0 & \text{voor } f(t) < 0 \end{cases}$$

$$f_2, \text{ gedefinieerd door } f_2(t) = \begin{cases} -f(t) & \text{voor } f(t) < 0 \\ 0 & \text{voor } f(t) \geq 0 \end{cases}$$

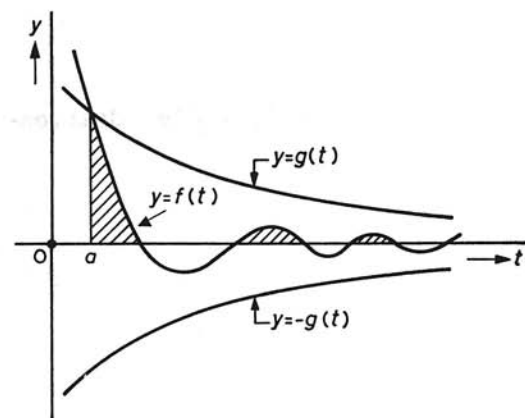
dan is steeds $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$.

Nu is:

$$f_1(t) \geq 0 \text{ en } f_1(t) \leq g(t)$$

$$f_2(t) \geq 0 \text{ en } f_2(t) \leq g(t)$$

Fig. 88



Is $\int_a^\infty g(t) dt$ convergent, dan is volgens majorantencriterium 1 zowel $\int_a^\infty f_1(t) dt$ als $\int_a^\infty f_2(t) dt$ convergent. Bijgevolg is ook:

$$\int_a^\infty \{f_1(t) - f_2(t)\} dt = \int_a^\infty f(t) dt$$

convergent.

Voorbeeld 1

Onderzoek:

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt$$

Oplossing:

De gegeven integraal is convergent, want $\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, en $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ is convergent.

Voorbeeld 2

Onderzoek:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin \beta t dt \quad (\alpha > 0)$$

Oplossing:

De gegeven integraal is convergent, want $|e^{-\alpha t} \sin \beta t| \leq e^{-\alpha t}$, en $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$ is convergent voor $\alpha > 0$.

Voorbeeld 3

Onderzoek:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos \beta t dt$$

Oplossing:

De gegeven integraal is convergent, want $|e^{-t^2} \cos \beta t| \leq e^{-t^2}$, en $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ is convergent.

Voorbeeld 4

Onderzoek:

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

Oplossing:

Het criterium 2 is hierop niet direct toe te passen. Weliswaar is $\left| \frac{\sin t}{t} \right| < \frac{1}{t}$ ($t > 0$), maar $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t}$ is divergent. Door partiële integratie kan men de gegeven integraal herleiden tot een andere, waarop criterium 2 wel toe te passen is. De integraal zal dan blijken convergent te zijn. Dit wordt aan de lezer overgelaten.

Opmerking:

Integralen van de vorm $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ worden op soortgelijke wijze gedefinieerd als $\int_a^{\infty} f(t) dt$.

Als $\int_{-\infty}^p f(t) dt$ en $\int_p^{\infty} f(t) dt$ beide convergent zijn voor een zekere waarde van p , dan zeggen we dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ convergent is, en de waarde bepaald is door de som:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(t) dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^p f(t) dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_p^b f(t) dt \quad (78.1)$$

Het is duidelijk dat de keuze van p geen invloed heeft op deze waarde. Men moet echter goed bedenken dat a en b *onafhankelijk van elkaar* naar oneindig naderen.

Men kan ook de volgende integraal beschouwen:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(t) dt \quad (78.2)$$

De uitkomst hiervan noemt men de hoofdwaaarde van de oneigenlijke integraal van de eerste orde en men noteert deze als:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad \text{of} \quad \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

(PV staat voor Principal Value).

Het is mogelijk dat (78.2) wel bestaat, maar (78.1) niet, bijv. $\int_{-\infty}^{\infty} |t| dt$ bestaat en is nul, maar $\int_{-\infty}^{\infty} |t| dt$ bestaat niet. Indien echter (78.1) bestaat, dan bestaat (78.2) ook en is daaraan gelijk.

Voorbeeld

Onderzoek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t dt = \int_{-\infty}^p t dt + \int_p^{\infty} t dt$$

Oplossing:

Beide integralen in het rechterlid zijn divergent, en dus ook hun som. Echter $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a t dt$ bestaat en is gelijk aan 0.

De hoofdwaaarde van de divergente integraal $\int_{-\infty}^{\infty} t dt$ is dus 0.

79 Oneigenlijke integralen 2

Met een *oneigenlijke integraal van de tweede soort* heeft men te maken, indien de integrand voor een of meer punten van het eindige interval $[a, b]$ een singulariteit bezit. Met een singulariteit bedoelen we dan bijv., een punt waar de integrand niet is gedefinieerd, of in een omgeving waarvan de integrand niet begrensd is. Ter vereenvoudiging nemen we voorlopig aan dat zich slechts één singulariteit voordoet en wel aan een der grenzen a of b .

Is f in het interval $[a, x]$ ($x < b$) integreerbaar, singularier in $t = b$, en bestaat:

$$\lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(t) dt$$

dan definiëren we:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(t) dt$$

Op analoge wijze geldt als a een singularier punt is:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \downarrow a} \int_x^b f(t) dt$$

indien de limiet bestaat. In beide gevallen noemen we $\int_a^b f(t) dt$ een *convergente* oneigenlijke integraal van de tweede soort. Bestaat de limiet niet, dan noemen we $\int_a^b f(t) dt$ een *divergente* oneigenlijke integraal van de tweede soort.

Voorbeeld 1

Bereken:

$$\int_0^1 \ln t dt$$

Oplossing:

De integrand is niet begrensd in een omgeving van 0.

$$\begin{aligned} \int_x^1 \ln t dt &= [t \ln t]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{t} dt \\ &= [t \ln t]_x^1 - [t]_x^1 \\ &= -x \ln x - 1 + x \end{aligned}$$

Aangezien $\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$, geldt:

$$\int_0^1 \ln t dt = \lim_{x \downarrow 0} \int_x^1 \ln t dt = -1$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Oplossing:

De integrand is niet begrensd in een omgeving van 1.

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^x = \arcsin x$$

Dus geldt:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x \uparrow 1} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$$

Het bijzondere van voorbeeld 2 is dat de functie $t \mapsto 1/\sqrt{1-t^2}$ een primitieve, nl. $t \mapsto \arcsin t$, heeft die continu is in het gesloten interval $[0, 1]$. Wegens de continuïteit in $x = 1$ is dus $\lim_{x \uparrow 1} \arcsin x = \arcsin 1$. We hadden dus de integraal eenvoudiger

kunnen berekenen als het verschil van deze primitieve voor de waarden 1 en 0. Deze vereenvoudiging is klaarblijkelijk steeds toe te passen bij de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(t) dt$, indien de integrand een primitieve bezit die continu is in het gesloten interval $[a, b]$. In dit geval is juist als bij een eigenlijke integraal:

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Voorbeeld 3

Bereken:

$$I = \int_0^1 \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{t} \right) dt$$

Opmerking vooraf:

Men hoede zich voor de volgende fout:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} - \int_0^1 \frac{dt}{t}$$

Uit een eenvoudige berekening blijkt dat beide integralen in het rechterlid divergent zijn. Het rechterlid is dus zinledig. Het zal echter blijken dat de gegeven integraal convergent is.

Oplossing:

Ter bepaling van een primitieve stellen we:

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1/t^2-1}} - \int \frac{dt}{t}$$

$$= \int \frac{-d(1/t)}{\sqrt{1/t^2-1}} - \int \frac{dt}{t} \quad (0 < t < 1)$$

Bijgevolg is er een primitieve F , gedefinieerd door:

$$F(t) = -\ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right) - \ln t$$

Beide termen in het rechterlid zijn niet gedefinieerd voor $t = 0$. Men kan ze echter samen nemen, en verkrijgt dan:

$$F(t) = -\ln(1 + \sqrt{1-t^2})$$

Blijkbaar is F continu in het gesloten interval $[0, 1]$. Hieruit volgt:

$$I = [-\ln(1 + \sqrt{1-t^2})]_0^1 = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2$$

80 Convergentieonderzoek van oneigenlijke integralen van de tweede soort

Evenals bij oneigenlijke integralen van de eerste soort kan men soms door vergelijking met bekende integralen vooraf beslissen of de integraal convergent dan wel divergent is.

We nemen aan dat de singulariteit zich voordoet bij de benedengrens a , en dat $f(t) > 0$ is in een rechteromgeving van a : $\langle a, c \rangle$. Is x een punt van deze omgeving en bestaat $I(x) = \int_x^c f(t) dt$, dan is $\int_x^c f(t) dt$ positief, en neemt toe met afnemende x . Is $I(x)$ begrensd voor $x \downarrow a$, dan is de integraal convergent, neemt $I(x)$ onbepaald toe met afnemende x , dan is de integraal divergent.

Geldt op $\langle a, c \rangle$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$, en bestaat $\int_a^c g(t) dt$, dan is dus:

$$\int_x^c f(t) dt \leq \int_x^c g(t) dt \leq \int_a^c g(t) dt$$

en is dus $\int_x^c f(t) dt$ ook begrensd, d.w.z. $\int_a^c f(t) dt$ is convergent.

Is $\int_a^c f(t) dt$ divergent, dan volgt uit $\int_x^c g(t) dt \geq \int_x^c f(t) dt$, dat ook $\int_a^c g(t) dt$ divergent is.

Is op $\langle a, c \rangle$ $f(t) > 0$ en $g(t) > 0$, en bestaat:

$$\lim_{t \downarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = L > 0$$

dan blijkt op soortgelijke wijze als in par. 77, dat $\int_a^b f(t) dt$ en $\int_a^b g(t) dt$ of beide convergent of beide divergent zijn.

Is de benedengrens $a = 0$, en is dit een singulier punt, dan gebruikt men ter vergelijking vaak de functie g met $g(t) = t^{-p}$. Hierbij is:

$$\int_x^c t^{-p} dt = \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} \right]_x^c = \frac{1}{1-p} (c^{1-p} - x^{1-p}) \quad (p \neq 1)$$

Het rechterlid heeft voor $x \downarrow 0$ slechts dan een limiet als $p < 1$ is; de integraal is dus convergent voor $p < 1$. Voor $p > 1$ divergeert de integraal, evenals voor $p = 1$. In het laatste geval is $\int_x^c t^{-1} dt = \ln c - \ln x$, en voor $x \downarrow 0$ heeft het rechterlid de oneigenlijke limiet ∞ .

Is nu gegeven:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t^{-p}} = L > 0 \quad (80.1)$$

dan volgt uit het voorgaande dat $\int_0^b f(t) dt$ convergent is voor $p < 1$ en divergent voor $p \geq 1$. De voorwaarde (80.1) kan men populair uitdrukken door te zeggen dat $f(t)$ „zich gedraagt” als t^{-p} . De functie $t \mapsto t^{-p}$ ($p > 0$) heeft voor $t = 0$ een singulariteit en wel een p -voudige, anders gezegd een *singulariteit van de orde p* . De integraal $\int_0^b f(t) dt$, waarbij f als enige singulariteit $t = 0$ heeft, is dus convergent indien f voor $t = 0$ een singulariteit heeft van een orde kleiner dan 1, en de integraal is divergent als de integrand voor $t = 0$ een singulariteit heeft van een orde ≥ 1 . Ook wanneer de integraal genomen wordt over het interval $[a, b]$, waarin a of b niet nul is, en de singulariteit zich aan een der grenzen a of b voordoet, kan men eenvoudig afleiden dat de integraal convergeert als voor deze grens f een singulariteit heeft van een orde < 1 , en divergeert als f een singulariteit heeft van een orde ≥ 1 . Zo is bijv. de integraal:

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}$$

convergent, want de integrand heeft aan beide grenzen singulariteiten van de orde $\frac{1}{2}$.

81 Singulariteit van de integrand voor een inwendig punt van het integratie-interval. Gammafunctie

Heeft de functie f een singulariteit in een inwendig punt c van het interval $[a, b]$, dan definieert men de integraal als volgt:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x_1 \uparrow c} \int_a^{x_1} f(t) dt + \lim_{x_2 \downarrow c} \int_{x_2}^b f(t) dt$$

waarbij x_1 en x_2 onafhankelijk van elkaar zijn.

Voorbeeld

Onderzoek:

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{t}$$

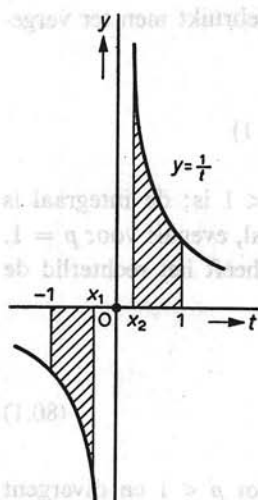


Fig. 89

Oplossing:

De grafiek van $t \mapsto t^{-1}$ is een gelijkzijdige hyperbool met als verticale asymptoot de rechte met vergelijking $t = 0$ (fig. 89). Uit symmetrieoverwegingen zou men mogen verwachten dat de integraal de waarde nul zou hebben. Dit vermoeden blijkt onjuist te zijn. Immers volgens de definitie is:

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x_1 \uparrow 0} \int_{-1}^{x_1} \frac{dt}{t} + \lim_{x_2 \downarrow 0} \int_{x_2}^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x_1 \uparrow 0} \ln |x_1| - \lim_{x_2 \downarrow 0} \ln |x_2|$$

Het rechterlid heeft echter geen limiet als x_1 en x_2 onafhankelijk van elkaar tot nul naderen. De integraal is dus divergent.

Opmerking:

Zou men $x_1 = -x_2$ genomen hebben, dan was de uitkomst 0 geweest. Bij sommige wiskundige beschouwingen voert men wel deze beperking voor x_1 en x_2 in, en noemt het gevonden resultaat de *hoofdwaaarde van de divergente integraal van de tweede soort*. Wij kunnen hierop echter niet verder ingaan.

Tenslotte behandelen we een voorbeeld van een integraal die een oneigenlijke integraal is, zowel van de eerste soort als van de tweede. De integraal $\int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$ heeft een integrand die een singulariteit in de oorsprong bezit als $p < 1$, terwijl tevens het integratie-interval onbegrensd is. De betekenis van deze integraal is:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-t} t^{p-1} dt$$

We splitsen de integraal in twee delen, die we elk afzonderlijk onderzoeken nl. $\int_0^1 e^{-t} t^{p-1} dt$ en $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$. Wat het eerste deel betreft merken we op dat op $[0, 1]$ geldt: $e^{-1} < e^{-t} < 1$, zodat op $(0, 1]$ geldt:

$$e^{-1} t^{p-1} < e^{-t} t^{p-1} < t^{p-1}$$

dus geldt ook:

$$\int_0^1 \frac{dt}{e t^{1-p}} < \int_0^1 e^{-t} t^{p-1} dt < \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-p}},$$

en dus is $\int_0^1 e^{-t} t^{p-1} dt$ convergent als $1 - p < 1$, dus als $p > 0$ is, en divergent als $1 - p \geq 1$, dus $p \leq 0$.

Voor het tweede deel maken we gebruik van de standaardlimiet (par. 46):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{p-1}}{e^{\frac{1}{2}t}} = 0 \quad (\forall p)$$

dus voor voldoende grote t (bijv. $t \geq t_0$) geldt: $\frac{t^{p-1}}{e^{\frac{1}{2}t}} < 1$, en dus $t^{p-1} < e^{\frac{1}{2}t}$ en $t^{p-1} e^{-t} < e^{-\frac{1}{2}t}$. De integraal $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$ zal dus convergeren, daar $\int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} dt$ convergeert.

Conclusie:

$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$ convergeert als $p > 0$ en divergeert als $p \leq 0$. Deze integraal bepaalt een functie van p , welke functie **gammafunctie** Γ genoemd wordt. Γ wordt dus gedefinieerd door:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \quad (p > 0) \quad (81.1)$$

Het is eenvoudig voor de Γ -functie een recursieformule af te leiden met behulp van partiële integratie, aldus:

$$\int_0^x e^{-t} t^p dt = -e^{-t} t^p \Big|_0^x + p \int_0^x e^{-t} t^{p-1} dt$$

waaruit volgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t} t^p dt = \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} x^p + p \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t} t^{p-1} dt$$

of:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (p > 0) \quad (81.2)$$

Verder is:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{-x} + 1) = 1$$

Voor $p \in \mathbb{N}$ volgt door herhaalde toepassing van (81.2):

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)(p-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = p!$$

De Γ -functie is dus een voortzetting van de faculteetsfunctie, d.w.z. $\Gamma(p+1)$ is gedefinieerd voor alle reële getallen $p > -1$, en stemt voor gehele niet-negatieve p overeen met $p!$.

Zie voor verdere eigenschappen van de Γ -functie par. 146.

hoofdstuk 6

Rijen

82 De stelling van Bolzano-Weierstraz

Een verzameling reële getallen $\{x\}$ heet begrensd, als er een vast getal M bestaat, zodat voor ieder element x van de verzameling geldt dat $|x| < M$ is.

Onder een *ophopingspunt* of *verdichtingspunt* van een verzameling reële getallen verstaat men een getal L , zo dat in iedere willekeurig kleine omgeving van L oneindig veel elementen van de verzameling liggen.

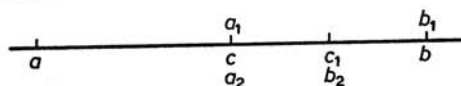
Stelling van Bolzano*-Weierstraz

Iedere oneindige begrensde verzameling reële getallen heeft ten minste één verdichtingspunt.

Bewijs:

Omdat de verzameling begrensd is, bestaat er een eindig interval $[a, b]$, waarop ze geheel gelegen is (fig. 90). We verdelen het interval door het middelpunt c in twee gelijke delen $[a, c]$ en $[c, b]$. In ten minste een van de twee deelintervallen liggen oneindig veel getallen van de verzameling, stel in het interval $[c, b]$. We noemen dit interval nu $[a_1, b_1]$. Dit laatste verdelen we door c_1 in twee gelijke delen $[a_1, c_1]$ en $[c_1, b_1]$. In ten minste een der delen, bijv. $[a_1, c_1]$, liggen oneindig veel getallen van de verzameling. Dit interval noemen we $[a_2, b_2]$. Zo kunnen we doorgaan. Zoals we vroeger reeds hebben aangetoond (par. 13) is er een getal L van het interval dat

Fig. 90



* B. Bolzano, 1781–1848.

tot alle deelintervallen behoort, d.w.z.:

$$a_k \leq L \leq b_k \text{ voor iedere } k$$

Is h de lengte van het interval $[a, b]$, dan is van het interval $[a_k, b_k]$ de lengte $h/2^k$. De lengten van de deelintervallen naderen dus tot nul met toenemende k .

We tonen nu aan dat L een verdichtingspunt is, d.w.z. dat voor iedere $\varepsilon > 0$ in het interval $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ oneindig veel elementen van de verzameling liggen, aldus: We kunnen k zodanig kiezen dat:

$$b_k - a_k = \frac{h}{2^k} < \varepsilon$$

Dan is het interval $[a_k, b_k]$ geheel gelegen binnen het interval $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$, dus liggen er op het interval $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ oneindig veel elementen van de verzameling.

83 Aftelbare verzameling. Rijen

Definitie

Een aftelbare verzameling is een verzameling die gelijkmachtig is met de verzameling der natuurlijke getallen, d.w.z. een verzameling, waarvan de elementen één-éénduidig corresponderen met de natuurlijke getallen.

Dit betekent, dat de elementen van deze verzameling „genummerd” kunnen worden.

Voorbeeld 1

De verzameling der natuurlijke getallen zelf.

Voorbeeld 2

De verzameling Z der gehele getallen. Men rangschikt deze dan als volgt:

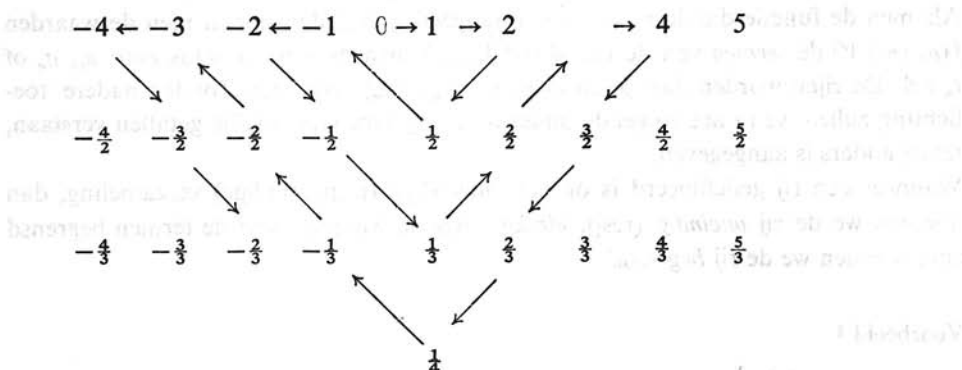
0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...

waarna men nummert:

0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Voorbeeld 3

De verzameling \mathbb{Q} van alle rationale getallen. Men rangschikt deze aldus:



en men gaat langs de met pijlen aangegeven weg door \mathbb{Q} , onderweg „nummerend”, daarbij overslaande de getallen die men al gepasseerd is (zo slaat men bijv. $\frac{2}{2}$ over, daar men 1 al gehad heeft). Het is duidelijk dat op deze wijze ieder rationaal getal te eniger tijd een nummer krijgt.

Niet alle verzamelingen zijn aftelbaar. Zo is bijv. de verzameling van alle (eventueel oneindig voortlopende) tiendelige breuken r met $0 \leq r < 1$ niet aftelbaar.

Stel iemand denkt een aftelbare verzameling $\{b_1, b_2, \dots\}$ te hebben die bestaat uit alle genoemde tiendelige breuken met bijv.:

$$b_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$b_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$b_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots$$

(waarin $a_{ik} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, dan kan men op eenvoudige wijze een tiendelige breuk construeren, die niet in de rij voorkomt. Kies nl. een breuk $0, c_1 c_2 \dots$, zo dat $c_1 \neq a_{11}, c_2 \neq a_{22}, c_3 \neq a_{33}, \dots$. Deze komt zeker niet voor in de gekozen verzameling, en deze bevat dus toch niet alle bedoelde tiendelige breuken. De verzameling van alle tiendelige breuken is dus niet aftelbaar.

Een aanschouwelijke betekenis van een aftelbare verzameling is deze: de elementen ervan kunnen „genummerd” worden, en aldus „op een rij” geplaatst worden. Dit aanschouwelijke begrip „rij” kan exact gedefinieerd worden met de volgende

Definitie

Een rij is een functie die gedefinieerd is op een verzameling van gehele getallen.

De waarden van deze functie kunnen reële of complexe getallen zijn. In dit geval spreken we van *getallenrijen*. Ook kunnen de waarden functies zijn. In dat geval spreken we van *functierijen*.

De verzameling V der getallen waarop een rij is gedefinieerd kan \mathbb{Z} zelf zijn, of een deelverzameling daarvan. In de meeste gevallen beperken we ons tot de verzameling $\{0, 1, 2, \dots\}$ of tot $\{1, 2, \dots\}$, of zelfs tot een eindige deelverzameling van \mathbb{N} .

Als men de functie die de rij definieert aangeeft met f , dan noemt men de waarden $f(n)$ ($n \in V$) de *termen* van de rij. Meestal geeft men de termen aldus aan: u_n , a_n of t_n e.d. De rijen worden dan geschreven als $\{u_n\}$, $\{a_n\}$ resp. $\{t_n\}$. Zonder nadere toelichting zullen we in het volgende onder u_n , a_n , t_n , enz. steeds reële getallen verstaan, tenzij anders is aangegeven.

Wanneer een rij gedefinieerd is op een oneindige (resp. eindige) verzameling, dan noemen we de rij *oneindig* (resp. *eindig*). Als de waarden van de termen begrensd zijn, noemen we de rij *begrensd*.

Voorbeeld 1

$$\{u_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dit is de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Voorbeeld 2

$$\{u_n\} = \{r^n\} \quad (r \text{ constant, } n \in \mathbb{N})$$

Dit is de rij r, r^2, r^3, r^4, \dots

Voorbeeld 3

$$\{u_n\} = \left\{ \frac{(-1)^{n-1} r^n}{n^2} \right\} \quad (r \text{ constant, } n \in \mathbb{N})$$

Dit is de rij $r, \frac{-r^2}{4}, \frac{r^3}{9}, \frac{-r^4}{16}, \dots$

De term u_n noemt men de *algemene term* van de rij. Bij de gegeven voorbeelden is een term van de rij direct uit het rangnummer te berekenen. Het gegeven voorschrift is vaak van minder eenvoudige aard. Soms wordt een rij gegeven door een recursieformule, d.i. een formule die u_n uitdrukt in termen met lager rangnummer.

Voorbeeld 4

$$u_1 = 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\}$$

Hieruit volgt:

$$u_2 = \sum_{k=1}^1 u_k = u_1 = 1$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^2 u_k = u_1 + u_2 = 2$$

$$u_4 = \sum_{k=1}^3 u_k = u_1 + u_2 + u_3 = 4$$

Met behulp van het tweede beginsel van volledige inductie (zie opmerking aan het eind van par. 5 in hoofdstuk 1) bewijst men eenvoudig:

$$u_n = 2^{n-2} \quad (n > 1)$$

Voorbeeld 5

$$u_1 = 1, \quad u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}} \right) \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\}$$

Op dit voorbeeld komen we in par. 87 terug.

84 Convergentie en divergentie van rijen

Een rij $\{u_n\}$ heeft de limiet L , indien er bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ bestaat, zo dat:

$$|u_n - L| < \varepsilon, \text{ als } n > N(\varepsilon)$$

Omdat deze definitie een bijzonder geval is van de in par. 9 gegeven definitie van de limiet van een functie, gelden voor een rij de eenduidigheid van de limiet L en de in par. 10 afgeleide limietstellingen.

Heeft de rij $\{u_n\}$ een limiet, dan noemt men deze rij *convergent*; heeft de rij geen limiet, dan heet de rij *divergent*. Er geldt dus de

Stelling

Als een oneindige begrensde rij slechts één verdichtingspunt bezit, dan is dit verdichtingspunt de limiet van de rij.

Bewijs:

Laat de rij $\{u_n\}$ zijn, en L het verdichtingspunt. Uit het feit dat de rij begrensd is, volgt dat er een $K > 0$ bestaat, zo dat $-K < u_n < K$, $n \in \mathbb{N}$. Zelfs kunnen we K zo groot kiezen dat geldt:

$$-K < L < K \quad (\text{dus } L \neq K, L \neq -K)$$

We moeten nu bewijzen dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een rangnummer $N(\varepsilon)$ bestaat, zo dat:

$$|L - u_n| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon), \text{ d.w.z. } L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

Als ε zodanig is dat het interval $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$ het interval $[-K, K]$ omvat, of samenvalt met $\langle -K, K \rangle$, dan liggen alle termen van de rij uiteraard binnen $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$. Indien ε zodanig is dat $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$ een echte deelverzameling is van $[-K, K]$, dan liggen op de intervallen $[L + \varepsilon, K]$ en $[-K, L - \varepsilon]$ hoogstens eindig veel termen van de rij, daar er anders op deze intervallen een verdichtingspunt zou liggen, in strijd met het gegeven. Van een zeker rangnummer af liggen dus alle termen op $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$.

Heeft de verzameling geen of meer dan een verdichtingspunt, dan is de rij divergent. Is bijv. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$, dan heeft $\{u_n\}$ geen verdichtingspunt, en is de rij divergent.

De rij

$$\{u_n\} = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

heeft twee verdichtingspunten nl. -1 en $+1$, en is dus ook divergent.

Opmerking:

Het is zeer goed mogelijk dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) wel bestaat, en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) niet.

Zo is bijv. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0$, terwijl $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \pi x$ niet bestaat.

85 Algemeen convergentiekenmerk van Cauchy (A. L. Cauchy, 1789-1857)

Cauchy heeft een noodzakelijke en voldoende voorwaarde aangegeven, waaraan de termen u_n van de rij $\{u_n\}$ moeten voldoen opdat deze rij convergent is.

Algemeen convergentiekenmerk van Cauchy

De rij $\{u_n\}$ is dan en slechts dan convergent, indien er bij iedere positieve ε een getal $N(\varepsilon)$ bestaat, zo dat:

$$|u_m - u_n| < \varepsilon, \text{ voor iedere } m > N(\varepsilon) \text{ en } n > N(\varepsilon)$$

Bewijs:

De voorwaarde is noodzakelijk, d.w.z. als de rij $\{u_n\}$ de limiet L heeft, dan is $|u_m - u_n| < \varepsilon$ voor n en m groot genoeg.

Heeft nl. de rij $\{u_n\}$ de limiet L , dan bestaat volgens de limietdefinitie bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$, zo dat:

$$|u_n - L| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ voor } n > N(\varepsilon)$$

Verder is:

$$|u_m - u_n| = |(u_m - L) - (u_n - L)| \leq |u_m - L| + |u_n - L|$$

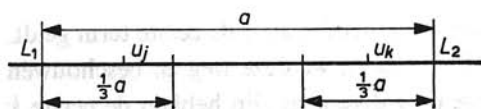


Fig. 91

Aangezien voor $m > N(\varepsilon)$ en $n > N(\varepsilon)$ beide termen rechts van „ \leq ” kleiner zijn dan $\frac{1}{2}\varepsilon$, geldt in dit geval dus:

$$|u_n - u_m| < 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

De voorwaarde is voldoende. We nemen nu aan dat $|u_m - u_n| < \varepsilon$, voor $n > N(\varepsilon)$ en $m > N(\varepsilon)$.

Uit $|u_m - u_n| < \varepsilon$ volgt:

$$u_n - \varepsilon < u_m < u_n + \varepsilon$$

We denken n vast. Voor $m > N(\varepsilon)$ liggen alle getallen u_m tussen de grenzen $u_n - \varepsilon$ en $u_n + \varepsilon$, en ligt er slechts een eindig aantal, nl. hoogstens N_1 , d.i. het aantal getallen van $N(\varepsilon)$, buiten het interval $\langle u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon \rangle$. Van de eindige verzameling:

$$u_1, u_2, u_3 \dots u_{N_1}, u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon$$

heeft een der getallen de grootste absolute waarde bijv. M .

Dus geldt voor alle getallen u_m van de rij:

$$|u_m| \leq M$$

Dit betekent dat de rij begrensd is. Volgens Bolzano-Weierstrasz heeft de rij dus *minstens* één verdichtingspunt. We hebben dus nog aan te tonen dat er *slechts* één verdichtingspunt is. Nemen we daartoe aan dat er bijv. twee verdichtingspunten L_1 en L_2 zijn, die op een afstand a ($a > 0$) van elkaar verwijderd zijn (fig. 91). Er zouden dan oneindig veel elementen u_j van de rij liggen op het interval $[L_1 - \frac{1}{3}a, L_1 + \frac{1}{3}a]$ en oneindig veel elementen u_k op het interval $[L_2 - \frac{1}{3}a, L_2 + \frac{1}{3}a]$. Deze intervallen liggen echter $\frac{1}{3}a$ uiteen (zie figuur), dus is $|u_j - u_k| \geq \frac{1}{3}a$. Dit is in strijd met de voorwaarde $|u_j - u_k| < \varepsilon$ voor j en k groot genoeg, als we $\varepsilon = \frac{1}{3}a$ nemen. Er is dus slechts één verdichtingspunt, d.w.z. de rij $\{u_n\}$ heeft een limiet.

86 Monotone rijen

Geldt voor de rij $\{u_n\}$ na zeker rangnummer N een der volgende betrekkingen:

$$u_{n+1} > u_n, u_{n+1} \geq u_n, u_{n+1} < u_n, u_{n+1} \leq u_n$$

dan heet de rij *monotoon*. In het eerste geval heet de rij *monotoon stijgend*, in het tweede *monotoon niet-dalend*, in het derde *monotoon dalend* en in het vierde *monotoon niet-stijgend*.

We nemen aan dat de eigenschap van de monotonie reeds vanaf de eerste term geldt. Is dat met de eerste k termen niet het geval, dan laten we deze weg en beschouwen we de rij die dan overblijft. Op het convergent of divergent zijn hebben de eerste k termen (k eindig) geen invloed.

Is de rij $\{u_n\}$ monotoon stijgend of niet-dalend, dan zijn er twee gevallen mogelijk: of wel de termen u_n worden onbepaald groter, of wel, er bestaat een grens M zo dat $u_n \leq M$ is. In het eerste geval is de rij divergent, want $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$. We zullen aantonen dat in het tweede geval de rij convergent is.

In het tweede geval heeft de rij een supremum L , en we bewijzen dat L de limiet is van de rij. Op het interval $\langle L, L + \varepsilon \rangle$ $\varepsilon > 0$ ligt geen enkele u_n , want anders was L geen bovengrens. Op het interval $\langle L - \varepsilon, L \rangle$ ligt minstens één getal u_k , want anders was L niet de kleinste bovengrens. Maar omdat $u_{n+1} \geq u_n$ is liggen alle termen vanaf u_k op $\langle L - \varepsilon, L \rangle$. Er liggen dus hoogstens $(k - 1)$ termen buiten dit interval, d.w.z. L is de limiet van de rij $\{u_n\}$.

Op soortgelijke wijze toont men aan dat een naar beneden begrensde monotoon dalende of niet-stijgende rij een limiet heeft. Algemeen geldt dus:

Een monotone begrensde rij heeft een limiet.

Van deze belangrijke eigenschap zullen we in het vervolg vaak gebruik maken.

87 Voorbeelden van rijen

Voorbeeld 1

Onderzoek:

$$\{u_n\} = \{a^n\} \quad (0 < a < 1, n \in \mathbb{N})$$

Oplossing:

We geven hier drie methoden van onderzoek.

Methode 1

$$u_{n+1} = a^{n+1} = a \cdot a^n = au_n < u_n$$

De rij is monotoon dalend en begrens, want $u_n > 0$. De rij heeft dus een limiet $L \geq 0$. We vermoeden dat $L = 0$ is, en zullen bewijzen dat $L > 0$ tot een strijdigheid voert. Voor ieder getal $\varepsilon > 0$ bestaat er een getal $N(\varepsilon)$ zo dat voor $n > N(\varepsilon)$, u_n ligt op het interval $[L, L + \varepsilon)$. Omdat $u_{n+1} = au_n$, ligt dus u_{n+1} op het interval $[aL, aL + a\varepsilon)$. Stel nu dat $L > 0$ is, dan kunnen we ε zo klein (maar positief) kiezen dat $aL + a\varepsilon < L$ is, nl. $\varepsilon < \frac{L(1-a)}{a}$. Het gevolg is dat u_{n+1} buiten het interval $[L, L + \varepsilon)$ ligt, hetgeen een tegenspraak oplevert. L kan dus niet groter dan nul zijn, en is dus nul, daar we wisten: $L \geq 0$.

Methode 2

Nadat vastgesteld is dat de rij $\{a^n\}$ een limiet heeft, redeneren we als volgt. De rij $\{a^{n+1}\}$ heeft dezelfde limiet als $\{a^n\}$, want hij heeft dezelfde termen in dezelfde volgorde (met uitzondering van de eerste term). Verder is $a_{n+1} = a \cdot a_n$, dus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow L = aL \Rightarrow L(1 - a) = 0 \Rightarrow L = 0$$

Methode 3

We vergelijken de rij $\{u_n\}$ met een rij $\{v_n\}$ die eenvoudiger is. Omdat $0 < a < 1$ is, kunnen we stellen:

$$a = \frac{1}{1+h} \quad (h > 0)$$

Volgens de ongelijkheid van Bernoulli (par. 5) is:

$$(1+h)^n > 1+nh \Rightarrow u_n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} = v_n$$

Eenvoudig is aan te tonen dat de rij $\{v_n\}$ de limiet nul heeft. Immers bij iedere $\varepsilon > 0$ is $(1+nh)^{-1} < \varepsilon$, indien $(1+nh) > \varepsilon^{-1}$, dus $n > (\varepsilon^{-1} - 1)h^{-1}$. Voor $n > (\varepsilon^{-1} - 1)h^{-1} = N(\varepsilon)$ ligt dus v_n op het interval $\langle 0, \varepsilon \rangle$, m.a.w. $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

Maar omdat $0 < u_n < v_n$ is, ligt voor $n > N(\varepsilon)$ ook u_n op dit interval, d.w.z. $\{u_n\}$ heeft de limiet nul.

De laatste methode, het zg. „insluiten”, wordt vaak toegepast.

Opmerking:

Men kan $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ook als volgt berekenen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln a} = 0, \text{ daar } \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln a = -\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Gevolg:

De rij $\{a^n\}$, ($|a| < 1$) heeft eveneens de limiet nul. In par. 10 is nl. bewezen

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$$

De rij $\{a^n\}$, $a = 1$ heeft de limiet 1. De rij $\{a^n\}$, $a = -1$, heeft geen limiet, want de termen zijn afwisselend -1 en $+1$. De rij $\{a^n\}$, waarin $|a| > 1$ is heeft eveneens geen limiet. Stelt men nl. $a = b^{-1}$, dan heeft b^n de limiet 0, dus a^n neemt in absolute waarde onbepaald toe.

Voorbeeld 2

Onderzoek:

$$\{u_n\} = \{n^k a^n\} \quad (0 < a < 1, k > 0, a \text{ en } k \text{ constant, } n \in \mathbb{N})$$

Oplossing:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^k a^{n+1}}{n^k a^n} = a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$$

Bij vaste k is $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\}^k = 1^k = 1$. Dus geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a < 1$$

We kiezen $\varepsilon > 0$, maar zo dat $a + \varepsilon = r < 1$. Volgens de limietdefinitie bestaat er dus een $N(\varepsilon)$, zodat voor $N > N(\varepsilon)$ geldt:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < a + \varepsilon = r < 1$$

Stel $n = M$ is het eerste gehele getal groter dan $N(\varepsilon)$, dan is:

$$0 < \frac{u_{M+1}}{u_M} < r$$

$$0 < \frac{u_{M+2}}{u_{M+1}} < r$$

$$0 < \frac{u_m}{u_{m-1}} < r$$

Door vermenigvuldiging: $0 < \frac{u_m}{u_M} < r^{m-M}$

Hiervoor is ook te schrijven:

$$0 < u_m < r^m \cdot \frac{u_M}{r^M}$$

In het rechterlid is bij gegeven ε , u_M vast, evenals r^M , terwijl $\lim_{m \rightarrow \infty} r^m = 0$. Bijgevolg is $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = 0$. De gegeven rij heeft dus nul tot limiet.

Opmerking:

Korter gaat de berekening als volgt:

We schrijven $n^k a^n = e^{k \ln n + n \ln a}$. Uit $k \ln n + n \ln a = n \left(k \frac{\ln n}{n} + \ln a \right)$ volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \ln n + n \ln a) = -\infty$, daar $k \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ en $\ln a < 0$ is, zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0$.

Gevolg:

Ook de rij $\{u_n\} = \{n^k a^n\}$ ($|a| < 1$) heeft de limiet nul, wat eenvoudig is aan te tonen (zie voorbeeld 1).

Voorbeeld 3

Onderzoek:

$$\{u_n\} = \{\sqrt[n]{a}\} \quad (a > 1 \text{ en constant, } n \in \mathbb{N})$$

Oplossing:

Is $a > 1$, dan is $\sqrt[n]{a} > 1$. Het blijkt eenvoudig dat de rij monotoon daalt en men mag vermoeden dat de rij de limiet 1 heeft. Om dit vermoeden te bewijzen, stellen we:

$$\sqrt[n]{a} = 1 + v_n \quad (v_n > 0) \quad (87.1)$$

dan is:

$$a = (1 + v_n)^n > 1 + n v_n$$

dus:

$$0 < v_n < \frac{a - 1}{n}$$

Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - 1}{n} = 0$, is dus $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, en dus volgens (87.1) is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Gevolg:

De rij $\{\sqrt[n]{a}\}$ ($0 < a < 1$, a constant) heeft eveneens de limiet 1. Is $0 < a < 1$, dan is $b = a^{-1} > 1$. Verder is $\sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{b})^{-1}$. Daar $\sqrt[n]{b}$ de limiet 1 heeft, heeft dus ook $\sqrt[n]{a}$ de limiet 1.

Opmerking:

Korter:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(1/n) \ln a} = e^0 = 1 \quad (\text{voor alle } a \geq 0).$$

Voorbeeld 4

Onderzoek:

$$\{u_n\} = \{\sqrt[n]{n}\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Oplossing:

Ook bij deze rij zal blijken dat de rij de limiet 1 heeft. We stellen evenals bij voorbeeld 3:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + v_n \quad (v_n \geq 0) \quad (87.2)$$

dan volgt:

$$n = (1 + v_n)^n \quad (87.3)$$

Volgens het binomium van Newton is:

$$\begin{aligned} (1 + v_n)^n &= 1 + nv_n + \frac{n(n-1)}{2!} v_n^2 + \dots \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} v_n^2 \end{aligned} \quad (87.4)$$

dus:

$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} v_n^2$$

of:

$$v_n^2 \leq \frac{2}{n} \Rightarrow 0 < v_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ en volgens (87.2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Opmerking:

Korter:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(1/n) \ln n} = e^0 = 1$$

Voorbeeld 5

Onderzoek:

$$\{u_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}, \{v_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$u_1 = 2, u_2 = 2\frac{1}{4}, u_3 = 2\frac{10}{27}$$

$$v_1 = 4, v_2 = 3\frac{3}{8}, v_3 = 3\frac{13}{81}$$

We vermoeden dat de rij $\{u_n\}$ stijgend is en dat de rij $\{v_n\}$ dalend is. We bewijzen deze vermoedens met behulp van de ongelijkheid van Bernoulli:

$$(1+a)^n > 1+na \quad (a > -1, a \neq 0, n > 1) \quad (87.5)$$

Nemen we $a = -\frac{1}{n^2}$, dan volgt:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

Dus is:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Dit betekent: $u_n > u_{n-1}$, dus is de rij $\{u_n\}$ monotoon stijgend.

Nemen we in (87.5) $a = \frac{1}{n^2-1}$, dan volgt:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$$

dus:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}, & \Rightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

d.w.z.:

$$v_{n-1} > v_n$$

De rij $\{v_n\}$ is dus monotoon dalend. Verder is:

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \quad (87.6)$$

dus:

$$v_n > u_n$$

Omdat:

$$u_{n-1} < u_n < v_n < v_1 = 4$$

is de rij $\{u_n\}$ monotoon stijgend en begrensd en heeft dus een limiet. Blijkens (87.6) heeft de rij $\{v_n\}$ dezelfde limiet. Reeds vroeger (par. 42) is aangetoond dat deze limiet het getal e is. De rij $\{u_n\}$ gaat stijgend naar e , de rij $\{v_n\}$ gaat dalend naar e .

We komen in het volgende voorbeeld terug op de in par. 83, voorbeeld 5 genoemde rij in iets algemener vorm.

Voorbeeld 6

$\{u_n\}$ is gegeven door de recursieformule:

$$u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{c}{u_{n-1}} \right) \quad (n > 1, c > 0, u_1 > 0) \quad (87.7)$$

We zullen bewijzen dat deze rij monotoon niet-stijgend en begrensd is. We gebruiken hierbij de stelling dat het rekenkundig gemiddelde van twee positieve getallen niet kleiner is dan hun meetkundig gemiddelde. Dit volgt aldus:

$$(p - q)^2 \geq 0 \Rightarrow (p + q)^2 \geq 4pq \Rightarrow \frac{1}{2}(p + q)^2 \geq pq$$

Daar $p > 0$ en $q > 0$ is, volgt:

$$\frac{1}{2}(p + q) \geq \sqrt{pq}$$

De getallen u_n zijn positief. Dit volgt uit $u_1 > 0$, $c > 0$ en de recursieformule. Dus:

$$u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{c}{u_{n-1}} \right) \geq \sqrt{u_{n-1} \cdot \frac{c}{u_{n-1}}} = \sqrt{c} \quad (n > 1)$$

d.w.z. de rij is naar beneden begrensd.

Omdat $u_n^2 \geq c$, is $u_n \geq c/u_n$, dus:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{c}{u_n} \right) \leq \frac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n$$

De gegeven rij is derhalve monotoon niet-stijgend en begrensd, heeft dus een limiet L .

Daar $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n-1} = L$, volgt uit (87.7):

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{c}{L} \right) \Rightarrow L = \frac{c}{L}$$

zodat:

$$L = \sqrt{c}$$

Het bestaan van $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ kan men ook inzien door de functie f , gedefinieerd door:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right)$$

$x > 0$ te beschouwen. Deze functie is dalend voor $0 < x < \sqrt{c}$ en stijgend voor $x > \sqrt{c}$, bezit dus een absoluut minimum \sqrt{c} voor $x = \sqrt{c}$.

De y -as en de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}x$ zijn asymptoten van de grafiek van f , en voor $x > \sqrt{c}$ is $f(x) < x$.

Is $u_1 = \sqrt{c}$, dan volgt uit (87.7) dat $u_n = \sqrt{c}$ voor $n \geq 2$, en $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{c}$.

Is $u_1 > \sqrt{c}$, dan is $u_2 = f(u_1) < u_1$ en $u_2 = f(u_1) > \sqrt{c}$, zodat $\sqrt{c} < u_2 < u_1$.

Herhalen we deze redenering, dan vinden we dat de rij $\{u_n\}$ dalend is, en iedere $u_n > \sqrt{c}$.

Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ bestaat en is $\geq \sqrt{c}$.

Is $0 < u_1 < \sqrt{c}$, dan is $u_2 = f(u_1) > \sqrt{c}$, en komen we in het juist behandelde geval.

Opmerking 1:

Deze methode is bruikbaar voor iteraties van de gedaante $u_n = f(u_{n-1})$.

Opmerking 2:

Het gegeven procédé is een van ouds bekende wijze om de wortel uit een getal te berekenen. Nemen we bijv. $c = 2$ als in par. 83, voorbeeld 5, en $u_1 = 1$, dan volgt: $u_2 = \frac{1}{2}(1 + 2) = 1\frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{17}{12} \approx 1,417$, $u_4 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) \approx 1,414215$.

Verder volgt uit $u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}} \right)$ dat:

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}u_{n-1} + 2}{u_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(u_{n-1} - \sqrt{2})^2}{u_{n-1}} \end{aligned}$$

Nu is $|u_2 - \sqrt{2}| = 1\frac{1}{2} - \sqrt{2} < 0,1$, en dus

$$|u_3 - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} \cdot \frac{0,01}{1,5} < 0,01, \quad |u_4 - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} \cdot \frac{0,0001}{u_3} < 0,0001, \text{ etc.}$$

De benadering van $\sqrt{2}$ door u_4 is reeds op 5 decimalen nauwkeurig. Uit fig. 92 blijkt reeds hoe snel de rij convergeert.

88 De limietstellingen van Cauchy

Bij het onderzoek naar de convergentie van een rij kan men soms met voordeel gebruik maken van de hierna te bespreken stellingen, die de eerste en tweede limietstelling van Cauchy genoemd worden.

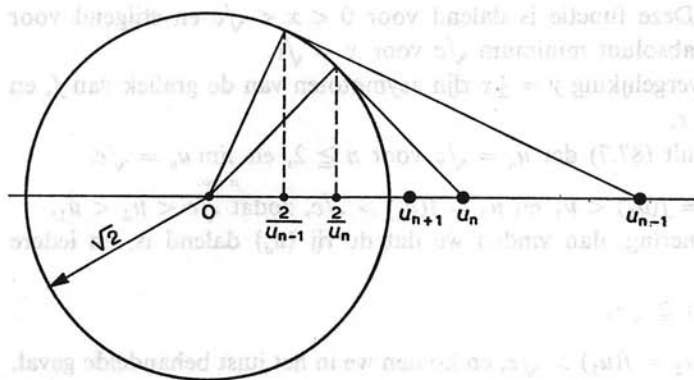


Fig. 92

Eerste limietstelling van Cauchy

Bestaat voor de rij $\{u_n\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n)$, dan bestaat ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n}$ en dan geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n)$$

Bewijs:

Stel dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = L$, dan bestaat bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$, zo dat voor $n > N(\varepsilon)$:

$$L - \varepsilon < u_{n+1} - u_n < L + \varepsilon$$

Stel M het eerste natuurlijke getal groter dan $N(\varepsilon)$, dan is:

$$L - \varepsilon < u_{M+1} - u_M < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < u_{M+2} - u_{M+1} < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < u_n - u_{n-1} < L + \varepsilon$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{+}$$

$$(n - M)(L - \varepsilon) < u_n - u_M < (n - M)(L + \varepsilon)$$

of:

$$n(L - \varepsilon) + u_M - M(L - \varepsilon) < u_n < n(L + \varepsilon) + u_M - M(L + \varepsilon)$$

en:

$$L - \varepsilon + \frac{u_M - M(L - \varepsilon)}{n} < \frac{u_n}{n} < L + \varepsilon + \frac{u_M - M(L + \varepsilon)}{n} \quad (88.1)$$

Omdat u_M en M en ε vast zijn, is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_M - M(L - \varepsilon)}{n} = 0$$

en:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_M - M(L + \varepsilon)}{n} = 0$$

Er bestaat dus een getal $N_1(\varepsilon)$ en een getal $N_2(\varepsilon)$, zo dat:

$$\left| \frac{u_M - M(L - \varepsilon)}{n} \right| < \varepsilon \text{ voor } n > N_1(\varepsilon) \quad (88.2)$$

en:

$$\left| \frac{u_M - M(L + \varepsilon)}{n} \right| < \varepsilon \text{ voor } n > N_2(\varepsilon) \quad (88.2a)$$

Is $N_3(\varepsilon)$ het grootste van de getallen $N(\varepsilon)$, $N_1(\varepsilon)$ en $N_2(\varepsilon)$, dan volgt uit (88.1) en (88.2) en (88.2a):

$$L - 2\varepsilon < \frac{u_n}{n} < L + 2\varepsilon \text{ voor } n > N_3(\varepsilon)$$

hetgeen betekent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = L$$

Voorbeeld 1

Bereken:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$$

Oplossing:

Stel $u_n = \ln n$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\ln(n+1) - \ln n\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0$$

Volgens de zo juist afgeleide stelling is dan ook:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Oplossing:

Stel $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, dan is $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$, en is:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$$

Hieruit volgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, dus ook:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0$$

Voorbeeld 2 is, als men stelt $u_k = \frac{1}{k}$, een bijzonder geval van de volgende eigenschap.

Eigenschap

Is $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$, dan is ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = L$.

Bewijs:

Stel $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$, dan is $s_{n+1} - s_n = u_{n+1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = L$$

dus is ook:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = L$$

Opmerking 1:

Zoals men eenvoudig aantoonst, is de stelling ook geldig indien $(u_{n+1} - u_n)$ de oneigenlijke limiet ∞ of $-\infty$ heeft.

Opmerking 2:

De stelling is niet omkeerbaar. Bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = L$, dan hoeft $(u_{n+1} - u_n)$ nog

geen limiet te hebben. Als voorbeeld diene de rij $\{u_n\} = \{(-1)^n\}$. Hierbij is $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = -2(-1)^n$. Het verschil is dus afwisselend 2 en -2 en heeft bij toenemende n geen limiet. Echter geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Tweede limietstelling van Cauchy

Is $u_n > 0$ en bestaat voor de rij $\{u_n\}$ de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, dan bestaat ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Bewijs:

Stel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$. We veronderstellen eerst $L > 0$. Bij iedere $\varepsilon > 0$, waarvoor ook geldt $\varepsilon < L$, kan men een getal $P(\varepsilon)$ zo bepalen dat voor $p > P(\varepsilon)$ geldt:

$$L - \frac{1}{2}\varepsilon < \frac{u_{p+1}}{u_p} < L + \frac{1}{2}\varepsilon$$

Past men dit toe voor $p = m, \dots, p = n - 1$ ($n > m$), en vermenigvuldigt men de ongelijkheden, dan vindt men voor $n > m$:

$$(L - \frac{1}{2}\varepsilon)^{n-m} < \frac{u_n}{u_m} < (L + \frac{1}{2}\varepsilon)^{n-m}$$

of:

$$(L - \frac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n}{m}} \sqrt[n]{\frac{u_m}{(L - \frac{1}{2}\varepsilon)^m}} < \sqrt[n]{u_n} < (L + \frac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n}{m}} \sqrt[n]{\frac{u_m}{(L + \frac{1}{2}\varepsilon)^m}} \quad (88.3)$$

Houdt men nu m vast, en laat men n onbepaald toenemen, dan naderen de wortelvormen in het eerste en laatste lid tot 1. Daar:

$$\frac{L - \varepsilon}{L - \frac{1}{2}\varepsilon} < \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1$$

en:

$$\frac{L + \varepsilon}{L + \frac{1}{2}\varepsilon} > \frac{L + \varepsilon}{L + \varepsilon} = 1$$

zodat:

$$\frac{L - \varepsilon}{L - \frac{1}{2}\varepsilon} < 1 < \frac{L + \varepsilon}{L + \frac{1}{2}\varepsilon}$$

bestaat er dus een getal N , zo dat voor $n > N$ aan:

$$\sqrt[n]{\frac{u_m}{(L - \frac{1}{2}\varepsilon)^m}} > \frac{L - \varepsilon}{L - \frac{1}{2}\varepsilon}$$

en:

$$\sqrt[n]{\frac{u_m}{(L + \frac{1}{2}\varepsilon)^m}} < \frac{L + \varepsilon}{L + \frac{1}{2}\varepsilon}$$

is voldaan. Uit (88.3) volgt, indien $n > N$:

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < L + \varepsilon$$

en dit betekent dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$$

Voor $L = 0$ verloopt het bewijs als volgt:

Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een getal $m(\varepsilon)$, zo dat voor $n > m$ geldt:

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

waaruit men afleidt voor $n > m$:

$$0 < \frac{u_n}{u_m} < (\frac{1}{2}\varepsilon)^{n-m}$$

of:

$$0 < \sqrt[n]{u_n} < \frac{1}{2}\varepsilon \sqrt[n]{\frac{u_m}{(\frac{1}{2}\varepsilon)^m}}$$

Houdt men weer m vast, dan bestaat er een getal N , zodat voor $n > N$ geldt:

$$\sqrt[n]{\frac{u_m}{(\frac{1}{2}\varepsilon)^m}} < 2$$

en dus:

$$0 < \sqrt[n]{u_n} < \varepsilon$$

d.w.z. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$.

Voorbeeld 1

Bereken:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$$

Oplossing:

Stel $u_n = n$, dan is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Bijgevolg is ook:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$$

Oplossing:

We stellen $u_n = \frac{n!}{n^n}$, dan is:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

Dus is:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1 + 1/n)^n}$$

Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}$$

en is ook:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} \quad (88.4)$$

Uit (88.4) volgt voor grote n :

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n}$$

waarmede een (ruwe) benadering voor $n!$ verkregen is (zie ook de formule van Stirling in par. 129).

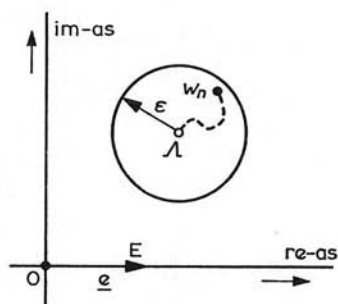


Fig. 93a

Opmerking:

Evenals de eerste limietstelling is de tweede niet omkeerbaar. Bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, dan behoeft $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nog geen limiet te hebben voor $n \rightarrow \infty$. Men zie de opmerking van par. 96.

89 Rijen met complexe termen

Zij $\{w_n\}$ een rij, waarbij w_n een complex getal is. De rij heeft de limiet A , indien er bij iedere $\varepsilon > 0$ een reëel getal $N(\varepsilon)$ bestaat zo dat:

$$|w_n - A| < \varepsilon \text{ als } n > N(\varepsilon)$$

De definitie is dus formeel dezelfde als bij een rij met reële termen. Alleen betekent $|w_n - A|$ de modulus van $(w_n - A)$ in de zin van de theorie der complexe getallen. De meetkundige betekenis hiervan is, dat het beeldpunt van w_n in het complexe vlak gelegen is binnen een cirkel met het beeldpunt van A tot middelpunt en een straal ε (fig. 93a).

Schrijft men $w_n = u_n + iv_n$, dan kan men naast de rij $\{w_n\}$, de rijen $\{u_n\}$ en $\{v_n\}$ beschouwen, resp. de rij der reële delen en de rij der imaginaire delen. Hiervoor geldt de volgende stelling.

Stelling

De rij met complexe termen $\{w_n\}$ heeft dan en slechts dan een limiet, indien zowel de rij der reële delen $\{u_n\}$ als die der imaginaire delen $\{v_n\}$ een limiet heeft.

Bewijs:

Ten eerste: de voorwaarde is noodzakelijk. Stel $A = L + iM$, dan is:

$$w_n - A = u_n - L + i(v_n - M)$$

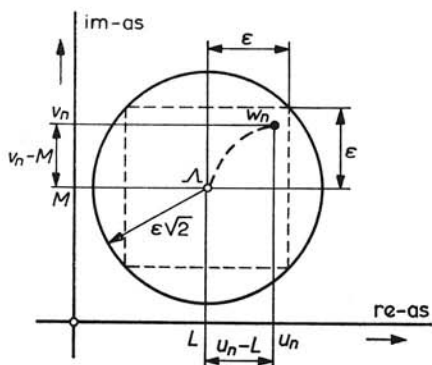


Fig. 93b

Omdat voor het complexe getal $w = u + iv$ geldt:

$$|u| \leq \sqrt{u^2 + v^2} = |w| \text{ en } |v| \leq \sqrt{u^2 + v^2} = |w|$$

geldt ook:

$$|u_n - L| \leq |w_n - A| \text{ en } |v_n - M| \leq |w_n - A|$$

Is dus voor $n > N(\epsilon)$, $|w_n - A| < \epsilon$, dan is ook:

$$|u_n - L| < \epsilon, \text{ en } |v_n - M| < \epsilon$$

d.w.z. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = M$.

Ten tweede: de voorwaarde is voldoende. Heeft $\{u_n\}$ de limiet L en $\{v_n\}$ de limiet M , dan bestaat bij iedere $\epsilon > 0$ een getal $N(\epsilon)$ zo dat:

$$|u_n - L| < \epsilon \text{ en } |v_n - M| < \epsilon$$

als $n > N(\epsilon)$. Bijgevolg is voor $n > N(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} |w_n - A| &= |u_n - L + i(v_n - M)| \\ &= \sqrt{\{(u_n - L)^2 + (v_n - M)^2\}} < \epsilon\sqrt{2} \end{aligned}$$

(zie fig. 93b). Dit betekent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = A$$

Voorbeeld

Bereken:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (z \text{ complex, vast})$$

Oplossing:

Stel $z = x + iy$, dan is:

$$w_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n}\right)^n$$

$$|w_n| = \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}n}$$
$$= \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n}$$

$\ln |w_n| = \frac{1}{2}n \ln |1 + \alpha_n|$, waarin $\alpha_n = \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}$ tot 0 nadert als $n \rightarrow \infty$. Voor voldoende grote n is $1 + \alpha_n > 0$. Nu is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln |w_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}n \ln(1 + \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}n \alpha_n \frac{\ln(1 + \alpha_n)}{\alpha_n}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}n \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}n \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) = x$$

Uit $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln |w_n| = x$, volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = e^x$.

Bekend is uit de theorie der complexe getallen dat:

$$\arg \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n \arg \left(1 + \frac{z}{n}\right) = n \arg \left(1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n}\right)$$

op een veelvoud van 2π na.

Omdat voor n groot genoeg $\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ zeker positief is, geldt:

$$\arg \left(1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n}\right) = \arctan \frac{y/n}{1 + x/n} = \arctan \frac{y}{n + x}$$

en is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{y}{n + x}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot y}{n + x} \cdot \frac{\arctan y/(n + x)}{y/(n + x)} = y$$

Van de limiet van w_n is de modulus e^x en het argument is y , dus is, daar de cosinus en de sinus continue functies zijn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y)$$

De uitdrukking $e^x(\cos y + i \sin y)$ is juist wat wij in par. 57 gedefinieerd hebben als e^z voor complexe z , zodat:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$$

Opmerking:

Men stelt ook wel als definitie van e^z de hier afgeleide limiet, en leidt de eigenschappen van e^z af uit die van $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$.

Reeksen

90 Het reeksbegrip

Definitie

Onder de n^{de} partiële som S_n of $S(n)$ van een rij $\{u_k\}$ verstaat men de som van het stel termen dat begint met de eerste term en eindigt met de term met rangnummer n .

We hebben dus:

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

N.B. Indien de eerste term u_0 heet, dan geldt dus:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Op deze wijze kan men uit een gegeven rij $\{u_k\}$ een andere rij afleiden, nl. de rij van de partiële sommen: $\{S_n\}$.

Men noemt deze rij $\{S_n\}$ de bij $\{u_k\}$ behorende reeks.

Om het verband met $\{u_k\}$ aan te geven, schrijft men $\{S_n\}$ ook wel als $u_1 + u_2 + \dots + u_3 + \text{ad inf}$, of als $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$. Gewoonlijk geeft men de reeks aan door het symbool $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Deze schrijfwijze, die zeer ingeburgerd is, is misleidend. Het

Σ -teken wekt de indruk dat hier een getal bedoeld wordt, nl. „de som van oneindig veel termen”, hetgeen natuurlijk zinloos is. Het symbool $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ staat echter voor de rij S_1, S_2, S_3, \dots

Men noemt de getallen u_1, u_2, u_3, \dots de termen van de reeks. (N.B. Dit zijn ook de termen van de rij $\{u_n\}$. De termen van de rij $\{S_n\}$ zijn echter S_1, S_2, S_3, \dots).

Het kan voorkomen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ bestaat. In de terminologie van de rijen kan men dan zeggen dat de rij der partiële sommen convergent is. Wij zullen dan zeggen dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is.

Er zijn auteurs (vooral van leerboeken voor het h.a.v.o. en v.w.o.) die het gebruik van het woord reeks vermijden. Zij zeggen dan, indien $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ bestaat, dat de rij $\{S_n\}$ der partiële sommen convergeert, en dat de rij $\{u_n\}$ die eraan ten grondslag ligt, **sommeerbaar** is.

Er bestaat dus tweërlei soort terminologie:

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ bestaat: de rij $\{u_n\}$ is convergent;
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k$ bestaat: de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is convergent.
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ bestaat: de rij $\{u_n\}$ is convergent;
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k$ bestaat: de rij $\{u_n\}$ is **sommeerbaar**.

Om de aansluiting bij de bestaande (vooral buitenlandse*) literatuur niet te missen, zullen wij vasthouden aan de onder 1 genoemde terminologie, en niet aan de (misschien wel betere) uit 2.

Er doet zich nog een complicatie voor. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ bestaat, dan wordt dit *getal* S , dat men de **som van de reeks** noemt, ook geschreven als $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Dit houdt in dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dus twee betekenissen heeft, nl. het *getal* $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ en de rij $\{S_n\}$ (die we de uit $\{u_n\}$ afgeleide reeks noemen). Uit het verband blijkt steeds wel, wat er bedoeld wordt. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ niet bestaat, dan noemt men de reeks **divergent** (in de andere terminologie zeggen we dat de rij $\{u_n\}$ niet **sommeerbaar** is).

Voorbeeld 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

Hieruit blijkt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. De reeks is dus convergent en heeft 1 tot som.

* Ned.	Frans	Duits	Engels
rij	suite	Folge	sequence
reeks	série	Reihe	series

Voorbeeld 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

De term $\frac{1}{n(n+1)}$ is te schrijven als $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Dus is:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. De reeks is convergent en heeft 1 tot som.

Voorbeeld 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

De reeks is divergent.

Voorbeeld 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$S_{2n} = 0$, $S_{2n+1} = 1$. De partiële sommen hebben geen limiet, de reeks is divergent.

Voorbeeld 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

$$S_n = n \quad (x = 1)$$

Voor $|x| < 1$ heeft x^n de limiet nul, en is $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-x}$.

Voor $|x| \geq 1$ heeft S_n geen limiet. De reeks is dus convergent voor $|x| < 1$, en divergent voor $|x| \geq 1$.

Heeft de rij $\{S_n\}$ de limiet S , dan heeft de rij $\{S_{n-1}\}$ dezelfde limiet en dan heeft de rij:

$$\{S_n - S_{n-1}\} = \{u_n\}$$

de limiet $S - S = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Noodzakelijk voor convergentie van een reeks is dat de algemene term u_n tot nul nadert. Dat deze voorwaarde geenszins voldoende is, blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Aan de genoemde noodzakelijke voorwaarde is voldaan, want $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Echter is:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

want in de uitdrukking voor S_n is de laatste term de kleinste. Dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, d.w.z. de reeks is divergent.

91 Algemeen convergentiekenmerk voor reeksen

Uit het algemene convergentiekenmerk voor rijen (par. 85), volgt onmiddellijk een algemeen convergentiekenmerk voor reeksen.

De rij $\{S_n\}$ is dan en slechts dan convergent, als voor iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ bestaat, zo dat voor $n > N(\varepsilon)$ en $m > N(\varepsilon)$,

$$|S_m - S_n| < \varepsilon$$

geldt. Is nu $S_m = \sum_{k=1}^m u_k$ en $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, dan is voor $m > n$:

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= \left| \sum_{k=1}^m u_k - \sum_{k=1}^n u_k \right| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \end{aligned}$$

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is dus dan en slechts dan convergent, indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon)$ bestaat zo dat voor $n > N(\varepsilon)$ en $m > N(\varepsilon)$, geldt $\left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon$.

We hebben bij de afleiding $m > n$ ondersteld. Is evenwel $n > m$, dan wordt de voorwaarde $|\sum_{k=m+1}^n u_k| < \varepsilon$, wat op hetzelfde neerkomt.

Uit het algemene convergentiekenmerk volgt voor $m = n + 1$ de noodzakelijke voorwaarde: $|S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}| < \varepsilon$ voor $n > N(\varepsilon)$.

92 Enige algemene stellingen over reeksen

Stelling 1

Is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{convergent} \\ \text{divergent} \end{cases}$, dan is ook $\sum_{n=p}^{\infty} u_n$ (p vast) $\begin{cases} \text{convergent} \\ \text{divergent} \end{cases}$.

Bewijs:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_{p-1} + \sum_{k=p}^n u_k$$

Nu is $u_1 + u_2 + \dots + u_{p-1}$ een getal onafhankelijk van n . Bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, dan bestaat dus ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^n u_k$. Bestaat de eerste limiet niet, dan ook niet de tweede.

De betekenis van stelling 1 is dat weglaten of toevoegen aan het begin van een eindig aantal termen de convergentie of divergentie niet beïnvloedt. Men gebruikt deze stelling vaak bij onderzoek op convergentie van reeksen, waarbij de termen na een vast rangnummer N een bepaalde eigenschap hebben. Laat men dan de eerste N termen weg, dan hebben van de nieuwe reeks alle termen de genoemde eigenschap. In verband met stelling 1 zullen we vaak bij convergentieonderzoek een reeks ter vereenvoudiging aanduiden door $\sum u_k$, omdat het voor dit onderzoek niet van belang is met welke getal de index k begint, terwijl het symbool ∞ weggelaten wordt, omdat het onderzoek uitsluitend gaat over „oneindige” reeksen.

Stelling 2

Is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{convergent} \\ \text{divergent} \end{cases}$, dan is bij vaste $p \neq 0$ ook $\sum_{n=1}^{\infty} pu_n \begin{cases} \text{convergent} \\ \text{divergent} \end{cases}$.

Bewijs:

$$\sum_{k=1}^n pu_k = p \sum_{k=1}^n u_k$$

Heeft $\sum_{k=1}^n u_k$ een limiet als $n \rightarrow \infty$, dan heeft ook $p \sum_{k=1}^n u_k$ een limiet. Bestaat de eerste limiet niet, dan ook niet de tweede.

Stelling 3

Is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent en $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergent, dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ convergent.

Bewijs:

$$\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k$$

Is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = S_1$, en $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k = S_2$, dan is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = S_1 + S_2$$

Uit de bewijsgang blijkt tevens dat als een der reeksen convergent is en de andere divergent, de somreeks $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ divergent is. Men hoede zich voor de misvatting dat als beide reeksen divergent zijn, de somreeks ook divergent zou zijn. Ter toelichting diene het volgende voorbeeld.

Van de reeks met algemene term $u_n = 1/n$, wordt in par. 93 de divergentie bewezen. De reeks met algemene term $v_n = -1/(n+1)$, is eveneens divergent. De reeks met algemene term:

$$u_n + v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

is echter convergent, hetgeen in par. 90, voorbeeld 2 is aangetoond.

93 Het integraalcriterium

Heeft de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uitsluitend *positieve* termen, dan is de partiële som $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ *monotoon stijgend*. Is de rij $\{S_n\}$ naar boven begrensd, dan bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, en is de reeks dus convergent. Is $\{S_n\}$ niet naar boven begrensd, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, en is de reeks dus divergent.

Voor het aantonen van de convergentie van een reeks met *uitsluitend positieve* termen, behoeft men dus slechts aan te tonen dat de rij $\{S_n\}$ begrensd is. Dit kan op verschillende manieren gebeuren. Een ervan is het vergelijken van S_n met een bepaalde integraal. Hiertoe is nodig dat expliciet aangegeven kan worden hoe u_n afhangt van n , d.w.z. dat er een functie f bekend is, waarvoor geldt: f is gedefinieerd voor alle $x > x_0$, $u_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Integraalcriterium

Stel voor $x > x_0 > 0$ is $f(x) > 0$ en f monotoon dalend. Stel verder dat er een natuurlijk getal N is, zo dat $u_n = f(n) \forall n \geq N$, en dat $\int_{x_0}^a f(x) dx$ bestaat $\forall a \geq x_0$, dan zijn de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ en de integraal $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx$ of beide convergent of beide divergent.

Bewijs:

Vanaf het grootste der getallen x_0 en N gelden beide eigenschappen: $u_n = f(n)$ en $f(x) > 0$. Voor het bewijs van de stelling nemen we ter vereenvoudiging aan dat $u_n = f(n)$ geldt vanaf $n = 1$, en $f(x) > 0$ voor $x > 0$. Dit is steeds te bereiken door een eindig aantal termen aan het begin van de reeks weg te laten. Volgens par. 92 St. 1 wordt de convergentie van de reeks hierdoor niet beïnvloed.

We verdelen het oppervlak voorgesteld door de integraal $\int_1^n f(x) dx$, waarvan we het bestaan veronderstellen (fig. 94), in stroken door middel van de ordinaten $x = k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$).

De oppervlakte van de strook PQRS wordt naar beneden begrensd door de rechthoek P_1QRS ter grootte u_k , en naar boven door de rechthoek PQ_1RS ter grootte u_{k-1} . Daar f monotoon daalt is dan $\sum_{k=2}^n u_k$ een ondersom voor de integraal, en $\sum_{k=1}^{n-1} u_k$ een bovensom (zie ook fig. 94). Dus is:

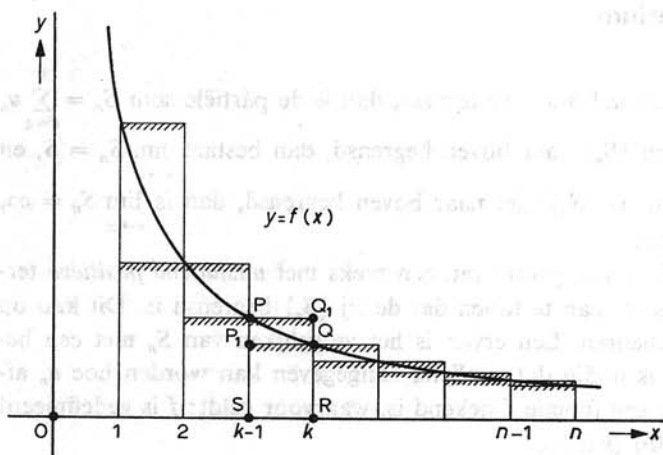
$$\sum_{k=2}^n u_k < \int_1^n f(x) dx < \sum_{k=1}^{n-1} u_k$$

Dit is ook te schrijven als

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x) dx < S_{n-1} \quad (93.1)$$

Deze ongelijkheid geldt voor iedere gehele $n > 1$.

Fig. 94



Is $\int_1^\infty f(x) dx$ convergent, dan is $\int_1^n f(x) dx$ begrensd, en blijkens (93.1) is dan ook S_n begrensd. Hieruit volgt dat dan de rij $\{S_n\}$ een limiet heeft, dus de reeks convergeert.

Is $\int_1^\infty f(x) dx$ divergent, dan neemt $\int_1^n f(x) dx$ met n onbegrensd toe, dus ook S_{n-1} , en is de rij $\{S_{n-1}\}$ divergent, d.w.z. de reeks divergeert.

Hiermede is het gestelde bewezen.

Vervangt men in de rechterongelijkheid van (93.1) n door $(n + 1)$, dan volgt:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < S_n$$

Combineert men deze ongelijkheid met (93.1), dan vindt men:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < S_n < u_1 + \int_1^n f(x) dx \quad (93.2)$$

Uit (89.2) volgt in geval van convergentie voor $n \rightarrow \infty$:

$$\int_1^\infty f(x) dx < \lim_{n \rightarrow \infty} S_n < u_1 + \int_1^\infty f(x) dx \quad (93.3)$$

Opmerking:

In (93.1) en (93.2) kunnen voor $n \rightarrow \infty$ de ongelijkheden nooit in gelijkheden overgaan. Het verschil tussen de integraal en de ondersom resp. bovensom bestaat uit de oppervlakte van kromlijnige driehoekjes. Deze oppervlakte nadert niet tot nul voor $n \rightarrow \infty$. Daarom kan ook in (93.3) geen gelijkheid optreden. De uitdrukking (93.3) geeft dus slechts een benaderde waarde voor de som S van de reeks.

Enige toepassingen blijken uit de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 1

De functie $x \mapsto e^{-\alpha x}$ is voor $x > 0$ positief en monotoon dalend.

De integraal:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \quad (\alpha > 0)$$

is convergent (par. 75, voorbeeld 1). Bijgevolg is de reeks:

$$\sum e^{-\alpha n}$$

convergent voor $\alpha > 0$. Stellen we $e^{-\alpha} = r$, dan is $0 < r < 1$, en volgt dus dat:

$$\sum r^n \quad (93.4)$$

convergent is voor $0 < r < 1$.

Voorbeeld 2

De functie $x \mapsto x^{-1}$ is monotoon dalend en positief voor $x > 0$.

De integraal:

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx$$

is divergent. Een primitieve is nl. $x \mapsto \ln x$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$.

Bijgevolg is de reeks:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (93.5)$$

divergent. De reeks (93.5) noemt men de *harmonische reeks* (HR).

Voorbeeld 3

De functie $x \mapsto x^{-p}$ ($p > 0$) is monotoon dalend en positief voor $x > 0$.

De integraal:

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx$$

is convergent voor $p > 1$ en divergent voor $p < 1$ (par. 75, voorbeeld 2). Ook voor $p = 1$ is de integraal divergent (vorig voorbeeld). Bijgevolg is de reeks:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \quad (93.6)$$

convergent voor $p > 1$ en divergent voor $0 < p \leq 1$. Ook voor $p < 0$ is de reeks divergent, omdat de algemene term niet tot nul nadert. De reeks (93.6) heet voor $p \neq 1$ de *hyperharmonische reeks* (HHR).

Voorbeeld 4

De functie $x \mapsto x^{-1} \ln^{-p} x$ is monotoon dalend en positief voor „voldoend grote”

$x > 1$. Een primitieve van deze functie is $x \mapsto \frac{\ln^{1-p} x}{1-p}$ voor $p \neq 1$, en $x \mapsto \ln \ln x$ voor $p = 1$. Verder is:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^{1-p} x}{1-p} = \begin{cases} 0 & (p > 1), \\ \infty & (p < 1) \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \ln x = \infty$$

Bijgevolg is de reeks:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} = \frac{1}{2 \ln^p 2} + \frac{1}{3 \ln^p 3} + \frac{1}{4 \ln^p 4} + \dots \quad (93.7)$$

convergent voor $p > 1$ en divergent voor $p \leq 1$.

Opmerking:

De reeksen gegeven in de voorbeelden 1...3 zullen in het vervolg vaak gebruikt worden ter vergelijking met andere reeksen, waarvan de convergentie of divergentie onderzocht moet worden.

94 Majorantencriterium 1

In principe zou men, om de convergentie van een reeks te onderzoeken, de beschikking moeten hebben over een formule voor S_n . Het is echter nagenoeg in de meeste gevallen onmogelijk om voor S_n een expliciete formule te vinden.

Om de convergentie of divergentie van een reeks met *positieve* termen na te gaan, vergelijkt men deze daarom gewoonlijk met een reeks waarvan de convergentie of divergentie bekend is.

Zijn $\sum u_n$ en $\sum v_n$ reeksen met positieve termen, en geldt vanaf $n = n_1$:

$$u_n \leq v_n \tag{94.1}$$

dan noemt men de reeks $\sum v_n$ een *majorant* van de reeks $\sum u_n$. Omgekeerd is $\sum u_n$ een *minorant* van de reeks $\sum v_n$. Men geeft dit wel aan door het symbool:

$$\sum u_n \ll \sum v_n$$

We nemen in het vervolg ter vereenvoudiging aan dat indien (94.1) geldt, dit reeds het geval is vanaf $n = 1$, waarbij we ons beroepen op par. 92 St. 1.

Majorantencriterium 1

Is $0 \leq u_n \leq v_n$ en $\sum v_n$ convergent, dan is ook $\sum u_n$ convergent. Is $\sum u_n$ divergent, dan ook $\sum v_n$.

Bewijs van het eerste deel:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n v_k = S_n'$$

Is de rij $\{S_n'\}$ convergent, dan is S_n' begrensd, dus ook S_n begrensd. Bijgevolg heeft S_n een limiet voor $n \rightarrow \infty$, d.w.z. $\sum u_n$ convergeert.

Bewijs van het tweede deel:

Is $\{S_n\}$ divergent, dan neemt S_n met n onbegrensd toe; bijgevolg neemt ook S_n' onbegrensd toe, d.w.z. $\sum v_n$ is divergent.

Opmerking:

Als $\sum u_n$ convergent is, dan kunnen we geen uitspraak doen over het gedrag van $\sum v_n$. Evenzo kunnen we niets zeggen over het gedrag van $\sum u_n$ als $\sum v_n$ divergeert.

Voorbeeld 1

Van de reeks $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ is $\sum \frac{1}{n^2}$ een majorant, want $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$. De reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ is convergent (HHR met $p = 2$). Dus is ook $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ convergent. (Zie ook par. 90, voorbeeld 2.)

Voorbeeld 2

$\sum \frac{1}{3n-1}$ divergeert, want $\sum \frac{1}{3n}$ is een minorant, en $\sum \frac{1}{n}$ divergeert (HR).

Voorbeeld 3

$\sum \frac{n}{3^n}$ is convergent. Dit is minder eenvoudig aan te tonen. Bekend is (zie par. 46):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

Er bestaat dus een vast getal N zo dat voor $n > N$:

$$n < 2^n$$

daar voor n groot genoeg geldt:

$$0 < \frac{n}{2^n} < 1$$

Voor $n > N$ is dan ook:

$$\frac{n}{3^n} = \frac{n}{2^n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

De convergente reeks $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ is een majorant van de gegeven reeks.

Voorbeeld 4

De reeks $\sum \frac{2 + \sin n}{n}$ divergeert. Immers steeds is:

$$\frac{2 + \sin n}{n} \geq \frac{2 - 1}{n} = \frac{1}{n}$$

en $\sum \frac{1}{n}$ is een divergente minorant van de gegeven reeks.

Uit majorantencriterium 1 leiden wij een ander af dat bij het onderzoek naar convergentie vaak eenvoudig is toe te passen.

Stelling

Is $u_n > 0$ en $v_n > 0$ en geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = p \quad (p > 0)$$

dan zijn $\sum u_n$ en $\sum v_n$ of beide convergent of beide divergent.

Bewijs:

Bestaat de limiet p en is $p \neq 0$, dan is er een vast getal N , zo dat voor $n > N$ geldt:

$$\frac{1}{2}p < \frac{u_n}{v_n} < 2p$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{2}pv_n < u_n < 2pv_n \tag{94.2}$$

De reeksen $\sum \frac{1}{2}pv_n$ en $\sum 2pv_n$ convergeren of divergeren al naar gelang $\sum v_n$ convergeert of divergeert (par. 92 St. 2).

Is $\sum v_n$ convergent, dan volgt uit de rechter ongelijkheid van (94.2) de convergentie van $\sum u_n$. Is $\sum v_n$ divergent, dan volgt uit de linker ongelijkheid van (94.2) de divergentie van $\sum u_n$.

Opmerking:

In tegenstelling met de situatie bij het majorantencriterium 1 kunnen we nu het gedrag van de ene reeks afleiden uit dat van de andere.

Voorbeeld 5

$\sum u_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ is te vergelijken met:

$$\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$$

Immers:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)}} = 1 \neq 0$$

$\sum v_n$ is divergent (HR), dus ook $\sum u_n$.

Voorbeeld 6

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{r^n - 1} \quad (r \text{ vast } > 0, \neq 1)$$

We onderscheiden 2 gevallen:

1 $0 < r < 1$

2 $r > 1$

Geval 1:

$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n - 1} = -1$. De reeks divergeert, want u_n nadert niet tot nul als n nadert tot oneindig.

Geval 2:

We vergelijken de reeks met $\sum v_n = \sum \frac{1}{r^n}$. ($\sum u_n$ heeft nu positieve termen.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{r^n - 1} = 1 \neq 0 \quad (r > 1)$$

Omdat $\sum v_n$ convergent is (MR met reden < 1) is $\sum u_n$ convergent voor $r > 1$.

95 Majorantencriterium 2

Uit majorantencriterium 1 is een ander af te leiden dat soms eenvoudiger is toe te passen.

Majorantencriterium 2

Is $u_n > 0$ en $v_n > 0$ en is vanaf zeker rangnummer:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad (95.1)$$

dan is $\sum u_n$ convergent, als $\sum v_n$ convergeert, en is $\sum v_n$ divergent als $\sum u_n$ divergeert.

Bewijs:

Stel N is het eerste rangnummer, waarvoor (95.1) geldt en $m \geq N + 1$. Dan is dus:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N}, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \leq \frac{v_{N+2}}{v_{N+1}}, \quad \dots \quad \frac{u_m}{u_{m-1}} \leq \frac{v_m}{v_{m-1}}$$

Door vermenigvuldiging van bovenstaande ongelijkheden volgt:

$$\frac{u_m}{u_N} \leq \frac{v_m}{v_N}$$

of:

$$u_m \leq \frac{u_N}{v_N} v_m = p v_m \quad (p \text{ vast}) \quad (95.2)$$

Uit (95.2) blijkt dat $\sum u_m \ll \sum p v_m$, waarbij $\sum p v_m$ convergeert resp. divergeert als $\sum v_m$ convergeert resp. divergeert. Hiermede is het criterium 2 tot majorantencriterium 1 teruggebracht.

Voorbeeld 1

$$\sum u_n = \sum \frac{n^3}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

Voor n groot genoeg geldt: $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$.

Vergelijken we nu $\sum u_n$ met $\sum v_n = \sum (\frac{3}{4})^n$, voor welke reeks $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{4}$, dan is voor n groot genoeg:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Dus is $\sum u_n$ convergent, want $\sum (\frac{3}{4})^n$ is convergent.

Voorbeeld 2

$$\sum u_n = \sum \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

Hiervoor geldt:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1} \cdot e^{-n-1} n!}{(n+1)! \cdot n^n \cdot e^{-n}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} \cdot \frac{n}{n+1} \end{aligned} \quad (95.3)$$

Bewezen is in par. 87, voorbeeld 5, dat $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dalend tot e nadert. Dus volgt uit (95.3):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n}{n+1}$$

Voor de harmonische reeks $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$ is:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1}$$

Dus is:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

De gegeven reeks is derhalve divergent.

96 De convergentiekenmerken van Cauchy en d'Alembert*

Convergentiekenmerken zijn regels, waarmede men in vele gevallen snel tot de convergentie of divergentie van een reeks kan besluiten zonder S_n expliciet te berekenen, en wel door uitsluitend naar de termen zelf te kijken.

De volgende kenmerken gelden alleen voor reeksen met *positieve* termen.

Kenmerk van Cauchy

Is $u_n > 0$ en geldt vanaf zeker rangnummer

$$\sqrt[n]{u_n} < r < 1 \quad (r \text{ vast})$$

* J. L. d'Alembert, 1717-1783.

dan is $\sum u_n$ convergent. Is vanaf zeker rangnummer:

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1$$

dan is $\sum u_n$ divergent.

Bewijs van het eerste deel:

Is $\sqrt[n]{u_n} < r$, dan is:

$$0 < u_n < r^n$$

en $\sum u_n$ wordt gemajoreerd door de convergente meetkundige reeks $\sum r^n$ ($0 < r < 1$).

Bewijs van het tweede deel:

Is $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, dan ook $u_n \geq 1$. De reeks $\sum u_n$ is divergent, want de algemene term nadert niet tot nul.

In vele gevallen bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, waardoor het kenmerk van Cauchy eenvoudiger is toe te passen.

Limietkenmerk van Cauchy

Is $u_n > 0$ en geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$$

dan is $\sum u_n$ convergent, indien $L < 1$ is, divergent als $L > 1$ is, terwijl voor $L = 1$ geen beslissing volgt.

Bewijs van het eerste deel ($L < 1$):

Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ is, bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon)$, zo dat:

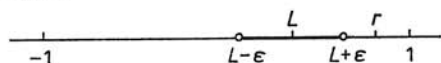
$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < L + \varepsilon$$

voor $n > N(\varepsilon)$. Voor n groot genoeg ligt dus $\sqrt[n]{u_n}$ in een willekeurig kleine omgeving van L (fig. 95). Er bestaat dus steeds een vast getal r tussen L en 1, bijv. $\frac{L+1}{2}$, zo dat op de duur:

$$\sqrt[n]{u_n} < r < 1$$

is. Hiermede is de stelling tot de vorige teruggebracht wat het eerste deel betreft.

Fig. 95



Bewijs van het tweede deel ($L > 1$):

Is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L > 1$, dan bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon)$, zo dat voor $n > N(\varepsilon)$:

$$\sqrt[n]{u_n} > L - \varepsilon$$

is. Kiest men ε klein genoeg, bijv. $\frac{L-1}{2}$, dan is $L - \varepsilon > 1$, en dus:

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

waaruit de divergentie volgt.

Bewijs van het derde deel ($L = 1$)

Is $L = 1$, dan ligt u_n op de duur willekeurig dicht bij 1. Er bestaat dus geen getal $r < 1$ waar $\sqrt[n]{u_n}$ beneden blijft, terwijl anderzijds u_n ook niet groter dan 1 behoeft te zijn. Er volgt dus geen beslissing.

Dat voor $L = 1$ zowel convergentie als divergentie kan optreden blijkt uit het volgende.

$$u_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$

De reeks $\sum u_n$ is divergent (HR).

$$u_n = \frac{1}{n^2}$$

Ook hier is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$$

Deze reeks is echter convergent (HHR, $p = 2$).

Kenmerk van d'Alembert

Is $u_n > 0$ en geldt vanaf zeker rangnummer:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1 \quad (r \text{ vast})$$

dan is $\sum u_n$ convergent; is vanaf zeker rangnummer:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

dan is $\sum u_n$ divergent.

Bewijs van het eerste deel:

We vergelijken $\sum u_n$ met de voor $0 < r < 1$ convergente meetkundige reeks $\sum v_n = \sum r^n$. Volgens het gegeven is:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{r^{n+1}}{r^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

De reeks $\sum u_n$ is dus convergent volgens majorantencriterium 2.

Bewijs van het tweede deel:

Is vanaf zeker rangnummer $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, dan is:

$$u_{n+1} \geq u_n$$

De termen van de reeks nemen dan niet af als n onbeperkt toeneemt en naderen dus niet tot nul. De reeks $\sum u_n$ is dus divergent.

Ook van het kenmerk van d'Alembert bestaat een limietvorm.

Limietkenmerk van d'Alembert

Is $u_n > 0$ en geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$$

dan is $\sum u_n$ convergent voor $L < 1$, divergent voor $L > 1$, terwijl voor $L = 1$ geen beslissing volgt.

Bewijs:

Het bewijs wordt op analoge wijze gevoerd als bij het limietkenmerk van Cauchy.

Voorbeeld 1

$$\sum u_n = \sum n^3 2^{-n}$$

Cauchy:

$$\sqrt[n]{u_n} = 2^{-1}(\sqrt[n]{n})^3, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}$$

d'Alembert:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

De reeks is dus convergent.

Voorbeeld 2

$$\sum u_n = \sum \frac{n^n}{n!}$$

Het kenmerk van Cauchy kunnen we niet toepassen, omdat we nog niet weten hoe $\sqrt[n]{n!}$ zich gedraagt.

d'Alembert:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

De reeks is dus divergent.

Voorbeeld 3

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{n \ln n}$$

d'Alembert:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

$$= 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

dus is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$$

en is ook:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

Het kenmerk van d'Alembert geeft dus geen beslissing.

Met het integraalkenmerk (par. 93, voorbeeld 4) is reeds de divergentie van deze reeks bewezen.

Voorbeeld 4

$$\sum u_n = \sum \left(\frac{1 + \sin n}{3} \right)^n$$

Cauchy:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1 + \sin n}{3}$$

Het kenmerk in de limietvorm is niet toe te passen, omdat $\frac{1 + \sin n}{3}$ geen limiet heeft voor $n \rightarrow \infty$.

Er geldt echter $\sqrt[n]{u_n} < \frac{2}{3}$, omdat $-1 < \sin n < 1$ is.

We kunnen dus het kenmerk van Cauchy in de meer algemene vorm toepassen, waarbij blijkt dat $\sum u_n$ convergent is.

Opmerking:

Hoewel de limietkenmerken van Cauchy en d'Alembert beide volgen uit het vergelijken van een reeks met een meetkundige reeks, heeft het kenmerk van Cauchy, zoals in par. 97 bewezen wordt, een iets ruimere toepassing. Ter toelichting diene de reeks $\sum u_n$, waarvoor geldt:

$$u_{2n} = 2n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad u_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = 2n(2n-1) \cdot \frac{1}{2}, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \infty$$

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{1}{2n(2n+1)} \cdot \frac{1}{2}, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 0$$

Hieruit volgt dat $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ geen limiet heeft als $n \rightarrow \infty$. Het limietkenmerk van d'Alembert is dus niet toe te passen. Echter is:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{u_{2n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{(2n-1)}} = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{u_{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2n(\frac{1}{2})^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[2n]{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ bestaat en is kleiner dan één, zodat de gegeven reeks convergent is.

97 Betrekking tussen de kenmerken van Cauchy en d'Alembert

Tussen de limietkenmerken van Cauchy en d'Alembert bestaat een betrekking die gegeven wordt door de tweede limietstelling van Cauchy (par. 88). Volgens deze stelling volgt uit het bestaan van $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ ook het bestaan van $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ die dezelfde waarde L heeft. Het heeft dus geen zin als het kenmerk van d'Alembert $L = 1$ oplevert, en er dus geen beslissing genomen kan worden, nog eens het kenmerk van Cauchy te beproeven.

98 Reeksen met positieve en negatieve termen. Absolute en voorwaardelijke convergentie

Zij $\sum u_n$ een reeks met positieve en negatieve termen. De reeks $\sum |u_n|$ bevat slechts positieve termen, en heet de reeks der absolute waarden. Is de reeks $\sum |u_n|$ convergent, dan heet $\sum u_n$ *absoluut convergent*, is $\sum |u_n|$ divergent, dan noemt men $\sum u_n$ *absoluut divergent*. Absolute convergentie of divergentie zegt a priori niets omtrent eventuele convergentie of divergentie van $\sum u_n$, want $\sum |u_n|$ is een andere reeks dan $\sum u_n$. Echter geldt de volgende stelling.

Stelling

Een absoluut convergente reeks is convergent.

Bewijs:

De partiële som $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ splitsen we in de som van alle positieve termen die we

S'_n noemen, en de som van alle negatieve termen die we door $-S''_n$ voorstellen. Dan is:

$$S_n = S'_n - S''_n$$

waarin S'_n en S''_n positieve getallen voorstellen. Stellen we door S_n^* een partiële som van de reeks $\sum |u_n|$ voor, dan is:

$$S_n^* = S'_n + S''_n$$

Omdat de rij $\{S_n^*\}$ convergent is, is S_n^* begrensd, dus zijn ook S'_n en S''_n begrensd. Daaruit volgt dat beide rijen apart een limiet hebben voor $n \rightarrow \infty$ (positieve termen). Dus heeft ook $\{S_n\} = \{S'_n - S''_n\}$ een limiet voor $n \rightarrow \infty$, d.w.z. de reeks $\sum u_n$ is convergent.

Voorbeeld 1

$$\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

$\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n^2}$. De reeks is convergent (HHR, $p = 2$), dus $\sum u_n$ is absoluut convergent.

Voorbeeld 2

$$\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n}$. Deze reeks is divergent (HR). De gegeven reeks is dus absoluut divergent. Op blz. 303 wordt aangetoond dat de reeks wel convergeert.

Voorbeeld 3

$$\sum u_n = \sum \frac{\sin nx}{1 + n^2}$$

$$|u_n| \leq \frac{1}{1 + n^2} < \frac{1}{n^2} = v_n$$

$\sum v_n$ is convergent (HHR, $p = 2$), dus $\sum |u_n|$ is convergent, d.w.z. $\sum u_n$ is absoluut convergent.

Voorbeeld 4

$$\sum u_n = \sum x^n$$

De reeks $\sum |u_n| = \sum |x|^n$ is convergent voor $|x| < 1$ en divergent voor $|x| \geq 1$. De gegeven reeks is dus absoluut convergent voor $|x| < 1$ en absoluut divergent voor $|x| \geq 1$.

Opmerking:

Is een reeks absoluut divergent, dan kan de reeks convergent of divergent zijn. De bewering dat een reeks divergent is, is dus een scherpere bewering dan dat een reeks absoluut divergent is. Van de reeks uit voorbeeld 2 wordt in par. 99 bewezen dat deze convergent is. De reeks van voorbeeld 4 is voor $|x| \geq 1$ niet alleen absoluut divergent, maar ook divergent, want voor $|x| \geq 1$ nadert de algemene term niet tot nul als n onbeperkt toeneemt.

Een convergente reeks die absoluut divergent is, noemt men *voorwaardelijk* of *relatief convergent*.

99 Alternierende reeksen. Kenmerk van Leibniz

Een *alternierende* reeks is een reeks met reële termen, waarvan de termen afwisselend positief en negatief zijn. Voor deze reeks geldt een kenmerk dat *voldoende* voorwaarden aangeeft voor convergentie.

Kenmerk van Leibniz

Een *alternierende reeks* waarvan de termen in absolute waarde monotoon tot nul naderen is convergent.

Bewijs:

Laat de alternierende reeks $\sum u_n$ zijn, en stel $|u_n| = a_n$, dan geldt $a_n = (-1)^{n+1}u_n$ als $u_1 > 0$. Als de reeks aan de gestelde voorwaarden voldoet, dus $a_n > a_{n+1} > a_{n+2}, \dots$, en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, dan geldt:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

De vormen tussen de haakjes zijn positief, want $a_{n+1} < a_n$; dus is S_{2n} monotoon stijgend. Verder is:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) + \dots - a_{2n} < a_1$$

S_{2n} is dus tevens begrensd, heeft dus een limiet L als $n \rightarrow \infty$.

Verder is:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

dus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = L$$

want $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$.

De sommen S_{2n} en S_{2n+1} hebben dus dezelfde limiet L .
 Aangezien n even dan wel oneven is, heeft S_n de limiet L , d.w.z. $\sum u_n$ is convergent.

Opmerking:

Een belangrijke bijkomstigheid bij een alternerende reeks die aan de gestelde voorwaarden voldoet is dat de „fout” die men bij afbreken maakt, kleiner is dan de absolute waarde van de eerste weggelaten term. Dit wil zeggen:

$$|S - S_n| < |u_{n+1}|$$

Er geldt nl.:

$$\begin{aligned} (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + \dots &= S - S_{2n} \\ &= a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - \dots \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$0 < S - S_{2n} < a_{2n+1} \tag{99.1}$$

$$\begin{aligned} \text{Ook: } -a_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + \dots &= S - S_{2n-1} = \\ &= -(a_{2n} - a_{2n+1}) - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - \dots \end{aligned}$$

dus:

$$-a_{2n} < S - S_{2n-1} < 0$$

of:

$$0 < S_{2n-1} - S < a_{2n} \tag{99.2}$$

Uit (99.1) en (99.2) samen volgt:

$$|S - S_n| < |u_{n+1}|$$

Voorbeeld 1

$$\sum u_n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Deze reeks heet de *reeks van Brouncker** en wordt ook wel *alternerende harmonische* reeks genoemd. De reeks voldoet klaarblijkelijk aan de gestelde voorwaarden en is dus convergent. Ze is echter absoluut divergent (par. 98 voorbeeld 2). Later zullen we zien dat de som van de reeks gelijk is aan $\ln 2$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de reeks met algemene term:

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n}$$

* W. Brouncker, 1620-1684.

Dit is de reeks:

$$\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} + \dots$$

Voor deze alternerende reeks is:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

Het is niet direct te zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Men kan dit als volgt bewijzen:

$$\begin{aligned} u_n^2 &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)} \right) \cdot \frac{2n-1}{2n} \end{aligned} \quad (99.3)$$

Omdat:

$$\frac{(2k-3)(2k-1)}{(2k-2)(2k-2)} = \frac{4k^2 - 8k + 3}{4k^2 - 8k + 4} < 1$$

is, zijn in (99.3) alle tussen haakjes geplaatste factoren kleiner dan één, dus is:

$$u_n^2 < \frac{1}{2n}$$

waaruit volgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. De gegeven reeks is dus convergent.

Het aantonen van de monotonie van de rij $\{|u_n|\}$ kan op verschillende manieren geschieden. In eenvoudige gevallen onderzoekt men direct $|u_{n+1}| - |u_n|$ of $|u_{n+1}|/|u_n|$. In minder eenvoudige gevallen kan men vaak van de differentiaalrekening gebruik maken, indien er een functie f is, die ook gedefinieerd is voor reële veranderlijken, terwijl $f(n) = u_n$ als $n \in \mathbb{N}$. Het is voldoende (niet noodzakelijk) te bewijzen dat $f'(x) < 0$ is voor voldoende grote x ($x \in \mathbb{R}$). We geven hiervan een voorbeeld.

Voorbeeld 3

$$\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 0 \\ \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt{n+1}} \\ \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)^2 &= \frac{n^3 + 2n^2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} < 1 \end{aligned}$$

dus:

$$|u_{n+1}| < |u_n|$$

De reeks voldoet aan de gestelde eisen en is dus convergent.

We tonen bij dit voorbeeld ook nog eens de monotonie aan met behulp van de differentiaalrekening.

Zij:

$$f(n) = \frac{\sqrt{n+1}}{n}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

dan:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}x(x+1)^{-\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}}{x^2} \\ &= \frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Blijkbaar is $f'(x) < 0$ voor $x > 0$, dus f is monotoon dalend voor $x > 0$, waaruit volgt:

$$f(n+1) < f(n)$$

Voorbeeld 4

$$\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \cdot \sin \frac{1}{n}$$

De gegeven reeks is absoluut divergent. Voor grote n is $\sin \frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$, dus $|u_n| \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$.

De reeks is alternerend en $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. We onderzoeken de monotonie van de functie f , gedefinieerd voor $x \neq 0$ door:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/x}{1/x} = 1$$

De teller van $f'(x)$ nadert dus tot $-2 + 1 = -1$, en is dus voor grote x negatief; de noemer is positief, dus $f'(x) < 0$ voor x groot genoeg. De functie f is dus op de duur dalend, waaruit volgt:

$$|u_{n+1}| < |u_n|$$

De gegeven reeks is convergent.

Opmerking:

Het kenmerk van Leibniz geeft een voldoende voorwaarde voor de convergentie van een alternerende reeks, echter geen noodzakelijke voorwaarde. Is de voorwaarde van de monotonie niet vervuld, dan is zowel divergentie als convergentie mogelijk.

Bij de reeks:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^2} + \dots$$

is $\{|u_n|\}$ niet monotoon. De reeks is absoluut convergent, want zowel voor even als oneven n geldt: $|u_n| \leq 1/n^2$.

Ook bij de reeks:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^2} + \dots$$

is aan de monotonievoorwaarde niet voldaan. Voor deze reeks is:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

$$- \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

De reeks $\sum \frac{1}{2n-1}$ is divergent, de reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ is convergent, de somreeks is dus divergent.

100 Reeksen met complexe termen

Gegeven is de reeks $\sum w_n$ met complexe termen $w_n = u_n + iv_n$, waarin u_n en v_n reëel zijn. De partiële som S_n is als volgt te splitsen:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (u_k + iv_k) = \sum_{k=1}^n u_k + i \sum_{k=1}^n v_k = S'_n + iS''_n$$

Hierin zijn de partiële sommen van de u - en de v -reeks S'_n en S''_n reëel.

De partiële som S_n heeft dan en slechts dan een limiet, als zowel het reële deel S'_n als het imaginaire deel S''_n een limiet heeft (zie par. 89).

Voor reeksen met complexe termen geldt eenzelfde eigenschap als voor reeksen met reële termen.

Stelling

Een absoluut convergente reeks met complexe termen is convergent.

Voor het complexe getal $w = u + iv$ geldt:

$$|u| \leq \sqrt{u^2 + v^2} = |w|, \quad |v| \leq \sqrt{u^2 + v^2} = |w|$$

Hieruit volgt:

$$\sum_{k=1}^n |u_k| \leq \sum_{k=1}^n |w_k|, \quad \sum_{k=1}^n |v_k| \leq \sum_{k=1}^n |w_k|$$

Gegeven is dat $\sum |w_n|$ convergent is, dus zijn ook de reeksen met reële termen $\sum u_n$ en $\sum v_n$ absoluut convergent, dus convergent. Bijgevolg hebben S'_n en S''_n een limiet als $n \rightarrow \infty$, dus is dit ook het geval met $S_n = S'_n + iS''_n$. De reeks $\sum w_n$ is dus convergent.

Opmerking:

De in par. 98 en par. 100 genoemde stellingen volgen ook eenvoudig uit het algemene convergentiekenmerk (par. 91) aldus:

De reeks $\sum |w_n|$ is convergent als bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ bestaat, zo dat voor $n > N(\varepsilon)$ en $m > N(\varepsilon)$ en $m > n$ geldt:

$$|S_m^* - S_n^*| = (|w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \dots + |w_m|) < \varepsilon$$

Hierin is:

$$S_n^* = \sum_{k=1}^n |w_k|$$

Voor dezelfde $N(\varepsilon)$ geldt dan ook:

$$|S_m - S_n| = |w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_m| \leq (|w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \dots + |w_m|) < \varepsilon$$

d.w.z. ook $\sum w_n$ is convergent. Men kan zich hierbij w_n zowel reëel als complex denken. De beide stellingen van par. 98 en par. 100 zijn hiermede gelijktijdig bewezen.

101 Machtreksen

Een machtreeks is een reeks van de gedaante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad (c_n \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \text{ beide onafhankelijk van } x; x \in \mathbb{R}). \quad (101.1)$$

waarin c_n onafhankelijk is van x ; dit noemt men een machtreeks in $x-a$.

We laten de reeks met $n=0$ beginnen, zodat de beginterm c_0 is. Houden we vast aan $n=1, 2, \dots$, dan zouden we moeten schrijven:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}(x-a)^{n-1}$$

Hierin is a vast en x veranderlijk. In het bijzondere geval $a=0$ heeft de reeks de gedaante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (101.2)$$

Om de machtreksen te bestuderen is het voldoende (101.2) te beschouwen, daar het algemene geval (101.1) teruggebracht kan worden tot (101.2) door een translatie van de oorsprong langs de x -as. Daarom behandelen we hier de theorie van de machtreksen van de gedaante (101.2).

Bij een machtreeks is de eerste term $u_0 = c_0$ en stelt de algemene term $u_n = c_n x^n$ de $(n+1)$ de term voor.

Bij een machtreeks moet men niet vragen of deze convergeert of divergeert, maar waar (d.w.z. voor welke waarden van x) deze convergeert of divergeert!

Voor machtreksen zijn de volgende stellingen van belang.

Stelling 1

Is de machtreeks $\sum c_n x^n$ convergent voor $x = x_0$, dan is de reeks absoluut convergent voor iedere x , waarvoor $|x| < |x_0|$ is.

Bewijs:

De reeks $\sum c_n x_0^n$ is convergent, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0$. Dus is $c_n x_0^n$ zeker begrensd, d.w.z. bij gegeven vaste M bestaat er een getal N zo dat voor $n > N$ geldt:

$$|c_n x_0^n| < M$$

Hieruit volgt voor $n > N$ (we mogen $x_0 \neq 0$ veronderstellen, daar voor $x_0 = 0$ de stelling geen zin heeft):

$$|c_n x^n| = |c_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M r^n \quad \left(r = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \right)$$

De reeks $\sum |c_n x^n|$ wordt dus (als $|x| < |x_0|$) gemajoreerd door de convergente meetkundige reeks $\sum M r^n$ en is dus convergent als $|x| < |x_0|$.

Stelling 2

Is de machtreeks $\sum c_n x^n$ divergent voor $x = x_0$, dan is de reeks divergent voor iedere x , waarvoor $|x| > |x_0|$ is.

Bewijs:

Stel er was een x_1 met $|x_1| > |x_0|$, waarvoor de reeks convergent was, dan was volgens stelling 1 de reeks absoluut convergent voor $x = x_0$, want $|x_0| < |x_1|$. Dit is in strijd met het gegeven.

Dus: is een machtreeks convergent voor $x = a$ ($a > 0$), dan is de reeks convergent op het gehele interval $\langle -a, a \rangle$. Dit betekent dat de waarden waarvoor een machtreeks convergeert altijd een interval vormen. Dit interval noemt men het *convergentie-interval*. In extreme gevallen kan dit interval bestaan uit het punt 0, of uit de gehele reële as. In alle andere gevallen heeft de getallenverzameling $\{a\}$ een kleinste bovengrens. Deze kbg noemt men de *convergentiestraal* ρ . De machtreeks is dus convergent op $\langle -\rho, \rho \rangle$ en divergent buiten $[-\rho, \rho]$. Omtrent de eventuele convergentie of divergentie op de rand, d.w.z. voor $x = -\rho$ of $x = \rho$ is hierbij niets vastgesteld. Een reeks met convergentiestraal ρ kan dus zowel voor $x = \rho$ als $x = -\rho$ ofwel convergent ofwel divergent zijn. In de genoemde extreme gevallen schrijft men dan $\rho = 0$ resp. $\rho = \infty$.

Is bij een machtreeks het limietkenmerk van Cauchy of dat van d'Alembert toe te passen, dan volgt ρ eenvoudig uit de coëfficiënten van de machtreeks. Volgens het kenmerk van Cauchy is de reeks absoluut convergent en dus convergent als:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \sqrt[n]{|c_n|} < 1$$

en divergent als deze limiet groter is dan één, daar in dit geval de algemene term niet

tot nul nadert. Er is dus convergentie als:

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

en divergentie als $|x| > 1/\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Bijgevolg is:

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Op analoge wijze volgt indien het limietkenmerk van d'Alembert is toe te passen:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Voorbeeld 1

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \text{ voor iedere } x$$

De reeks $\sum \frac{x^n}{n!}$ is convergent voor iedere x , $\rho = \infty$.

Voorbeeld 2

$$u_n = n!x^n$$

In dit geval nadert voor geen enkele waarde van $x \neq 0$ u_n tot 0. De reeks $\sum n!x^n$ is divergent voor iedere $x \neq 0$, ze is slechts convergent voor $x = 0$, $\rho = 0$.

Voorbeeld 3

$$u_n = nx^{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = |x|$$

$\sum nx^n$ is convergent voor $|x| < 1$, divergent voor $|x| \geq 1$, $\rho = 1$. De divergentie voor $|x| = 1$ volgt hieruit dat voor $|x| = 1$, u_n niet tot nul nadert.

Voorbeeld 4

$$u_n = \frac{x^n}{n}$$

Evenals bij voorbeeld 3 is $\rho = 1$. Voor $x = 1$ is $\sum u_n$ divergent (HR). Voor $x = -1$ is $\sum u_n$ convergent (reeks van Brouncker, par. 99 voorbeeld 1). De reeks is dus convergent op $[-1, 1)$ en buiten dit interval divergent.

Voorbeeld 5

$$u_n = \frac{x^n}{n^2}$$

Ook voor deze reeks is $\rho = 1$. Voor $|x| = 1$ is de reeks absoluut convergent (HHR), $p = 2$). Het convergentie-interval is $[-1, 1]$. Daarbuiten is de reeks divergent.

Voorbeeld 6

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^n, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} x$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$, dus $\sum u_n$ is convergent voor $|x| < 1$ en divergent voor $|x| > 1$.

Bewezen is reeds in par. 99 voorbeeld 2, dat de reeks convergent is voor $x = -1$. Om het gedrag te onderzoeken voor $x = 1$ schrijven we u_n^2 in de vorm:

$$u_n^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \left(\frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \right) \left(\frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \right) \dots \frac{(2n-1)(2n-1)}{(2n-2)2n} \cdot \frac{1}{2n}$$

Omdat alle factoren van de gedaante $\frac{(2n-1)(2n-1)}{(2n-2)2n}$ groter dan één zijn voor $n \geq 2$, is $u_n^2 > \frac{1}{4n}$, dus $u_n > \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Voor $x = 1$ is dus de reeks divergent, want ze wordt geminoreerd door de divergente reeks $\sum \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}$ (HHR, $p = \frac{1}{2}$). De reeks is dus convergent op $[-1, 1)$ en divergent buiten dit interval.

Voorbeeld 7

$$u_n = \frac{n+1}{n^2} \left(\frac{x}{2-x} \right)^n$$

Voor $x = 2$ heeft de reeks geen betekenis, dit geval schakelen we uit, en stellen: $y = x/(2-x)$. Er ontstaat dan een machtreeks in y .

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= |y| \frac{n+2}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{n+1} \\ &= |y| \frac{n^3 + 2n^2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \end{aligned} \quad (101.3)$$

$$\text{dus } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |y|$$

Hieruit volgt de convergentie voor $|y| < 1$ en de divergentie voor $|y| > 1$.

Voor $y = 1$ is:

$$u_n = \frac{n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Voor $y = 1$ wordt de reeks geminoreerd door de harmonische reeks en is dus divergent. Voor $y = -1$ is de reeks alternerend, terwijl de termen in absolute waarde monotoon tot nul naderen. De monotonie blijkt uit (101.3). De gegeven reeks is dus:

$$\text{convergent voor } \left| \frac{x}{2-x} \right| < 1 \text{ en ook als } \frac{x}{2-x} = -1$$

$$\text{divergent voor } \left| \frac{x}{2-x} \right| > 1 \text{ en ook als } \frac{x}{2-x} = 1$$

$$\left| \frac{x}{2-x} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(2-x)^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-4}{(2-x)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

$$\frac{x}{2-x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\frac{x}{2-x} = -1 \text{ geeft geen oplossing.}$$

Eindresultaat:

$\sum u_n$ is convergent voor $x < 1$, divergent voor $x \geq 1$.

102 Eenduidigheid van een machtreeksontwikkeling. Het ordersymbool van Landau*

Is de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergent voor $|x| < \rho$, dan is aan ieder punt x van het interval $\langle -\rho, \rho \rangle$ door de som S van de reeks een getal toegevoegd, dus als we deze

* E. Landau, 1877-1938.

waarde schrijven als $f(x)$, dan is:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad *$$

Men noemt omgekeerd de reeks $\sum c_n x^n$ de ontwikkeling van $f(x)$ in een machtreeks om 0. Men kan zich hierbij de vraag stellen of $f(x)$ slechts op één wijze door een machtreeks kan worden voorgesteld, of dat anderszins $f(x)$ ook nog door een andere machtreeks $\sum b_n x^n$ kan worden weergegeven. We zullen bewijzen dat het laatste niet het geval is en dat dus een machtreeksontwikkeling eenduidig is.

We maken bij de afleiding gebruik van het *ordesympool van Landau*.

Definitie

$f(x)$ is voor $x \rightarrow 0$ van de orde $O(x^n)$, indien $\left| \frac{f(x)}{x^n} \right|$ begrensd is in een gereduceerde omgeving van $x = 0$.

Men geeft dit aldus aan: $f(x) = O(x^n)$, hetgeen dus betekent, $|f(x)| < M|x|^n$, waarin M een positieve constante is.

Voorbeelden

$$\sin x = O(x), \quad \sin x = O(1), \quad 1 - \cos x = O(x^2)$$

Naast het symbool O (grote O) heeft Landau nog een symbool o (kleine o) ingevoerd.

Definitie

$f(x)$ is voor $x \rightarrow 0$ van de orde $o(x^n)$, indien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

Is dus bijv. $f(x) = O(x^n)$ ($n > 1$), dan is $f(x) = o(x^{n-1})$.

Voorbeelden

$$\sin x = o(1), \quad 1 - \cos x = o(x)$$

Breekt men de convergente machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ af na de term $c_n x^n$, dan zullen we de restterm $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^k$ voorstellen door $R_n(x)$.

* We herinneren hier aan de tweede betekenis van $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, nl. het *getal* dat de som van de reeks voorstelt.

Stelling

De restterm $R_n(x)$ van de convergente machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ is van de orde $o(x^n)$.

Bewijs:

Zij x een punt van het interval $\langle -\rho, \rho \rangle$ ($\rho \neq 0$), dan is:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| |x|^k$$

Bij iedere x met $|x| < \rho$ is er een x_0 te vinden, zo dat $|x| < |x_0| < \rho$. Omdat $\sum c_n x_0^n$ convergent is, is $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0$, dus is $c_n x_0^n$ begrensd, d.w.z. er is een vast getal M zo dat $|c_n x_0^n| < M$. Hieruit volgt:

$$|c_n| |x|^n = |c_n| |x_0|^n \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \quad \left(\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \right)$$

Bijgevolg geldt:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| |x|^k < M \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^k = \frac{M |x/x_0|^{n+1}}{1 - |x/x_0|} \\ &= \frac{M |x|^{n+1}}{|x_0|^n (|x_0| - |x|)} \end{aligned}$$

Als $|x|$ klein genoeg is, dan is $\frac{M}{|x_0|^n (|x_0| - |x|)}$ kleiner dan een zekere M_1 , dus geldt:

$$|R_n(x)| < M_1 |x|^{n+1}$$

Hieruit volgt dat $R_n(x)$ van de orde $O(x^{n+1})$ en dus van de orde $o(x^n)$ is.

Uit de zo juist bewezen stelling bewijzen we de eenduidigheid van de machtreeksontwikkeling op de volgende wijze.

Zou $f(x)$ twee ontwikkelingen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ toelaten, dan zou voor iedere x gelden:

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + R_n(x) &= \\ &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + T_n(x) \end{aligned} \quad (102.1)$$

Laat men hierin x naderen tot nul, dan volgt $c_0 = b_0$, en dus:

$$c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + R_n(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + T_n(x)$$

Deling door x ($x \neq 0$) geeft:

$$c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1} + R_n^*(x) = b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1} + T_n^*(x) \quad (x \neq 0)$$

met $|R_n^*(x)| < K |x|^n$ en $|T_n^*(x)| < L |x|^n$.

Laat men weer x naderen tot nul, dan volgt $c_1 = b_1$.

Herhaalt men het geschetste procedé, dan volgt de gelijkheid van c_n en $b_n \forall n \in \mathbb{N}$, m.a.w. de reeksen zijn identiek.

103 Benadering van een functie door een veelterm met rest

In het volgende zullen we aantonen hoe men $f(x)$ kan ontwikkelen in een veelterm met rest als f aan voldoende voorwaarden voldoet.

Daarmede bedoelen we dat we een veelterm P bepalen van de graad n zó dat $f(0) = P(0)$, $f'(0) = P'(0)$, ..., $f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0)$. Het verschil tussen $P(x)$ en $f(x)$ geven we aan met $R_n(x)$, de z.g. *restterm*. Dus:

$$f(x) = P(x) + R_n(x)$$

In par. 108 zullen we verder nagaan onder welke voorwaarden de gevonden ontwikkeling kan worden uitgebreid tot een machtreeksontwikkeling.

We nemen aan dat de functie f in een omgeving van $x = 0$ voldoende vaak differentieerbaar is.

In fig. 96 is de kromme met vergelijking $y = f(x)$ geschetst in een omgeving van $x = 0$. Is de kromme in de omgeving van $x = 0$ niet sterk gekromd, dan zal de functiewaarde (BP) weinig verschillen van de waarde die men verkrijgt door in A de raaklijn aan de kromme te trekken, en de ordinaat te bepalen van het punt B_1 op deze raaklijn voor $x = h$. Blijkens de figuur is dan $BP \approx B_1P$, dus:

$$f(h) \approx f(0) + h \tan \alpha = f(0) + hf'(0)$$

d.w.z. de lineaire functie $h \mapsto f(0) + hf'(0)$ geeft een eerste benadering voor $f(h)$.

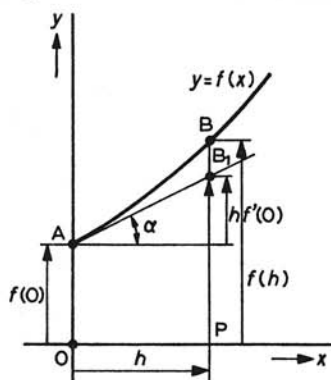
Een betere benadering verkrijgt men door uit te gaan van de identiteit:

$$f(h) = f(0) + \int_0^h f'(t) dt \quad (103.1)$$

Nu is $dt = -d(h - t)$, dus is (103.1) ook te schrijven als:

$$f(h) = f(0) - \int_{t=0}^{t=h} f'(t) d(h - t) \quad (103.2)$$

Fig. 96



Door partiële integratie volgt uit (103.2):

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) - [f'(t)(h-t)]_0^h + \int_0^h f''(t)(h-t) dt \\ &= f(0) + hf'(0) + \int_0^h f''(t)(h-t) dt \end{aligned} \quad (103.3)$$

Variëert $f''(t)$ weinig op het interval $[0, h]$, dan verkrijgt men een bruikbare benadering door $f''(t) \approx f''(0)$ te nemen, en volgt uit (103.3):

$$f(h) \approx f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0)$$

Voorbeeld

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x$$

zodat:

$$\cos h \approx 1 - \frac{1}{2}h^2$$

Voor $h = \frac{1}{2}$ is $\cos h = \cos \frac{1}{2} \approx \cos 28^\circ 39' \approx 0,878$.

$1 - \frac{1}{2}h^2 = 1 - \frac{1}{8} = 0,875$. De formule $\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2$ geeft dus een fout van ongeveer 0,4%. Voor grotere h is de afwijking veel groter. Zo is voor $h = \frac{1}{2}\pi$, $\cos h = 0$ en $1 - \frac{1}{2}h^2 = 1 - \frac{1}{8}\pi^2 \approx -0,23$. In fig. 97 zijn de grafieken van $y = \cos x$ en $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ geschetst in een omgeving van $x = 0$.

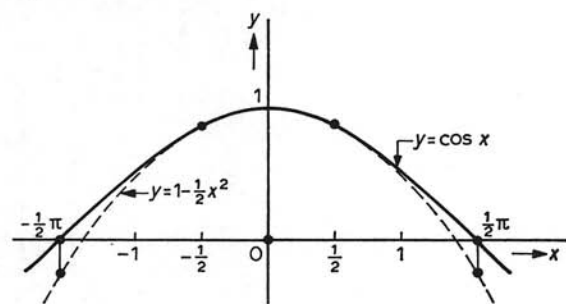
Is f voldoende vaak differentieerbaar, dan is het procédé van de partiële integratie voort te zetten.

Uit (103.3) volgt door partiële integratie:

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) + hf'(0) + \int_0^h (h-t)f''(t) dt \\ &= f(0) + hf'(0) - \left[\frac{(h-t)^2}{2!} f''(t) \right]_0^h + \int_0^h \frac{(h-t)^2}{2!} f'''(t) dt \\ &= f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \int_0^h \frac{(h-t)^2}{2!} f'''(t) dt \end{aligned}$$

Op deze wijze doorgaande verkrijgen we de volgende formule:

Fig. 97



Formule van Maclaurin*

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(h) \quad (103.4)$$

waarin de algemene restterm $R_n(h)$ wordt voorgesteld door:

$$R_n(h) = \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (103.5)$$

104 De resttermen van Cauchy en Lagrange

De praktische waarde van de gevonden veelterm (103.4) voor de benadering van een functie wordt bepaald door de grootte van de restterm. Een voor verschillende doeleinden bruikbare vorm van de restterm vindt men door toepassing van de middelwaardestelling.

Is F zodanig dat $F'(t) = \frac{1}{n!} (h-t)^n f^{(n+1)}(t)$, dan is:

$$R_n(h) = F(h) - F(0) = hF'(\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

Dus is:

$$R_n(h) = \frac{1}{n!} \cdot h(h-\theta h)^n f^{(n+1)}(\theta h)$$

waaruit volgt:

$$R_n(h) = (1-\theta)^n \cdot \frac{h^{n+1}}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\theta h) \quad (104.1)$$

De uitdrukking (104.1) noemt men de *restterm van Cauchy*.

Een andere uitdrukking voor $R_n(h)$ is als volgt te vinden.

We stellen $h > 0$ en $f^{(n+1)}$ continu in $[0, h]$. Op dit interval neemt $f^{(n+1)}$ een minimum m en een maximum M aan. Omdat $(h-t)^n \geq 0$ is, op $[0, h]$ geldt dus:

$$\frac{1}{n!} \int_0^h m(h-t)^n dt \leq R_n(h) \leq \frac{1}{n!} \int_0^h M(h-t)^n dt$$

of:

$$\frac{mh^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(h) \leq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$$

Volgens de tussenwaardestelling (par. 14) neemt $f^{(n+1)}$ iedere waarde tussen m en M minstens eenmaal aan.

* C. Maclaurin, 1698-1746.

Er is dus op $[0, h]$ een getal $\xi = \theta h$, waarvoor:

$$R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta h) \quad (0 < \theta < 1) \quad (104.2)$$

De uitdrukking (104.2) noemt men de *restterm van Lagrange*. Deze is gemakkelijk te onthouden; hij lijkt immers op de eerstvolgende term, met dit verschil, dat i.p.v. $f^{(n+1)}(0)$ nu voorkomt $f^{(n+1)}(\theta h)$.

Opmerking 1:

Hoewel we bij de afleiding $h > 0$ hebben ondersteld is (104.2) ook geldig voor $h < 0$.

Opmerking 2:

Welke restterm men zal gebruiken hangt af van de functie die ontwikkeld moet worden. Meestal kan men volstaan met de restterm van Lagrange die eenvoudig is te onthouden. De uitdrukking van Cauchy zullen we slechts in een enkel geval toepassen (nl. bij de binomiale ontwikkeling).

105 De ontwikkeling volgens Taylor-Maclaurin

Voor een ontwikkeling volgens Maclaurin is nodig dat f in een omgeving van 0 voldoende vaak differentieerbaar is. Niet alle functies laten een ontwikkeling volgens Maclaurin toe. Zo is bijv. de functie $x \mapsto \ln x$ niet gedefinieerd voor $x = 0$. Door een eenvoudige transformatie is de formule van Maclaurin zo te generaliseren dat een ontwikkeling mogelijk is voor een functie die in een omgeving van a voldoende vaak differentieerbaar is. We stellen:

$$f(a+h) = \varphi(h)$$

dan is:

$$\varphi(0) = f(a), \quad \varphi'(0) = f'(a), \quad \varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(a), \quad \varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(a+t)$$

Voor $\varphi(h)$ geldt de ontwikkeling:

$$\begin{aligned} \varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \\ + \frac{h^n \varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n \varphi^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(a+t) dt \quad (105.1)$$

De restintegraal in (105.1) is volgens Lagrange te schrijven als:

$$R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad (105.2)$$

De uitdrukking (105.1) heet de *formule van Taylor*.

Voor $a = 0$ gaat deze over in de formule van Maclaurin. Vandaar dat (105.1) ook wel de formule van Taylor-Maclaurin genoemd wordt. Taylor is de eerste geweest die de ontwikkeling (105.1) heeft opgesteld.

Neemt men in (105.1) $n = 0$, dan volgt met de restterm (105.2):

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

Stelt men hierin $a+h = b$, dus $h = b-a$, en $a+\theta h = \xi$, dan volgt:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\xi) \quad (\xi \in \langle a, b \rangle) \quad (105.3)$$

De uitdrukking (105.3) is de in par. 59 afgeleide middelwaardstelling.

106 Toepassing van de formule van Taylor op bekende functies

We passen in deze paragraaf de formule van Taylor voor $a = 0$ toe ter verkrijging van ontwikkelingen van enige bekende functies.

$$1 \quad f(x) = e^x$$

Hiervoor geldt $f^{(n)}(x) = e^x$, dus $f^{(n)}(0) = 1$. Dus is:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad (106.1)$$

waarin volgens Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

Voor $x = 1$ volgt uit (106.1):

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (106.2)$$

waarbij dus $R_n(1) < \frac{e}{(n+1)!}$.

Voor $x = -1$ volgt:

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-\theta}}{(n+1)!} \quad (106.3)$$

waarin:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} e^{-\theta}}{(n+1)!} \right| < \frac{1}{(n+1)!}$$

De schatting van de fout bij het afbreken na de term met rangnummer n is dus kleiner dan bij (106.2). Met behulp van bovenstaande ontwikkelingen is e in een willekeurig aantal decimalen te berekenen. Men heeft gevonden:

$$e = 2,718281828459 \dots$$

Met behulp van (106.3) bewijst men eenvoudig dat e een onmeetbaar getal is. Was $n!$ e meetbaar, dan was ook e^{-1} meetbaar en was $e^{-1} = p/q$ (p en q natuurlijke getallen).

Dan was volgens (106.3):

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^q}{q!} + R_q(-1) \quad \left(0 < |R_q(-1)| < \frac{1}{(q+1)!} \right) \quad (106.4)$$

Vermenigvuldigt men in (106.4) beide leden met $q!$, en stelt men even $R_q(-1) = R_q$, dan volgt:

$$(q-1)!p = N + q!R_q \quad \left(0 < |q!R_q| < \frac{1}{q+1} \right)$$

waarin N een geheel getal en $q!R_q$ een breuk is. Dit voert tot een tegenspraak, dus e is onmeetbaar.

$$2 \quad f(x) = \sin x$$

We hebben in par. 66 voor $f^{(n)}(x)$ reeds een algemene uitdrukking gevonden.

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin \frac{1}{2}n\pi \Rightarrow f^{(2n)}(0) = \sin n\pi = 0$$

$$f^{(2n+1)}(0) = \sin(\frac{1}{2}\pi + n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$$

De ontwikkeling wordt dus met de restterm van Lagrange:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x) \quad (106.4)$$

$$R_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin\{\theta x + (n + \frac{3}{2})\pi\}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos \theta x$$

Hierbij moet men bedenken dat de termen met even rangnummer de waarde nul heb-

ben. Op $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ volgt dus t_{2n+2} die de waarde nul heeft, en dan volgt de hierbij behorende restterm $R_{2n+2}(x)$. Daar $\sin \alpha$ in absolute waarde ten hoogste 1 is, geldt:

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

3 $f(x) = \cos x$

In par. 66 hebben we gevonden:

$$f^{(n)}(x) = \sin \left\{ x + \frac{1}{2}(n+1)\pi \right\} \Rightarrow f^{(2n)}(0) = \sin(n + \frac{1}{2})\pi = \cos n\pi = (-1)^n$$

$f^{(2n+1)}(0) = \sin(n+1)\pi = 0$. Bijgevolg wordt de ontwikkeling:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x) \quad (106.5)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin \left\{ \theta x + (n + \frac{3}{2})\pi \right\}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

Bij deze reeks hebben de termen met oneven rangnummer de waarde nul, zodat we hier te maken krijgen met R_{2n+1} .

Hierbij is blijkbaar:

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

4 $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α reëel, $x > -1$)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$$

De coëfficiënt van x^n in de veeltermontwikkeling is:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

De ontwikkeling volgens Taylor wordt dus:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x) \quad (106.6)$$

Volgens Cauchy kan men voor $R_n(x)$ schrijven:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= (1 - \theta)^n \frac{x^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) \\ &= (1 - \theta)^n \frac{x^{n+1}}{n!} \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)(1 + \theta x)^{\alpha - n - 1} \\ &= \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n \cdot (1 + \theta x)^{\alpha - 1} \cdot (n + 1) \binom{\alpha}{n + 1} x^{n+1} \end{aligned} \quad (106.7)$$

Een voorbeeld, waaruit blijkt dat de restterm een niet te verwaarlozen grootheid is, geeft:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

Deze functie blijkt onbepaald vaak differentieerbaar te zijn, waarbij $f^{(n)}(0)$ steeds nul is. Hierbij krijgt men dus een ontwikkeling:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 + 0 + \dots + 0 + R_n(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

waarbij $R_n(x)$ gelijk aan $f(x)$.

107 Ontwikkeling van een functie in een veelterm met rest door integratie

Enige ontwikkelingen van een functie in een veelterm met rest kunnen op een eenvoudige wijze verkregen worden door integratie.

$$5 \quad f(t) = \ln(1 + t) \quad (t > -1)$$

Als f op deze wijze is gedefinieerd, dan geldt:

$$f'(t) = \frac{1}{1 + t}$$

Nu is:

$$\frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1 + t} \quad (t \neq -1)$$

We vinden hieruit door integratie voor $x > -1$:

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= \int_0^x \frac{dt}{1 + t} \\ &= \int_0^x \{1 - t + t^2 \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1}\} dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1 + t} dt \\ \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) \end{aligned} \quad (107.1)$$

waarin:

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \quad (x > -1)$$

Om een bruikbare uitdrukking voor de restterm te verkrijgen, onderscheiden we a: $x \geq 0$ en b: $-1 < x < 0$.

Geval a

Op het interval $[0, x]$ is de integrand niet-negatief, de noemer heeft de kleinste waarde voor $t = 0$, dus de integrand is maximaal t^n . Hieruit volgt:

$$|R_n(x)| \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x \geq 0) \quad (107.2)$$

Geval b

Bij vaste n wisselt de integrand op $\langle x, 0 \rangle$ niet van teken. Nu is $R_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$, of na substitutie $t = -u$:

$$R_n(x) = - \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} du = - \int_0^{|x|} \frac{u^n}{1-u} du$$

Daar $1-u \geq 1-|x| > 0$ (= alleen als $u = |x|$), hebben we:

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} \frac{u^n}{1-|x|} du = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)} \quad (-1 < x < 0) \quad (107.3)$$

Vervangt men in (107.1) x door $-x$, en vermenigvuldigt men beide leden met (-1) , dan volgt hieruit de ontwikkeling:

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + R_n(x) \quad (107.4)$$

waarin:

$$|R_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \quad (0 < x < 1)$$

en:

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \quad (x \leq 0)$$

Een veeltermontwikkeling die bruikbaar is voor de berekening van logaritmen, verkrijgt men door integratie van beide leden van de gelijkheid:

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots + t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \quad (|t| \neq 1)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} dt \quad (|x| < 1)$$

In de restintegraal heeft de noemer de kleinste waarde voor $t = x$, de integrand is dus hoogstens $t^{2n+2}/(1-x^2)$, zodat:

$$|R_{2n+1}(x)| < \frac{1}{1-x^2} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$$

De integraal in het linkerlid is $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, zodat:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x) \quad (|x| < 1) \quad (107.5)$$

waarbij:

$$|R_{2n+2}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$$

(Bedenk dat $t_{2n} = 0$)

Een andere vorm van (107.5) verkrijgt men door te stellen:

$$x = \frac{1}{2p+1}$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{p} &= \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2p+1)^3} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(2p+1)^{2n+1}} + R_{2n+1}(p) \end{aligned} \quad (107.6)$$

waarbij voor $p > 0$:

$$|R_{2n+2}(p)| < \frac{1/(2p+1)^{2n+3}}{\{1-1/(2p+1)^2\}(2n+3)} = \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{4p(p+1)(2p+1)^{2n+1}}$$

Uit $|x| < 1$ volgt dat p alle waarden < -1 kan aannemen en alle waarden > 0 . Voor berekeningen hebben we slechts te maken met $p > 0$.

Door voor p resp. 15, 24 en 80 te nemen kunnen we snel de logaritmen van de getallen 2, 3 en 5 berekenen met grote nauwkeurigheid.

$$p = 15, \quad \ln \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$$

$$p = 24, \quad \ln \frac{2}{\frac{5}{4}} = -3 \ln 2 - \ln 3 + 2 \ln 5$$

$$p = 80, \quad \ln \frac{8}{\frac{1}{8}} = -4 \ln 2 + 4 \ln 3 - \ln 5$$

De getallen $\ln \frac{1}{\frac{1}{2}}$, $\ln \frac{2}{\frac{5}{4}}$ en $\ln \frac{8}{\frac{1}{8}}$ zijn met (107.6) reeds tot een nauwkeurigheid van

10^{-12} te benaderen door gebruik van slechts 3 termen. Uit de gevonden betrekkingen berekent men eenvoudig $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$. Daar verder voor $p = 49$ volgt:

$$\ln \frac{5}{4} = 2 \ln 5 + \ln 2 - 2 \ln 7$$

kan men uit de laatste betrekking $\ln 7$ berekenen en heeft men de logaritmen van 1 tot 10 met grote nauwkeurigheid.

6 $f(t) = \arctan t$

Als f op deze wijze is gedefinieerd, dan geldt:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Door integratie volgt:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x) \quad (107.7)$$

waarin:

$$R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

De ontwikkeling (107.7) geldt voor iedere x . De noemer van de integrand in de restintegraal heeft zijn kleinste waarde voor $t = 0$, dus is:

$$|R_{2n+2}(x)| < \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

Neemt men in (107.7) $x = 1$, dan volgt:

$$\arctan 1 = \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R_{2n+2}(1) \quad \left(|R_{2n+2}(1)| < \frac{1}{2n+3} \right) \quad (107.8)$$

Voor $R_{2n+1}(1)$ geldt tevens:

$$|R_{2n+2}(1)| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt > \frac{1}{2} \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+3}$$

en dus nadert $|R_{2n+2}(1)|$ van dezelfde orde tot nul als $\frac{1}{2n+3}$ wanneer n tot oneindig nadert.

De uitdrukking (107.8) is niet geschikt om π te berekenen, daar de fout bij weglating van $R_{2n+1}(x)$ „groot” is, tenzij men een zeer groot aantal termen neemt. Om π te berekenen kan men gebruik maken van de cyclometrische formule:

$$\frac{1}{4}\pi = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

of van de formule van Machin (1680–1751):

$$\frac{1}{4}\pi = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Deze formule en soortgelijke, dienden lange tijd voor de benadering van π . In 1992 heeft de Japanner Yasumasa Kanada op een Hitac computer het getal π benaderd tot in 1000.000.000 decimalen, o.a. met behulp van Fourieranalyse.

$$\pi = 3,141592653589 \dots$$

108 De reeksontwikkeling van Taylor-Maclaurin

In de vorige paragrafen hebben we een functie f die aan de voldoende voorwaarden voldoet, een ontwikkeling in een veelterm met rest gegeven van de gedaante:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

Het is de vraag of deze ontwikkeling onbepaald kan worden voortgezet, d.w.z. of $f(x)$ in een oneindige machtreeks kan worden ontwikkeld. Schrijven we:

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!} = R_n(x)$$

dan volgt:

$$f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$$

dus is:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!}$$

indien deze limiet bestaat en $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Opdat $f(x)$ in een machtreeks kan worden ontwikkeld, is het nodig en voldoende dat aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:

1 De reeks:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!}$$

convergeert;

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

Om het onderzoek van de restterm te vereenvoudigen is het aan te bevelen eerst het convergentie-interval van de machtreeks te bepalen.

1 $f(x) = e^x$

We hebben gevonden in par. 106:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!}$$

In par. 101 is bewezen dat $\sum \frac{x^n}{n!}$ convergeert voor iedere x . Dit sluit in dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ voor iedere x . Bijgevolg nadert $R_n(x)$ tot nul voor iedere x , daar:

$$|R_n(x)| = e^{\theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

en:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

als $n \rightarrow \infty$, d.w.z. voor iedere x geldt:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (108.1)$$

2 $f(x) = \sin x$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x)$$

$$|R_{2n+2}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ is convergent voor iedere x , dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$, waaruit volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{2n+2}(x)| = 0$ voor iedere x . Er geldt dus:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (108.2)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad \text{voor iedere } x$$

3 $f(x) = \cos x$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$|R_{2n+1}(x)| < \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

Op analoge wijze als bij 2 volgt:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (108.3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \text{voor iedere } x$$

4 $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_n(x)$$

Hierin is:

$$|R_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{voor } x \geq 0$$

en:

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)} \quad \text{voor } -1 < x < 0$$

De reeks $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ convergeert voor $-1 < x \leq 1$. Voor $|x| < 1$ is dus $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$. Voor $x = 1$, is $|R_n(x)| < \frac{1}{n+1}$, dus is ook in dit geval $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$. Evenals bij (107.8) kan men nu bewijzen dat $|R_n(1)|$ van dezelfde orde tot nul nadert als $\frac{1}{n+1}$ wanneer n tot oneindig nadert. Bijgevolg is:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (108.4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots, \quad (-1 < x \leq 1)$$

Voor $x = 1$ volgt hieruit:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \quad (108.5)$$

5 $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n+2}(x)$$

$$|R_{2n+2}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$$

De reeks $\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ convergeert voor $|x| < 1$, zoals eenvoudig is te bewijzen. Voor deze waarden van x nadert blijkbaar $R_{2n+2}(x)$ tot nul als $n \rightarrow \infty$, dus is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad (|x| < 1) \end{aligned} \quad (108.6)$$

6 $f(x) = \arctan x$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n+2}(x)$$

$$|R_{2n+2}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

De reeks $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ blijkt convergent te zijn voor $|x| \leq 1$. Voor deze waarden van x nadert de restterm tot nul. Bijgevolg is:

$$\begin{aligned} \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad (|x| \leq 1) \end{aligned} \quad (108.7)$$

In het bijzonder geldt voor $x = 1$:

$$\arctan 1 = \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots \quad (108.8)$$

7 $f(x) = (1+x)^\alpha$

Volgens par. 106 voorbeeld 4 is:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)$$

waarin, als we de restterm van Cauchy gebruiken, geldt:

$$R_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}$$

Van de reeks $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$ bepalen we eerst de convergentiestraal.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)} x$$

$$= \frac{\alpha-n}{n+1} \cdot x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| \cdot |x| = |x|$$

De reeks is dus zeker convergent voor $|x| < 1$. Op dezelfde wijze toont men aan dat de reeks $\sum_n \binom{\alpha}{n} x^n$ convergent is voor $|x| < 1$. De algemene term nadert dus tot nul als $n \rightarrow \infty$. De factor $(n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}$ van de restterm nadert dus eveneens tot nul als $n \rightarrow \infty$. Omdat $|x| < 1$ is, is de factor $(1+\theta x)^{\alpha-1}$ begrensd. Voor de eerste factor van de restterm geldt dat voor $x \geq 0$, $(1-\theta)/(1+\theta x) < 1$ is. Voor $-1 < x < 0$ is $\theta x > -\theta$ en dus $1+\theta x > 1-\theta$; dus is ook dan $(1-\theta)/(1+\theta x) < 1$. De eerste factor is dus in absolute waarde kleiner dan 1. Hieruit volgt dat voor $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ en dus geldt:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots \quad (|x| < 1) \end{aligned} \quad (108.9)$$

Deze reeks wordt de *binomiaalreeks* genoemd.

Het onderzoek voor $|x| = 1$ laten we achterwege. Convergentie of divergentie hangt af van de grootte van α . We vermelden slechts dat (108.9) ook geldig is voor $x = 1$, indien $\alpha > -1$ is, en geldig voor $x = -1$, indien $\alpha > 0$ is.

Uit:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

volgt:

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

Door optellen, resp. aftrekken, en het beschouwen van de bijbehorende resttermen volgen uit deze reeksen ontwikkelingen voor $\cosh x$ en $\sinh x$.

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \text{voor iedere } x \quad (108.10)$$

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad \text{voor iedere } x \quad (108.11) \end{aligned}$$

Overzicht

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| \leq 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \quad \begin{cases} |x| < 1 & \text{iedere } \alpha \\ x = 1 & \alpha > -1 \\ x = -1 & \alpha > 0 \end{cases}$$

109 Toepassing van reeksontwikkelingen bij het berekenen van limieten

Bij het berekenen van limieten kan men vaak van reeksontwikkelingen gebruik maken. We passen daarbij toe dat de restterm $R_n(x)$ van een in de omgeving van nul convergente machtreeks van de orde $O(x^{n+1})$ is (zie par. 102).

Voorbeeld 1

Gevraagd: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - 1 - x}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + O(x) \end{aligned}$$

Daar $\lim_{x \rightarrow 0} O(x) = 0$ is:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Voorbeeld 2

Gevraagd:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$$

Oplossing:

$$\frac{\arctan x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) - x}{x^3} = -\frac{1}{3} + O(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = -\frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} O(x^2) = -\frac{1}{3}$$

Voorbeeld 3

Gevraagd:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

Oplossing:

Voor $\tan x$ bestaat geen eenvoudige reeksontwikkeling. Voor $x \neq 0$ is echter:

$$\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \cos x}$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) - x \left\{ 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4) \right\}}{x^3 \cos x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{2!} + O(x^5) - O(x^5)}{x^3 \cos x} \\
&= \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} + O(x^2)}{\cos x}
\end{aligned}$$

Omdat $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, is de gevraagde limiet:

$$-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{3}$$

Voorbeeld 4

Gevraagd:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$$

Oplissing:

Stel $f(n) = (1 + 1/n)^{n^2}/e^n$, dan is:

$$\begin{aligned}
\ln f(n) &= n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \\
&= n^2 \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right\} - n \\
&= -\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Dus is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln f(n) = -\frac{1}{2}$$

en:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = e^{-\frac{1}{2}}$$

Voorbeeld 5

Gevraagd:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln f(x)$$

met:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$f(0) = 1$$

Oplossing:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Stellen we $\frac{\sin x}{x} = 1 + h$, dan is:

$$\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \frac{h}{x^2} \cdot \frac{\ln(1+h)}{h}$$

waarin $h = \frac{\sin x}{x} - 1$, en $h \rightarrow 0$ als $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Dus is:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{x^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = -\frac{1}{6}$$

Een andere oplossingswijze is de volgende.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)}{x} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sin x}{x} &= \ln \left\{ 1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^4) \right\} \\ &= - \left\{ \frac{x^2}{3!} - O(x^4) \right\} + O \left\{ \frac{x^2}{3!} - O(x^4) \right\}^2 \end{aligned}$$

Nu is $\frac{x^2}{3!} - O(x^4)$ van de orde $O(x^2)$ en is dus $O\left\{\frac{x^2}{3!} - O(x^4)\right\}^2$ van de orde $O(x^4)$. Bijgevolg is:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x^2} \left\{ -\frac{x^2}{3!} + O(x^4) + O(x^4) \right\} \\ &= -\frac{1}{3!} + O(x^2)\end{aligned}$$

en is de limiet gelijk aan $-\frac{1}{6}$.

110 Het differentiëren en integreren van machtreeksen

De machtreeks $\sum nc_n x^{n-1}$, die ontstaat door termsgewijze differentiëren van de reeks $\sum c_n x^n$ noemen we de *afgeleide* machtreeks. Hiervoor geldt de volgende stelling.

Stelling

De machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en de afgeleide machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ hebben dezelfde convergentiestraal.

Bewijs:

Stel de gegeven reeks heeft de convergentiestraal $\rho > 0$, en stel verder $0 < |x_0| < \rho$ en $|x| < |x_0|$.

Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0$ is ook $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^{n-1} = 0$, dus $|c_n x_0^{n-1}| < M$ (M vast). Stellen we $|x/x_0| = r$, dan is $0 \leq r < 1$ en is:

$$|nc_n x^{n-1}| = n \left| \frac{x}{x_0} \right|^{n-1} \cdot |c_n x_0^{n-1}| < Mnr^{n-1}$$

De reeks $\sum nr^{n-1}$ ($0 \leq r < 1$) is convergent (zie par. 101 voorbeeld 4), dus is $\sum nc_n x^{n-1}$ convergent.

Bij iedere x van het interval $\langle -\rho, \rho \rangle$ is steeds een x_0 te kiezen zo dat $|x| < |x_0| < \rho$ en geldt bovenstaande redenering. Voor deze x convergeert $\sum nc_n x^{n-1}$, dus is de afgeleide reeks zeker convergent op het open interval $\langle -\rho, \rho \rangle$. Bij iedere x buiten het interval $[-\rho, \rho]$ is steeds een x_0 te kiezen zo dat $\rho < |x_0| < |x|$. De reeks $\sum c_n x_0^n$ is divergent. Was $\sum nc_n x^{n-1}$ convergent, dan was $\sum nc_n x_0^{n-1}$ absoluut convergent (par. 101). Voor $n \geq 1$ is:

$$|c_n x_0^n| = \left| \frac{x_0}{n} \right| \cdot |nc_n x_0^{n-1}| < x_0 |nc_n x_0^{n-1}|$$

Hieruit volgt dat dan ook $\sum c_n x_0^n$ convergent zou zijn, hetgeen een tegenspraak oplevert. De reeks $\sum n c_n x^{n-1}$ is dus divergent buiten $[-\rho, \rho]$. Hieruit volgt dat de afgeleide reeks dezelfde convergentiestraal heeft als de gegeven reeks $\sum c_n x^n$.

De betrekking die bestaat tussen de functie gedefinieerd door de som van de convergente machtreeks $\sum c_n x^n$ en de functie gedefinieerd door de som van de afgeleide reeks $\sum n c_n x^{n-1}$, luidt als volgt.

Stelling

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ voor $|x| < \rho$, dan is $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ voor $|x| < \rho$.

Deze stelling betekent dat de afgeleide van een door een machtreeks voorgestelde functie voor $|x| < \rho$ gevonden kan worden door *termsgewijze differentiëren*. Omdat de afgeleide reeks weer een machtreeks is, is de functie door de som voorgesteld eveneens differentieerbaar. Hieruit volgt dat de door een machtreeks gedefinieerde functie op het open interval $\langle -\rho, \rho \rangle$ onbepaald vaak differentieerbaar is. De stelling geldt niet op de rand. Ook al is de gegeven reeks bijv. convergent voor $x = \rho$, dan behoeft de afgeleide reeks nog niet convergent te zijn voor $x = \rho$. Zo is bijv. f met

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (110.1)$$

voor $-1 < x \leq 1$ gelijk aan de functie $x \mapsto \ln(1+x)$ en is in het bijzonder $f(1) = \ln 2$.

Verder is:

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (110.2)$$

voor $-1 < x < 1$ gelijk aan de afgeleide van $\ln(1+x)$, d.i. $(1+x)^{-1}$. Voor $x = 1$ is de reeks (110.2) divergent, dus niet gelijk aan $f'(1)$.

In par. 17 hebben we bewezen dat de afgeleide van een *eindige* som van functies gelijk is aan de som van de afgeleiden van die functies. Als men „oneindig veel” functies heeft geldt zo’n bewering niet meer. Bovendien heeft het woord „som” dan ook een geheel andere betekenis, nl. de limiet van de rij der partiële sommen. De bewering in de laatstgenoemde stelling is dan ook verre van vanzelfsprekend.

Het bewijs van de stelling omtrent het differentiëren van een machtreeks is niet eenvoudig. De belangstellende lezer wordt verwezen naar par. 111 e.v. waar deze kwestie in algemener verband wordt behandeld. Machtreksen vormen nl. een bijzonder geval van de zogenaamde functiereksen.

Uit de stelling dat een machtreeks binnen zijn convergentie-interval willekeurig vaak differentieerbaar is, leidt men op eenvoudige wijze af de volgende stelling.

Stelling

Als een functie f gedefinieerd is door de reeks

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

dan zijn de coëfficiënten c_n gegeven door:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Dit betekent dus, dat de machtreeks de Taylorreeks van de functie f is.

Bewijs:

De uitdrukking voor c_n vindt men door x gelijk aan nul te stellen in de opvolgende reeksen voor $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc. Door volledige inductie vindt men dat de eerste term in de reeks voor $f^{(n)}(x)$ gelijk is aan $n! \cdot c_n$, waaruit het gestelde volgt.

Opmerking:

Hiermede is nogmaals de eenduidigheid van de machtreeksontwikkeling bewezen.

De reeks verkregen door *termgewijze integreren* van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ is weer een machtreeks, die volgens de eerste stelling van deze paragraaf dezelfde convergentiestraal ρ heeft als de gegeven reeks. De som $F(x)$ van deze reeks heeft de eigenschap dat voor $|x| < \rho$, $F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)$, dus is F een primitieve van f . Stelt men:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} \quad |x| < \rho$$

dan is F de primitieve, waarvoor $F(0) = 0$. Men kan daarom $F(x)$ ook aldus aangeven:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} \quad (|x| < \rho) \quad (110.3)$$

Met behulp van differentiëren en integreren van machtreeksen kan men van sommige reeksen eenvoudig de som bepalen.

Voorbeeld 1

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

De reeks is convergent voor $|x| < 1$.

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Controle. De functie $f: x \mapsto (1-x)^{-2}$ is te ontwikkelen in een binomiaalreeks en geeft dan juist de gegeven reeks.

Voorbeeld 2

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (|x| < 1)$$

Schrijft men:

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = xg(x)$$

dan is $g(x)$ door integratie te vinden (voorbeeld 1), dus:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Voorbeeld 3

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \quad (|x| < 1)$$

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = xg(x)$$

waarin:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

Stel

$$h(x) = \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Volgens voorbeeld 2 is $h(x) = x(1-x)^{-2}$, dus is:

$$g(x) = h'(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

en:

$$f(x) = xg(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Voorbeeld 4

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \quad |x| \leq 1$$

Voor $|x| < 1$ is:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} \quad (110.4)$$

Is bovendien $x \neq 0$, dan is:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

De tussen haakjes geplaatste reeks is blijkbaar de ontwikkeling van $-\ln(1-x)$ (zie par. 108), waaraan de eerste term ontbreekt. Dus is:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \{-\ln(1-x) - x\} \quad (0 < |x| < 1) \quad (110.5)$$

Voor $x = 0$ is het rechterlid van (110.5) niet gedefinieerd, terwijl blijkens (110.4) $f'(0)$ wel bestaat en gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Bovendien is f' continu in $x = 0$, daar f' differentieerbaar is in $x = 0$. Dit betekent dat $\int_0^x f'(t) dt$ bestaat als $|x| < 1$, en:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^x \frac{-t - \ln(1-t)}{t^2} dt \\ &= 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} \quad (0 < |x| < 1) \end{aligned}$$

$$f(0) = 0$$

De gegeven reeks is ook convergent voor $x = \pm 1$; voor deze waarden is de som echter niet te bepalen met de gevolgde methode. Er geldt evenwel de volgende van Abel afkomstige stelling, waarvan we het bewijs achterwege laten.

Stelling

Is f gegeven door een machtreeksontwikkeling, en convergeert de reeks ook nog in een randpunt, dan is f continu in dit randpunt.

Passen we deze stelling toe op voorbeeld 4, dan vinden we $f(1) = 1$ en $f(-1) = 1 - 2 \ln 2$.

Opmerking:

Voorbeeld 4 is eenvoudiger te behandelen door de gegeven reeks te splitsen.

$$\frac{x^n}{n(n+1)} = x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}$$

Voor $|x| < 1$ is de gegeven reeks aldus te splitsen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (110.6)$$

Deze splitsing is geoorloofd voor $-1 \leq x < 1$, omdat voor deze waarden van x , de beide reeksen in het rechterlid convergent zijn (de lezer ga dit na door partiële sommen te beschouwen), ze is niet geoorloofd voor $x = 1$, omdat dan deze reeksen divergent zijn. De reeksen in het rechterlid van (110.6) verschillen slechts weinig van de ontwikkeling van $-\ln(1-x)$. De verdere uitwerking wordt aan de lezer overgelaten.

Voorbeeld 5

Ontwikkel de functie f met $f(x) = \arcsin x$ in een in de omgeving van $x = 0$ convergente machtreeks.

Oplossing:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

We kunnen voor $-1 < x < 1$ deze functie ontwikkelen in een binomiaalreeks (zie de ontwikkeling (108.9), neem $\alpha = -\frac{1}{2}$ en vervang x door $-x^2$).

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x^2)^2 + \\ &\quad + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(-x^2)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2!2^2}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!2^3}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!2^4}x^8 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 + \dots \end{aligned}$$

Door termgewijze integratie volgt hieruit:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \dots$$

welke ontwikkeling ook nog geldig is voor $|x| = 1$, hetgeen we zonder bewijs vermelden.

111 Functierijen. Gelijkmatische of uniforme convergentie

Laat $\{f_n\}$ een rij functies zijn met een gemeenschappelijk domein W (in \mathbb{R} , of algemener in \mathbb{C}), ook wel een *functierij* genoemd, dan zullen we zeggen dat de *functierij* $\{f_n\}$ convergeert in het punt $x \in W$, als de *getallenrij* $\{f_n(x)\}$ convergeert.

Als de rij functies convergeert voor elke $x \in V \subset W$, dan bestaat dus voor elke $x \in V$ het getal $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ en hiermee kan men op V een functie f definiëren door

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Men zegt dan dat de rij functies op V convergeert naar de functie f , en men noemt dan f de *limietfunctie*, notatie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

Dit betekent dus dat er bij iedere $x \in V$ en bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat, zodanig dat:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ als } n > N$$

N.B. Deze N hangt in het algemeen af, zowel van x als van ε .

Voorbeeld 1

$\{f_n\}$ is gedefinieerd door $f_n(x) = x^n$ op $[0, 1]$.

De rij convergeert voor elke x uit $[0, 1]$.

Definiëren we: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$), dan ziet men onmiddellijk:

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

De grafieken van f_n voor enkele waarden van n zijn weergegeven in fig. 98.

Stel $0 < \varepsilon < 1$ en $0 < x < 1$, dan gaat de ongelijkheid

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{111.1}$$

over in

$$x^n < \varepsilon$$

Hieruit leiden we af:

$$n \ln x < \ln \varepsilon$$

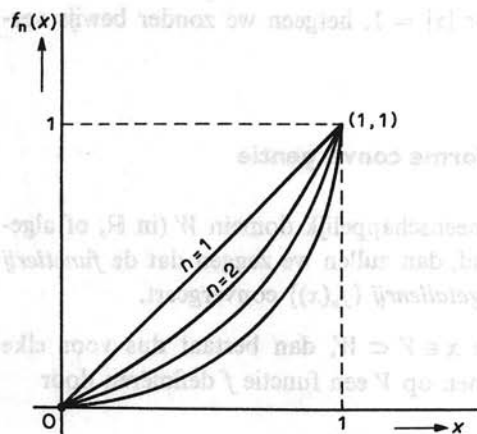


Fig. 98

dus, omdat $\ln x < 0$:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \quad (111.2)$$

Men ziet hieruit dat de bedoelde N niet alleen afhankelijk is van ε , maar ook van x . Deze afhankelijkheid kunnen we accentueren door te schrijven: $N(\varepsilon, x)$ in plaats van N .

Als men ε vast kiest, en x laat naderen tot 1, dan nadert $\ln x$ tot 0, en dus nadert N tot ∞ . Er is dus geen waarde van n zodanig, dat (111.2) geldt voor *alle* x in $\langle 0, 1 \rangle$. Bovenstaand voorbeeld illustreert datgene wat we later *niet-uniforme convergentie* noemen.

We zullen nu definiëren wat we verstaan onder *uniforme of gelijkmatige convergentie van functierijen*.

Definitie

Indien op een interval $[a, b]$ de functierij $\{f_n\}$ en de limietfunctie f gedefinieerd zijn, en voldoen aan de volgende voorwaarde:

Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor iedere $x \in [a, b]$ geldt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

indien $n > N$,

dan zeggen we dat $\{f_n\}$ *uniform (gelijkmatig) convergeert naar f op $[a, b]$* .

Het essentiële van deze definitie is dat N *onafhankelijk is van x* ; in het algemeen zal N wel afhankelijk zijn van ε . Daarom geven we deze N aan met $N(\varepsilon)$.

Voorbeeld 2

De rij $\{f_n\}$ is gedefinieerd door $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ op $[0, 1]$. Deze rij is convergent voor $0 \leq x \leq 1$. Definiëren we $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, dan geldt $f(x) \equiv 0$, en (111.1) gaat over in:

$$\frac{x^n}{n} < \varepsilon \quad (111.3)$$

Nu is $\frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Kiezen we dus voor N het kleinste gehele getal groter dan $\frac{1}{\varepsilon}$, dan is aan (111.3) voldaan indien $n > N$. Deze keuze van N is onafhankelijk van x , en dus is de convergentie van $\{f_n\}$ naar f uniform op $[0, 1]$.

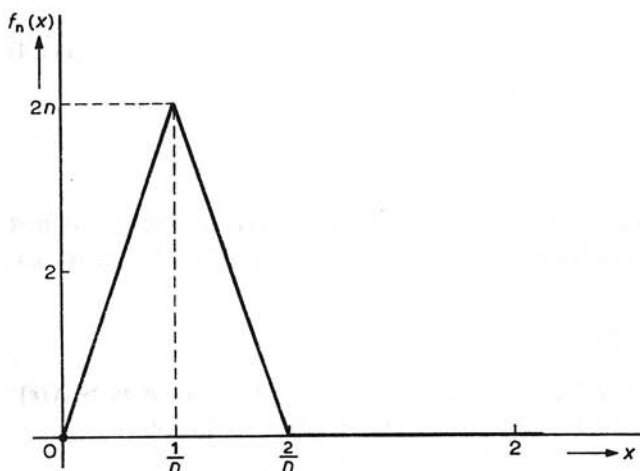
Voorbeeld 3

De rij $\{f_n\}$ is gedefinieerd op $[0, 2]$ door:

$$\begin{cases} f_n(x) = 2n^2x & \text{op } \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ f_n(x) = -2n^2x + 4n & \text{op } \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ f_n(x) = 0 & \text{op } \left[\frac{2}{n}, 2\right]. \end{cases}$$

De grafiek van f_n is afgebeeld in fig. 99.

Fig. 99



Definiëren we: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ voor $0 \leq x \leq 2$, dan geldt $f(x) \equiv 0$ op $[0, 2]$. Im-

mers bij vaste $x_0 \in \langle 0, 2 \rangle$ kunnen we N zo groot kiezen dat $\frac{2}{N} < x_0$. Dan geldt ook

voor alle $n > N$ dat $\frac{2}{n} < x_0$, en dus voor de bijbehorende f_n : $f_n(x_0) = 0$ (zie fig. 99).

Voor elke $x \in \langle 0, 2 \rangle$ geldt dus: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ op $\langle 0, 2 \rangle$. Aangezien ook $f_n(0) = 0$, hebben we dus gevonden: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ op $[0, 2]$.

Deze convergentie is echter niet uniform. Immers, op grond van (111.1) zou er voor uniforme convergentie bij gegeven $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gevonden moeten worden, zodat:

$$f_n(x) < \varepsilon$$

indien $n > N(\varepsilon)$, en wel voor alle $x \in [0, 2]$. Nu is voor $x = \frac{1}{n}$ de functiewaarde

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 2n$, waarvoor zeker niet geldt: $2n < \varepsilon$ als n groot genoeg is. N kan dus niet onafhankelijk van x worden gekozen, en de convergentie van $\{f_n\}$ tot f is dus niet uniform op $[0, 2]$.

Soms is het gemakkelijk de uniforme convergentie uit te drukken zonder de limietfunctie f daarin te betrekken (een intrinsiek kenmerk dus).

Stelling

Laat de functierij $\{f_n\}$ gedefinieerd zijn op een interval $[a, b]$. Noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat $\{f_n\}$ uniform convergeert tot een limietfunctie f is, dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$, onafhankelijk van x , bestaat zo dat voor $n > N(\varepsilon)$ en $m > N(\varepsilon)$ geldt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{111.4}$$

en wel voor iedere x van het interval $[a, b]$.

Bewijs:

a De voorwaarde is noodzakelijk: Indien $\{f_n\}$ uniform convergeert op $[a, b]$ met limietfunctie f , dan bestaan er bij iedere $\varepsilon > 0$ twee gehele getallen N_1 en N_2 zo, dat geldt voor elke $x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

voor $n > N_1$ en $m > N_2$. Als $N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2)$, geldt dus voor $n, m > N(\varepsilon)$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \text{ en dus (111.4).}$$

b De voorwaarde is *voldoende*. Indien (111.4) geldt, dan volgt uit het algemeen convergentiekenmerk van Cauchy voor rijen (zie par. 85) dat de functierij $\{f_n\}$ convergeert voor elke x van $[a, b]$, en dus een limietfunctie f definieert. Om de *uniforme* convergentie aan te tonen, moeten we bewijzen dat er bij gegeven $\varepsilon > 0$ een $N_0(\varepsilon)$ onafhankelijk van x bestaat zo, dat:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

als $n > N_0(\varepsilon)$.

We zullen dit doen met een hulpfunctie f_μ . De keuze van deze f_μ hangt weliswaar af van het punt x , maar speelt – zoals we zullen zien – geen rol meer in het resultaat. We schrijven:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_\mu(x)| + |f_\mu(x) - f_n(x)|$$

met nader te bepalen μ . Volgens het gegeven is er bij gegeven $\varepsilon > 0$ een $N_1(\varepsilon)$, onafhankelijk van x , zo dat:

$$|f_\mu(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

als $m, n > N_1(\varepsilon)$.

Daar echter de rij in het punt x convergeert naar f , bestaat er een $N_2(\varepsilon, x)$, afhankelijk van x zo, dat:

$$|f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

als $m > N_2(\varepsilon, x)$.

We kiezen nu $n > N_1(\varepsilon)$ en de hulpfunctie f_μ zo, dat $\mu > \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon, x))$. Dan geldt:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_\mu(x)| + |f_\mu(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

en dus onafhankelijk van x :

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

als $n > N_1(\varepsilon)$.

112 Functiereksen. Uniforme of gelijkmatige convergentie

Uit de rij functies $\{f_n\}$ kan men een andere rij functies afleiden door te beschouwen de rij $\{S_n\}$ van de partiële sommen, d.w.z. $S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, waarin de som van functies op de gebruikelijke wijze is gedefinieerd, nl. door:

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

De op deze wijze uit de rij $\{f_n\}$ gevormde rij $\{S_n\}$ noemen we de uit $\{f_n\}$ gevormde reeks van functies, notatie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

of ook wel:

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots \quad \text{ad infinitum}$$

We zullen nu zeggen dat de *functiereeks convergeert in het punt* $x \in W$ als de *getallenreeks* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ convergeert.

Als de functiereeks convergeert $\forall x \in U \subset W$, dan bestaat dus voor elke $x \in U$ het getal $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ (dat we op grond van vroegere afspraken óók noteren als $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$) (zie par. 90), en hiermee kan men op U een functie S definiëren door $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$. Men noemt dan de functie S de *somfunctie van de reeks* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, en de functies f_n noemen we de *termen* van de reeks.

Een machtreeks in x heeft de eigenschap dat in het inwendige van het convergentie-interval de somfunctie van de reeks een differentieerbare functie is van x . Niet iedere reeks, waarvan de termen afhangen van x , heeft deze eigenschap. Zelfs mag men indien de termen bepaald zijn door continue functies van x , a priori niet eens tot de continuïteit van de somfunctie besluiten. We lichten dit toe met een voorbeeld. De reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}(1-x^2) \tag{112.1}$$

is voor $|x| < 1$ een convergente meetkundige reeks met reden x^2 en beginterm $x^2(1-x^2)$. Voor $|x| < 1$ is de somfunctie φ gedefinieerd door:

$$\varphi(x) = \frac{x^2(1-x^2)}{1-x^2} = x^2$$

Voor $x = \pm 1$ zijn alle termen van de reeks nul, dus ook de somfunctie φ voldoet aan:

$$\varphi(\pm 1) = 0$$

Hoewel de termen van de reeks in het gehele interval $[-1, 1]$ bepaald zijn door continue functies, is φ in de eindpunten van het interval discontinu. In fig. 100 is de de functie voorgesteld, benevens de partiële som $S_3(x)$. Het gedrag van $S_3(x)$ laat reeds zien hoe de partiële sommen $S_n(x)$ zich zullen gedragen voor grotere n . In de buurt van de oorsprong sluiten de krommen met vergelijking $y = S_n(x)$ zich nauw bij de parabool met vergelijking $y = x^2$ aan, terwijl de krommen in de buurt van ± 1 met een scherpe hoek afbuigen naar de x -as.

Om na te gaan in welke gevallen men tot de continuïteit kan besluiten van de som-

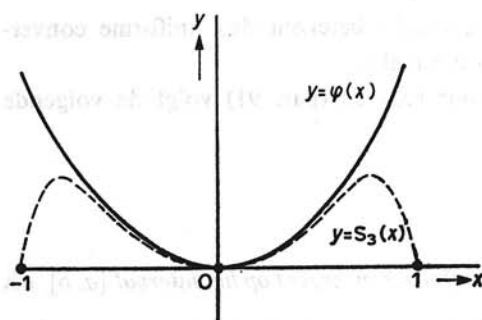


Fig. 100

functie van een convergente reeks, waarvan de termen bepaald zijn door functies van x , geven we eerst nog eens de definitie van convergentie.

De reeks $\sum u_n$ heet convergent in het punt x , indien $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$. Volgens de limietdefinitie moet er dus bij iedere $\varepsilon > 0$ een vast getal N bestaan, zo dat:

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \text{ zodra } n > N \quad (112.2)$$

Het getal N zal, omdat $u_n(x)$ afhangt van x , in het algemeen behalve van ε ook van x afhankelijk zijn, en dus voor te stellen zijn door $N(\varepsilon, x)$. We nemen als voorbeeld de reeks (112.1) op het interval $\langle -1, 1 \rangle$.

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x) = \frac{x^{2n+2}(1-x^2)}{1-x^2} = x^{2n+2}$$

$$|R_n(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^{2n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n+2 > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}$$

Dus $|R_n(x)| < \varepsilon$ als:

$$n > \frac{\frac{1}{2} \ln \varepsilon}{\ln |x|} - 1 = N(\varepsilon, x) \quad (112.3)$$

Uit (112.3) ziet men dat als $|x| \rightarrow 1$, er bij een gegeven ε een steeds grotere N vereist wordt om aan (112.2) te voldoen. Er is in dit geval ook geen getal N te vinden dat niet van x afhangt, zo dat aan (112.3) voldaan is voor *alle* $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Bestaat er echter bij iedere x van zeker interval en iedere $\varepsilon > 0$ een getal N dat slechts van ε en niet van x afhangt, dan noemt men de reeks *uniform* of *gelijkmatig convergent* op dit interval.

Definitie

Een functiereeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ heet *uniform* of *gelijkmatig convergent* op het gesloten interval $[a, b]$, indien er bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ bestaat dat *onafhankelijk* is van x , zo dat:

$$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon, \text{ als } n > N(\varepsilon)$$

voor iedere x van het interval $[a, b]$.

N.B. Uniforme convergentie van een functiereeks betekent dus uniforme convergentie van de rij van partiële sommen van die reeks.

Uit het algemene convergentiekenmerk voor reeksen (par. 91) volgt de volgende stelling.

Stelling

De functiereeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is dan en slechts dan uniform convergent op het interval $[a, b]$, als voor iedere $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ onafhankelijk van x , bestaat zo dat voor $n > N$ en $m > N$ geldt:

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

voor iedere x van het interval $[a, b]$.

Het bewijs van deze stelling volgt zeer eenvoudig uit dat van par. 111, stelling, door als functierij $\{f_n\}$ de rij $\{S_n\}$ van de partiële sommen te nemen.

De lezer merke op dat uniforme convergentie slechts betekenis heeft op een *interval*, dit in tegenstelling met „gewone” convergentie die voor een punt gedefinieerd wordt.

Voorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{3+x^2} - \dots$$

Deze reeks is alternerend, de termen naderen in absolute waarde monotoon tot nul, de reeks is dus convergent $\forall x \in \mathbb{R}$. Verder is (zie par. 99):

$$|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x^2}$$

$$\{|R_n(x)| < \varepsilon\} \Leftrightarrow \{n+1+x^2 > \frac{1}{\varepsilon}\} \Leftrightarrow \{n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 - x^2\}$$

Kiezen we $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, dan is dus $|R_n(x)| < \varepsilon$, indien $n > N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, waarbij

dus N onafhankelijk is van x . De gegeven reeks is dus uniform convergent op de gehele reële as.

113 Continuïteit van limietfunctie en somfunctie bij uniforme convergentie

Stelling 1

Laat de functierij $\{f_n\}$ gedefinieerd zijn op $[a, b]$ en uniform convergeren op dit inter-

val naar een limietfunctie f , terwijl in een vast punt $x_0 \in [a, b]$ elk van de functies f_n continu is. Dan is de limietfunctie f continu in x_0 .

Hieruit volgt:

Als alle f_n continu zijn in $[a, b]$, dan is f continu in $[a, b]$.

Bewijs:

Stel dat x en x_0 twee punten van $[a, b]$ zijn, en $\varepsilon > 0$, dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) - f(x_0) = \{f(x) - f_n(x)\} + \{f_n(x) - f_n(x_0)\} + \{f_n(x_0) - f(x_0)\}$$

en dus:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Omdat de rij $\{f_n\}$ uniform convergeert naar f , bestaat er een positief getal $N(\varepsilon)$, onafhankelijk van x , zodat voor elke $n > N(\varepsilon)$ geldt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

We kiezen nu een vaste $n > N(\varepsilon)$, dan is dus bij deze vaste n :

$$|f(x) - f(x_0)| < |f_n(x) - f_n(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon \quad (113.1)$$

f_n is continu in x_0 , d.w.z. bij de gegeven ε bestaat een getal $\delta > 0$, zo dat:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon \text{ als } |x - x_0| < \delta \quad (113.2)$$

Uit (113.1) en (113.2) volgt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ als } |x - x_0| < \delta,$$

dus is f continu in x_0 .

Opmerking:

In het bewijs is verondersteld dat x_0 een inwendig punt is van $[a, b]$. Is x_0 een randpunt van $[a, b]$, dan verloopt het bewijs zeer eenvoudig met voor de hand liggende wijzigingen.

Stelling 2

Als de functies u_n continu zijn in $[a, b]$ en de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uniform convergeert in $[a, b]$, dan is de somfunctie S gedefinieerd door $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k(x)$ een continue functie in $[a, b]$.

Het bewijs volgt uit dat van stelling 1 door voor de functierij $\{f_n\}$ de rij $\{S_n\} =$

$= \left\{ \sum_{k=0}^n u_k \right\}$ te nemen, en te bedenken dat S_n , als som van een *eindig* aantal continue functies, zelf continu is in x_0 .

Opmerking:

De voorwaarde van uniforme convergentie voor de continuïteit van de som S is een *voldoende* voorwaarde, geen noodzakelijke. Dus als S continu is, dan mag men nog niet besluiten dat de reeks uniform convergeert. Wel geldt natuurlijk: als de somfunctie S *niet* continu is in $[a, b]$, dan is de reeks *niet* uniform convergent op $[a, b]$.

114 Het criterium van Weierstrasz

In het algemeen is er geen noodzakelijke en voldoende voorwaarde aan te geven waaraan de termen van de reeks $\sum u_n$ moeten voldoen opdat de reeks uniform convergeert. In de meeste gevallen kan men volstaan met het volgende criterium van Weierstrasz.

Criterium van Weierstrasz

Indien de termen van de reeks $\sum u_n$ voldoen aan $|u_n(x)| < c_n$, (waarin c_n onafhankelijk van x is) voor alle x van het interval $[a, b]$, en $\sum c_n$ is convergent, dan is $\sum u_n$ uniform convergent op $[a, b]$.

Bewijs:

Zij $S_n(x)$ een partiële som van $\sum u_n(x)$, en T_n de overeenkomstige van $\sum c_n$, dan is voor $m > n$:

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x)| < c_{n+1} + \dots + c_m = T_m - T_n \quad (114.1)$$

De reeks $\sum c_n$ is convergent. Volgens par. 91 bestaat bij gegeven $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$ zodat $T_m - T_n < \varepsilon$ als $m > n > N(\varepsilon)$. Voor deze $N(\varepsilon)$, die onafhankelijk is van x , is dus volgens (114.1) ook $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, zodat volgens de Stelling van par. 112, de reeks $\sum u_n$ uniform convergeert op $[a, b]$.

Voorbeeld

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ met $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ is uniform convergent op de gehele x -as, want:

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$$

en de reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ is convergent (HHR, $p = 2$).

Stelling

Heeft de machtreeks $\sum c_n x^n$ de convergentiestraal ρ , en is r een positief getal kleiner dan ρ , dan is de machtreeks uniform convergent op het interval $|x| \leq r$.

Bewijs:

$$|c_n x^n| \leq |c_n| r^n$$

De reeks $\sum |c_n| r^n$ is convergent, de termen zijn onafhankelijk van x . Volgens het criterium van Weierstrasz is dus $\sum c_n x^n$ uniform convergent voor $|x| \leq r$.

Uitgewerkte opgaven over uniforme convergentie

1. Gegeven is de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

$$\text{met } u_k(x) = \frac{x}{(kx+1)\{(k+1)x+1\}} \quad (x \geq 0)$$

$S_n(x)$ is gedefinieerd door

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$$

a. Bewijs: $S_n(x) = \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1}$

b. Bewijs dat de reeks convergeert voor alle $x \geq 0$ en bepaal de somfunctie $S(x)$.

c. Bewijs dat de reeks uniform convergeert voor alle x met $0 < p \leq x$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} \text{a. } S_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x}{(kx+1)\{(k+1)x+1\}} = \\ &= \frac{x}{1(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \dots + \frac{x}{(nx+1)\{(n+1)x+1\}} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{nx+1} - \frac{1}{(n+1)x+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{(n+1)x+1} = \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1} \end{aligned}$$

Dit resultaat is ook met volledige inductie te bewijzen. Ga dit na.

b. We stellen $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$.

Er geldt dat $S(0) = 0$.

Voor $x \neq 0$ geldt

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{(n+1)x}} = 1$$

De reeks is dus convergent voor alle $x \geq 0$.

De somfunctie is niet continu in 0 en de reeks is dan dus *niet uniform convergent* op een interval dat 0 bevat!

c. We beschouwen nu het interval $0 < p \leq x$.

Hier geldt:

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| 1 - \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1} \right| = \frac{1}{(n+1)x+1} < \varepsilon$$

indien $(n+1)x+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ dus $n+1 > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \frac{1}{x}$

Er geldt echter $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{x}$

dus als $n+1 > \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ (*)

dan geldt zeker

$$n+1 > \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \quad \text{voor alle } x \geq 0$$

De reeks is dus uniform convergent op het interval $[p, \infty)$ met $p > 0$, want de n uit (*) is afhankelijk van de keuze van x op dit interval.

d. Zou echter x liggen op het interval $[0, \infty)$ dan blijkt de eis:

$$n+1 > \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

maar het rechterlid stijgt boven alle grenzen als $x \rightarrow 0$; voor dit interval is dus niet één – van x onafhankelijke – n aan te wijzen waarvoor geldt:

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \text{voor alle } x \geq 0.$$

We zien dus nogmaals dat de reeks niet uniform convergeert op het interval $[0, \rightarrow)$.

2. Gegeven is de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$

met $a_k(x) = x(1-kx)(1-x)^{k-1}$

a. Bewijs dat de reeks absoluut convergeert indien $x \in [0, 1]$

b. Indien $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)$, bewijs dan

$$S_n(x) = nx(1-x)^n.$$

c. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ voor $x \in [0, 1]$

- d. Bewijs dat de reeks uniform convergeert voor $0 < p \leq x \leq 1$.
 e. Bewijs dat de reeks niet uniform convergeert voor $0 \leq x \leq 1$.

Uitwerking

a. Voor $x = 0$ en $x = 1$ geldt $a_k = 0$.

Voor $0 < x < 1$ passen we het kenmerk van d'Alembert toe:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x\{1 - (k+1)x\}(1-x)^k}{x(1-kx)(1-x)^{k-1}} \right| = \left| \frac{\{1 - (k+1)x\}(1-x)}{1-kx} \right|$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{1}{k+1} - x\right)(1-x)}{\frac{1}{k+1} - \frac{kx}{k+1}} \right| = (1-x) < 1,$$

dus de reeks is absoluut convergent op $[0, 1]$.

b. We passen volledige inductie toe:

$$n = 1 \quad S_1(x) = a_1(x) = x(1-x) = 1 \cdot x(1-x)^1.$$

Stel $S_n(x) = nx(1-x)^n$ ($n \geq 2$), dan geldt:

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + a_{n+1}(x) = nx(1-x)^n + x\{1 - (n+1)x\}(1-x)^n$$

$$= x(1-x)^n \{n + 1 - (n+1)x\} = (n+1)x(1-x)^{n+1}.$$

c. We zien dan uit het bovenstaande resultaat

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = 0 \text{ voor } 0 \leq x \leq 1.$$

d. Met de resultaten van c. en d. zien we:

$$|S(x) - S_n(x)| = |S_n(x)| = nx(1-x)^n.$$

Nu geldt voor $0 < p \leq x \leq 1$ dat $1-x \leq 1-p$, dus $|S(x) - S_n(x)| < n(1-p)^n$.

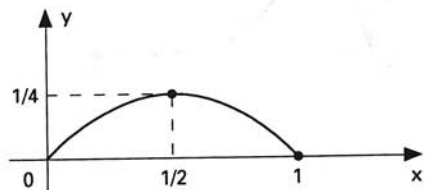
Er geldt evenwel dat $n(1-p)^n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ (voor $0 < p < 1$), want $n(1-p)^n = ne^{n \ln(1-p)}$
 $= \frac{n}{e^{nt}}$ (met $t > 0$) en $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{nt}} = 0$. Dus voor n groot genoeg en $\varepsilon > 0$ geldt, onafhankelijk van de keuze van x op $0 < p \leq x \leq 1$:

$$|S(x) - S_n(x)| = nx(1-x)^n \leq n(1-p)^n < \varepsilon$$

en dit betekent de uniforme convergentie van de reeks op dit interval.

e. Het eenvoudig criterium om te besluiten tot niet-uniforme convergentie, nl. de discontinuïteit van de somfunctie, gaat hier niet op, daar $S(x) \equiv 0$. Daarom passen we een ander — eveneens beproefd — middel toe: we onderzoeken het verloop van $S_n(x)$ voor verschillende waarden van n .

Voor $n = 1$ is dit eenvoudig: $S_1 = x(1-x)$, de grafiek is dan een parabool.



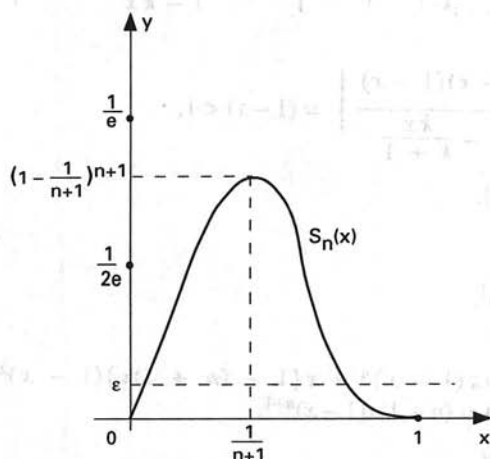
Algemeen ($n \geq 2$): $S_n(x) = nx(1-x)^n$

$$S_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1}$$

$$= n(1-x)^{n-1}\{1 - (n+1)x\}.$$

In $(1,0)$ loopt de raaklijn horizontaal en er is een maximum voor $x = \frac{1}{n+1}$ ter grootte van

$$\frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$



en dit nadert tot $\frac{1}{e}$ als n nadert tot oneindig. Ook merken we op: $S'(0) = n$. We zien dat bij toenemende n de top naar links verschuift en dat de ordinaat daarvan steeds dichterbij $\frac{1}{e}$ komt. Het is dus niet mogelijk n zó te kiezen dat voor alle x op $[0,1]$ geldt $|S_n(x)| < \epsilon$. Exacter gezegd: er is een n_0 zodat voor $n > n_0$ geldt:

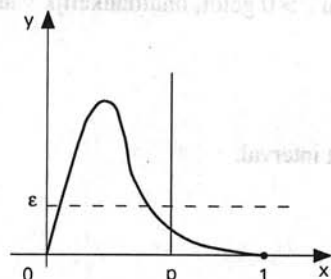
$$\left| \frac{1}{e} - S_n(x_0) \right| < \frac{1}{2e}$$

$$\text{en dus } |S_n(x_0)| > \frac{1}{2e}$$

als x_0 de waarde is waarvoor $S_n(x)$ zijn maximum $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ bereikt, (nl. $\frac{1}{n+1}$). Kiest men nu $\epsilon = 1/2e$ dan geldt dus zeker niet voor elke $x \in [0,1]$ dat

$$|S(x) - S_n(x)| = |S_n(x)| < \frac{1}{2e}$$

vanaf een zekere n_0 .



Men ziet ook dat dit wel lukt op $0 < p \leq x \leq 1$.

Aanschouwelijk: bij gegeven $\epsilon > 0$ kan men n_0 zo groot kiezen voor alle $n > n_0$ de grafiek van $S_n(x)$ vanaf $x = p$ 'onder' de lijn $y = \epsilon$ ligt.

115 Het integreren van uniform convergente rijen en reeksen

Stelling 1

Als de functies f_n $\{n = 0, 1, \dots\}$ continu zijn in $[a, b]$, en de rij $\{f_n\}$ uniform convergeert naar de functie f op $[a, b]$, dan geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (115.1)$$

oftewel:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

hetgeen betekent dat in dit geval *integratie en limietovergang verwisseld mogen worden*.

Bewijs:

$$\int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \{f_n(x) - f(x)\} dx$$

zodat:

$$|\int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \quad (115.2)$$

Daar $\{f_n\}$ uniform convergeert naar f op $[a, b]$, kan men bij gegeven $\varepsilon > 0$ een getal $N(\varepsilon)$, onafhankelijk van x , kiezen zo, dat voor $n > N(\varepsilon)$ geldt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad (115.3)$$

voor $a \leq x \leq b$.

Uit (115.2) en (115.3) volgt voor $n > N(\varepsilon)$:

$$|\int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon,$$

maar dit is juist de bewering (115.1).

Voorbeeld

We nemen als illustratie (tegenvoorbeeld) de rij $\{f_n\}$, gedefinieerd op $[0, 2]$, uit par. 111, voorbeeld 3. Zoals we daar zagen is $f(x) = 0$ voor alle x in $[0, 2]$, zodat $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Uit fig. 99 zien we dat $\int_a^b f_n(x) dx$ de oppervlakte van de getekende driehoek voorstelt, en dus gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot 2n = 2$, en dus is ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx = 2$. Er geldt nu:

$$\int_0^2 f(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx$$

De convergentie van $\{f_n\}$ naar f is dan ook niet uniform.

We merken nog op dat uniforme convergentie een *voldoende* voorwaarde is voor het geldig zijn van (115.1).

De uniforme convergentie is hiervoor *geen noodzakelijke* voorwaarde. Het is mogelijk dat (115.1) geldt, zonder dat $\{f_n\}$ uniform tot f convergeert. Hadden we in bovenstaand voorbeeld de hoogte van de driehoek $2\sqrt{n}$ in plaats van $2n$ genomen, dan zou gelden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

Hier geldt dus (115.1) zonder dat de betrokken rij uniform convergeert.

Daarentegen is in par. 111, voorbeeld 2, de convergentie van $\{f_n\}$, gedefinieerd door

$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ op $[0, 1]$, wél uniform, zoals daar is aangetoond. Hier geldt dus daarom

reeds (115.1), terwijl ook berekening laat zien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

en wegens $f(x) \equiv 0$ op $[0, 1]$: $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Stelling 2

Stel dat de functies u_n continu zijn in $[a, b]$, en dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uniform convergeert op $[a, b]$ met somfunctie S , dan geldt:

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \quad (115.4)$$

Ook hier volgt het bewijs uit dat van stelling 1 door voor de functierij $\{f_n\}$ de functierij $\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=0}^n u_k \right\}$ te nemen, en te bedenken dat de integraal van een som van een *eindig* aantal functies gelijk is aan de som van de integralen van die functies.

Opmerking:

Ook hier geldt dat uniforme convergentie een *voldoende* doch *geen noodzakelijke* voorwaarde is voor het geldig zijn van (115.4).

Men „mag” dus een op $[a, b]$ uniform convergente reeks van continue functies f_n termgewijs integreren, en de geïntegreerde reeks heeft als somfunctie de integraal van de somfunctie van de eerste reeks. Uniform convergente reeksen gedragen zich t.o.v. integratie net als eindige sommen.

116 Het differentiëren van uniform convergente rijen en reeksen

Men zou kunnen denken dat de uniforme convergentie van een functierij $\{f_n\}$ tot een limietfunctie f een voldoende voorwaarde zou zijn om te kunnen beweren:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

oftewel:

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

hetgeen betekent dat in dit geval *differentiatie en limietovergang verwisseld mogen worden*.

Dit is echter onjuist. De volgende stelling leert ons dat we de uniforme convergentie van de functierij $\{f'_n\}$ moeten bekijken.

Stelling 1

Laat de functies f_n van de rij $\{f_n\}$ gedefinieerd zijn en continue afgeleiden bezitten op het interval $[a, b]$. Laat de rij $\{f'_n\}$ uniform convergent zijn op $[a, b]$ en laat de rij $\{f_n\}$ convergent zijn met limietfunctie f . Dan is f differentieerbaar en geldt:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

Bewijs:

De rij $\{f'_n\}$ is uniform convergent op $[a, b]$. We noemen de limietfunctie h . We moeten dan bewijzen dat $h(x) = f'(x)$. Daar $\{f'_n\}$ op $[a, b]$ uniform convergeert naar h , is h volgens par. 113, stelling 1 continu in $[a, b]$, en dus ook in ieder deelinterval $[a, x]$ daarvan, zodat $\int_a^x h(t) dt$ bestaat voor alle $x \in [a, b]$. Verder kunnen we volgens par. 115, stelling 1 schrijven:

$$\int_a^x h(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt \quad (116.1)$$

Nu is:

$$\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a)$$

Daar $f_n(x) \rightarrow f(x)$ voor $n \rightarrow \infty$, gaat (116.1) over in:

$$\int_a^x h(t) dt = f(x) - f(a)$$

of:

$$f(x) = \int_a^x h(t) dt + f(a) \quad (116.2)$$

Volgens par. 30 (hoofdstelling van de integraalrekening) is $\int_a^x h(t) dt$ differentieer-

baar, en dus volgens (116.2) is f differentieerbaar met $f'(x) = h(x)$. Hiermee is de stelling bewezen.

Men zou kunnen vermoeden dat ook in het geval van een uniform convergente reeks de somfunctie differentieerbaar is en wel door termsgewijze differentiatie. Dit is in het algemeen niet het geval. We nemen als voorbeeld de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ met } u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2} \quad (116.4)$$

waarvan we in par. 114 bewezen hebben dat deze uniform convergent is voor alle $x \in \mathbb{R}$. De reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

die uit (116.4) door termsgewijze differentiëren ontstaat, is echter voor $x = 2k\pi$ (k geheel) divergent, omdat ze voor deze waarden overgaat in de divergente harmonische reeks. Er geldt evenwel de volgende stelling.

Stelling 2

Stel dat de functies u_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) in $[a, b]$ continue afgeleiden u'_n hebben, terwijl de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergeert op $[a, b]$ met somfunctie S , en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ uniform convergeert op $[a, b]$ met som T . Dan geldt:

$$\frac{dS(x)}{dx} = T(x)$$

Het bewijs van deze stelling wordt, evenals bij de vorige stellingen, analoog geleverd door de rij van de partiële sommen te beschouwen.

In par. 110 is aangetoond dat de machtreeks $\sum nc_n x^{n-1}$ die uit $\sum c_n x^n$ door termsgewijze differentiëren ontstaat, dezelfde convergentiestraal heeft als de oorspronkelijke. Omdat een machtreeks uniform convergent is op ieder gesloten interval dat binnen het convergentiegebied ligt, is dus bij een machtreeks aan de hierboven genoemde voorwaarden voldaan. *De functie die door een machtreeks wordt voorgesteld is dus binnen zijn convergentiegebied differentieerbaar en wel door termsgewijze differentiatie (en dus oneindig vaak differentieerbaar).*

117 Numerieke berekeningen. Schatting van de restterm

In deze paragraaf spreken we over reeksen met termen die alleen van het rangnummer afhangen. Het is gebruikelijk om dan te spreken van reeksen met constante termen. Voor numerieke berekeningen is het noodzakelijk een schatting te maken van de

grootte van de restterm R_n , die men verkrijgt als men de reeks na de term u_n afbreekt. Een bruikbare schatting kan men eenvoudig verkrijgen als vanaf zeker rangnummer N geldt:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq r < 1$$

Voor $n \geq N$ is dan:

$$|u_{n+1}| \leq r|u_n|, |u_{n+2}| \leq r|u_{n+1}| \leq r^2|u_n|, |u_{n+3}| \leq r^3|u_n|$$

en algemeen:

$$|u_{n+k}| \leq |u_n|r^k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Dus is:

$$|R_{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n+k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_n|r^k = |u_n| \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{|u_n|}{1-r}$$

Voorbeeld 1

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_{n-1}(x)$$

Voor deze reeks is:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} = r \quad (\text{bij vaste } x)$$

Kiest men n zo groot dat $(n+1) > |x|$ is, dan is $0 \leq r < 1$, en is:

$$\begin{aligned} |R_{n-1}(x)| &= \left| \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \right| \leq \\ &\leq \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+1}} = \frac{|x|^n(n+1)}{n!(n+1-|x|)} \end{aligned}$$

Neemt men in het bijzonder $x = 1$, dan is:

$$|R_{n-1}(1)| < \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+1}{n} \quad \text{voor iedere } n \in \mathbb{N}$$

Voor berekening van e in minstens drie decimalen nauwkeurig, is het voldoende $n = 7$ te nemen, want:

$$\frac{1}{7!} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{7 \cdot 630} = \frac{1}{4410} < 0,0003$$

dus is:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + R_6$$

$$= 2,718\dots + R_6$$

waarbij $R_6 < 0,0003$ is.

Voorbeeld 2

Bereken $\sqrt[3]{1,1}$ in 5 decimalen nauwkeurig.

Oplossing:

We ontwikkelen de wortel met behulp van de binomiaalreeks (par. 108, hoofdstuk 7), waarvoor $\alpha = \frac{1}{3}$ en $x = 0,1$.

$$u_{n+1} = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}, \quad u_n = \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \cdot \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)} \right|$$

$$= |x| \cdot \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right|$$

$$= 0,1 \cdot \frac{n - \frac{1}{3}}{n+1} < 0,1 \quad \text{voor iedere } n \in \mathbb{N}$$

$$|R_{n-1}| < \frac{|u_n|}{1-r} = \left| \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\dots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!} \right| \cdot \frac{(0,1)^n}{1-0,1}$$

Neemt men $n = 4$, dan volgt:

$$|R_3| < \left| \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!} \right| \cdot \frac{(0,1)^4}{1-0,1} < 0,000005$$

Hieruit volgt:

$$\sqrt[3]{1,1} = 1 + \frac{0,1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} \cdot (0,1)^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} (0,1)^3 + R_3$$

Na enige becijfering volgt hieruit:

$$\sqrt[3]{1,1} = 1,03228 \quad \text{met een fout kleiner dan } 10^{-5}.$$

Een eenvoudige schatting van de fout die men bij het afbreken van een reeks maakt, heeft men bij een alternerende reeks waarvan de termen in absolute waarde monotoon tot nul naderen. In par. 99 is aangetoond, dat de fout die men bij het afbreken

maakt, kleiner is dan de absolute waarde van de eerste weggelaten term. Bij voorbeeld 2 voldoet de binomiaalreeks voor $\sqrt[3]{1,1}$ aan de gestelde voorwaarden; we hadden dus de benadering eenvoudiger kunnen vinden, omdat $|R_3| < |u_4|$ is.

118 Divergente reeksen. Sommeerbaarheid

In par. 90 zijn de begrippen „convergente en divergente reeksen” en „som van een convergente reeks” behandeld. Een reeks heet convergent als de rij van de partiële sommen:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

een limiet heeft. Deze limiet wordt dan de som S van de reeks genoemd.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

Bestaat deze limiet niet, dan heet de reeks divergent.

Van deze twee klassen van reeksen hebben de convergente reeksen bijna uitsluitend onze aandacht gehad, en men zou hieruit de indruk verkregen kunnen hebben, dat de divergente reeksen van geen of tenminste twijfelachtige waarde en zeker als onbelangrijk beschouwd kunnen worden. Dit is geenszins het geval. Het blijkt nl. dat bij vele toepassingen uit de techniek men met divergente reeksen te maken krijgt, en dat daarbij de behandeling van de restterm, ontstaan bij het afbreken na een zeker aantal termen, een voorname rol speelt. Zo kan bij een functie f die gegeven is door zijn Maclaurin-ontwikkeling, het gedrag van de functie voor zeer grote waarden van x van groot belang zijn. De theorie van deze z.g. *asymptotische ontwikkelingen* van een functie valt buiten het bestek van dit boek.

Een ander aspect bij de divergente reeksen is de gerechtvaardigde vraag of deze reeksen buiten de behandelings sfeer vallen omdat de bovengenoemde definitie van convergentie en som misschien niet de gunstigste is. Al is de gebruikte definitie wellicht voor de hand liggend, het is zeker niet de enig mogelijke.

De in par. 90 genoemde reeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

dus de meetkundige reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ voor $x = -1$, heeft als partiële som:

$$S_n = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^n\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

dus voor opvolgende n de waarden 0 en 1. Daar S_n voor $n \rightarrow \infty$ geen limiet heeft, is deze reeks als divergent aangemerkt.

Vormt men het rekenkundig gemiddelde:

$$T_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

dan vindt men:

$$T_n = \frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^n}{4(n+1)}$$

Laat men n onbeperkt aangroeien, dan nadert T_n tot $\frac{1}{2}$.

Dus als men definieert dat een reeks convergent is als $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ bestaat en gelijk is aan S , dan is in deze zin $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ convergent met som $\frac{1}{2}$. De reeks heet dan *sommeerbaar* volgens deze definitie. De waarde $\frac{1}{2}$ is dezelfde als die Euler (1707–1783) reeds aan de som gaf, toen hij in de formule voor de som van de meetkundige reeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

ook de waarde $x = -1$ substitueerde.

Men kan gemakkelijk bewijzen dat als een reeks convergent is volgens de gebruikelijke definitie dit ook het geval is bij de laatst gegeven definitie.

Naast deze definitie bestaat er nog een aantal, waardoor men, in plaats van het oorspronkelijk convergentiebeprijp, met succes een somwaarde aan een reeks kan toevoegen. Aan al deze definities wordt een passende benaming gegeven. Onder de „convergentie” van een reeks wordt dan verstaan hetgeen uit de oorspronkelijke definitie volgt. Wordt volgens een andere definitie aan een reeks een som S toegerekend (zoals bij het gegeven voorbeeld met het rekenkundig gemiddelde van de partiële sommen), dan heet de reeks *sommeerbaar* in bepaalde zin, en S de *waarde* (of ook wel som) van de reeks.

Ook op de theorie van de in de literatuur bekende definities van *sommeerbaarheid* gaan we hier niet verder in.

Vergelijkingen

119 Algebraïsche vergelijkingen

In par. 51 is reeds gesproken over algebraïsche vergelijkingen. In deze paragraaf zullen we hier uitvoeriger op ingaan. Allereerst herhalen we enkele begrippen.

Onder een *veelterm* (*polynoom*) in z met coëfficiënten in het lichaam \mathbb{C} der complexe getallen verstaan we een uitdrukking van de gedaante:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0, n \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

waarin $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ complexe, eventueel reële, getallen zijn, die we de coëfficiënten van het polynoom noemen; z is een veranderlijke grootheid.

De veelterm wordt aangeduid door $P(z)$, eventueel $P_n(z)$.

Het is duidelijk dat een veelterm $P(z)$ een functie op \mathbb{C} definieert, nl. de gehele rationale functie: $z \mapsto P(z)$ ($z \in \mathbb{C}$).

Onder de graad van een veelterm verstaat men de exponent van de hoogste macht van z , voor zover de bijbehorende coëfficiënt van nul verschilt. De graad van een constante veelterm ($\neq 0$) is dus 0. De veelterm 0 heeft geen graad. De complexe getallen z_0 , waarvoor geldt $P(z_0) = 0$, noemt men de nulpunten van het polynoom $P(z)$ of de wortels van de vergelijking $P(z) = 0$.

Bijzondere gevallen zijn de reeds behandelde vergelijkingen van de eerste en van de tweede graad, en de binomiale vergelijking $z^n = \alpha$. In deze gevallen bleek de vergelijking juist zoveel wortels te hebben als de graad bedraagt. Deze eigenschap heeft iedere algebraïsche vergelijking. Ze berust op de van d'Alembert afkomstige hoofdstelling van de algebra.

Hoofdstelling

Iedere algebraïsche vergelijking heeft minstens een wortel in het lichaam der complexe getallen.

Het bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van dit boek. Aanvaarden wij deze stelling, dan volgt eenvoudig dat een vergelijking van de graad n juist n wortels heeft. Om dit te bewijzen gebruiken we de volgende stelling.

Stelling

De vergelijking $P(z) = 0$ heeft de wortel α_1 , dan en slechts dan als $P(z)$ deelbaar is door $z - \alpha_1$.

Deelbaar zijn door $(z - \alpha_1)$ betekent in dit verband dat $P(z) = (z - \alpha_1)Q(z)$ waarin $Q(z)$ een veelterm in z is (eventueel een constante).

Bewijs:

We kunnen schrijven (voortgezette deling):

$$P(z) = (z - \alpha_1)Q(z) + R \quad (119.1)$$

waarin R een constante is.

Als $P(z)$ de wortel α_1 heeft, dan volgt uit (119.1):

$$P(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_1)Q(\alpha_1) + R = 0,$$

en dus $R = 0$, en is $P(z)$ deelbaar door $z - \alpha_1$.

Omgekeerd: Als $P(z)$ deelbaar is door $z - \alpha_1$, dan is $R = 0$, en geldt

$$P(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_1)Q(\alpha_1) = 0,$$

en heeft $P(z)$ de wortel α_1 .

Noemen we $Q(z)$ het quotiënt $P(z)/(z - \alpha_1)$, dan is dus:

$$P(z) = (z - \alpha_1)Q(z) \quad (119.2)$$

De veelterm $Q(z)$ is van de graad $(n - 1)$. Tenzij $n = 1$ heeft de vergelijking $Q(z) = 0$ een wortel α_2 , die in het algemeen verschillend zal zijn van α_1 , dus is:

$$P(z) = (z - \alpha_1)Q(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)R(z)$$

waarin $R(z)$ een veelterm in z is van de graad $(n - 2)$. Zo kan men doorgaan tot men komt tot een veelterm van de nulde graad, d.i. een constante. Door gelijkstelling vindt men dat deze constante gelijk aan a_0 moet zijn, zodat in het algemeen:

$$P(z) = a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) \quad (119.3)$$

Is voor de wortel $z = \alpha_j$ de veelterm $P(z)$ deelbaar door $(z - \alpha_j)^k$ en niet door $(z - \alpha_j)^{k+1}$, dan noemt men α_j een k -voudige wortel. Rekent men een k -voudige

wortel voor k enkelvoudige wortels, dan geldt algemeen:

Een algebraïsche vergelijking van de n^e graad met coëfficiënten in \mathbb{C} heeft juist n wortels in \mathbb{C} .

In het volgende zullen we ons steeds beperken tot algebraïsche vergelijkingen met reële coëfficiënten, al laten we toe dat z niet reële waarden aanneemt.

120 Meervoudige wortels van een algebraïsche vergelijking

Is f een functie van de complexe veranderlijke z , en bestaat $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$, dan noemt men $f'(z_0)$ de afgeleide van f in z_0 .

Op de voorwaarden voor het bestaan van $f'(z_0)$ gaan wij niet verder in, we vermelden slechts dat een gehele rationale functie P een afgeleide P' bezit, en dat P' dezelfde gedaante heeft als bij een gehele rationale functie van een reële veranderlijke.

Voor het onderzoek naar de meervoudige wortels van een algebraïsche vergelijking is de volgende stelling van belang.

Stelling

Heeft de algebraïsche vergelijking $P(z) = 0$, de k -voudige wortel $z = \alpha$, dan heeft de afgeleide vergelijking $P'(z) = 0$ deze wortel $(k - 1)$ -voudig.

Bewijs:

$$P(z) = (z - \alpha)^k Q(z), \quad Q(\alpha) \neq 0$$

$$\begin{aligned} P'(z) &= k(z - \alpha)^{k-1} Q(z) + (z - \alpha)^k Q'(z) \\ &= (z - \alpha)^{k-1} \{kQ(z) + (z - \alpha)Q'(z)\} \\ &= (z - \alpha)^{k-1} R(z) \end{aligned}$$

Hierbij is:

$$R(\alpha) = kQ(\alpha) \neq 0$$

dus heeft $P'(z)$ α als $(k - 1)$ -voudige wortel.

Gevolg:

Hebben $P(z) = 0$ en $P'(z) = 0$ een wortel gemeen en heeft $P'(z)$ deze wortel k -voudig, dan heeft $P(z) = 0$ deze wortel $(k + 1)$ -voudig.

Voorbeeld

Bewijs dat de vergelijking:

$$P(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$$

drie gelijke wortels heeft.

Oplossing:

$$P'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x^3 - 3x - 2)$$

$P'(-1) = 0$, dus $P'(x)$ is deelbaar door $x + 1$. Eenvoudig volgt:

$$P'(x) = 4(x + 1)^2(x - 2)$$

Verder is $P(-1) = 0$, dus (-1) is een drievoudige wortel van $P(x) = 0$. Uit een deling van $P(x)$ door $(x + 1)^3$ volgt:

$$P(x) = (x + 1)^3(x - 3)$$

121 Rationale wortels van een algebraïsche vergelijking met gehele rationale coëfficiënten

Stelling

Heeft de vergelijking:

$$P(x) \equiv \pm x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

waarin a_k geheel rationaal en de coëfficiënt van x^n gelijk ± 1 is, een rationale wortel, dan is deze wortel geheel rationaal en een deler van a_n .

Bewijs:

Stel de rationale wortel is p/q , waarin p en q geheel rationaal en onderling ondeelbaar, dan is:

$$\pm \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0 \quad (121.1)$$

Vermenigvuldiging van de leden van (121.1) met q^{n-1} , levert de gelijkheid:

$$\pm \frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1} = 0$$

Omdat $(a_1 p^{n-1} + \dots + a_n q^{n-1})$ een geheel rationaal getal is, moet ook p^n/q geheel rationaal zijn. Dus moet $q = \pm 1$ zijn daar p en q geen gemeenschappelijke factoren hebben, en dus is de wortel p/q een geheel rationaal getal. Daar $P(x)$ volgens (119.4)

te schrijven is als:

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

geldt voor de bekende term a_n :

$$a_n = (-1)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k$$

De gehele rationale wortel is dus een factor van a_n .

Stelling

Heeft de vergelijking $P(x) = 0$ met:

$$P(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

waarin a_k geheel rationaal is, een rationale wortel p/q (p en q onderling ondeelbaar), dan is p een deler van a_n en q een deler van a_0 .

Bewijs:

$$a_0 \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0 \quad (121.2)$$

Vermenigvuldiging van beide leden met q^{n-1} geeft:

$$a_0 \frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1} = 0$$

Hieruit volgt dat $a_0 p^n / q$ geheel rationaal moet zijn. Omdat p en q geen factor gemeen hebben, is q een deler van a_0 , op grond van de hoofdstelling van de rekenkunde.

Vermenigvuldigt men beide leden van (121.2) met q^n / p , dan volgt:

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + a_2 p^{n-3} q^2 + \dots + a_{n-1} q^{n-1} + a_n \frac{q^n}{p} = 0$$

Uit deze gelijkheid volgt dat $a_n q^n / p$ geheel rationaal is, dus dat p een deler is van a_n .

Opmerking:

De eerste stelling van deze paragraaf is als bijzonder geval ($q = 1$) in de tweede stelling vervat.

122 Het opsporen van de reële wortels van een vergelijking

Voor het opsporen van de wortels van een vergelijking: $f(x) = 0$, bestaan vele methoden. Van belang is hierbij het onderzoek van de functie f en van de afgeleide functie f' . Hoe men reële wortels kan opsporen bij een algebraïsche vergelijking met reële coëfficiënten lichten we aan enige voorbeelden toe.

Voorbeeld 1

Toon aan dat $x^3 - 2x - 9 = 0$ één reële wortel heeft.

Oplossing:

Definieer f door:

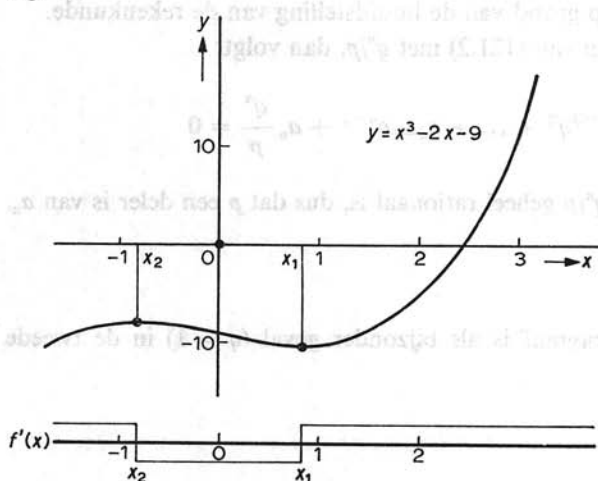
$$f(x) = x^3 - 2x - 9$$

dan is:

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

De nulwaarden van f' zijn $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ en $x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$. Het tekenverloop van $f'(x)$ is in fig. 101 weergegeven. Uit dit tekenverloop volgt dat f stijgend is op $\langle \leftarrow, x_2 \rangle$, dalend op $[x_2, x_1]$ en stijgend op $[x_1, \rightarrow)$. De functie f heeft een relatief maximum voor $x = x_2$ en een relatief minimum voor $x = x_1$. Verder is $f(x_2) = -\frac{2}{9}\sqrt{6} + \frac{2}{3}\sqrt{6} - 9 < 0$ en is $f(x_1) = \frac{2}{9}\sqrt{6} - \frac{2}{3}\sqrt{6} - 9 < 0$. Omdat het relatieve maximum $f(x_2) < 0$ is, heeft de kromme met vergelijking $y = f(x)$ op $\langle \leftarrow, x_2 \rangle$ geen snijpunten met de x -as. Voor „grote” x is $f(x) = x^3 - 2x - 9 > 0$. Wegens de continuïteit van f is er dus een wortel op $[x_1, \rightarrow)$. Omdat voor $x > x_1$ f stijgend is, is er ook slechts één wortel. Verder is $f(1) = -10$, $f(2) = -5$ en $f(3) = 12$. De reële wortel ligt derhalve tussen 2 en 3.

Fig. 101



Voorbeeld 2

- 1 Toon aan dat $z^9 + z^8 + 2 = 0$ geen reële of niet-reële wortel heeft binnen $|z| = 1$.
- 2 Toon aan dat $r^9 - r^8 - 2 = 0$ één enkele reële wortel r_0 heeft, en dat deze ligt tussen 1 en 2.
- 3 Toon aan dat alle wortels van de vergelijking onder 1 een absolute waarde hebben $\leq r_0$.

Oplossing deel 1:

Voor $|z| < 1$ is:

$$|z^9 + z^8| \leq |z^9| + |z^8| < 2$$

en dus:

$$|z^9 + z^8 + 2| \geq 2 - |z^9 + z^8| > 0$$

dus kan binnen de cirkel in het complexe vlak met vergelijking $|z| = 1$, $z^9 + z^8 + 2$ niet nul zijn.

Oplossing deel 2:

Als:

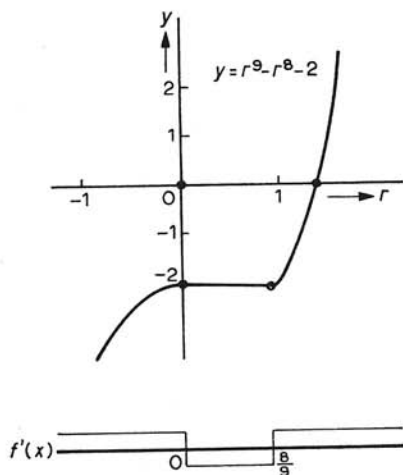
$$f(r) = r^9 - r^8 - 2$$

dan is:

$$f'(r) = 9r^8 - 8r^7 = r^7(9r - 8)$$

De nulwaarden van f' zijn 0 en $\frac{8}{9}$; het tekenverloop is geschetst in fig. 102. De functie is stijgend op $\langle \leftarrow, 0 \rangle$, dalend op $[0, \frac{8}{9}]$ en stijgend op $[\frac{8}{9}, \rightarrow \rangle$. Verder is $f(0) = -2$,

Fig. 102



$f(1) = -2, f(2) = 254$. Er is slechts één reële wortel, zeg r_0 , en deze ligt tussen 1 en 2.

Oplossing deel 3:

Voor de wortels van de vergelijking onder 1 geldt:

$$|z^9 + z^8| = |-2| = 2$$

Omdat volgens 1 $|z| \geq 1$ is, is verder:

$$|z^9 + z^8| = |z^8| |z + 1| \geq |z^8| (|z| - 1)$$

Dus is:

$$2 \geq |z|^8 (|z| - 1) \Rightarrow |z|^9 - |z|^8 - 2 \leq 0 \quad (122.1)$$

De reële wortel van $|z|^9 - |z|^8 - 2 = 0$ is het getal r_0 onder 2 genoemd. Uit het betoog onder 2 volgt dat aan (122.1) slechts voldaan is voor $|z| \leq r_0$.

123 Het benaderen van de wortels van een vergelijking

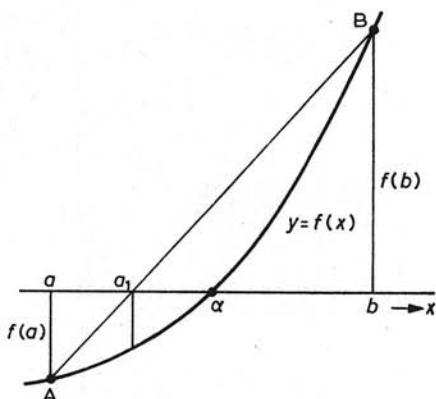
Heeft men gevonden dat een reële wortel van een vergelijking $f(x) = 0$ tussen a en b ligt, waarbij f continu in $[a, b]$ is verondersteld, dan kan men na verdeling van het interval $[a, b]$, in de deelpunten het teken van $f(x)$ bepalen, waaruit dan een kleiner interval volgt, waarop de vergelijking $f(x) = 0$ een wortel heeft. Men kan dit onderzoek op de volgende wijze bekorten.

In fig. 103 snijdt de kromme met vergelijking $y = f(x)$ de x -as, in $x = \alpha$.

Trekt men de rechte AB, dan snijdt deze de x -as in het punt α_1 , dat een benadering is van α . De vergelijking van de rechte AB volgt uit:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad (123.1)$$

Fig. 103



Uit (123.1) volgt voor $y = 0$:

$$x - a = -f(a) \cdot \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

dus:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a)$$

of:

$$a_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (123.2)$$

De benadering van α door a_1 als in (123.2) noemt men de *regula falsi*.

In het getekende geval is $f(a_1) < 0$, terwijl $f(b) > 0$ is. Op het interval $[a_1, b]$ kan men dit proces herhalen.

Nemen we als voorbeeld de reële wortel van de vergelijking $x^3 - 2x + -9 = 0$ van par. 119 voorbeeld 1, dan weten we reeds $f(2) = -5$ en $f(3) = 12$. In dit geval is:

$$a_1 = 2 - \frac{-5}{17} = 2 \frac{5}{17} \approx 2,29$$

waarbij $f(2,29) = -1,5$ is.

Een andere benadering vindt men door in het punt A of het punt B (fig. 104) de raaklijn aan de kromme $y = f(x)$ te trekken en het snijpunt met de x -as te bepalen.

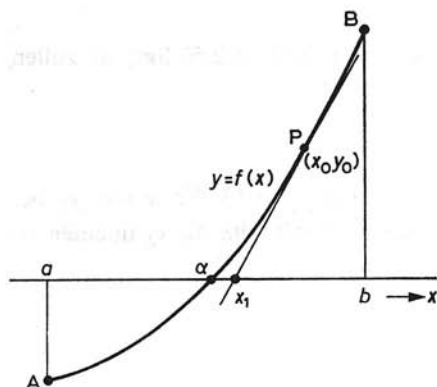
Voor de raaklijn in een willekeurig punt P (x_0, y_0) van de kromme $y = f(x)$ geldt:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Voor $y = 0$ volgt hieruit voor het snijpunt ($x_1, 0$) met de x -as:

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} \quad (123.3)$$

Fig. 104



Gaat men bij de vergelijking $x^3 - 2x - 9 = 0$ uit van het punt B (3,12), dan volgt uit $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 = 25$:

$$x_1 = 3 - \frac{12}{25} = 2,52$$

Van A (2, -5) uitgaande vindt men wegens $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 10$:

$$x_2 = 2 + \frac{5}{10} = 2,50$$

$f(2,5) = 1,6$. De gezochte wortel α ligt dus tussen 2,29 en 2,50.

De benadering van α met behulp van (123.3) noemt men de *regel van Newton*. Ook dit proces kan men herhalen.

Men ziet uit het gegeven voorbeeld dat de behandelde methoden ter benadering zeer bewerkelijk zijn. Zoals we in par. 124 zullen zien zijn er methoden die sneller tot het doel voeren.

124 Grafische methode. Iteratie

De reële wortels van de vergelijking met reële coëfficiënten:

$$x^3 + px + q = 0$$

kunnen als volgt grafisch worden bepaald. Men stelt:

$$x^3 = y = -px - q$$

De gevraagde wortels zijn dan de abcissen van de snijpunten van de krommen:

$$y = x^3 \text{ en } y = -px - q$$

die eenvoudig te tekenen zijn. De snijpunten zijn op mm-papier of met een computer (vrij) nauwkeurig te bepalen. Het idee om de wortels te berekenen door het snijden van twee krommen ligt ook ten grondslag aan een meer nauwkeurige methode.

We lichten deze toe aan de vergelijking:

$$x^3 - 2x - 9 = 0$$

waarvan reeds bekend is dat de enige reële wortel tussen 2,29 en 2,50 ligt; we zullen van deze benadering echter geen gebruik maken. We stellen:

$$2x + 9 = y = x^3$$

Bij $x_1 = 2$ (fig. 105), behoort op de rechte de y -waarde $y_1 = 13$. Voor $y = y_1$ bepalen we voor de kromme $y = x^3$ de bijbehorende x -waarde, die we x_2 noemen en vinden aldus:

$$y_1 = 2 \cdot 2 + 9 = 13$$

$$x_2 = \sqrt[3]{y_1} = \sqrt[3]{13} \approx 2,35$$

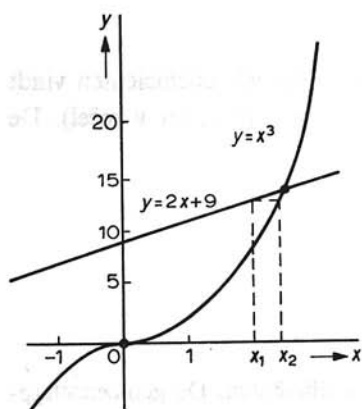


Fig. 105

Bij deze x_2 bepalen we op de rechte y_2 en bij deze y_2 m.b.v. de kromme x_3 :

$$y_2 = 2 \cdot 2,35 + 9 = 13,7 \quad x_3 = \sqrt[3]{y_2} = \sqrt[3]{13,7} \approx 2,392$$

Op deze wijze gaan we door:

$$y_3 = 2 \cdot 2,392 + 9 = 13,784 \quad x_4 = \sqrt[3]{y_3} = \sqrt[3]{13,784} \approx 2,397$$

$$y_4 = 2 \cdot 2,397 + 9 = 13,794 \quad x_5 = \sqrt[3]{y_4} = \sqrt[3]{13,794} \approx 2,398$$

Met 2,398 is de gevraagde wortel reeds in drie decimalen nauwkeurig bepaald. Voor de bepaling van de derdemachtswortels is gebruik gemaakt van een logaritmentafel. De toegepaste methode heet *iteratiemethode*. Ze wordt ook toegepast bij transcendente (d.z. niet-algebraïsche) vergelijkingen. In de boeken over numerieke analyse* wordt deze methode uitvoerig beschreven.

Opmerking 1:

De meer algemene derdegraadsvergelijking:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (a_k \text{ reëel})$$

is door de substitutie $x = \xi - \frac{1}{3}a_1$ te herleiden tot:

$$\xi^3 + p\xi + q = 0$$

Opmerking 2:

De wortels van algebraïsche vergelijkingen van de graad 5 of hoger, laten zich in het algemeen niet uitdrukken in de coëfficiënten van de vergelijking door middel van wortelvormen.

* Zie bijvoorbeeld:

B. Noble, *Numerical methods 1 en 2* (Oliver and Boyd).

G. M. Phillips and P. J. Taylor. *Theory and applications of Numerical Analysis* (Academic Press).

125 Complexe wortels

De niet-reële wortels van een algebraïsche vergelijking met reële coëfficiënten vindt men door de complexe veranderlijke z te schrijven als $x + iy$ (x en y reëel). De vergelijking:

$$\sum_{k=0}^n a_k(x + iy)^{n-k} = 0$$

is dan te schrijven als:

$$P_1(x, y) + iP_2(x, y) = 0$$

waarin P_1 en P_2 veeltermen in x en y zijn met reële coëfficiënten. De gemeenschappelijke snijpunten van de krommen met de vergelijkingen, resp.:

$$P_1(x, y) = 0 \text{ en } P_2(x, y) = 0$$

bepalen alle wortels van de gegeven vergelijking, zowel de niet-reële als de reële ($y = 0$).

Als voorbeeld bepalen we de wortels van:

$$z^3 - 2z - 9 = 0$$

Stellen we $z = x + iy$, dan volgt:

$$(x + iy)^3 - 2(x + iy) - 9 = x^3 - 3xy^2 - 2x - 9 + i(3x^2y - y^3 - 2y) = 0$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 2x - 9 = 0 \\ y(3x^2 - y^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

De tweede vergelijking is te splitsen in:

$$y = 0 \text{ en } 3x^2 - y^2 - 2 = 0$$

De vergelijking $y = 0$ gecombineerd met $x^3 - 3xy^2 - 2x - 9 = 0$ geeft de reële wortel $z_1 \approx 2,398$ (zie par. 124).

Uit de tweede vergelijking volgt $y^2 = 3x^2 - 2$. Substitueert men dit in

$$x^3 - 3xy^2 - 2x - 9 = 0$$

dan vindt men:

$$x \approx -1,199$$

De bijbehorende y -waarden zijn 1,521 en -1,521, zodat de niet-reële wortels zijn:

$$z_2 \approx -1,199 + i \cdot 1,521, \quad z_3 \approx -1,199 - i \cdot 1,521$$

Deze wortels zijn toegevoegd complex, want de coëfficiënten van de gegeven vergelijking zijn reëel (zie par. 51).

Numerieke integratie en differentiatie. Hyperbolische functies

126 De interpolatieformule van Lagrange

In par. 105 hebben we ons bij de formule van Taylor de opgave gesteld een veelterm te vinden, die een benadering geeft van de waarden van een functie in de onmiddellijke omgeving van een punt waarin afgeleiden van voldoende hoogte bestaan.

We behandelen nu een soortgelijk probleem.

Het komt vaak voor dat van een functie f , hetzij door meting, hetzij door berekening, slechts een eindig aantal waarden $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ bekend zijn. We willen nu deze functie benaderen door een veeltermfunctie φ_n van de n^{de} graad, die in de punten x_0, x_1, \dots, x_n dezelfde waarden aanneemt als f . Deze probleemstelling heet *interpolatie* door een veelterm.

Er bestaat steeds een éénduidig bepaalde veelterm $\varphi_n(x)$ met de bovengenoemde eigenschap. Zou er behalve $\varphi_n(x)$ nog een veelterm $\psi_n(x)$ bestaan van de n^{de} graad, dan zou de veelterm $\theta_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x)$, die ook van de n^{de} graad is, wegens $\theta_n(x_i) = \varphi_n(x_i) - \psi_n(x_i) = 0$ de $(n + 1)$ nulpunten x_i hebben en dus identiek gelijk zijn aan 0, zodat $\varphi_n(x) = \psi_n(x)$.

De veeltermfunctie φ_n kunnen we als een benadering van de functie f nemen. De praktische betekenis van deze veeltermen voor verschillende functies bestaat daarin dat zij vele klassen van belangrijke functies met een gewenste nauwkeurigheid bij benadering kunnen voorstellen.

Een veelterm $\varphi_n(x)$ van de n^{de} graad die de nulpunten x_1, x_2, \dots, x_n heeft kan men voorstellen door:

$$\varphi_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

waarin a_0 nog onbepaald is. De waarde van a_0 kan men vastleggen door de eis dat $\varphi(x)$ in $x = x_0$ de waarde $f(x_0)$ moet hebben. In dat geval is dus:

$$f(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)$$

of:

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

zodat de functie gedefinieerd door:

$$f(x_0)L_0(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

voor $x = x_0$ de waarde $f(x_0)$ aanneemt, en in x_1, x_2, \dots, x_n gelijk is aan nul. Evenzo vormt men de veelterm:

$$f(x_1)L_1(x) = f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

die nul is voor $x = x_0, x_2, \dots, x_n$, en $f(x_1)$ voor $x = x_1$ enz.

Een veelterm die aan de gestelde voorwaarden voldoet is dus:

$$\varphi_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x) \quad (126.1)$$

met:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (126.2)$$

De veeltermen $L_i(x)$ noemt men de *veeltermen van Lagrange* behorende bij de punten x_0, x_1, \dots, x_n . Zij bezitten de volgende eigenschappen:

$$L_i(x_k) = 0 \text{ voor } k \neq i$$

$$L_i(x_k) = 1 \text{ voor } k = i \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

De formule (126.1) noemt men de *interpolatieformule van Lagrange* (1736–1813).

In verband met het aantal basispunten, dat wordt genomen, onderscheidt men de volgende interpolaties:

Lineaire interpolatie ($n = 1$). De kromme met vergelijking $y = f(x)$ wordt tussen twee van haar punten door een rechte lijn benaderd.

Kwadratische interpolatie ($n = 2$). De kromme met vergelijking $y = f(x)$ wordt tussen drie van haar punten door een parabool met de as evenwijdig aan de y -as benaderd.

Kubische interpolatie ($n = 3$).

Parabolische interpolatie van de i^{de} orde ($n = i$).

Zeer dikwijls komt het voor dat de functiewaarden $f(x)$ over het interval $[a, b]$ in $(n + 1)$ equidistante punten $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) gegeven zijn, waarbij

$x_0 = a$ en $x_n = b$ is. De grootte $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b - a}{n}$ noemt men de *stap-grootte*.

Stelt men in dit geval $x = x_0 + sh$, dan gaat $L_i(x)$ over in:

$$L_i(x) = \frac{s(s-1)\dots(s-i+1)(s-i-1)\dots(s-n)}{i(i-1)\dots 1 (-1)\dots(i-n)} = \prod_{k=0, \neq i}^n \frac{s-k}{i-k} = L_i^*(s) \quad (126.3)$$

De interpolatieformule van Lagrange wordt veelal gebruikt om in tabellen tussen-gelegen functiewaarden te interpoleren. Daarvoor gebruikt men meestal de *kwadratische- of driepuntsinterpolatieformule*.

Zo vindt men voor $n = 2$ uit (126.3):

$$L_0^*(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(s-1)(s-2)$$

$$L_1^*(s) = \frac{s(s-2)}{1(-1)} = -s(s-2)$$

$$L_2^*(s) = \frac{s(s-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}s(s-1)$$

Met behulp van (126.1) verkrijgt men:

$$\varphi_2^*(s) = \frac{1}{2}(s-1)(s-2)f_0 - s(s-2)f_1 + \frac{1}{2}s(s-1)f_2 \quad (126.4)$$

waarin $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2$) gesteld is.

Substitueert men $s-1 = S$, dan is $x = x_0 + s \cdot h = x_1 + (s-1)h = x_1 + Sh$, en gaat (126.4) over in:

$$\varphi_2^*(S) = \frac{1}{2}S(S-1)f(x_1-h) - (S^2-1)f(x_1) + \frac{1}{2}S(S+1)f(x_1+h) \quad (126.5)$$

een formule die men in de meeste literatuur over interpolatie vindt.

Voorbeeld

Gegeven:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$. In een tabel waarbij het argument x met 0,1 aangroeit zijn de functiewaarden gegeven.

Gevraagd:

Een benadering voor $\sqrt[3]{1,23}$.

Oplossing:

We kiezen $x_0 = 1,1$, $x_1 = 1,2$, $x_2 = 1,3$, en lezen af: $f_0 = 1,03228$, $f_1 = 1,06266$, $f_2 = 1,09139$. $h = 0,1$. Uit $x = x_0 + sh$ of $1,23 = 1,1 + 0,1s$ volgt $s = 1,3$ ($S = 0,3$), zodat volgens (126.4):

$$\varphi_2(1,23) = -0,105f_0 + 0,91f_1 + 0,195f_2 = 1,07145$$

De juiste waarde is 1,07144 in 5 decimalen nauwkeurig en verschilt dus één eenheid in de vijfde decimaal met de geïnterpoleerde waarde.

127 Schatting van de fout bij interpolatie

Als men $f(x)$ benadert door de veelterm uit (126.1) is de fout bij gegeven x :

$$E(x) = f(x) - \varphi_n(x)$$

Voor de schatting van de fout veronderstellen we dat f en de nodige afgeleiden van f in het beschouwde interval bestaan. Door de keuze van $\varphi_n(x)$ weten we dat $E(x) = 0$ voor $x = x_0, x_1, \dots, x_n$.

Dit laatste geldt ook voor de uitdrukking:

$$g(x) = C \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

waarin C een constante is. Daar $g(x)$ geen andere nulpunten heeft dan de genoemde, kunnen we C zodanig kiezen dat $E(x') = g(x')$ voor een willekeurig gekozen waarde x' van het interval (x_0, x_n) . We veronderstellen de punten x_0, x_1, \dots, x_n, x' alle verschillend. Voor al deze punten geldt dan $E(x) - g(x) = 0$. Daar de verschilfunctie $x \mapsto E(x) - g(x)$ in het interval $[x_0, x_n]$ een voldoende aantal malen differentieerbaar is, moet de eerste afgeleide ervan volgens de stelling van Rolle (par. 59) nul worden voor $n + 1$ punten x'_0, x'_1, \dots, x'_n gelegen tussen de punten x_0, x_1, \dots, x_n , en x' . De tweede afgeleide van de verschilfunctie zal dan nul worden voor n punten $x''_0, x''_1, \dots, x''_{n-1}$ gelegen tussen de punten x'_0, x'_1, \dots, x'_n . Zo doorgaande kunnen we besluiten tot het bestaan van een punt $x_0^{(n+1)} = \xi$, gelegen tussen x_0 en x_n , waar de $(n + 1)^e$ afgeleide van de verschilfunctie nul wordt. Derhalve is:

$$0 = E^{(n+1)}(\xi) - g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n + 1)!C$$

zodat:

$$C = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Nu is C zodanig gekozen dat voor x' geldt $E(x') = g(x')$. De fout in het punt $x = x'$ is dus:

$$E(x') = g(x') = C \prod_{i=0}^n (x' - x_i) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x' - x_i)$$

Daar x' geheel willekeurig gekozen was in (x_0, x_n) , geldt dus algemeen:

$$E(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (x_0 < \xi < x_n) \quad (127.1)$$

128 Numerieke integratie met behulp van de veeltermen van Lagrange

In de paragrafen 33, 34 en 35 hebben we reeds enkele methoden voor numerieke integratie besproken. In deze paragraaf zullen we de numerieke benadering van de integraal

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

bespreken door gebruik te maken van de interpolatieveeltermen van Lagrange. Deze methode is een uitbreiding van de vroeger besprokene. Tevens zullen we dan een schatting van de gemaakte fout aangeven.

We denken ons weer de functiewaarden van f in $(n + 1)$ equidistante punten $x_i = a + i \cdot h$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) gegeven, waarbij $x_0 = a$, $x_n = b$ en $h = \frac{b - a}{n}$ is.

Door de formules (126.1) en (126.3) toe te passen verkrijgen we de volgende benadering van de integraal:

$$\begin{aligned} I &\approx \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_0^n \varphi_n(a + hs) \frac{dx}{ds} ds \\ &= \int_0^n \left\{ \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^*(s) \right\} h ds \\ &= h \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_0^n L_i^*(s) ds \end{aligned}$$

Stelt men $C_i = \int_0^n L_i^*(s) ds$, dan is dus:

$$I \approx h \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) \quad (128.1)$$

De C_i zijn getalcoëfficiënten en zijn eenvoudig te berekenen. Zo is bijv.: voor $n = 1$:

$$C_0 = \int_0^1 \frac{s-1}{-1} ds = \frac{1}{2}; \quad C_1 = \int_0^1 \frac{s}{1} ds = \frac{1}{2}$$

voor $n = 2$:

$$C_0 = \int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)(-2)} ds = \frac{1}{3}; \quad C_1 = \int_0^2 \frac{s(s-2)}{1(-1)} ds = \frac{4}{3}; \quad C_2 = \int_0^2 \frac{s(s-1)}{2 \cdot 1} ds = \frac{1}{3}$$

De grootte van de fout die bij deze numerieke integratie ontstaat verkrijgt men uit de fout $E(x)$ in formule (127.1) door integratie.

$$\bar{E} = \int_a^b E(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$$

Past men hier weer de substitutie $x = x_0 + sh$ toe, dan vindt men:

$$\bar{E} = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n s(s-1) \dots (s-n) f^{(n+1)}(\xi) ds$$

Men moet hierbij bedenken dat ook ξ afhangt van s . Een nauwkeurige schatting van deze laatste integraal is niet op eenvoudige wijze te geven. We moeten hiertoe verwijzen naar uitgebreidere boeken over numerieke integratie en zullen nu alleen de resultaten vermelden. Men vindt voor *oneven* n :

$$\bar{E} = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_0^n s(s-1) \dots (s-n) ds \quad (128.2)$$

voor *even* n :

$$\bar{E} = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!} \int_0^n s^2(s-1) \dots (s-n) ds \quad (128.3)$$

Hierbij liggen de punten ξ_1 en ξ_2 in het interval $\langle a, b \rangle$.

Door toepassing van de formules (128.1), (128.2) en (128.3) ontstaan voor $n = 1, 2, 3, 4$ de 2-, 3-, 4- en 5-punts-integratieformules met bijbehorende restterm. $n = 1$ (de 2-puntsformule; regel van Euler):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{1}{2}h(f_0 + f_1) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi_1)$$

$n = 2$ (de 3-puntsformule; regel van Simpson):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{1}{90}h^5 f^{IV}(\xi_2)$$

$n = 3$ (de 4-puntsformule; „3/8” regel):

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3}{80}h^5 f^{IV}(\xi_3)$$

$n = 4$ (de 5-puntsformule):

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2}{45}h(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8}{945}h^7 f^{VI}(\xi_4)$$

Hierin is steeds $f_i = f(x_i)$ gesteld en $x_0 < \xi_i < x_n$. De integratie over een even aantal intervallen (oneven aantal punten) leidt dus tot een grotere nauwkeurigheid dan die over een oneven aantal intervallen. De regel van Simpson verdient dan ook in het algemeen vanwege haar eenvoud en nauwkeurigheid de voorkeur.

We merken nog op dat de som van de coëfficiënten C_i gelijk moet zijn aan n , omdat de formule (128.1) met het gelijkteken geldt, indien we voor f een constante nemen.

Wanneer de numerieke integratie over een groot interval $[a, b]$ wordt uitgevoerd, is het aan te bevelen om het interval in een groot aantal intervallen van gelijke lengte te verdelen, en de integratie ofwel over elk interval afzonderlijk met de tweepuntsmethode, ofwel voor twee intervallen met driepuntsmethode, of voor drie intervallen met de vierpuntsmethode uit te voeren. In het eerste geval verkrijgt men de *trapezium-*

regel (par. 34).

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left\{ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right\} \quad (128.4)$$

Verdeelt men $[a, b]$ in een even aantal ($n = 2m$) intervallen van gelijke lengte, en past men paarsgewijze de regel van Simpson toe, dan verkrijgt men de *parabolische regel* (par. 35):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} h \{ f_0 + f_{2m} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}) \} \quad (128.5)$$

Wordt $[a, b]$ in $n = 3m$ intervallen van gelijke lengte verdeeld, dan geldt voor de „3/8 regel” de formule:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3}{8} h \{ f_0 + f_{3m} + 3(f_1 + f_2 + \dots + f_{3m-1}) - (f_3 + f_6 + \dots + f_{3m-3}) \} \quad (128.6)$$

De totale fout bij het gebruik van de trapeziumregel is gelijk aan de som van de fouten van de afzonderlijke intervallen.

$$\bar{E}_t = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n h^3 f''(\xi_i)$$

Hierin is $h = \frac{b-a}{n}$ en $x_0 + (i-1)h < \xi_i < x_0 + i \cdot h$, zodat:

$$\bar{E}_t = -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)}{n}$$

Daar we f'' continu verondersteld hebben in $[a, b]$ ligt er ten minste één waarde ξ in $\langle a, b \rangle$, waarvoor $f''(\xi)$ gelijk is aan de gemiddelde waarde $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)$ (par. 14). Derhalve is:

$$\bar{E}_t = -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

Evenzo vindt men voor de parabolische regel de foutenschatting:

$$\bar{E}_2 = -\frac{1}{180} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{IV}(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

en voor de „3/8” regel:

$$\bar{E}_{\frac{3}{8}} = -\frac{1}{80} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{IV}(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

Toepassing:

We willen nogmaals evenals in de paragrafen 33...35 de integraal $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ numeriek berekenen met behulp van de drie integratieformules (128.4), (128.5) en (128.6), en gaan na hoe groot de afwijkingen met de werkelijke waarde zijn, doch verdelen nu het integratie-interval in een groter aantal (12) gelijke intervallen ($h = 1/12$). We verkrijgen dan de volgende uitkomsten bij gebruikmaking van:

1 de trapeziumregel:

$$I \approx \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right\} = 0,693581$$

2 de parabolische regel:

$$I \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) + 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right) \right\} = 0,693149$$

3 de „3/8” regel:

$$I \approx \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} \right) \right\} = 0,693151$$

De werkelijke waarde is $\ln 2 = 0,693147$ in 6 decimalen nauwkeurig zodat de afwijkingen achtereenvolgens zijn:

$$E_1 \approx -0,000434; E_2 \approx -0,000002; E_3 \approx -0,000004$$

De parabolische regel geeft dus de kleinste fout, hetgeen ook te verwachten was.

129 Numerieke differentiatie

Als de waarden van een functie f slechts in tabelvorm gegeven zijn, is het analytisch proces van differentiatie als limiet van een differentiequotient niet meer bruikbaar. In dit geval ligt het voor de hand om $f(x)$ door een benaderingsveelterm $\varphi_n(x)$ te benaderen, en $\varphi_n'(x)$ als benadering voor $f'(x)$ te kiezen. Voor de veelterm $\varphi_n(x)$ kiest men dan weer de interpolatieveelterm van Lagrange.

Als voorbeeld nemen wij de derde-graadsveelterm van Lagrange met de equidistante punten x_0, x_1 , en x_2 en de bijbehorende functiewaarden f_0, f_1 en f_2 . De stapgrootte is $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$. Volgens (126.4) is dan:

$$f(x) \approx \varphi_2(x) = \frac{1}{2}(s-1)(s-2)f_0 - s(s-2)f_1 + \frac{1}{2}s(s-1)f_2$$

waarin $x = x_0 + sh$ en dus $s = \frac{1}{h}(x - x_0)$ is gesteld.

Als we s^* definiëren door $s^*(x) = \frac{1}{h}(x - x_0)$ (dan geldt dus $s^*(x) = s$), dan wordt de afgeleide $f'(x)$ benaderd aldus:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &\approx \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{d\varphi_2}{ds} \cdot \frac{ds^*}{dx} \\ &= \left\{ (s - \frac{3}{2})f_0 - 2(s - 1)f_1 + (s - \frac{1}{2})f_2 \right\} \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Voor de fout in de benadering geldt volgens (127.1):

$$\begin{aligned} E(x) &= f(x) - \varphi_2(x) \\ &= \frac{1}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f'''(\xi) \\ &= \frac{1}{3!}s(s - 1)(s - 2)h^3f'''(\xi) \end{aligned}$$

waarin $x_0 < \xi < x_2$.

Voor de differentiatie van E moeten we bedenken, dat ξ ook afhangt van s . Derhalve is:

$$\begin{aligned} E'(x) &= \frac{dE}{dx} \\ &= \frac{dE}{ds} \cdot \frac{ds^*}{dx} \\ &= \left\{ (\frac{1}{2}s^2 - s + \frac{1}{3})h^3f'''(\xi) + \frac{1}{3!}s(s - 1)(s - 2)h^3f^{IV}(\xi) \frac{d\xi}{ds} \right\} \frac{1}{h} \end{aligned}$$

De tweede term in het rechterlid verdwijnt in de punten x_0 , x_1 en x_2 , waarvoor $s = 0$, 1 en 2 is. In deze punten verkrijgen we een eenvoudige schatting voor $E'(x)$. Samenvattend gelden voor deze waarden de formules:

$$f'_0 = (-\frac{3}{2}f_0 + 2f_1 - \frac{1}{2}f_2) \frac{1}{h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_1)$$

$$f'_1 = (-\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_2) \frac{1}{h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_2)$$

$$f'_2 = (\frac{1}{2}f_0 - 2f_1 + \frac{3}{2}f_2) \frac{1}{h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_3)$$

waarin $f'_i = f'(x_i)$ is gesteld.

De middelste uitdrukking geeft in het algemeen de geringste fout, en verdient dus de voorkeur. In ieder van de benaderingsuitdrukkingen is de som van de coëfficiënten

gelijk aan nul. Dit is eigenlijk vanzelfsprekend, als we bedenken dat voor een constante functie de fout nul is en de afgeleide functie identiek nul moet zijn.

Op overeenkomstige wijze kunnen ook voor hogere afgeleiden benaderingsuitdrukkingen worden verkregen.

130 De hyperbolische functies

Bij vele berekeningen maakt men gebruik van de functies sinus hyperbolicus (\sinh) en cosinus hyperbolicus (\cosh), die reeds in par. 57 zijn gedefinieerd.

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De grafiek van $y = \sinh x$ is geschetst in fig. 106a, die van $y = \cosh x$ in fig. 106b.

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \cosh x$$

De sinus hyperbolicus is dus een oneven functie, de cosinus hyperbolicus een even functie. De grafiek van $y = \sinh x$ vertoont dus symmetrie t.o.v. O, die van $y = \cosh x$ vertoont symmetrie t.o.v. de y -as.

Voor de afgeleiden geldt:

$$D \sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

$$D \cosh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

Fig. 106a

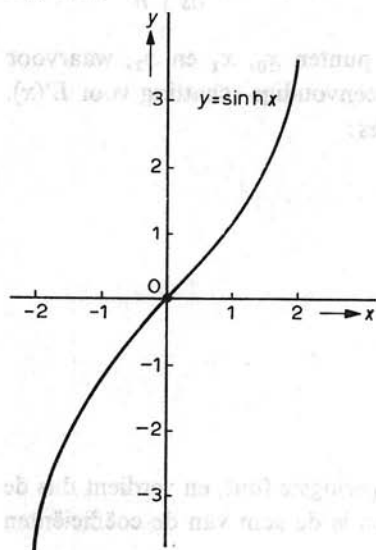
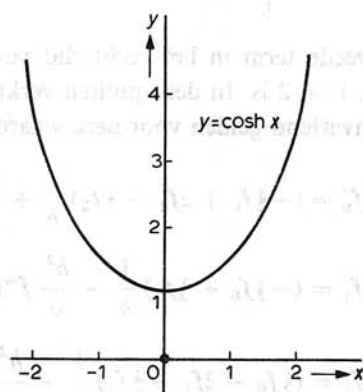


Fig. 106b



In overeenstemming met de goniometrische functies definieert men de tangens hyperbolicus (\tanh) als quotiënt van sinus hyperbolicus en cosinus hyperbolicus. Daar $\sinh x$ en $\cosh x$ gedefinieerd zijn voor iedere x en $\cosh x \neq 0$ voor iedere x , is $\tanh x$ gedefinieerd voor iedere x . Omdat $\sinh x$ oneven is en $\cosh x$ even, is $\tanh x$ oneven.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(-x) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = -1$$

De grafiek van $y = \tanh x$ heeft dus twee horizontale asymptoten, nl. de rechten met vergelijking $y = 1$ en $y = -1$. Voor de afgeleide geldt:

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{d}{dx} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

De functie $x \mapsto \tanh x$ is dus overal stijgend. De grafiek van $y = \tanh x$ is geschetst in fig. 106c.

De functie $x \mapsto \coth x$ wordt gedefinieerd als $x \mapsto \frac{1}{\tanh x}$.

$$\frac{d}{dx} \coth x = \frac{d}{dx} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

Voor de hyperbolische functies bestaan er optellingstheorema's die grote overeenkomst vertonen met die voor de goniometrische functies.

Uit $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ volgt:

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x \quad (130.1)$$

Nu is:

$$\cosh(a + b) = \frac{e^a e^b + e^{-a} e^{-b}}{2}, \quad \sinh(a + b) = \frac{e^a e^b - e^{-a} e^{-b}}{2} \quad (130.2)$$

Fig. 106c

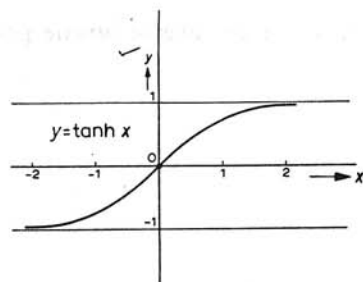
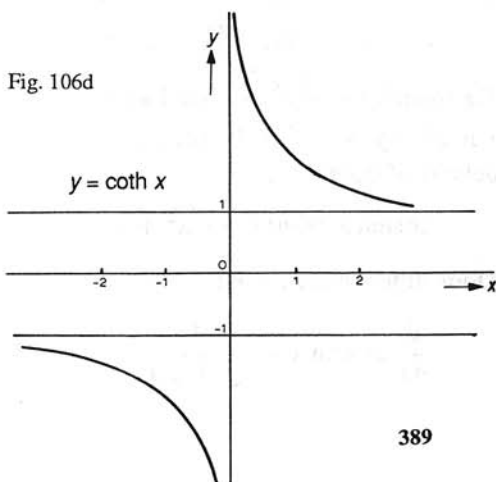


Fig. 106d



Vult men in (130.2) voor e^a , e^{-a} , e^b , e^{-b} de waarden in die uit (130.1) volgen, dan vindt men:

$$\begin{cases} \cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\ \sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \end{cases} \quad (130.3)$$

Door b te vervangen door $-b$, volgt uit (130.3):

$$\begin{cases} \cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\ \sinh(a-b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b \end{cases} \quad (130.4)$$

Door deling volgt uit (130.3) en (130.4):

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}, \quad \tanh(a-b) = \frac{\tanh a - \tanh b}{1 - \tanh a \tanh b}$$

Stelt men $b = a$, dan vindt men uit het bovenstaande de verdubbelingsformules:

$$\begin{cases} \sinh 2a = 2 \sinh a \cosh a \\ \cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a \\ \tanh 2a = \frac{2 \tanh a}{1 + \tanh^2 a} \end{cases} \quad (130.5)$$

terwijl uit de eerste formule van (130.4) volgt:

$$\cosh 0 = 1 = \cosh^2 a - \sinh^2 a \quad (130.6)$$

131 De inversen der hyperbolische functies

De functie $x \mapsto \sinh x$ is gedefinieerd voor iedere x , continu en monotoon stijgend, de functiewaardenverzameling is $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$. De functie heeft dus een inverse, die gedefinieerd is op $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$. Deze functie draagt de naam van *area sinus hyperbolicus* (ar sinh).

Uit $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ volgt:

$$e^x - e^{-x} = 2y, \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0, \Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

De wortel $y - \sqrt{y^2 + 1}$ voldoet niet, want $e^x > 0$.

Uit $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ volgt: $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$, dus is de inverse functie gedefinieerd door:

$$\text{ar sinh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Door differentiëren volgt:

$$\frac{d}{dx} \text{ar sinh } x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

De naam area duidt op een oppervlakte. Welke oppervlakte dit is, leiden wij als volgt af. In fig. 107 is de hyperbooltak met vergelijking $y = \sqrt{t^2 + 1}$ getekend. Deze wordt door de rechten met vergelijking $t = -x$ en $t = x$ in de punten P en Q gesneden. We zullen nu aantonen dat de oppervlakte A van het vlakdeel begrensd door de kromme PQ en de rechten OP en OQ gelijk is aan $\text{ar sinh } x$. Dit vlakdeel is te beschouwen als het verschil van PQSR en de twee driehoeken ORP en OSQ. De oppervlakte van PQSR is:

$$I = \int_{-x}^x \sqrt{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt$$

Voor de berekening van deze laatste onbepaalde integraal passen we de substitutieregel toe en stellen $t = \sinh u$. Uit (130.6) volgt dan:

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + 1} &= \sqrt{\sinh^2 u + 1} \\ &= \cosh u \end{aligned}$$

en:

$$dt = \cosh u du$$

Dus als we stellen $x = \sinh y$ ofwel $y = \text{ar sinh } x$, dan geldt:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^y \cosh^2 u du \\ &= 2 \int_0^y \frac{1 + \cosh 2u}{2} du = y + \frac{1}{2} \sinh 2y \\ &= y + \sinh y \cdot \cosh y \end{aligned}$$

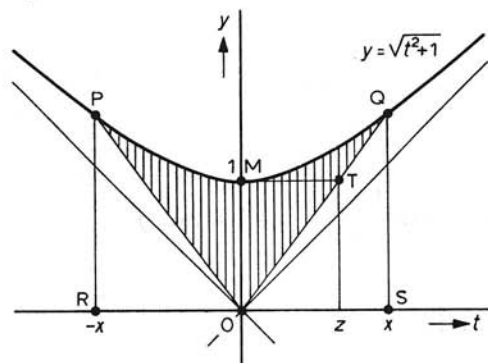
dus:

$$I = \text{ar sinh } x + x\sqrt{1 + x^2} \quad (131.1)$$

De gezamenlijke oppervlakte van de driehoeken ORP en OSQ is:

$$x \cdot y = x\sqrt{1 + x^2} \quad (131.2)$$

Fig. 107



Uit (131.1) en (131.2) volgt:

$$A = \operatorname{ar sinh} x$$

De functie $x \mapsto \cosh x$ is gedefinieerd voor iedere x , continu, monotoon stijgend voor $x > 0$ en dalend voor $x < 0$, de functiewaardenverzameling is $[1, \rightarrow)$. Op het interval $[0, \rightarrow)$ heeft de functie een inverse, de *area cosinus hyperbolicus* (ar cosh). Uit $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ volgt:

$$e^x + e^{-x} = 2y \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0, \Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Hierbij is de positieve wortel te kiezen, omdat $x \geq 0$, dus $e^x \geq 1$ moet zijn, dus $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ ($y \geq 1$). De inverse functie is dus gedefinieerd door:

$$\operatorname{ar cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

Door differentiëren volgt:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ar cosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1)$$

Drukt men de oppervlakte van OPQ (fig. 107) uit in de ordinaat y van Q, dan volgt uit $y = \sqrt{x^2 + 1}$, dat $x = \sqrt{y^2 - 1}$, als we $x \geq 0$ kiezen, en is:

$$\operatorname{ar sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \operatorname{ar cosh} y$$

Er geldt dus:

$$\operatorname{ar sinh} x = \operatorname{ar cosh} \sqrt{x^2 + 1} \quad (x \geq 0) \quad (131.3)$$

Uit (131.3) volgt:

$$\operatorname{ar cosh} x = \operatorname{ar sinh} \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geq 1) \quad (131.4)$$

De functie $x \mapsto \tanh x$ is gedefinieerd voor iedere x , continu en monotoon stijgend, de functiewaardenverzameling is $(-1, 1)$. De functie heeft dus een inverse, de *area tangens hyperbolicus* (ar tanh).

Uit:

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

volgt:

$$ye^{2x} + y = e^{2x} - 1, \Rightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}, \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} \quad (-1 < y < 1)$$

Dus:

$$\operatorname{ar tanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

Voor de oppervlakte A van het vlakdeel OPQ (fig. 107) is reeds afgeleid; $A = \arcsinh x = \operatorname{arccosh} y$. Hieruit volgt:

$$x = \sinh A, \quad y = \cosh A$$

dus:

$$z = \frac{x}{y} = \tanh A$$

We leiden hieruit af $A = \operatorname{arctanh} z$, waarbij z de abscis is van het punt T van de lijn OQ, waarvoor de ordinaat 1 is. Men vindt dus T door in het laagste punt M van de hyperbooltak de raaklijn aan de hyperbool te trekken en deze te snijden met OQ.

132 De formule van Stirling (James Stirling 1692–1770)

Zonder rekenmachine is de berekening van $n!$ voor grote n zeer tijdrovend. Stirling heeft een benadering van $n!$ afgeleid die voor eenvoudige berekeningen zeer geschikt is.

Formule van Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1)$$

De factor $e^{\frac{\theta}{12n}}$ ligt tussen 1 en $e^{\frac{1}{12n}}$, welk laatste getal voor „grote” n „zeer dicht bij” 1 ligt.

Voor de afleiding van de genoemde formule gaan we uit van de in par. 107 gevonden ontwikkeling:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{p} &= \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3(2p+1)^3} + \dots + \\ &+ \frac{1}{(2n+1)(2p+1)^{2n+1}} + R_{2n+1}(p) \end{aligned} \quad (132.1)$$

waarin:

$$|R_{2n+1}(p)| < \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{4p(p+1)(2p+1)^{2n+1}} \quad (132.2)$$

Breken we in (132.1) het rechterlid af na de eerste term ($n = 0$), dan volgt uit (132.1) en (132.2):

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{p} = \frac{1}{2p+1} + \frac{\theta}{12p(p+1)(2p+1)} \quad (0 < \theta < 1)$$

Hieruit volgt verder:

$$(p + \frac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) = 1 + \frac{\theta}{12p(p+1)}$$

$$\ln \frac{\left(1 + \frac{1}{p} \right)^{p+\frac{1}{2}}}{e} = \frac{\theta}{12p(p+1)}$$

Nemen we voor p het natuurlijk getal n , dan is dus:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}}}{e} = e^{\frac{\theta}{12n(n+1)}} \quad (132.3)$$

We beschouwen de rij $\{u_n\}$, waarvoor de algemene term is:

$$u_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad (132.4)$$

Voor deze rij volgt uit (132.3):

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}}}{e} = e^{\frac{\theta}{12n(n+1)}} = e^{\frac{\theta}{12n}} \cdot e^{\frac{-\theta}{12(n+1)}}$$

en dus:

$$u_n e^{\frac{-\theta}{12n}} = u_{n+1} e^{\frac{-\theta}{12(n+1)}} \quad (132.5)$$

Omdat:

$$e^{\frac{-\theta}{12n}} < e^{\frac{-\theta}{12(n+1)}}$$

is:

$$u_n > u_{n+1}$$

De rij $\{u_n\}$ is monotoon dalend, en omdat de termen positief zijn is ze begrensd; ze heeft dus een limiet L .

Schrijven we voor (132.5):

$$u_n e^{-\frac{1}{12n}} \cdot e^{\frac{1-\theta}{12n}} = u_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} \cdot e^{\frac{1-\theta}{12(n+1)}}$$

dan volgt, omdat:

$$e^{\frac{1-\theta}{12n}} > e^{\frac{1-\theta}{12(n+1)}}$$

dat:

$$u_n e^{-\frac{1}{12n}} < u_{n+1} e^{\frac{1}{12(n+1)}} \quad (132.6)$$

De rij $\{u_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ is blijkens (132.6) monotoon stijgend, en heeft de limiet L omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{1}{12n}\right) = 1.$$

Uit (132.5) en (132.6) volgt:

$$u_n e^{-\frac{1}{12n}} < L < u_n$$

zodat L van u_n verschilt in een factor die ligt tussen 1 en $\exp\left(\frac{-1}{12n}\right)$. Hieruit volgt:

$$L = u_n e^{\frac{-\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1)$$

of:

$$u_n = L e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1)$$

Onder toepassing van (132.4) vinden we:

$$u_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = L e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (132.7)$$

zodat:

$$n! = L n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (132.8)$$

Hiermede is de formule van Stirling gevonden op de grootte van L na. Deze constante is als volgt te berekenen. Uit (132.7) volgt:

$$u_n^2 = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} = L^2 e^{\frac{\theta}{6n}}$$

$$u_{2n} = \frac{(2n)! e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = L e^{\frac{\theta_1}{24n}}$$

In de tweede formule is θ_1 in het algemeen niet gelijk aan θ , omdat θ van n afhangt.

$$\frac{u_n^2}{u_{2n}} = \frac{(n!)^2 (2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)! n^{2n+1}} = \frac{(n!)^2 2^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)! n^{\frac{1}{2}}} = L e^{\frac{\theta}{6n} - \frac{\theta_1}{24n}} \quad (132.9)$$

(132.9) geeft een uitdrukking voor L , waarin, behalve in de „correctiefactor”, geen exponentiële functie meer voorkomt.

Werken we (132.9) uit, dan vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^2 (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)^{2\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) 2n \cdot n^{\frac{1}{2}}} &= \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n)^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot n^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Door kwadratering en na rangschikking volgt:

$$L^2 e^{\frac{\theta}{3n} - \frac{\theta_1}{12n}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots (2n-2)2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots (2n-1)(2n-1)} \cdot 4$$

en:

$$L^2 = 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots (2n-2)2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots (2n-1)(2n-1)} \quad (132.10)$$

De limiet in het rechterlid, *het produkt van Wallis** genoemd, kan berekend worden met goniometrische integralen. In par. 69 is afgeleid:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x dx$$

Voor een even exponent volgt hieruit door herhaalde toepassing:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

en voor een oneven exponent:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

Op het interval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ is $\sin^{n+1} x < \sin^n x$, omdat $0 < \sin x < 1$ is. Dus is:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+2} x dx < \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x dx$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} < \\ < \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} < \frac{2n-1}{2n} \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (132.11)$$

Het eerste en het derde lid hebben het produkt $\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$ gemeen.

Vermenigvuldigen we (132.11) met het omgekeerde van dit produkt, dan volgt na rangschikking:

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \quad (132.12)$$

Voor $n \rightarrow \infty$ volgt uit (132.12):

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \quad (132.13)$$

* John Wallis (1616-1703).

Door toepassing van (132.13) volgt uit (132.10):

$$L^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = 2\pi$$

dus:

$$L = \sqrt{2\pi}$$

en volgens (132.8):

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1)$$

hetgeen te bewijzen was.

Bij praktische berekeningen verwaarloost men de factor $\exp \frac{\theta}{12n}$. Voor de meeste berekeningen is dit voldoende nauwkeurig voor $n > 100$.

Functies van twee veranderlijken

133 Het functiebegrip. Omgeving. Gebied

Tot nu toe hebben we ons uitsluitend bezig gehouden met functies van één veranderlijke. Een functie was daarbij gedefinieerd op een verzameling reële getallen als een voorschrift dat aan ieder element van het domein (de definitieverzameling) een reëel getal toevoegt.

In vele toepassingen van de analyse zullen we echter te maken hebben met functies van meer dan één veranderlijke. We zullen ons in dit hoofdstuk in hoofdzaak beperken tot functies van twee veranderlijken. De definitie van zulk een functie geschiedt op analoge wijze als bij een functie van één veranderlijke.

Functies van twee veranderlijken worden gedefinieerd op deelverzamelingen van het Cartesisch produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ van het lichaam der reële getallen met zichzelf.

Voorbeeld

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2, (x, y) \in \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

De functiewaarde wordt geschreven als $f(x, y)$.

Definitie

Een reële functie van twee veranderlijken is een voorschrift dat aan ieder element van een zekere deelverzameling van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ op éénduidige wijze een reëel getal toevoegt.

Wanneer men de functie aangeeft met f , en de desbetreffende deelverzameling van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aanduidt als $V_1 \times V_2$, dan geeft men deze situatie als volgt weer:

$$f: V_1 \times V_2 \mapsto \mathbb{R}$$

Analoog aan de situatie bij functies van één veranderlijke noemt men $V_1 \times V_2$ het domein of de definitieverzameling van f , en \mathbb{R} het codomein van f .

Wanneer $(x, y) \in V_1 \times V_2$ door f wordt afgebeeld in \mathbb{R} , dan geeft men het beeld aan met $f(x, y)$ en men schrijft dan:

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

of:

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Bijvoorbeeld:

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

Hier geldt dus $f(x, y) = x^2 + y^2$.

De verzameling van de beelden van alle elementen van $V_1 \times V_2$ onder de afbeelding f noemt men de waardenverzameling of het bereik van f . Notatie: $f(V_1 \times V_2)$, dus:

$$f(V_1 \times V_2) = \{f(x, y) \mid x, y \in V_1 \times V_2\}$$

Identificeert men de getallenparen (x, y) met punten met coördinaten t.o.v. een rechthoekig assenstelsel in het x, y -vlak, dan stelt $\{(x, y)\}$ ook een verzameling punten voor in dit vlak. We zullen dan ook in het vervolg de begrippen „getallenparen” en „punten” door elkaar gebruiken, evenals $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en het x, y -vlak.

Voor een nadere beschouwing van een domein definiëren we eerst enkele begrippen. Daarbij is $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\varepsilon > 0$.

Definitie

Onder een ε -omgeving van (x_0, y_0) verstaan we de verzameling van alle punten (x, y) , waarvoor geldt:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

Een dergelijke ε -omgeving wordt aangegeven door $\Omega(x_0, y_0, \varepsilon)$, of $\Omega(x_0, y_0)$, of als men (x_0, y_0) aangeeft met P : $\Omega(P, \varepsilon)$ of kortweg Ω_P .

Uit de definitie volgt: $(x_0, y_0) \in \Omega(x_0, y_0)$, dus het punt (x_0, y_0) behoort tot zijn omgeving $\Omega(x_0, y_0)$. Wanneer men (x_0, y_0) uit de ε -omgeving weglaat, krijgt men een verzameling die men een gereduceerde ε -omgeving van (x_0, y_0) noemt en aangeeft met $\Omega'(x_0, y_0, \varepsilon)$, etc. De bovengenoemde omgeving die (x_0, y_0) wél omvat noemt men ook wel een volle omgeving van (x_0, y_0) .

Definitie

Een punt P heet een inwendig punt van een verzameling V als er een ε -omgeving is van P die geheel tot V behoort.

Definitie

Een verzameling die uitsluitend uit inwendige punten bestaat, heet een open verzameling.

Zo is $V = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 9\}$ een open verzameling.

Definitie

Een open verzameling V die P bevat heet een omgeving (zonder meer) van P . Wordt P uitgezonderd van V , dan verkrijgt men een gereduceerde omgeving van P .

Definitie

Onder het complement in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ van V (kortweg het complement van V) verstaat men de verzameling van alle punten van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die niet tot V behoren.

Het complement van V wordt aangegeven door V^* , dus:

$$V^* = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | (x, y) \notin V\}$$

Zo is, als:

$$V = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 9\}$$

dus:

$$V^* = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 9\}$$

Definitie

Als Q een inwendig punt is van V^* , dan heet Q een uitwendig punt van V .

Definitie

Een verzameling V heet gesloten als V^* open is.

Zo is de verzameling $V = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ gesloten.

Opmerking 1:

Een verzameling is niet altijd open of gesloten. Zo is $V = \{(x, y) | 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}$ noch open, noch gesloten.

Opmerking 2:

De begrippen open en gesloten sluiten elkaar niet uit. Zo is $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ open, maar het complement van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nl. \emptyset (de lege verzameling), is open. Immers, alle punten

die tot \emptyset behoren zijn inwendig punt (\emptyset bevat nl. geen punten), dus is $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gesloten, maar dan is $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zowel open als gesloten. Hetzelfde geldt ook voor \emptyset .

Definitie

Onder een contactpunt P van een verzameling V verstaat men een punt met de eigenschap dat iedere omgeving van P een punt bevat dat tot V behoort.

Opmerking 3:

P hoeft zelf niet tot V te behoren. Bij $V = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ is $(1, 0)$ contactpunt, maar $(1, 0) \notin V$.

Men onderscheidt twee soorten contactpunten, nl. *geïsoleerde punten* en *verdichtingspunten*.

Het kan zijn dat $P \in V$, en dat er omgevingen van P zijn die als enig element van V het punt P zelf bevatten. In dat geval noemt men P een *geïsoleerd punt* van V . Zo is bij $V = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \cup \{2, 0\}$ het punt $(2, 0)$ een geïsoleerd punt van V . Als iedere omgeving van P een punt van V bevat dat van P verschilt, dan heet P een *verdichtingspunt* van V . Zo is bij $V = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ het punt $(0, 0)$ een verdichtingspunt hoewel $(0, 0) \notin V$. Bij $V = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ is ook $(0, 0)$ verdichtingspunt, maar nu $(0, 0) \in V$.

Definitie

Een randpunt P van een verzameling V is een punt met de eigenschap dat iedere omgeving van P een punt bevat dat tot V behoort en een punt dat niet tot V behoort. De verzameling van alle randpunten van V heet de rand van V .

Zo is:

$$V = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}; \text{ rand: } \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \notin V$$

$$V = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}; \text{ rand: } \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \subset V$$

$$V = \{(x, y) | 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}; \text{ rand: } \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\} \cup \\ \{(x, y) | x^2 + y^2 = 9\}$$

(behoort slechts gedeeltelijk tot V).

Opmerking 4:

Het is duidelijk dat een geïsoleerd punt altijd een randpunt is.

Definitie

Een deelverzameling V van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ heet *samenhangend* als ieder tweetal punten van V verbonden kan worden door een gebroken lijnstuk dat geheel in V verloopt.

Onder een gebroken lijnstuk dat $A_0(a_0, b_0)$ met $A_n(a_n, b_n)$ verbindt, verstaat men de vereniging van de segmenten.

$$[A_i, A_{i+1}] = \{a_i + \lambda(a_{i+1} - a_i), b_i + \lambda(b_{i+1} - b_i) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Definitie

Een gebied is een open samenhangende puntverzameling.

Zo zijn $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ en $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ gebieden (zie voorbeeld 1).

Voegt men aan een gebied zijn rand toe, dan verkrijgt men een gesloten verzameling (hetgeen wij hier niet zullen bewijzen). Een dergelijke verzameling noemt men een *afgesloten gebied*. Een afgesloten gebied is dus niet altijd een gebied (een linkerlimiet is ook geen limiet!).

Definitie

Een verzameling V heet *begrensd* als er een R bestaat, zodanig dat

$$V \subset \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$$

Kort gezegd: V heet *begrensd* als alle punten van V binnen een voldoende grote cirkel liggen.

Zo vormt het inwendige van een willekeurige vierhoek een begrensd gebied. Het gebied tussen de lijnen $x = -1$ en $x = 1$ is geen begrensd gebied.

Voorbeeld 1

De verzameling V_1 van punten (x, y) , waarvoor $x^2 + y^2 < 4$ is een gebied. Immers, als P binnen de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ ligt, bijv. op afstand a van 0 ($a < 2$), dan ligt de ε -omgeving van P ook geheel binnen de cirkel als $0 < \varepsilon < 2 - a$, terwijl elk tweetal punten binnen V_1 door een segment dat geheel binnen V_1 verloopt, is te verbinden (zie fig. 108).

Voorbeeld 2

De verzameling V_2 van punten (x, y) waarvoor $x^2 + y^2 \leq 4$ is geen gebied.

Een eenvoudige voorstelling van de functie f verkrijgt men door in een ruimtelijk

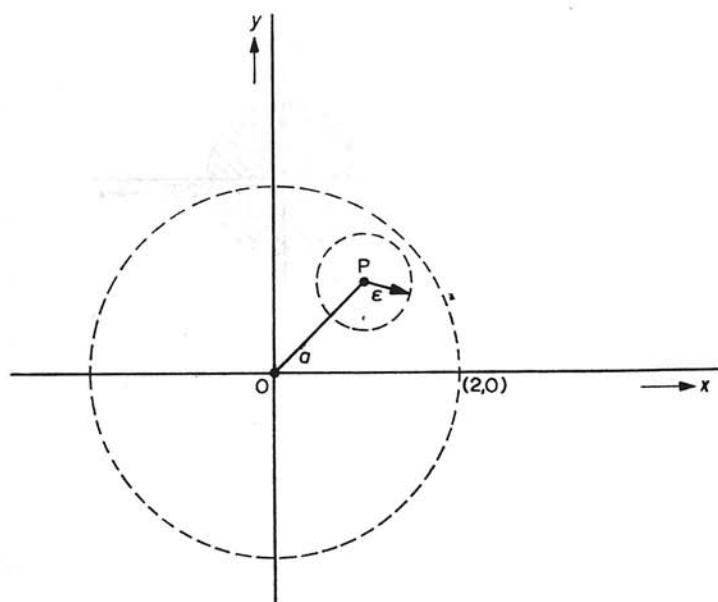


Fig. 108

rechthoekig coördinatenstelsel $Oxyz$ de punten $P(x, y, z)$ te tekenen, waarbij (x, y) uit het domein $G\{x, y\}$ in het x, y -vlak wordt gekozen, en z de door het functievoorschrift aan (x, y) toegevoegde waarde is. Men noemt hierbij x en y de *onafhankelijke* en z de *afhankelijke veranderlijke*. De verzameling van de punten P vormt dan in vele gevallen een oppervlak in de ruimte, dat het *beeldoppervlak* van de functie wordt genoemd.

Voorbeeld 3

Zij $G\{x, y\}$ het vierkant met rand, bepaald door $G(x, y) = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Het functievoorschrift wordt gegeven door: $f(x, y) = x^2 + y^2$. De functiewaardenverzameling is dan het gesloten interval $[1, 5]$. Het beeldoppervlak van deze functie is weergegeven in fig. 109.

Evenals bij functies van één veranderlijke wordt bij die van twee veranderlijken dikwijls alleen het functievoorschrift aangegeven zonder de definitieverzameling. Men onderstelt daarbij dat deze laatste zo groot gekozen wordt als het functievoorschrift toelaat.

Voorbeeld 4

$$f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$$

De functie f kan alleen gedefinieerd worden voor $4 - x^2 - y^2 > 0$. De definitieverzameling van f is dan het inwendige van de cirkel: $x^2 + y^2 < 4$ (zie fig. 110).

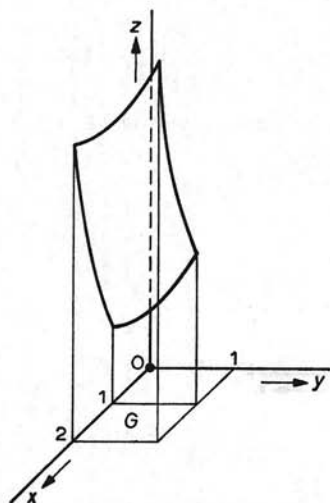


Fig. 109

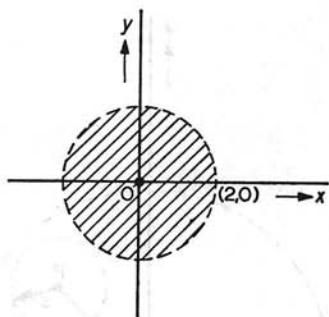


Fig. 110

Voorbeeld 5

$$g(x, y) = \frac{x}{y^2 - x}$$

Het rechterlid kan alleen gedefinieerd worden als de noemer $y^2 - x \neq 0$ is. De definitieverzameling van g is het gehele x, y -vlak, behalve de punten van de parabool met vergelijking $y^2 = x$ (zie fig. 111).

Voorbeeld 6

$$\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \ln(9 - x^2 - y^2)$$

Het rechterlid heeft alleen betekenis als $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$ en tevens $9 - x^2 - y^2 > 0$. De definitieverzameling van φ is de ring tussen de cirkels $x^2 + y^2 = 4$ en $x^2 + y^2 = 9$. De binnenrand behoort wel, de buitenrand niet tot de definitieverzameling van φ (zie fig. 112).

Voorbeeld 7

$$\psi(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$$

ψ kan alleen gedefinieerd worden als $x^2 - y^2 \geq 0$ en tevens $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. De lijnen met vergelijking $x - y = 0$ en $x + y = 0$ verdelen het x, y -vlak in 4 kwadranten. De ongelijkheid $x^2 - y^2 \geq 0$ betekent dat (x, y) ligt in of op de rand van het kwadrant dat de x -as bevat. De definitieverzameling van ψ is het vlakdeel dat in fig. 113 gearceerd is (inclusief de randen).

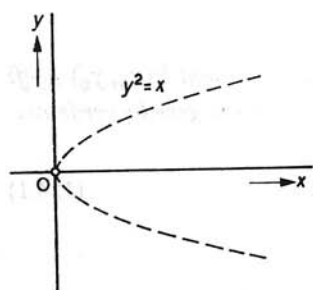


Fig. 111

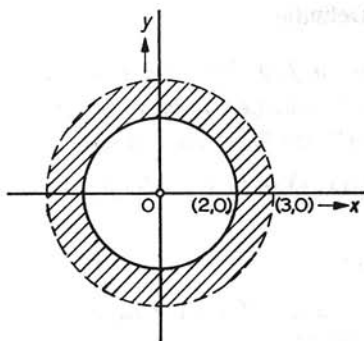


Fig. 112

Opmerking:

Vaak wordt ook als ε -omgeving van het punt (x_0, y_0) gebruikt het binnengebied van een vierkant met (x_0, y_0) als middelpunt en zijden ter lengte van 2ε , evenwijdig met de x -as resp. y -as (een z.g. gericht vierkant), dus het gebied bepaald door $\{(x, y) \mid |x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \varepsilon\}$. Men noemt dit een vierkantsomgeving van (x_0, y_0) (zie fig. 114).

Daar binnen elke cirkelomgeving een vierkantsomgeving kan worden gekozen, en omgekeerd, maakt het voor de volgende definities en stellingen weinig uit, welk soort van omgevingen men gebruikt.

134 Het limietbegrip

Na de uitvoerige inleiding over het limietbegrip bij functies van één veranderlijke zal het niet veel moeite kosten de betekenis in te zien van de definitie van limiet voor een functie van twee veranderlijken.

Fig. 113

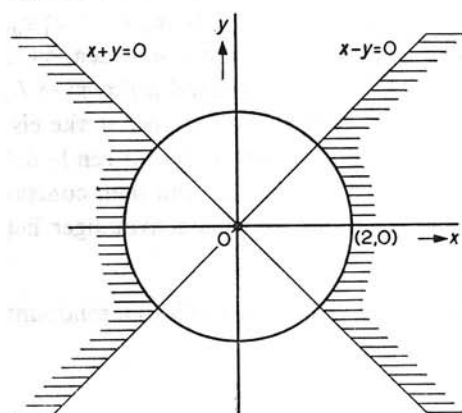
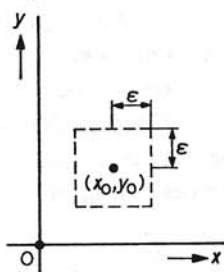


Fig. 114



Definitie

Een functie f , gedefinieerd in een gereduceerde omgeving van het punt $P(x_0, y_0)$ heeft de limiet L als (x, y) nadert tot (x_0, y_0) , indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een gereduceerde omgeving Ω' van P bestaat, zo dat:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \text{ als } (x, y) \in \Omega' \quad (134.1)$$

Notatie:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L, \text{ of } f(x, y) \rightarrow L \text{ voor } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

Daar iedere gereduceerde omgeving Ω' van P een gereduceerde δ -omgeving ($\delta > 0$) bevat, kan men voor Ω' ook een δ -omgeving nemen en kan men in de limiet-definitie ook de eis stellen, dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon)$ bestaat, zo dat:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \text{ als } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2(\varepsilon) \quad (134.2)$$

Meetkundig betekent dit dat $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ als de afstand van (x, y) tot (x_0, y_0) kleiner is dan $\delta(\varepsilon)$, maar $\neq 0$.

Met het begrip „vierkantsomgeving” kan men (134.2) nog vervangen door:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon, \text{ als } |x - x_0| < \delta \text{ en } |y - y_0| < \delta, (x, y) \neq (x_0, y_0) \quad (134.3)$$

De $\varepsilon > 0$ is willekeurig, de δ daarentegen niet; deze hangt af van ε . Kiest men nu ε steeds kleiner, dan zal in het algemeen de daarbijbehorende Ω' kleiner worden. Als men nu in elk van de „inkrimpende” rij van omgevingen Ω' een punt (x, y) kiest, dan zal voor elk van deze (x, y) steeds (131.3) gelden met corresponderende ε en δ . De afstand tussen de punten (x, y) en (x_0, y_0) zal op de duur steeds kleiner worden. Hierdoor is de schrijfwijze: $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ verklaard. Het is duidelijk dat men op deze wijze talloze rijen van punten (x, y) kan kiezen, m.a.w. op tal van wijzen tot (x_0, y_0) kan „naderen”.

Als wij zeggen dat $f(x, y) \rightarrow L$ voor $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, betekent dit dat de limiet L moet bestaan en steeds dezelfde zijn, hoe (x, y) ook „nadert” tot (x_0, y_0) . Bij functies van één veranderlijke betekende $f(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow x_0$, dat $f(x) \rightarrow L$ als $x \downarrow x_0$ en $x \uparrow x_0$. Bij twee veranderlijken kan dit naderen op oneindig veel manieren geschieden, en is het niet voldoende voor het bestaan van een limiet om aan te tonen dat $f(x, y) \rightarrow L$, als (x, y) „langs bepaalde wegen tot (x_0, y_0) nadert”. Het is dus een zeer sterke eis. Vindt men echter dat $f(x, y)$ tot verschillende „limieten” nadert of niet tot een limiet bij verschillende wijzen van „naderen” van (x, y) tot (x_0, y_0) , dan kan men concluderen dat $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ niet bestaat. Het is daardoor dikwijls eenvoudiger het

niet bestaan van een limiet aan te tonen dan het bestaan.

Tenslotte zij opgemerkt dat men de limietdefinitie ook nog kan geven in een randpunt $P(x_0, y_0)$ van V . In dat geval moet men (134.1) vervangen door:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \text{ als } (x, y) \in \Omega' \cap V$$

Voorbeeld 1

Laat f gedefinieerd zijn door:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Gevraagd wordt de limiet van f te bepalen als $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Oplossing:

Nadert (x, y) langs de x -as tot $(0, 0)$, dan is steeds $f(x, 0) = 1$ ($x \neq 0$), en is dus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$. Bij benadering van (x, y) langs de y -as is $f(0, y) = -1$ ($y \neq 0$),

en $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1$. Daar deze limieten verschillend zijn, bestaat $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ niet.

Voorbeeld 2

Te bewijzen:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

Bewijs:

We zullen moeten aantonen dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon)$ bestaat, zó dat $\left| \frac{3x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$ is, als $|x| < \delta$ en tevens $|y| < \delta$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Dit kan als volgt geschieden:

$$\begin{aligned} |3x^3 - 2y^3| &\leq 3|x|^3 + 2|y|^3 = 3|x|x^2 + 2|y|y^2 \\ &\leq 3\{|x| + |y|\}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Dus is:

$$\left| \frac{3x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq 3\{|x| + |y|\}$$

daar $x^2 + y^2 > 0$ is. Kies nu $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{6}$, dan is voor deze δ :

$$\left| \frac{3x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} \right| < 3(\delta + \delta) \leq \varepsilon \text{ als } |x| < \delta \text{ en tevens } |y| < \delta$$

135 Continuïteit

Het begrip continuïteit wordt bij functies van twee veranderlijken op analoge wijze gedefinieerd als bij die van één veranderlijke.

Definitie

Is f gedefinieerd op een volle omgeving van (x_0, y_0) , dan heet f continu in (x_0, y_0) indien:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Vervangt men in de limietdefinitie van par. 134 L door $f(x_0, y_0)$, dan heeft men de uitvoeriger definitie van continuïteit in een punt.

Continuïteit in een randpunt kan op analoge wijze gedefinieerd worden.

Definitie

Een functie heet continu in een gebied G als de functie continu is in alle $(x, y) \in G$.

Minder streng gezegd betekent de continuïteit van f het volgende: iedere „kleine” verandering van de waarden van x en y geeft aanleiding tot een „kleine” verandering in de waarde van de functie.

In uitvoeriger vorm luidt deze definitie: een functie f , gedefinieerd op een gebied G , heet continu in G , indien er bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal δ bestaat, zó, dat voor elk punt (x_0, y_0) van G geldt: $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, als $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, of als $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$.

Het getal δ is in het algemeen afhankelijk zowel van ε als van (x_0, y_0) . Bestaat er echter bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal δ dat slechts afhankelijk is van ε voor alle punten (x_0, y_0) van G , dan noemt men de functie uniform continu in G .

Men kan bewijzen dat een functie die continu is in een begrensde gesloten verzameling G tevens uniform continu is in G .

Het volgende is onmiddellijk duidelijk:

Als wij y constant houden, bijv. $y = y_0$, dan bepaalt f een functie van x alleen. Is nu in een gebied G f een continue functie van x en y , dan is $x \mapsto f(x, y_0)$ een continue functie van x .

Evenzo is, als wij $x = x_0$ constant houden, $y \mapsto f(x_0, y)$ een continue functie van y . Het kan gebeuren dat elk van de functies $x \mapsto f(x, y_0)$ en $y \mapsto f(x_0, y)$ continu is resp. in x_0 en in y_0 en dat toch $(x, y) \mapsto f(x, y)$ niet continu is in (x_0, y_0) . Dit illustreert het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

We definiëren f door: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ als $x^2 + y^2 \neq 0$, en $f(0, 0) = 0$. Nu is

$f(x, 0) = 0$, dus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$, en daar $f(0, 0) = 0$, is $x \mapsto f(x, 0)$ continu in $x = 0$.
 $f(0, y) = 0$ en $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$, dus $y \mapsto f(0, y)$ is continu in $y = 0$. Toch is f niet continu in $(0, 0)$. Immers:

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad (x \neq 0)$$

dus:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$$

Op analoge wijze als in par. 7 kan men ook de functies $f \pm g$, fg en $\frac{f}{g}$ als $g(x, y) \neq 0$ definiëren, bijv.:

$$f + g: (x, y) \mapsto f(x, y) + g(x, y)$$

De volgende stellingen over continuïteit zijn uitbreidingen van die van functies van één veranderlijke. Wij zullen deze zonder bewijs vermelden, daar deze op analoge wijze worden bewezen.

Zijn f en g gedefinieerd in hetzelfde gebied G , en zijn deze functies continu in een punt (x_0, y_0) van G , dan zijn de som-, verschil- en produktfunctie:

$$f \pm g, fg$$

ook continu in (x_0, y_0) . De quotiëntfunctie $\frac{f}{g}$ is continu in (x_0, y_0) , mits $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Zonder bewijs vermelden we nu de stellingen over de continue functies van twee veranderlijken, waarvan men direct het analogon van die van één veranderlijke herkent (zie hiervoor par. 13 en 14).

Stelling 1

Als een functie continu is in een afgesloten en begrensd gebied G , dan is die functie begrensd in G (d.w.z. de functiewaarden vormen een begrensde verzameling van reële getallen).

Stelling 2

Is f continu in een afgesloten en begrensd gebied G , en zijn m en M de grootste benedengrens resp. kleinste bovengrens van de functiewaarden $f(x, y)$ op G , dan neemt f elk van de waarden m en M tenminste eenmaal aan.

Kortweg kan men deze stelling ook zo uitdrukken:
In een afgesloten en begrensd gebied heeft een continue functie een maximum en een minimum.

Stelling 3

Laat f een continue functie zijn in een gebied G dat (x_0, y_0) bevat, en laat $f(x_0, y_0) \neq 0$ zijn. Er is dan een omgeving van (x_0, y_0) waarvoor in elk punt (x, y) de functiewaarde $f(x, y)$ hetzelfde teken heeft als $f(x_0, y_0)$.

Stelling 4 (tussenwaardestelling)

Is f continu in een begrensd gebied G , en neemt f twee verschillende waarden A en B aan in punten P_1 en P_2 van G , is nu C een willekeurig getal tussen A en B , dan is er een punt in G , waarin f de waarde C aanneemt.

136 Partiële differentiatie

We beschouwen een functie f , gedefinieerd in een gebied G van het x, y -vlak. Als $(x_0, y_0) \in G$, dan is de functie φ , gedefinieerd door $\varphi(x) = f(x, y_0)$ een functie van x alleen.

Evenzo is de functie ψ , gedefinieerd door $\psi(y) = f(x_0, y)$ een functie van y alleen. Bestaat nu $\varphi'(x_0)$, dan noemt men $\varphi'(x_0)$ het **partiële differentiaalquotiënt** van f naar x in het punt (x_0, y_0) of ook de **partiële afgeleide** naar x , dus:

$$\varphi'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

als deze limiet bestaat.

Men schrijft dit als $f_x(x_0, y_0)$ of $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ of $(f_x)_0$ of $\frac{\partial f}{\partial x_0}$.

De functie die aan (x, y) toevoegt het partiële differentiaalquotiënt naar x in (x, y) heet de **partiële afgeleide functie naar x** .

Notatie:

$$f_x: (x, y) \mapsto f_x(x, y)$$

Evenzo heet $\psi'(y_0)$ (indien deze bestaat) het partiële differentiaalquotiënt van f naar y in (x_0, y_0) , ook wel de partiële afgeleide naar y , dus:

$$\psi'(y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Men schrijft dit als:

$$f_y(x_0, y_0) \text{ of } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ of } (f_y)_0 \text{ of } \frac{\partial f}{\partial y_0}$$

De functie die aan (x, y) toevoegt het partiële differentiaalquotiënt naar y in (x, y) heet de *partiële afgeleide functie naar y* .

Notatie:

$$f_y: (x, y) \mapsto f_y(x, y)$$

De berekening van zulke afgeleiden heet *partieel differentiëren*.

We gebruiken bij de schrijfwijze $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ de ronde ∂ in plaats van de gewone d , zoals die bij het differentiëren van functies van één veranderlijke wordt gebruikt, om aan te geven dat we met een functie van twee veranderlijken hebben te maken, en naar één van die veranderlijken differentiëren, terwijl we de andere constant denken.

De partiële afgeleide functies f_x en f_y zijn zelf weer functies van x en y .

Voorbeeld 1

$$f(x, y) = xy \cos x$$

$$f_x(x, y) = y \cos x - xy \sin x$$

$$f_y(x, y) = x \cos x$$

Voorbeeld 2

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Voorbeeld 3

$$f(x, y) = y^x = e^{x \ln y}$$

$$f_x(x, y) = y^x \ln y$$

$$f_y(x, y) = xy^{x-1}$$

137 Meetkundige betekenis van de partiële afgeleiden

We beschouwen een functie f , die continu is in een gebied G van het x, y -vlak. We veronderstellen dat de partiële afgeleiden van f naar x en y bestaan in elk punt van G . De grafische voorstelling van f is het oppervlak S dat in fig. 115 schematisch is geschetst. Is $A_1(x_0, y_0)$ een punt van G , en $z_0 = f(x_0, y_0)$, dan is $A(x_0, y_0, z_0)$ een punt van S . Om $f_x(x_0, y_0)$ te vinden moeten we y constant $= y_0$ nemen. De vergelijkingen: $z = f(x, y)$, $y = y_0$, stellen de kromme K_1 voor, waarlangs S gesneden wordt door het vlak: $y = y_0$. De partiële afgeleide $f_x(x_0, y_0)$ is dus de tangens van de hellingshoek α_1 gevormd door de raaklijn in A aan K_1 en de x -richting in A_1 . Evenzo snijdt het vlak: $x = x_0$, het oppervlak S volgens de kromme K_2 met vergelijkingen: $z = f(x_0, y)$, $x = x_0$. Hier geldt dan:

$$f_y(x_0, y_0) = \tan \alpha_2$$

138 Partiële afgeleiden van de tweede orde

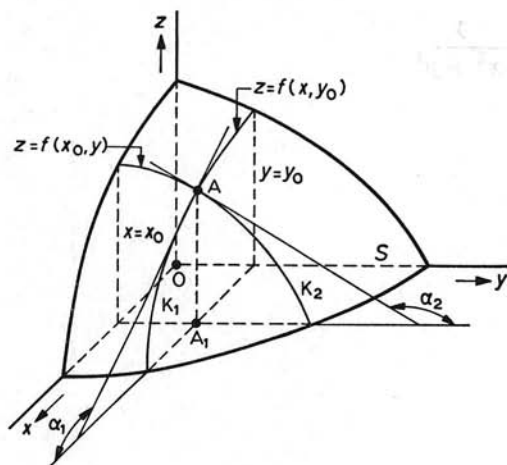
Bestaan van een functie f de partiële afgeleide functies f_x en f_y in een omgeving van (x_0, y_0) , dan kan het zijn dat men deze in het punt (x_0, y_0) weer naar x en y kan differentiëren. De afgeleiden van f_x naar x en y in (x_0, y_0) duidt men aan met:

$$f_{xx}(x_0, y_0) \text{ of } \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}, \text{ resp. } f_{xy}(x_0, y_0) \text{ of } \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial x_0}$$

die van f_y naar x en y in (x_0, y_0) met:

$$f_{yx}(x_0, y_0) \text{ of } \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}, \text{ resp. } f_{yy}(x_0, y_0) \text{ of } \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$$

Fig. 115



Deze vier getallen noemt men de *partiële afgeleiden (differentiaalquotiënten) van de tweede orde* van f in (x_0, y_0) , of kortweg de *tweede partiële afgeleiden* van f in (x_0, y_0) . Op overeenkomstige wijze kan men de partiële afgeleiden van de derde en hogere orde definiëren. Er zijn, zoals men gemakkelijk inziet, 2^n partiële afgeleiden van de n^{de} orde mogelijk, als ze bestaan.

Opmerking:

$f_{xy}(x, y)$ is dus hetzelfde als $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Men lette op de volgorde! Als we bedenken dat $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$, dan is het duidelijk dat in beide gevallen de variabele, waarnaar het eerst wordt gedifferentieerd, ook het „dichtst” bij de f staat.

Voorbeeld 1

$$f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + 4xy^2 + 6y^3$$

$$f_x(x, y) = 6x^2 + 6xy + 4y^2$$

$$f_y(x, y) = 3x^2 + 8xy + 18y^2$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x + 6y$$

$$f_{xy}(x, y) = 6x + 8y$$

$$f_{yx}(x, y) = 6x + 8y$$

$$f_{yy}(x, y) = 8x + 36y$$

Voorbeeld 2

$$f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$$

$$f_x(x, y) = -2e^{-2y} \sin 2x$$

$$f_y(x, y) = -2e^{-2y} \cos 2x$$

$$f_{xx}(x, y) = -4e^{-2y} \cos 2x$$

$$f_{xy}(x, y) = 4e^{-2y} \sin 2x$$

$$f_{yx}(x, y) = 4e^{-2y} \sin 2x$$

$$f_{yy}(x, y) = 4e^{-2y} \cos 2x$$

Voorbeeld 3

Als c een constante is, en:

$$z(x, t) = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$$

bewijs dan dat:

$$z_{tt} = c^2 z_{xx}$$

Bewijs:

$$z_t(x, t) = c \cos(x + ct) - 2c \sin(2x + 2ct)$$

$$z_{tt}(x, t) = -c^2 \sin(x + ct) - 4c^2 \cos(2x + 2ct)$$

$$z_x(x, t) = \cos(x + ct) - 2 \sin(2x + 2ct)$$

$$z_{xx}(x, t) = -\sin(x + ct) - 4 \cos(2x + 2ct)$$

Door invulling volgt het gestelde.

In de eerste twee voorbeelden blijkt $f_{xy} = f_{yx}$ te zijn. Onder bepaalde voorwaarden blijkt dit steeds het geval te zijn. De volgende stelling die wij in deel 2 zullen bewijzen, is hiervoor van belang.

Stelling

Als in een gebied G de partiële afgeleide functie van de eerste en de tweede orde van f bestaan, en als in een punt (x_0, y_0) van G f_{xy} en f_{yx} continu zijn, dan is in dat punt:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Dit is niet de 'zuinigste' voorwaarde. Men kan bewijzen: indien in een omgeving (x_0, y_0) de functies f_y en f_{xy} bestaan en f_{xy} continu is in (x_0, y_0) dan bestaat ook $f_{yx}(x_0, y_0)$ en geldt $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Het gevolg van deze stelling is dat het aantal verschillende afgeleiden van de tweede en hogere orden in het algemeen beduidend kleiner is dan boven is aangegeven. Als we aannemen dat alle partiële afgeleide functies die we vormen continue functies zijn in het beschouwde punt, en we bovenstaande stelling toepassen op de functies f_x , f_y en f_{xy} in plaats van op f , dan vinden we:

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

$$f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{xyyx} = f_{yxxy} = f_{yxyx} = f_{yyxx}$$

Zo kan men algemeen bewijzen:

De volgorde van differentiatie van een functie van twee variabelen is niet van invloed op de uitkomst, als de betrokken afgeleide functies continue functies zijn.

In dit geval is het aantal van de partiële afgeleide functies van de tweede orde 3, dat van de derde orde 4, en in het algemeen dat van de n^{de} orde $n + 1$.

139 Differentieerbaarheid van een functie van twee veranderlijken. Totale differentiaal

Heeft een functie van één veranderlijke een differentiaalquotient in a , dan noemt men de functie *differentieerbaar* in a . Wij hebben in par. 22 nog een andere gelijkwaardige definitie van de differentieerbaarheid van een functie leren kennen, nl.:

Een functie f is differentieerbaar in a , dan en slechts dan, indien er een in a continue functie φ bestaat, zo dat:

$$f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$$

Naar analogie van deze laatste definitie definiëren we de differentieerbaarheid van een functie van twee veranderlijken als volgt:

Definitie

Laat f gedefinieerd zijn in een gebied G en laat $(x_0, y_0) \in G$, dan heet f differentieerbaar of totaal differentieerbaar in (x_0, y_0) , indien er functies φ en ψ bestaan, continu in het punt (x_0, y_0) , zo dat:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)\varphi(x, y) + (y - y_0)\psi(x, y) \quad (139.1)$$

Aan deze definitie van totale differentieerbaarheid is de volgende definitie gelijk waardig:

Een functie f , gedefinieerd in een gebied G , heet differentieerbaar of totaal differentieerbaar in $(x_0, y_0) \in G$ als er constanten A_1 en A_2 bestaan en van x en y afhankelijke grootheden ε_1 en ε_2 , zodanig dat in G geldt:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)A_1 + (y - y_0)A_2 + \varepsilon_1(x - x_0) + \varepsilon_2(y - y_0)$$

waarbij $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ en $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ als $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Het is duidelijk dat $A_1 = \varphi(x_0, y_0)$ en $A_2 = \psi(x_0, y_0)$, terwijl uit stelling 3 van deze paragraaf zal blijken:

$$A_1 = f_x(x_0, y_0) \text{ en } A_2 = f_y(x_0, y_0).$$

Een eenvoudige voldoende voorwaarde voor de totale differentieerbaarheid is de volgende stelling.

Stelling 1

Zijn f_x en f_y continu in (x_0, y_0) , dan is f in (x_0, y_0) differentieerbaar.

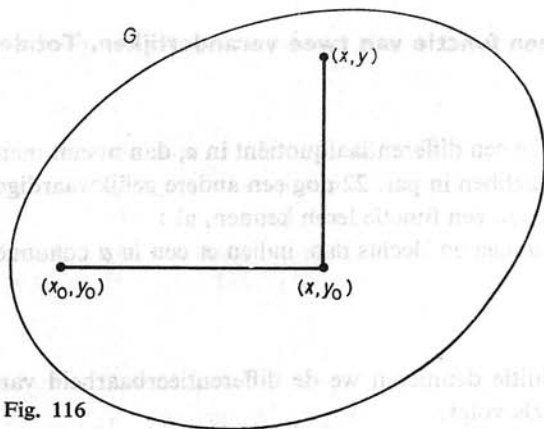


Fig. 116

Bewijs:

Kies $(x, y) \in G$ zo dat de rechte verbindingsstukken tussen (x_0, y_0) en (x, y_0) , resp. (x, y_0) en (x, y) geheel in G verlopen (zie fig. 116), dan geldt:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Nu is de functie $y \mapsto f(x, y)$ bij vaste x een functie van y alleen, en daar f_y bestaat, geldt wegens de middelwaardestelling (par. 59) dat er een getal θ_1 bestaat met

$0 < \theta_1 < 1$, zo dat:

$$f(x, y) - f(x, y_0) = (y - y_0)f_y\{x, y_0 + \theta_1(y - y_0)\}$$

Evenzo bestaat er een θ_2 ($0 < \theta_2 < 1$), zo dat:

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_x\{x_0 + \theta_2(x - x_0), y_0\}$$

Dus geldt:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_x\{x_0 + \theta_2(x - x_0), y_0\} + (y - y_0)f_y\{x, y_0 + \theta_1(y - y_0)\}$$

Als we nu stellen:

$$f_x\{x_0 + \theta_2(x - x_0), y_0\} = \varphi(x, y_0)$$

en:

$$f_y\{x, y_0 + \theta_1(y - y_0)\} = \psi(x, y)$$

dan volgt uit de continuïteit van f_x en f_y in (x_0, y_0) dat er functies φ en ψ bestaan, *continu* in (x_0, y_0) , zodat (139.1) geldt. Dit betekent dat f totaal differentieerbaar is.

De *lineaire functie* die aan het paar $(x - x_0, y - y_0)$ toevoegt het getal $(x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)$ noemt men de *totale afgeleide* van de functie f in het punt (x_0, y_0) . Deze totale afgeleide is dus *geen getal* maar een *functie* van x en y , die ook nog afhangt van de parameters x_0 en y_0 , en wel een *lineaire* functie.

Opmerking:

Stelling 1 geeft een voldoende voorwaarde voor de totale differentieerbaarheid van f in (x_0, y_0) . Men kan bewijzen dat het bestaan van één der partiële afgeleide functies, en de continuïteit van de andere in (x_0, y_0) reeds voldoende is.

Bij een functie van één veranderlijke geldt de stelling dat als f differentieerbaar is in a , f ook continu is in a . De differentieerbaarheid impliceert dus de continuïteit. Wij zullen aantonen dat dit ook geldt voor een functie van twee veranderlijken. Er geldt nl.:

Stelling 2

Een functie die totaal differentieerbaar is in (x_0, y_0) is continu in (x_0, y_0) .

Bewijs:

Volgens de veronderstelling bestaan er functies φ en ψ , continu in (x_0, y_0) , zodat (139.1) geldt.

Laten we nu (x, y) naderen tot (x_0, y_0) , dan geldt volgens de continuïteit van φ en ψ : $\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x_0, y_0)$ en $\psi(x, y) \rightarrow \psi(x_0, y_0)$. Het rechterlid van (139.1) nadert dan tot 0, zodat $f(x, y) - f(x_0, y_0) \rightarrow 0$, of $f(x, y) \rightarrow f(x_0, y_0)$, d.w.z. f is continu in (x_0, y_0) .

Uit de totale differentieerbaarheid van een functie kan men nog iets meer afleiden.

Stelling 3

Als een functie f totaal differentieerbaar is in (x_0, y_0) , dan bestaan de partiële afgeleiden van f in (x_0, y_0) naar x en y .

Bewijs:

Kiezen wij in (139.1) y constant en wel gelijk aan y_0 en laten wij x naderen tot x_0 , dan verkrijgt men, wegens de continuïteit van φ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \varphi(x_0, y_0)$$

Het linkerlid stelt juist de partiële afgeleide van f in (x_0, y_0) voor, zodat $f_x(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$.

Op soortgelijke wijze bewijst men $f_y(x_0, y_0) = \psi(x_0, y_0)$.

Op grond van de laatste beweringen en wegens de continuïteit van φ en ψ in (x_0, y_0) kunnen we schrijven:

$$\varphi(x, y) = f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1$$

en:

$$\psi(x, y) = f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2$$

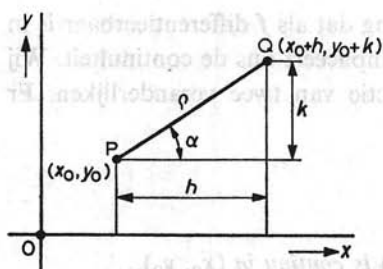


Fig. 117

waarin $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ en $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ als $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Dit betekent:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \\ &= (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_1(x - x_0) + \varepsilon_2(y - y_0) \quad (139.2) \end{aligned}$$

Dit geldt voor alle $(x_0, y_0) \in G$. Met een kleine notatiewijziging kan men voor (139.2) ook schrijven:

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k, \quad \forall (x, y) \in G$$

De uitdrukking:

$$hf_x(x, y) + kf_y(x, y)$$

noemt men de *totale differentiaal* van f en is de waarde van de totale afgeleide in dat punt. Deze hangt af van de vier veranderlijken h, k, x en y , en geeft 'in eerste benadering' de verandering van de functiewaarde, wanneer men overgaat van het punt (x, y) naar het punt $(x + h, y + k)$.

Het is mogelijk een voorwaarde aan te geven die nodig èn voldoende is voor totale differentieerbaarheid. Er geldt nl.:

Stelling 4

De functie f is dan en slechts dan totaal differentieerbaar in het punt (x_0, y_0) indien

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \{(x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)\}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \quad (139.3)$$

a. Laat gegeven zijn dat f totaal differentieerbaar is in (x_0, y_0) , dan geldt in een omgeving van (x_0, y_0) :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_1(x - x_0) + \varepsilon_2(y - y_0),$$

waarbij $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ en $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ als $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Maar dan geldt:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \{(x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)\}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\varepsilon_1(x-x_0) + \varepsilon_2(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

De eis (139.3) is dus een *noodzakelijke* voorwaarde voor totale differentieerbaarheid.

b. Laat gegeven zijn dat (139.3) geldt. We stellen bij wijze van afkorting de breuk achter het limietteken voor door $Q(x,y)$. Er geldt dan blijkbaar

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x-x_0)f_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0) + Q(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

en natuurlijk $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} Q(x,y) = 0$.

Aangezien $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq |x-x_0| + |y-y_0|$

bestaat er een α (afhankelijk van x, y, x_0 en y_0) zodanig dat

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \alpha|x-x_0| + \alpha|y-y_0|$$

en dus zijn er grootheden β en γ (afhankelijk van x, y, x_0 en y_0), zodanig dat

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \beta(x-x_0) + \gamma(y-y_0)$$

waarbij uiteraard geldt: $|\beta| \leq 1$ en $|\gamma| \leq 1$.

Dit betekent echter dat:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x-x_0)f_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0) + \beta Q(x,y)(x-x_0) + \gamma Q(x,y)(y-y_0).$$

Hierbij is duidelijk dat, aangezien $|\beta| \leq 1, |\gamma| \leq 1$ en $Q(x,y) \rightarrow 0$ als $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$, de grootheden $\beta Q(x,y)$ en $\gamma Q(x,y)$ voldoen aan:

$$\beta Q(x,y) \rightarrow 0 \text{ en } \gamma Q(x,y) \rightarrow 0 \text{ als } (x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$$

en dus de plaats kunnen innemen van ε_1 en ε_2 in de tweede definitie van totale differentieerbaarheid op pag. 407, hetgeen impliceert dat (139.3) ook een *voldoende* voorwaarde is voor totale differentieerbaarheid.

140 Richtingsafgeleide

In par. 136 zijn de partiële afgeleiden van een functie f gedefinieerd. We kunnen deze grootheden ook noemen: afgeleiden in de x - resp. y -richting. Men kan evenwel ook nog afgeleiden definiëren in andere richtingen.

We laten het punt $Q(x_0 + h, y_0 + k)$ zo tot $P(x_0, y_0)$ naderen, dat het steeds ligt op de vaste lijn (zie fig. 117), die een hoek α met de positieve x -as maakt. De h en k veranderen dus niet onafhankelijk van elkaar, maar voldoen aan de betrekkingen:

$$h = \rho \cos \alpha$$

$$k = \rho \sin \alpha$$

waarin $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ is, en tot nul nadert als Q nadert tot P .

Onder de richtingsafgeleide $f_\alpha(x_0, y_0)$ in de richting α van f in het punt (x_0, y_0) verstaan we nu:

$$f_\alpha(x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

als deze limiet bestaat.

Voor het bijzondere geval $\alpha = 0$ is $h = \rho$ en $k = 0$, en is $f_0(x_0, y_0)$ de partiële afgeleide $f_x(x_0, y_0)$ van f in (x_0, y_0) ; als $\alpha = \frac{\pi}{2}$ is $h = 0$, $k = \rho$ en $f_{\pi/2}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Is f totaal differentieerbaar in (x_0, y_0) , dan bestaan er functies φ en ψ , continu in (x_0, y_0) , zo dat:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \sin \alpha) - f(x_0, y_0) &= \\ &= \rho \cos \alpha \cdot \varphi(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \sin \alpha) + \rho \sin \alpha \cdot \psi(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \sin \alpha) \end{aligned}$$

Laten we hierin (na deling door ρ) ρ tot 0 naderen, dan volgt, wegens $\varphi(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ en $\psi(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$, (zie par. 139, stelling 3):

$$f_\alpha(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cdot \sin \alpha \quad (140.1)$$

De functie $f_\alpha: (x, y) \mapsto f_\alpha(x, y)$ is dus een lineaire combinatie van f_x en f_y , met coëfficiënten $\cos \alpha$ en $\sin \alpha$.

In par. 139 hebben we gezien dat uit de totale differentieerbaarheid in een punt $P(x_0, y_0)$ het bestaan van de partiële afgeleiden in P in de x - en de y -richting volgt. We kunnen nu dus concluderen, dat dit tevens het bestaan van afgeleiden in *alle* richtingen in P insluit. Hiermede is de naam „totale differentieerbaarheid” verklaard.

Opmerking:

Als we beschouwen de vector $\underline{v} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ en de vector $\underline{w} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$, dan volgt uit (140.1) dat $f_\alpha(x_0, y_0) = (\underline{v}, \underline{w})$ (het inwendig produkt van \underline{v} en \underline{w}), en daar \underline{w} de lengte één heeft stelt $f_\alpha(x_0, y_0)$ dus de lengte voor van de projectie van \underline{v} op \underline{w} . Nu ligt bij gegeven f en (x_0, y_0) de vector \underline{v} vast, \underline{w} is variabel. De genoemde projectie is dus maximaal als de vector \underline{w} langs de vector \underline{v} valt. In de richting van $\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ is dus de richtingsafgeleide maximaal. \underline{v} heet de *gradiënt* van f (zie fig. 118).

Voorbeeld

Nemen we als $f(x, y)$ de grootte van de voerstraal: $\sqrt{x^2 + y^2}$, dan is:

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi$$

$$f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi$$

als φ de hoek voorstelt die de voerstraal met de x -as maakt.

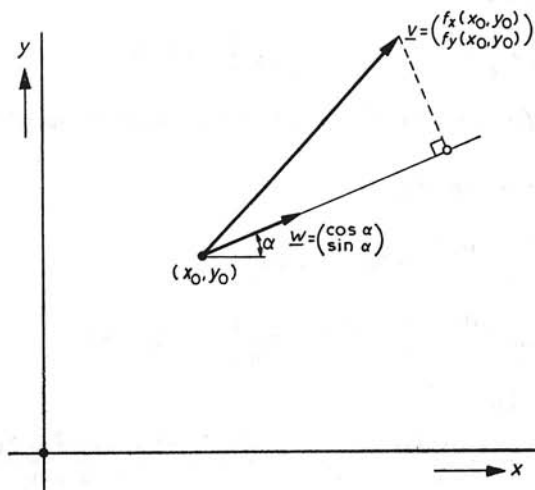


Fig. 118

Daar f_x en f_y continu zijn in elk punt $(x, y) \neq (0, 0)$ is volgens par. 139, stelling 1, f totaal differentieerbaar, zodat volgens (140.1) geldt:

$$f_\alpha(x, y) = f_x(x, y) \cos \alpha + f_y(x, y) \sin \alpha$$

of:

$$f_\alpha(x, y) = \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha = \cos(\varphi - \alpha)$$

In de richting van de voerstraal zelf is $\varphi = \alpha$ en in die richting geldt: $f_\alpha(x, y) = 1$;

in de richting loodrecht op de voerstraal is $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ en in die richting geldt $f_\alpha(x, y) = 0$.

Uitgewerkte vraagstukken

1. De functie $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Onderzoek of f continu is in $(0, 0)$.
- Bereken $f_x(0, 0)$ en $f_y(0, 0)$.
- Toon aan dat f_x en f_y niet continu zijn in $(0, 0)$.

- d. Toon aan dat f niet totaal differentieerbaar is in $(0,0)$.
 e. Bereken de richtingsafgeleide van f in $(0,0)$ in de richting van de vector $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ waarbij geldt: $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Uitwerking

a. Voor $(x,y) \neq (0,0)$ geldt:

$$|f(x,y)| = \left| x \frac{x^2}{x^2 + y^2} + y^2 \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| + |y|^2$$

dus $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| \leq |x| + |y|^2 < \varepsilon$ indien $|x| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en tevens $|y| < \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}$ voor alle $\varepsilon > 0$.

Dit betekent dat f continu is in $(0,0)$.

$$b. f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0.$$

c. Voor $(x,y) \neq (0,0)$ geldt:

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2 + y^2)3x^2 - (x^3 + y^4)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Indien we langs de x -as naderen tot $(0,0)$, dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Dit geeft geen uitsluitsel.

Indien we langs de y -as naderen tot $(0,0)$, dan geldt:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_x(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \neq 1.$$

Dus f_x is niet continu in $(0,0)$.

Voor $(x,y) \neq (0,0)$ geldt:

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2 + y^2)4y^3 - (x^3 + y^4)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^2y^3 - 2x^3y + 2y^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Indien we langs de x -as naderen tot $(0,0)$, dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_y(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Dit geeft geen uitsluitsel.

Indien we langs de y -as naderen tot $(0,0)$, dan geldt:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_y(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^5}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 2y = 0.$$

Ook dit geeft geen uitsluitsel, daarom naderen we tot $(0,0)$ langs de rechte met vergelijking

$y = mx$. Er geldt dan:

$$f_y(x,y) = \frac{4m^3x^5 - 2mx^4 + 2m^5x^5}{(1+m^2)^2x^4} = \frac{-2m}{(1+m^2)^2} + \frac{m^3(4+2m^2)}{(1+m^2)^2}x.$$

Hier geldt $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x,y) = \frac{-2m}{(1+m^2)^2}$.

Deze uitkomst hangt af van m en is ongelijk aan nul als $m \neq 0$ en ook als $m \neq \infty$; f_y is dus niet continu in $(0,0)$.

N.B. Als ook langs $y = mx$ wel zou gelden $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x,y) = 0$, dan zouden we nog geen

uitsluitel hebben. Zo zou langs $y = mx^2$ wel een andere limiet kunnen bestaan!

Deze methode kan wel dienen om de discontinuïteit aan te tonen, niet echter de continuïteit!

d. f is totaal differentieerbaar in $(0,0)$ d.e.s.d. als

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \{xf_x(0,0) + yf_y(0,0)\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (\text{zie 139.3}).$$

In ons geval betekent dit:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2(y^2 - x)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

We stellen nu maar meteen $y = mx$.

Het gaat dan om

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2x^2(m^2x^2 - x)}{(1+m^2)^{3/2}x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{m^4x}{(1+m^2)^{3/2}} - \frac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}} \right\} \\ &= -\frac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Dit hangt af van m , dus is f niet totaal differentieerbaar.

N.B. $m = 0$ en $m = \infty$ zouden hier geen uitsluitel geven.

$$e. f_\alpha(0,0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) - f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3 \alpha + \rho^4 \sin^4 \alpha}{\rho^3} = \cos^3 \alpha.$$

Voor $\alpha = 0$ geeft dit 1; voor $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geeft dit 0.

N.B. Hieruit kunnen we nogmaals concluderen dat f niet totaal differentieerbaar is. Immers als f totaal differentieerbaar is in 0, dan geldt (140.1):

$$f_\alpha(0,0) = f_x(0,0) \cos \alpha + f_y(0,0) \sin \alpha$$

Dan zou dus

$$f_\alpha(0,0) = \cos \alpha.$$

Maar we vinden

$$f_{\alpha}(0,0) = \cos^3 \alpha.$$

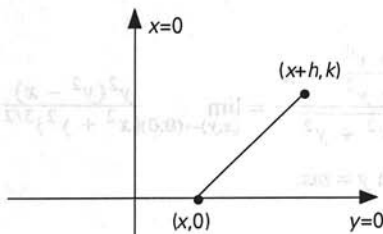
2. De functie $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{1/3} \sin \frac{x^2}{y} & \text{als } y \neq 0 \\ 0 & \text{als } y = 0 \end{cases}$$

- Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Bereken $f_x(x,y)$ voor alle punten $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Onderzoek voor welke punten $(x,0)$ de partiële afgeleide $f_y(x,0)$ bestaat.
- Bereken zo mogelijk $f_{xy}(0,0)$.

Uitwerking

a. Voor $y \neq 0$ is f een continu functie van een continue functie en dus continu (zie par. 141). Voor $y = 0$ moeten we onderzoeken $|f(x+h,k) - f(x,0)|$.



Hiervoor geldt voor elke $\varepsilon > 0$

$$|f(x+h,k) - f(x,0)| = |k^{1/3} \sin \frac{(x+h)^2}{k}| \leq |k|^{1/3} < \varepsilon$$

indien $|k| < \varepsilon^3$; dus f is continu in $(0,0)$.

b. Als $y \neq 0$, dan geldt:

$$f_x(x,y) = \left(y^{1/3} \cos \frac{x^2}{y} \right) \frac{2x}{y} = 2xy^{-2/3} \cos \frac{x^2}{y}$$

als $y = 0$, dan geldt:

$$f_x(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

c. als $x \neq 0$, dan geldt:

$$f_y(x,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^{1/3} \sin \frac{x^2}{k} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x^2}{k}}{k^{2/3}}$$

Hierin oscilleert $\sin \frac{x^2}{k}$ tussen $+1$ en -1 als $k \rightarrow 0$, want $\sin \frac{x^2}{k} = 1$ als $k = \frac{2x^2}{\pi(4m+1)}$ en

$\sin \frac{x^2}{k} = -1$ als $k = \frac{2x^2}{\pi(4m-1)}$ terwijl de noemer $k^{2/3}$ met k tot nul nadert.

Als $x = 0$, dan geldt:

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

d. Volgens b. geldt

$$f_x(x,y) = \frac{2x \cos \frac{x^2}{y}}{y^{2/3}} \text{ als } y \neq 0 \text{ dus } f_x(0,y) = 0 \text{ als } y \neq 0$$

en $f_x(x,0) = 0$, dus $f_x(0,0) = 0$.

Gevolg:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

3. De functie $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x,y) = x^p y^q$, waarbij $0 < p < 1 < q$.

a. Bereken $f_x(0,0)$ en $f_y(0,0)$.

b. Onderzoek of f_x en f_y continu zijn in $(0,0)$.

c. Onderzoek of f totaal differentieerbaar is in $(0,0)$.

d. Onderzoek of f totaal differentieerbaar is in de punten $(a,0)$ met $a \neq 0$.

e. Onderzoek of f totaal differentieerbaar is in de punten $(0,b)$ met $b \neq 0$.

Uitwerking

a.
$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

b. Voor $(x,y) \neq (0,0)$ geldt:

$$f_x(x,y) = px^{p-1}y^q$$

$$f_y(x,y) = qx^p y^{q-1}$$

M.b.t. $f_x(x,y)$ merken we op dat de exponent van x negatief is en we kunnen daardoor bereiken dat ook y in de noemer komt. Stel $x = y^t$ en kies t zodanig dat $t(p-1) + q < 0$. Dit

bereiken we door te eisen: $t > \frac{q}{1-p}$, bijv. $t = \frac{q}{1-p} + 1$.

We zien dan dat $t > 0$ en we kunnen dus langs de kromme met vergelijking $x = y^t$ tot $(0,0)$ naderen. Daarbij geldt dan:

$$f_x(x,y) = py^{-q+p-1}y^q = py^{p-1}$$

en dit nadert tot ∞ als y nadert tot ∞ omdat $p < 1$; f_x is dus niet continu in $(0,0)$.

M.b.t. $f_y(x,y) = qx^p y^{q-1}$ merken we op dat de exponenten van x en y hierin beide positief

zijn. We kunnen dan ook zorgen dat $|f_y(x,y)| < \varepsilon$ voor elke $\varepsilon > 0$ door te kiezen: $|x| < \frac{1}{q} \varepsilon^{1/2p}$ en $|y| < \varepsilon^{1/2(q-1)}$. Daar $f_y(0,0) = 0$ blijkt dat f_y continu is in $(0,0)$.

c. Omdat in $(0,0)$ één partiële afgeleide continu is, nl. f_y en de andere bestaat, zal f op grond van de opmerking op blz. 416 totaal differentieerbaar zijn. Uiteraard kunnen we dit ook met behulp van de definitie controleren.

Daartoe onderzoeken we (zie 139.3):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \{xf_x(0,0) + yf_y(0,0)\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^p y^q}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Hierin stellen we $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$ en we zien dan:

$$\left| \frac{x^p y^q}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{\rho^{p+q} \cos^p \alpha \sin^q \alpha}{\rho} \right| \leq \rho^{p+q-1} = \rho^t \text{ met } t > 0.$$

Indien we bij gegeven $\varepsilon > 0$ dan ρ zodanig kiezen dat $\rho^t < \varepsilon$, dan zien we dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^p y^q}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \text{ en dus is } f \text{ totaal differentieerbaar in } 0.$$

d. Voor $a \neq 0$ geldt:

$$f_x(a,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Verder geldt: $f_x(0,0) = 0$ (zie a.), dus f_x is continu in $(a,0)$ indien $a \neq 0$.

$$f_y(a,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a,k) - f(a,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{a^p k^q}{k} = 0 \text{ daar } q > 1.$$

We zien dus dat in $(a,0)$ (met $a \neq 0$) de partiële afgeleiden f_x en f_y continu zijn. Op grond van stelling 1 op blz. 415 is f dus totaal differentieerbaar in $(a,0)$ als $a \neq 0$.

M.b.t. de punten $(0,b)$ met $b \neq 0$ merken we op dat

$$f_x(0,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,b) - f(0,b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^p b^q}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{p-1} b^q = \infty \text{ daar } 0 < p < 1.$$

op grond van stelling 3 op blz. 417 is f niet totaal differentieerbaar in $(0,b)$ indien $b \neq 0$.

141 Samengestelde functies

Bij functies van één veranderlijke hebben we het begrip samengestelde functie als volgt gedefinieerd:

Laat f gedefinieerd zijn voor alle $x \in I$, en waardenverzameling W hebben. Zij verder g gedefinieerd voor alle $y \in W$, dan kan men de samengestelde functie $g \circ f$ aldus definiëren in I :

$$g \circ f(x) = g\{f(x)\}$$

Dit begrip kan men uitbreiden voor functies van twee veranderlijken op verschillende manieren.

1 Met behulp van één parameter t

Neem aan dat f en g beide gedefinieerd zijn in alle $t \in I$. De functiewaarden $f(t)$ en $g(t)$ bepalen een deelverzameling W van het x, y -vlak:

$$W = \{(f(t), g(t)) \mid t \in I\}$$

Zij nu een functie F (van twee veranderlijken) gedefinieerd op W , dan kan men als volgt een functie F^* definiëren van I naar \mathbb{R} :

$$F^*(t) = F\{(f(t), g(t))\} \quad (t \in I)$$

Men noemt dan F^* een samengestelde functie van t op I .

2 Met behulp van twee parameters u en v

Neem aan dat f en g beide gedefinieerd zijn voor alle $(u, v) \in G$, waarin G een deelverzameling is van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De functiewaarden $f(u, v)$ en $g(u, v)$ bepalen een deelverzameling W van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$W = \{(f(u, v), g(u, v)) \mid (u, v) \in G\}$$

Zij nu F een functie (van twee veranderlijken) gedefinieerd op W , dan kan men een functie F^* definiëren van G naar \mathbb{R} :

$$F^*(u, v) = F\{f(u, v), g(u, v)\} \quad ((u, v) \in G)$$

Ook hier heet F^* een samengestelde functie van (u, v) op G .

Ook hier gelden soortgelijke stellingen over de continuïteit van samengestelde functies als bij die van één veranderlijke. Als f en g continu zijn in hun definitieverzameling G en F continu is in W , dan is ook de functie F^* continu in G .

Kortweg, maar onscherp: *Een continue functie van continue functies is weer continu.* Het bewijs van deze stelling verloopt geheel analoog aan dat bij de functies van één veranderlijke. We zullen dit bewijs hier niet geven.

Voorbeeld 1

In het gehele x, y -vlak is F gedefinieerd door $F(x, y) = x^2 + y^2$. Op $-1 \leq t \leq 1$ zijn gedefinieerd $f: t \mapsto \arcsin t$ en $g: t \mapsto e^t$. F is continu in het gehele x, y -vlak, f en g zijn continu $\forall t \in [-1, 1]$. (Bij $t \mapsto \arcsin t$ is $[-1, 1]$ de grootst mogelijke definitieverzameling, voor $t \mapsto e^t$ is maar willekeurig $-1 \leq t \leq 1$ gekozen). Volgens bovenstaande stelling is ook $F^*: t \mapsto (\arcsin t)^2 + e^{2t}$ continu $\forall t \in [-1, 1]$.

Voorbeeld 2

In het gehele x, y -vlak, met uitzondering van het punt $(0, 0)$, is F gedefinieerd door

$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Op het gebied $G\{(u, v) | u^2 + v^2 < 1\}$ zijn gedefinieerd $f: (u, v) \mapsto \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ en $g: (u, v) \mapsto uv$. Men vervangt nu x door $f(u, v)$ en y door $g(u, v)$. Als (u, v) in G ligt, dan is $(x, y) \neq (0, 0)$ en ligt dus in het domein van F . Daar F continu in dit gebied is, en f en g in G continu zijn, is:

$$F^*: (u, v) \mapsto \frac{uv\sqrt{1 - u^2 - v^2}}{1 - u^2 - v^2 + u^2v^2}$$

continu in G .

Opmerking:

Een geval van een samengestelde functie kan ook optreden als de in geval 2 bedoelde F een functie is van één variabele.

Voorbeeld 3

In de gehele x -as is $F: x \mapsto \sin x$ een continue functie van x ; in het gehele u, v -vlak is $f: (u, v) \mapsto 1 + uv$ een continue functie van u en v .

Dus is ook $F^*: (u, v) \mapsto \sin(1 + uv)$ continu in het gehele u, v -vlak.

142 Het differentiëren van samengestelde functies. Kettingregel

Stel dat f en g beide gedefinieerd zijn in een interval I en dat de functiewaarden $f(t)$ en $g(t)$ de verzameling $W = \{(f(t), g(t)) | t \in I\}$ bepalen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Stel verder dat W gelegen is in het domein G van een functie F (van de twee veranderlijken x en y). F bepaalt dan een functie F^* op I door:

$$F^*(t) = F\{f(t), g(t)\}$$

Van f en g veronderstellen we de differentieerbaarheid in I , van F de totale differentieerbaarheid in elk punt van G . Zoals reeds opgemerkt is daartoe voldoende dat

F_x en F_y bestaan en een van beide continu is. Gevraagd wordt nu $\frac{dF^*}{dt}$. Per definitie geldt nu:

$$\frac{dF^*}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F^*(t + \Delta t) - F^*(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F\{f(t + \Delta t), g(t + \Delta t)\} - F\{f(t), g(t)\}}{\Delta t}$$

Op grond van de totale differentieerbaarheid van F geldt:

$$F(x + h, y + k) - F(x, y) = hF_x(x, y) + kF_y(x, y) + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

met $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ als $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Als we stellen $f(t + \Delta t) - f(t) = h$ en $g(t + \Delta t) - g(t) = k$, dan zal als $\Delta t \rightarrow 0$ wegens de continuïteit van f en g ook gelden $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. We hebben dus:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F^*(t + \Delta t) - F^*(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{hF_x\{f(t), g(t)\} + kF_y\{f(t), g(t)\} + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot F_x\{f(t), g(t)\} + \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \cdot F_y\{f(t), g(t)\} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_1 \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

zodat:

$$\frac{dF^*}{dt} = F_x\{f(t), g(t)\}f'(t) + F_y\{f(t), g(t)\}g'(t) \quad (142.1)$$

daar f en g differentieerbaar zijn, en $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ als $\Delta t \rightarrow 0$.

De formule uit (142.1) staat bekend als de **kettingregel** voor samengestelde functies (met één parameter). Wanneer men schrijft $x = f(t)$ en $y = g(t)$, dan luidt de kettingregel:

$$\frac{dF^*}{dt} = F_x(x, y)f'(t) + F_y(x, y)g'(t)$$

Soms voert men nog in: $z = F(x, y)$ en schrijft de kettingregel dan als volgt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Deze regel heeft dan het voordeel dat deze gemakkelijk is te onthouden, maar men moet zich dan wel goed realiseren, wat er bedoeld wordt. Zo is $z = F(x, y)$ een functiewaarde, maar in $\frac{dz}{dt}$ treedt z op als de functie $t \mapsto F\{f(t), g(t)\}$, en in $\frac{\partial z}{\partial x}$

als de functie $(x, y) \mapsto F(x, y)$. Evenzo is x de functiewaarde $x = f(t)$, maar in $\frac{dx}{dt}$ treedt x op als functie $t \mapsto f(t)$. Een analoge opmerking geldt voor y .

Voorbeeld 1

$$F(x, y) = \ln(x^2 + 3y^2)$$

waarin $x = f(t) = \sin t$ en $y = g(t) = \cos t$. F^* is dan gedefinieerd door:

$$F^*(t) = \ln(\sin^2 t + 3 \cos^2 t)$$

Gevraagd $\frac{dF^*}{dt}$.

Oplossing:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 3y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{6y}{x^2 + 3y^2}$$

$$\frac{df}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dg}{dt} = -\sin t$$

Dus is volgens (142.1):

$$\begin{aligned} \frac{dF^*}{dt} &= \frac{2x}{x^2 + 3y^2} \cos t - \frac{6y}{x^2 + 3y^2} \sin t \\ &= \frac{-4 \sin t \cos t}{\sin^2 t + 3 \cos^2 t} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Als:

$$I(t) = \int_{t^2}^{\cos t} \sqrt{1+x^2} dx$$

bepaal $I'(t)$.

Oplossing:

We stellen:

$$F(u, v) = \int_u^v \sqrt{1+x^2} dx$$

waarin:

$$u = f(t) = t^2$$

en:

$$v = g(t) = \cos t$$

Nu is volgens (142.1):

$$\frac{dF^*}{dt} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{df}{dt} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dg}{dt}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \sqrt{1+v^2}$$

$$\frac{df}{dt} = 2t$$

$$\frac{dg}{dt} = -\sin t$$

zodat:

$$I'(t) = -\sqrt{1+u^2} \cdot 2t + \sqrt{1+v^2}(-\sin t)$$

of:

$$I'(t) = -\sqrt{1+t^4} \cdot 2t - \sqrt{1+\cos^2 t} \cdot \sin t$$

Voorbeeld 3

Als:

$$I(t) = \int_0^{t^3} x^2(t^2 - x)^3 dx$$

bepaal $I'(t)$.

Oplossing:

We stellen:

$$F(u, v) = \int_0^u x^2(v - x)^3 dx$$

waarin:

$$u = f(t) = t^3$$

en:

$$v = g(t) = t^2$$

Daar:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = u^2(v - u)^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 3 \int_0^u x^2(v - x)^2 dx$$

$$\frac{df}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dg}{dt} = 2t$$

geldt volgens (142.1):

$$I'(t) = u^2(v - u)^3 \cdot 3t^2 + 3 \int_0^u x^2(v - x)^2 dx \cdot 2t$$

of:

$$I'(t) = 3t^8(t^2 - t^3)^3 + 6t \int_0^{t^3} x^2(t^2 - x)^2 dx$$

Opmerking:

Voor de berekening van $\frac{\partial F}{\partial v}$ hebben we onder het integraalteken gedifferentieerd naar de parameter v . Dat dit geoorloofd is vereist natuurlijk een bewijs, waarvoor we naar par. 145 verwijzen.

143 Het differentiëren van samengestelde functies (vervolg)

We veronderstellen dat f en g beide gedefinieerd zijn in alle $(u, v) \in G$, waarin G een deelverzameling is van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en dat de functiewaarden $f(u, v)$ en $g(u, v)$ de verzameling $W = \{(f(u, v), g(u, v)) | (u, v) \in G\}$ bepalen. Stel verder dat W gelegen is in het domein H van een functie F (van de twee variabelen x en y). F bepaalt nu een functie F^* , gedefinieerd op G :

$$F^*(u, v) = F\{f(u, v), g(u, v)\}$$

Van f en g veronderstellen we het bestaan van de partiële afgeleiden f_u, f_v, g_u, g_v in G , van F veronderstellen we de totale differentieerbaarheid in W .

Het heeft nu zin om te vragen naar de partiële afgeleiden van F^* naar u en v , dus naar F_u^* en F_v^* .

Men kan dan, wanneer men eerst v en daarna u constant houdt, de kettingregel uit par. 142 toepassen en vindt dan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F^*}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \end{array} \right. \quad (143.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F^*}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \end{array} \right. \quad (143.2)$$

of als men stelt $z = F(x, y)$, de onnauwkeurige, on(t)houdbare formules:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \end{array} \right. \quad (143.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right. \quad (143.4)$$

De formules (143.1)...(143.4) worden ook wel de **kettingregel** voor samengestelde functies genoemd, doch nu voor twee parameters.

Voorbeeld 1

Gegeven is:

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

Als nieuwe onafhankelijk veranderlijken worden ingevoerd u en v bepaald door:

$$x = f(u, v) = 3u + 4v - 5$$

$$y = g(u, v) = 2u - v + 4$$

Dan wordt F^* bepaald door:

$$F^*(u, v) = (3u + 4v - 5)^2 + (2u - v + 4)^2$$

Gevraagd worden: $\frac{\partial F^*}{\partial u}$ en $\frac{\partial F^*}{\partial v}$.

Oplossing:

Volgens (143.1) geldt:

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 3$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 2$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial u} &= 6x + 4y \\ &= 6(3u + 4v - 5) + 4(2u - v + 4) \\ &= 26u + 20v - 14 \end{aligned}$$

Evenzo volgt uit (143.2):

$$\frac{\partial F^*}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 4$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -1$$

zodat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial v} &= 8x - 2y \\ &= 8(3u + 4v - 5) - 2(2u - v + 4) \\ &= 20u + 34v - 48 \end{aligned}$$

Controle:

Vul de waarden van f en g in de gegeven functie F met $F(x, y) = x^2 + y^2$ in en bepaal rechtstreeks $\frac{\partial F^*}{\partial u}$ en $\frac{\partial F^*}{\partial v}$.

Voorbeeld 2

Gegeven is $F(x, y)$. Wij voeren poolcoördinaten in volgens:

$$x = f(r, \varphi) = r \cos \varphi$$

$$y = g(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

Gevraagd wordt $\frac{\partial F^*}{\partial \varphi}$ en $\frac{\partial F^*}{\partial r}$ uit te drukken in $x, y, \frac{\partial F}{\partial x}$ en $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial \varphi} &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} (-r \sin \varphi) + \frac{\partial F}{\partial y} (r \cos \varphi) \\ &= -y \frac{\partial F}{\partial x} + x \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial F}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial F}{\partial y} \sin \varphi \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial y}
 \end{aligned}$$

144 Functies van meer dan twee veranderlijken

Het is duidelijk dat men de theorie die in de vorige paragrafen behandeld is kan uitbreiden tot die over functies van meer dan twee veranderlijken. Men gaat dan uit van een verzameling van n -tupels (x_1, x_2, \dots, x_n) met $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), die men definitieverzameling G noemt. Is nu aan elk element (x_1, \dots, x_n) uit G juist één getal u toegevoegd, dan is hierdoor een functie op G gedefinieerd.

Notatie:

$$u = f(x_1, \dots, x_n)$$

De invoering van de begrippen: limiet, continuïteit, partiële differentiaalquotiënten, differentieerbaarheid, samengestelde functie, enz. gaat geheel analoog als bij functies van twee veranderlijken.

Ook de stelling van par. 138 over de volgorde van differentiatie geldt voor functies van meer veranderlijken, mits aan de voorwaarden van continuïteit van de betrokken differentiaalquotiënten is voldaan. Door voortdurende verwisseling van twee op elkaar volgende differentiaties kan men elke volgorde van differentiatie verkrijgen. Zo is bijv. voor drie veranderlijken:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x}$$

Integralen die van een parameter afhangen

145 Eigenlijke integralen

In deze paragraaf zullen we integralen beschouwen waarin een parameter optreedt onder het integraalteken, in één of beide grenzen of zowel onder het integraalteken als in één of beide grenzen.

a Stel f is een continue functie van twee veranderlijken x en y , gedefinieerd op een rechthoek $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ in het (x, y) -vlak.

We beschouwen:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

en bewijzen de volgende stellingen:

Stelling 1

Als f continu is in R , dan is F continu in elke y van $[c, d]$.

Bewijs:

Onderstel $y \in \langle c, d \rangle$, dan moeten we bewijzen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{F(y+h) - F(y)\} = 0 \quad (145.1)$$

Nu is:

$$F(y+h) - F(y) = \int_a^b \{f(x, y+h) - f(x, y)\} dx$$

Daar f continu is in R , is f uniform continu in R (zie par. 135), d.w.z. bij iedere

$\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta(\varepsilon)$, *onafhankelijk van* (x, y) , en wel zo, dat:

$$|f(x, y + h) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

als $|h| < \delta(\varepsilon)$. Dus geldt:

$$|F(y + h) - F(y)| \leq \int_a^b |f(x, y + h) - f(x, y)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon$$

als $|h| < \delta(\varepsilon)$, en dit is juist (145.1).

Is $y \in [c, d]$, dan verloopt het bewijs analoog met voor de hand liggende wijzigingen.

Stelling 2

Stel dat f een integreerbare functie is van x voor elke waarde van $y \in [c, d]$, en dat de partiële afgeleide f_y van f naar y bestaat en een continue functie is van x en y in R , dan is F differentieerbaar naar y en de afgeleide is gegeven door:

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx$$

Bewijs:

We moeten bewijzen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(y + h) - F(y)}{h} - \int_a^b f_y(x, y) dx \right\} = 0 \quad (145.2)$$

Nu is:

$$F(y + h) - F(y) = \int_a^b \{f(x, y + h) - f(x, y)\} dx \quad (145.3)$$

Passen we de middelwaardestelling toe op f als functie van y (het is eenvoudig in te zien dat de voorwaarden hiervoor vervuld zijn), dan vinden we:

$$f(x, y + h) - f(x, y) = hf_y(x, y + \theta h) \quad (145.4)$$

Hierbij hangt θ af van x , y en h , terwijl $0 < \theta < 1$.

Uit (145.3) en (145.4) volgt:

$$\frac{F(y + h) - F(y)}{h} - \int_a^b f_y(x, y) dx = \int_a^b \{f_y(x, y + \theta h) - f_y(x, y)\} dx$$

Nu is f_y continu in R , dus uniform continu in R , d.w.z. bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta(\varepsilon)$, *onafhankelijk van* x en y , en wel zo, dat:

$$|f_y(x, y + \theta h) - f_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

als $|h| < \delta$. Hieruit volgt:

$$\left| \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b f_y(x, y) dx \right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

als $|h| < \delta$, waarmee (145.2) bewezen is.

Voorbeeld

Laat F gedefinieerd zijn voor $0 \leq x \leq 1$ en $0 < c \leq y \leq d$ door:

$$F(y) = \int_0^1 \ln(4y^2 + x^2) dx$$

De functie f , gedefinieerd door $f(x, y) = \ln(4y^2 + x^2)$, heeft de afgeleide f_y naar y

$$\text{waarvoor geldt: } f_y(x, y) = \frac{8y}{4y^2 + x^2}.$$

Daar f_y continu is in de rechthoek: $0 \leq x \leq 1$, $0 < c \leq y \leq d$ geldt dus volgens stelling 2:

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{8y}{4y^2 + x^2} dx = 4 \arctan \frac{x}{2y} \Big|_0^1 = 4 \arctan \frac{1}{2y}$$

$F'(y)$ bestaat dus in elk interval op de positieve y -as dat $y = 0$ niet bevat. Analoog bewijst men dat dit ook geldt voor elk interval op de negatieve y -as dat $y = 0$ niet bevat.

b Als de parameter optreedt in één of beide grenzen, en eventueel ook onder het integraalteken, past men de kettingregel voor samengestelde functies van twee veranderlijken toe (zie par. 142).

Voorbeelden van dergelijke integralen zijn reeds in deze par. 142 gegeven.

146 Oneigenlijke integralen

We zullen in deze paragraaf oneigenlijke integralen behandelen waarbij in de integrand een parameter y optreedt. We beperken ons daarbij eerst tot *oneigenlijke integralen van de eerste soort* (zie ook par. 75). Als zo'n integraal convergent is, dan wordt daardoor een functie van de parameter y gedefinieerd.

Laat f een functie zijn van de variabelen x en y , gedefinieerd op de strook S in het x, y -vlak, bepaald door $S = \{(x, y) | x_0 \leq x; c \leq y \leq d\}$ (zie fig. 119).

Verder veronderstellen we dat $\int_{x_0}^A f(x, y) dx$ bestaat voor alle $A \geq x_0$ en alle $y \in [c, d]$. Er is dan een functie F , gedefinieerd voor $y \in [c, d]$ door:

$$F(y) = \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx \quad (146.1)$$

indien deze oneigenlijke integraal van de eerste soort convergent is voor elke $y \in [c, d]$.

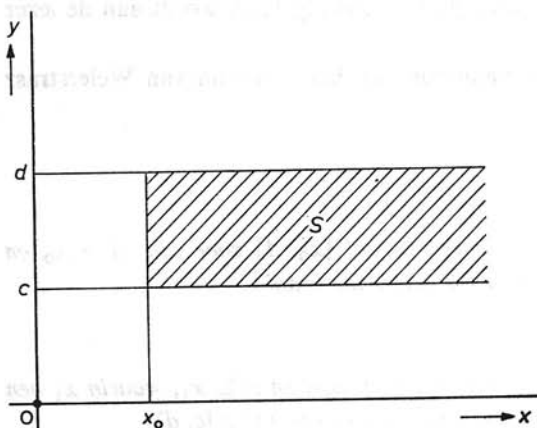


Fig. 119

We willen nu bezien onder welke voorwaarden F continu, integreerbaar en differentieerbaar is. Het zal blijken dat de behandeling van deze theorie analoog is aan die van functies gedefinieerd door oneindige reeksen. Als we nl. vergelijken $\int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx$ met $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(y)$, dan blijkt de „discrete” variabele n te zijn overgegaan in de „continue” variabele x , en de sommatie te zijn vervangen door integratie. In beide gevallen hebben we te maken met een functie van y . Ook hier zal het begrip uniforme convergentie een rol spelen.

Definitie

Stel, dat de integraal (146.1) convergent is voor alle y met $c \leq y \leq d$. We noemen nu de integraal (146.1) uniform convergent op $[c, d]$, als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal $A(\varepsilon)$ bestaat, afhankelijk van ε maar niet van y , en wel zo, dat:

$$|F(y) - \int_{x_0}^A f(x, y) dx| < \varepsilon$$

indien $A > A(\varepsilon)$, en wel voor alle $y \in [c, d]$.

Deze definitie is analoog aan die van uniforme convergentie van functiereeksen (zie par. 112).

Het is daardoor ook eenvoudig de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 1

Laat f een functie zijn van de variabelen x en y , gedefinieerd en continu in de strook $S = \{(x, y) | x_0 \leq x; c \leq y \leq d\}$, en laat de integraal gedefinieerd door (146.1) uniform convergent zijn op het y -interval $[c, d]$, dan is F een continue functie van y in $[c, d]$.

Het bewijs is geheel analoog aan dat van par. 113, stelling 1, en wordt aan de lezer overgelaten.

Ook hier leidt men zonder moeite het analogon van het criterium van Weierstrasz (zie par. 114) af. Dit luidt als volgt:

Stelling 2

Laat h een functie zijn, integreerbaar op het interval $[x_0, A]$ voor alle $A > x_0$ en $h(x) \geq 0$ voor $x \geq x_0$. Stel verder dat de oneigenlijke integraal

$$\int_{x_0}^{\infty} h(x) dx$$

convergent is. Stel ook dat $|f(x, y)| \leq h(x)$ voor $c \leq y \leq d$ en $x \geq x_1$, waarin x_1 een constante is $\geq x_0$, dan is de integraal (146.1) uniform convergent op $[c, d]$.

Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

Men kan ook stellingen afleiden voor oneigenlijke integralen van de tweede soort. Deze afleidingen verlopen geheel als die bij integralen van de eerste soort, waarbij men de voor de hand liggende modificaties in de notaties moet aanbrengen. We zullen dit hier niet verder uitwerken, maar volstaan met een voorbeeld.

Voorbeeld 1

We beschouwen de gammafunctie Γ voor positieve p , gedefinieerd door

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \quad (p > 0) \quad (146.2)$$

In par. 81 is bewezen dat deze oneigenlijke integraal, zowel opgevat als integraal van de eerste als van de tweede soort, convergent is voor $p > 0$ en divergent voor $p \leq 0$.

We zullen nu bewijzen dat Γ een continue functie is van p voor elke $p \in [c, d]$ met $0 < c < d$.

Voor (146.2) schrijven we:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-t} t^{p-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \quad (146.3)$$

Met betrekking tot de tweede integraal merken we het volgende op. Voor $t \geq 1$ geldt:

$$0 < e^{-t} t^{p-1} \leq e^{-t} t^{d-1}$$

en daar $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{d-1} dt$ (d vast, $d > 0$) convergent is, is volgens stelling 2 de tweede integraal in (146.3) uniform convergent, en stelt deze een continue functie voor van p volgens stelling 1.

Met betrekking tot de eerste integraal merken we op:

Is $p \geq 1$, dan is de eerste integraal in (146.3) eigenlijk, en stelt volgens par. 145, stelling 1, een continue functie van p voor.

Is $p < 1$, dan is de eerste integraal oneigenlijk van de tweede soort; we kunnen dan het analoog van stelling 2 voor integralen van de tweede soort toepassen. Er geldt dan nl.:

$$0 < e^{-t} t^{p-1} \leq e^{-t} t^{c-1} \text{ als } 0 < t \leq 1 \text{ en } 0 < c \leq p \leq d.$$

Nu is

$$\int_0^1 e^{-t} t^{c-1} dt$$

convergent (voor bewijs zie par. 81), zodat de eerste integraal in (146, 3) ook uniform convergent is, en dus een continue functie van p voorstelt. De functie Γ is dus als som van twee continue functies continu.

Voor het integreren van een functie, gedefinieerd door een integraal die een parameter bevat, geldt de volgende stelling.

Stelling 3

Indien f een functie is van de variabelen x en y , gedefinieerd en continu in de strook S , bepaald door $S = \{(x, y) | x_0 \leq x, c \leq y \leq d\}$, en indien $\int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx$ uniform convergeert op het y -interval $[c, d]$, dan geldt:

$$\int_{x_0}^{\infty} \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy \quad (146.4)$$

De strook S is afgebeeld in fig. 119.

Opmerking 1:

De integralen in (146.4) stellen *herhaalde integralen* voor. In het linkerlid stelt de integrand van de integraal over x zelf een integraal voor over y . Op de theorie van de herhaalde integralen zal in deel 2 uitvoerig worden teruggekomen.

Opmerking 2:

De integraal $\int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx$ in het rechterlid van (146.4) stelt op grond van de uniforme convergentie volgens stelling 1 een continue functie voor van y op $[c, d]$. De herhaalde integraal $\int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy$ bestaat dus inderdaad.

Bewijs van stelling 3

We moeten aantonen:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x_0}^A \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy$$

We beschouwen daartoe:

$$\left| \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy - \int_{x_0}^A \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \right| \quad (146.5)$$

We merken nu op dat in de herhaalde integralen over *eindige* intervallen de integratievolgorde verwisseld mag worden, zodat:

$$\int_{x_0}^A \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^A f(x, y) dx \right\} dy$$

Het bewijs hiervan vindt men in deel 2, pag. 185 e.v.

Voor (146.5) kan men dus schrijven:

$$\left| \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy - \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^A f(x, y) dx \right\} dy \right| =$$

$$\left| \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx - \int_{x_0}^A f(x, y) dx \right\} dy \right| =$$

$$\left| \int_c^d \left\{ \int_A^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy \right|$$

Op grond van de uniforme convergentie van $\int_A^{\infty} f(x, y) dx$ bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon)$, *onafhankelijk van y*, en wel zo, dat:

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}$$

indien $A > N(\varepsilon)$.

Voor zo'n A geldt dan:

$$\left| \int_c^d \left\{ \int_A^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy \right| < \frac{\varepsilon}{d - c} (d - c) = \varepsilon$$

en dus geldt, zie (146.5):

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x_0}^A \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy$$

en dus (146.4).

Voor het differentiëren van een functie, gedefinieerd door een integraal, dus het „differentiëren onder het integraalteken,” geldt de volgende stelling.

Stelling 4

Laat f gedefinieerd zijn als in stelling 3, en laat verder de partiële afgeleide f_y van f naar y continu zijn in S , en de integraal $\int_{x_0}^{\infty} f_y(x, y) dx$ uniform convergent zijn op $[c, d]$, dan is de integraal $F(y) = \int_{x_0}^{\infty} f(x, y) dx$ differentieerbaar naar y voor $y \in [c, d]$ en geldt:

$$F'(y) = \int_{x_0}^{\infty} f_y(x, y) dx \quad (146.6)$$

Bewijs:

Stel $G(y) = \int_{x_0}^{\infty} f_y(x, y) dx$

Deze integraal bestaat volgens het gegeven en is een continue functie van y , en er geldt dus voor $c \leq t \leq d$:

$$\int_c^t G(y) dy = \int_c^t \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f_y(x, y) dx \right\} dy$$

Volgens stelling 3 geldt:

$$\int_c^t \left\{ \int_{x_0}^{\infty} f_y(x, y) dx \right\} dy = \int_{x_0}^{\infty} \left\{ \int_c^t f_y(x, y) dy \right\} dx$$

en dus:

$$\int_c^t G(y) dy = \int_{x_0}^{\infty} \{f(x, t) - f(x, c)\} dx = F(t) - F(c)$$

Volgens het gegeven en stelling 1 is G een continue functie van y , en is $\int_c^t G(y) dy$ differentieerbaar.

Differentiatie naar t geeft:

$$G(t) = F'(t)$$

voor elke t met $c \leq t \leq d$. Hieruit volgt (146.6).

Voorbeeld 2

We beschouwen weer de in voorbeeld 1 genoemde Γ -functie, gedefinieerd in (146.2). Op dezelfde wijze als in voorbeeld 1 is aangegeven, nl. door splitsing van de integraal in (146.2) (zie 146.3), kan men aantonen dat de integralen:

$$\int_0^1 e^{-t} t^{p-1} \ln t dt \quad \text{en} \quad \int_1^{\infty} e^{-t} t^{p-1} \ln t dt$$

uniform convergent zijn. Ook kan men dit uitvoeren met hogere afgeleiden van t^{p-1} . Volgens stelling 4 is dan:

$$\Gamma'(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} \ln t dt$$

en in het algemeen:

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} \ln^n t dt$$

Register

- Abel*, stelling van — 341.
Absolute waarde 31, 149.
Absoluut convergente reeks 304, —
divergente reeks 304.
Afbeelding 27, 399.
Afgeleide 57, hogere — 57, 413, linker
— 76, —machtreeks 335, partiële —
410, rechter — 76, tweede — 57, 413.
Afgesloten gebied 402.
Aftelbare verzameling 260.
Alembert, kenmerk van d' — 300,
limietkenmerk van d' — 301.
Algebraïsche getallen 19, —
vergelijkingen 367.
Alternerende reeks 306.
Apollonius, cirkel van — 166.
Archimedes, stelling van — 16.
Arcus sinus 134, — cosinus 134, —
tangens 135, — cotangens 136.
Area sinh 382, — cosh 392, — tanh 392.
Argument 149.
Asymptotische ontwikkelingen 365.
- Beeldpunt* 148, — oppervlak 403, —
vector 148.
Begrensd 17, -e verzameling 259, 402.
Benaderen van wortels 374, grafische
methode voor — 376.
- Benedengrens van integraal* 93.
Bepaalde integraal 93.
Bereik 27, 399.
Bernoulli, ongelijkheid van — 22.
Biinjectie 27.
Binomialcoëfficiënt 24, — reeks 334, —
vergelijking 161.
Binomium van Newton 24.
Bolzano-Weierstrasz, stelling van — 259.
Bonnet, stelling van — 97.
Booglengte 64.
Bovengrens van integraal 93.
Bovenintegraal 88, — som 87.
Breuken, partiële — 214.
Briggse logaritmen 133.
Brouncker, reeks van — 307.
Buigpunt 192, 200, —raaklijn 200.
- Cauchy*, algemeen convergentiekenmerk
van — 264, 287, kenmerk van — 298,
limietkenmerk van — 299, 1e
limietstelling van — 274, 2e
limietstelling van — 277, ongelijkheid
van—Schwarz 33, restterm van —321.
Codomein 27, 399.
Commutativiteit 14.
Complex getal 147, toegevoegd — getal
152, —v1ak 147, -e wortel 154, 378.

- Complement* 400.
Concaaf 200.
Contactpunt 401.
Continu 45, links — 45, rechts — 45, —
 in gebied 408, — interval 45, -e functie
 45, 408, uniform — 47, 408.
Continuïteit 45, 408.
Convergent, absoluut — 304, relatief of
 voorwaardetijk — 306, uniform —
 346, 351.
Convergentie van rij 263, — van reeks
 285, — van functierijen 346, — van
 functiereeksen 347, — interval 313, —
 straal 313.
Convex 200.
Cosinus hyperbolicus 174, 334.
Criterium van Weierstrasz: 354, 440.
Cyclometrische functies 133.
Definitieverzameling 27, 399.
Differentiaal 81, —operator 58,
 —quotiënt 52, linker —quotiënt 76,
 rechter —quotiënt 76, partiële
 —quotiënt 410, totale — 418.
Differentie 53, —quotiënt 53.
Differentieerbaar 51, 56, 57, op interval
 76, totaal — 415.
Differentiëren, logaritmisch — 126,
 numeriek — 386 e.v., partieel — 411,
 termsgewijze — 340.
Discontiniu 46.
Discontinuiteiten 242.
Distributieve wetten 14, 30.
Divergent, absoluut — 304, -e reeks 285,
 365, -e rij 263.
Domein 27, 399.
Driehoek van Pascal 23, —s ongelijkheid
 31, 63, 150.
Driepuntsinterpolatieformule 384.
Een-eenduidig 27.
Eenduidigheid limiet 36, 40, 259.
Entierfunctie 46.
Euler, regel van — 384.
Exponentiële functie 119, algemene —
 functie 122, — limieten 130, —
 ongelijkheden 126, — functie van een
 complex veranderlijke 173.
Extremen 190, 195.
Facultetsfunctie 258.
Formule van Maclaurin 321, — van
 Stirling 279, 393, —van Taylor 323.
Fout, schatting van de — 382.
Functie, afgeleide — 57, cyclometrische
 —s 133, definitie van een — 26, 398,
 exponentiële — 119, gehele rationale
 47, hyperbolische — 174, 388, inverse
 — 114, logaritmische — 109,
 primitieve — 77, samengestelde — 69,
 420.
Functiereeks 353.
Functierij 261, 345.
Gammafunctie 257, 440, 443.
Gebied 394, afgesloten — 402.
Geïsoleerd punt 401.
Gelijkvormigheidstransformatie 169.
Geordend lichaam 16.
Gereduceerde omgeving 30, 399.
Gesloten interval 20 — verzameling 400.
Gespiegelde transformatie 170.
Getallen, algebraïsche 19, complexe —
 147, gehele — 15, natuurlijke — 13,
 irrationale — 19, rationale — 15, reële
 — 19, transcendente — 19, zuiver
 imaginaire — 148, — rechte 20.
Getallenrijen 261.
Gradiënt 420.
Grootste benedengrens 17.
Harmonische reeks 292.
Herhaalde integraal 441.
Hoofdstelling van de integraalrekening 93.
Hoofdwaarde van het argument 149, —
 van de divergente integraal 251, 256,
 — van de logaritme 177.
Hôpital, regel van de l' — 187.

- Hyperbolische functies* 174, 388.
- Hyperharmonische reeks* 292.
- Identieke functie* 47.
- Iminaire* as 147, — deel 148, — eenheid 147.
- Infimum* 17.
- Injectie* 27.
- Insluitingsstelling* 44.
- Integraal*, bepaalde — 93, onbepaalde — 93, — criterium 290, herhaalde — 441, — met parameter 436, oneigenlijke — van de 1e soort 243, 428, van de 2e soort 252, 440.
- Integraalafzets* 239.
- Integrand* 93.
- Integratie*, numerieke — 107, 383, partiële — 84, 103, — veranderlijke 79, 93.
- Integreerbaar* 88.
- Integreren* 79, numeriek — 383 e.v., termsgewijze — 341, 361.
- Integriteitsgebied* 15.
- Interpolatie* 379, — formule van Lagrange 380.
- Interval* 15, — stelling 47.
- Invers element* 16.
- Inverse functie* 114.
- Inversie* 170.
- Invoeren* van nieuwe veranderlijken 79, 432.
- Inwendig punt* 30, 399.
- Iteratiemethode* 377.
- Kenmerk* van Cauchy 298, — van d'Alambert 300, — van Leibniz 306.
- Kettingregel* 73, 429.
- Kleinste bovengrens* 17.
- Kubische interpolatie* 380.
- K-voudige wortel* 369.
- Kwadratische interpolatie* 380.
- Lagrange*, interpolatieformule van — 380, restterm van — 322, veeltermen van — 380.
- Landau*, ordesymbool van — 317.
- Leibniz*, kenmerk van — 306, regel van — 208.
- Lichaam*, geordend 16, — der complexe getallen 156.
- Limietbegrip* 34, 405, — definitie 35, 36, 406, — functie 345, oneigenlijke — 40, linker — 37, rechter — 37, — van een rij 263, 345.
- Lineaire interpolatie* 380.
- Linkeromgeving* 38.
- Links continu* 45.
- Logaritmen*, algemene — 132, gewone (briggse) — 133, natuurlijke — 109, 133, neperiaanse — 133.
- Logaritmisch differentiëren* 126, algemene -e functie 132, -e functie 109, — limieten 130, — ongelijkheden 126, -e functie van een complexe veranderlijke 177.
- Machtrees* 312, afgeleide van — 339.
- Machtsfunctie*, algemene — 123.
- Maclaurin*, formule van — 321.
- Majorant* 245, 293, — encriterium 1 246, 293, — encriterium 2 249, 297.
- Maximum*, relatief — 190.
- Meervoudige wortel* 369.
- Middelwaardstelling* 182, — voor twee functies 186, — en van de integraalrekening 96, 98.
- Minimum*, relatief — 190.
- Minorant* 293.
- Möbiustransformatie* 167.
- Modulus* van het briggse stelsel 133, — van een complex getal 149, — van een getal 31.
- Moivre* stelling van de — 153.
- Monotoon* 111, 265, — dalend 112, 128, 183, 265, — stijgend 111, 128, 183, 265.
- Monotone rijen* 265.
- Monotonie wet* 14, 15.

- Natuurlijke* getallen 13.
Natuurlijke logaritmen 109, 133.
Neperiaanse logaritmen 133
Neutraal element 14, 15.
Newton, binomium van — 24, regel van — 376.
Nuldelers 15.
Numerieke differentiatie 384 e.v., — integratie 103, 383 e.v.

Omgeving 30, 400, ε — 30, 399, gereduceerde — 30, 399, volle — 399.
Onafhankelijk veranderlijke 27, 403.
Onbepaalde integraal 93.
Onderintegraal 88.
Ondersom 87.
Oneigenlijke integraal van de 1e soort 243, 437, van de 2e soort 252, 440, — limiet 40.
Ongelijkheden 197, exponentiële — 126, logaritmische — 126.
Ongelijkheid van Bernoulli 22, — van Cauchy -Schwarz 33.
Open interval 20, — puntverzameling 400.
Ophopingspunt 259.
Oppervlakte begrip 86.
Ordering 14
Ordesymbool van Landau 317.

Parabolische interpolatie 380, — regel 108, 385.
Partiële breuken 214, — afgeleide 410, — integratie 84, 103, — sommen 284.
Pascal, driehoek van — 23.
Primitieve functie 77.
Produkt van Wallis 396.
Projectieve transformatie 167.
Puntransformatie 167.
Puntverzameling, open — 400, gesloten — 400.

Radiaal 64.
Rand 401.

Randextreem 192
Randpunt 20, 401.
Rationale getallen 16, — wortels 370.
Rechteromgeving 38.
Rechthoeksregels 106.
Rechts continu 45.
Recurrente betrekking 207.
Recursieformule 207.
Reëel deel 148, — getal 19.
Reële as 147.
Reeks 284, alternerende — 306, — begrip 284, — van Brouncker 307, divergente — 285, 365, harmonische — 292, hyperharmonische — 292, - ontwikkeling van Taylor-Maclaurin 330, termen van een — 284, 350, waarde van een — 366, — met complexe termen 311.
Regel van Euler 384, — van de l'Hôpital 187, - van Leibniz 208, — van Newton 376, parabolische — 108, 385, rechthoeks — 106, — van Simpson 108, 384, trapezium — 107, 384.
Regula falsi 375.
Relatief convergent 306, — maximum 190, — minimum 190.
Restterm van Cauchy 321, — van Lagrange 322, schatting van de — 363.
Richtingsafgeleide 419.
Riemann-integraal 88, — som 104.
Rolle, theorema van — 180.
Rotatie 168.
Rij 261, begrensde — 262, oneindige — 262, monotone - 265, termen van een 262, — met complexe termen 280.

Samengestelde functie 69, 426.
Samenhangend 402.
Schatting van de restterm 363, — van de fout bij interpolatie 382.
Simpson, regel van — 108, 384.
Singulariteit 251, 255.

- Sinus hyperbolicus* 174, 334.
Som van een reeks 285, 366, — functie van een reeks 350.
Sommeerbaarheid 285, 366.
Stapgrootte 380.
Stelling van Abel 343, — van Archimedes 16, — van Bolzano-Weierstrasz 259, — van Bonnet 97, — van de Moivre 153, — van Weierstrasz 49.
Stirling, formule van — 279, 393.
Substitutieregels 100.
Superpositie 89.
Supremum 17.
Surjectie 27.
Tangens hyperbolicus 389.
Taylor, formule van — 323, reeksontwikkeling van — Maclaurin 340.
Tegengesteld element 15.
Theorema van Rolle 180.
Toegevoegd complex getal 152.
Totaal differentieerbaar 415.
Totale afgeleide 416.
Totale differentiaal 418.
Transcendente getallen 19.
Transformatie, gebroken lineaire — 167, gelijkvormigheids — 169, gespiegelde — 170, Möbius — 167, projectieve — 167, — formules voor de draaiing 168.
Transitieve wet 14.
Translatie 167, — formules 168.
Trapeziumregel 107, 384.
Trichotomiewet 14.
Tussenwaardstelling 51, 410.
Uniform continu 47, 408.
Uniforme convergentie van reeksen 351, — van rijen 350, — van oneigenlijke integralen 439.
Uitwendig punt 400.
Vector 145, gebonden — 147, vrije — 147, — ruimte 145.
Veeltermen van Lagrange 380.
Veranderlijke, afhankelijk — 27, 403, onafhankelijk — 27, 403.
Verdichtingspunt 259, 401.
Vereenvoudigingswet 13, 14, 15.
Verfijning 88.
Vergelijking, algebraïsche — 367, wederkerige — 161.
Verplaatsing 168.
Vierkantsvergelijking 157.
Vlak, complexe — 147.
Voerhoek 149.
Volledige inductie 21, 149.
Voorwaardelijk convergent 306.
Waardenverzameling 27, 399.
Waarde van een reeks 366.
Wallis, produkt van — 396.
Wederkerige vergelijking 161.
Weierstrasz, criterium van — 354, 440, stelling van — 49.
Zuiver imaginair getal 148.

Inhoud van ANALYSE deel 2, functies van twee of meer veranderlijken

Hoofdstuk 1		19 Vectorveld; vectorfunctie; scalair veld; scalaire functie	88
<i>Functies van twee veranderlijken</i>		20 De gradiënt van een scalair veld	90
1	Continuïteit en differentieerbaarheid	21 De divergentie van een vectorveld	92
2	Gemengde partiële afgeleiden	22 De rotatie van een vectorveld	93
3	Homogene functies. Stelling van Euler	23 Betrekkingen tussen gradiënt, divergentie en rotatie	94
4	De middelwaardstelling voor een functie van twee veranderlijken	24 Vectoranalyse	95
5	De formules van Taylor voor een functie van twee veranderlijken		
6	Invoeren van nieuwe variabelen		
 Hoofdstuk 2		Hoofdstuk 5	
<i>Impliciete functies</i>		<i>Vlakke krommen</i>	
7	Impliciete functies van één veranderlijke	25 Parametervoorstelling van een kromme	100
8	Impliciete functies van twee veranderlijken	26 Differentiatie van een in parameter-vorm gegeven functie	105
9	Impliciete functies van één veranderlijke, bepaald door twee vergelijkingen	27 Voorstelling van een kromme in poolcoördinaten	108
		28 De booglengte van een vlakke kromme	112
		29 De booglengte als parameter	122
		30 Kromming en kromtestraal	123
		31 Tangentiële vector en normaalvector	125
		32 Uitdrukkingen voor de kromming en de kromtestraal	128
		33 Voorbeelden van berekening van kromming en kromtestraal	133
 Hoofdstuk 3		Hoofdstuk 6	
<i>Extreme waarden</i>		<i>Ruimtekrommen</i>	
10	Extreme waarden bij impliciet gegeven functies van één variabele	34 Parameter- en vectorvoorstelling van een ruimtekromme	137
11	Extremen bij functies van twee variabelen	35 Eliminatie van de parameter	139
12	Voldoende voorwaarden voor extremen bij een functie van twee veranderlijken	36 Raaklijn aan een ruimtekromme; normaalvlak	141
13	De methode van de kleinste kwadraten	37 Booglengte van een ruimtekromme	142
14	Extremen met nevenvoorwaarden bij functies van één veranderlijke	38 Triëder van Trenet-Serret	145
15	Extreme waarden bij impliciet gegeven functies van twee veranderlijken	39 Formules van Trenet-Serret	147
16	Extreme waarden bij functies van meer dan twee veranderlijken met nevenvoorwaarden	40 Meetkundige betekenis van de kromming	148
17	De multiplicatorenmethode van Lagrange	41 Meetkundige betekenis van de torsie	150
		42 Meetkundige betekenis van het osculatievlak	152
		43 Voorbeeld van berekening van de in dit hoofdstuk ingevoerde grootheden	154
		44 Raakvlak aan een oppervlak	157
 Hoofdstuk 4		Hoofdstuk 7	
<i>Vectoranalyse</i>		<i>Lijnintegralen</i>	
18	Vectorruimten	45 Het begrip lijnintegraal	161

46	Existentie van de lijnintegraal	163	74	Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van cilindercoördinaten	282
47	Eigenschappen van de lijnintegraal	165	75	Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van bolcoördinaten	284
48	Voorbeelden van lijnintegralen	166	76	Oppervlakte van omwentelingslichamen	288
49	Fysische betekenis van de lijnintegraal. Massadichtheid	169			
50	Arbeidsintegraal	172			
	Hoofdstuk 8				
	<i>Meervoudige integralen</i>				
51	Inhoudsbegrip; dubbelintegraal	176		Hoofdstuk 9	
52	Existentie van de dubbelintegraal van continue functies	179		<i>Integralstellingen</i>	
53	Eigenschappen van dubbelintegralen	183	77	Oppervlak-integralen	292
54	Expliciete berekening van de dubbelintegraal. Herhaalde integraal bij constante grenzen	185	78	Inleidende opmerkingen over integraalstellingen	296
55	Riemann-sommen bij dubbelintegralen	189	79	Het divergentietheorema (Stelling van Gauss)	299
56	Dubbelintegraal over algemene integratiegebieden	190	80	Stellingen van Green voor de ruimte	306
57	Berekening van de dubbelintegraal over algemene integratiegebieden	194	81	De stelling van Stokes	308
58	De stelling van Green voor het platte vlak	201	82	Fysische betekenis van divergentie, rotatie en de integraalstellingen	314
59	Gevolgen van de stelling van Green; exacte differentiaal	211			
60	Kromlijnige coördinaten; inverse transformatie	220		Hoofdstuk 10	
61	Existentievoorwaarden voor de inverse transformatie	228		<i>Massa. Zwaartepunt. Traagheidsmoment</i>	
62	Invoeren van nieuwe variabelen in een dubbelintegraal	232	83	Massa en massadichtheid van een oppervlak en van een lichaam	318
63	Meetkundige toelichting bij de transformatie van dubbelintegralen	238	84	Statisch moment, zwaartepunt, traagheidsmoment van systemen van een eindig aantal massapunten	320
64	Enkele toepassingen van transformatie van dubbelintegralen	240	85	Statisch moment, zwaartepunt, traagheidsmoment bij continue massaverdeling	322
65	Cilindercoördinaten in dubbelintegralen	242	86	Verschuivingsstelling voor vlakke traagheidsmomenten	329
66	Oneigenlijke integralen 1	248	87	Regels van Guldin (Pappus)	331
67	Oneigenlijke integralen 2	253			
68	Drievoudige integraal	255		Hoofdstuk 11	
69	Cilindercoördinaten en bolcoördinaten	258		<i>Gamma- en bètafunctie</i>	
70	Berekening van de oppervlakte van een vlakke figuur	266	88	De gammafunctie	334
71	Algemene formules voor inhouden. Inhouden van omwentelingslichamen	269	89	De bètafunctie	336
72	Oppervlakte van een gebogen vlak in rechthoekige coördinaten	275		Register	342
73	Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van kromlijnige coördinaten	280			

Inhoud van ANALYSE deel 3, differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 1

Gewone differentiaalvergelijkingen

1 De gewone differentiaalvergelijking; orde en graad	11
2 Het optreden van differentiaalvergelijkingen	14
3 De differentiaalvergelijking van de eerste orde	18
4 Meetkundige betekenis van de D.V. van de eerste orde. Lijnelementenveld. Isoklinen	20
5 Existentiebewijs voor de oplossing van $y' = F(x, y)$	25
6 Overzicht van elementaire methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde	33
7 Homogene differentiaalvergelijkingen	41
8 De exacte differentiaalvergelijking. Integrerende factor	50
9 De lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde. De vergelijking van Bernoulli	57
10 Lineaire differentiaalvergelijkingen van de n -de orde ($n > 1$)	67
11 Lineaire afhankelijkheid van functies. Determinant van Wronski	70
12 De homogene differentiaalvergelijking van de orde n ($n > 1$)	75
13 De homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten	79
14 De homogene lineaire differentiaalvergelijking van Euler	84
15 De inhomogene lineaire differentiaalvergelijking	87
16 De trillingsvergelijking; de vrije trilling	90
17 De elektrische keten zonder generator	96
18 De gedwongen trilling	98
19 De elektrische keten met generator	104
20 Variatie van constanten	107
21 Het oplossen van een differentiaalvergelijking door middel van ordeverlaging	113
22 Orthogonale trajectoriën	121

Hoofdstuk 2

Het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van machtreeksen

23 Oplossing van een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde met behulp van machtreeksen	131
24 Gewone en singuliere punten van een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde	138
25 Oplossingen in een omgeving van een gewoon punt. Differentiaalvergelijking van Legendre	141
26 Oplossingen in een omgeving van een regulier-singulier punt. Differentiaalvergelijking van Bessel	145

Hoofdstuk 3

Simultane differentiaalvergelijkingen

27 Inleiding	155
28 Lineaire stelsels. Fundamentele stellingen	163
29 Oplossingsmethoden voor lineaire stelsels met constante coëfficiënten 1	167
30 Oplossingsmethoden voor lineaire stelsels met constante coëfficiënten 2	173
31 Standaardvormen van lineaire stelsels met twee onbekende functies	183

Hoofdstuk 4

De Laplace-transformatie

32 Definitie en achtergrond	191
33 Enkele voorbeelden en belangrijke stellingen	194
34 De Laplace-transformatie van afgeleiden en primitieve functies	199
35 De inverse Laplace-transformatie	203
36 Het oplossen van een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten met behulp van Laplace-transformatie	206
37 Convolutie	211

Hoofdstuk 5

Numerieke methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen

- 38 Stapsgewijze integratie. Methode van Euler 219
39 De methode van Heun 221
40 De verbeterde trapeziumregel 224
41 Toepassing van de behandelde methoden 225
42 De methode van Runge-Kutta 229

Hoofdstuk 6

Partiële differentiaalvergelijkingen

- 43 Inleiding 230
44 Partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde 231

- 45 Enkele typen van partiële differentiaalvergelijkingen van de tweede orde 233
46 De warmtegeleidingsvergelijking voor een dunne homogene staaf 234
47 De vergelijking van de trillende snaar 237
48 De oplossing volgens d'Alembert van de golfvergelijking 245
49 De vergelijking van Laplace 248
50 De oplossing van de vergelijking van Laplace in cilindercoördinaten. De vergelijking van Bessel 252
51 De oplossing van de vergelijking van Laplace in bolcoördinaten. De toegevoegde vergelijking van Legendre 253

2324 055

Dit boek wordt ten behoeve van de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft uitgegeven door de Delftse Uitgevers Maatschappij.

In drie kloeke delen presenteren de auteurs een volledige cursus analyse.

Deel 1 beperkt zich in hoofdzaak tot *functies van één veranderlijke*. Beginselen van differentiaal- en integraalrekening, complexe getallen, extreme waarden en het schetsen van krommen, systematische berekening van de primitieven van enige klassen van functies, oneigenlijke integralen, rijen, reeksen, vergelijkingen, numerieke integratie en differentiatie, en hyperbolische functies. Tenslotte wordt kort aandacht besteed aan functies van twee veranderlijken.

Deel 2 behandelt *functies met twee of meer variabelen*. De hoofdstukken gaan over impliciete functies, extreme waarden, vectoranalyse, vlakke krommen, ruimtekrommen, lijnintegralen, meervoudige integralen, integraalstellingen, massa, zwaartepunt en traagheidsmoment, en de gamma- en bètafunctie.

De differentiaalvergelijkingen zijn het onderwerp van *deel 3*. Gewone differentiaalvergelijkingen, het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van machtreeksen, simultane differentiaalvergelijkingen, de Laplace-transformatie, numerieke methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen en partiële differentiaalvergelijkingen.

Over deel 1 schreef O. Bottema in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde van februari 1982:

"Dit werk is voorwaar een leerboek. Bij het schrijven moet de toekomstige lezer voortdurend in de geest aanwezig zijn geweest. De hoge didactische kwaliteit berust op een streven naar evenwicht; de behandeling is exact maar een acribie die het wezenlijke kan versluieren is vermeden. Evenwicht is er ook tussen de zakelijke tekst en een groot aantal goed gekozen voorbeelden. Ook de typografie werkt mee aan de uitnemende presentatie."

Deel 1, ISBN 90-6562-064-8

Delftse Uitgevers Maatschappij