Verschillen tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$

door

J. A. van Delft

ter verkrijging van de graad van Bachelor of Science
aan de Technische Universiteit Delft,
in het openbaar te verdedigen op vrijdag 8 juli om 10:30 uur.

Studentnummer:	4952766	
Duur project:	19 april 2022 – 8 juli, 2022	
Beoordelingscommissie:	Dr. K. P. Hart,	TU Delft, begeleider
	Prof. dr. ir. G. Jongbloed,	TU Delft

TU Delft

Voorwoord

Voor u ligt het bachelorproject ‘Verschillen tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$’. Deze scriptie is geschreven ter verkrijging van de graad Bachelor of Science aan de Technische Universiteit Delft.

Op 19 april ben ik aan mijn onderzoek begonnen. De afgelopen tien weken heb ik onder begeleiding van dr. K. P. Hart een inkijkje mogen nemen in de wiskundige verzamelingenleer en is mij langzaam duidelijk geworden wat voor rol de kardinaalgetallen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ daarin spelen. Drie belangrijke verschillen tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ zullen in deze scriptie aan bod komen.

Bij deze wil ik graag meneer K. P. Hart bedanken voor zijn fijne begeleiding. Onze wekelijkse meetings op woensdag hebben erg veel bijgedragen aan mijn begrip van dit onderwerp. Ook als ik tussen de meetings door tegen problemen aanliep en mijn vragen via de mail stelde dan werd er altijd duidelijk (in Latex code!) gereageerd. Dat heb ik als erg prettig ervaren. Tot slot wil ik graag dr. G. Jongbloed bedanken voor het deelnemen aan mijn beoordelingscommissie.

Ik wens u veel leesplezier toe!

J. A. van Delft
Delft, juni 2022

Inhoudsopgave

1
Introductie

Een verzameling in de wiskunde wordt gezien als 'een veelheid van elementen, die volgens een bepaalde definitie bij elkaar horen en daardoor een geheel vormen'. Dit relatief eenvoudige begrip vormt de basis voor de verzamelingenleer, een theorie die hedendaags als een van de grondslagen van de wiskunde beschouwd wordt.
De verzamelingenleer kent zijn oorsprong in 1874, in een artikel van George Cantor genaamd *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* – vertaald: *Over een eigenschap van de verzameling van alle reële algebraïsche getallen.* In dit artikel formuleert en bewijst Cantor de volgende stelling, in hedendaagse bewoording:

Stelling 1.1. *De verzameling der reële algebraïsche getallen is aftelbaar.*

Een algebraïsch getal is een reëel of een complex getal dat een nulpunt is van een polynoom met gehele coëfficiënten. De polynoom is dus van de vorm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, waarin $n > 0$, alle a_i gehele getallen zijn en $a_n \neq 0$. Een verzameling is aftelbaar als de elementen uit de verzameling afgeteld kunnen worden. In andere woorden zegt bovenstaande stelling dus dat de verzameling algebraische getallen 'even groot' is als de verzameling natuurlijke getallen, wat in die tijd een nieuwe kijk gaf op verzamelingen. Daarnaast stelde Cantor dat de verzameling reële getallen niet aftelbaar is en dus *groter* is dan de verzameling natuurlijke getallen. In 1874 bewees hij dit voor het eerst, en in 1891 publiceerde hij een artikel waarin hij zijn welbekende 'diagonaalbewijs' formuleerde, wat als alternatief bewijs voor deze stelling dient. Cantor was de eerste wiskundige die aantoonde dat er verschillende vormen van oneindigheid bestaan, waarin de ene oneindigheid strikt groter is dan een andere. [2]

De 'grootte' van een verzameling staat in de wiskunde bekend onder de term 'kardinaliteit'. Omdat de kardinaliteit van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ niet met een eindig natuurlijk getal n kan worden aangetoond, is de kardinaliteit van deze verzameling uniek gedefinieerd als $\aleph_0$ (lees: 'alef 0'). Met dank aan Cantor's bewijs voor de stelling dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is, weet men dat er verzamelingen bestaan met kardinaliteit groter dan $\aleph_0$. De eerstvolgende verzameling die groter is dan $\mathbb{N}$ definiëren we als Ω_1, en deze verzameling heeft kardinaliteit $\aleph_1$.
Vanzelfsprekend zijn er voor verzamelingen met kardinaliteit $\aleph_0$ talloze mooie stellingen geformuleerd en bewezen. Deze stellingen kunnen eenvoudig worden uitgebreid naar verzamelingen met kardinaliteit $\aleph_1$, door de term 'eindig' in 'oneindig' te veranderen en 'aftelbaar' in 'overaftelbaar'. Het valt echter op dat sommige stellingen die gelden voor verzamelingen met kardinaliteit $\aleph_0$ *niet meer gelden* nadat ze zijn uitgebreid naar verzamelingen met kardinaliteit $\aleph_1$. Het kan ook gebeuren dat een stelling juist *wel* in het overaftelbare geval geldt, maar niet in het aftelbare geval. In dit verslag zullen een aantal dergelijke stellingen aan bod komen. We beginnen met het opbouwen van de verzamelingenleer in hoofdstuk 2. In hoofdstuk 3 worden welgeordende verzamelingen en ordinaalgetallen geïntroduceerd die van cruciaal belang zijn binnen de verzamelingenleer. Richting het eind van dit hoofdstuk zal het eerste verschil tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ besproken worden. Hoofdstuk 4 introduceert de wiskundige 'boom' en formuleert König's lemma. De focus zal in dit hoofdstuk vooral liggen op de constructie van een Aronszajn boom die als tegenvoorbeeld dient in het overaftelbare geval van König's lemma, wat dus

het tweede verschil tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ is. In hoofdstuk 5 maken we een klein uitstapje naar de grafentheorie, om tot slot Ramsey's stelling te bespreken. Ook Ramsey's stelling is een voorbeeld van een stelling die wel in het geval van $\aleph_0$ geldt, maar niet in het geval van $\aleph_1$. We sluiten in hoofdstuk 6 af met een conclusie.

2

Axiomatische verzamelingenleer

Nadat Cantor in 1874 de verzamelingenleer tot leven geroepen had, werd het richting de twintigste eeuw hoog tijd om deze te funderen. Zermelo was in 1908 de eerste die een axiomatisering van de verzamelingenleer gaf. De axioma's van Zermelo, met een toevoeging van Fraenkel uit 1922, vormen de Zermelo-Fraenkel verzamelingleer (**ZF**). **ZF** inbegrepen het *keuzeaxioma*, kortweg **ZFC** (waarbij C voor 'choice' staat) is de standaard vorm van axiomatische verzamelingenleer zoals wij die vandaag de dag kennen. Het keuzeaxioma stelt het volgende.

***Keuzeaxioma**. Zij X een oneindige collectie niet-lege verzamelingen, dan kan men uit elke verzameling van die collectie een element kiezen.*

Met andere woorden betekent dit dat er een *keuzefunctie* f bestaat, gedefinieerd op X, zodanig dat voor elke verzameling V in X geldt dat $f(V)$ een element is van V. Bovenstaand axioma zal voor velen heel logisch klinken, zo ook voor Zermelo, die in 1904 het keuzeaxioma als een 'niet bezwaarlijk logisch principe' introduceerde. Met behulp van het keuzeaxioma bewees hij zijn welordeningsstelling.

Stelling 2.1 (Welordeningsstelling van Zermelo)**.** *Elke verzameling kan welgeordend worden.*

De term 'welgeordend' zal in hoofdstuk 3.3 formeel geïntroduceerd worden, maar intuïtief betekent het dat de elementen uit een verzameling 'op volgorde' gezet kunnen worden, waarbij iedere deelverzamling een kleinste element heeft. Voor de verzameling $\mathbb{N}$ is dit vanzelfsprekend, echter is dit voor bijvoorbeeld de verzameling $\mathbb{R}$ moeilijker om te visualiseren. Naast dat de welordeningsstelling uit het keuzeaxioma volgt, geldt dit ook andersom.

Stelling 2.2. *Het keuzeaxioma is equivalent met de welordeningsstelling.*

Bewijs. Zermelo bewees dat de welordeningsstelling uit het keuzeaxioma volgt. We zullen bewijzen dat dit andersom ook het geval is. Zij E een oneindige collectie niet-lege deelverzamelingen. We zullen een keuzefunctie f op E definiëren. Zij X de vereniging van alle verzamelingen S in E, dus $X = \bigcup_{S \in E} S$. De verzameling X kan welgeordend worden volgens de welordeningsstelling. Laat R een welordening van X zijn. De functie f die elke verzameling S, welgeordend door R, naar haar kleinste element stuurt is een keuzefunctie voor de verzameling E. □

Het keuzeaxioma is onafhankelijk van de **ZF** verzamelingenleer. Dit betekent dat het met de al bestaande axioma's in **ZF** niet bewezen noch ontkracht kan worden. Ondanks dat er nogal wat kritiek op het keuzeaxioma gekomen, is het bovenal een heel handig middel voor het bewijzen van stellingen. Daarom zal in het vervolg van het keuzeaxioma worden uitgegaan.

Naast het keuzeaxioma, is de Continuümhypothese (CH) een veelbesproken principe binnen de verzamelingenleer. CH is een hypothese betreft de kardinaliteit van oneindige verzamelingen.

***Continuümhypothese (CH)**. Er bestaat géén verzameling waarvan de kardinaliteit tussen de kardinaliteit van $\mathbb{N}$ en de kardinaliteit van $\mathbb{R}$ ligt.*

In de **ZFC** verzamelingenleer is bovenstaand equivalent met de volgende uitdrukking in $\aleph$-getallen: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. In 1963 bewees Paul Cohen de onafhankelijkheid van de continuümhypothese van **ZFC**. Net zoals het keuzeaxioma klinkt CH in eerste instantie aannemelijk, probeer maar is een verzameling te vinden die niet aan CH voldoet. Echter is CH equivalent aan de volgende uitdrukking: *de verzameling* $\mathbb{R}$ *kan door een relatie* R *welgeordend worden zó dat* $\hat{x} = \{y : y < x\}$ *aftelbaar is voor elke* $x \in \mathbb{R}$, die een stuk ongeloofwaardiger klinkt. Om die reden zal in het vervolg niet van CH worden uitgegaan, tenzij expliciet vermeld.

3

Cantor's paradijs

In de inleiding is de term 'kardinaliteit' al geïntroduceerd. In dit hoofdstuk zal formeel worden gedefinieerd wat kardinaalgetallen en ordinaalgetallen zijn en zullen een aantal belangrijke stellingen hierover worden bewezen die ons leiden tot het eerste daadwerkelijke verschil tussen de kardinaalgetallen $\aleph_0$ en $\aleph_1$: het pressing-down lemma. [2]

3.1. Kardinaalgetallen

Een kardinaalgetal geeft de grootte van een verzameling aan. Twee verzamelingen hebben dezelfde kardinaliteit als ze equivalent zijn.

Definitie 3.1. De verzamelingen M en N zijn *equivalent*, geschreven $M \sim N$, als er een bijectieve afbeelding $f : M \to N$ bestaat.

De kardinaliteit van de verzameling M wordt aangeduid met $|M|$. Als voor twee verzamelingen M en N geldt dat $|M| = |N|$, dan bestaat er dus een bijectieve afbeelding $f : M \to N$. Verder geldt: als M eindig dan $|M| = n$ voor een natuurlijk getal n, en $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

3.1.1. Kardinaalgetallen vergelijken

Gegeven twee verzamelingen M en N, met kardinaliteit $\mathfrak{a} = |M|$ en $\mathfrak{b} = |N|$, en gegeven de volgende twee voorwaarden:

1. er is geen deelverzameling van M die equivalent is met N,
2. er is een deelverzameling N_1 van N, zó dat $N_1 \sim M$.

In het geval dat aan voorwaarden 1 en 2 voldaan is zeggen we dat $\mathfrak{a}$ kleiner is dan $\mathfrak{b}$ ofwel $\mathfrak{b}$ groter dan $\mathfrak{a}$, kortweg $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ of $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$. We schrijven $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ als $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ of $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Nu rest de vraag of voor elk tweetal kardinaalgetallen $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{b}$ ten minste één van de relaties $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ of $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ geldt. Cantor beweerde van wel maar bewees dit als gevolg van de vergelijkbaarheid van ordinaalgetallen.

Tegenwoordig gebruiken we een alternatieve definitie om aan te tonen dat een verzameling M 'kleiner dan of gelijk is' aan een verzameling N. We schrijven $|M| \preccurlyeq |N|$ als er een injectieve afbeelding van M naar N bestaat. Voor het bewijs dat beide definities equivalent zijn hebben we de volgende stelling nodig.

Stelling 3.2. *Als er injectieve afbeeldingen $f : M \to N$ en $g : N \to M$ bestaan dan bestaat er ook een bijectie $b : M \to N$.*

Het bewijs van deze stelling is niet eenvoudig en wordt dus achterwege gelaten.

Lemma 3.3. $|M| \leq |N|$ *dan en slechts dan als* $|M| \preccurlyeq |N|$.

Bewijs. Stel dat $|M| \leq |N|$. Dan $|M| < |N|$ of $|M| = |N|$. Als $|M| < |N|$ dan bestaat er een deelverzameling N_1 van N zó dat $N_1 \sim M$, dus bestaat er een bijectieve afbeelding $f : M \to N_1$. Omdat $N_1 \subseteq N$ is $f : M \to N$ zeker injectief. Als $|M| = |N|$ dan geldt $M \sim N$ en bestaat er een bijectieve afbeelding $g : M \to N$. Dus g is injectief, en uit beide gevallen volgt $|M| \preccurlyeq |N|$.

Stel dat $|M| \preccurlyeq |N|$ en $M \neq N$. Dan moet gelden dat $|M| < |N|$. Via $\preccurlyeq$ volgt direct dat er een deelverzameling N_1 van N bestaat zó dat $N_1 \sim M$. Nu rest ons enkel te laten zien dat er géén deelverzameling van M is die equivalent is met N. Neem aan dat deze deelverzameling wel bestaat, zijnde M_1. Dan bestaat er een bijectieve afbeelding $b : N \to M_1$, dus bestaat er een injectieve afbeelding $g : N \to M_1$. Echter, uit $|M| \preccurlyeq |N|$ volgt dat er een injectieve $f : M \to N$ bestaat. f is niet bijectief omdat $|M| \neq |N|$, dus uit stelling 3.2 volgt dat er géén $g : N \to M$ bestaat zó dat g injectief is. In het bijzonder geldt dat $g : N \to M_1$ niet injectief is, dus we vinden een tegenspraak.
We concluderen dat $|M| \leq |N|$ dan en slechts dan als $|M| \preccurlyeq |N|$. □

Met behulp van bovenstaand lemma is het controleren van $|M| \leq |N|$ eenvoudiger geworden: we hoeven slechts te controleren dat er een injectieve afbeelding van M naar N bestaat.

3.1.2. Rekenregels voor kardinaalgetallen

De som van de twee kardinaalgetallen $\mathfrak{a} = |M|$ en $\mathfrak{b} = |N|$ waarvoor geldt dat $M \cap N = \emptyset$ is als volgt gedefinieerd: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = |M \cup N|$.

Merk op. Deze definitie is onafhankelijk van de keuze van de verzamelingen M en N. Stel $M \sim M'$ en $N \sim N'$, waarbij $M \cap N = \emptyset = M' \cap N'$, dan geldt $M \cap N \sim M' \cap N'$. Immers: omdat $M \sim M'$ en $N \sim N'$ bestaat er een bijectie $f : M \to M'$ en een bijectie $g : N \to N'$. Definieer $h : M \cup N \to M' \cup N'$ door

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in M \\ g(x) & \text{als } x \in N \end{cases}$$

dan is h een bijectie.

Twee verzamelingen M en N die niet disjunct zijn kunnen disjunct gemaakt worden: $M' = \{\langle m, 1\rangle : m \in M\}$ en $N' = \{\langle n, 2\rangle : n \in N\}$ zijn disjunct en er geldt $M \sim M'$ en $N \sim N'$.

Het vermenigvuldigen van kardinaalgetallen gaat als verwacht. Als $\mathfrak{a} = |M|$ en $\mathfrak{b} = |N|$ dan definiëren we $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |M \times N|$. Ook deze definitie is onafhankelijk van de verzamelingen M en N. Stel $M \sim M'$ en $N \sim N'$ dan volgt $|M \times N| = |M' \times N'|$. Uit $M \sim M'$ volgt $|M'| = |M| = \mathfrak{a}$. Op dezelfde manier volgt $|N'| = \mathfrak{b}$. Dus geldt dat $|M \times N| = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |M' \times N'|$.

Machtsverheffen van kardinaalgetallen gaat als volgt. Voor twee verzamelingen M en N met kardinaalgetallen $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{b}$, noteren we met ${}^{M}N$ de verzameling van alle afbeeldingen van M naar N en definiëren we $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}} = |{}^{M}N|$. Nu de standaard rekenregels voor kardinaalgetallen gedefinieerd zijn, kunnen we de volgende stelling voor kardinaalgetallen bewijzen. We duiden de kardinaliteit van $\mathbb{R}$ aan met $\mathfrak{c}$.

Stelling 3.4. $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

Bewijs. Beschouw de verzameling $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ van eindige rijen van nullen en enen van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$. We noteren een rij $x_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ als $\mathbf{x}$. Definieer $s : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$. Dan is s surjectief maar niet injectief. Immers, beschouw de rij $d = k \cdot 2^{-n}$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $k \in \mathbb{N}$ oneven zó dat $k < 2^{-n}$. Voor alle getallen d zijn er twee rijen $\mathbf{d}^-$ (eindigend op nullen) en $\mathbf{d}^+$ (eindigend op enen) zó dat $s(\mathbf{d}^-) = s(\mathbf{d}^+) = d$. We zetten de getallen d in de rij $d_n \in [0,1]$. Definieer daarnaast de aftelbare rij $q_n \in [0,1]$ gegeven door $q_n = \sqrt{2} \cdot (n+1)^{-1}$ en beschouw de rijen $\mathbf{y} = y_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ zó dat $s(y_n) = q_n$. Met behulp van s, d_n en q_n maken we de bijectie s' op de volgende manier:

$$\begin{cases} \mathbf{d}^- & \mapsto & d_n \\ \mathbf{d}^+ & \mapsto & q_{2n-1} \\ y_n & \mapsto & q_{2n} \\ \mathbf{x} & \mapsto & s(\mathbf{x}) \text{ anders.} \end{cases}$$

We sturen dus de 'kleinste' rij $\mathbf{d}^-$ naar zijn beeld d_n onder s, en sturen $\mathbf{d}^+$ naar het getal q_{2n-1}. De rijen y_n sturen we naar q_{2n} en alle overige rijen $\mathbf{x}$ sturen we naar hun oorspronkelijke beeld $s(\mathbf{x})$. s' is een bijectie, en we concluderen dat $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. □

Met behulp van stelling 3.4 en de bekende rekenregels voor kardinaalgetallen kunnen we eenvoudig de volgende twee gelijkheden bewijzen, die de lezer een gevoel geven voor rekenen met het continüum.

1. $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Immers, $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.
2. $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Immers, $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

3.2. Ordetypen

Zoals elke verzameling een kardinaalgetal heeft, zo heeft elke *lineair geordende* verzameling $(M,\prec)$ een ordetype, aangeduid door $\overline{(M,\prec)}$. Een lineair geordende verzameling definiëren we als volgt.

Definitie 3.5. Een verzameling $(M,\prec)$ is *lineair geordend* als

(i) $\prec$ is irreflexief, dus er bestaat geen $a \in M$ zó dat $a \prec a$.
(ii) $\prec$ is transitief, dus voor alle $a, b, c \in M$ geldt dat $a \prec b$ en $b \prec c \implies a \prec c$.
(iii) Als $x \neq y$ dan moet gelden dat $x \prec y$ of $y \prec x$.

Het is eenvoudig na te gaan dat de verzamelingen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$ lineair geordende verzamelingen zijn. Voor de ordetypen van deze belangrijke verzamelingen met de gewone ordening reserveren we de symbolen $\omega = \overline{\mathbb{N}}$ en $\eta = \overline{\mathbb{Q}}$. Het ordetype van een verzameling zegt op zichzelf niet zo veel, maar we kunnen het wel gebruiken om twee lineair geordende verzamelingen met elkaar te vergelijken.

Definitie 3.6. Twee lineair geordende verzamelingen $(M,\prec)$ en $(N,<)$ zijn *isomorf* als er een orde-bewarende bijectie tussen M en N bestaat, dus een bijectie $f : M \to N$ die voldoet aan: voor alle $a, b \in M$ geldt: als $a \prec b$ dan $f(a) < f(b)$. Twee verzamelingen hebben hetzelfde ordetype dan en slechts dan als deze isomorf zijn.

Voorbeeld. $\mathbb{Z}$ en de even gehele getallen $\{y \in \mathbb{Z} : y = 2x \text{ voor } x \in \mathbb{Z}\}$ hebben hetzelfde ordetype. De bijectie $f(x) = 2x$ voldoet aan de gestelde voorwaarde.

3.2.1. Rekenen met ordetypen

Net zoals met kardinaalgetallen, kan er met ordinaalgetallen gerekend worden. Ten eerste kunnen we het ordetype van een verzameling 'omkeren', dat gaat als volgt: als $\alpha = \overline{(M,\prec)}$ dan noteren we $\alpha^* = \overline{(M,\succ)}$.

Voorbeeld. $\eta = \eta^*$. Definieer $f : (\mathbb{Q},<) \to (\mathbb{Q},>)$ door $f(x) = -x$. Dan is f een orde-bewarende bijectieve afbeelding.

De som van twee ordetypen $\alpha = \overline{(M,<_M)}$ en $\beta = \overline{(N,<_N)}$ wordt gedefinieerd door M en N, met behoud van hun gegeven ordeningen, achter elkaar te leggen.

Definitie 3.7. Gegeven $\alpha = \overline{(M,<_M)}$ en $\beta = \overline{(N,<_N)}$. $\alpha+\beta = \overline{(P,<_P)}$, waarbij $P = (M\times\{0\})\cup(N\times\{1\})$ en $(p,i) <_P (q,j)$ als

1. $i = 0$ en $j = 1$
2. $i = j = 0$ en $p <_M q$ of
3. $i = j = 1$ en $p <_N q$

Voorbeeld. $\omega^* + \omega$ is het ordetype van $\mathbb{Z}$. Immers, $\{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ met de gewone ordening heeft ordetype ω^* omdat we een orde-bewarende bijectie $f : (\mathbb{N},>) \to \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ kunnen vinden gegeven door $f(n) = -n-1$. De verzamelingen $\{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ en $\mathbb{N}$ zijn disjunct, hebben dezelfde ordening en er geldt dat $\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\} \cup \mathbb{N}$. We concluderen dat het ordetype van $\mathbb{Z}$ gelijk is aan $\omega^* + \omega$.

Het product van twee ordetypen $\alpha = \overline{(M,<_M)}$ en $\beta = \overline{(N,<_N)}$ wordt gedefinieerd door β kopiën van α achter elkaar te leggen.

Definitie 3.8. Gegeven $\alpha = \overline{(M,<_M)}$ en $\beta = \overline{(N,<_N)}$. $\alpha\cdot\beta = \overline{(P,<_P)}$, waarbij $P = M\times N$ en $(m_1,n_1) <_P (m_2,n_2)$ als

1. $n_1 <_N n_2$ of
2. $n_1 = n_2$ en $m_1 <_M m_2$

Voorbeeld. $\eta = \eta\cdot\eta$. Beschouw de verzameling $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ waarbij $<_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$ is gedefinieerd zoals hierboven. Dan is $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ een aftelbare, dicht geordende, lineair geordende verzameling zonder minimum en maximum. Uit de uniciteitsstelling van Cantor volgt nu dat $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ orde-isomorf zijn, dus volgt dat $\eta = \eta\cdot\eta$.

3.3. Welgeordende verzamelingen

Een lineair geordende verzameling heet welgeordend als elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft. $\mathbb{N}$ met de gewone ordening is bijvoorbeeld een welgeordende verzameling, maar $\mathbb{Z}$ is dat niet. Welgeordende verzamelingen maken transfiniete inductie en recursie mogelijk. Vóór we beide principes formuleren, definiëren we eerst wat een *beginstuk* van een welgeordende verzameling is.

Definitie 3.9. Een *beginstuk* van een welgeordende verzameling $(X, \prec)$ is een deelverzameling A die voldoet aan: als $x \in A$ en $y \prec x$ dan $y \in A$.

Voor welgeordende verzamelingen geldt het volgende inductieprincipe. Dit principe is een uitbreiding van de volledige inductie zoals we die kennen voor de natuurlijke getallen.

Stelling 3.10 (Inductieprincipe)**.** *Zij $(X, \prec)$ een welgeordende verzameling en $A \subseteq X$ zó dat voor elke $x \in X$ geldt: als $\{y : y \prec x\} \subseteq A$ dan $x \in A$. Dan geldt A = X.*

Bewijs. Het bewijs loopt via contrapositie. Stel $A \neq X$. Neem $p = \min(X \setminus A)$, dan geldt $\{y : y \prec p\} \subseteq A$ en $p \notin A$. □

Het inductieprincipe maakt bewijzen mogelijk; constructies gebruiken het recursieprincipe.

Stelling 3.11 (Recursieprincipe)**.** *Zij $(X, \prec)$ een welgeordende verzameling, Y een verzameling en $\mathcal{F}$ de verzameling van alle afbeeldingen die als domein een beginstuk van X hebben en Y als co-domein. Dan bestaat bij elke afbeelding $F : \mathcal{F} \to Y$ een unieke afbeelding $f : X \to Y$ die voldoet aan $f(x) = F(f \upharpoonright \hat{x})$ voor alle x.*

Bovenstaande stelling zegt in feite het volgende. We willen een functie $f : X \to Y$ construeren op een welgeordende verzameling X. Door middel van F breiden we f steeds 'één stap verder' uit. Dat werkt als volgt. Gegeven een afbeelding $g : \hat{x} \to Y$, dan vinden we de waarde $f(x)$ omdat moet gelden dat $g = f \upharpoonright \hat{x}$.

3.4. Ordinaalgetallen

Het ordetype van een welgeordende verzameling noemen we een ordinaalgetal. ω is dus een ordinaalgetal, omdat ω het ordetype is van de verzameling $\mathbb{N}$. Ook is ieder natuurlijk getal n een ordinaalgetal. Ondanks dat bovenstaande definitie behoorlijk intuïtief is, is deze moeilijk te gebruiken. We zullen dus een andere definitie voor ordinaalgetallen introduceren. Zij $(X, \prec)$ een welgeordende verzameling. Met $\mathcal{I}_X$ definiëren we de verzameling van beginstukken ongelijk aan X zelf.

Definitie 3.12. Een welgeordende verzameling $(X, \prec)$ is *kanoniek* als deze gelijk is aan $(\mathcal{I}_X, \subset)$.

We gebruiken kanonieke welgeordende verzamelingen om ordinaalgetallen te herdefiniëren.

Definitie 3.13. Een *ordinaalgetal* is een kanonieke welgeordende verzameling, welgeordend door $\in$.

Ordinaalgetallen die aan bovenstaande definitie voldoen worden *von Neumann ordinaalgetallen* genoemd. De eerste paar von Neumann ordinaalgetallen – zijnde de natuurlijke getallen – zien er als volgt uit.

$$\begin{array}{lll}
0 & = \{\} & = \emptyset \\
1 & = \{0\} & = \{\emptyset\} \\
2 & = \{0,1\} & = \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \\
3 & = \{0,1,2\} & = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \\
\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\
\omega & = \{0,1,2,3,\ldots\} & = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\ldots\}
\end{array}$$

We definiëren het getal 0 als de lege verzameling. Voor het getal 1 geldt dat $0 \in 1$, dus geldt het dat $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$. Voor 2 geldt dat $0, 1 \in 2$, dus $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ enzovoort. Het ordinaalgetal ω bestaat uit alle 'eindige' ordinaalgetallen. De volgende stelling zegt dat ordinaalgetallen als ordetypen van een welgeordende verzameling en als kanonieke welgeordende verzamelingen op isomorfie na gelijk zijn.

Stelling 3.14. *Elke welgeordende verzameling is isomorf met precies één kanonieke welgeordende verzameling.*

Voor een bewijs van deze stelling zie [5].

We onderscheiden twee typen ordinaalgetallen. α is een *opvolgerordinaal* als er een β bestaat zó dat $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, we noteren ook wel $\alpha = \beta + 1$. Als α geen opvolgerordinaal is dan is het een *limietordinaal*. Alle natuurlijke getallen zijn opvolgerordinalen, maar ω is een limietordinaal. We verkrijgen het eerste *overaftelbare* ordinaalgetal door alle aftelbare ordinaalgetallen te verenigingen, dit ordinaalgetal noemen we ω_1. Ook ω_1 is een limietordinaal.

Kardinaalgetallen en ordinaalgetallen staan op de volgende manier met elkaar in verband. We identificeren ieder eindig ordinaalgetal met zijn kardinaliteit, dus het getal zelf. In het eindige geval bestaat er dus geen wezenlijk verschil tussen ordinaalgetallen en kardinaalgetallen. In het transfiniete geval echter, voorbij ω, maken ordinaalgetallen een fijner onderscheid dan kardinaalgetallen. Terwijl er slechts één aftelbaar kardinaalgetal is, namelijk $\aleph_0$, zijn er oneindig veel aftelbare ordinaalgetallen, namelijk ω, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot \omega$, ω^ω, enzovoort. Al deze ordinaalgetallen hebben kardinaliteit $\aleph_0$. Voor het ordinaalgetal ω_1 geldt dat $\omega_1 > \alpha$ voor ieder aftelbaar ordinaalgetal α. ω_1 heeft dus kardinaliteit $\aleph_1 > \aleph_0$. In het algemeen stellen we dat kardinaalgetallen *begingetallen* zijn, waarbij een begingetal als volgt is gedefinieerd.

Definitie 3.15. α is een *begingetal* als geldt dat $\alpha \leq \beta$ voor elk ordinaalgetal β zó dat $f : \alpha \to \beta$ bijectief is.

Naast $\aleph_0$ en $\aleph_1$ bestaan er nog veel meer oneindige kardinaalgetallen. We noteren $\aleph_\alpha$ voor het α-de overaftelbare kardinaalgetal. Kardinaalgetallen in het algemeen worden vaak aangeduid met de letter κ, waarbij we κ^+ noteren voor het eerstvolgende kardinaalgetal dat groter is dan κ. Het 'pressing-down lemma' is het eerste verschil tussen de kardinaalgetallen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ – respectievelijk ω en ω_1 – dat zal worden uitgelicht.

Stelling 3.16 (Pressing-down lemma)**.** *Zij $f : \omega_1 \to \omega_1$ zó dat $f(\alpha) < \alpha$ als $\alpha > 0$. Dan is er een β zó dat $A = \{\alpha : f(\alpha) = \beta\}$ overaftelbaar is.*

Bewijs. Neem aan dat een dergelijke β niet bestaat. Dan is f zó dat $\{\alpha : f(\alpha) = \beta\}$ altijd aftelbaar is. Definieer $f^{-1}[\alpha] = \{\beta + 1 : f(\beta) \leq \alpha\}$. Omdat $f(1) = 0 \leq \alpha$ geldt voor alle α dat $1 \in f^{-1}[\alpha]$. Daarnaast $\alpha + 1 \in f^{-1}[\alpha]$ omdat $f(\alpha) < \alpha$. Stel $g(\alpha) = \sup f^{-1}[\alpha]$. Dan geldt $g(\alpha) = \sup f^{-1}[\alpha] \geq \alpha + 1 > \alpha$. We definiëren nu een rij x_n als volgt. Definieer $x_0 = 0$ en, recursief, $x_{n+1} = g(x_n)$. Dan geldt $x_{n+1} = g(x_n) > x_n$. Tot slot, laat $x = \sup x_n$. Omdat $f(x) < x$ volgt dat $f(x) < x_k$ voor een bepaalde k. Maar dan $x + 1 \in \{\beta + 1 : f(\beta) \leq x_k\}$, dus $x_{k+1} = g(x_k) \geq x + 1 > x$, wat in tegenstelling staat tot $x = \sup x_n$. □

Als we aan de regressieve functie $f : \omega \to \omega$ gegeven door $f(n) = \max\{0, n-1\}$ denken klinkt bovenstaande stelling nogal tegenstrijdig. De grootste verzameling waarop f constant is is in dit geval namelijk de verzameling $\{0, 1\}$. $\{0, 1\}$ is eindig in plaats van aftelbaar oneindig, wat we volgens het pressing-down lemma in het geval van ω zouden verwachten. Het pressing-down lemma is dus een voorbeeld van een stelling die in het geval van ω_1 geldt, maar niet in het geval van ω. [3]

De geordende verzameling ω_1 heeft een natuurlijke topologie: de orde-topologie. Het pressing-down lemma in combinatie met de orde-topologie kent vele toepassingen in de verzamelingenleer, bijvoorbeeld de volgende stelling.

Stelling 3.17. *Gegeven ω_1 met de orde-topologie. Laat $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ continu. Dan bestaat er een α zó dat f constant is op het interval $[\alpha, \omega_1)$.*

Bewijs. Zij $\epsilon > 0$. f is continu, dus voor elke $\alpha \in \omega_1$ bestaat er een omgeving van α zó dat voor γ in de omgeving van α geldt dat $|f(\gamma) - f(\alpha)| < \epsilon$. In het bijzonder als $\alpha > 0$ dan bestaat er een $\beta_\alpha < \alpha$ zó dat als $\gamma \in (\beta_\alpha, \alpha]$, dan $|f(\gamma) - f(\alpha)| < \epsilon$. Laat $f(0) = 0$, en $f(\alpha)$ de kleinste β_α zijn zó dat als $\gamma \in (\beta_\alpha, \alpha]$, dan $|f(\gamma) - f(\alpha)| < \epsilon$. Dan geldt dat $f(\alpha) < \alpha$ voor $\alpha > 0$, en uit stelling 3.16 volgt dat er een x bestaat zó dat $A = \{\alpha : f(\alpha) = x\}$ overaftelbaar is.

Neem nu β en γ groter dan x. Dan geldt $|f(\beta) - f(\gamma)| < 2\epsilon$. Immers: neem een α in A die groter is dan β en γ. Omdat $x = \beta_\alpha$ volgt dan dat $|f(\beta) - f(\alpha)| < \epsilon$ en $|f(\gamma) - f(\alpha)| < \epsilon$. Definieer de rij $(\epsilon_n)_{n\geq 1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-n}$. We kunnen β_n vinden zó dat als β en β_n groter zijn dan x dan $|f(\beta) - f(\beta_n)| < 2\epsilon_n = 2^{-n}$. Laat $\alpha = \sup \beta_n$. Dan volgt dat de diameter van $f\big[[\alpha, \omega_1)\big] < 2^{-n}$ voor elke n, dus heeft $f\big[[\alpha, \omega_1)\big]$ diameter 0. We concluderen dat $f\big[[\alpha, \omega_1)\big]$ uit een enkel punt bestaat en f constant is op het interval $[\alpha, \omega_1)$. $\square$

4

Bomen

Zoals we in hoofdstuk 3.4 gezien hebben kunnen we een ordinaalgetal definiëren als het ordetype van een welgeordende verzameling. Een welgeordende verzameling definieerden we als: een lineair geordende verzameling waarvoor geldt dat elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft. In dit hoofdstuk zullen we ons niet langer beperken tot lineair geordende verzamelingen, maar zullen we onze kennis over ordinaalgetallen gebruiken om stellingen over zogeheten *bomen* te bewijzen, met in het bijzonder: König's lemma. [1, 3]

4.1. Bomen

Vóór we definiëren wat een boom is, definiëren we eerst een *partieel geordende* verzameling.

Definitie 4.1. Een verzameling $(P, \prec)$ is *partieel geordend* als

(i) $\prec$ is irreflexief, dus er bestaat geen $a \in M$ zó dat $a \prec a$.

(ii) $\prec$ is transitief, dus voor alle $a, b, c \in M$ geldt dat $a \prec b$ en $b \prec c \implies a \prec c$.

Merk op. Een lineaire ordening is dus een partiële ordening waarvoor geldt elke twee elementen vergelijkbaar zijn.

De formele definitie van een boom is nu als volgt.

Definitie 4.2. Een *boom* is een partieel geordende verzameling $(T, \prec)$ zó dat $\hat{x} = \{y : y \prec x\}$ welgeordend is door $\prec$ voor elke $x \in T$.

Een boom is verdeeld in verschillende *niveaus*. Zij $(T, \prec)$ een boom en α een ordinaalgetal, dan is T_α de verzameling van alle $t \in T$ waarvoor geldt dat $\hat{t}$ ordetype α heeft. De *hoogte* van T is het kleinste ordinaalgetal α waarvoor geldt dat $T_\alpha = \emptyset$.

Voorbeeld. Vanzelfsprekend is ieder ordinaalgetal een boom. In dit geval geldt dat $T_\alpha = \{\alpha\}$.

Definitie 4.3. Zij α een ordinaalgetal en X een verzameling, dan is ${}^{<\alpha}X$ de verzameling van functies met domein $\beta < \alpha$ en bereik $A \subseteq X$; dus ${}^{<\alpha}X = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\beta}X$.

Stelling 4.4. *De verzameling* $({}^{<\alpha}X, <)$ *is een boom.*

Bewijs. We zullen eerst bewijzen dat ${}^{<\alpha}X$ door $<$ partieel geordend wordt. Zij $s, t, u \in {}^{<\alpha}X$ zó dat $s : \beta \to X$, $t : \gamma \to X$ en $u : \delta \to X$.

(i) $<$ is irreflexief omdat vanzelfsprekend geldt dat $\beta = \beta$, dus $s \not< s$.

(ii) Als $s < t$ en $t < u$ dan $\beta \subset \gamma$ en $\gamma \subset \delta$, dus $\beta \subset \delta$ en $s < u$, dus $<$ is transitief.

Vervolgens bewijzen we dat $\hat{s} = \{t : t < s\}$ welgeordend is door $<$ voor elke $s \in {}^{<\alpha}X$. Beschouw een willekeurige deelverzameling $T \subseteq \hat{s}$ en bekijk $I = \{\operatorname{dom} t : t \in T\}$. Omdat I een minimum heeft heeft T een minimum, dus $\hat{s}$ is welgeordend door $<$. We concluderen dat $({}^{<\alpha}X, <)$ een boom is. □

Daarnaast geldt dat voor elke $s \in {}^{<\alpha}X$ het ordetype van de verzameling $\hat{s}$ gelijk is aan haar domein. Immers, zij $s : \beta \to X$, dan is het ordetype van $\hat{s}$ gelijk aan de hoogte van s, dus gelijk aan β.

Voorbeeld. ${}^{<\omega}2$ is de boom bestaande uit alle eindige rijen van nullen en enen, geordend door het uitbreiden van de rijen.

4.2. König's lemma

Een pad van lengte α door een boom $(T,<)$ is een rij $\langle t_n \rangle_n \in T$ zó dat $t_n \in T_n$ en $t_n < t_{n+1}$ voor alle $n \in \alpha$. Voor bomen van hoogte ω kunnen we het volgende bewijzen.

Stelling 4.5 (König's lemma)**.** *Zij T een boom van hoogte ω zó dat T_n eindig is voor elke $n \in \omega$. Dan bestaat er een pad van lengte ω door T.*

Bewijs. Kies $t_0 \in T_0$ zó dat $\{s : s > t_0\}$ oneindig is; dit kan omdat T oneindig is en niveau 0 eindig is. Kies vervolgens $t_1 \in T_1$ zó dat $t_1 > t_0$ en $\{s : s > t_1\}$ oneindig is. Bepaal nu recursief $t_n \in T_n$ zó dat $t_{n+1} > t_n$ voor elke n en $\{s \in T : s > t_{n+1}\}$ oneindig is. Dan is $\langle t_n \rangle_n$ een pad door T van lengte ω. □

Een pad T van lengte ω is door middel van recursie redelijk makkelijk te construeren. Men zou dus verwachten dat de volgende logische uitbreiding van de stelling ook geldt:
Zij T een boom van hoogte ω_1 zó dat T_n aftelbaar is voor elke $n \in \omega_1$. Dan bestaat er een pad door T van lengte ω_1.
Bovenstaand is echter niet waar, en in plaats daarvan geldt de volgende stelling. [4]

Stelling 4.6. *Er bestaat een boom T van hoogte ω_1 zó dat ieder niveau van T aftelbaar is, maar er geen pad van lengte ω_1 door T bestaat.*

Vóór we stelling 4.6 bewijzen, zullen we eerst een aantal eigenschappen van de verzameling ${}^{<\omega_1}\omega$ formuleren. Ten eerste is $({}^{<\omega_1}\omega,<)$ een boom volgens stelling 4.4, ${}^{<\omega_1}\omega$ heeft hoogte ω_1. Ten tweede zijn de niveaus ω_α van ${}^{<\omega_1}\omega$ aftelbaar oneindig voor $\alpha < \omega$, maar overaftelbaar voor $\alpha \geq \omega$. Er bestaan namelijk overaftelbaar veel functies $t : \alpha \to \omega$ voor $\alpha \geq \omega$. De boom $({}^{<\omega_1}\omega,<)$ voldoet dus nog niet aan de voorwaarden van stelling 4.6, maar zal wel de basis voor ons bewijs vormen.

Bewijs. Zij $S = \{s \in {}^{<\omega_1}\omega : s \text{ is injectief}\}$. Er bestaat geen pad van lengte ω_1 door S omdat er geen injectieve functies van ω_1 naar ω bestaan. Daarnaast geldt nog steeds dat S_α aftelbaar oneindig voor $\alpha < \omega$, maar overaftelbaar voor $\alpha \geq \omega$. We definiëren nu $s \approx t$ voor $s,t \in S_\alpha$ dan en slechts dan als $\{\xi : s(\xi) \neq t(\xi)\}$ eindig is. In lemma 4.7 vinden we een rij $\langle s_\alpha \rangle_\alpha$, die we gebruiken voor de constructie van de boom $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{s \in S_\alpha : s \approx s_\alpha\}$. Deze boom T voldoet aan de voorwaarden van stelling 4.6. Namelijk, omdat T slechts uit injectieve functies bestaat die op eindig veel punten van elkaar verschillen vinden we dat ieder niveau van T aftelbaar is maar er geen pad van lengte ω_1 door T bestaat. □

Lemma 4.7. *Er bestaat een rij $\langle s_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ in S zó dat als $\alpha < \beta$, $s_\alpha \approx s_\beta \restriction \alpha$.*

Bewijs. We zullen laten zien dat er een rij $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bestaat zó dat $x_\alpha \subset^* x_\beta$ als $\alpha < \beta$, waarbij $\subset^*$ betekent dat $x_\alpha \subset x_\beta$ met uitzondering van eindig veel punten $a \in x_\alpha$, en $x_\beta \setminus x_\alpha$ oneindig is. Bij de constructie van x_α stellen we als voorwaarde dat het complement van x_α in $\mathbb{N}$ altijd oneindig is.
Stel dat $\alpha + 1 \in \omega_1$ een een opvolger-ordinaal is. We construeren $x_{\alpha+1}$ als volgt. Verdeel het complement $\mathbb{N} \setminus x_\alpha$ in twee oneindige verzamelingen, zeg A en B, dan is $x_{\alpha+1} = x_\alpha \cup A$.
Stel nu dat γ een limietordinaal is. Dan bestaat er een rij $\langle \gamma_n \rangle_n$ zó dat $\gamma = \sup \gamma_n$. Voor x_γ nemen we nu bijna de vereniging $\bigcup x_{\gamma_n}$, op een oneindige deelverzameling in $\mathbb{N}$ na. Definieer een stijgende rij $\langle a_n \rangle_n$ van elementen van $\mathbb{N}$, zó dat a_n niet in de vereniging van x_{γ_0} tot en met x_{γ_n} behoort. Neem nu $x_\gamma = \bigcup x_{\gamma_n} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dan voldoet x_γ aan de eisen. Met behulp van de rij $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ definiëren we nu $\langle s_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$.
We stellen als voorwaarde dat $s_\alpha[\alpha] \subseteq x_\alpha$ voor alle $\alpha \in \omega_1$. Voor een opvolger-ordinaal $\alpha + 1 \in \omega_1$ kiezen we $s_{\alpha+1}(\alpha) \in x_{\alpha+1} \setminus x_\alpha$. Stel nu dat γ een limietordinaal is, dus $\gamma = \sup \gamma_n$, en alle s_{γ_n} zijn bekend. Definieer t_γ door op elk interval van de vorm $[\gamma_n, \gamma_{n+1})$ de functie $s_{\gamma_{n+1}}$ te gebruiken. Dan is t_γ op γ_n gelijk aan s_{γ_n}, op eindig veel punten na. Maar het kan gebeuren dat $t_\gamma[\gamma] \nsubseteq x_\gamma$ is, dus bekijken we $B = \{\alpha < \gamma : t_\gamma(\alpha) \notin x_\gamma\}$. Voor elke n geldt dat $B \cap \gamma_n$ eindig is; dus als we nu s_γ maken door t_γ in de punten van B aan te passen dan geldt weer dat s_γ op γ_n gelijk is aan s_{γ_n}, op eindig veel punten na. Omdat $x_{\gamma_0} \subset^* x_{\gamma_1} \subset^* \cdots \subset^* x_{\gamma_i} \subset^* \cdots \subset^* x_\gamma$ vinden we een oneindige verzameling A zó dat $A \subseteq x_\gamma$ en $A \cap x_{\gamma_i}$ eindig voor alle i. Maak nu s_γ door $s_\gamma(\alpha) \in A$ te kiezen voor $\alpha \in B$. Dan geldt dat $s_\gamma \approx s_{\gamma_n}$ op γ_n en dat $s_\gamma[\gamma] \subseteq x_\gamma$. □

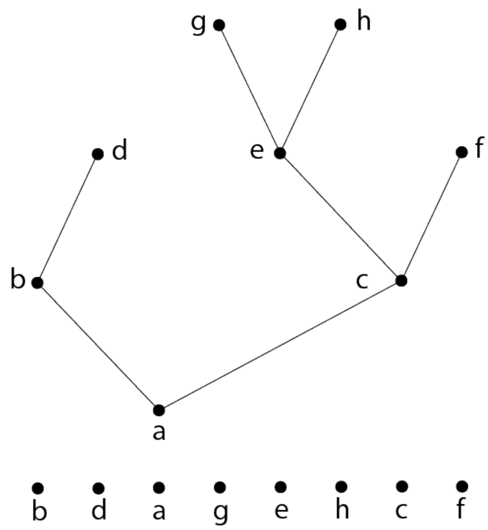
Bomen die aan stelling 4.6 voldoen worden *Aronszajn bomen* genoemd.

4.3. Bomen en lineaire ordeningen

Gegeven een boom $(T, \prec)$, dan kunnen we een lineaire ordening $<$ op T verkrijgen. In plaats van als boom die uit de grond komt, stellen we ons T voor als een platgedrukte boom op papier. We ordenen de punten van T nu van links naar rechts onder de volgende twee voorwaarden, zoals te zien in figuur 4.1. Ten eerste, gegeven twee punten b en c op hetzelfde niveau en opvolgers $d \succ b$ en $g \succ c$, waarbij d en g zich niet per se op hetzelfde niveau hoeven te bevinden. Als b zich links van c bevindt, dan bevindt d zich links van g. Ten tweede, als $a \prec c \prec e$, dan bevindt a zich links van c dan en slechts dan als a zich links van e bevindt. We noemen een lineaire orde $<$ met deze eigenschappen een *squashing* van $\prec$.

Definitie 4.8. Een lineaire orde $<$ is een *squashing* van $\prec$ dan en slechts dan als
(a) als b en c op hetzelfde niveau van T zitten, $b \prec d$, $c \prec g$ en $b < c$, dan $d < g$, en
(b) als $a \prec c \prec e$, dan $a < c$ dan en slechts dan als $a < e$.

Een lineaire orde $<$ kan recursief dus op een gemakkelijke manier geconstrueerd worden, maar deze is niet uniek. We kunnen de directe opvolgers van een punt $x \in T$ namelijk op iedere mogelijke manier ordenen. Zo had $<$ in figuur 4.1 nog steeds aan bovengenoemde voorwaarden voldaan als $h < g$ in plaats van $g < h$.



Figuur 4.1: Een squashing $<$ van een boom.

De volgende stelling zegt dat we geen strikt stijgende of strikt dalende rijen van lengte κ in $(T, <)$ kunnen vinden, waarbij $<$ een squashing is van T. We bewijzen deze stelling voor een willekeurig overaftelbaar kardinaalgetal κ, omdat we deze in hoofdstuk 5.2 nog zullen toepassen.

Stelling 4.9. *Zij $(T, \prec)$ een κ-Aronszajn boom en $<$ een squashing van T. Dan bestaat er geen strikt stijgende of strikt dalende rij $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ in $(T, <)$.*

Bewijs. Stel dat $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ een stijgende rij is in $(T, <)$. We zullen met behulp van $\langle x_\alpha \rangle_\alpha$ een pad $\langle y_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ door T definiëren, wat een tegenspraak oplevert. Kies voor ieder ordinaalgetal $\xi \prec \kappa$ een punt y_ξ op de volgende manier. Voor een vaste $\xi \prec \kappa$, fix een α zó dat voor alle $\beta \succ \alpha$, x_β op niveau $\succ \xi$ ligt. Laat z_β nu het element onder x_β op niveau ξ zijn, dan volgt uit definitie 4.9 dat $\langle z_\beta \rangle_{\alpha<\beta<\kappa}$ niet-dalend is. Daarnaast geldt dat niveau ξ kardinaliteit kleiner dan κ heeft omdat T een Aronszajn boom is. Dus de rij $\langle z_\beta \rangle_\beta$ is niet injectief en er is een punt y_ξ op niveau ξ waarvoor $I = \{\beta : z_\beta = y_\xi\}$ kardinaliteit κ heeft. Neem $\beta_0 = \min T$, dan geldt dat z_β constant is vanaf β_0. Immers, neem $\gamma > \beta_0$ en β in I groter dan γ. Dan ligt z_γ tussen $z_{\beta_0} = y_\xi$ en $z_\beta = y_\xi$. Dus $z_\gamma = y_\xi$, en z_β is constant vanaf β_0. De rij $\langle y_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ is nu een pad door T van lengte κ. Het bewijs voor een strikt dalende rij gaat op dezelfde manier. □

In feite wijst stelling 4.9 op nóg een verschil tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$. Namelijk, gegeven $(T, <)$, waarbij T een ω_1-Aronszajn boom en $<$ een squashing van T, en $\kappa = \omega_1$, dan zegt stelling 4.9 dat er géén strikt stijgende of strikt dalende rij van lengte ω_1 in de lineair geordende verzameling $(T, <)$ bestaat. Merk op dat dit niet voor iedere lineair geordende verzameling van kardinaliteit $\aleph_1$ geldt. Neem bijvoorbeeld de verzameling ω_1, dan vormen alle elementen in de verzameling een strikt stijgende rij van lengte ω_1. In het geval dat X een lineair geordende verzameling is zó dat $|X| = \aleph_0$ kunnen we wél altijd een strikt stijgende of strikt dalende rij van lengte ω vinden. Dit bewijs maakt gebruik van de stelling van Ramsey en komt in hoofdstuk 5.2 aan bod.

4.4. Het Souslin probleem

Aronszajn bomen hebben veel te maken met het zogeheten Souslin probleem. Meneer Souslin vroeg zich in 1920 het volgende af, wat tegenwoordig bekend staat als de Souslin Hypothese (SH). [6]

***Souslin hypothese (SH)**. Iedere lineair geordende verzameling $(L, <)$ waarvoor geldt dat*

(i) $<$ is een dichte lineaire ordening zonder begin- en eindpunt,
(ii) iedere verzameling van disjuncte open intervallen is aftelbaar,
(iii) $(L, <)$ is compleet,

is isomorf met de reële getallen $(\mathbb{R}, <)$.

Een bevestiging noch ontkrachting van bovenstaande hypothese bleef uit, totdat er in 1971 bewezen werd dat SH onafhankelijk is van de **ZFC** verzamelingenleer, zoals deze in hoofdstuk 2 geïntroduceerd is. Zelfs onder de aanname van de Continuümhypothese kan er geen zinnige uitspraak over SH gedaan worden. Onder de aanname van *Jensens diamand principe* ($\Diamond$) kan dit echter wel. $\Diamond$ luidt als volgt.

***Jensen** ($\Diamond$). Er bestaat een rij $\langle A_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ zó dat $A_\alpha \subseteq \alpha$ en voor alle $A \subseteq \omega_1$ geldt dat $\{\alpha : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ stationair is.*

Over de term 'stationair' zullen we ons niet bekommeren, het is nu slechts relevant dat de verzameling $\{\alpha : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ niet leeg is. Een bijzonder geval van $\Diamond$ is dan:
Voor alle $A \subseteq \omega$ bestaat er een $\alpha : A \cap \alpha = A_\alpha$. Deze uitspraak is equivalent met de Continuümhypothese. We zien dus dat $\Diamond \implies$ CH, maar dit geldt niet andersom. Onder de aanname van $\Diamond$ kunnen we de Souslin Hypothese ontkrachten, met andere woorden, we kunnen een lineair geordende verzameling construeren die aan voorwaarden *(i)-(iii)* voldoet maar niét isomorf is met $\mathbb{R}$. Een dergelijke lineair geordende verzameling heet een *Souslin lijn*. Een Souslin lijn kunnen we uit een ω_1-Aronszajn boom construeren. Voor we dat doen, definiëren we eerst wat een *antiketen* is.

Definitie 4.10. Een *antiketen* in een boom T is een verzameling $A \subseteq T$ zó dat als $x, y \in A$, $x \neq y$, dan $x \nless y$ en $y \nless x$.

Een niveau T_α van een ω_1-Aronszajn boom is een voorbeeld van een aftelbare antiketen. Echter bestaan er in sommige ω_1-Aronszajn bomen ook overaftelbare antiketens. We definiëren een ω_1-Souslin boom T als een speciaal geval van een ω_1-Aronszajn boom met de eigenschap dat T géén antiketens van kardinaliteit ω_1 heeft. De volgende en laatste stelling met betrekking tot bomen garandeert het bestaan van een ω_1-Souslin boom dan en slechts dan als er een Souslin lijn bestaat.

Stelling 4.11. *Er bestaat een ω_1-Souslin boom dan en slechts dan als er een Souslin lijn bestaat.*

In feite verkrijgen we een Souslin lijn door een ω_1-Souslin boom te squashen, waarbij we een extra voorwaarde stellen om te garanderen dat de squashing $<$ dicht is. We kunnen ook een Souslin boom uit een Souslin lijn construeren. Dit doen we recursief op de volgende manier. Niveau 0 bestaat uit een enkel punt: de Souslin lijn zelf. We construeren niveau 1 door de Souslin lijn te verdelen in twee disjuncte open intervallen, waarbij we één punt achterwege laten. Dit proces herhalen we. Niveau 2 bestaat dus uit 4 disjuncte open intervallen (die de hele Souslin lijn uitgezonderd 3 punten overdekken), niveau 3 uit 8 disjuncte open intervallen etc. Omdat het aantal disjuncte open intervallen in een Souslin lijn maximaal aftelbaar is, vinden we dat de limietniveaus van de Souslin boom – die we op bovenstaande manier construeren – aftelbaar zijn. Voor een uitgebreide versie van het bewijs zie [3].

5

Combinatorische verzamelingenleer

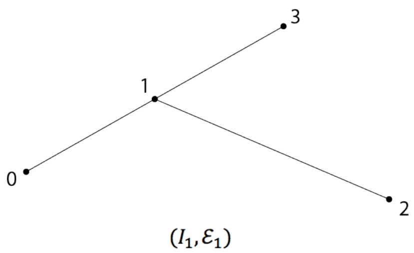
Vóór we het derde verschil tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ uitlichten maken we een klein uitstapje naar de 'oneindige grafentheorie', ook wel combinatorische verzamelingenleer. Combinatorische verzamelingenleer is een uitbreiding van ideeën in combinatoriek naar oneindige verzamelingen. Ramsey's stelling – die geldt voor een graaf bestaande uit $\aleph_0$ punten maar niet voor een graaf bestaande uit $\aleph_1$ punten – staat in dit hoofdstuk centraal. [3]

5.1. Grafen

Een graaf is een verzameling van punten in de ruimte, ook wel *knopen* genoemd, waarvoor geldt dat sommige knopen met elkaar verbonden zijn door *lijnen*. Laat $[I]^2 = \{\langle x, y\rangle : x, y \in I, x \neq y\}$.

Definitie 5.1. Een graaf is een paar $(I, \mathcal{E})$ zó dat $\mathcal{E} \subseteq [I]^2$.

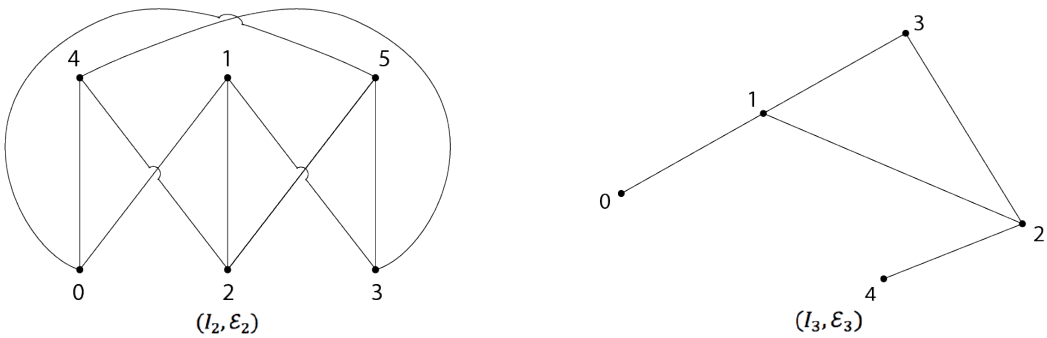
Figuur 5.1 is bijvoorbeeld een graaf, namelijk $I_1 = 4$ en $\mathcal{E}_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$.



Figuur 5.1: Een graaf.

Definitie 5.2. $(I', \mathcal{E}')$ is een deelgraaf van $(I, \mathcal{E})$ dan en slechts dan als $I' \subseteq I$ en $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap [I']^2$.

Zo is $(I_1, \mathcal{E}_1)$ een deelgraaf van $(I_2, \mathcal{E}_2)$, maar niet van $(I_3, \mathcal{E}_3)$, omdat er geldt dat $\{2, 3\} \notin \mathcal{E}_1$. De graaf $(I, [I]^2)$ noemen we *volledig* en de graaf $(I, 0)$ noemen we *leeg*.

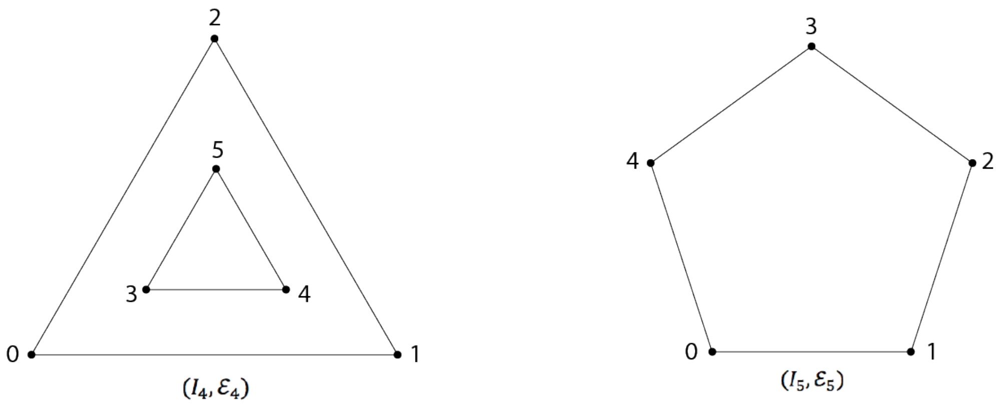


Figuur 5.2: Twee grafen. Er geldt dat $(I_1, \mathcal{E}_1)$ een deelgraaf is van $(I_2, \mathcal{E}_2)$ maar $(I_1, \mathcal{E}_1)$ is *geen* deelgraaf van $(I_3, \mathcal{E}_3)$.

Onderstaande stelling is een speciaal geval van de eindige versie van Ramsey's stelling.

Stelling 5.3. *Zij $G = (I, \mathcal{E})$ een graaf zó dat $|I| \geq 6$. Dan bestaat er een deelgraaf $G' = (I', \mathcal{E}')$ van G zó dat $|I'| = 3$ en G' ofwel volledig ofwel leeg is.*

We zullen eerst onze intuïtie voor het bewijs ontwikkelen. De deelgraaf $(I_2', \mathcal{E}_2')$ van $(I_2, \mathcal{E}_2)$ is leeg voor $I_2' = \{1, 4, 5\}$. In figuur 5.3 zien we dat de deelgraaf $(I_4', \mathcal{E}_4')$ van $(I_4, \mathcal{E}_4)$ volledig is voor $I_4' = \{0, 1, 2\}$. Bovenstaande stelling lijkt dus waar in het geval dat $|I| = 6$, en zou in dat geval vanzelfsprekend ook gelden als $|I| \geq 6$. De graaf $(I_5, \mathcal{E}_5)$ geeft als eenvoudig tegenvoorbeeld weer dat de stelling niet opgaat in het geval dat $|I| = 5$. Het rest ons nu te bewijzen dat iedere graaf $G = (I, \mathcal{E})$ in het geval dat $|I| = 6$ aan bovenstaande stelling voldoet.



Figuur 5.3: Twee grafen. De deelgraaf $(I_4', \mathcal{E}_4')$ is volledig voor $I_4' = \{0, 1, 2\}$. Voor graaf $(I_5, \mathcal{E}_5)$ geldt stelling 5.3 niet.

Bewijs. In plaats van een graaf waarin iedere twee knopen wel of niet met elkaar verbonden zijn, bekijken we een volledige graaf $G = (I, \mathcal{E})$ waarin iedere twee knopen ofwel door een rode ofwel door een blauwe lijn met elkaar verbonden zijn. Bekijk een willekeurige knoop $i \in I$. De knoop i is door middel van 5 lijnen met de overige knopen verbonden, dus moeten ten minste 3 van deze lijnen dezelfde kleur hebben. Stel zonder verlies van algemeenheid dat deze lijnen blauw zijn. Als een van de overige lijnen (r, s), (r, t) of (s, t) ook blauw is dan verkrijgen we een volledig blauwe driehoek. Als daarentegen de overige lijnen alledrie rood zijn dan verkrijgen we een volledig rode driehoek. We concluderen dat voor iedere volledige graaf G er een deelgraaf G' van G bestaat zó dat alle lijnen in G' ofwel blauw ofwel rood gekleurd zijn. □

Ramsey heeft stelling 5.3 in een nog algemenere vorm bewezen. Namelijk, voor alle $j \in \omega$ bestaat er een $i \in \omega$ zó dat als $G = (I, \mathcal{E})$ uit ten minste i knopen bestaat, dan bestaat er een deelgraaf $G' = (I', \mathcal{E}')$ van G zó dat $|I'| = j$ en G' ofwel volledig ofwel leeg is. Stel $R(j)$ de kleinste i waarvoor bovenstaande stelling opgaat; dus $R(2) = 2$ en $R(3) = 6$. $R(j)$ noemen we het Ramsey getal. Het is in het algemeen zeer moeilijk om de waarde van de verschillende Ramsey getallen te berekenen.

5.2. Ramsey's stelling

We kunnen bovengenoemde eigenschappen op de volgende manier generaliseren. Ten eerste, gegeven een verzameling I en een kardinaalgetal σ, dan is $P : [I]^2 \to \sigma$ een *partitie* van $[I]^2$ in σ delen. We kunnen P beschouwen als een *kleuring* van alle lijnen in een van de σ kleuren. In plaats van ons te beperken tot $[I]^2$, kunnen we ook de verzameling $[I]^n = \{F \subseteq I : |F| = n\}$ en partities $P : [I]^n \to \sigma$ beschouwen.

Definitie 5.4. Zij $P : [I]^n \to \sigma$. Een deelverzameling $H \subseteq I$ is *homogeen* dan en slechts dan als P constant is op $[H]^n$.

De *Erdös notatie* $\kappa \to (\lambda)^n_\sigma$ wordt gebruikt om de volgende bewering af te korten: zij $P : [\kappa]^n \to \sigma$, dan bestaat er een homogene $H \subseteq \kappa$ zó dat $|H| = \lambda$.

Voorbeeld. $6 \to (3)^2_2$ maar $5 \nrightarrow (3)^2_2$. Namelijk, voor iedere graaf G bestaande uit 6 knopen bestaat er een deelgraaf G' van G zó dat G' homogeen is en G' uit 3 knopen bestaat, maar dit geldt niet voor een graaf G bestaande uit 5 knopen.

Merk op dat als $\kappa \to (\lambda)^n_\sigma$, $\kappa' \geq \kappa$, $\lambda' \leq \lambda$, $\sigma' \leq \sigma$, $n' \leq n$, dan $\kappa' \to (\lambda')^{n'}_{\sigma'}$. Ramsey bewees de volgende stelling voor alle n, σ eindig, nu bekend als Ramsey's stelling.

Stelling 5.5 (Ramsey's stelling). *$\omega \to (\omega)^n_\sigma$ voor alle n, σ eindig.*

Het eerste niet-triviale geval van stelling 5.5 is $\omega \to (\omega)^2_2$. Dus, gegeven een kleuring $c : [\omega]^2 \to 2$ en een graaf G bestaande uit ω knopen, dan bestaat er een deelgraaf G' van G zó dat G' homogeen is en uit ω knopen bestaat. We zullen stelling 5.5 slechts in dit geval bewijzen.

Bewijs. Gegeven een kleuring $c : [\omega]^2 \to 2$. We definiëren een deelboom $\{t_n : n \in \omega\}$ van ${}^{<\omega}2$ als volgt: $t_0 = \emptyset$; als $n > 0$ en de t_m voor $m < n$ zijn bekend dan definiëren we $t_n \restriction m$ recursief: als $t_n \restriction k = t_m$ voor een $m \in n$ dan $t_n(k) = c(m, n)$, als $t_n \restriction k \neq t_m$ dan stoppen we: $t_n = t_n \restriction k$. Bijvoorbeeld, t_1 construeren we op de volgende manier. Er geldt dat $t_1 \restriction 0 = t_0$, dus $t_1(0) = c(0, 1)$, waarbij $c(0, 1)$ de kleur van de lijn tussen 0 en 1 is. Voor t_2 geldt dat $t_2 \restriction 0 = t_0$, dus $t_2(0) = c(0, 2)$. $t_2(0)$ is dus – afhankelijk van de kleuring – gelijk of ongelijk aan $t_1(0)$. Als geldt dat $t_2 \restriction 1 = t_1$, dan volgt dat $t_2(1) = c(1, 2)$ en verkrijgen we een rijtje van lengte 2. Als geldt dat $t_2 \restriction 1 \neq t_1$, dan volgt $t_2 = t_2(0)$ een rijtje is van lengte 1. Merk op dat voor ieder rijtje t_n geldt dat t_n van lengte $\leq n$ is. Daarnaast zijn alle niveaus van $\{t_n : n \in \omega\}$ eindig omdat alle niveaus van ${}^{<\omega}2$ eindig zijn. König's lemma zegt nu dat we een pad T van lengte ω door $\{t_n : n \in \omega\}$ kunnen vinden. Beschouw de verzamelingen $H = \{n : t_n \in T$ en $t_n{}^\frown 0 \in T\}$ en $K = \{n : t_n \in T$ en $t_n{}^\frown 1 \in T\}$. Voor $m < n$ in H geldt dat $t_m = t_n \restriction k$ voor een bepaalde k. Omdat $t_m{}^\frown 0 \in T$ volgt het dat $t_n(k) = c(m, n) = 0$. We zien dat $c(m, n) = 0$ voor alle $m, n \in H$, dus H is homogeen. Op dezelfde manier geldt dat $c(j, l) = 1$ voor alle $j, l \in K$, dus ook K is homogeen. Omdat voor elke $t_n \in T$ geldt dat $n \in H$ of $n \in K$ vinden we dat H of K oneindig is. □

Een uitbreiding van Ramsey's stelling voor ω_1 luidt als volgt: $\omega_1 \to (\omega_1)^n_\sigma$ *voor n eindig en σ aftelbaar.* Met behulp van stelling 5.6 kunnen we laten zien dat deze uitbreiding *niet* geldt.

Stelling 5.6. *Voor ieder kardinaalgetal κ geldt*

(a) $2^\kappa \nrightarrow (3)^2_\kappa$

(b) $2^\kappa \nrightarrow (\kappa^+)^2_2$

Bewijs. We bewijzen (a) eerst voor het geval dat $\kappa = \omega$. Dus, $\mathfrak{c} \nrightarrow (3)^2_\omega$. Bekijk de verzameling reëele getallen $\mathbb{R}$ en de aftelbare verzameling breuken $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$. Omdat $\mathbb{Q}$ dicht is in $\mathbb{R}$, ligt er tussen x, y gegarandeerd een rationaal getal. We geven de lijn $\{x, y\}$ in een overaftelbare graaf de kleur n waarbij $n = \min\{k : q_k$ tussen $x, y\}$. Zij nu $x, y, z \in \mathbb{R}$ willekeurig en stel dat $\{x, y\}$ kleur l krijgt. We onderscheiden nu twee gevallen.

(i) $\{y, z\}$ krijgt een andere kleur m. In dat geval is $\{x, y, z\}$ niet homogeen.

(ii) $\{y, z\}$ krijgt ook kleur l. In dat geval krijgt $\{x, z\}$ een andere kleur m. Immers, stel dat $\{x, z\}$ ook kleur l zou krijgen, dan zou q_l tussen x, y; y, z én x, z liggen voor een kleinste getal l.

We concluderen dat $\mathfrak{c} \nrightarrow (3)^2_\omega$.

Stel nu dat κ een willekeurig kardinaalgetal is. Beschouw de verzameling $\mathcal{F}$ van functies $f : \kappa \to 2$ van kardinaliteit 2^κ. Zij $f, g, h \in \mathcal{F}$ willekeurige functies. We geven de lijn $\{f, g\}$ kleur α waarbij $\alpha = \min\{\beta : f(\beta) \neq g(\beta)\}$. We onderscheiden opnieuw twee gevallen.

(i) $\{g, h\}$ krijgt een andere kleur γ. In dat geval is $\{f, g, h\}$ niet homogeen.

(ii) $\{g, h\}$ krijgt ook kleur α. In dat geval krijgt $\{f, h\}$ een andere kleur γ. Immers, als $\{f, h\}$ ook kleur α krijgt, dan zou gelden dat $f(\alpha) = g(\alpha)$.

We bewijzen (b) slechts voor het geval dat $\kappa = \omega$. We zullen dus bewijzen dat $\mathfrak{c} \nrightarrow (\omega_1)^2_2$. De welordeningsstelling van Zermelo zegt dat $\mathbb{R}$ welgeordend kan worden. We bekijken $\mathbb{R}$ met de gewone ordening < en met de welordening $\prec$. Stel

$$\{x, y\} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x < y \iff x \prec y \\ 1 & \text{als } x < y \iff y \prec x \end{cases}$$

Met andere woorden, een lijn $\{x, y\}$ in een graaf bestaande uit overaftelbaar veel knopen krijgt de 'kleur' 0 als beide ordeningen het met elkaar eens zijn, en $\{x, y\}$ krijgt kleur 1 als beide ordeningen het niet met elkaar eens zijn. Bekijk nu een verzameling H homogeen, zó dat $\{x, y\} \mapsto 0$ voor alle $x, y \in H$. Dan is $<$ een welordening van H. Zij $x \in H$, dan is $x^+ \in H$ de opvolger van x als $x^+ = \min\{y \in H : x < y\}$.

Nu geldt dat als $x \neq y$, dan $(x, x^+) \cap (y, y^+) = \emptyset$. We concluderen dat het aantal elementen in H kleiner of gelijk is aan het aantal disjuncte open intervallen in $\mathbb{R}$. Uit lemma 5.7 volgt nu dat $|H| \leq \aleph_0$.
Stel nu dat G homogeen is, zó dat $\{x, y\} \mapsto 1$ voor alle $x, y \in G$. Dan is $>$ een welordening van G, en geldt op dezelfde manier dat $|G| \leq \aleph_0$. We concluderen dat $\mathfrak{c} \nrightarrow (\omega_1)^2_2$. □

Lemma 5.7. *Iedere verzameling van disjuncte open intervallen in $\mathbb{R}$ is aftelbaar.*

Bewijs. Zij $\mathcal{H}$ een verzameling van disjuncte open intervallen in $\mathbb{R}$. Omdat $\mathbb{Q}$ dicht is in $\mathbb{R}$ zit er in elk open interval $H \in \mathcal{H}$ minstens één rationeel getal q. De intervallen zijn disjunct, dus zijn de rationele getallen q die in de intervallen liggen verschillend. We concluderen dat $|\mathcal{H}| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. □

Het rest ons nu te laten zien dat $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^n_\sigma$ voor n eindig en σ aftelbaar. Dit volgt uit zowel (a) als (b) in stelling 5.6. Immers, (a) zegt dat $\mathfrak{c} \nrightarrow (3)^2_\omega$. We kunnen de lijnen in een graaf dus niet zó kleuren dat we een homogeen drietal kunnen vinden, laat staan een oneindige homogene verzameling. (b) zegt dat $\mathfrak{c} \nrightarrow (\omega_1)^2_2$, oftewel, er bestaat een kleuring met slechts twee kleuren van de lijnen in een graaf bestaande uit overaftelbaar veel knopen *zonder* een overaftelbare homogene verzameling. Het volgt dat voor n eindig en σ aftelbaar geldt dat $\omega_1 \nrightarrow (\omega_1)^n_\sigma$.
De volgende stelling geeft een mooi verband weer tussen kleuringen en Aronszajn bomen.

Stelling 5.8. *Als $\kappa \to (\kappa)^2_2$ dan bestaan er geen κ-Aronszajn bomen.*

Bewijs. Stel dat $(T, \prec)$ een Aronszajn boom van hoogte κ is. De boom kan door middel van $<$ gesquashd worden tot een linear geordende verzameling $(T, <)$. Volgens stelling 4.9 bestaat er geen strikt stijgende of strikt dalende rij $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ in $(T, <)$. We maken nu de volgende claim: *Als $\kappa \to (\kappa)^2_2$ en $(L, <)$ is een lineair geordende verzameling van kardinaliteit κ, dan bestaat er een strikt stijgende of strikt dalende rij van lengte κ in L.* Het bewijs van de claim gaat op dezelfde manier als het bewijs van stelling 5.6 (b). Immers, zij $\prec$ een welordening van L en stel dat $\{x, y\} \mapsto 0$ als $x < y \iff x \prec y$ en $\{x, y\} \mapsto 1$ anders. Zij H nu een homogene verzameling van kardinaliteit κ zó dat $\{x, y\} \mapsto 0$ voor alle $x, y \in H$. Dan worden de elementen in H welgeordend door $<$, en we concluderen dat er een strikt stijgende of een strikt dalende rij van lengte κ in L bestaat. Het bewijs van de stelling volgt nu door contrapositie. □

Tot dusver kunnen we weinig zinnige uitspraken doen over kleuringen en (homogene) deelverzamelingen in een overaftelbare graaf. We weten alleen dat, gegeven een kleuring $c : [\omega_1]^2 \to 2$, er géén $H \subseteq \omega_1$ bestaat zó dat $|H| = \omega_1$ en alle lijnen in H dezelfde kleur hebben. De wiskundige Stevo Todorčević ging op zoek naar patronen in het aantal verschillende gekleurde lijnen in een overaftelbare graaf, maar vond het volgende resultaat. [7]

Stelling 5.9. *Er bestaat een kleuring $f : [\omega_1]^2 \to \omega_1$ zó dat voor elke overaftelbare deelverzameling $H \subseteq \omega_1$ geldt $f\big[[H]^2\big] = \omega_1$.*

Met andere woorden, gegeven een overaftelbare graaf, dan bestaat er een kleuring $f : [\omega_1]^2 \to \omega_1$ zó dat voor elke overaftelbare deelverzameling $H \subseteq \omega_1$ geldt dat de lijnen in H alle ω_1 verschillende kleuren aannemen. We kunnen dus geen overaftelbare deelgraaf vinden diens lijnen in ω veel kleuren gekleurd zijn, laat staan dat deze verzameling homogeen is, al wisten we dat laatste natuurlijk al.
In het geval van ω geldt bovenstaande stelling niet. Immers, gegeven een aftelbare graaf en een willekeurige kleuring $f : [\omega]^2 \to \omega$, dan bestaat er een $H \subseteq \omega$ zó dat $f\big[[H]^2\big] \subseteq \{2n : n \in \omega\} \neq \omega$.

6
Conclusie

Deze scriptie beschrijft het literatuuronderzoek naar de 'Verschillen tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$'. Nadat er in hoofdstuk 2 een korte beschrijving gegeven is van de opbouw van de verzamelingenleer, zijn in de daaropvolgende hoofdstukken drie belangrijke verschillen tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ uitgelicht.

Hoofdstuk 3 begint met de formele definitie van de term kardinaliteit, waarna gesteld is dat twee verzamelingen hebben dezelfde kardinaliteit hebben als er een bijectie tussen de verzamelingen bestaat. Vervolgens maakt de lezer kennis met lineaire ordeningen en welgeordende verzamelingen, en worden twee essentiële bewijstechnieken voor het transfiniete geval geïntroduceerd: het inductieprincipe en het recursieprincipe. Tot zover is er voldoende kennis opgebouwd om het eerste verschil tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$ uit te lichten: het Pressing-Down Lemma. Het Pressing-Down Lemma luidt als volgt: *Zij $f : \omega_1 \to \omega_1$ zó dat $f(\alpha) < \alpha$ als $\alpha > 0$. Dan is er een β zó dat $A = \{\alpha : f(\alpha) = \beta\}$ overaftelbaar is.* Het Pressing-Down Lemma geldt niet in het aftelbare geval. Immers, de functie $f : \omega \to \omega$ gegeven door $f(n) = \max\{0, n-1\}$ is (op een haar na) bijectief.

In hoofdstuk 4 maakt de lezer kennis met de wiskundige boom. König's lemma geldt voor bomen van hoogte ω: *Zij T een boom van hoogte ω zó dat T_n eindig is voor elke $n \in \omega$. Dan bestaat er een pad van lengte ω door T.* Het bewijs voor deze stelling is eenvoudig, maar kan – in verband met problemen op de limietniveaus in een overaftelbare boom – niet naar het overaftelbare geval worden uitgebreid. Om König's lemma in het overaftelbare geval te ontkrachten, is er een boom T geconstrueerd van hoogte ω_1 zó dat ieder niveau van T aftelbaar is, maar er geen pad van lengte ω_1 door T bestaat – een zogeheten ω_1-Aronszajn boom. Tot slot is er beschreven hoe er door middel van een squashing $<$ op een ω_1-Aronszajn boom een Souslin lijn verkregen kan worden, wat de Souslin Hypothese onder aanname van $\diamondsuit$ ontkracht.

Hoofdstuk 5 start met wat basisconcepten uit de oneindige grafentheorie, ook wel de combinatorische verzamelingenleer. Nadat we een speciaal geval van de eindige versie van Ramsey's stelling bekeken hebben, formuleren we deze voor een n-dimensionale graaf. De stelling, in Erdös notatie, luidt als volgt: $\omega \to (\omega)^n_\sigma$ voor alle n, σ eindig. Deze stelling is bewezen voor een kleuring $c : [\omega]^2 \to 2$ in een 2-dimensionale graaf. Net zoals König's lemma geldt Ramsey's stelling niet in het overaftelbare geval.

Bibliografie

[1] K. P. Hart. *Set-Theoretic Methods in General Topology*. 2005.

[2] K. P. Hart. *Verzamelingenleer*. 2018.

[3] K. Kunen. “Combinatorics”. In: *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland, 1977.

[4] Đ. Kurepa. *Ensembles ordonnés et ramifiés*. 1935.

[5] J. von Neumann. “Zur Einführung der transfiniten Zahlen 3”. In: *Acta Scientiarum Mathematicarum* (1923).

[6] M. Souslin. “Problème 3”. In: *Fundamenta Mathematicae* (1920).

[7] S. Todorčević. *Walks on Ordinals and their Characteristics*. Birkhäuser, 2007.