



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Een ruit van ultrafilters
(A square of ultrafilters)**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE**

door

GABRIËLLE ZWANEVELD

**Delft, Nederland
Juli 2021**

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

**“ Een ruit van ultrafilters
(A square of ultrafilters)”**

GABRIËLLE ZWANEVELD

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. K.P. Hart

Overige commissieleden

Dr. R.J. Fokkink

...

...

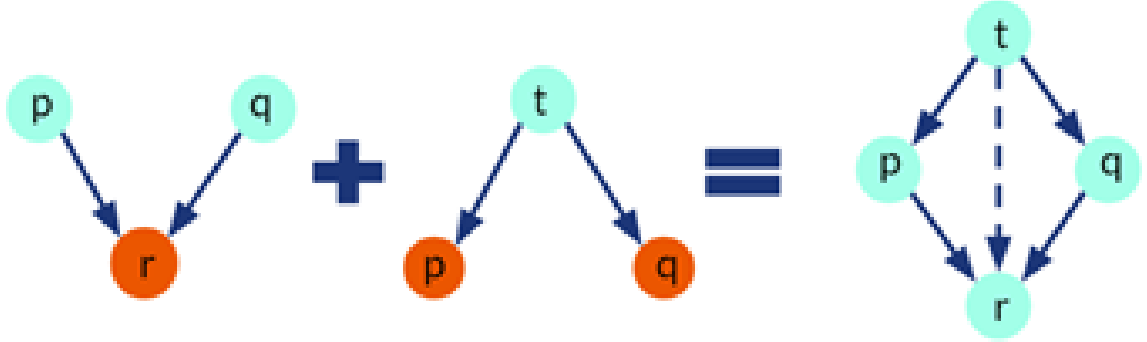
Juli, 2021

Delft

Abstract

Het doel van dit project is om een ruit van ultrafilters te construeren. In het plaatje hieronder kan je zien hoe deze ruit eruit moet komen te zien. De hoekpunten van deze ruit zijn ultrafilters op de verzameling van natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, terwijl de zijden de Rudin-Keislerordering aangeven. Dat wil zeggen: Als er een pijl loopt van hoekpunt A naar hoekpunt B dan is het ultrafilter A groter dan het ultrafilter B in de Rudin-Keislerordering. Tussen de middelste twee hoekpunten loopt geen pijl, dit betekent dat deze twee ultrafilters onvergelijkbaar in de Rudin-Keislerordering zijn.

De constructie van de ruit bestaat uit twee onderdelen; eerst maken we de onderkant van de ruit en vervolgens zetten we daar de bovenkant op. Zie het onderstaande plaatje:



Figuur 1: Schets van het bewijs van de constructie van de ruit, deze bestaat uit de onderkant en de bovenkant van de ruit. De oranje ultrafilters zijn willekeurige (vrije) ultrafilters, waar we vervolgens de blauwe ultrafilters bij construeren. Op het einde plakken we de twee constructies op elkaar.

De constructie voor de onderkant begint met een willekeurig (vrij) ultrafilter r en een familie functies $\mathcal{S}$ van de vorm $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met grote schommeling met grootte $2^{|\mathbb{N}|}$. Vervolgens halen we 4 functies f_1, f_2, f_3 en f_4 uit deze familie van grote schommeling en noemen we de rest de verzameling $\mathcal{S}'$. Vervolgens maken we de twee beginfilters

$$p_0 := \langle \{f_1^{-1}[R] : R \in r\} \rangle \text{ en } q_0 = \langle \{f_2^{-1}[R] : R \in r\} \rangle.$$

De familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}'\}$ met $X_h^i := \{n \in \mathbb{N} : h(n) \equiv i \pmod{2}\}$ is onafhankelijk ten opzichte van de twee beginfilters p_0 en q_0 . Vervolgens gaan we op analoge wijze als Kenneth Kunen [5] deze twee beginfilters uitbreiden tot onafhankelijke ultrafilters p en q . Dan geldt dat $f_1[p] = r$ en $f_2[q] = r$ en hebben we de onderkant geconstrueerd.

Om de bovenkant te maken, beginnen we met de eerder geconstrueerde (onafhankelijke) vrije filters p en q . Vervolgens definiëren we

$$t_0 := \langle f_3^{-1}[P] \cap f_4^{-1}[Q] : P \in p \text{ en } Q \in q \rangle.$$

Als we dit filter uitbreiden tot een ultrafilter t geldt dat $f_3[t] = p$ en $f_4[t] = q$. Nu plakken we deze twee constructies op de onderkant en krijgen we onze ruit.

Op het eind van het project is er nog naar gekeken of we ook andere (eindige) partiële ordeningen binnen de Rudin-Keislerordering kunnen construeren. Hierbij is vooral gekeken naar de normale 3-dimensionale kubus en ook alle n -dimensionale kubussen, waarbij onze ruit de 2-dimensionale kubus is. Hiervoor is gekozen, omdat als je alle n -dimensionale kubussen hebt geconstrueerd je ook alle andere eindige partiële ordeningen kan construeren. Helaas is het niet gelukt om deze constructie voor dimensie 3 of hoger te maken in de beschikbare tijd, maar de pogingen en deelresultaten zijn beschreven in de appendix.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	6
2	Handige resultaten uit de literatuur	7
2.1	Partiële ordeningen	7
2.2	Belangrijke resultaten uit de verzamelingenleer	8
3	Ultrafilters op machtsverzamelingen	9
3.1	Definitie filter	9
3.2	Definitie van een ultrafilter	11
3.3	Vrije ultrafilters	13
4	Families van grote schommeling	15
5	De Rudin-Keislerordering	18
5.1	Onvergelijkbare ultrafilters	21
6	Constructie ruit	26
6.1	Constructie onderkant ruit	26
6.2	Constructie bovenkant ruit	28
6.3	Constructies samenvoegen	28
	Referenties	30
	Populaire samenvatting	31
A	Willekeurige eindige partiële ordeningen	32
B	Het frame van het bewijs voor de n-dimensionale kubus	33
B.1	Opzet van een n -dimensionale kubus	33
B.2	Inductiebasis	34
B.3	Speciale verbindingen	35
B.4	Het bovenste ultrafilter	36
C	Transfinitie inductie en filters uitbereiden tot ultrafilters	37
C.1	Lemma's voor variant inductiehypothese alleen beelden toevoegen	38
C.2	Te zwakke inductiehypothese	41
C.3	Sterkere inductiehypothese	42
C.3.1	Meerdere onafhankelijke families	43
C.4	Mooie verzamelingen bovenin toevoegen	46

1 Inleiding

In deze bachelorscriptie ga ik een ruit van ultrafilters te construeren onder ZFC, oftewel de Zermelo-Fraenkelverzamelingsleer met de aanname van het keuzeaxioma. In de ruit zijn de hoekpunten de ultrafilters en geven de pijlen de Rudin-Keisler ordening aan. Dat wil zeggen; als er een pijl van het ultrafilter p naar het ultrafilter r is dan geldt $r \preceq p$ in de Rudin-Keislerordening. Wat ultrafilters precies zijn wordt samen met wat belangrijke eigenschappen uitgelegd in hoofdstuk 3. In hoofdstuk 5 wordt uitgelegd wat de Rudin-Keislerordening precies is en worden daarnaast een aantal belangrijke stellingen over deze ordening bewezen. Het voor ons belangrijkste resultaat van dit hoofdstuk is het bewijs van Kenneth Kunen uit 1972 [3] over onafhankelijke ultrafilters. Niet alleen is het resultaat van deze stelling belangrijk, maar ook het bewijs. Tijdens de constructie van de ruit gaan we namelijk het bewijs van deze stelling (gedeeltelijk) kopiëren. Hoofdstuk 6 bevat mijn eigen bewijs, namelijk de constructie van de ruit.

Toen het eenmaal gelukt was om de ruit te construeren, kwam de vraag op: kunnen we ook andere (en het liefst alle) eindige partiële ordeningen construeren [7]? Om deze vraag te beantwoorden zijn we gaan kijken naar de constructie van alle n -dimensionale kubussen. Helaas is het, wegens de korte duur van dit project, niet gelukt om deze kubussen te construeren. Al mijn pogingen voor de constructie, heb ik zo uitvoerig mogelijk beschreven in de appendix. Alle lemma's die daar staan, kloppen wel alleen zijn ze te zwak om daadwerkelijk ook de hele kubus te construeren.

Nu kunt u zich afvragen, wat heb ik aan deze ruit van ultrafilters in mijn dagelijkse leven? Ik moet u helaas teleurstellen, het antwoord is namelijk niets. Het beste kan je dit vraagstuk vergelijken met een lastige puzzel of raadsel; het is leuk om deze op te lossen, alleen heeft het geen toepassingen in het dagelijks leven. Helaas geldt dit voor meerdere wiskundige problemen. Dit betekent niet dat theoretische wiskunde geen toegevoegde waarde heeft. Een bekend citaat hierover komt van de wiskundige Godfrey Hardy die in zijn boek *A Mathematician's Apology* het volgende schreef: *'Pure mathematics is on the whole distinctly more useful than applied. [...] For what is useful above all is technique, and mathematical technique is taught mainly through pure mathematics.'* [2].

Nu u een beetje weet wat u in deze scriptie kunt verwachten, is het tijd om te beginnen met wat belangrijke resultaten die we later in dit project gaan gebruiken.

2 Handige resultaten uit de literatuur

Voordat we kunnen beginnen met het project, beginnen we met wat voorkennis die we later nodig hebben. Er wordt verondersteld dat de lezer bekend is met de basiseigenschappen van verzamelingen en functies, zoals inclusie, doorsnede, (inverse) beelden en kardinaliteit. We beginnen daarom met het kijken naar de definitie van een partiële ordening en naar de bekende resultaten uit de verzamelingenleer, zoals het lemma van Zorn en de welorderingsstelling van Zermelo, die we tijdens dit project gaan gebruiken.

2.1 Partiële ordeningen

Een ordening op een verzameling A is een relatie tussen twee elementen a en b van de verzameling. We geven deze relatie vaak aan met $\leq$. Het maakt hierbij uit welk element je eerst kiest, dus $a \leq b$ is iets anders dan $b \leq a$. De makkelijkste manier om over een ordening na te denken, is door het te zien als ‘groter dan of gelijk aan’ of ‘kleiner dan of gelijk aan.’ $a \leq b$ is dus echt niets anders dan de zin: “ a is kleiner dan of gelijk aan b .”

Een ordening kan aan verschillende eigenschappen voldoen. Een ordening op A is

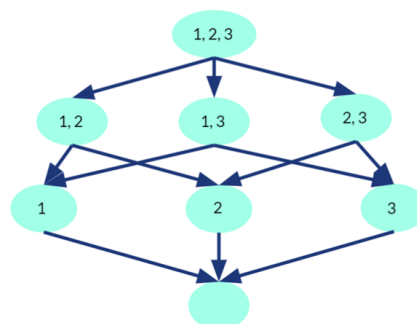
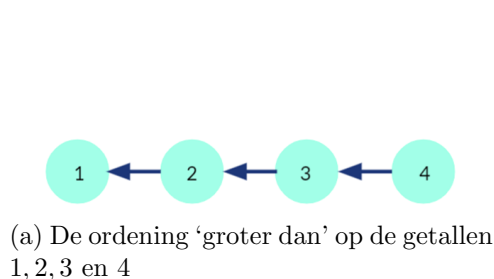
- reflexief, als $a \leq a$ voor alle elementen in A ;
- transitief, als $a \leq b$ en $b \leq c$ impliceert dat $a \leq c$ voor alle $a, b, c \in A$;
- anti-symmetrisch, als $a \leq b$ en $b \leq a$ impliceert dat $a = b$ voor alle $a, b \in A$;
- lineair, als $a \leq b$ of $b \leq a$ voor alle $a, b \in A$.

Ordeningen die aan alle vier de eisen voldoen, noemen we ook wel *lineaire ordeningen*. In het bijzonder geldt dat de normale “groter dan of gelijk aan”-relatie op de gehele getallen een lineaire ordening is. Je hebt ook een iets zwakkere variant, namelijk *partiële ordeningen*. Deze ordeningen zijn wel reflexief, transitief en anti-symmetrisch, maar niet lineair. Als we de normale “groter dan of gelijk aan”-relatie uitbreiden op alle mogelijke voorwerpen en begrippen, zien we dat deze niet meer lineair is. Want wat is bijvoorbeeld groter: de kleur blauw of een appel?

Partiële ordeningen kan je weergeven met behulp van *Hasse-diagrammen*. In zo’n diagram, teken je alle elementen van je verzameling op een papiertje. Vervolgens trek je een pijl van b naar a als $a \leq b$ en $a \neq b$. Alle overbodige pijlen worden hierna weggehaald. Een pijl van c naar a is overbodig, als er in het diagram een gericht pad (een pad dat de pijlen volgt) van c naar a is, zonder de pijl van c naar a te gebruiken.

Om het allemaal wat duidelijk te maken, zijn hieronder twee voorbeelden gegeven van partiële ordeningen met bijbehorende Hasse-diagrammen.

Voorbeeld 2.1.



In een partiële ordening heb je zogenaamde *ketens*, dit zijn deelverzamelingen van de grote verzameling die lineair geordend zijn. In het voorbeeld 2.1b) is bijvoorbeeld $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}$ een geordende keten met $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\}$.

2.2 Belangrijke resultaten uit de verzamelingenleer

Nu gaan we kijken naar twee belangrijke resultaten uit de verzamelingenleer: Het lemma van Zorn en de welordeningsstelling van Zermelo. Het lemma van Zorn wordt in hoofdstuk 3 gebruikt om ultrafilters te construeren en daarnaast is de welordeningsstelling van Zermelo een gevolg van dit belangrijke lemma. Wat daarnaast misschien goed is om te weten, is dat het lemma van Zorn, de welordeningsstelling en het keuzeaxioma allemaal equivalent zijn. Dus het lemma van Zorn en de welordeningsstelling van Zermelo zijn waar dan en slechts dan als je het keuzeaxioma aanneemt. Deze stellingen zijn samen met hun bewijzen terug te vinden in hoofdstuk 1 van *The Theory of Ultrafilters* [1].

Stelling 2.2. (*Lemma van Zorn*) Als $\langle A, \leq \rangle$ een niet-lege partieel geordende verzameling is, zodat elke keten van $\langle A, \leq \rangle$ een bovengrens heeft, dan heeft $\langle A, \leq \rangle$ een maximaal element.

We noemen een verzameling $\langle A, \leq \rangle$ welgeordend als elke niet-lege verzameling van A een kleinste element heeft. In het bijzonder is elke eindige lineair geordende verzameling welgeordend. Een belangrijk voorbeeld van een oneindige verzameling die welgeordend is, is de natuurlijke getallen met de normale ‘groter dan’-relatie.

Gevolg 2.3. (*Welordeningsstelling van Zermelo*) Voor elke verzameling bestaat er een welordering.

De welordeningsstelling van Zermelo gaan we in dit project eigenlijk maar in één geval gebruiken, namelijk op de verzameling van de reële getallen, of $2^{\mathbb{N}}$. In het bewijs voor de onvergelijkbare ultrafilters (stelling 5.14) of de onderkant van de ruit (stelling 6.4), gaan we namelijk gebruik maken van transfinitie recursie. Voor deze transfinitie recursie gaan we alle functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ welordenen, zodat we een verzameling $\{f_\alpha : 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$ krijgen. Deze laatste notatie geeft aan dat de verzameling welgeordend is.

Net zoals je vaak voor recursie het principe van inductie gebruikt, gebruik je voor transfinitie recursie het principe van transfinitie inductie. Dit werkt hetzelfde als normale inductie, alleen dan met een oneindige welgeordende verzameling.

Laat $\langle A, \leq \rangle$ een partieel geordende verzameling zijn en $a \in A$. De verzameling van alle voorgangers van a is de verzameling

$$P(a) = \{b \in A : b < a\}$$

Nu kunnen we het principe van transfinitie inductie gaan bekijken. Zoals je hieronder kan zien lijkt transfinitie inductie heel erg op het principe van sterke inductie.

Stelling 2.4. (*Het principe van transfinitie inductie*) Laat $\langle A, \leq \rangle$ een welgeordende verzameling zijn en $B \subseteq A$. Stel dat voor alle $a \in A$ geldt als $P(a) \subseteq B$ dan ook $a \in B$. Dan geldt $B = A$.

Nu we deze basisresultaten gezien hebben, is het tijd om te gaan kijken wat ultrafilters nou precies zijn.

3 Ultrafilters op machtsverzamelingen

Als we een ruit van ultrafilters willen construeren is het allereerst belangrijk dat we weten wat een ultrafilter precies is. Hiervoor gaan we eerst kijken naar de definitie en eigenschappen van een normale filters, voordat we het ‘ultra’-gedeelte aan de definitie gaan toevoegen.

3.1 Definitie filter

Definitie 3.1. Een **filter** $\mathcal{F}$ op een verzameling X is een niet-lege familie van niet-lege deelverzamelingen van X zodat

- 1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- 2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- 3) Als $A, B \in \mathcal{F}$ dan $A \cap B \in \mathcal{F}$
- 4) Als $A \in \mathcal{F}$ en $A \subset B$ dan $B \in \mathcal{F}$

Er geldt in het bijzonder dat elk filter $\mathcal{F}$ op X een strikte deelverzameling van de machtsverzameling $\mathcal{P}(X)$ is. De lege verzameling $\emptyset$ zit immers wel in $\mathcal{P}(X)$, maar in geen enkel filter $\mathcal{F}$. Met deze definitie kunnen we alvast onze allereerste eigenschappen over filters bewijzen

Lemma 3.2. Voor elk filter $\mathcal{F}$ op X geldt $X \in \mathcal{F}$.

Bewijs. Er geldt dat $\mathcal{F}$ niet leeg is, dus er is een $A \in \mathcal{F}$. We weten $A \subseteq X$ dus volgt met eigenschap 4 van de definitie van een filter ook dat $X \in \mathcal{F}$. $\square$

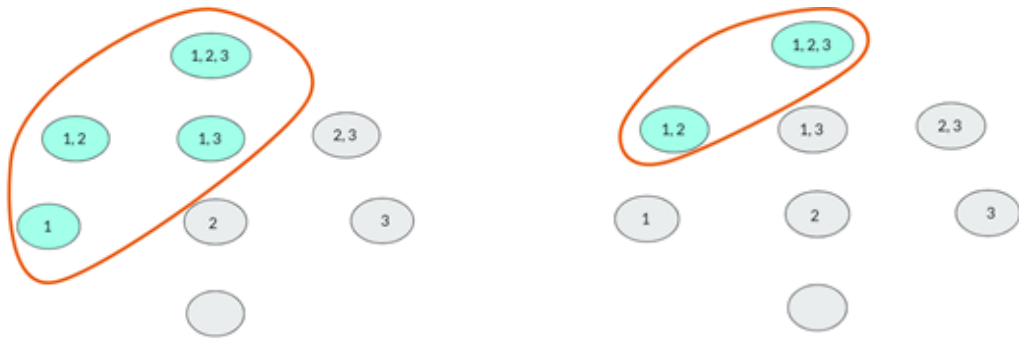
Lemma 3.3. Voor alle $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ geldt dat $\bigcap_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$.

Bewijs. We gaan dit bewijzen met inductie naar n . Voor $n = 1$ is de bewering triviaal en voor $n = 2$ is de bewering precies eigenschap 3 uit de definitie van een filter.

Veronderstel dat de bewering waar is voor $n = k$. Laat $F_1, \dots, F_{k+1} \in \mathcal{F}$ willekeurig. Wegens de inductiehypothese geldt dat $F' := \bigcap_{i=1}^k F_i \in \mathcal{F}$. Hieruit volgt dat $\bigcap_{i=1}^{k+1} F_i = F' \cap F_{k+1}$ en deze verzameling zit in $\mathcal{F}$ wegens eigenschap 3 uit de definitie van een filter. $\square$

Om een idee te krijgen wat filters precies zijn, gaan we kijken naar een paar voorbeelden.

Voorbeeld 3.4.



Figuur 3: Twee voorbeelden van een filter op de verzameling $X = \{1, 2, 3\}$.

Voorbeeld 3.5. Een ander bekend voorbeeld is het co-eindige filter op de natuurlijke getallen. Dit filter bevat alle verzamelingen van $\mathbb{N}$ waarvan het complement eindig is. We kunnen dit filter dus schrijven als $\{A \subseteq \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus A| < |\mathbb{N}|\}$. Dit filter wordt ook wel het *Fréchetfilter* op $\mathbb{N}$ genoemd en wordt soms genoteerd met $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$. In het volgende lemma gaan we laten zien dat het Fréchetfilter ook echt een filter is.

Lemma 3.6. *Het Fréchetfilter is een filter.*

Bewijs. We noteren het Fréchetfilter als $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$ en gaan laten zien dat deze familie aan alle vier de eisen van een filter voldoet.

- Er geldt dat $\mathbb{N} \in \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$, want $|\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}| = 0$. Hieruit volgt dat $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) \neq \emptyset$.
- $\emptyset \notin \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$, want $|\mathbb{N} \setminus \emptyset| = |\mathbb{N}|$.
- Als $A \in \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$ en $A \subseteq B$ dan geldt $\mathbb{N} \setminus B \subseteq \mathbb{N} \setminus A$. Omdat elke deelverzameling van een eindige verzameling weer eindig is, geldt dat $B \in \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$.
- Als $A, B \in \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$ dan geldt $\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)$. Omdat de vereniging van twee eindige verzamelingen weer eindig is, volgt hieruit dat $A \cap B \in \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$. $\square$

Voorbeeld 3.7. We gaan kijken naar een filter op de verzameling $\mathbb{N}^+$. We definiëren allereerst de familie $I := \{A \subseteq \mathbb{N}^+ : \sum_{n \in A} \frac{1}{n} < \infty\}$. Dan is de familie $\mathcal{F} := \{F : \mathbb{N}^+ \setminus F \in I\}$ een filter.

- Wegens de definitie van de lege som geldt dat $\sum_{n \in \emptyset} \frac{1}{n} = 0$, dus $\mathbb{N}^+ \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ is dus niet de lege familie.
- Omdat de som $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n}$ divergeert, krijgen we dat $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- Laat $A \in \mathcal{F}$ en $A \subseteq B$, dan geldt dat $\sum_{n \in \mathbb{N}^+ \setminus B} \frac{1}{n} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^+ \setminus A} \frac{1}{n} < \infty$. Hieruit volgt dat B ook in $\mathcal{F}$ zit.
- Laat $A, B \in \mathcal{F}$, dan weten we dat $\sum_{n \in \mathbb{N}^+ \setminus (A \cap B)} \frac{1}{n} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^+ \setminus A} \frac{1}{n} + \sum_{n \in \mathbb{N}^+ \setminus B} \frac{1}{n} < \infty$, omdat de som van twee eindige sommen weer eindig is.

Merk op dat alle verzamelingen van het Fréchetfilter ook in dit filter zitten, omdat de som van eindig veel getallen weer eindig is.

Nu we een paar voorbeelden van filters hebben gezien, is het tijd om te kijken naar verzamelingen die filters kunnen genereren. Zulke verzamelingen noemen we *filtersubbasisen*. Het blijkt dat dit precies de verzamelingen zijn met de eindige-doorsnede-eigenschap. Een familie $\mathcal{F}$ verzamelingen heeft de *eindige-doorsnede-eigenschap* als $\mathcal{F}$ niet leeg is en als voor alle $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ geldt dat $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$.

Definitie 3.8. Het filter **gegenereerd** door een subbasis $\mathcal{F}$ noteren we met $\langle \mathcal{F} \rangle$ en dit is de familie verzamelingen

$$\langle \mathcal{F} \rangle := \left\{ G \subseteq X : \text{er bestaan } F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F} \text{ zodat } \bigcap_{i=1}^n F_i \subseteq G \right\}.$$

We gaan nu laten zien dat deze definitie ook inderdaad een filter geeft.

Stelling 3.9. *Laat $\mathcal{F}$ een familie verzamelingen zijn die aan de eindige-doorsnede-eigenschap voldoet. Dan is $\langle \mathcal{F} \rangle$ inderdaad een filter.*

Bewijs. We noemen $\langle \mathcal{F} \rangle = \mathcal{G}$ en gaan bewijzen dat dit een filter is.

- Er is een verzameling $F_1 \in \mathcal{F}$ en $F_1 \subseteq X$, dus $X \in \mathcal{G}$.
- Er geldt voor alle $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ dat $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$, dus $\emptyset \notin \mathcal{G}$.
- Laat $G \in \mathcal{G}$ en $G \subseteq H$. Omdat $G \in \mathcal{G}$ zijn er $F_1, \dots, F_n$ zodat $\bigcap_{i=1}^n F_i \subseteq G \subseteq H$, dus $H \in \mathcal{G}$.
- Laat $G, G' \in \mathcal{G}$, dan zijn er $F_1, \dots, F_n$ en $F_{n+1}, \dots, F_{n+k}$ in $\mathcal{F}$ zodat $\bigcap_{i=1}^n F_i \subseteq G$ en $\bigcap_{i=n+1}^{n+k} F_i \subseteq G'$. Oftewel $\bigcap_{i=1}^{n+k} F_i \subseteq G \cap G'$. Hieruit volgt dat $G \cap G' \in \mathcal{G}$. $\square$

Het volgende lemma wordt in het vervolg vaak gebruikt om argumenten wat compacter op te kunnen schrijven.

Lemma 3.10. *Laat $\mathcal{F}$ een filter zijn en $\{A_i : i \in B\}$ een familie verzamelingen, zodat $\langle \mathcal{F} \cup \{A_i : i \in B\} \rangle$ een filter is. Dan geldt voor elk element $G \in \langle \mathcal{F} \cup \{A_i : i \in B\} \rangle$ dat er een $F \in \mathcal{F}$ en $A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \{A_i : i \in B\}$ zijn, zodat $G \supseteq F \cap \bigcap_{i=1}^n A_i$.*

Bewijs. Omdat $G \in \langle \mathcal{F} \cup \{A_i : i \in B\} \rangle$, geldt dat $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{F} \cup \{A_i : i \in B\}$ zijn, zodat $G \supseteq \bigcap_{i=1}^k B_i$. We delen deze B_i op in twee groepen, degene die uit $\mathcal{F}$ komen en degene die niet uit $\mathcal{F}$ komen. Omdat $\mathcal{F}$ een filter is, zit de doorsnede van de B_i die uit $\mathcal{F}$ komen zelf ook in $\mathcal{F}$ en is deze doorsnede gelijk aan een $F \in \mathcal{F}$. De andere verzamelingen noemen we $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ en deze komen uit $\{A_i : i \in B\}$. $\square$

We gaan nu kijken naar een bijzonder geval van het vorige lemma. Laat $\mathcal{F}$ een filter zijn en $G \in \langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$. Dan is er een $F \in \mathcal{F}$ is, zodat $G \supseteq F \cap A$.

Tot slot is er nog het begrip *filterbasis*. Een niet-lege familie $\mathcal{F}$ is een filterbasis als $\emptyset \notin \mathcal{F}$ en voor elke $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ er een $F' \in \mathcal{F}$ is, zodat $F' \subseteq \bigcap_{i=1}^n F_i$. In het bijzonder is dus elke filterbasis ook een filtersubbasis.

Stelling 3.11. *Als $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ filterbasissen zijn op een verzameling X en als voor alle $F_i \in \mathcal{F}_i$ met $i = 1, \dots, n$ geldt dat $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$, dan is $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ een filtersubbasis op X .*

Bewijs. Laat $F^1, \dots, F^k \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ willekeurig. We gaan al deze verzamelingen opdelen naar de kleinste i zodat $F^j \in \mathcal{F}_i$. Op deze manier krijgen we de verzamelingen $F_1^1, \dots, F_1^{k_1}; F_2^1, \dots, F_2^{k_2}; \dots; F_n^1, \dots, F_n^{k_n}$. Omdat elk van de $\mathcal{F}_i$ een filterbasis is, geldt voor elke i dat er een $G_i \in \mathcal{F}_i$ is, zodat $G_i \subseteq \bigcap_{j=1}^{k_i} F_i^j$. Hierbij gebruiken we dat de doorsnede van de lege verzameling, de hele verzameling X is. Nu weten we dat

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^n G_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^{k_i} F_i^j = \bigcap_{i=1}^k F^i.$$

Met de definitie van een filtersubbasis vinden we nu dat $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ een filtersubbasis op X is. $\square$

3.2 Definitie van een ultrafilter

Nu we weten wat een filter is en ook wat simpele eigenschappen over filters hebben bewezen, is het nu eindelijk tijd om te kijken wat een filter precies ‘ultra’ maakt.

Definitie 3.12. Een **ultrafilter** op X is een filter op X dat niet strikt in een ander filter op X ligt. De verzameling van alle ultrafilters op X wordt genoteerd als βX .

Dit is een definitie waarmee we wat lastiger kunnen werken dan de definitie van een ‘normaal’ filter. Dit komt omdat het geen simpele eigenschap is, die we voor een familie verzamelingen kunnen controleren. Om te bewijzen dat een familie verzamelingen een ultrafilter is, moeten we alle filters op een verzameling nagaan en kijken of deze stiekem niet groter zijn. Je kan je voorstellen dat dit in het algemeen erg lastig gaat. Om duidelijk te maken hoe je dit toch kan doen, beginnen we met een voorbeeld.

Voorbeeld 3.13. Voor elke niet-lege verzameling X en $x \in X$ een element, geldt dat de verzameling $\mathcal{F} := \{A \subseteq X : x \in A\}$ een ultrafilter is.

- $x \in X$, dus geldt dat $X \in \mathcal{F}$ en dus dat $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- Er geldt dat $x \notin \emptyset$, dus $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- Laat $A \in \mathcal{F}$ en $A \subseteq B$. Omdat $A \in \mathcal{F}$, krijgen we dat $x \in A$ en omdat A een deelverzameling is van B geldt dus ook dat $x \in B$. Hieruit volgt $B \in \mathcal{F}$.
- Laat $A, B \in \mathcal{F}$, dan geldt $x \in A$ en $x \in B$. Hieruit volgt dat $x \in A \cap B$ en dus dat $A \cap B \in \mathcal{F}$.

We hebben laten zien dat $\mathcal{F}$ een filter is, nu gaan we bewijzen dat dit filter ook ‘ultra’ is. Stel dat er een ander filter $\mathcal{G}$ is met $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Dan bevat $\mathcal{G}$ een verzameling A zodat $A \notin \mathcal{F}$. Voor deze verzameling A geldt dat $x \notin A$. Omdat $\{x\} \in \mathcal{F}$ zit, geldt ook dat $\{x\} \in \mathcal{G}$. Wegens eigenschap 4 van filters, volgt hieruit dat $A \cap \{x\} = \emptyset \in \mathcal{G}$ en dat is een tegenspraak met eigenschap 2. Hieruit volgt dat er geen strikt groter filter $\mathcal{G}$ dan $\mathcal{F}$ is en dat $\mathcal{F}$ dus een ultrafilter is.

De ultrafilters van dit voorbeeld zijn vrij simpel en worden daarom ook wel triviale ultrafilters genoemd. Je kan je afvragen of er ook andere soorten ultrafilters zijn. Het antwoord daarop is ja, maar deze zijn niet zo makkelijk te vinden. De makkelijkste manier om deze te vinden is met behulp van het lemma van Zorn (lemma 2.2), wat impliceert dat je voor deze constructie het keuzeaxioma gebruikt. In het bijzonder zijn dus er alleen niet-triviale ultrafilters op oneindige verzamelingen X . Om een idee te krijgen hoe we op deze manier ultrafilters kunnen construeren, gaan we allereerst met het lemma van Zorn bewijzen dat er überhaupt ultrafilters bestaan.

Lemma 3.14. *Voor elke niet-lege verzameling X , bestaat er een ultrafilter op deze verzameling.*

Bewijs. Laat $\mathbb{F}$ een niet-lege lineair geordende verzameling filters op X zijn onder de inclusie ordening, dat wil zeggen: voor alle $F, G \in \mathbb{F}$ geldt dat $F \subseteq G$ of $G \subseteq F$. We gaan nu laten zien dat $\bigcup \mathbb{F}$ ook een filter is.

- Er is een $F \in \mathbb{F}$ en omdat F een filter is, geldt dat F niet leeg is. Hieruit volgt dat $\bigcup \mathbb{F} \neq \emptyset$.
- Voor elke $F \in \mathbb{F}$ geldt dat $\emptyset \notin F$, dus $\emptyset \notin \bigcup \mathbb{F}$.
- Laat $F \in \bigcup \mathbb{F}$ en G zodat $F \subseteq G$. Dan is er een $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$ zodat $F \in \mathcal{F}$, waaruit volgt dat ook $G \in \mathcal{F}$. Dus geldt ook $G \in \bigcup \mathbb{F}$.
- Laat $F, G \in \bigcup \mathbb{F}$. Dan zijn er filters $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ in $\mathbb{F}$ zodat $F \in \mathcal{F}$ en $G \in \mathcal{G}$. Omdat $\mathbb{F}$ lineair geordend is, geldt dat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ of $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Zonder verlies van algemeenheid geldt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Dan geldt $F, G \in \mathcal{G}$ en dus ook $F \cap G \in \mathcal{G} \subseteq \bigcup \mathbb{F}$.

Nu hebben we bewezen dat elke keten van lineair geordende filters een bovengrens heeft, geldt met Zorn’s lemma dat er een maximaal filter bestaat. Hieruit kunnen we concluderen dat er een ultrafilter bestaat. $\square$

Nu we weten dat er ultrafilters zijn, gaan we een iets sterkere bewering bewijzen, namelijk dat elk filter $\mathcal{F}$ op X in een ultrafilter p zit.

Gevolg 3.15. *Elk filter $\mathcal{F}$ op X zit in een ultrafilter p op X .*

Bewijs. We kijken alleen naar alle filters $\mathcal{G}$ op X zodat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Op dezelfde manier als hierboven bewijzen we er in deze verzameling elke keten van lineair geordende filters een bovengrens is en dus bestaat er met het Lemma van Zorn een maximaal filter in deze verzameling. Er is dus een ultrafilter p zodat $\mathcal{F} \subseteq p$. $\square$

We kunnen dit gevolg zelfs nog iets aanscherpen. Er geldt namelijk niet alleen dat elk filter in een ultrafilter zit, maar ook dat elke niet-lege familie $\mathcal{F}$ die aan de eindige-doorsnede-eigenschap voldoet in een ultrafilter is.

Gevolg 3.16. *Laat X een verzameling zijn en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zodat $\mathcal{F} \neq \emptyset$ aan de eindige-doorsnede-eigenschap voldoet. Dan is er een ultrafilter p op X zodat $\mathcal{F} \subseteq p$.*

Bewijs. We weten dat $\mathcal{F} \subseteq \langle \mathcal{F} \rangle$ en wegens stelling 3.9 is deze laatste verzameling een filter. Met gevolg 3.15 krijgen we dat $\langle \mathcal{F} \rangle$ en daarmee ook $\mathcal{F}$ zelf in een ultrafilter zitten. $\square$

Nu we hebben bewezen dat er allemaal verschillende soorten families van verzamelingen in een ultrafilter zitten, is het tijd om wat eigenschappen over ultrafilters zelf te bewijzen.

Lemma 3.17. *Laat p en q ultrafilters op een verzameling X zijn.*

- Als $B \subseteq X$ en $A \cap B \neq \emptyset$ voor alle $A \in p$ dan geldt $B \in p$.
- Als $p \neq q$ dan zijn er $A \in p$ en $B \in q$ zó dat $A \cap B = \emptyset$.

Bewijs. Laat $B \subseteq X$, zodat $A \cap B \neq \emptyset$ voor alle $A \in P$. Dan voldoet de verzameling $p \cup \{B\}$ aan de eindige-doorsnede-eigenschap. Dus er is wegens lemma 3.16 een ultrafilter q zodat $p \subseteq p \cup \{B\} \subseteq q$. Omdat p zelf een ultrafilter is, moet dan wel gelden dat $p = q = p \cup \{B\}$, dus $B \in p$.

Omdat $p \neq q$ is er een $B \in p$, zodat $B \notin q$. Wegens de claim hierboven geldt dan dat er een $A \in q$ is, zodat $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Stelling 3.18. *Laat $\mathcal{F}$ een filter zijn op X . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

- 1) $\mathcal{F}$ is een ultrafilter
- 2) Als $A, B \subseteq X$ en $A \cup B \in \mathcal{F}$ dan $A \in \mathcal{F}$ of $B \in \mathcal{F}$
- 3) Voor elke $A \subseteq X$ geldt $A \in \mathcal{F}$ of $X \setminus A \in \mathcal{F}$

Bewijs. 1) $\Rightarrow$ 2) Stel $A, B \notin \mathcal{F}$. Wegens lemma 3.17 zijn er $C, D \in \mathcal{F}$ zodat $A \cap C = \emptyset$ en $B \cap D = \emptyset$. Maar dan geldt $C \cap D \in \mathcal{F}$, maar ook $(A \cup B) \cap (C \cap D) = \emptyset$. Dit is een tegenspraak.

2) $\Rightarrow$ 3) Er geldt dat $A \cup (X \setminus A) = X$ en $X \in \mathcal{F}$. Dus geldt dat $A \in \mathcal{F}$ of $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Laat V een fijner filter zijn dan $\mathcal{F}$. Dan is er een $A \in V \setminus \mathcal{F}$. Dus dan geldt $X \setminus A \notin V$. Nu geldt dat $A \notin \mathcal{F}$ en $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. $\square$

Laat p een ultrafilter zijn. Wegens de implicatie 1) $\Rightarrow$ 3) weten we dat voor elke $A \subseteq X$, $A \in p$ of $X \setminus A \in p$. Omdat $A \cap X \setminus A = \emptyset$ geldt dat ze niet beide in p kunnen zitten. Voor elke $A \in \mathcal{P}(X)$, maken we het paar $(A, X \setminus A)$. Van dit paar zit er precies één in $\mathcal{F}$, dus hieruit volgt dat elk ultrafilter exact de helft van de elementen van $\mathcal{P}(X)$ bevat.

Ook de implicatie 1) $\Rightarrow$ 2) heeft een interessant gevolg, namelijk dat

Gevolg 3.19. *Laat p een ultrafilter zijn en $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, zodat $\bigcup_{i=1}^n A_i \in p$. Dan geldt dat er een $i \in \{1, \dots, n\}$ is, zodat $A_i \in p$.*

Bewijs. Dit gaat met inductie naar n voor het bewijs van implicatie 1) $\Rightarrow$ 2) in stelling 3.18. $\square$

3.3 Vrije ultrafilters

In deze paragraaf gaan we bewijzen dat de verzameling $\mathbb{N}$ een niet-triviaal ultrafilter heeft. Dit gaan we doen door te kijken naar zogenaamde vrije ultrafilters.

Definitie 3.20. Een ultrafilter p op $\mathbb{N}$ is **vrij** als voor alle $A \in p$ geldt dat $|A| = |\mathbb{N}|$. De verzameling van vrije ultrafilters op $\mathbb{N}$ wordt genoteerd als $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Lemma 3.21. *Elk niet-vrij ultrafilter is van de vorm $\{A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) : x \in A\}$ voor een getal $x \in \mathbb{N}$.*

Bewijs. Stel dat p een niet-vrij ultrafilter op $\mathbb{N}$ is. Dan is er een $A \in p$ zodat $|A|$ eindig is. We gaan laten zien dat er een $x \in A$ is zodat $\{x\} \in p$. Er geldt dat $\bigcup_{x \in A} \{x\} = A$ in het ultrafilter p zit. Wegens gevolg 3.19 geldt dan dat een van de $\{x\}$ ook in p zit. Hieruit volgt dat $\mathcal{F} = \{B \subseteq \mathbb{N} : x \in B\} \subseteq p$. Omdat $\mathcal{F}$ zelf een ultrafilter is, moet dan wel gelden dat $p = \mathcal{F} = \{B \subseteq \mathbb{N} : x \in B\}$. $\square$

Elk ultrafilter p op $\mathbb{N}$ dat niet-vrij is dus triviaal en kunnen we identificeren met een element $x \in \mathbb{N}$. We kunnen ook iets bewijzen over de vorm van vrije ultrafilters.

Stelling 3.22. *Een ultrafilter p op $\mathbb{N}$ is vrij dan en slechts dan als het Fréchetfilter $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$ een deelverzameling van p is.*

Bewijs. $\Rightarrow$ Laat p een vrij ultrafilter zijn en laat $A \in \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$. Dan geldt $|\mathbb{N} \setminus A| < |\mathbb{N}|$ en dus $\mathbb{N} \setminus A \notin p$. Omdat p een ultrafilter is, geldt $A \in p$.

$\Leftarrow$ Laat $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) \subseteq p$. Stel dat er een $A \in p$ is, zodat $|A| < |\mathbb{N}|$, omdat $A \in \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$ geldt ook dat $\mathbb{N} \setminus A \in p$. Hieruit volgt dat $\emptyset = A \cap (\mathbb{N} \setminus A) \in p$, wat in tegenspraak is met het feit dat p een ultrafilter is. Hieruit volgt dat voor alle $A \in p$ geldt dat $|A| = |\mathbb{N}|$. $\square$

Door deze karakterisering van een vrij ultrafilter, kunnen we met het behulp van het lemma van Zorn laten zien dat dat er ook inderdaad vrije ultrafilters op $\mathbb{N}$ bestaan.

Gevolg 3.23. *Er bestaat een vrij ultrafilter op $\mathbb{N}$.*

Bewijs. De familie $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$ is wegens lemma 3.6 een filter op $\mathbb{N}$. Wegens stelling 3.15 is er een ultrafilter p op $\mathbb{N}$, zodat $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) \subseteq p$. Met stelling 3.22 volgt dat p een vrij ultrafilter is. $\square$

4 Families van grote schommeling

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar speciale families van functies, genaamd families van grote schommeling. Het belangrijkste resultaat is stelling 4.5 waarin bewezen wordt dat er een familie functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is van grote schommeling met grootte $2^{|\mathbb{N}|}$. Deze hele grote familie functies van grote schommeling gaan we later gebruiken om onafhankelijke families te maken. Deze onafhankelijke families hebben we nodig om speciale filters en daarmee ook speciale ultrafilters te construeren.

Definitie 4.1. Een familie $\mathcal{S}$ functies van $\mathbb{N}$ naar X , oftewel $\mathcal{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ is van *grote schommeling* als voor alle $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{S}$ en $k_1, \dots, k_n \in X$ er een $m \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $f_i(m) = k_i$ voor alle $i = 1, \dots, n$.

Lemma 4.2. *In een familie van grote schommeling geldt dat elke functie surjectief is.*

Bewijs. Laat $\mathcal{S}$ een familie van grote schommeling zijn en $f \in \mathcal{S}$. Laat $k \in X$ willekeurig, dan is er een natuurlijk getal m zodat $f(m) = k$. $\square$

Lemma 4.3. *Laat X een verzameling zijn met ten minste 2 verschillende elementen. Als $\mathcal{S}$ een oneindige familie functies van $\mathbb{N}$ naar X is met grote schommeling, dan zijn er voor alle $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{S}$ en $k_1, \dots, k_n \in X$ oneindig veel $m \in \mathbb{N}$ zodat $f_i(m) = k_i$ voor $i = 1, \dots, n$.*

Bewijs. Gegeven zijn functies $f_1, \dots, f_n$ en elementen $k_1, \dots, k_n \in X$. Laat $g_1, g_2, \dots$ een rij functies zijn in $\mathcal{S} \setminus \{f_1, \dots, f_n\}$. Laat a en b twee verschillende elementen in X zijn. Omdat $\mathcal{S}$ van grote schommeling is, is er voor elk getal $p \in \mathbb{N}$ een m_p zodat

$$f_i(m_p) = k_i \quad \forall i \quad \text{en} \quad g_i(m_p) = \begin{cases} a & \text{als } i = p \\ b & \text{als } i < p \end{cases}$$

Dus we hebben alleen een eis voor de eerste p functies uit onze rij $g_1, g_2, \dots$, waardoor we in elke stap maar een eindig aantal voorwaarden hebben. We zien dat alle getallen m_p verschillend zijn. Stel namelijk $m_{p_1} = m_{p_2}$ voor $p_1 \neq p_2$. Dan zonder verlies van algemeenheid, geldt $p_1 < p_2$ en geldt ook $b = g_{p_1}(m_{p_1}) = g_{p_1}(m_{p_2}) = a$. Omdat er oneindig veel p en daarmee oneindig veel m_p zijn, zijn er oneindig veel verschillende getallen m die aan $f_i(m) = k_i$ voor $i = 1, \dots, n$ voldoen. $\square$

Natuurlijk geldt ook dat als er oneindig veel m zijn dat er ook minimaal eentje is. Hieruit volgt dat als $\mathcal{S}$ oneindig is dat het voor onze definitie niet uitmaakt of we eisen dat er één m is of oneindig veel. Daarnaast kunnen we de definitie ook op een meer verzameltheoretische manier verwoorden: “Een familie $\mathcal{S}$ functies van $\mathbb{N}$ naar X , oftewel $\mathcal{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ is van grote schommeling als voor alle $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{S}$ en $k_1, \dots, k_n \in X$ geldt dat $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(k_i)$ niet-leeg is.”

Als we lemma 4.2 en 4.3 bekijken zien we dat elke functie in zo’n oneindige familie van grote schommeling surjectief is en dat elke waarde in het domein oneindig vaak wordt aangenomen. Hieronder wordt een voorbeeld gegeven van een functie die aan deze twee eisen voldoet.

Voorbeeld 4.4. We gaan alle priemgetallen nummeren, dus $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ en ga zo maar door. Omdat er oneindig veel priemgetallen zijn, is voor elke $k \in \mathbb{N}$ er een priemgetal p_k . Vervolgens definiëren we de functie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zodat $f(1) = 1$ en voor alle andere $n \in \mathbb{N}$ sturen we n naar i waarbij p_i het kleinste priemgetal is dat in de priemontbinding van n voorkomt. Merk op dat f surjectief is en dat het inverse beeld van elke $n \in \mathbb{N}$ oneindig groot is: $f^{-1}(n)$ bevat immers de getallen p_n^k voor alle $k \in \mathbb{N}$.

In de volgende stelling zien we dat er een verzameling $\mathcal{S}$ met grote schommeling is bestaande uit functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$, zodat $|\mathcal{S}| = 2^{\mathbb{N}}$. Deze stelling en de stellingen en bewijzen hieronder komen allemaal uit het boek ‘*The Theory of Ultrafilters*’ [1]. Ik heb deze voor dit project vertaald en heb daarnaast hier en daar wat extra verduidelijking toegevoegd.

Stelling 4.5. *Er is een familie functies $\mathcal{S}$ van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ van grote schommeling met $|\mathcal{S}| = 2^{|\mathbb{N}|}$.*

Bewijs. (Hausdorff) In plaats van functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ gaan we kijken naar functies vanaf een andere aftelbare verzameling $\mathcal{F}$ naar $\mathbb{N}$. Omdat $\mathcal{F}$ en $\mathbb{N}$ beide aftelbaar zijn is er een bijectie tussen $\mathcal{F}$ en $\mathbb{N}$ en met die bijectie vinden we vervolgens functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$.

We kijken naar de volgende verzameling

$$\mathcal{F} = \{\langle n, G, S \rangle : n \in \mathbb{N}, G \subseteq \mathcal{P}([n]), S : G \rightarrow \mathbb{N}\},$$

waarbij $[n]$ voor de verzameling $\{1, \dots, n\}$ bestaat. De verzameling bestaat dus uit alle mogelijke drietallen $\langle n, G, S \rangle$. Er geldt dat er aftelbaar veel natuurlijke getallen n zijn, voor elke n eindig veel G en voor elke G weer aftelbaar veel S ; er geldt immers dat we voor elk element in G een element uit $\mathbb{N}$ kiezen en dus zijn er $|\mathbb{N}|^G = |\mathbb{N}|$ functies voor S . Nu zien we dat er in totaal een aftelbaar aantal drietallen $\langle n, G, S \rangle$ zijn en is dus ook $\mathcal{F}$ aftelbaar.

Voor elke deelverzameling X van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ definieer $f_X : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ door

$$f_X(n, G, S) = \begin{cases} S(X \cap [n]) & \text{als } X \cap [n] \in G \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$

Omdat er $2^{|\mathbb{N}|}$ deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ bestaan, maken we zo $2^{|\mathbb{N}|}$ functies in $\mathcal{S}$.

Laat nu $X_1, \dots, X_k$ verschillende deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn en $m_1, \dots, m_k$ natuurlijke getallen. We gaan nu op zoek naar een drietal $\langle n, G, S \rangle$ zodat $f_{X_i}(n, G, S) = m_i$ voor alle $i \in \{1, \dots, k\}$.

Neem $n_{i,j} \in X_i \triangle X_j$ voor elke $i, j \in \{1, \dots, k\}$ met $i \neq j$ en neem vervolgens $n = \max_{i,j} n_{i,j}$. Dan geldt dat alle doorsneden $X_i \cap [n]$ verschillend zijn. Neem vervolgens $G = \{X_1 \cap [n], \dots, X_k \cap [n]\}$ en $S : G \rightarrow \mathbb{N}$ zodat $S(X_i \cap [n]) = m_i$. Omdat we alle functies van G naar $\mathbb{N}$ bekijken, is er dus ook zo'n functie S .

Nu zien we dat $f_{X_i}(n, G, S) = S(X_i \cap [n]) = m_i$, omdat $X_i \cap [n] \in G$. Wegens deze eigenschap zijn alle functies f_X ook echt verschillend. $\square$

Deze zeer belangrijke stelling heeft als gevolg dat er ook een familie functies van $\mathbb{N} \rightarrow X$ met grote schommeling van grootte $2^{|\mathbb{N}|}$ bestaat voor alle eindige verzamelingen X .

Gevolg 4.6. *Voor elke eindige verzameling X met minimaal 2 elementen, is er een familie functies $\mathcal{S}'$ van $\mathbb{N}$ naar X van grote schommeling met $|\mathcal{S}'| = 2^{|\mathbb{N}|}$.*

Bewijs. Stel $|X| = n$. We gaan de elementen van X nummeren, dus $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Bekijk de functie $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ zodat $m \mapsto x_{(m \bmod n)}$. Voor elke functie f in $\mathcal{S}$ uit het bewijs van stelling 4.5 vervangen we deze functie door $g \circ f$. Zo krijgen we een familie functies $\mathcal{S}'$ van $\mathbb{N} \rightarrow X$.

We gaan laten zien dat deze nieuwe functies allemaal verschillend zijn, dus als $f \neq f'$ dan ook $g \circ f \neq g \circ f'$. Stel $f \neq f'$, omdat $f, f' \in \mathcal{S}$ is er een natuurlijk getal m zodat $f(m) = 1$ en $f'(m) = 2$. Dan geldt $(g \circ f)(m) = x_1$ en $(g \circ f')(m) = x_2$, want $2 \leq n$. Omdat $x_1 \neq x_2$, geldt $g \circ f \neq g \circ f'$. Onze nieuwe familie bestaat dus ook uit $2^{|\mathbb{N}|}$ verschillende functies.

Daarnaast is deze familie weer van grote schommeling. Laat $l \in \mathbb{N}$ en $g \circ f_1, \dots, g \circ f_l$ een rij willekeurige functies in $\mathcal{S}'$ en $k_1, \dots, k_l \in X$. Vervang in deze rij alle x_i -en (elk element k_j is gelijk aan een van de x_i) door het getal i , zo krijgen we de rij $l_1, \dots, l_n$. $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{S}'$ dus er is een m zodat $f_i(m) = l_i$ en dus $(g \circ f_j)(m) = x_{(l_i \bmod n)} = k_j$. $\square$

Nu we de eerste eigenschappen over families functies van grote schommeling hebben bewezen en we weten dat deze functies bestaan, gaan we deze functies gebruiken om te bewijzen dat er $2^{2^{|\mathbb{N}|}} = 2^{|\mathbb{R}|}$ verschillende ultrafilters op de natuurlijke getallen bestaan. Daarvoor bewijzen we eerst het volgende lemma.

Lemma 4.7. *Er bestaat een familie Φ van filters op $\mathbb{N}$ zodat $|\Phi| = 2^{2^{|\mathbb{N}|}}$ en als $F_0, F_1 \in \Phi$ zodat $F_0 \neq F_1$ dan is er een $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zodat $A \in F_0$ en $\mathbb{N} \setminus A \in F_1$.*

Bewijs. Wegens een gevolg 4.6 bestaat er een familie $\mathcal{S}$ van grootte $2^{|\mathbb{N}|}$ van $\mathbb{N}$ naar $\{0, 1\}$ met grote schommeling. Voor $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ definiëren we

$$\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{C}\} \cup \{f^{-1}(1) : f \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}\}.$$

Dus voor elke $f \in \mathcal{S}$ stoppen we het inverse beeld van 0 of 1 in $\mathcal{B}$. Daarnaast definiëren we $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \langle \mathcal{B}(\mathcal{C}) \rangle$. Omdat $\mathcal{S}$ grote schommeling heeft, is de familie $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ voor elke $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ een filter op $\mathbb{N}$:

- Er zit een functie f in $\mathcal{S}$ en daarvan zit of $f^{-1}(\{0\})$ of $f^{-1}(\{1\})$ in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Dus $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.
- Laat $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{C}$ en $f_{l+1}, \dots, f_k \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$. Omdat $\mathcal{S}$ een familie van grote schommeling is, is er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $f_i(m) = 0$ voor $i = 1, \dots, l$ en $f_j(m) = 1$ voor $j = l+1, \dots, k$. Dus $m \in \bigcap_{i=1}^l f_i^{-1}(0) \cap \bigcap_{j=l+1}^k f_j^{-1}(1)$. Hieruit volgt $\emptyset \notin \mathcal{F}(\mathcal{C})$.
- Als $A \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ en $A \subseteq A'$ dan ook $A' \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ vanwege de definitie van $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.
- Als $A, A' \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Dan zijn er $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ en $B'_1, \dots, B'_l \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ zodat $\bigcap B_i \subseteq A$ en $\bigcap B'_j \subseteq A'$ dus $\bigcap B_i \cap \bigcap B'_j \subseteq A \cap A'$. Dus ook $A \cap A' \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Laat nu $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ met $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$. Dan is er een $f \in \mathcal{C} \Delta \mathcal{C}' = (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}') \cup (\mathcal{C}' \setminus \mathcal{C})$. Zonder verlies van algemeenheid $f \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$. Oftewel $f^{-1}(0) \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ en $\mathbb{N} \setminus f^{-1}(0) = f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{B}(\mathcal{C}')$. Dus de familie

$$\Phi = \{\mathcal{F}(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{S})\}$$

voldoet aan alle eisen. □

Stelling 4.8. (*Pospíšil*) *Er geldt dat $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{|\mathbb{N}|}}$ [6].*

Bewijs. Er geldt dat $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{2^{|\mathbb{N}|}}$, want $\beta\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. We weten wegens de stelling hierboven dat er een familie Φ van filters op $\mathbb{N}$ bestaat zodat $|\Phi| = 2^{2^{|\mathbb{N}|}}$ en als $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \Phi$ zodat $\mathcal{F}_0 \neq \mathcal{F}_1$ dan is er een $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zodat $A \in \mathcal{F}_0$ en $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}_1$.

Voor elk filter $\mathcal{F} \in \Phi$ kiezen we een ultrafilter $p_{\mathcal{F}}$ op $\mathbb{N}$ met $\mathcal{F} \subseteq p_{\mathcal{F}}$, dit kan wegens stelling 3.15. Dan geldt $\{p_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \in \Phi\} \subseteq \beta\mathbb{N}$. Laat $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \Phi$ verschillend, dan geldt $p_{\mathcal{F}_0} \neq p_{\mathcal{F}_1}$, want anders zouden zowel A als $\mathbb{N} \setminus A$ in het ultrafilter $p_{\mathcal{F}_0}$ zitten. Dus $|\beta\mathbb{N}| \geq |\Phi| = 2^{2^{|\mathbb{N}|}}$. Als we de twee ongelijkheden combineren vinden we $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{|\mathbb{N}|}}$. □

Uit deze stelling volgt dat er dus ontzettend veel ultrafilters zijn op $\mathbb{N}$. In paragraaf 3.3 zagen we dat we elk triviaal ultrafilter kunnen identificeren met een element uit $\mathbb{N}$. Hieruit volgt dat er ook $2^{2^{|\mathbb{N}|}} - \mathbb{N} = 2^{2^{|\mathbb{N}|}}$ vrije ultrafilters zijn, omdat $2^{2^{|\mathbb{N}|}}$ een grotere kardinaliteit dan $\mathbb{N}$ heeft.

5 De Rudin-Keislerordening

In dit hoofdstuk gaan we naar een partiële ordening op de ruimte van ultrafilters $\beta\mathbb{N}$ bekijken, de Rudin-Keislerordening. In deze ordening kijken we naar de ‘uitbreidingen’ van functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ naar functies van de vorm $\beta f : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$. Dit gaan we hier, in tegenstelling tot veel andere boeken, op combinatorische wijze doen. Dit betekent dat we voor onze definitie niet gebruik maken van de topologische eigenschappen van $\beta\mathbb{N}$.

Nadat we deze uitbreidingen hebben gedefinieerd, gaan we een equivalentierelatie $\sim$ op $\beta\mathbb{N}$ maken. Als dit gelukt is, gaan we kijken naar de definitie van de Rudin-Keislerordening en gaan we bewijzen dat dit inderdaad een partiële ordening is op $\beta\mathbb{N}/\sim$.

Definitie 5.1. Laat $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een functie zijn. Dan definiëren we $\beta f : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ als volgt:

$$\beta f(p) = q \Leftrightarrow \forall P \in p : f(P) \in q.^1$$

Op basis van deze definitie is het nog niet meteen duidelijk dat βf inderdaad een functie is op de ruimte van ultrafilters. Dit moeten we daarom allereerst aantonen. Dit gaan we doen door te laten zien dat er voor elke p een q is (*existentie*) en door te laten zien dat deze q uniek is (*uniciteit*).

Lemma 5.2. *De functie βf is welgedefinieerd voor alle functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.*

Bewijs. Laat f een willekeurige functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ zijn.

(*Existentie*) We gaan bewijzen dat er voor elk ultrafilter p er een ultrafilter q is, zodat voor alle $P \in p$ geldt dat $f(P) \in q$. We gaan eerst laten zien dat de verzameling $\{f(P) : P \in p\}$ aan de eindige-doorsnede-eigenschap voldoet. Laat $P_1, \dots, P_n \in p$ willekeurig. Omdat p een ultrafilter is, geldt dat $\bigcap_{i=1}^n P_i \neq \emptyset$. Hieruit volgt dat

$$\emptyset \neq f\left(\bigcap_{i=1}^n P_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^n f(P_i)$$

en dus voldoet $\{f(P) : P \in p\}$ aan de eindige-doorsnede-eigenschap. Wegens gevolg 3.16 is er een ultrafilter q , zodat $\{f(P) : P \in p\} \subseteq q$ en voor dit ultrafilter geldt voor alle $P \in p$ dat $f(P) \in q$.

(*Uniciteit*) Stel dat er twee verschillende ultrafilters q_1 en q_2 zijn, zodat voor alle $P \in p$ geldt dat $f(P) \in q_1$ en $f(P) \in q_2$. Wegens lemma 3.17 is er een $A \in q_1$ en een $B \in q_2$, zodat $A \cap B = \emptyset$. Hieruit volgt $B \subseteq \mathbb{N} \setminus A$ en dus ook dat $\mathbb{N} \setminus A \in q_2$. Definieer $X = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in A\}$, wegens stelling 3.18 geldt dan dat $X \in p$ of $\mathbb{N} \setminus X \in p$.

Als $X \in p$, dan volgt $f(X) \in q_2$, maar $f(X) \cap (\mathbb{N} \setminus A) \subseteq A \cap (\mathbb{N} \setminus A) = \emptyset \in q_2$. Tegenspraak.

Als $\mathbb{N} \setminus X \in p$, dan volgt $f(\mathbb{N} \setminus X) \in q_1$, maar $f(\mathbb{N} \setminus X) \cap A \subseteq (\mathbb{N} \setminus A) \cap A = \emptyset \in q_2$. Tegenspraak. Hieruit volgt dat onze aanname verkeerd was en dat er maar één ultrafilter q is, zodat voor alle $P \in p$ geldt dat $f(P) \in q$. $\square$

Nu we weten dat βf inderdaad een functie is, gaan we een equivalente definitie voor deze functie bewijzen. Er geldt namelijk dat $\beta f(p) = q \Leftrightarrow \forall Q \in q : f^{-1}(Q) \in p$.

Lemma 5.3. *Laat p en q twee ultrafilters zijn. Dan geldt voor alle $P \in p$ dat $f(P) \in q$ dan en slechts dan als voor alle $Q \in q$ geldt dat $f^{-1}(Q) \in p$.*

Bewijs. Stel dat voor alle $P \in p$ geldt dat $f(P) \in q$, maar dat er een $Q \in q$ is, zodat $f^{-1}(Q) \notin p$. Omdat p een ultrafilter is, is er wegens lemma 3.17 een $P_1 \in p$ zodat $f^{-1}(Q) \cap P_1 = \emptyset$. Maar omdat $f(P_1) \in q$, geldt dat $f(P_1) \cap Q \neq \emptyset$. Laat $x \in f(P_1) \cap Q$ willekeurig, dan geldt dat

¹Deze definitie van βf komt overeen met de Stone-uitbreiding van f . Meer informatie over deze uitbreiding en de topologie van $\beta\mathbb{N}$ is te vinden in hoofdstuk 2.1 van ‘The Theory of Ultrafilters’ [1].

$f^{-1}(\{x\}) \cap P_1 \subseteq f^{-1}(Q) \cap P_1 = \emptyset$. Maar tegelijkertijd geldt ook dat $f^{-1}(\{x\}) \cap P_1 \neq \emptyset$, omdat $x \in f(P_1)$. Dit is een tegenspraak. Dus geldt voor alle $Q \in q$ dat $f^{-1}(Q) \in p$. Stel nu dat voor alle $Q \in q$ geldt dat $f^{-1}(Q) \in p$, maar dat er een $P \in p$ is, zodat $f(P) \notin q$. Omdat q een ultrafilter is, is er wegens lemma 3.17 een $Q_1 \in q$ zodat $f(P) \cap Q_1 = \emptyset$. Tegelijkertijd weten we ook dat $P \cap f^{-1}(Q_1) \neq \emptyset$. Hieruit volgt dat

$$\emptyset \neq f[P \cap f^{-1}(Q_1)] = f[P] \cap f[f^{-1}(Q_1)] \subseteq f[P] \cap Q_1 = \emptyset.$$

Dit is een tegenspraak. Dus geldt voor alle $P \in p$ dat $f(P) \in q$. □

Definitie 5.4. We definiëren de relatie $\sim$ op $\beta\mathbb{N}$ door

$$p \sim q \Leftrightarrow \text{er is een bijectieve functie } \pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ met } \beta\pi(p) = q.$$

We gaan allereerst aantonen dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

Lemma 5.5. $\sim$ is een equivalentierelatie op $\beta\mathbb{N}$.

Bewijs. We gaan bewijzen dat deze relatie, reflexief, symmetrisch en transitief is.

Reflexief: Neem de identieke functie $id : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dan geldt voor alle $P \in p$ dat $id(P) = P \in p$ dus $\beta f(p) = p$. Er geldt dus $p \sim p$.

Symmetrisch: Laat $p \sim q$ dan is er een bijectie $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zodat $\beta\pi(p) = q$. Dus voor alle $Q \in q$ geldt $\pi^{-1}[Q] \in p$. Bekijk nu zijn inverse π^{-1} dan geldt voor alle $Q \in q$ dat $\pi^{-1}(Q) = \pi^{-1}[Q] \in p$. Nu krijgen we dat $(\beta\pi^{-1})(q) = p$ en dus ook $q \sim p$.

Transitief. Laat $p \sim q$ en $q \sim r$. Dan bestaan er bijectieve functie $\pi, \rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zodat $\beta\pi(p) = q$ en $\beta\rho(q) = r$. Dan geldt voor alle $P \in p$ dat $\pi(P) \in q$ en voor alle $Q \in q$ dat $\rho(Q) \in r$. Dus geldt dat $(\rho \circ \pi)(P) \in r$. De compositie van twee bijectieve functies is weer een bijectie en $\beta(\rho \circ \pi)(p) = r$, dus geldt $p \sim r$. □

Definitie 5.6. De **Rudin-Keislerordering** op $\beta\mathbb{N}$ wordt gedefinieerd door

$$p \preceq q \Leftrightarrow \text{er is een } f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ zodat } \beta f(p) = q.$$

De ultrafilters die kleiner zijn dan een bepaald ultrafilter p , kunnen we dus schrijven als

$$\{q \in \beta\mathbb{N} : q \preceq p\} = \{\beta f(p) : f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}.$$

We willen graag laten zien dat de Rudin-Keislerordering een partiële ordening op $\beta\mathbb{N}/\sim$ geeft. Om dit te doen, hebben we eerst de volgende twee lemma's nodig. Deze lemma's en bewijzen komen allemaal uit hoofdstuk 9 'The Rudin-Keisler Order on Types of Ultrafilters' van het boek 'The Theory of Ultrafilters' [1]. Het lemma van de drie verzamelingen is hetzelfde als lemma 9.1 in het boek, het tweede lemma correspondeert met stelling 9.2 en het bewijs dat de Rudin-Keislerordering een partiële ordening is, is hetzelfde als het bewijs van gevolg 9.3.

Lemma 5.7. (Het lemma van de drie verzamelingen) Laat $A \subseteq \mathbb{N}$ en $f : A \rightarrow A$ zodat $f(n) \neq n$ voor alle $n \in A$. Dan zijn er deelverzamelingen A_0, A_1, A_2 van $\mathbb{N}$ zijn zodat:

- $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$;
- $A_0 \cap A_1 = \emptyset, A_1 \cap A_2 = \emptyset$ en $A_0 \cap A_2 = \emptyset$;
- $A_i \cap f[A_i] = \emptyset$ voor alle $i \in \{0, 1, 2\}$.

Bewijs. Voor een getal $k \in A$ definiëren we een rij $f^n(k)$ recursief door $f^0(k) = k$ en $f^{n+1}(k) = f(f^n(k))$. We definiëren een relatie op A door

$$k \sim l \text{ als } f^n(k) = f^m(l) \text{ voor bepaalde } m, n \in \mathbb{N}.$$

We gaan laten zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is op $\mathbb{N}$. Het is duidelijk dat $\sim$ reflexief en symmetrisch is. We gaan daarom nu transitiviteit bewijzen. Laat $j \sim k$ en $k \sim l$. Dan bestaan er $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ zodat $f^m(j) = f^n(k)$ en $f^p(k) = f^q(l)$. Laat $x = \max(n, p)$ dan geldt $f^{x-n+m}(j) = f^x(k) = f^{x-p+q}(l)$, dus geldt ook dat $j \sim l$.

Laat $\mathcal{R}$ de verzameling van equivalentieklassen onder $\sim$ zijn. Het is duidelijk dat als $r \in \mathcal{R}$ dat dan $f[r] \subseteq r$. We gaan nu laten zien dat elke $r \in R$ in drie gewenste delen te splitsen is. Zij $r \in R$

Geval 1: Er is een $\alpha_r \in r$ en $n > 0$ zodat $f^n(\alpha_r) = \alpha_r$. Definieer in dit geval n_r als de kleinste $n > 0$ zodat $f^n(\alpha_r) = \alpha_r$ en definieer $C_r = \{f^m(\alpha_r) : m < n_r\}$.

Als $\alpha \in r \setminus C_r$ dan zijn er $k < n_r$ en $m \in \mathbb{N}$ zodat $f^m(\alpha) = f^k(\alpha_r)$. In dit geval definiëren we

$$k(\alpha) := \min \left\{ k < n_r \text{ er is een } m \in \mathbb{N} \text{ zodat } f^m(\alpha) = f^k(\alpha_r) \right\}$$

$$m(\alpha) := \min \left\{ m \in \mathbb{N} : f^m(\alpha) = f^{k(\alpha)}(\alpha_r) \right\}.$$

(*) Als $m(\alpha) > 1$ dan geldt dat $k(f(\alpha)) = k(\alpha)$ en $m(f(\alpha)) = m(\alpha) - 1$. Definieer nu

$$A_{r,0} = \{f^k(\alpha_r) : k \text{ is even en } k < n_r - 1\} \cup \{\alpha \in r \setminus C_r : k(\alpha) + m(\alpha) \text{ is even}\}$$

$$A_{r,1} = \{f^k(\alpha_r) : k \text{ is oneven en } k < n_r - 1\} \cup \{\alpha \in r \setminus C_r : k(\alpha) + m(\alpha) \text{ is oneven}\}$$

$$A_{r,2} = \{f^{n_r-1}(\alpha_r)\}$$

Het is duidelijk dat $r = A_{r,0} \cup A_{r,1} \cup A_{r,2}$ en $A_{r,i} \cap A_{r,j} = \emptyset$ voor $i, j \leq 2$ en $i \neq j$.

Laat $\alpha \in A_{r,i}$. Dan zijn er twee opties $\alpha \in C_r$ of $\alpha \in r \setminus C_r$. Als $\alpha \in C_r$ dan is het duidelijk dat $f(\alpha) \notin A_{r,i}$. Als $\alpha \in r \setminus C_r$ dan zijn er wederom twee opties $m(\alpha) = 1$ of $m(\alpha) > 1$. Als $m(\alpha) = 1$, dan $f(\alpha) = f^k(\alpha_r) \in C_r$ en $k(\alpha) = k$, dus $m(\alpha) + k(\alpha) \not\equiv k \pmod{2}$. Als $\alpha \in A_{r,i} \setminus C_r$ en $m(\alpha) > 1$, dan geldt wegens bewering (*) dat $f(\alpha) \notin A_{r,i}$.

Geval 2: Het eerste geval is niet waar. Laat $\alpha_r \in r$ dan zijn er voor elke $\alpha \in r$ natuurlijke getallen $k, m \in \mathbb{N}$ zodat $f^m(\alpha) = f^k(\alpha_r)$. Definieer

$$k(\alpha) := \min \{k \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ zodat } f^m(\alpha) = f^k(\alpha_r)\}$$

en

$$m(\alpha) := \min \{m \in \mathbb{N} : f^m(\alpha) = f^{k(\alpha)}(\alpha_r)\}.$$

Als $m(\alpha) = 0$ dan geldt $m(f(\alpha)) = 0$ en $k(f(\alpha)) = k(\alpha) + 1$ en als $m(\alpha) > 0$ dan $m(f(\alpha)) = m(\alpha) - 1$ en $k(f(\alpha)) = k(\alpha)$. Oftewel

$$k(\alpha) + m(\alpha) \not\equiv k(f(\alpha)) + m(f(\alpha)) \pmod{2}.$$

In dit geval nemen we

$$A_{r,0} = \{\alpha \in r : k(\alpha) + m(\alpha) \text{ is even}\},$$

$$A_{r,1} = \{\alpha \in r : k(\alpha) + m(\alpha) \text{ is oneven}\},$$

$$A_{r,2} = \emptyset.$$

Neem nu $A_i := \bigcup \{A_{r,i} : r \in \mathcal{R}\}$ voor $i \leq 2$ en deze verzamelingen voldoen aan alle eisen. $\square$

Lemma 5.8. *Laat $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ en $p \in \beta\mathbb{N}$. Dan geldt:*

- a) *Als $\beta f(p) = p$, dan geldt dat $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\} \in p$;*
- b) *Als er een $A \in p$ is, zodat $f|_A$ bijectief is, dan geldt $\beta f(p) \sim p$.*

Bewijs. a) We geven de verzameling $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\}$ de naam B . Veronderstel nu dat $B \notin p$. Nu is p een ultrafilter dus wegens stelling 3.18 geldt dat $\mathbb{N} \setminus B \in p$. Voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus B$ geldt dat $f(n) \neq n$. We gebruiken nu lemma 5.7 om $\mathbb{N} \setminus B$ op te delen in drie disjuncte delen A_0, A_1, A_2 , zodat $A_i \cap f[A_i] = \emptyset$ voor $i \leq 2$.

Omdat $\mathbb{N} \setminus B \in p$ geldt wegens gevolg 3.19 dat exact één van de verzamelingen A_0, A_1 en A_2 in p zit. Laat $A_i \in p$, omdat $\beta f(p) = p$, geldt nu ook dat $f[A_i] \in p$. Maar $A_i \cap f[A_i] = \emptyset$. Tegenspraak. Hieruit volgt dat B toch in p moet zitten.

b) Veronderstel nu dat er een $A \in p$ is zodat $f|_A$ bijectief is. We gaan laten zien dat er een deelverzameling $A_1 \subseteq A$ is, zodat $f|_{A_1}$ kan worden uitgebreid naar een bijectie g van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Als $|\mathbb{N} \setminus A| = |\mathbb{N} \setminus f(A)|$, pak dan een willekeurige bijectie h tussen deze twee verzamelingen en pak $A_1 = A$.

Als $|\mathbb{N} \setminus A| \neq |\mathbb{N} \setminus f(A)|$, dan geldt dat A oneindig groot is. Deel dan A in twee oneindige delen disjuncte A_1 en A_2 op, zodat $A_1 \in q$. (We weten wegens stelling 3.18 dat A_1 of A_2 in p zit.) Dan geldt dat $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus A_1| = |\mathbb{N} \setminus g(A_1)|$. Pak in dit geval een willekeurig bijectie h tussen $\mathbb{N} \setminus A_1$ en $\mathbb{N} \setminus g(A_1)$.

Definieer nu de bijectie $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ door

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor } x \in A_1 \\ h(x) & \text{voor } x \in \mathbb{N} \setminus A_1 \end{cases}.$$

We gaan nu laten zien dat $\beta g(p) = \beta f(p)$. Laat $B \in p$ willekeurig, dan geldt dat $A_1 \cap B \in p$. Dan geldt dat $g[B] \supseteq g[B \cap A_1] = f[B \cap A_1] \in \beta f(p)$. Omdat $\beta f(p)$ een ultrafilter is, volgt hieruit dat $g[B] \in \beta f(p)$. Wegens de definitie van βg krijgen we dat $\beta g(p) = \beta f(p)$. Omdat g een bijectie is, volgt hieruit dat $\beta f(p) = \beta g(p) \sim p$. $\square$

Na deze twee handige lemma's, is het niet meer zo lastig om te bewijzen dat de Rudin-Keislerordening daadwerkelijk een partiële ordening is. In dit bewijs gaan we gebruik maken van de definitie van een partiële ordening, zoals beschreven staat in paragraaf 2.1.

Stelling 5.9. *De Rudin-Keislerordening $\preceq$ is een partiële ordening op $\beta\mathbb{N}/\sim$, oftewel:*

- $\preceq$ is reflexief: $p \preceq p$,
- $\preceq$ is transitief: $p \preceq q$ en $q \preceq r$ impliceert $p \preceq r$,
- $\preceq$ is anti-symmetrisch: $p \preceq q$ en $q \preceq p$ impliceert $p \sim q$.

Bewijs. Er geldt dat $p \preceq p$: We nemen de identieke afbeelding id dan geldt $\beta id(p) = p$.

Als $p \preceq q$ en $q \preceq r$ dan geldt ook $p \preceq r$: Als $\beta f(r) = q$ en $\beta g(q) = p$.

Als $p \preceq q$ en $q \preceq p$ dan zijn er functies $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zodat $\beta f(p) = q$ en $\beta g(q) = p$. Hieruit volgt dat $(\beta g \circ \beta f)(p) = p$. Met lemma 5.8a) volgt dat de verzameling $A = \{n \in \mathbb{N} : g(f(n)) = n\} \in p$. Omdat $(g \circ f)[A] = A$ is $g \circ f$ een bijectie op A , dus $f|_A$ is ook een bijectie. Met lemma 5.8b) krijgen we nu dat $q = \beta f(p) \sim p$. $\square$

5.1 Onvergelijkbare ultrafilters

Nu we deze eigenschappen over de Rudin-Keislerordening weten, is het tijd om naar het bewijs van Kenneth Kunen (1972) [3] te gaan kijken. Dit doen we aan de hand van het artikel van Jan van Mill [5]. In dit bewijs toonde Kunen aan dat er twee ultrafilters p en q bestaan zodat $p \not\preceq q$ en $q \not\preceq p$. In deze paragraaf gaan we kijken naar het bewijs dat hij heeft gegeven. Dit doen we niet alleen omdat dit een ontzettend belangrijk resultaat is, maar vooral wegens de manier waarop hij dit heeft bewezen. Tijdens zijn bewijs maakt hij namelijk gebruik van families verzamelingen, die 'onafhankelijk' zijn ten opzichte van filters. Deze onafhankelijke families zorgen er namelijk voor dat je tijdens je constructie tussendoor nooit op een ultrafilter terecht komt. Hierdoor kan je altijd extra verzamelingen aan je filter blijven toevoegen.

We beginnen met het bewijzen van het volgende lemma.

Lemma 5.10. *Er is een familie $\{\langle A_x^1, A_x^2 \rangle : x \in \mathbb{R}\}$ van paren disjuncte deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zodat voor alle eindige $F \subseteq \mathbb{R}$ en $f : F \rightarrow \{1, 2\}$, geldt dat $\bigcap_{x \in F} A_x^{f(x)}$ oneindig is.*

Bewijs. Wegens 4.5 bestaat er een familie $\mathcal{S}$ functie van $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met grote schommeling van grootte $2^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}|$. We kunnen deze familie dus schrijven als $\mathcal{S} = \{g_x : x \in \mathbb{R}\}$. Definieer $A_x^1 := \{n \in \mathbb{N} : f_x(n) \equiv 1 \pmod{2}\}$ en $A_x^2 := \{n \in \mathbb{N} : g_x(n) \equiv 0 \pmod{2}\}$. Omdat g_x een functie is, geldt dat $A_x^0 \cap A_x^1 = \emptyset$.

Laat $F \subseteq \mathbb{R}$ eindig en $f : F \rightarrow \{1, 2\}$ willekeurig. Dan krijgen we dat

$$\bigcap_{x \in F} g_x^{-1}(f(x)) \subseteq \bigcap_{x \in F} A_x^{f(x)}.$$

Omdat $\mathcal{S}$ oneindig groot is geeft lemma 4.3 dat de linkerverzameling oneindig groot is. Hieruit kunnen we concluderen dat de rechterverzameling $\bigcap_{x \in F} A_x^{f(x)}$ ook oneindig groot is en dan zijn we klaar. $\square$

Zoals eerder genoemd, maakte Kunen gebruik van zogenaamde onafhankelijke families. Deze zijn als volgt gedefinieerd:

Definitie 5.11. Laat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ een filter zijn, zodat alle elementen in $\mathcal{F}$ oneindig groot zijn. Een geïndiceerde familie $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I\}$ van paren disjuncte verzamelingen is een **onafhankelijke familie ten opzichte van $\mathcal{F}$** als voor alle eindige deelverzamelingen $\sigma \subseteq I$, functies $f : \sigma \rightarrow \{1, 2\}$ en $F \in \mathcal{F}$ geldt dat $F \cap \bigcap_{i \in \sigma} A_i^{f(i)}$ niet leeg is.

Merk op dat voor een oneindige I dit impliceert dat de doorsnede $F \cap \bigcap_{i \in \sigma} A_i^{f(i)}$ oneindig groot moet zijn. Stel dat deze doorsnede eindig is en dus grootte n heeft. Vervolgens gaan we de elementen in deze doorsnede nummeren en noemen ze $x_1, \dots, x_n$. Vervolgens bekijken we n elementen $i_1, \dots, i_n \in I \setminus \sigma$. Vervolgens kiezen we $A_{i_j}^1$ als $x_j \notin A_{i_j}^1$ en anders $A_{i_j}^2$. Merk op dat x_j dan niet in $A_{i_j}^2$ zit, omdat $A_{i_j}^2$ en $A_{i_j}^1$ disjunct zijn. We schrijven deze verzameling als $A_{i_j}^*$. Dan geldt dat

$$F \cap \bigcap_{i \in \sigma} A_i^{f(i)} \cap \bigcap_{j=1}^n A_{i_j}^* = \emptyset,$$

omdat elk van de x_j in de doorsnede $F \cap \bigcap_{i \in \sigma} A_i^{f(i)}$ niet in $A_{i_j}^*$ zit.

Met deze belangrijke observatie in ons achterhoofd, kunnen we nu een onafhankelijke familie ten opzichte van het Fréchetfilter gaan vinden.

Lemma 5.12. *Er is een onafhankelijke familie $\{A_x^0, A_x^1 : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ten opzichte van het Fréchetfilter.*

Bewijs. Dit is een direct gevolg van lemma 5.10. Laat $\mathcal{F}$ het Fréchetfilter zijn en $F \in \mathcal{F}$, dan bevat F hoogstens eindig aantal elementen niet. Voor alle eindige $G \subseteq \mathbb{R}$ en $f : G \rightarrow \{0, 1\}$ hebben we dat $\bigcap_{x \in G} A_x^{f(x)}$ oneindig groot is. Als we deze verzameling doorsnijden met G gooien we er maximaal een eindig aantal elementen uit, waardoor $F \cap \bigcap_{x \in G} A_x^{f(x)}$ weer oneindig is. $\square$

Daarnaast kunnen we ook het volgende, zeer belangrijke lemma bewijzen. Dit lemma geeft namelijk aan hoe we twee beginfilters kunnen uitbreiden, zodat ze uiteindelijk onafhankelijk worden. Dit heb je nodig om partiële ordeningen te construeren, waarin sommige elementen onderling onvergelijkbaar zijn. Tot slot is niet alleen het resultaat van dit lemma, maar ook de strategie die in het bewijs gebruikt wordt heel belangrijk.

In het artikel van Jan van Mill [5] waarin dit bewijs beschreven wordt, gaat hij de filters uitbreiden met een verzameling. Vervolgens laat hij zien dat als we verzameling A_x^1 niet kunnen toevoegen, dat we dan wel de verzameling A_x^2 kunnen toevoegen. Op deze manier weet je dan dat er ten minste één verzameling is die je kan toevoegen.

Lemma 5.13. *Laat $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ filters zijn en veronderstel dat $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I\}$ een onafhankelijke familie ten opzichte van $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ is. Voor elke $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is er een eindige $J \subseteq I$ en een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ zodat $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I \setminus J\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$ en $\langle \mathcal{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)\} \rangle$.*

Bewijs. Laat $x \in I$ willekeurig een willekeurig element zijn.

Geval 1: $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I \setminus \{x\}\}$ is onafhankelijk ten opzichte van $\langle G \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A_x^1)\} \rangle$.

Als dit het geval is dan voldoet $A = A_x^1$ en $J = \{x\}$. Laat $X \in \langle \mathcal{F} \cup \{A_x^1\} \rangle$ willekeurig, dan is er een $F \in \mathcal{F}$ zodat $F \cap A_x^1 \subseteq X$. Laat $K \subseteq I \setminus \{x\}$ een eindige deelverzameling zijn en $g : K \rightarrow \{1, 2\}$. Breid g uit tot de functie $g' : K \cup \{x\} \rightarrow \{1, 2\}$ met $g'(x) = 1$. Dan geldt dat

$$F \cap \bigcap_{i \in K \cup \{x\}} A_i^{g'(i)} = F \cap A_x^1 \cap \bigcap_{i \in K} A_i^{g(i)} \subseteq X \cap \bigcap_{i \in K} A_i^{g(i)}.$$

Omdat $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{F}$ is, geldt dat $F \cap \bigcap_{i \in K \cup \{x\}} A_i^{g'(i)}$ oneindig is, dus dan is $X \cap \bigcap_{i \in K} A_i^{g(i)}$ dat ook. Hieruit volgt dat $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I \setminus \{x\}\}$ ook onafhankelijk is ten opzichte van $\langle F \cup \{A_x^1\} \rangle$.

Geval 2: Stel dat geval 1 niet waar is.

Dan is er een eindige $K \subseteq I \setminus \{x\}$ en een functie $\bar{g} : K \rightarrow \{1, 2\}$ en een element $G_0 \in \mathcal{G}$ zodat de verzameling

$$\bigcap_{i \in K} A_i^{\bar{g}(i)} \cap G_0 \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A_x^1)) = \emptyset.$$

Hieruit volgt dat

$$\bigcap_{i \in K} A_i^{\bar{g}(i)} \cap G_0 \subseteq f^{-1}(A_x^1). \quad (+)$$

Neem nu $A = \mathbb{N} \setminus A_x^1$ en $J = K \cup \{x\}$. Dan is $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I \setminus J\}$ onafhankelijk ten opzichte van $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$:

Omdat A_x^1 en A_x^2 disjunct zijn geldt $A_x^2 \subseteq \mathbb{N} \setminus A_x^1$. Laat $L \subseteq I \setminus J$ een eindige deelverzameling zijn en $g : L \rightarrow \{1, 2\}$. Breid L uit met x dan geldt $L \cup \{x\} \subseteq I$ en g tot $g' : L \cup \{x\} \rightarrow \{1, 2\}$. Zodat $g'(y) = g(y)$ voor alle $y \in L$ en $g'(x) = 1$. Laat $X \in \langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle = \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{N} \setminus A_x^1\} \rangle$ willekeurig. Dan is er een $F \in \mathcal{F}$ zodat $F \cap (\mathbb{N} \setminus A_x^1) \subseteq X$. Dan geldt

$$F \cap \bigcap_{y \in L \cup \{x\}} A_y^{g'(y)} = F \cap A_x^2 \cap \bigcap_{y \in L} A_y^{g(y)} \subseteq F \cap \mathbb{N} \setminus A_x^1 \subseteq X \cap \bigcap_{y \in L} A_y^{g(y)}.$$

Omdat $F \cap \bigcap_{y \in L \cup \{x\}} A_y^{g'(y)}$ oneindig is, is $X \cap \bigcap_{y \in L} A_y^{g(y)}$ dat ook.

We gaan nu laten zien dat $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I \setminus J\}$ onafhankelijk is ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)\} \rangle$. Laat $L \subseteq I \setminus J$ eindig en neem $g : L \rightarrow \{1, 2\}$ en $G \in \mathcal{G}$ willekeurig. Er geldt daarnaast dat $\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A) = \mathbb{N} \setminus f^{-1}(\mathbb{N} \setminus A_x^1) \supseteq f^{-1}(A_x^1)$. Als we dit invullen zien we dat

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in L} A_i^{g(i)} \cap G \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)) &\supseteq \bigcap_{i \in L} A_i^{g(i)} \cap G \cap f^{-1}(A_x^1) \\ &\supseteq \bigcap_{i \in L} A_i^{g(i)} \cap \bigcap_{i \in K} A_i^{\bar{g}(i)} \cap (G_0 \cap G) \cap f^{-1}(A_x^1). \end{aligned} \quad (*)$$

Er geldt dat $L \cap K = \emptyset$, wegens het feit dat $L \subseteq I \setminus (K \cup \{x\})$. We definiëren een nieuwe functie $h : K \cup L \rightarrow \{0, 1\}$ met $h(x) = \bar{g}(x)$ als $x \in K$ en $h(x) = g(x)$ als $x \in L$. $K \cup L$ is eindig, het is immers de vereniging van twee eindige verzamelingen, dus h is een functie van een eindige deelverzameling van I naar $\{1, 2\}$. Omdat $\mathcal{G}$ een filter is, geldt daarnaast dat $G \cap G_0 \in \mathcal{G}$. Als

we dit allemaal combineren met het feit dat $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{G}$, vinden we dat

$$\bigcap_{i \in L} A_i^{g(i)} \cap \bigcap_{i \in K} A_i^{\bar{g}(i)} \cap (G_0 \cap G) = \bigcap_{i \in K \cup L} A_i^{h(i)} \cap (G \cap G_0)$$

oneindig is.

Wegens vergelijking (+) krijgen we dat

$$\bigcap_{i \in L} A_i^{g(i)} \cap \bigcap_{i \in K} A_i^{\bar{g}(i)} \cap (G_0 \cap G) \cap f^{-1}(A_x^1) = \bigcap_{i \in L} A_i^{g(i)} \cap \bigcap_{i \in K} A_i^{\bar{g}(i)} \cap (G_0 \cap G)$$

en deze verzameling is oneindig. Uit vergelijking (*) volgt nu ook dat

$$\bigcap_{i \in L} A_i^{g(i)} \cap G \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A))$$

oneindig is. Dus $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I \setminus J\}$ is onafhankelijk ten opzichte van $\langle \mathcal{G} \cup (\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)) \rangle$.

In beide gevallen is er een verzameling A is die aan alle eisen voldoet en omdat altijd een van de twee gevallen waar is, is het bewijs hiermee afgerond. $\square$

Het lemma wat we net hebben bewezen is eigenlijk de inductiestap voor de transfinitie inductie die Kunen [3] gebruikte om twee onafhankelijke filters te construeren. In de inductiestap zorg je er namelijk voor dat voor alle ultrafilters $p_{\mathcal{G}} \supseteq \langle \mathcal{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)\} \rangle$ en $p_{\mathcal{F}} \supseteq \langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$ geldt dat $\beta f(p_{\mathcal{G}}) \neq p_{\mathcal{F}}$. Dit komt omdat $f(\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)) \cap A = \emptyset$, dus $p_{\mathcal{G}}$ heeft een element X zodat $f(X) \notin p_{\mathcal{F}}$. Wegens de definitie van βf kan deze functie niet $p_{\mathcal{G}}$ naar $p_{\mathcal{F}}$ sturen. Als we voor elke functie zo'n verzameling toevoegen, vinden we dat er geen enkele functie $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is zodat $g(p_{\mathcal{G}}) = p_{\mathcal{F}}$, oftewel dat $p_{\mathcal{F}} \not\leq p_{\mathcal{G}}$. Als we op eenzelfde manier ervoor zorgen dat $p_{\mathcal{G}} \not\leq p_{\mathcal{F}}$ niet kan, zijn we klaar. Nu hopelijk een beetje duidelijk is wat het idee achter het bewijs is, is het tijd om het dan ook maar uit te voeren.

Stelling 5.14. *Er zijn ultrafilters p en q op $\mathbb{N}$ zodat $p \not\leq q$ en $q \not\leq p$.*

Bewijs. Wegens lemma 5.12 is er een familie $\{\langle A_x^0, A_x^1 \rangle : x \in \mathbb{R}\}$ onafhankelijk ten opzichte van het Fréchetfilter. We gaan alle functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ welordenen, waardoor we de welordering $\{f_\alpha : 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$ krijgen. Met transfinitie recursie naar α zullen we $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{G}_\alpha$ en $K_\alpha \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ construeren zó dat:

- 1) $\mathcal{F}_\alpha$ en $\mathcal{G}_\alpha$ filters zijn op $\mathbb{N}$ en de verzameling $\{\langle A_x^0, A_x^1 \rangle : x \in K_\alpha\}$ is onafhankelijk ten opzichte van $\mathcal{F}_\alpha$ en $\mathcal{G}_\alpha$.
- 2) $K_0 = 2^{\mathbb{N}}$ en $F_0 = G_0$ is het Fréchetfilter.
- 3) Voor elke $\kappa < \alpha$ geldt dat $\mathcal{F}_\kappa \subseteq \mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{G}_\kappa \subseteq \mathcal{G}_\alpha$ en $K_\alpha \subseteq K_\kappa$.
- 4) Voor elke α geldt dat $|2^{\mathbb{N}} \setminus K_\alpha| \leq |\alpha| \cdot |\mathbb{N}|$.
- 5) Voor alle $\alpha \geq 1$ zijn er $A, B \subseteq \mathbb{N}$ met $\{A, \mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(B)\} \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ en $\{B, \mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(A)\} \subseteq \mathcal{G}_\alpha$.

Veronderstel dat we een constructie hebben voor alle $\kappa < \alpha$ voor een $\alpha < \mathfrak{c}$. Definieer dan $K = \bigcap_{\kappa < \alpha} K_\kappa$, $\mathcal{G} = \bigcup_{\kappa < \alpha} \mathcal{G}_\kappa$ en $\mathcal{F} = \bigcup_{\kappa < \alpha} \mathcal{F}_\kappa$.

Wegens eis 4) geldt dat

$$|2^{\mathbb{N}} \setminus K| = \left| 2^{\mathbb{N}} \setminus \left(\bigcap_{\kappa < \alpha} K_\kappa \right) \right| = \left| \bigcup_{\kappa < \alpha} 2^{\mathbb{N}} \setminus K_\kappa \right| \leq \left| \bigcup_{\kappa < \alpha} \kappa \cdot |\mathbb{N}| \right| \leq \alpha \cdot \alpha \cdot |\mathbb{N}| = \alpha \cdot \mathfrak{c}.$$

Omdat $\alpha \cdot \mathfrak{c} < \mathfrak{c}$, volgt hieruit dat de familie $\{\langle A_x^0, A_x^1 \rangle : x \in K\}$ oneindig groot is. Uit eis 1) volgt daarnaast dat deze familie onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$:

Laat namelijk $\sigma \subseteq K$ en $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ willekeurig en $F \in \mathcal{F}$. Dan is er een $\kappa < \alpha$ zodat $F \in \mathcal{F}_\kappa$. Er geldt ook dat $\sigma \subseteq K_\kappa$. Omdat $\{\langle A_x^0, A_x^1 \rangle : x \in K_\kappa\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{F}_\kappa$ geldt dat $F \cap \bigcap_{i \in \sigma} A_i^{f(i)}$ oneindig is. Analoog kunnen we bewijzen dat deze familie ook onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{G}$.

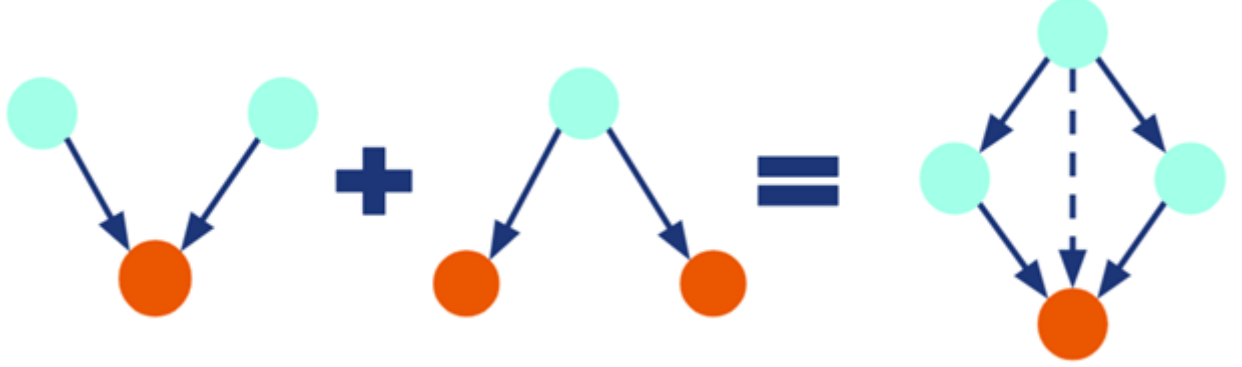
We gaan nu lemma 5.13 twee keer gebruiken. Voor $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is er een eindige $J_1 \subseteq K$ en een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ zodat $\{\langle A_x^0, A_x^1 \rangle : x \in K \setminus J_1\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$ en $\langle \mathcal{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(A)\} \rangle$. Vervolgens passen we het lemma op deze twee nieuwe filters toe en krijgen we dat er een eindige $J_2 \subseteq K \setminus J_1$ en $B \subseteq \mathbb{N}$, zodat $\{\langle A_x^0, A_x^1 \rangle : x \in K \setminus (J_1 \cup J_2)\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\langle \mathcal{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(A)\} \cup \{B\} \rangle$ en $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \cup \{\mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(B)\} \rangle$. Neem nu $K_\alpha = K \setminus (J_1 \cup J_2)$, $\mathcal{F}_\alpha = \langle \mathcal{F} \cup \{A\} \cup \{\mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(B)\} \rangle$ en $\mathcal{G}_\alpha = \langle \mathcal{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(A)\} \cup \{B\} \rangle$. Het is nu duidelijk dat deze $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{G}_\alpha$ en K_α aan eisen 1) – 3) en 5) voldoen. Omdat we maar een eindig aantal elementen uit K verwijderen om K_α te krijgen, wordt ook voldaan aan eis nummer 4), namelijk dat $|2^{\mathbb{N}} \setminus K_\alpha| \leq \alpha \cdot |\mathbb{N}|$.

Omdat voor alle $\kappa < \alpha$ geldt dat $\mathcal{F}_\kappa \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ en $\mathcal{G}_\kappa \subseteq \mathcal{G}_\alpha$ zien we dat $\bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{F}_\kappa$ een filter is en $\bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{G}_\kappa$ ook. Neem nu een ultrafilter p zodat p een uitbreiding is van $\bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{F}_\kappa$ en q zodat q een uitbreiding is van $\bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{G}_\kappa$. Dan geldt dat $p \not\leq q$ en $q \not\leq p$:

Stel dat de bewering niet waar is. Dan is er een functie f van $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, zodat $\beta f(p) = q$ of $\beta f(q) = p$. We weten dat er een α is, zodat $f = f_\alpha$. Wegens eis nummer 5) is er een $A \in p$, zodat $\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A) \in q$. Hieruit volgt dat $f^{-1}(A) \notin q$ en geldt wegens lemma 5.3 dat $\beta f(q) \neq p$. Op eenzelfde manier bewijzen we dat $\beta f(p) \neq q$. Tegenspraak. $\square$

6 Constructie ruit

Nu we alle benodigde voorkennis hebben, gaan we in dit hoofdstuk de ruit van ultrafilters construeren. Allereerst gaan we de onderkant van de ruit maken, daarna de bovenkant. Als dit gelukt is kunnen we deze constructies samenvoegen om de gehele ruit te krijgen. Hieronder vind je het idee van het bewijs uitgedrukt in een plaatje.



Figuur 4: De bolletjes zijn ultrafilters en de blauwe pijlen de Rudin-Keislerordering. De oranje bolletjes staan voor willekeurige (vrije) ultrafilters waar we vervolgens de blauwe ultrafilters bij construeren.

6.1 Constructie onderkant ruit

In deze paragraaf gaan we de onderkant van de ruit construeren. Dit gaan we doen door voor een willekeurig (vrij) ultrafilter r twee ultrafilters p en q te vinden zodat $r \preceq p$ en $r \preceq q$ én zodat p en q onderling onafhankelijk zijn.

Laat dus r een willekeurig vrij ultrafilter zijn en f en g twee functies in een familie $\mathcal{S}$ functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ met grote schommeling, zó dat $|\mathcal{S}| = 2^{|\mathbb{N}|}$. In het bijzonder geldt dus dat $\mathcal{S}$ oneindig veel functies bevat.

Vervolgens definiëren we $A_i = f^{-1}(i)$ en $B_i = g^{-1}(i)$ voor $i \in \mathbb{N}$. Omdat $f, g \in \mathcal{S}$ geldt dat f en g surjectief zijn en dat het inverse beeld van elk element in $\mathbb{N}$ oneindig groot is. Oftewel: $|A_i| = |B_i| = |\mathbb{N}|$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Daarnaast geldt dat $A_i \cap A_j = \emptyset$ voor alle $i \neq j$ en $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$, wegens de definitie van A_i . De B_i hebben uiteraard deze eigenschappen ook.

Omdat f en g uit dezelfde oneindige familie van grote schommeling komen, vinden we dat $A_i \cap B_j = f^{-1}(i) \cap g^{-1}(j)$ oneindig veel elementen bevat voor alle $i, j \in \mathbb{N}$.

We definiëren verzamelingen A_R als volgt:

$$A_R := f^{-1}[R] = \bigcup_{j \in R} A_j \quad (1)$$

waarbij $R \in r$. Dus we bekijken deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ die bestaan uit de vereniging van verzamelingen $f^{-1}(j)$ voor alle $j \in R$, waarbij R in het ultrafilter r zit.

Vervolgens definiëren we de verzameling $\mathcal{A}$ als volgt:

$$\mathcal{A} := \{A_R : R \in r\}. \quad (2)$$

Lemma 6.1. *De familie $\mathcal{A}$ van alle verzamelingen A_R met $R \in r$ als gedefinieerd in (1) is een filterbasis.*

Bewijs. We hebben net gezien dat alle coeindige verzamelingen van $\mathbb{N}$ in $\mathcal{A}$ zitten, dus $\mathcal{A}$ is niet leeg.

Merk op dat elke $R \in r$ niet-leeg is, dus er is een $x \in R$, daarvoor geldt dat $A_x \subseteq A_R$ oneindig groot is en dus $\mathcal{A}$ bevat niet de lege verzameling.

De doorsnede van A_{R_1} en A_{R_2} is ook van de vorm $A_{R'}$:

$$A_{R_1} \cap A_{R_2} = f^{-1}[R_1] \cap f^{-1}[R_2] = f^{-1}[R_1 \cap R_2] = A_{R_1 \cap R_2}$$

Omdat $R_1, R_2 \in r$ en r een (ultra)filter is, geldt ook dat $R_1 \cap R_2 \in r$. $\square$

Lemma 6.2. *Voor elk ultrafilter p dat de familie $\{A_R : R \in r\}$ uitbreidt, geldt $\beta f(p) = r$.*

Bewijs. Er geldt voor alle $R \in r$ dat $f^{-1}[R] = A_R \in p$. Wegens lemma 5.3 geldt dan ook dat voor alle $P \in p$ dat $f[P] \in r$, dus wegens de definitie van βf , krijgen we dan dat $\beta f(p) = r$. $\square$

We definiëren voor elke $h \in \mathcal{S}$ twee verzamelingen X_h^1 en X_h^2 door

$$X_h^i = h^{-1}[\{n : n \equiv i \pmod{2}\}].$$

Nu geldt dat $X_h^1 \cap X_h^2 = \emptyset$ voor alle h . Verder definiëren we

$$\mathcal{T} = \{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S} \setminus \{f, g\}\}.$$

Lemma 6.3. *De familie $\mathcal{T}$ is een onafhankelijk familie ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{A} \rangle$.*

Bewijs. Laat $h_1, \dots, h_n$ eindig veel functies zijn $\mathcal{S} \setminus \{f, g\}$ zijn en laat $e : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\}$ een willekeurige functie zijn. We moeten laten zien dat voor alle $A \in \langle \mathcal{A} \rangle$ geldt dat

$$A \cap \bigcap_{i=1}^n X_{h_i}^{e(i)}$$

niet leeg is.

Omdat $\mathcal{S}$ van grote schommeling is, geldt voor elke $j \in \mathbb{N}$ dat de volgende verzameling

$$f^{-1}(j) \cap \bigcap_{i=1}^n h_i^{-1}(e(i))$$

niet leeg is. Omdat $\mathcal{A}$ een filter basis is, weten we dat voor alle $A \in \langle \mathcal{A} \rangle$ er een A_R is, zodat $A_R \subseteq A$. Laat $j \in R$ willekeurig, dan geldt

$$f^{-1}(j) \cap \bigcap_{i=1}^n h_i^{-1}(e(i)) \subseteq A_R \cap \bigcap_{i=1}^n X_{h_i}^{e(i)} \subseteq A \cap \bigcap_{i=1}^n X_{h_i}^{e(i)}.$$

Omdat de linker verzameling niet leeg is, geldt ook dat $A \cap \bigcap_{i=1}^n X_{h_i}^{e(i)}$ niet leeg is en dat dus $\mathcal{T}$ onafhankelijk is van $\langle \mathcal{A} \rangle$. $\square$

Merk op dat we op een analoge manier kunnen bewijzen dat $\mathcal{T}$ een onafhankelijke familie is ten opzichte van $\{B_R : R \in r\}$.

Omdat $|\mathcal{S}| = |\mathcal{S} \setminus \{f, g\}| = 2^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, hebben we nu een lemma dat dezelfde functie heeft als lemma 5.12. Nu kunnen we lemma 5.13 weer gebruiken om een soort zelfde stelling als stelling 5.14 bewijzen, maar dan binnen de groep ultrafilters dat groter is dan het vrije ultrafilter r .

Stelling 6.4. *Voor elk ultrafilter r zijn er twee onderling onvergelijkbare ultrafilters p en q zó dat $r \preceq p$ en $r \preceq q$.*

Bewijs. We gaan het bewijs van stelling 5.14 herhalen, alleen nemen we nu $\mathcal{F}_0 = \langle \{A_R : R \in r\} \rangle$ en $\mathcal{G}_0 = \langle \{B_R : R \in r\} \rangle$ en $T_0 = \mathcal{T}$.

We gaan nu alle functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ welordenen, zodat we een welordening $\{f_\alpha : 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$ krijgen. Vervolgens krijgen we via het bewijs van stelling 5.14, voor elke $1 \leq \alpha < \mathfrak{c}$, filters $\mathcal{F}_\alpha$ en $\mathcal{G}_\alpha$ en een verzameling $\mathcal{T}_\alpha \subseteq \mathcal{T}$ zó dat:

- Voor alle α geldt dat $\mathcal{F}_\alpha$ en $\mathcal{G}_\alpha$ filters zijn op $\mathbb{N}$ en de verzameling $\mathcal{T}_\alpha$ onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{F}_\alpha$ en $\mathcal{G}_\alpha$.
- Er geldt dat $\mathcal{T}_0 = \mathcal{S} \setminus \{f, g\}$, $\mathcal{F}_0 = \langle \{A_{C,R} : R \in r \text{ en } C_j \subseteq A_j \text{ eindig voor } j \in R\} \rangle$ en $\mathcal{G}_0 = \langle \{B_{D,R} : R \in r \text{ en } D_j \subseteq B_j \text{ eindig voor } j \in R\} \rangle$.
- Voor elke $\kappa < \alpha$ geldt dat $\mathcal{F}_\kappa \subseteq \mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{G}_\kappa \subseteq \mathcal{G}_\alpha$, en $\mathcal{T}_\alpha \subseteq \mathcal{T}_\kappa$.
- Voor elke α geldt dat $|\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_\alpha| \leq |\alpha| \cdot |\mathbb{N}|$.
- Voor alle $\alpha \geq 1$ zijn er $A, B \subseteq \mathbb{N}$ met $\{A, \mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(B)\} \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ en $\{B, \mathbb{N} \setminus f_\alpha^{-1}(A)\} \subseteq \mathcal{G}_\alpha$.

Vervolgens zijn $\mathcal{F}' := \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha \supseteq \mathcal{F}_0 = \langle \{A_R : R \in r\} \rangle$ en $\mathcal{G}' := \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} \mathcal{G}_\alpha \supseteq \mathcal{G}_0 = \langle \{B_R : R \in r\} \rangle$ filters. Wegens gevolg 3.15 zijn er ultrafilters p en q , zodat p een uitbreiding is van $\mathcal{F}'$ en q van $\mathcal{G}'$. Dan zien we dat $p \not\leq q$ en $q \not\leq p$. Omdat $\{A_R : R \in r\}$ in p zit, geldt wegens lemma 6.2 $\beta f(p) = r$, dus dat $r \leq p$. En omdat $\{B_R : R \in r\}$ geldt ook dat $\beta g(q) = r$, dus $r \leq q$. Dit voltooit ons bewijs. $\square$

6.2 Constructie bovenkant ruit

Nu we de onderkant van de ruit hebben geconstrueerd gaan we de bovenkant maken. Om de bovenkant te maken zodanig dat we hem op de onderkant kunnen plakken, is het belangrijk dat we voor alle ultrafilters p en q een derde ultrafilter kunnen construeren t is zó dat $p \leq t$ en $q \leq t$. Zie het volgende lemma:

Stelling 6.5. *Laat p en q twee ultrafilters zijn, dan bestaat er een ultrafilter t zó dat $p \leq t$ en $q \leq t$.*

Bewijs. Laat f en g twee functies uit een familie $\mathcal{S}$ functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ van grote schommeling zijn, zó dat $|\mathcal{S}| = 2^{|\mathbb{N}|}$. Definieer vervolgens weer $A_i := f^{-1}(i)$ en $B_j := g^{-1}(j)$. Omdat $f, g \in \mathcal{S}$ geldt voor alle $i, j \in \mathbb{N}$ dat $A_i \cap B_j$ oneindig veel elementen heeft.

Vervolgens definiëren we voor $P \in p$ en $Q \in q$ de verzamelingen

$$A_P := \bigcup_{i \in P} A_i \quad \text{en} \quad B_Q := \bigcup_{i \in Q} B_i.$$

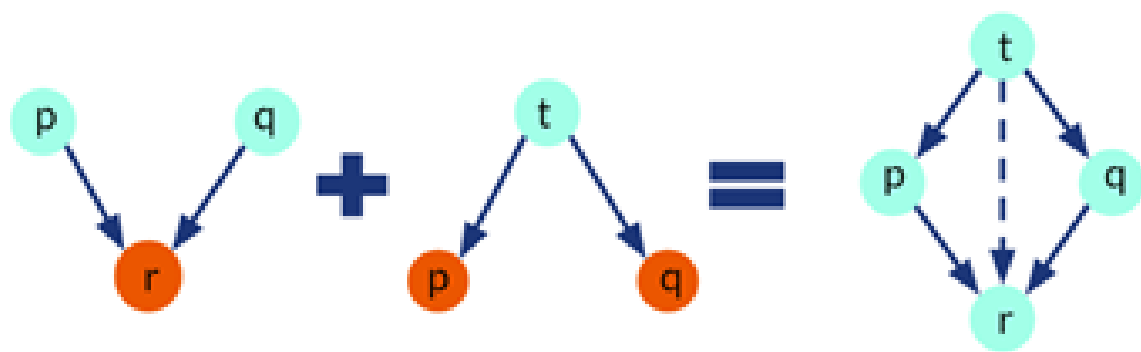
Dan geldt dat de familie $\{A_P \cap B_Q : P \in p, Q \in q\}$ een filterbasis is, want $\{A_P : P \in p\}$ en $\{B_Q : Q \in q\}$ zijn zelf filterbasissen. Daarnaast geldt dat $A_P \cap B_Q \neq \emptyset$ voor alle $P \in p$ en $Q \in q$. Laat $i \in P$ en $j \in Q$ geldt $A_i \subseteq A_P$ en $B_j \subseteq B_Q$. Dus $f^{-1}(i) \cap g^{-1}(j) = A_i \cap B_j \subseteq A_P \cap B_Q$. Omdat f en g uit een oneindige familie van grote schommeling komen, geldt dat $A_i \cap B_j$ niet leeg is, dus $A_P \cap B_Q$ is ook niet leeg.

Bekijk nu het filter $\langle \{A_P \cap B_Q : P \in p, Q \in q\} \rangle$ dat gegenereerd wordt door A_P en B_Q . Dit filter zit in een ultrafilter t en dat voldoet aan alle eisen, want $\beta f(t) = p$ en $\beta g(t) = q$. $\square$

6.3 Constructies samenvoegen

Nu we hebben gezien hoe we de ónder- en bovenkant van de ruit kunnen construeren, is het tijd om de hele ruit in elkaar te zetten. Laat r een willekeurig ultrafilter zijn. Wegens stelling 6.4 zijn er nu twee ultrafilters p en q zó dat $r \leq p$ en $r \leq q$ zodat p en q onafhankelijk zijn. Wegens stelling 6.5 is er nu een ultrafilter t zodat $p \leq t$ en $q \leq t$.

Nu willen we daarnaast graag dat de pijlen die we hebben, stiekem geen equivalentierelaties zijn. Gelukkig is dit niet het geval, omdat p en q onafhankelijk zijn. Stel namelijk dat $t \leq q$, dan krijgen we dat $p \leq t \leq q$, maar dit kan niet omdat p en q onafhankelijk zijn. Op eenzelfde manier kunnen we bewijzen dat $p \leq r$ niet kan. Want dan krijgen we dat $p \leq r \leq q$, maar dit is onmogelijk. Hierdoor weten we zeker dat de pijlen, maar een kant op staan en krijgen we het volgende plaatje:



Figuur 5: De onder- en de bovenkant op elkaar geplakt.

Referenties

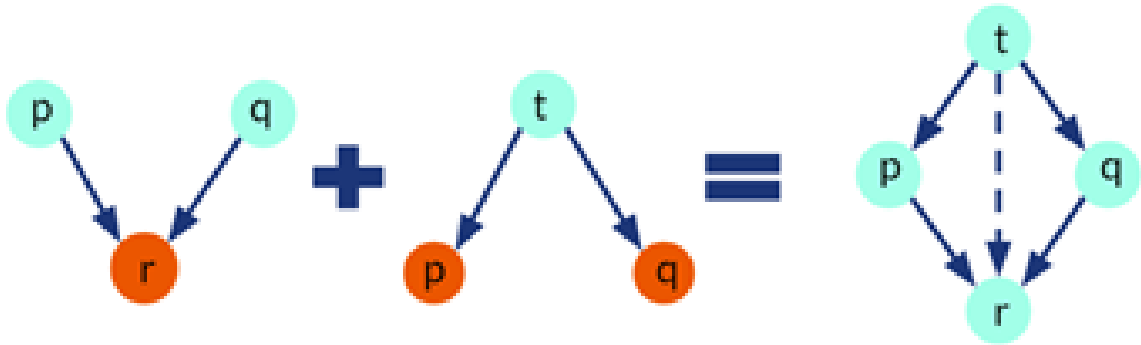
- [1] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *The Theory of Ultrafilters*. Springer-Verlag, 1974.
- [2] G. H. Hardy and C. P. Snow. *A Mathematician's Apology*. Canto. Cambridge University Press, 1992.
- [3] K. Kunen. Ultrafilters and independent sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 172:299–306, 1972.
- [4] K. Kunen and J.E. Vaughan. *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Elsevier Science Publishing Company, Inc, 1984.
- [5] J. van Mill. An introduction to $\beta\omega$. *Handbook of Set-Theoretic Topology* [4], pages 503–567, 1984.
- [6] Bedřich Pospíšil. Remark on bicomact spaces. *Annals of Mathematics*, pages 845–846, 1937.
- [7] Dominic van der Zypen. Mathoverflow: Finite pre-orders embeddable in the rudin-keisler ordering. <https://mathoverflow.net/questions/375365/finite-pre-orders-embeddable-in-the-rudin-keisler-ordering>. (bezocht: 14. 07. 2021).

Populaire samenvatting

Zoals de titel al verklapt, is het doel van dit project is om een ruit van ultrafilters te construeren. Een ultrafilter is een speciaal wiskundige term voor een bepaalde groep (familie), die bestaat uit groepjes getallen (verzamelingen). De ultrafilters worden in de het plaatje hieronder weergegeven als de hoekpunten van de ruit en zijn de bolletjes met een letter erin.

De zijden van de ruit worden aangegeven met pijlen, deze pijlen geven relaties aan tussen de bolletjes die op de uiteindes van de pijl staan. Als er een pijl van hoekpunt p naar hoekpunt r loopt dan noemen we p 'groter' dan r . Omdat t groter is dan p en p weer groter dan r , geldt in het plaatje hieronder ook dat t groter is dan r . Omdat deze pijl volgt uit de andere pijlen, wordt deze aangegeven met een stippellijn. Zoals je ziet, is er geen pijl tussen p en q . Dit betekent dat ze niet gelijk zijn aan elkaar en dat p niet groter is dan q én q niet groter is dan p . Oftewel, deze twee bolletjes zijn onvergelykbaar. Een voorbeeld van twee onvergelykbare begrippen is bijvoorbeeld de kleur blauw en een appel. Je kan immers niet zeggen welke groter is.

De constructie van de ruit bestaat uit twee delen. Eerst gaan we voor een willekeurig bolletje genaamd r twee bolletjes maken die groter zijn dan r en onderling onvergelykbaar zijn. Daarna gaan we voor twee willekeurige bolletjes een bolletje t maken dat groter is dan beide bolletjes. Tot slot plakken ze op elkaar en dan weten we dat t ook groter is dan r . In het plaatje hieronder wordt dit nog visueel weergegeven.



Figuur 6: Schets van het bewijs van de constructie van de ruit. De oranje bolletjes liggen vast en de blauwe bolletjes worden tijdens het bewijs op basis van de oranje bolletjes geconstrueerd.

A Willekeurige eindige partiële ordeningen

Nadat we de ruit met ultrafilters hadden geconstrueerd, wilden we graag ook andere eindige partiële ordeningen maken. Het doel was om de normale kubus te construeren en vanuit daar ook alle n -dimensionale kubussen. Nu vraag je je misschien af, waarom zouden we juist alle n -dimensionale kubussen willen construeren en geen andere partiële ordeningen? Dit heeft ermee te maken dat elke eindige partiële ordening in een n -dimensionale kubus terug te vinden is. Zie de volgende stelling:

Stelling A.1. *Elke eindige partiële ordening zit in een n -dimensionale kubus.*

Bewijs. Laat $\mathbb{P}$ een eindige partiële ordening zijn. Voor elke $x \in \mathbb{P}$ definiëren we $V(x) := \{y : y \leq x\}$. Dan geldt dat $x \mapsto V(x)$ een inbedding is van $\mathbb{P}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{P})$, wat de $|\mathbb{P}|$ -dimensionale kubus is. Daarnaast geldt $x \leq y \Leftrightarrow V(x) \subseteq V(y)$, want $x \in V(x)$. $\square$

Dus als we een willekeurige partiële ordening willen maken, dan kunnen we ook eerst de n -dimensionale kubus kunnen construeren en vervolgens alle overbodige punten weg kunnen gumen, totdat we de gewenste ordening over hebben. Helaas is het tijdens dit project niet gelukt om de n -dimensionale kubus te helemaal construeren. Daarom bestaat de rest van de appendix uit een soort logboek, waarin allemaal pogingen staan die ik geprobeerd heb om de 3- en n -dimensionale kubus te construeren. Hier en daar zijn de bewijzen van de lemma's niet helemaal netjes uitgewerkt om het verhaal beter leesbaar te maken.

B Het frame van het bewijs voor de n -dimensionale kubus

In deze paragraaf wordt verteld hoe je, op de stap van transfinitie inductie na, de n -dimensionale kubus zou kunnen maken. In dit stuk wordt verteld over 4 delen uit het bewijs: de algemene opzet van de kubus, de inductiebasis, zogenaamde speciale verbindingen en tot slot over het bovenste ultrafilter. Vooral het gedeelte over speciale verbindingen is handig, omdat dit ervoor zorgt dat je een stuk minder verbindingen tijdens de inductiestap moet doorbreken. Maar eerst gaan we het hebben over de algemene opzet van een n -dimensionale kubus.

B.1 Opzet van een n -dimensionale kubus

We identificeren de n -dimensionale kubus met de machtsverzameling $\mathcal{P}([n])$, waarbij $[n] = \{1, \dots, n\}$. Voor elk van de verzamelingen $Z \in \mathcal{P}([n])$ gaan we een ultrafilter p_Z maken, zodat $p_Y \preceq p_Z$ in de Rudin-Keislerordening dan en slechts dan als $Y \subseteq Z$. Als we deze partiële ordening als Hasse-diagram gaan tekenen zien we dat we een n dimensionale kubus krijgen. Er loopt in het Hasse-diagram namelijk een pijl van Y naar Z dan en slechts dan als er een $y \in Y$ is zodat $Z = Y \setminus \{y\}$. Hierdoor krijgen we het volgende lemma:

Lemma B.1. *Er is gericht pad in het Hasse-diagram van p_Y naar p_Z dan en slechts dan als $Z \subseteq Y$.*

Bewijs. $\Leftarrow$ Elke pijl gaat van een verzameling Y naar $Y \setminus \{y\}$ voor een $y \in Y$. Dit betekent dat als we na een aantal pijlen van p_Y naar p_Z zijn gelopen, dat dan geldt $Y = Z \cup \{y_1, \dots, y_n\}$ oftewel $Y \subseteq Z$.

$\Rightarrow$ We weten dat er een pijl van Y naar $Y \setminus \{y\}$ is voor elke $Y \in \mathcal{P}([n])$ en $y \in Y$. Door de elementen uit $Y \setminus Z$ op volgorde te zetten en iedere keer de pijl te nemen dat dat element eruit gooit, komen we uit bij Z . $\square$

Laat $\mathcal{S}$ een familie functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ zijn met grote schommeling zodanig dat $|S| = 2^{|\mathbb{N}|}$. Wegens stelling 4.5 bestaat er zo'n familie functies. Vervolgens koppelen we voor elk van de pijlen van onze n -dimensionale kubus aan exact één functie uit onze familie $\mathcal{S}$. De functie die we aan de pijl van p_Y naar p_Z sturen noemen we $f_{(Y,Z)}$ en deze functie heeft uiteindelijk de eigenschap dat $\beta f_{(Y,Z)}(p_Y) = p_Z$. Omdat er alleen een pijl van Y naar Z loopt als $Y = Z \cup \{y\}$, kunnen we elk van deze functies ook schrijven als $f_{(Y,Y \setminus y)}$ met $y \in Y$. Hierbij laten we de accolades om het element y weg, om de notatie iets duidelijker te houden. Omdat de n -dimensionale kubus $\frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}$ ribben heeft, blijven er nog $2^{|\mathbb{N}|}$ functies over die niet gekoppeld worden. De verzameling van deze functies noemen we S_0^0 .

We willen de n -dimensionale kubus van ultrafilters op zo'n manier construeren dat er uiteindelijk een gericht pad van p_Y naar p_Z in het Hasse-diagram is dan en slechts dan als $p_Z \preceq p_Y$. Als er een gericht pad van p_Y naar p_Z is, dan zijn er wegens onze constructie functies $f_{(Y,Y_1)}, f_{(Y_1,Y_2)}, \dots, f_{(Y_n,Z)}$ die corresponderen met de pijlen. Dan geldt dat

$$(\beta f_{(Y_n,Z)} \circ \dots \circ \beta f_{(Y_2,Y_1)} \circ \beta f_{(Y_1,Y)})(Y) = Z,$$

oftewel $p_Z \preceq p_Y$. Dus dit zorgt ervoor dat de ene kant van de implicatie waar is. Om de implicatie van rechts naar links ook waar te laten zijn, moeten we ervoor zorgen dat p_Y en p_Z onafhankelijk zijn als er geen gericht pad is tussen de punten p_Y en p_Z in het Hasse-diagram.

Om het bewijs wat beter leesbaar te maken, gaan we onze kubus in lagen opdelen. De nulde laag bestaat uit een willekeurig vrij ultrafilter $p_\emptyset$. De eerste laag bestaat uit alle ultrafilters p_Z zodat de verzameling Z precies één element heeft, de tweede laag uit alle p_Z zodat de verzameling Z twee elementen heeft en ga zo maar door. In het bijzonder bestaat de i -ide laag uit alle p_Z zodat Z exact i elementen heeft. Omdat er in totaal $\binom{n}{i}$ deelverzamelingen zijn van $[n]$ met i elementen, bestaat de i -de laag uit exact $\binom{n}{i}$ ultrafilters.

Nu we weten hoe de n -dimensionale kubus eruit moet komen te zien, is het tijd om deze te construeren. Dit gaan we doen door middel van transfinitie inductie. We weten dat er in totaal $\mathfrak{c} = 2^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}|$, verschillende functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ zijn. Deze kunnen we met de welordeningsstelling van Zermelo 2.3 welordenen, hierdoor krijgen we de verzameling functies $\{g_\alpha : 1 \leq \alpha \leq \mathfrak{c}\}$. Het idee is dat we transfinitie inductie gaan doen naar α , waarin we er in stap α voor gaan zorgen dat er geen ‘speciale’ extra verbindingen kunnen ontstaan via de functie g_α . Wat deze speciale verbindingen zijn en hoe we dit precies gaan doen, wordt later in dit hoofdstuk uitgelegd.

Het is wel handig om alvast de volgende notatie in te voeren: het filter $F_{Z,\alpha}^k$ correspondeert met een filter op het hoekpunt Z tijdens de stap van functie g_α . De k geeft aan hoeveel we van de speciale verbindingen met g_α doorbroken hebben. Per definitie staat aan het begin van elke stap de teller op 0. Op eenzelfde manier gebruiken we ook de notatie $\mathcal{S}_\alpha^k$. Dit is de geüpdate versie van $\mathcal{S}_0^0$ zodat $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}_\alpha^k\}$ onafhankelijk is ten opzichte van alle filters $F_{Z,\alpha}^k$.

B.2 Inductiebasis

Nu we een globaal idee hebben van hoe onze kubus eruit moet komen te zien, gaan we beginnen met de inductiebasis van onze transfinitie inductie. Het doel van de inductiebasis is om aan elk hoekpunt een startfilter $F_{Z,0}^0$ toevoegen. Dit gaan we laag voor laag doen tot dat we bovenin de kubus zijn aangekomen. We beginnen onderaan met een willekeurig vrij ultrafilter $p_\emptyset$. Laat $Z \subseteq [n]$ met $|Z| = 1$ en $f_{(Z,\emptyset)}$ de functie uit onze familie van grote schommeling $\mathcal{S}$. Dan nemen we

$$\mathcal{A}_{f_{(Z,\emptyset)},0}^0 := \left\{ A_R = \bigcup_{j \in R} f_{(Z,\emptyset)}^{-1}(j) \text{ voor } R \in p_\emptyset \right\}$$

als filterbasis en $F_{Z,0}^0 = \langle \mathcal{A}_{f_{(Z,\emptyset)},0}^0 \rangle$ als het beginfilter. Wegens lemma 6.2 weten we dat voor elk ultrafilter $p_{\{k\}}$ dat $F_{\{k\},0}^0$ uitbreidt, geldt dat $\beta f_{(Z,\emptyset)}(p_{\{k\}}) = p_\emptyset$. Oftewel voor deze $p_{\{k\}}$ geldt dat $p_\emptyset \preceq p_{\{k\}}$ voor alle $k \in [n]$. Hierdoor kloppen na onze inductiebasis sowieso alle verbindingen tussen laag 0 en laag 1.

Veronderstel dat we beginfilters hebben voor alle ultrafilters die op laag i moeten komen, dan gaan we nu de beginfilters voor alle verzamelingen Z op laag $i+1$ construeren. We nummeren de elementen van Z , zo krijgen we de verzameling $Z = \{z_1, \dots, z_{i+1}\}$. Dan zijn wegens onze constructie $f_{(Z,Z \setminus z_1)}, \dots, f_{(Z,Z \setminus z_{i+1})}$ de functies zijn die uiteindelijk p_Z naar een ultrafilter op laag i sturen. Om duidelijk te maken welke functie we steeds gebruiken voor de A_R , definiëren we

$$A_{R,f} = f^{-1}[R].$$

Analoog definiëren we

$$\mathcal{A}_{f_{(Z,Y)},0}^0 := \left\{ A_{R,f_{(Z,Y)}} = \bigcup_{j \in R} f_{(Z,Y)}^{-1}(j) \text{ voor } R \in F_{Y,0}^0 \right\}.$$

De α geeft zoals gewoonlijk aan welke functie g_α we bekijken en de k geeft aan hoe ver we binnen deze stap zijn. Dan nemen we vervolgens

$$F_{Z,0}^0 = \left\langle \bigcup_{j=1}^{i+1} \mathcal{A}_{f_{(Z,Z \setminus z_j)},0}^0 \right\rangle.$$

We gaan laten zien dat $\bigcup_{j=1}^{i+1} \mathcal{A}_{f_{(Z,Z \setminus z_j)},0}^0$ aan de eindige-doorsnede-eigenschap voldoet en dat het daarom een filtersubbasis is. Hieruit kunnen we dan concluderen dat $F_{Z,0}^0$ een filter is.

Lemma B.2. $\bigcup_{j=1}^{i+1} \mathcal{A}_{f_{(Z, Z \setminus z_j)}, 0}^0$ is een filtersubbasis.

Bewijs. Laat $A^1, \dots, A^i$ met $A^j \in \mathcal{A}_{f_{(Z, Z \setminus z_j)}, 0}^0$ willekeurig. We weten dat er voor elke A^j van de vorm $A_{R^j, f_{(Z, Z \setminus z_j)}}$ is. We weten dat er een getal $m_j \in R^j$ zit, dus $f_{(Z, Z \setminus z_j)}^{-1}(m_j) \subseteq A^j$. Als we dit gebruiken, vinden we dat

$$\bigcap_{j=1}^{i+1} A^j \supseteq \bigcap_{j=1}^{i+1} f_{(Z, Z \setminus z_j)}^{-1}(m_j) = \bigcap_{j=1}^{i+1} f_{(Z, Z \setminus z_j)}^{-1}(m_j).$$

De functie $f_{(Z, Z \setminus z_j)}$ komt uit een oneindige familie van grote schommeling, dus $\bigcap_{j=1}^i f_{(Z, Z \setminus z_j)}^{-1}(m_j)$ is niet leeg. In het bijzonder volgt hieruit dat $\bigcap_{j=1}^{i+1} A^j$ niet leeg is. In combinatie met het feit dat elke $\mathcal{A}_{f_{(Z, Z \setminus z_j)}, 0}^0$ een filterbasis is, geeft dit wegens stelling 3.11 dat $\bigcup_{j=1}^i \mathcal{A}_{f_{(Z, Z \setminus z_j)}, 0}^0$ een filtersubbasis is. $\square$

Nu we alle beginfilters $F_{Z,0}$ hebben geconstrueerd, is het tijd om een onafhankelijke familie van verzamelingen te vinden. De familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}_0^0\}$ met $X_h^i = h^{-1}(\{n : n \equiv i \pmod{2}\})$ blijkt onafhankelijk ten opzichte van alle onze beginfilters.

Lemma B.3. De familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}_0^0\}$ is onafhankelijk ten opzichte van $F_{Z,0}$ voor alle $Z \in \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$.

Bewijs. Laat Z een willekeurig element uit $\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ zijn. Dan zit Z op laag $i \geq 1$ en dus kunnen we Z schrijven als $\{z_1, \dots, z_i\}$. Wegens onze beginconstructie van de ruit geldt dat $F_{Z,0}^0 = \left\langle \bigcup_{j=1}^i \mathcal{A}_{f_{(Z, Z \setminus z_j)}, 0}^0 \right\rangle$ met $f_{(Z, Z \setminus z_1)}, \dots, f_{(Z, Z \setminus z_i)}$ uit de verzameling van grote schommeling. Laat $F' \in F_{Z,0}^0$ willekeurig, $\sigma \subseteq \mathcal{S}_0^0$ eindig en $g : \sigma \rightarrow \{1, 2\}$ willekeurig. We weten dat alle functies in σ en de functies $f_{(Z, Z \setminus k_1)}, \dots, f_{(Z, Z \setminus k_i)}$ allemaal in dezelfde oneindige verzameling $\mathcal{S}_0^0$ van grote schommeling zitten. Omdat $F' \in F_{Z,0}^0$ weten we dat er $A_{R, f_{(Z, Z \setminus z_j)}}$ bestaan zodat $\bigcap_{j=1}^n A_{R, f_{(Z, Z \setminus z_j)}} \subseteq F'$. Daarnaast is er voor alle j een element $m_j \in R$ zit en daarvoor geldt $f_{(Z, Z \setminus z_j)}^{-1}(m_j) \subseteq A_{R, f_{(Z, Z \setminus z_j)}}$. Als we dit gebruiken vinden we dat

$$\bigcap_{j=1}^i f_{(Z, Z \setminus z_j)}^{-1}(m_j) \cap \bigcap_{h \in \sigma} h^{-1}(g(h)) \subseteq \bigcap_{j=1}^i A_{R, f_{(Z, Z \setminus z_j)}} \cap \bigcap_{h \in \sigma} X_h^{g(h)} \subseteq F' \cap \bigcap_{h \in \sigma} X_h^{g(h)}$$

Omdat $\mathcal{S}$ een oneindige familie van grote schommeling geldt dat de linkerverzameling niet leeg is en dus de rechter ook niet. Hieruit volgt dat de familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}_0^0\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $F_{Z,0}$ voor alle $Z \in \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$. $\square$

Dit voltooit onze inductiebasis, waarin we een rooster van beginfilters hebben geconstrueerd met een onafhankelijke familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}_0^0\}$. En zodat de verbindingen van de functies $f_{(Z,Y)}$ nog niet verbroken zijn.

B.3 Speciale verbindingen

Zoals eerder aangekondigt gaan we in de inductiestap alleen de zogenaamde ‘speciale’ verbindingen verbreken. Dit zijn alle verbindingen van $p_{[n] \setminus k}$ naar $p_{\{k\}}$. Het blijkt dat als we deze doorbreken en alle verbindingen die we willen behouden, we door middel van transitiviteit van de Rudin-Keislerordering en daarmee ook van de pijlen, ook alle andere ongewenste verbindingen hebben doorbroken. Dit wordt bewezen in de volgende stelling:

Stelling B.4. Als voor alle $Y, Z \subseteq [n]$ zodat $Y \subseteq Z$ geldt dat $p_Y \preceq p_Z$ en als voor alle $k = 1, \dots, n$ geldt dat $p_{\{k\}} \not\preceq p_{[n] \setminus k}$ voor alle $k = 1, \dots, n$. Dan geldt voor alle $Z_1, Z_2 \subseteq [n]$ zodat $Z_1 \not\subseteq Z_2$ dat $p_{Z_1} \not\preceq p_{Z_2}$.

Bewijs. Als $Z_1 \not\subseteq Z_2$ dan is er een $k \in [n]$ zodat $k \in Z_1$ en $k \notin Z_2$. Dus geldt dat $\{k\} \subseteq Z_1$ en $Z_2 \subseteq [n] \setminus \{k\}$. Hieruit volgt dat $p_{\{k\}} \preceq p_{Z_1}$ en $p_{Z_2} \preceq p_{[n] \setminus \{k\}}$. Als $p_{Z_1} \preceq p_{Z_2}$, dan volgt met transitiviteit dat $p_{\{k\}} \preceq p_{Z_1} \preceq p_{Z_2} \preceq p_{[n] \setminus \{k\}}$. Dit is een tegenspraak. $\square$

Hieruit volgt dat als $Y \not\subseteq Z$ en $Z \not\subseteq Y$ dat dan p_Y en p_Z onafhankelijk zijn, want $p_Y \not\preceq p_Z$ en $p_Z \not\preceq p_Y$. Hieruit volgt dat het voldoende is om alleen de verbindingen tussen $p_{[n] \setminus \{k\}}$ en p_k voor $k = 1, \dots, n$ expliciet te verbreken, als we er tegelijkertijd voor zorgen dat onze oorspronkelijke verbindingen intact blijven. Nu we weten dat we alleen deze verbindingen moeten verbreken, is het tijd om te kijken naar de inductiestap waarin we dit gaan doen.

B.4 Het bovenste ultrafilter

We kunnen de volgende veralgemenisering van stelling 6.5 bewijzen.

Stelling B.5. *Laat $p_1, \dots, p_n$ willekeurige ultrafilters zijn. Dan bestaat er een ultrafilter t , zó dat $p_i \preceq t$ voor alle $i = 1, \dots, n$.*

Bewijs. Laat $f_1, \dots, f_n$ functies zijn van $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uit een familie $\mathcal{S}$ van grote schommeling met grootte $2^{|\mathbb{N}|}$. Vervolgens definiëren we $A_{P_i} = \bigcup_{j \in P_i} f_i^{-1}(j)$. Vervolgens kijken we naar de familie verzamelingen

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^n A_{P_i} : P_i \in p_i \right\}.$$

Dit is een filterbasis: Laat $P_i \in p_i$ voor $i = 1, \dots, n$ willekeurig. $m_i \in P_i$ willekeurig, dan geldt

$$\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(m_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_{P_i}.$$

Omdat de functies $f_1, \dots, f_n$ uit een familie van grote schommeling komen, geldt dat de linker kant niet-leeg is. Dus geldt ook dat $\bigcap_{i=1}^n A_{P_i}$ niet leeg is. Omdat elk van de families $\{A_{P_i} : P_i \in p_i\}$ een filterbasis is, is nu ook $\{\bigcap_{i=1}^n A_{P_i} : P_i \in p_i\}$ een filterbasis.

Bekijk het filter $\mathcal{F} = \langle \{\bigcap_{i=1}^n A_{P_i} : P_i \in p_i\} \rangle$ en laat t een willekeurig filter zijn dat $\mathcal{F}$ uitbreidt. Dan geldt voor alle $i = 1, \dots, n$ dat $f_i^{-1}(P_i) = A_{P_i} \in t$, oftewel dat $\beta f_i(t) = p_i$. Dus geldt dat $p_i \preceq t$ voor alle $i = 1, \dots, n$. $\square$

Op basis van deze stelling kunnen we $p_{[n]}$ dus altijd helemaal op het einde boven op onze constructie plakken. Hierdoor hoeven we dit ultrafilter niet tegelijkertijd met de andere ultrafilters te construeren. We kunnen immers ook op het einde bovenop plaatsen. Dit doen we door voor p_k het ultrafilter $p_{[n] \setminus \{k\}}$ te pakken en vervolgens $p_{[n]} = t$. Dan voldoet dit nieuwe ultrafilter aan alle relaties waaraan $p_{[n]}$ moet voldoen:

- Laat $Z \subsetneq [n]$, dan is er een k zodat $Z \subseteq [n] \setminus \{k\}$. Dan geldt dat $p_Z \preceq p_{[n] \setminus \{k\}} \preceq t = p_{[n]}$, zoals gewenst.
- Laat $Z \subsetneq [n]$, dan is er een k zodat $[n] \setminus \{k\} \not\subseteq Z$. Er is immers een element in $[n]$ dat niet in Z zit en elk ander element voldoet als k . Stel dat $p_{[n]} \preceq p_Z$, dan geldt ook dat $p_{[n] \setminus \{k\}} \preceq p_{[n]} \preceq p_Z$. Maar dit is in tegenspraak met de eigenschappen van p_Z en $p_{[n] \setminus \{k\}}$. Hieruit volgt dat $p_{[n]} \not\preceq p_Z$ voor alle $Z \subsetneq [n]$.

C Transfinitie inductie en filters uitbereiden tot ultrafilters

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar verreweg het lastigste gedeelte van het bewijs de transfinitie inductie. Het idee wat hier wordt uitgewerkt, is om een variant van het bewijs van stellingen 6.4 en 5.14 te gebruiken.

Dit betekent dat we alle functies $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gaan (wel)ordenen $\{g_\alpha : 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$. Vervolgens gaan we er op stap α ervoor zorgen dat de functie g_α niet een van de n zogenaamde speciale verbindingen kan zijn. Omdat er n speciale verbindingen zijn, is het (waarschijnlijk) handig om deze een voor een te doorbreken. Dit willen we op zo'n manier doen, dat alle gewenste relaties intact blijven.

Hier zit de moeilijkheid, want waar we in stelling 6.4 er van te voren voor konden zorgen dat de verbindingen intact kunnen blijven, is dat hier niet het geval. Als we namelijk van te voren zeker willen weten dat alle gewenste verbindingen tussen ultrafilters op laag i en $i + 1$ blijven bestaan, moeten de ultrafilters op laag i al van te voren vastliggen. Hierdoor is er geen familie die onafhankelijk is van de (ultra)filters op laag i . Als $X_h^1 \cap X_h^2 = \emptyset$, dan geldt dat minimaal een van de twee niet in het ultrafilter zit. Voor deze verzameling geldt dat er een verzameling A in het ultrafilter is, zodat hun doorsnede leeg is. Dit maakt het onmogelijk om een onafhankelijke familie op te stellen.

We weten dat als f een functie is, zodat $f(p_Y) = p_Z$ dan geldt

$$\forall P \in p_Y : f[P] \in p_Z \text{ en } \forall Q \in p_Z : f^{-1}(Q) \in p_Y.$$

Het is daarom logisch om in de inductieaanname te eisen dat aan ten minste een van deze voorwaarden voldaan moet worden voor alle $\mathcal{F}_{Y,\alpha}^k$ en $\mathcal{F}_{Z,\alpha}^k$.

De optie die het best verkend is, is alleen om te eisen dat voor alle $P \in \mathcal{F}_{Y,\alpha}^k$ geldt dat $f[P] \in \mathcal{F}_{Z,\alpha}^k$. In de volgende paragraaf staan een aantal lemma's die tijdens deze poging bewezen zijn net als een kort voorbeeld wat aangeeft dat de inductiehypothese waarschijnlijk te zwak is.

C.1 Lemma's voor variant inductiehypothese alleen beelden toevoegen

We beginnen met het bewijzen dat we elke verzameling van de vorm $\bigcap_{i=1}^n X_{h_i}^{i_n}$ aan elk filter $\mathcal{F}_{Z,\alpha}^k$ kunnen toevoegen als de verzamelingen $X_{h_i}^{i_n}$ in de familie zit, die onafhankelijk is ten opzichte van alle filters.

Lemma C.1. *Laat $\mathcal{F}$ een filter zijn, zodat de familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S\}$ onafhankelijk is ten opzichte van dit filter. Dan geldt dat voor alle eindige verzamelingen $K \subseteq S$ en functies $g : K \rightarrow \{1, 2\}$ geldt dat $\langle \mathcal{F} \cup \{X_h^{g(h)} : h \in K\} \rangle$ een filter is en dat de familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S \setminus K\}$ onafhankelijk is ten opzichte van dit filter.*

Bewijs. Omdat $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{F}$, geldt dat voor alle $F \in \mathcal{F}$ en voor alle eindige verzamelingen $K \subseteq S$ en functies $g : K \rightarrow \{1, 2\}$ dat

$$F \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \neq \emptyset.$$

Omdat $\mathcal{F}$ een filter is, volgt hieruit dat de verzameling $\mathcal{F} \cup \{X_h^{g(h)} : h \in K\}$ aan de eindige-doorsnede-eigenschap voldoet. Hieruit volgt dat $\langle \mathcal{F} \cup \{X_h^{g(h)} : h \in K\} \rangle$ een filter is.

Laat $L \subseteq S \setminus K$ eindig en $g' : L \rightarrow \{1, 2\}$ een willekeurige functie. Dan geldt voor alle $G \in \langle \mathcal{F} \cup \bigcup_{h \in K} X_h^{g(h)} \rangle$ dat er een $F \in \mathcal{F}$ is en $K' \subseteq K$, zodat $F \cap \{X_h^{g(h)} : h \in K\} \subseteq G$. Als we dit invullen krijgen we dat

$$G \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g'(h)} \supseteq F \cap \bigcap_{h \in K'} X_h^{g(h)} \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g'(h)}.$$

Omdat K' en L beide eindig zijn, is $K' \cup L$ ook eindig. Als we dit combineren met het feit dat K en L disjunct zijn en het feit dat $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{F}$, krijgen we dat de rechter verzameling niet leeg is. Dus $G \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g'(h)} \neq \emptyset$. Wegens de definitie van een onafhankelijke familie, geldt dat $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S \setminus K\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\langle \mathcal{F} \cup \{X_h^{g(h)} : h \in K\} \rangle$. $\square$

Het idee is nu als volgt: we gaan de verzameling A die we aan het filter toevoegen kleiner maken, door de doorsnede van steeds meer X_h^i te nemen. Op deze manier wordt $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)$ groter. Hierdoor worden de beelden van $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)$, die we aan filters $F_{Y,\alpha}^k$ willen toevoegen ook alleen maar groter. Hierdoor werken alle verbindingen die voor A werkte ook voor de nieuwe verzameling; de filters worden immers alleen maar kleiner.

Lemma C.2. *Laat $\mathcal{F}$ een filter zijn en A een willekeurige verzameling, zodat $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$ een filter is. Als B nu een verzameling is zodat $A \subseteq B$, dan geldt dat $\langle \mathcal{F} \cup \{B\} \rangle$ ook een filter is. Als daarnaast geldt dat een familie verzamelingen $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S\}$ onafhankelijk is ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$, dan is deze familie ook onafhankelijk ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{F} \cup \{B\} \rangle$.*

Bewijs. Laat $F \in \mathcal{F}$ dan geldt dat $F \cap B \supseteq F \cap A \neq \emptyset$, omdat $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$ een filter is. In combinatie met het feit dat $\mathcal{F}$ een filter is, volgt hieruit dat $\mathcal{F} \cup \{B\}$ aan de eindige-doorsnede-eigenschap voldoet en dat daarom $\langle \mathcal{F} \cup \{B\} \rangle$ een filter is.

Laat $K \subseteq S$ eindig, en $g : K \rightarrow \{1, 2\}$ willekeurig, dan geldt voor alle $F \in \mathcal{F}$ dat

$$B \cap F \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \supseteq A \cap F \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \neq \emptyset,$$

omdat $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S\}$ onafhankelijk is ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$. Hieruit volgt dat de familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S\}$ onafhankelijk is ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{F} \cup \{B\} \rangle$. $\square$

Na deze twee lemma's is het tijd om de inductiestap te gaan bewijzen. In de inductiestap moeten we zorgen dat we alle beelden van $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)$ aan alle filters onder $F_{[n] \setminus k, \alpha}^k$ toevoegen. Dit gaan we doen door naar alle gerichte paden van dit filter naar andere filters in onze n -dimensionale kubus te bekijken. We zeggen dat een pad $[n] \setminus k, Y_1, \dots, Y_n$ goed is, als het beeld van $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)$ via de functies van dit pad aan alle filters kan worden toegevoegd.

We gaan nu de paden in de volgorde van een 'Breadth First Search' zetten. Dus we komen eerst alle paden tegen van lengte 1, dan die van lengte 2, etc. Vervolgens gaan we deze paden nummeren van $1, \dots, m$, waarbij m eindig getal is; er zijn immers maar eindig veel pijlen in ons diagram. Hieruit volgt dat als P_1 een deelpad is van P_2 , dat we dan P_1 hebben gehad voordat we bij P_2 aankomen. Vervolgens gaan we in de inductiestap van de transfinitie inductie met inductie bewijzen dat we alle paden goed kunnen maken. Voordat we dit gaan bewijzen, gaan we eerst kijken welke verzamelingen we volgens het pad allemaal moeten toevoegen.

Lemma C.3. *Laat $f_0, f_1, \dots, f_n$ functies en A en B en $F^1, \dots, F^n$ verzamelingen, zijn dan geldt dat*

$$f_n [F^n \cap f_{n-1} [F^{n-1} \cap \dots \cap f_1 [F^1 \cap f_0 [A]] \dots]] \cup f_n [F^n \cap f_{n-1} [F^{n-1} \cap \dots \cap f_1 [F^1 \cap f_0 [A]] \dots]] \\ = f_n [F^n \cap f_{n-1} [F^{n-1} \cap \dots \cap f_1 [F^1 \cap f_0 [A \cup B]] \dots]] .$$

Bewijs. Dit krijg je door het gewoon uit te schrijven (eventueel met inductie naar n). $\square$

Lemma C.4. *Laat $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ filters zijn en $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een functie voor $i = \{1, \dots, n-1\}$, zodat voor alle $F^i \in \mathcal{F}_i$ geldt dat $f_i[F^i] \in \mathcal{F}_{i+1}$. Laat A een willekeurige verzameling zijn, zodat $\mathcal{F}'_1 := \langle \mathcal{F}_1 \cup A \rangle$ een filter is, net als de families $\mathcal{F}'_{i+1} = \langle \mathcal{F}_{i+1} \cup \{f_i[F^i] : F^i \in \mathcal{F}'_i\} \rangle$ voor $i = 1, \dots, n-1$.*

Dan geldt dat voor een willekeurige verzameling in $X \in \mathcal{F}'_n$ er $F^i \in \mathcal{F}_i$ voor $i = 1, \dots, n$ bestaan, zodat

$$X \supseteq F^n \cap f_{n-1} [F^{n-1} \cap f_{n-2} [F^{n-2} \cap \dots \cap f_2 [F^2 \cap f_1 [F^1 \cap A]] \dots]] .$$

Bewijs. Dit kan je het beste bewijzen met inductie naar n . $\square$

Nu we weten wat voor verzamelingen we allemaal moeten toevoegen om een pad goed te maken, is het tijd voor de inductiestap. Laat P_i een pad zijn dat uiteindelijk vanaf $p_{[n] \setminus k}$ naar p_Z gaat lopen. We hakken de laatste pijl eraf, dan krijgen we een ander pad Q . Omdat dit een deelpad van P_i is, hebben we dit pad al gezien en is het dus goed. Dit betekent dat we alleen moeten zorgen dat het ook voor de laatste pijl goed gaat. Als we dit zo algemeen mogelijk formuleren, krijgen we het volgende lemma.

Lemma C.5. *Laat $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ filters zijn en $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een functie voor $i = \{1, \dots, n-1\}$, zodat voor alle $F^i \in \mathcal{F}_i$ geldt dat $f_i[F^i] \in \mathcal{F}_{i+1}$. Laat $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S\}$ een familie verzamelingen zijn, die onafhankelijk is ten opzichte van alle filters.*

Zij A een willekeurige verzameling, zodat

- $\mathcal{F}'_1 := \langle \mathcal{F}_1 \cup A \rangle$ een filter is, net als de families $\mathcal{F}'_{i+1} = \langle \mathcal{F}_{i+1} \cup \{f_i[F^i] : F^i \in \mathcal{F}'_i\} \rangle$ voor $i = 1, \dots, n-2$.
- Er een eindige $K \subseteq S$ bestaat, zodat $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S \setminus K\}$ onafhankelijk is ten opzichte van deze nieuwe filters $\mathcal{F}'_i$ voor $i = 1, \dots, n-1$.

Laat $B, C \subseteq \mathbb{N}$ twee verzamelingen zijn, zodat $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$. Dan voldoet de verzameling $A \cup B$ of $A \cup C$ aan dezelfde eisen als A en daarnaast is $\mathcal{F}_n^X = \langle \mathcal{F}_n \cup \{f_{n-1}[F] : F \in \mathcal{F}_{n-1}^X\} \rangle$ een filter, zodat er een eindige $L \subseteq S \setminus K$ is, zodat de familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S \setminus (K \cup L)\}$ onafhankelijk is ten opzichte van al deze nieuwe filters.

Bewijs. Merk dat $\mathcal{F}_i^X \subseteq \mathcal{F}_i'$ voor $X \in \{B, C\}$, omdat $A \subseteq A \cup B$ en $A \subseteq A \cup C$. Hieruit volgt dat beide verzamelingen aan alle eisen van A voldoen, je maakt de filters immers alleen maar kleiner.

Stel dat de verzameling $A \cup B$ niet aan de twee extra eisen voldoet. Dan is er een zekere $F \in \mathcal{F}_n^B$ en een eindige $L \subseteq S \setminus K$ en een functie $g : L \rightarrow \{1, 2\}$ zodat

$$F \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g(h)} = \emptyset. \quad (*)$$

We weten wegens lemma C.4 dat er $F^i \in \mathcal{F}_i$ zijn, zodat

$$F \supseteq F^n \cap f_{n-1} [F^{n-1} \cap f_{n-2} [F^{n-2} \cap \dots \cap f_2 [F^2 \cap f_1 [F^1 \cap (A \cup B)]] \dots]].$$

Hieruit volgt dat

$$F^n \cap f_{n-1} [F^{n-1} \cap f_{n-2} [F^{n-2} \cap \dots \cap f_2 [F^2 \cap f_1 [F^1 \cap (A \cup B)]] \dots]] \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g(h)} = \emptyset.$$

Laat nu $G \in \mathcal{G}_n^C$ willekeurig, dan geldt dat

$$G \supseteq G^n \cap f_{n-1} [G^{n-1} \cap f_{n-2} [G^{n-2} \cap \dots \cap f_2 [G^2 \cap f_1 [G^1 \cap (A \cup C)]] \dots]].$$

Definieer nu $D^i = F^i \cap G^i$ voor alle $i = 1, \dots, n-1$. Dan geldt dat $D^i \in \mathcal{F}_i$ voor alle i en

$$\begin{aligned} F &\supseteq D^n \cap f_{n-1} [D^{n-1} \cap f_{n-2} [D^{n-2} \cap \dots \cap f_2 [D^2 \cap f_1 [D^1 \cap (A \cup B)]] \dots]] \\ G &\supseteq D^n \cap f_{n-1} [D^{n-1} \cap f_{n-2} [D^{n-2} \cap \dots \cap f_2 [D^2 \cap f_1 [D^1 \cap (A \cup C)]] \dots]]. \end{aligned}$$

Hieruit volgt met lemma C.3 dat

$$F \cup G \supseteq D^n \cap f_{n-1} [D^{n-1} \cap f_{n-2} [D^{n-2} \cap \dots \cap f_2 [D^2 \cap f_1 [D^1 \cap (A \cup B \cup C)]] \dots]].$$

We weten dat $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, dus geldt dat

$$F \cup G \supseteq D^n \cap f_{n-1} [D^{n-1} \cap f_{n-2} [D^{n-2} \cap \dots \cap f_2 [D^2 \cap f_1 [D^1]] \dots]] \in \mathcal{F}_n.$$

Wegens de speciale eis aan de $\mathcal{F}_i$.

Laat $M \subseteq S \setminus (K \cup L)$ willekeurig en $g' : M \rightarrow \{1, 2\}$ een willekeurige functie. De familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S\}$ is onafhankelijk ten opzichte van $\mathcal{F}_n$, dus

$$(F \cup G) \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g(h)} \cap \bigcap_{h \in M} X_h^{g'(h)} \neq \emptyset.$$

We weten wegens vergelijking (*) dat

$$F \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g(h)} \cap \bigcap_{h \in M} X_h^{g'(h)} = \emptyset.$$

Dus volgt hieruit dat

$$G \cap \bigcap_{h \in M} X_h^{g'(h)} \supseteq G \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g(h)} \cap \bigcap_{h \in M} X_h^{g'(h)} \neq \emptyset.$$

Nu kunnen we concluderen dat in dit geval de verzameling $A \cup C$ aan alle eisen voldoet.

Dus nu hebben we bewezen dat of $A \cup C$ of $A \cup B$ aan alle eisen voldoet. $\square$

Door deze stap voor alle paden P_i te herhalen, kunnen we ervoor zorgen dat alle paden goed worden. De nieuwe filters $\mathcal{F}_{Z,\alpha}^k$ voldoen dus ook aan de eis dat voor elke niet lege verzamelingen Z en $z \in Z$ een willekeurig element geldt dat voor alle $G \in \mathcal{F}_{Z,\alpha}^k$ geldt dat $f_{(Z,Z \setminus z)}[G] \in \mathcal{F}_{Z \setminus z,\alpha}^k$ en de onafhankelijke familie maar eindig veel kleiner is geworden. Het enige wat daarnaast verandert is, is het feit dat g_α geen verbinding kan maken van $p_{[n] \setminus k}$ naar $p_{\{k\}}$.

Helaas is deze inductiestap niet voldoende om de constructie van de n -dimensionale kubus af te maken. Hier gaan we in de volgende paragraaf wat dieper op in.

C.2 Te zwakke inductiehypothese

Na de transfiniete inductie is het tijd om van onze filters, ultrafilters te maken. Dit willen we het liefst laag voor laag, van onder naar boven, doen. Voordat we dit gaan doen, gaan we er eerst voor zorgen dat we alle inverse beelden van de verzamelingen in onze uiteindelijke filters $\mathcal{F}_Z := \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{F}_{Z,\alpha}^n$ naar alle filters direct boven $\mathcal{F}_Z$ sturen. Doordat we ge-eist hebben dat voor alle $G \in \mathcal{F}_{Z \cup Z, \alpha}^k$ geldt dat $f_{(Z \cup Z, Z)}[G] \in F_{Z \cup Z, \alpha}^k$, geldt deze eigenschap ook voor alle $\mathcal{F}_Z$. Als we hierop het volgende lemma C.6 toepassen, zien we dat we de inverse beelden kunnen toevoegen.

Lemma C.6. *Laat $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ twee filters zijn en $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een functie functie, zodat voor alle $F \in \mathcal{F}$ geldt dat $f[F] \in \mathcal{G}$. Dan geldt dat $\langle \mathcal{F} \cup \bigcup_{G \in \mathcal{G}} f^{-1}[G] \rangle$ ook een filter is.*

Bewijs. We gaan dit bewijzen uit het ongerijmde. Stel dat $\langle \mathcal{F} \cup \bigcup_{G \in \mathcal{G}} f^{-1}[G] \rangle$ geen filter is, dan voldoet $\mathcal{F} \cup \bigcup_{G \in \mathcal{G}} f^{-1}[G]$ niet aan de eindige-doorsnede-eigenschap. Omdat $\mathcal{F}$ een filter is, betekent dit dat er een $F \in \mathcal{F}$ is en $G_1, \dots, G_l \in \mathcal{G}$ zodat $F \cap \bigcap_{i=1}^l f^{-1}[G_i] = \emptyset$. We weten echter ook dat $f[F] \in \mathcal{G}$ en dat $\mathcal{G}$ een filter is, hieruit volgt dat

$$\emptyset \neq f[F] \cap \bigcap_{i=1}^l G_i.$$

Laat $x \in f[F] \cap \bigcap_{i=1}^l G_i$ een willekeurig element zijn. Dan geldt dat $f^{-1}[\{x\}] \cap F \neq \emptyset$ en dat $f^{-1}[\{x\}] \subseteq f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^l G_i\right) = \bigcap_{i=1}^l f^{-1}[G_i]$. Als we dit invullen, krijgen we

$$\emptyset \neq f^{-1}[\{x\}] \cap F \subseteq f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^l G_i\right) \cap F = \emptyset.$$

Dit is dus een tegenspraak. □

Dus we kunnen de inverse beelden van alle verzamelingen inderdaad toevoegen. Eind goed al goed? Helaas niet. Dit komt omdat heel veel filters $\mathcal{F}_Y$ in onze kubus zitten boven meerdere filters. Dit betekent dat we voor het eerste filter dit lemma prima kunnen toepassen, maar niet op alle andere filters. Als we immers de inverse beelden aan $\mathcal{F}_Y$ toevoegen, heeft deze niet meer de speciale eigenschap, waardoor we het lemma niet kunnen toepassen. Om duidelijk in te zien wat er fout kan gaan, is het inzichtelijk om naar het onderstaande geval te kijken

Voorbeeld C.7. Bekijk de verzameling $X = \{1, 2, 3\}$ en $\mathcal{G} = \langle \{1, 2\} \rangle$, $\mathcal{F}_1 = \langle \{1\} \rangle$ en $\mathcal{F}_2 = \langle \{2\} \rangle$. Neem

$$\begin{cases} f_1(1) = 1 \\ f_1(2) = 2 \\ f_1(3) = 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} f_1(1) = 1 \\ f_1(2) = 2 \\ f_1(3) = 2 \end{cases}$$

Dan geldt dat $[f_1^{-1}[F_1] \cap f_2^{-1}[F_2] \neq \emptyset$, $G \cap f_1^{-1}[F_1] \neq \emptyset$ en $G \cap f_2^{-1}[F_2] \neq \emptyset$ voor alle $G \in \mathcal{G}$, $F_1 \in \mathcal{F}_1$ en $F_2 \in \mathcal{F}_2$. Maar we hebben ook dat

$$\{1, 2\} \cap f_1^{-1}(\{1\}) \cap f_2^{-1}(\{2\}) = \emptyset$$

Hieruit kunnen we opmaken dat de volgende bewering, niet-noodzakelijk waar is: *Laat $\mathcal{G}$ een filter zijn en $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ filters. Laat daarnaast f_1, f_2 twee functies zijn van $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uit een familie van grote schommeling, zodat $\forall G \in \mathcal{G}$ geldt dat $f_1[G] \in \mathcal{F}_1$ en $f_2[G] \in \mathcal{F}_2$. Dan geldt voor alle $F_1 \in \mathcal{F}_1$ en $F_2 \in \mathcal{F}_2$ en $G \in \mathcal{G}$ dat*

$$f_1^{-1}[F_1] \cap f_2^{-1}[F_2] \cap G \neq \emptyset.$$

We zullen dus de inverse beelden eerder moeten toevoegen, omdat het niet zeker is dat dit op het einde nog kan.

C.3 Sterkere inductiehypothese

Op basis van onze vorige poging zien we dat we tijdens onze transfiniete inductie moeten eisen dat voor alle verzamelingen $F \in F_{Z \setminus z, \alpha}^k$ geldt dat $f_{(Z, Z \setminus z)}^{-1}[F] \in F_{Z, \alpha}^k$. Dit betekent dat als we een verzameling A toevoegen aan een filter op laag 1, we de inverse beelden moeten toevoegen aan de filters die erboven staan. Dit kan niet altijd, we weten alleen dat voor elke verzameling A we of het inverse beeld van A of van $\mathbb{N} \setminus A$ aan de verzameling erboven kunnen toevoegen, zie het volgende lemma:

Lemma C.8. *Laat $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ twee filters zijn en $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een surjectieve functie, zodat voor alle $F \in \mathcal{F}_1$ geldt dat $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_2$. Laat daarnaast de familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}\}$ onafhankelijk zijn ten opzichte van deze twee filters.*

Laat A een willekeurige verzameling zijn, dan heeft A of $\mathbb{N} \setminus A$ de volgende eigenschappen:

- $\langle \mathcal{F}_1 \cup B \rangle$ en $\langle \mathcal{F}_2 \cup \{f^{-1}(B)\} \rangle$ zijn filters.
- Dan is er een eindige $K \subseteq S$, zodat de familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S \setminus K\}$ is onafhankelijk ten opzichte van deze twee nieuwe filters.

Bewijs. Stel dat A niet werkt, dan is er er een $X \in \mathcal{F}_2$ en een eindige $K \subseteq S$ met functie $g : K \rightarrow \{1, 2\}$, zodat

$$X \cap f^{-1}(A) \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} = \emptyset$$

Stel dat ook $\mathbb{N} \setminus A$ niet werkt, dan is er een $Y \in \mathcal{F}_2$ en een eindige $L \subseteq S \setminus K$ met $\bar{g} : L \rightarrow \{1, 2\}$, zodat

$$Y \cap f^{-1}(\mathbb{N} \setminus A) \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{\bar{g}(h)},$$

Dan geldt dat

$$\begin{aligned} \emptyset &= \left(X \cap f^{-1}(A) \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \right) \cup \left(Y \cap f^{-1}(\mathbb{N} \setminus A) \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{\bar{g}(h)} \right) \\ &\supseteq \left(X \cap Y \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{\bar{g}(h)} \cap f^{-1}(A) \right) \cup \left(X \cap Y \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{\bar{g}(h)} \cap f^{-1}(\mathbb{N} \setminus A) \right) \\ &= (X \cap Y) \cap \left(\bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{\bar{g}(h)} \right) \cap (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(\mathbb{N} \setminus A)) \\ &\stackrel{*}{=} X \cap Y \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{\bar{g}(h)} \neq \emptyset \end{aligned}$$

waarbij $*$ geldt, omdat f surjectief is. Omdat de familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in S \setminus K\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{F}_2$ geldt dat deze laatste verzameling niet leeg is. Tegenspraak. $\square$

Als we de speciale verzamelingen $A = X_h^1$ bekijken weten we ook dat we $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(X_h^1)$ of $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(X_h^2)$ aan het filter $\mathcal{F}_{[n] \setminus k, \alpha}^2$ kunnen toevoegen. Er is alleen geen garantie dat dit dezelfde verzameling is. Daarom willen we graag een truc uithalen, waardoor we alle verzamelingen van de vorm X_h^1 het inverse beeld aan het filter erboven kunnen toepassen. Dit gaan we doen door voor elk filter een eigen onafhankelijke familie te construeren in plaats van dat we voor alle filters dezelfde onafhankelijke familie gebruiken.

C.3.1 Meerdere onafhankelijke families

In deze paragraaf gaan we kijken of het bewijs van de 3-dimensionale kubus kunnen repareren door meerdere onafhankelijke families te gebruiken.

We nemen voor alle filters $F_{\mathbb{Z},0}^0$ op laag 1 onze normale standaard onafhankelijke familie $\{\langle X_h^1, X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}\}$.

Voor het filter $F_{\{1,2\},0}^0$ gebruiken we de onafhankelijke familie

$$\left\{ \left\langle f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^1], f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^2] \right\rangle : h \in \mathcal{S}_1 \right\} \cup \left\{ \left\langle f_{(\{1,2\},\{2\})}^{-1} [X_h^1], f_{(\{1,2\},\{2\})}^{-1} [X_h^2] \right\rangle : h \in \mathcal{S}_2 \right\}.$$

Voor de filters $F_{\{1,3\},0}^0$ en $F_{\{2,3\},0}^0$ gebruiken we een soortgelijke familie, maar dan met de andere functies.

Lemma C.9. *De familie gedefinieerd in C.3.1 is onafhankelijk ten opzichte van het filter $F_{\{1,2\},0}^0$.*

Bewijs. Voor elke $h \in \mathcal{S}_1$ zijn $f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^1]$ en $f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^2]$ disjunct

$$\begin{aligned} \emptyset &= f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [\emptyset] \\ &= f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^1 \cap X_h^2] \\ &= f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^1] \cap f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^2] \end{aligned}$$

Laat $X \in F_{\{1,2\},0}^0$ willekeurig. Dan zijn er $P \in F_{\{1\},0}^0$ en $Q \in F_{\{2\},0}^0$, zodat

$$X \supseteq f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [P] \cap f_{(\{1,2\},\{2\})}^{-1} [Q].$$

Laat $K \subseteq \mathcal{S}_1$ en $L \subseteq \mathcal{S}_2$ eindig zijn en $g : K \cup L \rightarrow \{1,2\}$ een willekeurige functie, dan geldt dat

$$\begin{aligned} &X \cap \bigcap_{h \in K} f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^{g(h)}] \cap \bigcap_{h \in L} f_{(\{1,2\},\{2\})}^{-1} [X_h^{g(h)}] \\ &\supseteq f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [P] \cap f_{(\{1,2\},\{2\})}^{-1} [Q] \cap f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} \left[\bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \right] \cap f_{(\{1,2\},\{2\})}^{-1} \left[\bigcap_{h \in L} X_h^{g(h)} \right] \\ &= f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} \left[P \cap \bigcap_{h \in K} X_h^{g(h)} \right] \cap f_{(\{1,2\},\{2\})}^{-1} \left[Q \cap \bigcap_{h \in L} X_h^{g(h)} \right] \end{aligned}$$

Omdat de familie $\{\langle X_h^1 \cap X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}_1\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $F_{\{1\},0}^0$ en $\{\langle X_h^1 \cap X_h^2 \rangle : h \in \mathcal{S}_2\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $F_{\{2\},0}^0$, geldt dat de verzamelingen in de inversebeelden niet leeg zijn. Omdat $f_{(\{1,2\},\{1\})}$ en $f_{(\{1,2\},\{2\})}$ twee verschillende functies zijn uit dezelfde familie van grote schommeling, geldt dat nu ook dat de doorsnede van de inverse beelden niet-leeg is. Hieruit volgt dat

$$X \cap \bigcap_{h \in K} f_{(\{1,2\},\{1\})}^{-1} [X_h^{g(h)}] \cap \bigcap_{h \in L} f_{(\{1,2\},\{2\})}^{-1} [X_h^{g(h)}]$$

□

We zien dus dat we ook met deze onafhankelijke families kunnen beginnen in onze inductiebasis. Nu kan je je afvragen als twee filters $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ verschillende onafhankelijke families hebben werkt dan lemma 5.13 nog wel? Het antwoord is ja. Kijk maar naar het volgende, iets aangepaste, bewijs.

Lemma C.10. (Aangepaste versie van lemma 5.13) Laat $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ filters zijn en veronderstel dat $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I\}$ een onafhankelijke familie ten opzichte van $\mathcal{F}$ is en $\{\langle B_j^1, B_j^2 \rangle : j \in J\}$ onafhankelijk ten opzichte van $\mathcal{G}$. Voor elke $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zijn er eindige $I_1 \subseteq I$ en $J_1 \subseteq J$ en een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ zodat

- $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I \setminus I_1\}$ onafhankelijk is ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$.
- $\{\langle B_j^1, B_j^2 \rangle : j \in J \setminus J_1\}$ onafhankelijk is ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)\} \rangle$.

Bewijs. Laat $x \in I$ willekeurig.

Geval 1: $\{\langle B_j^1, B_j^2 \rangle : j \in J\}$ is onafhankelijk ten opzichte van $\langle G \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A_x^1)\} \rangle$.

Als dit het geval is dan voldoet $A = A_x^1$, $I_1 = \{x\}$ en $J = \emptyset$. (Zie bewijs 5.13.)

Geval 2: Stel dat geval 1 niet waar is.

Dan is er een eindige $K \subseteq J \setminus \{x\}$ en een functie $\bar{g} : K \rightarrow \{1, 2\}$ en een element $G_0 \in \mathcal{G}$ zodat de verzameling

$$\bigcap_{j \in K} B_j^{\bar{g}(j)} \cap G_0 \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A_x^1)) = \emptyset.$$

Hieruit volgt dat

$$\bigcap_{j \in K} B_j^{\bar{g}(j)} \cap G_0 \subseteq f^{-1}(A_x^1). \quad (+)$$

Neem nu $A = \mathbb{N} \setminus A_x^1$, $I_2 = \{x\}$ en $J_1 = K \cup \{x\}$. Dan is $\{\langle A_i^1, A_i^2 \rangle : i \in I \setminus \{x\}\}$ onafhankelijk ten opzichte van $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$.

We gaan nu laten zien dat $\{\langle B_j^1, B_j^2 \rangle : j \in J \setminus J_1\}$ onafhankelijk is ten opzichte van het filter $\langle \mathcal{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)\} \rangle$. Laat $L \subseteq J \setminus J_1$ eindig en neem $g : L \rightarrow \{1, 2\}$ en $G \in \mathcal{G}$ willekeurig. Er geldt daarnaast dat $\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A) = \mathbb{N} \setminus f^{-1}(\mathbb{N} \setminus A_x^1) \supseteq f^{-1}(A_x^1)$. Als we dit invullen zien we dat

$$\begin{aligned} \bigcap_{j \in L} B_j^{g(j)} \cap G \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)) &\supseteq \bigcap_{j \in L} B_j^{g(j)} \cap G \cap f^{-1}(A_x^1) \\ &\supseteq \bigcap_{j \in L} B_j^{g(j)} \cap \bigcap_{j \in K} B_j^{\bar{g}(j)} \cap (G_0 \cap G) \cap f^{-1}(A_x^1). \end{aligned} \quad (*)$$

Er geldt dat $L \cap K = \emptyset$, wegens het feit dat $L \subseteq J \setminus (K \cup \{x\})$. We definiëren een nieuwe functie $h : K \cup L \rightarrow \{0, 1\}$ met $h(x) = \bar{g}(x)$ als $x \in K$ en $h(x) = g(x)$ als $x \in L$. $K \cup L$ is eindig, het is immers de vereniging van twee eindige verzamelingen, dus h is een functie van een eindige deelverzameling van J naar $\{1, 2\}$. Omdat $\mathcal{G}$ een filter is, geldt daarnaast dat $G \cap G_0 \in \mathcal{G}$. Als we dit allemaal combineren met het feit dat $\{\langle B_j^1, B_j^2 \rangle : j \in J\}$ onafhankelijk is ten opzichte van $\mathcal{G}$, vinden we dat

$$\bigcap_{j \in L} B_j^{g(j)} \cap \bigcap_{j \in K} B_j^{\bar{g}(j)} \cap (G_0 \cap G) = \bigcap_{j \in K \cup L} B_j^{h(j)} \cap (G \cap G_0)$$

oneindig is.

Wegens vergelijking (+) krijgen we dat

$$\bigcap_{j \in L} B_j^{g(j)} \cap \bigcap_{j \in K} B_j^{\bar{g}(j)} \cap (G_0 \cap G) \cap f^{-1}(A_x^1) = \bigcap_{i \in L} B_i^{g(i)} \cap \bigcap_{j \in K} B_j^{\bar{g}(j)} \cap (G_0 \cap G)$$

en deze verzameling is oneindig. Uit vergelijking (*) volgt nu ook dat

$$\bigcap_{j \in L} B_j^{g(j)} \cap G \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A))$$

oneindig is. Dus $\{\langle B_j^1, B_j^2 \rangle : j \in J \setminus J_1\}$ is onafhankelijk ten opzichte van $\langle \mathcal{G} \cup (\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)) \rangle$.

In beide gevallen is er een verzameling A die aan alle eisen voldoet en omdat altijd een van de twee gevallen waar is, is het bewijs hiermee afgerond. $\square$

Als we dit bewijs goed lezen, zien we dat elke verzameling die we aan een filter aan de onderkant toevoegen een verzameling is uit de onafhankelijke familie. Hierdoor geldt dat we deze vrij gemakkelijk aan het filter erboven kunnen toevoegen:

Lemma C.11. *Laat $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ en $\mathcal{G}$ filters zijn en $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een functie zodat voor alle $F_i \in \mathcal{F}_i$ geldt dat $f_i^{-1}[F_i] \in \mathcal{G}$ en voor alle $G \in \mathcal{G}$ geldt dat $f_i[G] \in \mathcal{F}_i$. Stel dat elke $\mathcal{F}_i$ een onafhankelijke familie van de vorm $\{\langle X_{i,h}^1, X_{i,h}^2 \rangle : h \in \mathcal{S}_i\}$ heeft en de onafhankelijke familie van $\mathcal{G}$ eruit ziet als*

$$\bigcup_{i=1}^n \{ \langle f_i^{-1}[X_{i,h}^1], f_i^{-1}[X_{i,h}^2] \rangle : h \in \mathcal{S}_i \}.$$

Dan geldt dat $\langle \mathcal{F}_1 \cup \{X_{1,h}^1\} \rangle$ en $\langle \mathcal{G} \cup \{f_1^{-1}[F] : F \in \langle \mathcal{F}_1 \cup \{X_{1,h}^1\} \rangle\} \rangle$ filters zijn met onafhankelijke familie $\mathcal{S}'_1 = \mathcal{S}_1 \setminus \{h\}$.

Bewijs. $\langle \mathcal{F}_1 \cup \{X_{1,h}^1\} \rangle$ is een filter, omdat $X_{1,h}^1$ in de onafhankelijke familie zit. Voor elke verzameling $f \in \langle \mathcal{F}_1 \cup \{X_{1,h}^1\} \rangle$ geldt dat $F \supseteq G \cap X_{1,h}^1$ met $G \in \mathcal{F}_1$ en dus geldt

$$f_1^{-1}[F] \supseteq f_1^{-1}[G \cap X_{1,h}^1] = f_1^{-1}[G] \cap f_1^{-1}[X_{1,h}^1]$$

Waarbij $f_1^{-1}(G) \in \mathcal{G}$ zit en $f_1^{-1}[X_{1,h}^1]$ in de onafhankelijke familie. Hierdoor gaat alles goed. $\square$

Hierdoor zien we dat we heel gemakkelijk blijven voldoen aan de eis dat voor alle $F \in F_{Z \setminus z, \alpha}^k$ geldt dat $f_{(Z, Z \setminus z)}^{-1}[F] \in F_{Z, \alpha}^k$, terwijl de onafhankelijke familie maar eindig kleiner wordt. Hierdoor wordt het gedeelte met de transfinitie inductie vrij gemakkelijk. We kunnen immers heel makkelijk één voor één alle verbindingen verbreken, terwijl we de inverse beelden van alle verzamelingen aan de filters erboven toevoegen.

Nu zou je kunnen denken, we zijn klaar! Helaas is dat niet zo. We moeten namelijk de filters, die we tijdens de transfinitie inductie hebben gekregen, nog gaan uitbereiden en daar gaat het mis. We moeten voor elke verzameling A gaan kiezen of we A of $X \setminus A$ aan $F_{\{1\}}$ willen gaan toevoegen. Van deze verzameling moeten we het inverse beeld aan de filters $F_{\{1,2\}}$ en $F_{\{1,3\}}$ toevoegen om ervoor te zorgen dat de verbindingen niet doorbroken worden. Wegens lemma C.8 weten we dat minstens één van de verzamelingen A of $X \setminus A$ werkt voor $F_{\{1,2\}}$ en ook dat één van de verzamelingen werkt voor $F_{\{1,3\}}$. Er is alleen geen enkele manier om te garanderen dat minstens één van de twee werkt voor allebei. Hierdoor hebben we dus een sterkere inductiehypothese nodig.

Een optie om dit gat te repareren, is om ook te eisen dat de beelden $f_{(Z, Z \setminus z)}[F]$ in $F_{Z \setminus z, \alpha}^k$ zitten voor alle $F \in F_{Z, \alpha}^k$. Hierdoor zullen we in de inductiestap ook alle beelden van $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)$ aan de filters eronder moeten toevoegen. Vervolgens moeten we de inverse beelden van deze ‘lelijke’ verzamelingen, weer aan de filters erboven toevoegen. Voor het ene filter erboven hebben we dat al gedaan toen we $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)$ toevoegde, er geldt immers voor alle functies f dat

$$f^{-1}[f[\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)]] \supseteq \mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A).$$

Alleen voor dat andere filter hebben we nu een probleem. Deze nieuwe verzameling is immers niet van een mooie vorm, waardoor we niet weten of we het inverse beeld zomaar kunnen toevoegen. Hierdoor hebben we een vergelijkbaar probleem als de keer dat we voor alle filters dezelfde onafhankelijke familie gebruiken.

C.4 Mooie verzamelingen bovenin toevoegen

Een ander idee om de n -dimensionale kubus te construeren, is door een andere versie van lemma 5.13 te bewijzen. Zoals we in de opzet van de n -dimensionale kubus zagen, moeten we steeds verzameling A toevoegen aan het filter $F_{\{k\}}$ op laag 1 en een verzameling van de vorm $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)$ aan het filter $F_{[n] \setminus k}$ op laag $n - 1$. In het bewijs van deze stelling zien we dat we voor de verzameling A een hele mooie verzameling kunnen kiezen, namelijk een verzameling uit onze onafhankelijke familie: X_h^i .

Het voordeel van verzamelingen van deze vorm is dat deze wel heel mooi samen gaan met de inverse beelden van de functies $f_{(Y,Z)}$. Dit komt omdat het beide inverse beelden zijn van functies uit dezelfde (oneindige) familie van grote schommeling. Omdat g_α elke functie van $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een keer is, kunnen we helaas vrij weinig zeggen over de vorm van de verzameling $\mathbb{N} \setminus g_\alpha^{-1}(A)$. Hierdoor weten we niet of deze verzameling goed samenwerkt met de inverse beelden van de functies $f_{(Y,Z)}$.

Hierdoor kan je op het idee komen om een verzameling van de vorm X_h^i bovenin toe te voegen. Als we dit doen, moeten we beneden een verzameling van de vorm $\mathbb{N} \setminus g_\alpha[X_h^i]$ toevoegen. Helaas kunnen we niet bewijzen dat dit ook daadwerkelijk gaat werken. Dit komt omdat g_α niet per se injectief is, waardoor er elementen in $\mathbb{N}$ kunnen zijn die in de doorsnede $g_\alpha[X_h^1] \cap g_\alpha[X_h^2]$ zitten. (Sterker nog: het kan zelfs zo zijn dat alle elementen uit $\mathbb{N}$ in deze doorsnede zitten!) Voor alle elementen in deze doorsnede geldt zowel niet in $\mathbb{N} \setminus g_\alpha[X_h^1]$ als niet in $\mathbb{N} \setminus g_\alpha[X_h^2]$ zitten. Hierdoor werkt de bewijsstrategie van lemma 5.13 totaal niet. Dus het idee van bovenin mooie verzamelingen toevoegen, is hierdoor niet zo kansrijk.