

# Getijberekeningen

Johan van Veen (ca 1930)

Uitgave verzorgd door ir. H.J. Verhagen (Stichting Blauwe Lijn)

In samenwerking met de Erven Johan van Veen en de TU Delft



## Inleiding

Deze uitgave is een scan van een manuscript van Johan van Veen ((Uithuizermeeden, 21 december 1893 – Den Haag, 9 december 1959), lange tijd medewerker van Rijkswaterstaat en de ontwerper van het Deltaplan. Ir. van Veen werkte in de periode van 1929 tot aan de stormvloedramp van 1953 in verschillende functies bij de Studiedienst Benedenrivieren, lange tijd als hoofd van die dienst. Na 1953 kreeg hij een leidende rol bij de uitwerking van het Deltaplan.

## Geschiedenis van getijberekeningen in Nederland

Tijdens zijn studie kwam hij in contact met het werk van Prof. Dr. Lorentz over de getijberekeningen voor de afsluiting van de Zuiderzee. In de jaren daarna heeft hij zich verdiept in deze rekenmethoden. Door Lorentz is voor getijberekeningen de “Exacte Methode” en de “Harmonische Methode” ontwikkeld.

De Harmonische Methode is gebaseerd op de harmonische analyse van getijden, zoals ontwikkeld door Lord Kelvin, maar is niet direct toepasbaar voor een netwerk van getijgeulen. Lorentz stelde twee differentiaalvergelijkingen op aan de hand van de methode van Kelvin en lineariseerde de niet-lineaire wrijvingsterm. Hiermee kon hij het stelsel oplossen. Maar stormvloedden konden er niet mee berekend worden omdat een stormvloed geen periodiek verschijnsel is, hetgeen nodig is voor het oplossen van de vergelijkingen met de Harmonische Methode.

Om dit wel te kunnen oplossen is de Exacte Methode door Lorentz ontwikkeld, echter de vergelijkingen waren dan niet expliciet oplosbaar en moesten iteratief opgelost worden. Dit is een heel arbeidsintensieve methode, zeker in een tijd toen er nog geen computers waren [Van den Ende, 1992].

Jo Thijsse, een studiegenoot van Johan van Veen, was na zijn afstuderen bij de Zuiderzeewerken gaan werken en heeft daar nog enige tijd Lorentz mogen assisteren. Thijsse vermeldde later dat een som met de Harmonische Methode door twee mensen gedaan werd (ter controle op fouten) en ongeveer een maand duurde. Een berekening met de Exacte Methode kostte voor twee man ongeveer drie maanden. In die tijd probeerde men ook stormvloedstanden met fysieke modellen (schaalmodellen) te bepalen (o.a. door Prof. Rehbock in Karlsruhe), maar dat was geen succes; door de kleine schaal waren de modellen te onnauwkeurig.

## De Studiedienst

Een van de gevolgen van het werk van Lorentz was de oprichting van de Studiedienst voor de Zeearmen, Benedenrivieren en Kusten in 1929 door Rijkswaterstaat, waar Johan van Veen het hoofd van werd. Hiervoor waren getijberekeningen natuurlijk nodig, en Johan van Veen stimuleerde dat zeer. Hij zorgde er voor dat hij de methodes van Lorentz goed begreep en kon toepassen.

## Het werk van Dronkers en Mazure

In 1934 kwam dr. J.J. Dronkers bij de studiedienst, speciaal voor het uitvoeren van getijberekeningen op (beneden)rivieren. Dronkers kon de Harmonische Methode niet gebruiken, omdat daarbij een bovenafvoer niet mogelijk was. Hij moest dus de Exacte Methode gebruiken, niet alleen voor stormen, maar ook voor normale getijden met bovenafvoer. Dronkers paste dit het eerste toe bij de Hollandse IJssel. In hetzelfde jaar verbeterde Mazure de Harmonische Methode zodanig dat die ook gebruikt kon worden voor benedenrivieren, weliswaar met iets lagere nauwkeurigheid, maar met een veel hogere rekensnelheid. Vermeld moet worden dat Thijsse en Mazure bij de Dienst der Zuiderzeewerken (die niet onder de Rijkswaterstaat vielen) werkten, en Dronkers en Van Veen bij de

Studiedienst van Rijkswaterstaat. De studiedienst had speciaal voor dit rekenwerk een negental rekenaars aangenomen.

## Het elektrisch analogon

Van Veen had een brede belangstelling en hij realiseerde zich dat waterstroming en elektrische stroom heel erg op elkaar lijken. Dit maakte het dat ook mogelijk om hydraulische berekeningen te maken met de formules voor elektrische stroom en spanning (Ohm en Kirchhoff). Hij heeft dit onder andere toegepaste in de plannen voor het graven van het Koedoodkanaal, een kanaal van de Oude Maas naar de Waalhaven met het doen een betere scheepvaartverbinding van de Rotterdamse haven met het achterland. Men wilde geen sluizen in dit kanaal, maar een open verbinding, zodat het feitelijk een getijrivier zou worden. Het was dus nodig om het getij in een nog niet bestaande tak uit te rekenen. In 1932 stelde Van Veen voor om dit met een elektrisch analogon te doen

Ondanks dat de Koedoodrivier niets geworden is, is de gedachte van het elektrisch analogon door Van Veen opgepakt en in de jaren daarna verder uitgewerkt. De groep van Thijsse en Mazure zag dat helemaal niet zitten. De electrotechniek was ook nog niet ver genoeg dat met de benodigde apparaten eenvoudig kon leveren. Daarom werd door Van Veen Dr. Dronkers bij de dienst aangenomen om de mathematische kant van het geheel uit te werken. Desondanks zette Van Veen door, en bouwde later zijn eerste elektrische analogon, waarmee hij veel sneller een getijberekening kon maken.

## Dit manuscript

De basis van alle werk van Johan van Veen inzake getijden is gebaseerd op een grondige kennis van de getijformules en de getijberekeningen. De kennis die hij in de periode rond 1930 over getij verzameld heeft, heeft hij vastgelegd in een cahier. Dit cahier begint met een grondige analyse van het rapport van Lorentz (hoofdstuk I t/m XII). Hierin zijn verwijzingen opgenomen naar de paragrafen in het rapport van Lorentz. Het manuscript wordt afsloten met een analyse t.b.v. het Koedoodkanaal (zie Studiedienst rapport nr. 9) en een onderzoek naar het gebruik van de methode van Ohm en Kirchhoff (die al in rapport nr. 9 genoemd wordt, en verder uitgewerkt is in de publicatie in *De Ingenieur* van 1937).

Dit cahier is via zijn achterkleinzoon bij de Stichting Blauwe Lijn terecht gekomen, en hier in facsimile weergegeven.

H.J. Verhagen, Juni 2019

## Referenties

DRONKERS, J.J. [1935] Een getijberekening voor benedenrivieren, [De Ingenieur, vol 50, nr 34, pp B181-187.](#)

LORENTZ, H.A. [1926] [Gevolgen afsluiting Zuiderzee op het getij](#) (officiële titel: Verslag van de staatscommissie met opdracht te onderzoeken in hoeverre, als gevolg de afsluiting van de Zuiderzee te verwachten is dat tijdens storm hogere waterstanden en een grotere golfoploop, dan thans het geval is, zullen voorkomen vóór de kust van het vaste land van Noord-Holland, Friesland en Groningen, alsmede vóór de daarvoor gelegen Noordzee-eilanden), *Algemene Landsdrukkerij*

MAZURE, J.P. [1935] Getijberekening voor benedenrivieren, [De Ingenieur, vol 50, nr. 41, pp B212-214](#)

THIJSSE, J.T. [1935] De toepassingsmogelijkheden van verschillende getijberekeningen, [De Ingenieur, vol 50, pp B259-261](#), met een naschrift van Van Veen en Dronkers. (opm: in de scan bij de Koninklijke Bibliotheek liggen tussen p 259 en 260 enkele bladzijden van een ander artikel)

VAN DEN ENDE, J. [1992] Tidal calculations in The Netherlands, 1920, 1960, *IEEE Annals of the History of Computing, Vol 14, nr. 3*

VAN VEEN, JOHAN [1932] Rapport betreffende het Koedoodkanaal, Raport van de studiedienst, nr. 9 ([samenvatting](#))

VAN VEEN, JOHAN [1937] Getijstroomberekening met behulp van wetten analoog aan die van Ohm en Kirchoff [De Ingenieur,\(52\) 19, 7-5-1937](#)

(in de pdf zit onder de blauwe links een scan van de volledige publicatie)

## Inhoud van het manuscript

|       |   |    |
|-------|---|----|
| I     | Notaties, zie §135 Staatscomm. Zuiderzee  | 7  |
|       | <ul style="list-style-type: none"><li>• Krachtvergelijking</li><li>• Enkelvoudige of harmonische trilling</li><li>• Sinusoïde</li><li>• Bewijs dat <math>W = \sqrt{gq}</math></li></ul> |    |
| II    | Interferentie   | 12 |
| III   | Gedempte trillingen zie §137  | 19 |
|       | <ul style="list-style-type: none"><li>• Mate van demping</li><li>• Reeksontwikkeling</li><li>• Vectorvoorstelling</li></ul>   |    |
| IV    | Met wrijving en demping   | 24 |
| V     | Wat is $\sqrt{(\cos\theta) / \cos(\theta/2)}$   | 28 |
| VI    | Geulen van verschillende diepte naast elkaar §141   | 31 |
| VIII  | Getijbeweging met tegenverhang  | 36 |
| X     | Zuiderzee §149  | 42 |
| XI    | Windkracht §150   | 44 |
| XIII  | Bijkomstige toestanden §151   | 50 |
| ===== |   |    |
|       | Koedoodkanaal   | 56 |
|       | Berekening doodlopend kanaal in twee afdelingen   | 66 |
|       | Vereenvoudigde methode  | 73 |
|       | Algemene opzet der methode Lorentz  | 75 |
|       | Veranderlijke breedte en veranderlijke amplitude  | 80 |
|       | Analogie waterstroom met de Wet van Ohm   | 87 |
|       | Wisselstroom  | 89 |

De genoemde bladzijdennummers zijn de nummers van de pdf, deze zijn niet in het manuscript vermeld.

XIII

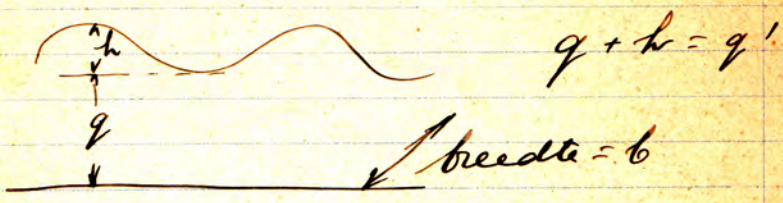
Getyberekeningen

J. VAN VEEN

TECHNISCHE BOEKHANDEL  
S. v. HERWIJNEN, DORDRECHT

I Zie § 135 Staatstramm. Zuidzee.

notaties

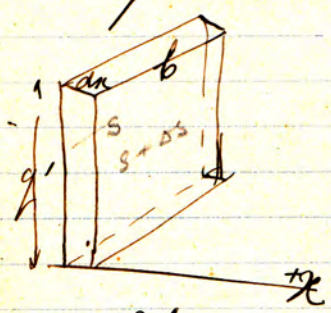


$s$  = hoeveel water/sec door de heele doorsnede (electr begrip i.)

$v = \frac{s}{F}$  = electr. begrip stroomdichtheid = stroomon. /  $\text{cm}^2$ .

$s$  = functie van  $x$  en  $t$ .

$h$  = functie van  $x$  en  $t$ .



$\frac{\partial s}{\partial x} dx$  wil zeggen toename  $s$  bij  $t$  const. en  $x$  veranderlijk. Keen dit pos.

$b \frac{\partial h}{\partial t} dx$  is dan neg.

$$\frac{\partial s}{\partial x} dx = -b \frac{\partial h}{\partial t} dx$$

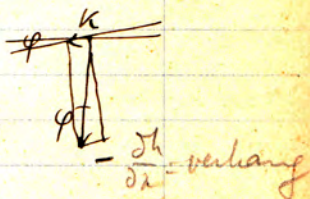
$$\boxed{\frac{\partial s}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t}} \text{ Continuiteitsverg.}$$

Krachtenvergelijking (dynamische of  
bevestigingsverg., berust op  $k = \text{mas}$ )

Keerwielde  $F = 0$   
grond: wateroppervl.  $W = 0$ .

Stoerstofdikte = gewicht met op  $(\text{cm}^2)$   
 $= \rho \cdot 1 \cdot \rho \cdot g \cdot (g+h) \rho g$   
dit verandert in de richting  $x$ :  
 $\rho \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$

$$(k = C \sin \varphi = C \operatorname{tg} \varphi =)$$

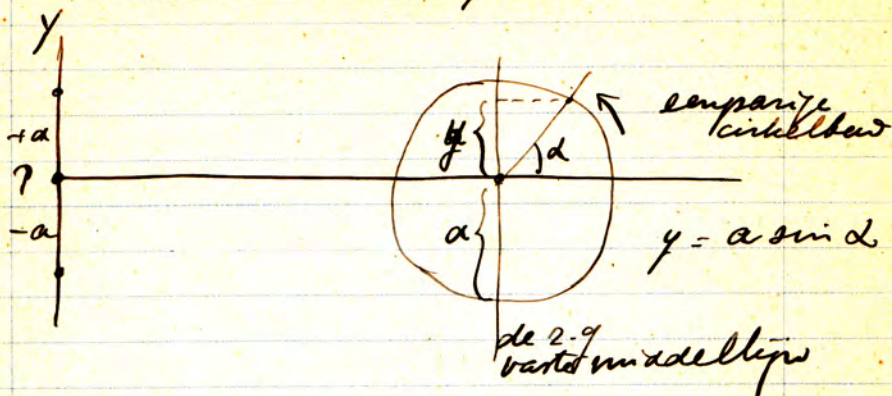


$$\text{dus } b \cdot \rho \cdot g \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial s}{\partial t} \text{ (verom.)}$$
$$b g \rho \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial s}{\partial t}$$

in de  $s$  zit de massa.

Wie komt levende kracht tot uitdrukking?  
Waarom - teken?

# Enkelvoudige of harmonische trilling



$$\alpha : 2\pi = t : T$$

(in rad) of  $\alpha = \frac{2\pi t}{T}$

$$y = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

frequentie = trillingsgetal = aantal  $T$ 's per sec =  $n = \frac{1}{T}$ .  
dus  $y = a \sin 2\pi n t$

$2\pi n = \omega =$  cirkelfrequentie.  
= hoeksnelheid

een maal rond:  $2\pi = \omega \cdot T$ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.$$

Wij verstaan onder  $n$  voortaan de cirkelfrequentie, die gewoonlijk  $\omega$  genoemd wordt  
dus voortaan

$$y_p = a \sin \omega t.$$

## Sinusvibe

trilbron  $w$  (voortpl. snelh.)



Opvraagd de bew. verpl. van punt Q  
als gegeven is de bew. verpl. van P:

$$y_p = a \sin nt$$

$w$  = voortpl. snelh. der trilbeweging  
(snelheid van overdracht der krachtwerking)

Q begint later te trillen, nl.  $\frac{x}{w}$  sec. later  
Trilt P:  $t$  sec, dan trilt Q slechts  $(t - \frac{x}{w})$

Dus:

$$\text{Bew. verpl. van Q: } y_q = a' \sin n(t - \frac{x}{w})$$

Nij namen op  $t = 0$  ook  $y = 0$

Maar in  $y$  alsp. kan weghoed op  $t = 0$   
 $y$  een zeker bedrag vertegenwoordigen, dus  
ook een zeker hoek = phasehoek =  $p$

$$y_p = a \sin n(t + p)$$

$$y_q = a' \sin n(t - \frac{x}{w} + p)$$

Groeflengte = voortpl. ~~to~~ per trillingstyd  
of weeg per trillingstyd

$$\lambda = w \times T$$

$$\text{weeg} = \text{snelh.} \times \text{tyd}$$

Bewijs dat  $w = \sqrt{g}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= -g b q \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} &= -b \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{is en w beide} \\ \text{functies van } x \text{ en } t \end{array}$$

sin!

Probeer te voldoen met  $h = a \cos n(t - \frac{x}{w} + p)$   
s?

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{dus fm. naar } t \text{ diff.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= +b a n \sin n(t - \frac{x}{w} + p) \\ s &= \frac{w}{n} b a n \cos n(t - \frac{x}{w} + p) \\ &= \underline{abw} \cos n(t - \frac{x}{w} + p) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -g b q \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{dus fm. naar } x \text{ diff.}$$

en s naar t diff.

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= -abwn \sin n(t - \frac{x}{w} + p) = \\ &= g b q a \frac{n}{w} \sin n(t - \frac{x}{w} + p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{of } w^2 &= gq \\ w &= \sqrt{gq} \end{aligned}$$

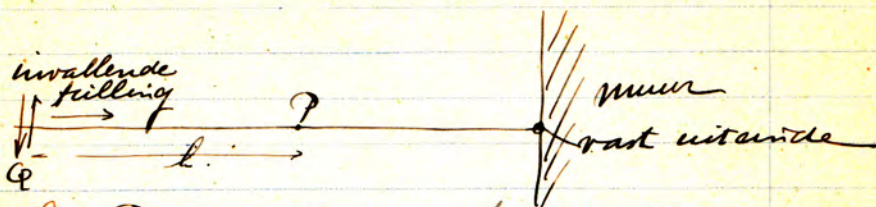
Resultaat:

geeft de  
frequentie  
hoe kan dit?

$$\left\| \begin{aligned} h &= a \cos n(t - \frac{x}{w} + p) \\ s &= ab\sqrt{gq} \cos n(t - \frac{x}{w} + p) \\ w &= \sqrt{gq}, \text{ onafh. van } n. \end{aligned} \right.$$

ampl. van s dus = abw. Hoe is dit  
grafisch te verklaren?

$$\cancel{w} \quad s = \frac{1}{2} abw!$$

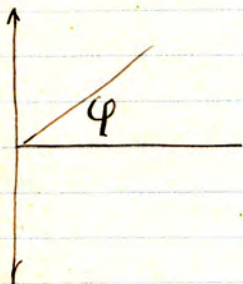
Interferentie.

In P een ander phase dan in Q,  
phaseverschil tussen P & Q afhankelijk  
van l.



teruggeskaatste trilling  $\varphi = 270^\circ$

De teruggeskaatste trilling verschilt  
 $180^\circ$  of  $\frac{1}{2}T$  met de invallende tr.  
d.w. het phaseverschil =  $\frac{1}{2}$ .



Van links:

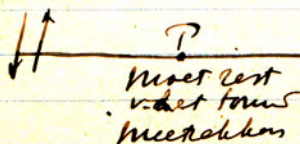
$$s_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

Van rechts:

$$s_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

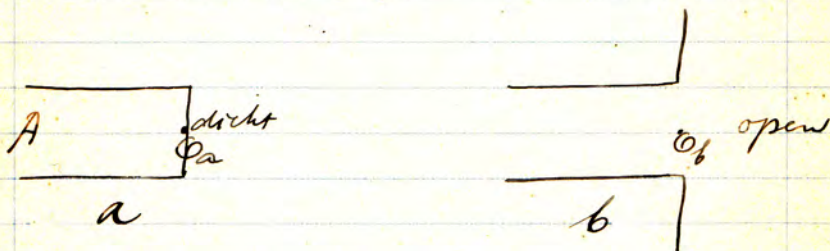
$$s = s_1 + s_2$$

Bij vrij uiteinde  
heeft de teruggeskaatste trilling  
gelijke phase



vrij uiteinde  
is geen rest touw  
meer, sluipt  
hoof op.

$$\begin{aligned}
 s &= s_1 + s_2 = \\
 & a \sin(\omega t + \varphi) + b \cos(\omega t + \varphi) \\
 &= b \left\{ \frac{a}{b} \sin(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \varphi) \right\} \\
 \text{Het } \frac{a}{b} &= \tan \alpha \\
 &= b \left\{ \frac{\sin \alpha \sin(\omega t + \varphi) + \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi)}{\cos \alpha} \right\} \\
 &= b \frac{\cos(\omega t + \varphi - \alpha)}{\cos \alpha}
 \end{aligned}$$



In Ca een z.g. knoep. Men kan dit vergelijken met het muurpunt van het touw.

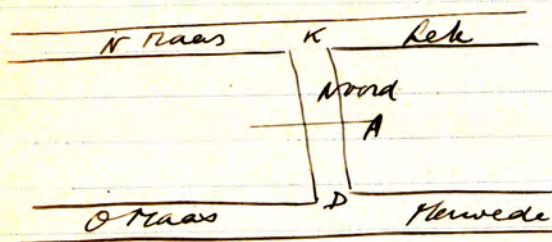
Bij water heeft men steeds behalve de vert. gety sinussoide, nog de stroomsinussoide en verhangsinussoide (geen enkelvoudig)

Van de stroomgolfbeweging is Ca een knooppunt, van de vert. gety bew. is Ca geen knooppunt, eerder te vergelijken met een los uiteinde van een touw, omdat getybeweging er hoer oploopt dan in A

In Cb: Hier is de vert. gety bew. steeds = 0, doch de stroom bew. is tegenover.

Wat de vert. bew. betreft is dit dus te vergelijken met een vast uiteinde, wat

de stroombew. aangaeft is Of te  
vergelijken met een los uiteinde.



Rivier de Noord  
zonen bovenwater

Opsteld dat  
amplitude &  
phase op  
de Kiekerwe

ande Maas oplyk sijn, dan is er in  
punt A geen stroom, wel getyrijning.  
In A kan een dam worden gedaacht  
waar ter weersyden het water steeds  
evenhoof staat.

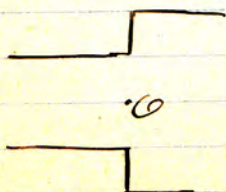
Gaande van dort naar Alblasendam  
moet de stroomswaarde den steeds  
afnemen tot 0, tenyde de vertikale  
gety beweging iets toeneemt. (Noord  
deze toename bedraagt wellen we  
later zien.)

Getygolven worden voorgesteld door de  
formules

$$h = a \cos n(t - \frac{x}{w} + p)$$

$$s = b \sin n(t - \frac{x}{w} + p)$$

( $w =$  voortpl. snelh.  $= \sqrt{g}$  en  $n = \frac{2\pi}{T}$   
orden  $\lambda = wT$ )



Opheer in 't algemeen kennen  
den gebruik maken der  
overgangswaarde in 0  
de volgende formules  
worden afgeleid

Von  $\mathcal{Q}$  geldt:

$$\underline{a_1 + a_1' = a_2(1)} \quad \text{en} \quad \underline{b_1(a_1 - a_1') = b_2 a_2(2)}$$

dus:

ampl. rest <sup>in</sup>  $\xi_{12}$  + ampl. teruggek. <sup>rest</sup>  $\xi_{12}$  =  
ampl. rest. doorgaand  $\xi_{12}$  (in  $\mathcal{O}$ )

bwa = ampl. stroombew., dus von  
de stroombew. sinusvolde geldt iets  
dergelijks, niet veranderend het - teken.

Von afgesloten kanaal (geval  $\alpha$ ) is  
 $b_2 w a_2 = 0$ , omdat  $b_2 = 0$  is en  $a_2$   
~~is~~ niet  $\infty$  groot wordt.

dus is  $b_1 w a_1 = b_1 w a_1'$  von  $\mathcal{O}$ .

of ampl. invallende stroombew. =  
ampl. teruggekaatste stroombew.

d.i. samen in  $\mathcal{O} = 0$ .

Von kanaal uitmonderend in de zee  
(geval  $\beta$ )  
of in een groot meer is  $a_2 = 0$ ,  
~~terwijl  $b_2$  niet oneindig groot kan~~  
~~worden, dus  $b_2 a_2 w =$  stroomampl~~  
dus is volgens (1)

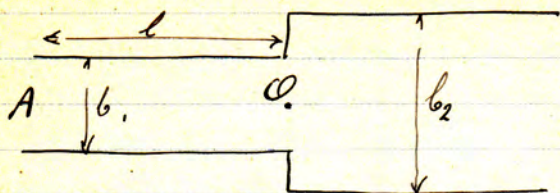
$$a_1 + a_1' = 0. \quad \text{of} \quad a_1 = -a_1'$$

Voorts kan in (2)  $b_2 a_2$  alle waarden  
aannemen omdat  $a_2 = 0$  en  $b_2 = \infty$

Voor geval (1) is  $a_1 = a_1'$   
dus  $\underline{a_2 = 2a_1}$  in  $\mathcal{O}$

Von geval (2) is  $a_1 = -a_1'$   
dus  $\underline{2a_1 b_1 = a_2 b_2}$  in  $\mathcal{O}$   
of  $2 \times$  stroomampl. in kanaal = stroom  
ampl. in  $\mathcal{O}$ .

# Algemeene interpretatie



In  $l$  verandert het profiel (breedte)

$$h_O = (a_1 + a_1') \cos n(t + p)$$

$$h_A = a_1 \cos n(t + \frac{l}{w} + p) + a_1' \cos n(t - \frac{l}{w} + p) =$$

$$= a_1' \left[ \frac{a_1}{a_1'} \cos(t + \frac{l}{w} + p) + \cos(t - \frac{l}{w} + p) \right]$$

Stel  $\frac{a_1}{a_1'} = \tan \delta$

$$= a_1' \left[ \tan \delta \cos(t + \frac{l}{w} + p) + \cos(t - \frac{l}{w} + p) \right]$$

$$= (a_1 + a_1') \cos \frac{nl}{w} \cos n(t + p) -$$

$$- (a_1 - a_1') \sin \frac{nl}{w} \sin n(t + p)$$

Stel  $\frac{a_1 + a_1'}{a_1 - a_1'} \tan \frac{nl}{w} = \tan \beta$  (dat mag

omdat beide termen getalle voorstellen)

$$h_A = (a_1 - a_1') \sin \frac{nl}{w} \left\{ \frac{\cos f \cos n(t+p) - \sin f \sin n(t+p)}{\cos f} \right\}$$

$$= \underline{2 \cos \{n(t+p) + f\}}$$

terwijl  $h_0$  geschreven kan worden als

$$h_0 = \underline{2 \frac{\cos f}{\cos \frac{nl}{w}} \cos n(t+p)}$$

$$\frac{nl}{w} = 2\pi \frac{l}{\lambda}$$

Verhoud der amplituden  $= h_A \text{ e } h_0$   
is  $2$  en  $2 \frac{\cos f}{\cos 2\pi \frac{l}{\lambda}}$

terwijl faseverschil  $= f$  is

Amplitude in  $O$  groter dan in  $A$   
als  $f < 2\pi \frac{l}{\lambda}$ , dus als  $b_2 < b_1$ .

$$\tan f = \frac{b_2}{b_1} \tan \frac{nl}{w}$$

Voor  $b_2 = 0$  is  $\tan f = 0$  of  $\cos f = 1$ .

$$h_0 = \frac{2}{\cos \frac{nl}{w}} \cos n(t+p)$$

$h_0$  is dus groter naarmate  $\cos \frac{nl}{w}$   
kleiner wordt of  $\cos 2\pi \frac{l}{\lambda}$  kleiner wordt.  
dus naarmate  $2\pi \frac{l}{\lambda}$  toeneemt tot  $\frac{1}{2}\pi$   
of  $\frac{3}{2}\pi$ , dus naarmate  $l = \frac{1}{4}\lambda$  of  
 ~~$l = \frac{3}{4}\lambda$~~  toeneemt. ( $\cos \pi = 0$ )

Voor  $l = \frac{1}{4}\lambda$  wordt  $2\pi \frac{l}{\lambda} = 2\pi \times \frac{1}{4} = \pi$  en  
 $\cos 2\pi \frac{l}{\lambda} = 0$ .  $h_0$  dus  $\infty \cos n(t+p)$

Voor  $b_2 = \infty$  is  $\tan f = \infty$  of  $\cos f = 0$   
 $h_0$  dan  $= 0$ .

Men kan dat vergelijken met een  
homogene staaf. Bij lengte =  $\frac{1}{4} \lambda$   
sterke meestilling. Weliswaar met  
een uitwijking = oneindig groot, doch  
de max. amplitude treedt op bij  
 $l = \frac{1}{4} \lambda$ . (usampankie)

Bij Alblasserdam zal de vloed  
iets hooger moeten oplopen dan  
bij Dordrecht of Krimpener - tenminste  
als de ergving dit niet weer  
teniet doet.

De Wamty moet dus steeds iets  
grooter amplitude hebben dan  
andere plaatsen.

Dat de wortpl. sullheid evenedig  
moet zijn met  $V_0$  blijkt wanneer  
men bedenkt, dat bij groote diepte  
meer water opgestuwd moet worden  
(contourteitverg) en het die  
opstuwning is die de wortplanting  
bepaalt.

Indien  $b_2 = \infty$ , dan zou men dit  
geval kunnen vergelijken met een  
slingerende staaf met een  $\infty$  ware  
eindpuntbelasting (= vast punt)

De frequentiemeter van wisselstroom  
berust op meetillen van  $\frac{1}{4} \lambda$

Voor  $b_2 > b_1$  moet

$$\frac{\cos f}{\cos \frac{nl}{w}} < 1$$

$$\text{of } f > \frac{nl}{w}$$

$$\text{of } \tan f > \frac{nl}{w}$$

$$\text{of } \frac{b_2}{b_1} > 1 \quad \text{of } b_2 > b_1$$

## Gedempte trillingen (§ 137)

$$y = A \sin \omega t \quad (\text{ongedempte trilling})$$

$$y_1 = \underbrace{(B e^{-at})}_{\text{amplitude}} \sin \omega t \quad (\text{gedempte "})$$

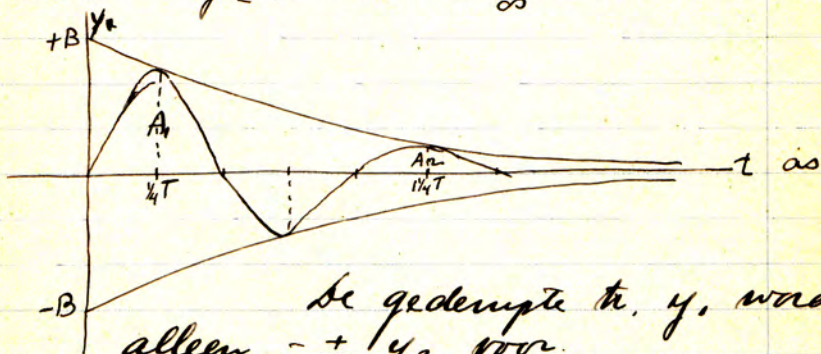
Bij gedempte tr. is  $B e^{-at}$  dus de amplitude = de verzameling van uiterste waarden = de meeth. plaats der uiterste waarden

$\sin \omega t$  is  $\max = 1$ .

$$t=0. \quad y_2 = B e^{-at} = B e^0 = B.$$

$$t=1 \quad y_2 = \dots = B e^{-a} = \frac{B}{e^a} < B. \quad (\text{a/m})$$

$$t=\infty \quad y_2 = B e^{-\infty} = \frac{B}{\infty} = 0$$



De gedempte tr.  $y_1$  wordt alleen  $= \pm y_2$  voor.

$$\sin \omega t = 1. \quad (\omega t = \frac{2\pi t}{T})$$

$$\text{dus } t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, \dots$$

anders is altijd  $y_1 < y_2$

In die punten raakt de gedempte trilling aan de amplitude-kromme.

Die raakpunten geven dus niet de hoofdpunten van de gedempte trilling weer!

Wate van demping?

$$\begin{aligned} \text{voor } t = \frac{1}{4}T \quad \text{ampl.} &= B e^{-a \frac{1}{4}T} \\ \text{" } t = 1 \frac{1}{4}T \quad \text{"} &= B e^{-a \cdot 1 \frac{1}{4}T} \end{aligned}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-a \frac{1}{4}T}}{e^{-a \cdot 1 \frac{1}{4}T}} = \frac{e^{+aT}}{1}$$

$$\lg \frac{A_1}{A_2} = aT$$

$\frac{1}{T}$

$a$  noemt men logar. decrement =  $\delta$

$\delta = 0.001$  is bv. weinig gedempt.  
= 0.1 xev sterk gedempt.

Hoe komt men aan  $e$ ?

$$y = a^x$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

ook:  $y = \log x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{x+\Delta x}{x}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Neem  $\frac{\Delta x}{x} = \delta$  dan is:  $\frac{1}{x} \log \left\{ \lim_{\delta \rightarrow 0} (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} \right\}$   
dit is  $e$

Reeksontwikkeling:

$$(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = 1 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{24} \frac{1}{\delta^4} + \dots$$
$$= 1 + 1 + \frac{1(1-\delta)}{1 \cdot 2} + \dots$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

= 2.718281828... (met opetereend)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e$   
hier  $e$  dus als openstaand, dat geeft gemak

Is  $y = e^{\log x}$

dan is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} e^{\log e} = \frac{1}{x}$$

dus  $y = \ln x$   
 $y = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\boxed{10 \log x = \frac{1}{2.3026} \ln x}$$

modulus

$\ln$  betekent log. naturalis.

Britsche log. kunne door verm. met 2.3026 worden teruggebracht tot

Nepersche log. Vóórtyl dus geen 2 tafels noodig, doch men wil het met Britsche af-kunnen. Nepersche tafel werd vóór de Britsche tafel gemaakt.

Bewijs dat  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

Reeks v. MacLaurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \dots$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

Kom  $x=i$ :

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

want  $i^2 = -1$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = +1$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

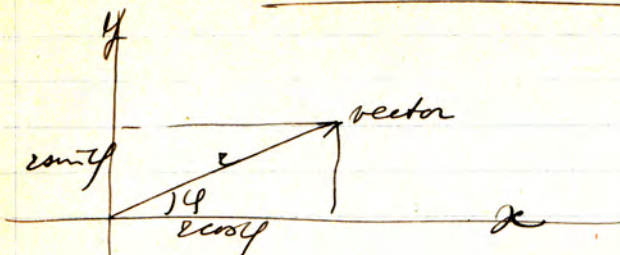
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cos x} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\sin x}$

want te bew. met reeks v.  
Maclaurin.

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$
$$= \cos x - i \sin x.$$



# Vectoorvoorstelling.



Vector met hor. comp  $r \cos \varphi$   
en vert. comp.  $r \sin \varphi$

Geef hor comp zonder meer aan  
doch vert. comp door een toegewezen  
vanda of operator  $i$ .

Symbolische schryfwijze  $r \cos \varphi + i r \sin \varphi$

$i$  is een operator, die de grootte  
 $r \sin \varphi$   $90^\circ$  naar <sup>links</sup> draait.  
(hor.) (vert.)

Wat is de betekenis van die  $i$ ?

Pas nog eens dezelfde operator toe.

dus:  $i \times i r \sin \varphi = i^2 r \sin \varphi$

dus  $2 \times 90^\circ = 180^\circ$  gedraaid

geeft  $- r \sin \varphi$

$i$  dus  $\sqrt{-1}$ .

Zoo moet men ook nagaan of optellen,  
afrekken, vermen, deelen, quadr. watektr.  
en. opgaat bij den symboliek.  
althans wat dat alles voorstelt.

Met wrijving en demping

IV

cont. vergl:  $\frac{\partial s}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t}$  (I)

dyn vergl:  $\frac{\partial s}{\partial t} + ks = -bgq \frac{\partial h}{\partial x}$  (II)

geg:  $b, g, q, k$

gev:  $s$  en  $h$  als f. van  $x$  en  $t$ .

Opl.:

Probeer te voldoen met gedempte trilling

trilling:  $e^{int}$  ( $= \cos ut + i \sin ut$ )

demping:  $e^{ux}$  (over de afstand  $x$ )

Probeer dus de opl:  $h = a \cdot e^{int + ux}$   
 $s = c \cdot e^{int + ux}$

$w$  is geg. n.l.  $\frac{2\pi}{12425}$

Te bepalen  $u$  en verhouding  $\frac{a}{c}$

Substitueer de voorgestelde opl:

in I:

~~$c u e^{int + ux} = -b a i n e^{int + ux}$~~

in II

$c i n + k c = -b g q a u$

be factor  $e^{int + ux}$  valt dus afblijft waf.

hoop naar  $\frac{a}{c}$  en verdor deeling. Dit geeft  $\frac{a}{c}$  verdupt dan  $\frac{a}{c}$ .

$$\frac{u}{in+k} = \frac{in}{gg \cdot u}$$

$$u^2 = \frac{in(in+k)}{gg} = \frac{n(ki-n)}{gg}$$

$$u_1 = +\sqrt{\frac{n(ki-n)}{gg}} \quad u_2 = -u_1$$

Nu  $\frac{a}{c}$ :

$$\frac{a}{c} = \frac{u}{-bin} = \frac{iu}{bn} \neq$$

$$\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{i\sqrt{\frac{n(ki-n)}{gg}}}{bn} \quad \left(\frac{a}{c}\right)_2 = -\left(\frac{a}{c}\right)_1$$

Vadere herleiding van  $u$ .  
 $u$  is een complex getal.

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{n(ki-n)}{gg} & \text{stel } \frac{k}{n} &= \tan \theta \\ &= \frac{n^2\left(\frac{k}{n}i-1\right)}{gg} = \frac{n^2(i\tan\theta-1)}{gg} = \frac{n^2(i\sin\theta-\cos\theta)}{gg\cos\theta} \\ &= \frac{-n^2}{gg\cos\theta} (\cos\theta-i\sin\theta) = \frac{-n^2 e^{-i\theta}}{gg\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dus } u_1 &= i \frac{n \cdot e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{gg\cos\theta}} = \frac{ni(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2})}{\sqrt{gg\cos\theta}} = \\ &= \frac{n(\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2})}{\sqrt{gg\cos\theta}} = \underbrace{\frac{n\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{gg\cos\theta}}}_{\text{reel}} + i \underbrace{\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{gg\cos\theta}}}_{\text{imag.}} \end{aligned}$$

$u_2 = -u_1$ .

oplossingen dus:

$$1^o \left\{ \begin{aligned} h &= a e^{int+u_1 x} \\ s &= c \cdot e^{int+u_1 x} \end{aligned} \right. \quad c = -\frac{\sin a}{u_1} a$$

$$2^o \left\{ \begin{aligned} h &= a' e^{int+u_1 x} \\ s &= c' e^{int-u_1 x} \end{aligned} \right. \quad c' = +\frac{\sin a'}{u_1} a'$$

2<sup>o</sup> opl. voortzetten.

$$h = a' e^{i n t - \sigma x - i \left( \frac{n \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{g \cos \theta}} \right) x}$$

$$\left( \sigma = \frac{n \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{g \cos \theta}} \text{ en } \tau \theta = \frac{k}{n} \right)$$

$$= a' e^{-\sigma x} e^{i \left( n t - \frac{n \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{g \cos \theta}} x \right)}$$

demping  
term

hierin het reële deel  
geeft de slingerbew.

$$\text{Vergelyk } h = \mu e^{-\sigma x} \cos n \left( t - \frac{x}{w} + p \right)$$

In analogie dus:

$$w = \frac{\sqrt{g \cos \theta}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \text{voortpl. snelh.}$$

Schryf ten slotte  $a'$  als  $\mu e^{i n p}$   
 $p$  wordt dan willek. beginphase

$$h = \mu e^{-\sigma x} e^{i n \left( t - \frac{x}{w} + p \right)}$$

2<sup>o</sup>  
opl

Neem nu y reële deel:

$$= \mu e^{-\sigma x} \cos n \left( t - \frac{x}{w} + p \right)$$

$$s = \frac{b i n}{w_1} \mu e^{-\sigma x} \cos n \left( t - \frac{x}{w} + p \right)$$

$$\sigma = \frac{n \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{g \cos \theta}} \text{ en } w = \frac{\sqrt{g \cos \theta}}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

Merk op dat de  $w$  weer de factor  $\sqrt{g}$   
heeft, doch nu iets afgezwakt door de  
demping.

$$\sigma = \frac{n \sin \frac{\theta}{2}}{w \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{n}{w} \tan \frac{\theta}{2}$$

In volgorde:  $\underline{w} = \sqrt{gq} \cdot \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\cos \frac{1}{2} \theta}$ , waarin  $\theta = \frac{k}{n}$

$$\underline{\sigma} = \frac{n}{w} \tan \frac{\theta}{2}$$

s nof wat verder herleiden:

$$\underline{f} = \frac{b \sqrt{gq} \cos \theta}{m e^{-i \frac{\theta}{2}}} \mu e^{-\sigma x} \sin \left( t - \frac{x}{w} + p \right)$$

$$= b \sqrt{gq} \cos \theta \mu e^{-\sigma x} \sin \left( t - \frac{x}{w} + p + \frac{\theta}{2n} \right)$$

$$= b \sqrt{gq} \cos \theta \mu e^{-\sigma x} \cos n \left( t - \frac{x}{w} + p + \frac{\theta}{2n} \right)$$

Verhouding der ampl.  $\frac{e}{a} = b \sqrt{gq} \cos \theta$   
 $= b w \cos \frac{1}{2} \theta$

phaseverval =

verval tuschen  $w$  en  $s$  is  $\frac{\theta}{2n}$  (1 ylt van)

### Vrijhedenstaat.

$$h = \mu e^{-\sigma x} \cos n \left( t - \frac{x}{w} + p \right)$$

$$s = \gamma \mu e^{-\sigma x} \cos n \left( t - \frac{x}{w} + p + \varphi \right)$$

waarin:

$$\tan \theta = \frac{k}{n}$$

$$w = \sqrt{gq} \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\cos \frac{1}{2} \theta}$$

$$\sigma = \frac{n}{w} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\gamma = \frac{e}{a} = b w \cos \frac{1}{2} \theta$$

$$\varphi = \frac{\theta}{2n}$$

$\mu$  = ampl. van  $h$ .

$n = \frac{2\pi}{T}$  der trilling.

Waar zit de levende kracht in?

V Wat is  $\frac{\sqrt{\cos \theta}}{\cos \frac{\theta}{2}}$  in de veng. van w?

dit moet kleiner zijn dan 1.

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1.$$

$$\text{of } \sqrt{\cos \theta} < \cos \frac{\theta}{2}$$

waarmee dit dus bewezen is.

§ 142

de algemene opl. is een lineaire combinatie van beide

$$a + a' = 1,47$$

$$ax + by - \frac{ibn}{u} (ae^{+ux} - a'e^{-ux}) = 0$$

$$h = ae^{int+ux} + a'e^{int-ux}$$

$$s = -\frac{ibn}{u} a e^{int+ux} + \frac{ibn}{u} a' e^{int-ux}$$
$$= \frac{ibn}{u} (-a e^{int+ux} + a' e^{int-ux})$$

waarin  $a$  en  $a'$  de integratieconst.

Wanneer men verder wil komen moet men steeds de  $e^{\dots}$  formules gebruiken, omdat men daar zoo handig mee werkt. Als eindopl. gebruikte men de  $\cos$  en  $\sin$  formules.

Stel als beginvoorwaarden:

$$x = 0$$

$$h = h_0$$

$$s = s_0$$

Opus:  $h$ , en  $s$ , van  $x = l$ .

Begincondities:

$$h_0 = (a + a') e^{int}$$

$$s_0 = \frac{ibn}{u} (-a + a') e^{int}$$

Hiervan  $a$  en  $a'$  op te lossen.

$$\begin{aligned}
 a e^{iut} + a' e^{-iut} &= h_0 \\
 -a e^{iut} + a' e^{-iut} &= \frac{u}{ibn} s_0
 \end{aligned}$$


---


$$a' e^{-iut} = \frac{1}{2} \left( h_0 + \frac{u}{ibn} s_0 \right)$$

$$a e^{iut} = \frac{1}{2} \left( h_0 - \frac{u}{ibn} s_0 \right)$$

Opentst. in de algem. opl. geeft de bepaalde opl:

$$h = \frac{h_0 - \frac{u}{ibn} s_0}{2} e^{ux} + \frac{h_0 + \frac{u}{ibn} s_0}{2} e^{-ux}$$

$$s = \frac{ibn}{u} \left\{ -\frac{h_0 - \frac{u}{ibn} s_0}{2} e^{ux} + \frac{h_0 + \frac{u}{ibn} s_0}{2} e^{-ux} \right\}$$

$x = l$  nemen:

$$h_l = \frac{h_0 - \frac{u}{ibn} s_0}{2} e^{ul} + \frac{h_0 + \frac{u}{ibn} s_0}{2} e^{-ul}$$

$$s_l = \frac{ibn}{u} \left\{ -\frac{h_0 - \frac{u}{ibn} s_0}{2} e^{ul} + \frac{h_0 + \frac{u}{ibn} s_0}{2} e^{-ul} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 h_l &= \left\{ \frac{1}{2} e^{ul} + \frac{1}{2} e^{-ul} \right\} h_0 + \left\{ -\frac{u}{2ibn} e^{ul} + \frac{u}{2ibn} e^{-ul} \right\} s_0 \\
 &= H_h h_0 + H_s s_0
 \end{aligned}$$

idem:

$$\begin{aligned}
 s_l &= \left\{ -\frac{ibn}{2u} (e^{ul} - e^{-ul}) \right\} h_0 + \left\{ \frac{1}{2} e^{ul} - \frac{1}{2} e^{-ul} \right\} s_0 \\
 &= S_h h_0 + S_s s_0
 \end{aligned}$$

waarbij  $\underline{\underline{S_s = H_h}}$

ook voor het tweede vak blijft het verband lineair:

1<sup>o</sup> homogene deel

begin  
 $h_0$   
 $s_0$

eind  
 $h_1 = H_h' h_0 + H_s' s_0$   
 $s_1 = S_h' h_0 + S_s' s_0$

2<sup>o</sup> homogene deel

begin  
 $h_1$   
 $s_1$

eind  
 $h_2 = H_h'' h_1 + H_s'' s_1$   
 $s_2 = S_h'' h_1 + S_s'' s_1$

$$\text{of } h_2 = H_h h_0 + H_s s_0$$

$$s_2 = S_h h_0 + S_s s_0$$

dit is gemakkelijkt of te beiden

$$H_2 = H_h'' H_h + H_s'' S_h \text{ enz.}$$

Proef.

Wat wordt  $h_1$  en  $s_1$  indien het vak uindigt?

~~Daar is  $s_1 = 0$ , daarom moeten~~

~~$S_h' = 0$  en  $S_s' = 0$  zijn, want  $h_0$  en  $s_0$  zijn niet 0.~~

~~$$S_h = \frac{ibn}{a} (e^{ul} - e^{-ul}) = 0.$$~~

~~$$S_s = \frac{1}{2} (e^{ul} + e^{-ul}) = 0.$$~~

~~kenoef, omdat  $S_s - H_h = 0$~~

~~$$h_1 = H_s s_0 \text{ wordt.}$$~~

$$S_h h_0 + S_s s_0 = 0$$

$$s_0 = -\frac{S_h}{S_s} h_0.$$

subst. in  $h_1 = H_h h_0 + H_s s_0$

$$h_1 = \left( H_h - \frac{S_h H_s}{S_s} \right) s_0 = \frac{H_h^2 - S_h H_s}{S_s} s_0$$

$$h_1 = \frac{1/4(e^{ul} + e^{-ul})^2 - 1/4(e^{ul} - e^{-ul})^2}{1/2(e^{ul} + e^{-ul})} h_0 = \underline{\underline{e^{-ul} h_0}}$$

Thans vinden het vak eindigt in een binnenzee?

Dan  $h_1 = 0$ .

$$h_0 = -\frac{H_3}{H_2} s_0$$

$$s_1 = \left( -\frac{S_h H_3}{H_h} + s_1 \right) s_0 = \frac{S_1 H_h - S_h H_3}{H_h} s_0$$

$$\text{of } \underline{\underline{s_1 = e^{-ul} s_0}}$$

II

Opeulen van verschillende diepte naast elkaar (§ 141)

Het water loopt zonder weerstand door het aaneenliggende vlak der naast elkaar gelegen opeulen, dus voor elke  $x$  één  $h$ .

één continuïteitsvergelijking.

mèér bewegingsvergelijkingen, nl. voor elk kanaal een.

$$S = s_1 + s_2 + \dots, \quad b = b_1 + b_2 + \dots$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + k_1 s_1 = -b_1 g q_1 \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} + k_2 s_2 = -b_2 g q_2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

Nu is

$$s_i = -\frac{ibn}{w_i} a_i \quad \text{int} + ux \quad \text{en}$$

Dus is

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = ins_1, \quad \frac{\partial s_2}{\partial t} = ins_2 \quad \text{en}$$

Substitueerd in de bew. verg.:

$$m_1 s_1 + k_1 s_1 = -b_1 g g_1 \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\text{of } S_1 = -\frac{b_1 g g_1}{m_1 + k_1} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad S_2 = -\frac{b_2 g g_2}{m_2 + k_2} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ enz.}$$

$$S = -\sum \frac{b g g}{m + k} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad \text{Hier is de nieuwe bewegingsverg.}$$

De cont. verg. blijft gewoon.

Men kan dus als het ware met één enkele deel werken, mits men wat andere formules gebruikt.

Bepaling weerstandscoeff. k. (§ 144)

k moet zodanig aan de constante van hysteresis gekoppeld worden, dat de weerstandsarbeid gelijk blijft.

De gewone formule luidt:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g}{c^2 g} v^2}$$

$$(i = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{c^2 g}) \quad \text{of ook } (v = c \sqrt{hi - \frac{a^2}{g}})$$

De nieuwe formule luidt:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - kv.} \quad i = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - kv = \frac{a}{g} - kv.$$

$$\text{De weerstand } W = \sum \frac{g}{c^2 g} v^2 = \sum kv.$$

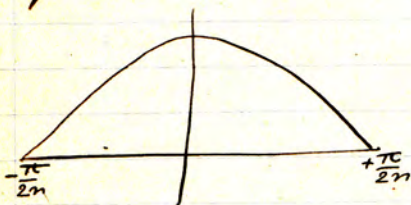
W is per massa-eenheid.

Bekomend nu een pedicel de golflijn.

n.l. die tussen 2 stroomkenteringen.

$$\text{Arbeid} = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} W v dt$$

Tussen  $t = -\frac{\pi}{2n}$  en  $t = +\frac{\pi}{2n}$  is de snelheid pos.



Voorwaarde is dus:

$$k \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} v^2 dt = \frac{\rho}{c^2 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} v^3 dt$$

Nu is  $v = v_{\max} \cos nt$ .

$$\text{en } \int \cos^2 \alpha d\alpha = \int \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

$$2 J_1 = \int (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) d\alpha = \int d\alpha = \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{n}$$

$$J_1 = \frac{\pi}{2n}$$

$$J_2 = \int \cos^3 \alpha d\alpha = \int \cos^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \int \cos^2 \alpha d \sin \alpha$$

$$\int u dv = uv - \int v du \text{ dus}$$

$$J_2 = \cos^2 \sin \alpha - \int \sin \alpha d \cos^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \sin \alpha - \int \sin \alpha \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) d\alpha$$

$$= \cos^2 \sin \alpha + 2 \int \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha$$

$$= \cos^2 \sin \alpha + 2 \int \cos \alpha d\alpha = 2 \int \cos^3 \alpha d\alpha$$

$$3 J_2 = \cos^2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}}$$

$$= (2 + 2) \cdot \frac{1}{n}$$

$$J_2 = \frac{4}{3n}$$

of

$$k = \frac{\rho}{3\pi} \cdot \frac{\rho v_{\max}}{c^2 \rho}$$

Voer weer in  $\gamma\theta = \frac{k}{n}$ .

Bij twee naast elkaar liggende quaden  
is

$$k_1 : k_2 = \frac{v_{m1}}{c_1^2 q_1} : \frac{v_{m2}}{c_2^2 q_2}$$

$$\text{en } s_1 : s_2 = \frac{b_1 q_1}{in + k_1} : \frac{b_2 q_2}{in + k_2}$$

$$\text{of } v_1 : v_2 = \frac{1}{in + k_1} : \frac{1}{in + k_2} = \frac{1}{1 - it\gamma\theta_1} : \frac{1}{1 - it\gamma\theta_2}$$

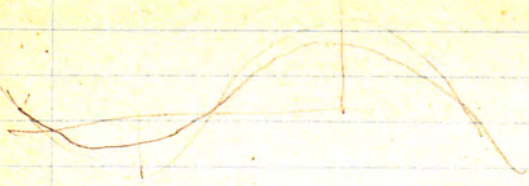
$$= \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1} : \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} = \frac{\cos\theta_1}{e^{-i\theta_1}} : \frac{\cos\theta_2}{e^{-i\theta_2}}$$

$$= \cos\theta_1 e^{i\theta_1} : \cos\theta_2 e^{i\theta_2}$$

Of is  $v_{m1} : v_{m2} = \cos\theta_1 : \cos\theta_2$  (reëel deel)

$$\text{Dus } \gamma\theta_1 : \gamma\theta_2 = \frac{\cos\theta_1}{c_1^2 q_1} : \frac{\cos\theta_2}{c_2^2 q_2}$$

$$\frac{\cos^2\theta_1}{\sin^2\theta_1} : \frac{\cos^2\theta_2}{\sin^2\theta_2} = c_1^2 q_1 : c_2^2 q_2$$


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$= \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$= \cos^2 \theta_1 + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cdot \tan \theta_2$$

## Cyclusbeweging met tegenoverhang.

Dit maakt de kwestie veel moeilijker.

Het best is misschien de stroom van boven in de dempingsfactor te verwerken

Nemen vloed kromme en eb kromme apart; voor vloed p negatief nemen, en voor eb p positief nemen.

Von een bepaald punt moet de eb + vloed  $12^{\circ} 25'$  bedragen.

Hoedsinusoid is dus stroomopwaarts gaande sterk gedempt,

Ebsinusoid is stroomopwaarts gaande sterk negatief gedempt ook letter op phase.

En en ander moet aan de praktijk optoets worden om te zien in hoeverre p met het tegenoverhang evenredig is.

Forchheimer geeft op blz 247 een methode, waar men voor ons geval weinig verder mee komt. Hij behandelt de toernivieren, waar het gevolg van regen een sinusoidaal verloop der waterspiegel kan optreden. Hij werkt dus met groote verhangen en mag daardoor h tegenover H en H, tegenover H verwaarloosen. Von beneden rivieren, mag dit natuurlijk oversien.

$$J = \frac{u^2}{c^2 R} + \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial r} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$$

De grondvergelijking voor veranderende strooming is

$$J = \frac{u^2}{c^2 R} + \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Wrijvingsarbeid = vermindering levende kr. + op plaats

$$\frac{u^2}{c^2 R} dx = \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial x} dx + \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial t} dx + J dx$$

$$= \left( \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{u} \right) dx = J dx$$

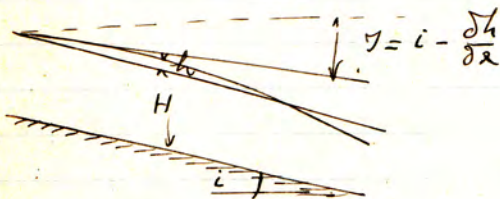
(want  $\frac{\partial x}{\partial t} = u$ )

Hierna is de grondvergelijking bewezen

Van beide rechthoekige driehoeken als van een grote driehoek:

$$J = \frac{u^2}{c^2 h} + \frac{1.00 \partial u^2}{2g \partial x} + \frac{1.04}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{0.016 u}{g} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Deze formule is belangrijk (Boussinesq)



$u$  en  $H$  const  
 $u_1$  en  $h$  variabel

$$i - \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{u^2}{c^2 H} + \frac{1.00}{2g} \frac{\partial (H+u)^2}{\partial x} + \frac{1.04}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{0.016 u + u_1}{g} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Thans  $u$ , tegen  $u_1$  en  $h$  tegen  $H$  te beschouwen, verondersteld (een zeer vergaande aanname)

$$- \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1.00 u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1.04}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{0.016 u}{g H} \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

bijf. naar  $x$  om in de const. verg. te

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1.08}{g} u \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1.04}{g} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - \frac{0.016}{g} \frac{u}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = 0. \quad (1)$$

De continuïteitsberg:  $\rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} = -6 \frac{\partial h}{\partial t}$   
 $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial [(u+u_1)(H+h)]}{\partial x} = 0.$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u_1}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

(dit weer bij verwaarloozing  $u_1$  en  $h$ .

$$\text{of } \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{H} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{u}{H} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - \frac{u}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= -\frac{1}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - \frac{u}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} &= -\frac{1}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{u}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \end{aligned} \right\}$$

Sub in in (1)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{2.14}{1.021} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - \frac{gH - 1.08 u^2}{1.074} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0.$$

Meridian wordt veldvee door elke  
 functie van de gedaante  
 $h = F(x - \omega t)$

$$\omega = \text{voortplantingsnelheid} \\ = 1.029 u \pm \sqrt{0.02 u^2 + 0.96 gH}$$

bes 2 waarden voor de voortpl. sn.  
 al naar gelang stroomopwaarts of  
 stroomafwaarts

voor  $u > \frac{g}{1.085 c^2}$  kunnen kleine  
 golven niet meer stroomopwaarts  
 loopen. Dit verhang  $\frac{g}{1.085 c^2}$  noemt  
 men de grens tusschen "vrievou" en  
 "wildbach".

# Methode de l'avis Broekman.

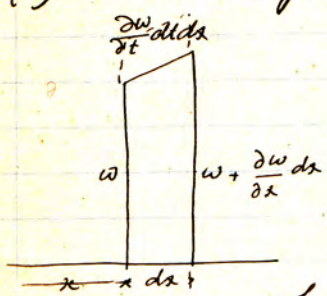
Aug 29. van 1916.

(1) 
$$I - \frac{\alpha}{\omega} b U^2 = \frac{\alpha}{\gamma} U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial t}$$

krachtterm                      versnell. term (k=ma)

$L = 1.11$   
 $\beta = 1.05$

(2) Contin. verg.



Voename v. h. vol. in den tijd dt = verschil in hoeveel. die door de dwarsdun  $\alpha$  e.  $\alpha dx$  stroomt

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} dt dx = U \omega dt - (U + \frac{\partial U}{\partial x} dx) (\omega + \frac{\partial \omega}{\partial x} dx) dt$$

$$= U \omega dt - U \omega dt - U \frac{\partial \omega}{\partial x} dx dt - \omega \frac{\partial U}{\partial x} dx dt$$

of 
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -U \frac{\partial \omega}{\partial x} - \omega \frac{\partial U}{\partial x}$$

hierin is de term met  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial x}$  verwaarloosd.

notaties:

tijd:  $t_m$  of  $t_n$   
 later  $t_{m+1}$                       1, 2, 3 op tr. men.  
 $t_{m+2}$   
 $t_{m+3}$

dwarsdun: 0, 1, 2, 3, ...,  $\mu$ ,  $\mu+1$ , ...  
 afplande  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{\mu+1}$

voor dwarsdun  $\mu$  op tijdstip  $t_m$  of  $t_{m+1}$   
 hoogte waterpeil bove bodem  $h_{\mu m}$                        $h_{\mu(m+1)}$   
 natte omkeh  $\lambda_{\mu m}$                        $\lambda_{\mu(m+1)}$   
 breedte  $b_{\mu m}$                        $b_{\mu(m+1)}$   
 enz.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{\mu(n+1)} = \frac{U_{\mu(n+1)} - U_{\mu n}}{\theta_{n+1}} \quad \text{als men } t_{n+1} - t_n = \theta_{n+1} \text{ neemt.}$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_{\mu(n+1)} = \frac{\omega_{\mu(n+1)} - \omega_{\mu n}}{\theta_{n+1}}$$

$$I_{\mu(n+1)} = \frac{(Z_{\mu} - h_{\mu(n+1)}) - (Z_{\mu+1} - h_{\mu+1}(n+1))}{L_{\mu+1}}$$

Indien  $U$  van teken verandert, verandert  $U^2$  niet, doch de weerstand is wel te gangezeld, zoodat in plaats van

$$-\frac{\lambda}{\omega} \phi(U)$$

geschreven moet worden:

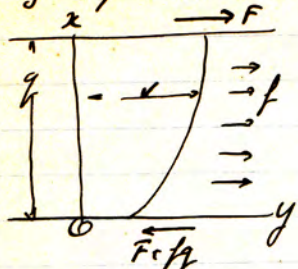
$$+\frac{\lambda}{\omega} \phi(U)$$

Indien  $U = 0$  wordt:

wordt (1):  $I = \frac{\beta}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$ , ~~waar  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  is want~~

en (2)  $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ .

X § 149 Luidervce.



Wijding even. met de  
2<sup>e</sup> macht van het sul.  
heidrovenal tuschen 2  
lagen.

$F$  = windkracht

$f$  = verhangkracht.

Noem  $y_x$  de tang. kr.

voor stationaire toestand moet zijn:

$$\frac{dy_x}{dx} + f = 0.$$

$$\text{of } y_x + fx = c.$$

$$\text{grenswaarde is : } x = q \quad \rightarrow \quad y_x = F.$$

hiermit  $c$  op te lossen

$$c = F + fq$$

$$\text{dus } y_x + fx = F + fq.$$

$$y_x = F + f(q - x)$$

voor  $x = 0$  is

$$y_{\text{boven}} = F + fq$$

1<sup>o</sup> dit moet grooter (of gelijk zijn) dan 0.

$$\text{dus } fq \geq -F$$

$$f \geq -\frac{F}{q}$$

We hebben aangenomen dat

$$y_x = \mu \left( \frac{dv}{dx} \right)^2$$

of beter tekenen, om het teken tot  
uitdrukking te laten komen:

$$y_x = \mu \left| \frac{dv}{dx} \right| \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{y_x} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \{F + f(q - x)\}^{1/2}$$

$$\text{Nu is } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ dus } \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$$

$$\text{dus } \frac{1}{\sqrt{f}} \int \{F + f(q-x)\}^{1/2} dx = \int \{F + f(q-x)\}^{-1/2} dx$$

$$v = -\frac{2}{3\sqrt{f}} \{F + f(q-x)\}^{3/2} + C \quad (147)$$

In bepaling van deze C de voorwaarde aan de bodem nemende.

$$y_x = F + f q \geq 0$$

$$\text{of } v \geq 0$$

(v = bodemmelheid)

$$y_0 = v | v | v.$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{v}} \{F + f q\}^{3/2}$$

Subst in (147)  $x=0$  dan moet dit vlyk wjn aan de bodemmelheid

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \frac{2}{3\sqrt{f}} \{F + f q\}^{3/2} + C = \frac{1}{\sqrt{v}} \{F + f q\}^{3/2}$$

$$C \text{ dus} = \dots \quad \text{in (148)}$$

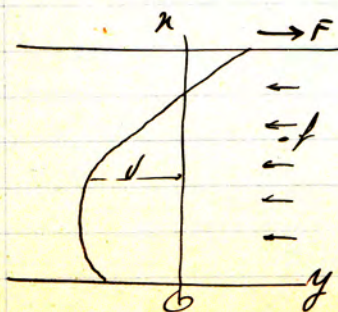
Noem de gemiddelde melheid  $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{\int_0^q v dx}{q}$$

dus  $\bar{v}$  te vinden.

2°

$$f = \frac{F}{q}$$



$y_x$  wordt op een bepaalde plaats  $= 0$

$$y_x = F + f(q-x) = 0$$

$$x = \frac{F + f q}{f}$$

Men vindt thans iets dergelyks voor de gem. snelheid  $\bar{v}$ , nl. voor  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{5}{2}$  machten, alleen sommit. tekenen verschillen.

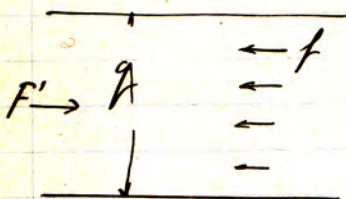
XI

§150. Kan men de windkracht door een "windkracht" (werkend als de verhangkracht) vervangen?

Zie hiervoor eerst § 54

Noem  $f$  de windkracht

$F'$  de vervangende kracht.



$$f = \text{verhangkracht} \\ = g \rho i$$

$$\text{dus: } \frac{F'}{g} = g \rho i = f.$$

Voor evenwicht:

$$F' = g \rho g i$$

$$i = \frac{F'}{g \rho g}$$

In het geheel genomen is  $w$  dan geen stroom. De opp. str. is gelijc aan de teruggaande bodenstroom.

$F$  veroorzaakt groter opwaaiing dan  $F'$ , die dezelfde grootte heeft.

Voor evenwicht:

$$F dx + \text{wrijv. kr.} = g \rho i g dx$$

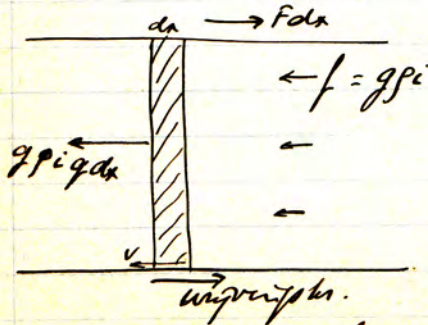
$$g \rho i g > F$$

$$i > \frac{F}{g \rho g}$$

Het komt dus van

de wrijvingskracht, dat

het verhang groter moet zijn



h. F veroorzaakt strooming bij  $\bar{v} = 0$   
 $\bar{F}'$  moet dan  $\approx 0$  genomen worden.  
 de verhangen kloppen niet.

Stiftstroom  $\bar{v}$  kan ontstaan door F zowel  
 als door  $F'$ , doch de verhangen zijn bij F  
 groter, omdat  $F'$  niet rekent met  
 de "circulaire" stroom, welke extra  
 wrijving veroorzaakt.

Des naaef hand: welke  $F'$  moet ik nemen,  
 in pl.v.  $\bar{F}$  ~~en~~ om dezelfde  $\bar{v}$  te krijgen  
 en wat verhangvermilt met de  
 werkelijkheid. Kunt daarbij op.

gebruik form. (148) of (149) voor de  
 melheid

a. neem om de afleiding te vereenvoudigen

$$\mu = \nu \frac{q^2}{\alpha^2} \quad (16)$$

of  $V_f = V_0 \frac{q}{\alpha}$

Voor het geval dat  $F = 0$  is, wordt

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{V_0} (g \rho_i q)^{1/2} + \frac{2 \alpha}{3 g \rho_i V_0} g (g \rho_i q)^{3/2} - \\ &\quad - \frac{4 \alpha}{15 (g \rho_i)^2 q V_0} (g \rho_i q)^{5/2} \\ &= \frac{\sqrt{g \rho_i q}}{V_0} \left( 1 + \frac{2}{3} \alpha - \frac{4}{15} \alpha \right) \\ &= \frac{\sqrt{g \rho_i q}}{V_0} \left( 1 + \frac{2}{5} \alpha \right) = \overset{cf R_i}{\text{zie H2 120 form (17)}} \end{aligned}$$

(geen wind, verhangstroom met waakt-  
 name van wewendige wrijving.)

$$L_i = \frac{\nu}{g \rho_i \left( 1 + \frac{2}{5} \alpha \right)^2 q} |\bar{v}| \bar{v}$$

Formule (149) kan men iets anders schrijven door invoering van een nieuwe letter  $\delta = \frac{F}{qf} = \frac{\text{windkracht}}{\text{verhagkracht}}$ .

gem. snelh:  $\bar{v} = \beta \sqrt{\frac{F}{\gamma}}$   
 waarin  $\beta$  een ingewikkelde vorm, welke voor de beide gevallen 1<sup>o</sup> en 2<sup>o</sup> verschillende is. (zie blz. 236 en 237)

Deze zelfde gem. snelh. moet thans tweez gbracht worden door  $F'$

Per vol. eenh. werkt dan  $\frac{F'}{q} + f$   
 Men zou dit ook  $gpi$  kunnen noemen, en de  $i$  daarnaar bepalen (alleen verhaagste)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{gpi q}{\gamma} (1 + \frac{2}{5} \alpha)}$$

$$gpi = \frac{\gamma}{(1 + \frac{2}{5} \alpha)^2 q} |\bar{v}| \bar{v}$$

$$F' + qf = \frac{\gamma}{(1 + \frac{2}{5} \alpha)^2} |\bar{v}| \bar{v}$$

Koer in nieuwe letter  $\omega = \frac{F'}{F}$   
 dan wordt

$$\omega = \frac{|\beta| \beta}{(1 + \frac{2}{5} \alpha)^2} - \frac{1}{\delta}$$

Met deze formule kan men tabel 46 berekenen, die de waarden voor  $\omega$  geeft. Deze waarden zijn steeds iets groter dan 1.

$F'$  moet dus eenig percentage meer zijn dan  $F$  om dezelfde gemiddelde stroom te kunnen veroorzaken.

Wegmaals:

Er is een zeker verhang en een opp. kr.  $F$

$$f = q \rho_i$$

We verwangen de opp. kr. door een  
gelijken. verdeelde uitsluiting  $F'$   
maar zo, dat  $\bar{v}$ , dus de totaalstroom  
(duftstroom) dezelfde blijft.

We krijgen dan als substitutieformule  
 $q \rho_i + \frac{F'}{r}$   
verhangen + (tegen of mee) verhangen.  
Bere beide samen geven een zeker  
verhang  $i'$

Het verhang  $i'$  is zeker kleiner dan  
het werkelijke uit. eenp. percentage

Stationaire opwaaiing wil zeggen:  $\bar{v} = 0$ .

$$\beta = 0 \text{ en } \omega = -\frac{1}{r}$$

zie h. 121.

Wanneer  $F = -f q$  wordt  $\beta = \frac{1}{2} \alpha$

Voer men nu letter  $\delta' = \frac{F'}{q}$  in.  
dus  $\delta' = \omega r$

Hier gaande van de quadratische vergelijking  
wet  $4x = \mu \left| \frac{dv}{dx} \right| \frac{dv}{dx}$   
vindt men, zoals we zagen

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2 q \rho_i}{\gamma}} (1 + \frac{1}{2} \alpha)$$

$$\bar{v} = C \sqrt{q_i} \quad (\text{Lytelwein})$$

dus de const. v. Lytelwein

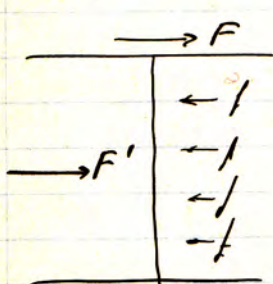
$$C = \left(1 + \frac{1}{2} \alpha\right) \sqrt{\frac{2 \rho_i}{\gamma}} \quad (18)$$

$$v_0: \text{opp. melk.} = \frac{\sqrt{999\rho c}}{\gamma} (1 + \frac{2}{3}\alpha)$$

$$\frac{v_0}{v} = \frac{1 + \frac{2}{3}\alpha}{1 + \frac{2}{5}\alpha} = 1.08 \text{ of } 1.16.$$

$\gamma$  is onafh. van de diepte (wrijving op bodem)

Als uiterste waarden van  $\alpha$  nemen daarom (om die 1.08 of 1.16) waarden  $\alpha = 0.35$  en  $\alpha = 0.80$ , bij welke waarden de  $\frac{v_0}{v}$  resp. 1.082 en 1.161 wordt.



1°  $|f| < \frac{F^*}{\gamma}$  stroom over heel diepte naar rechts.

2°  $f = 1.009 \frac{F}{\gamma}$  of  $1.040 \frac{F}{\gamma}$  (al naarmate  $\alpha = 0.35$  of  $0.80$ ) stroom keert om even veel naar links als boven

naar rechts. (Stationaire toestand of  $\bar{v} = 0$ )

opstuwijng dan:

$$i = 1.009 \frac{F}{999} \text{ of } i = 1.040 \frac{F}{999}$$

3°  $f$  nog groter te wijte van tijpverhang da waar de bodemtr. krachtigen e de opp str. ewakker om te dichte 0 of ook naar links te gaan.

$$\omega = \frac{F'}{F^*}, \quad \delta = \frac{F}{\gamma f}$$

Is  $F'$  bekend, dan kan men gemakkelijck de  $\bar{v}$  berekenen.

Is  $\frac{F'}{\gamma} + f > 0$  dan heeft men een res. kr. van deze grootte n. rechts, zovals die ook door ee verhang  $\frac{1}{99} (\frac{F'}{\gamma} + f)$  con kunnen worden teruggehaelt.

Is  $\frac{F'}{g} + f < 0$ , dan is da er beweging  
 naar links met de periodieke snel-  

$$CV \cdot \frac{g}{g^2} \left( \frac{F'}{g} + f \right) \quad (\text{lytelvini})$$
  
 $R = g$

De in tabel 46 onder  $\gamma = 0$  opgegeven  
 getallen beantwoorden aan een kurven-  
 draafstroom. Bij deze staat de kracht  
 $F$  gelyk met een kracht  $1.06 \frac{F}{g}$  of  $1.12 \frac{F}{g}$   
 per vol. eenheid, die uit een verband

van kunnen voortvloeien

(afhanger  $= g \rho i$

$$g \rho i \times \frac{\omega F}{g^2 g} = \frac{\omega F}{g}$$

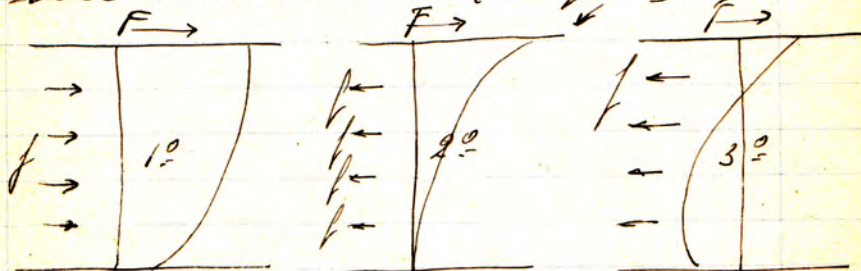
$$\omega = 1.06 \omega \text{ of } 1.12$$

$$\text{dus } \bar{v} = C \sqrt{\frac{\omega F}{g^2 g}}$$

Fig 32 geeft  $\omega$  als functie van  $\gamma$  voor  
 $\alpha = 0.80$

$$\omega = \frac{F'}{F}, \quad \gamma = \frac{F}{g^2}$$

Bij  $\gamma = -1$  een plotzinge daling van  $\omega$ .  
 Bij  $\gamma = -1$  wil zeggen  $F + g^2 = 0$ , of de  
 bodemsnelheid = 0. (2<sup>o</sup> geval)



$\alpha$  wordt bepaald door  $\frac{\alpha^2}{g^2} = \frac{\gamma}{\omega}$   
 en  $\gamma$  en  $\mu$  zijn constanten,  $\gamma$  voor de  
 bodem en  $\mu$  voor de inv. quadr. wrijving

lit  
XIII

$\alpha$  is dus een lengte.

§ 151. Bykomstige toestanden.

Zie hiervoor eerst § 109: eenige kleine quaesties.

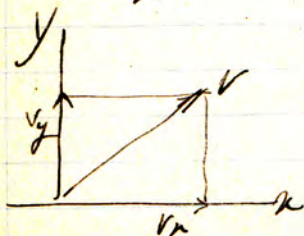
Het getalmet kan berekend worden, doch dan moeten nog correcties worden aangebracht ten de bykomstige toestanden hieronder wordt verstaan:

- a. Windkracht aan de opp. werkend, doch niet gelijkmatig over de diepte verdeeld
- b. Eenige verandering in waterdiepte
- c. een kleine verandering van de const. van lytelweir.
- d. een verandering van de exp. 2. in de weerstandswet. Stort men de exp 1.875 in dan dalen de verhooyngen met 3%.

Zie vervolgens § 130. en § 126 ten 129

$$\text{weerstand} = \frac{g^2}{c^2} v^2 (= g p i)$$

bit is de weerstand per vol. eenheid  
 $W_q$  is de weerstand van de bodem op de waterkolom met de eenheid van opp. tot doorsnede



$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$W_x = W \cos \alpha = \frac{v_x}{v} W = \frac{s_x}{s} W$$

$W$  is een functie van  $s$

$$W = \psi(s)$$

$$W_x = \frac{s_x}{s} \psi(s) = s_x \frac{\psi(s)}{s}$$

$$= s_x \psi(s)$$

1<sup>o</sup> Lineaire weerstandswet

$$W = k s$$

dan is  $\psi(s) = k$

2<sup>o</sup> Quadratische weerstandswet

$$W = k' s^2$$

dan is  $\psi(s) = k' s$ .

De bew. verg. luidt:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -g \rho \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{v_x W}{V} + F_x$$

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = -g \rho \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{v_y W}{V} + F_y$$

verm. rech. kracht wijken vander.

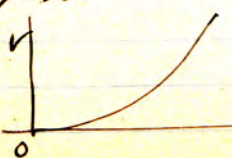
"Bykomstige toestanden" berusten op "het beginsel der superpositie. Het geldt alleen voor kleine variaties.

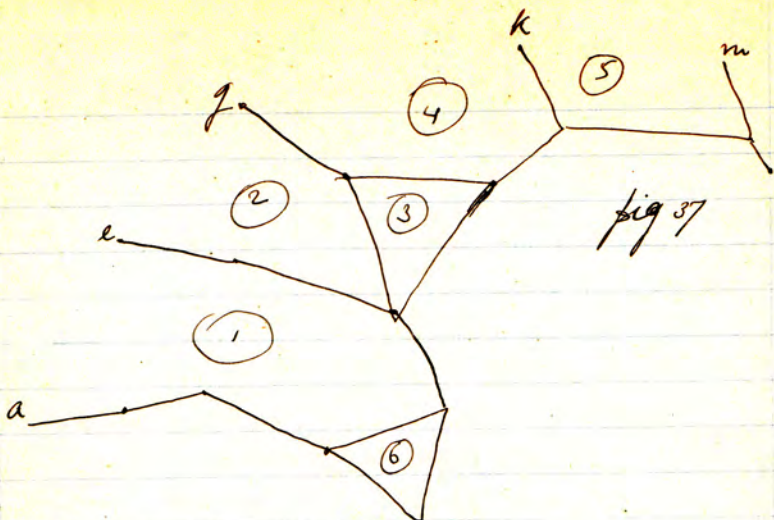
De "bykomstige bew. verg." (90) krijgt ongeveer dezelfde gedaante als de oorsp. bew. verg., met dit verschil dat de weerstandsterm dubbel is geworden.

Loodrecht op de oorspronkelijke stroomrichting blijft de weerstand tegen de bykomstige bew. half zoo groot als in die stroomrichting.

Hier vindt men ooraak in het feit, dat de dwarsstroom klein is (de  $y$ ) tusschen de langstroom (de  $x$ ) veel groot is. Weerstand verloopt

natuurlijk parabolisch t.o.v. de snelheid  $v$ . De factor 2 is een benaderd.





Correctieregeling.

$$\partial h' = \partial h'_p + k \partial s' = \varphi$$

waarin  $k = \frac{2l}{8^2 g^3 c^2} |s'|$ . (157)

$\partial s'$  = bykomstige stroom,  $\partial h'$  = bykomstige verhoofing.  
 $\varphi$  is een <sup>hoogte</sup> hulpkracht, het correctie <sup>hoogte</sup> ~~kracht~~,  
 waardoor de bykomstige stroom en bykom-  
 stige verhoofing ontstaat.

De correctie heeft dezelfde vorm als  
 de stroom zelf: (155)

$$h'_q - h'_p + \frac{l}{8^2 g^3 c^2} |s'|^2 = \frac{l}{g^2} F l$$

weest. hoogte      windgr.

De factor 2 in (157) komt er in door diff.  
 van  $|s'|$

$\varphi$  is bekend doordat in reëten  $h=0$  is  
 en verder doordat met kinige gewicht  
 wordt  $\sim$  nu dus verschillende punten  
 kamp verschillende wega berekenen kan.

§ 152. Voor geulen langs elkander kan men ook weer het superpositie beginsel toepassen.

$$S_1 = \frac{\varphi_1}{k_1} + \frac{h_p - h_Q}{k_1}, \quad S_2 = \frac{\varphi_2}{k_2} + \frac{h_p - h_Q}{k_2}, \dots$$

Noem 
$$\frac{\frac{\varphi_1}{k_1} + \frac{\varphi_2}{k_2} + \dots}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots} = \varphi_{pQ}$$

$$S_{pQ} = \text{totale stroom} = \frac{\varphi_{pQ}}{k} + \frac{h_p - h_Q}{k}$$

alst dezelfde vorm als die van de afzonderlijke geulen geldt.

$\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2} \dots$  zijn doorlatingsvermogens.

$\frac{1}{k}$  is doorveem. van de samengetelde geul  $\varphi_{pQ}$  de tweevracht die er in werkt.

§ 153. Voor elke kring wordt  $h=0$ , er komt dus  $\sum k_s = \sum \varphi$ .

Voor de vertakkingpunten bestaat een betrekking tusschen de daarheen en daarvan af gerichte stromen. Wordt men evenveel vergt. als onbekenden heeft.

Voor de opt. bedient men zich v. e. kunstgreep. Denk in elke kring een stroom rondloopen v. i. d. e. = x-y,  $\varphi_1 = u-2$  enz.

Hiervoor wordt reeds onmiddellijk aan de bez. v. h. vertakkingpunt voldaan.

Hiijft men dus slechts zoveel vergt. als er kringen zijn. De stromen zijn dus te vinden. Thans de hopen te vinden door van een reepat uit te gaan, daar

$$h = \sum \varphi - \sum k_s.$$

Tabel 47 is berekend met  $k = \frac{2l}{l^2 Q^3 c^2} |\beta|'$  (157)

Tabel 48 met (160).

(Samengetelde geul)

§ 87. Was hiervoor voor de bykomende bew. word gedaan, zal thans voor de primitieve bew. worden behandeld. Feitelijke had dit dus eerst moeten bekeken worden.

Zien zeulen, doch ook dan nog continuïteitsverg.

$$\text{weerstand blijft } \frac{gP}{c^2} v^2 \text{ en } \frac{dh}{dl} = i$$

$$- gPq \frac{dh}{dl} + F \cos \theta - \frac{gP}{c^2} |v|v_e = 0$$

$$\text{of } \frac{dh}{dl} - \frac{F \cos \theta}{gPq} + \frac{1}{c^2 q} |v|v_e = 0$$

veh. - windveh + sneeh. veh.

Integreerend voor een bepaalde waf PQ

$$h_Q - h_P = \frac{1}{gP} \int_P^Q \frac{1}{q} F \cos \theta dl - \frac{1}{c^2} \int_P^Q \frac{1}{q} |v|v_e dl$$

opwaaiing.      stroomverval

Indie kring gesloten is: is opw = stroomverval.  
en indien q constant is wordt

$$\int F \cos \theta dl = 0.$$

dus. langs kring geen opwaaiing. Letten wel indien q niet constant.

§ 88. Verband tusschen de Stromen van en na de afspuiting.

Windverl. wordt bij 2. (bestaande linden-  
en) en A (afgesloten linden) gelijk  
indien de q niet verandert. Dit wordt  
voorloopig verondersteld.

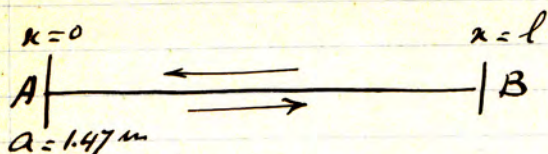
Stroomverval voor jeval A is dus ook  
gelyk aan die voor jeval A2

$$M = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{q} |v|v_e dl.$$

(q mag niet veranderen, anders jaet het niet <sup>dom</sup>)

Van elke gesloten kring is het stroom-  
verval na de afsluiting even groot als  
daarvoor

## Koedoodkanaal.



In A:

$$h = a \sin \omega t$$

$$s = a v \sin \omega(t + p) \quad \left. \vphantom{s = a v \sin \omega(t + p)} \right\} \text{zonder demping}$$

In B:  $h = a \sin \omega(t - \frac{l}{v})$   
 $s = a v \sin \omega(t - \frac{l}{v} + p)$  ) von de heen  
gaande golf

Met demping in willekeurig punt:

heengaan:  $h = a e^{-\delta x} \sin(t - \frac{x}{v})$   
 $s = a v e^{-\delta x} \sin(t - \frac{x}{v} + p)$

teruggaan:  $h = a e^{-2\delta l} e^{\delta x} \sin \omega(t + \frac{x}{v} - \frac{2l}{v})$   
 $s = -a v e^{-2\delta l} e^{\delta x} \sin \omega(t + \frac{x}{v} + p - \frac{2l}{v})$

(want  $e^{-\delta(2l-x)} = e^{-2\delta l + \delta x} = e^{-2\delta l} e^{\delta x}$   
en  $\sin(a + \pi) = -\sin a$ .)

Algemeene oplossing onderweg is dus:

$$h = a e^{-\delta x} \sin \omega(t - \frac{x}{v}) + a e^{-2\delta l} e^{\delta x} \sin \omega(t + \frac{x}{v} - \frac{2l}{v})$$
$$s = a v e^{\delta x} \sin \omega(t - \frac{x}{v} + p) - a v e^{-2\delta l} e^{\delta x} \sin \omega(t + \frac{x}{v} + p - \frac{2l}{v})$$

Voor  $x=0$ :

$$h_0 = a \sin \omega t + a e^{-2\delta l} \sin \omega \left( t - \frac{2l}{w} \right)$$
$$s_0 = a v \sin \omega \left( t + p \right) - a v e^{-2\delta l} \sin \omega \left( t + p - \frac{2l}{w} \right)$$

Voor  $x=l$ :

$$h_l = a e^{-\delta l} \sin \omega \left( t - \frac{l}{w} \right) + a e^{-\delta l} \sin \omega \left( t - \frac{l}{w} \right)$$
$$= 2 a e^{-\delta l} \sin \omega \left( t - \frac{l}{w} \right)$$

$$s_l = 0.$$

Gevraagd de betrekking  $h_0$  en  $h_l$  (verhouding) en faseverschil.

$$h_0 = a e^{-\delta l} \left[ e^{\delta l} \sin \left\{ \omega \left( t - \frac{l}{w} \right) + \frac{\omega l}{w} \right\} + e^{-\delta l} \sin \left\{ \omega \left( t - \frac{l}{w} \right) - \frac{\omega l}{w} \right\} \right]$$
$$= a e^{-\delta l} \left[ \left( e^{\delta l} \cos \frac{\omega l}{w} + e^{-\delta l} \cos \frac{\omega l}{w} \right) \sin \omega \left( t - \frac{l}{w} \right) \right. \\ \left. + \left( e^{\delta l} \sin \frac{\omega l}{w} - e^{-\delta l} \sin \frac{\omega l}{w} \right) \cos \omega \left( t - \frac{l}{w} \right) \right]$$
$$= a e^{-\delta l} \left\{ \cos \frac{\omega l}{w} (e^{\delta l} + e^{-\delta l}) \sin \omega \left( t - \frac{l}{w} \right) \right. \\ \left. + \sin \frac{\omega l}{w} (e^{\delta l} - e^{-\delta l}) \cos \omega \left( t - \frac{l}{w} \right) \right\}$$

$\cos \frac{\omega l}{w} (e^{\delta l} + e^{-\delta l})$  mag men noemen  $z \cos \varphi$   
 $\sin \frac{\omega l}{w} (e^{\delta l} - e^{-\delta l})$  " " " "  $z \sin \varphi$

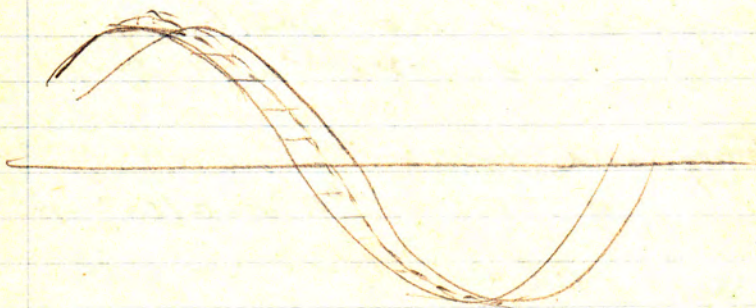
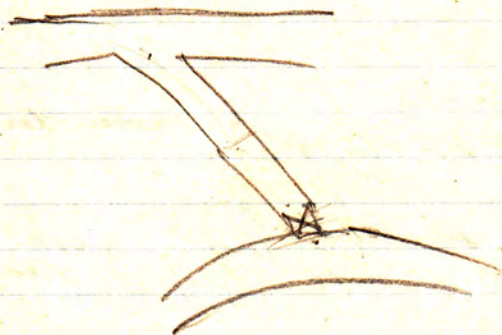
Dus  $h_0 = a z e^{-\delta l} \sin \left\{ \omega \left( t - \frac{l}{w} \right) + \varphi \right\}$

Verhouding der amplituden van  $h_0$  en  $h_l$  is dus  $\frac{h_0}{h_l} = \frac{a z}{2a} = \frac{z}{2}$

Faseverschil is  $\varphi$ ,  $h_0$  ilt  $\varphi$  voor:

Gevraagd  $z$  en  $\varphi$ ?

$$z \varphi = \varphi \frac{\omega l}{w} \frac{e^{\delta l} - e^{-\delta l}}{e^{\delta l} + e^{-\delta l}} = \varphi \frac{\omega l}{w} \tanh \delta l$$



24

$$z = \cos^2\left(\frac{\omega l}{w}\right) (e^{2\phi} + e^{-2\phi} + 2) + \sin^2\left(\frac{\omega l}{w}\right) (e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 2)$$

$$= e^{2\phi} + e^{-2\phi} + 2 \cos \frac{2\omega l}{w}$$

$$z = \sqrt{2 \left( \cos \frac{2\omega l}{w} + \cosh 2\phi \right)}$$

$$\text{want } \cosh \phi = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2}$$

Controle:

Laat  $l$  tot 0 naderen, dan nadert  $\phi$  tot 0  
voor  $l$  klein is  $\phi$  positief.

Voor  $l=0$  wordt  $z=2$

$$\frac{1}{2} \text{ dus } \frac{z}{2} = 1.$$

Vul thans de gegevens in:

$$l = 10000 \text{ m. en } q = 4 \text{ meter. } b = 100 \text{ m.}$$

$$a_0 = 1.47 \text{ m.}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{12 \cdot 25'} = \frac{6.28}{44700} = \frac{1.4}{10000}$$

$$k = \frac{\rho}{3\pi} \frac{q v_m}{c^2 a_0} \quad \text{Neem } v_m = 0.56 \text{ m/sec } q = 10 \text{ m/sec, } c = 52,$$

$$= \frac{8}{9.4} \cdot \frac{0.50 \cdot 10}{2700 \cdot 4} = \frac{10}{9.4 \times 2700} = 0.000393 \quad 0.000236$$

$$\phi \theta = \frac{k}{n} = \frac{3.93}{10000} \times \frac{10000}{1.4} = \frac{3.93}{1.4} = 2.82$$

$$\theta = 70^{\circ} 35'$$

$$\frac{1}{2} \theta = 35^{\circ} 15'$$

$$\cos \theta = 0.3338$$

$$\cos \frac{1}{2} \theta = 0.8166$$

$$\phi \frac{1}{2} \theta = 0.7067$$

$$w = \frac{\sqrt{g \cos \theta}}{\cos \frac{1}{2} \theta} = \frac{\sqrt{40 \times 0.3338}}{0.8166} = \frac{\sqrt{13.33}}{0.8166} = \frac{3.645}{0.8166} = 4.47 \text{ m/sec.}$$

$$v = b \omega \cos \frac{1}{2} \theta = 100 \times 4.47 \times 0.8166 = 364.5$$

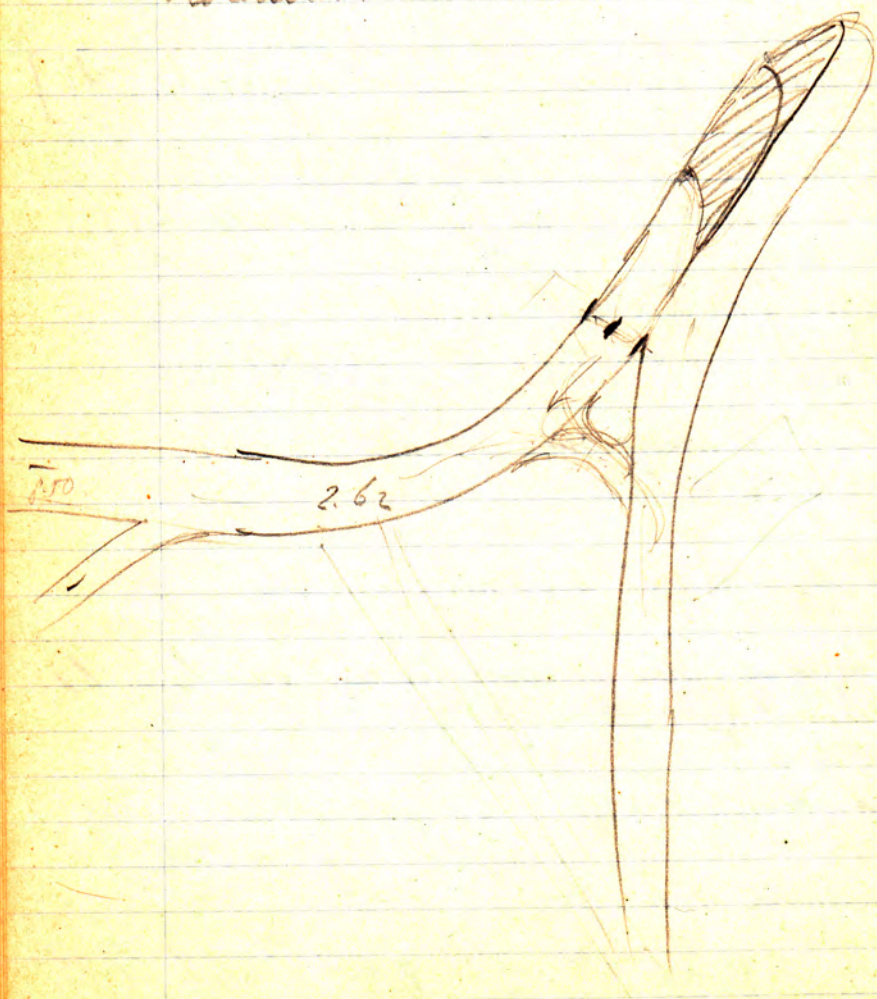
$$\phi = \frac{\theta}{2n} = \frac{59.4}{57.2} \times \frac{10000}{2.8} = \frac{12350}{2.8} = 4410.$$

$$s = \frac{v}{w} \phi \frac{1}{2} \theta = \frac{1.4}{10000} \times \frac{0.7067}{4.47} = \frac{0.989}{44700} = \frac{2.212}{100000}$$

$$s l = 0.2212$$

$$0.0885$$

afs. kroonme.  $s_0 = a(\dots)$  Wat is  $a$ ?  
 Wntpl. mech. niet :: breedte. Als  $0.4$ .  $2x$  heiden  
 genaakt wordt, dus niet meer voortpil meel v.l.  
 vertikale getij, maar wel van het hor. getij?  
 of wordt bij Puttenh  $lx$  slechts een hoerwiel.  
 Moedwater  $2x$  zooveel.



$$e^{\sigma l} = 2.718 = 1.247$$

0.0895  
0.2212      1.093

$$(0.2212 \log 2.718 = 0.2212 \times 0.4343 = 0.0958)$$

$$e^{-\sigma l} = \frac{1}{1.247} = 0.802$$

711  
383

$$\frac{nl}{w} = \frac{1.4}{10000} \times \frac{10000}{4.47} = \frac{1.4}{4.47} = 0.313$$

0.155

$$\phi \frac{nl}{w} = \phi 0.313 \times 57.3 = \phi 17.56' = 0.324$$

0.157

$$\phi \psi = \phi \frac{nl}{w} \frac{e^{\sigma l} - e^{-\sigma l}}{e^{\sigma l} + e^{-\sigma l}} = 0.324 \cdot \frac{1.247 - 0.802}{1.247 + 0.802} = 0.324 \cdot \frac{0.445}{2.049}$$

0.178  
2.008

$$= \frac{0.144}{2.409} = 0.0598 = \frac{0.144}{2.409} = 0.06$$

0.0139

$$\psi = \frac{2.7}{360} \times \frac{44700}{1} = 335 \text{ sec} = \frac{433\phi}{60} = 7.2 \text{ min} \approx \frac{l}{w} = \underline{\underline{27.2 \text{ min}}}$$

56 - 32.8

$$\frac{al}{a_0} = \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\cos \frac{2nl}{w} + \frac{e^{2\sigma l} + e^{-2\sigma l}}{2}}}}$$

$$\cos \frac{2nl}{w} = \cos \frac{2.8}{4.47} = \cos 0.626 \times 57.3 = \cos 35.98' = 0.810$$

17.45      0.952

$$e^{2\sigma l} = 1.247^2 = 1.555$$

1.20

$$e^{-2\sigma l} = 0.802^2 = \frac{0.643}{2.198} + \frac{0.84}{2.24} = 1.02$$

1.02  
0.95  
1.97

$$\text{Verh} = \frac{\sqrt{\frac{2}{1.909}}}{1.97} = \frac{\sqrt{1.05}}{1.015} = 1.025$$

1.015 = 1.008

$$\sqrt{\frac{2}{1.91}} = 1.022$$

$$\frac{al}{1.47} = 1.025 \rightarrow al = 1.025 \times 1.47 = \underline{\underline{1.51}}$$

1.008

1.48

$$\begin{array}{r} 1179 \\ 6850 \\ \hline 0.329 \end{array}$$

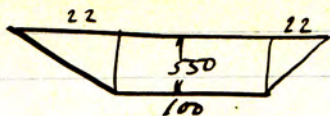
$$\begin{array}{r} 0329 \\ \hline 2.029 \end{array}$$

$$f = \frac{3.5}{57.3} = 0.061$$

$$\text{naught} = \frac{0.313}{0.252}$$

$$\frac{0.252 \times 57.3}{360} \times \frac{44700}{60} = 30 \text{ minutes}$$

Bij hoogwater



$$F = 671 \text{ m}^2$$

$$q = 4.76 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$k = \frac{8}{376} \frac{10 \times 0.3}{2500 \times 4.76} = \frac{2.13}{10000}$$

$$t_p \theta = \frac{2.13}{10000} \times \frac{10000}{1.4} = \frac{2.13}{1.4} = 1.522$$

$$\theta = 56^\circ 44'$$

$$\frac{1}{2}\theta = 28^\circ 22'$$

$$\cos \theta = 0.5519$$

$$\cos \frac{1}{2}\theta = 0.880$$

$$t_p \frac{1}{2}\theta = 0.540$$

$$w = \frac{\sqrt{47.6 \times 0.5519}}{0.880} = \frac{5.11}{0.880} = 5.80 \text{ m/sec}$$

$$\frac{l}{w} = \frac{10000}{50 \times 5.80} = \underline{\underline{28.7 \text{ min}}}$$

$$\sigma = \frac{1.4}{10000} \times \frac{0.54}{5.80} = \frac{1.3}{100000} ; \sigma l = 0.13$$

$$e^{\sigma l} \rightarrow 0.13 \times 0.7343 = 0.0364 \rightarrow 1.09$$

$$e^{-\sigma l} \rightarrow = 0.918. \quad \cancel{0.8826}$$

$$t_p \frac{wl}{w} = t_p \frac{1.4}{5.8} \times 57.3 = t_p 13^\circ 50' = 0.246$$

$$t_p \psi = t_p 0.246 \times \frac{0.172}{2.008} = t_p 0.0203$$

$$\psi = \frac{1.15 \times 44700}{360 \times 60} = 2 \frac{1}{2} \text{ minut}$$

Top golf in eindpunt dus  $28.7 - 2.5 = 26.2 \text{ min}$   
 later dan in beginpunt, omdat dit bij  
 LW is.

Tee golf (LW) heeft vrotpl n.v. 500 m/sec.

Vrijling bij eindpunt dus  $33 - \frac{3}{2} = 30 \text{ min}$

Door sluis halfweg:  
 $l_1 = 5000$ .  $q = 4.76$   $w$  weeg = 5.80 m/pe  
 $\frac{5000}{60 \times 5.80} = 13$  min. (nl. 14' - 1')

Dit is voor beide kanten, dus. Gety-  
 kromme Koedood gaat 15' naar rechts,  
 getykromme Peinis idem. Vorhangh. dus getyk  
 die v. Peinis. Koedood.

Door sluis op 2 km van de Oude Maas  
 $l_1 = 8000$ .  $l_2 = 2000$ .  
 $\frac{8000}{5.40 \times 60} = 24.6' - 4' = 20.6'$   
 $\frac{2000}{5.40 \times 60} = 5'$   
 Dur.

Getykromme v. Koedood 5' naar rechts  
 " " Peinis 20½ " "

Door sluis op 1 km v. d. Oude Maas  
 en  $l_1 = 8000$  m  $l_2 = 1000$  m

$$\frac{8000}{5.40 \times 60} = 20.6'$$

$$\frac{1000}{5.40 \times 60} = 2.7'$$

Dur.

Getykromme v. Koedood 2½ min v. rechts  
 " " Peinis 20½ " " "

Door sluis bij Peinis moet de getyk v.  
 Koedood 26' naar rechts. de ~~vorhangh~~ ver-  
 valkromme En weerszijde v. d. sluis wordt  
 dus zeer groot, bv. 50 a 60 cm.

Berekening stroom bij Poveris.

$$\begin{aligned}
 s_0 &= aR \sin n(t+p) - aRe^{-2\ell} \sin n(t+p) - \frac{2\ell}{\omega} \\
 &= aRe^{-\delta\ell} \left[ e^{\delta\ell} \sin \left\{ n \left( t + p - \frac{\ell}{\omega} \right) + \frac{n\ell}{\omega} \right\} - e^{-\delta\ell} \sin \left\{ n \left( t + p - \frac{\ell}{\omega} \right) - \frac{n\ell}{\omega} \right\} \right] \\
 &= aRe^{-\delta\ell} \left[ \underbrace{\left( \frac{e^{\delta\ell} - e^{-\delta\ell}}{2} \right) \cos \frac{n\ell}{\omega}}_{z_1 \cos \psi_1} \sin n \left( t + p - \frac{\ell}{\omega} \right) + \underbrace{\left( \frac{e^{\delta\ell} + e^{-\delta\ell}}{2} \right) \sin \frac{n\ell}{\omega}}_{z_1 \sin \psi_1} \cos n \left( t + p - \frac{\ell}{\omega} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\underline{s_0 = aRz_1 e^{-\delta\ell} \sin \left\{ n \left( t + p - \frac{\ell}{\omega} \right) + \psi_1 \right\}}$$

Bepaald  $z_1$  en  $\psi_1$ .

$$\psi_1 = \psi = \frac{n\ell}{\omega} \frac{(e^{\delta\ell} + e^{-\delta\ell})}{e^{\delta\ell} - e^{-\delta\ell}}$$

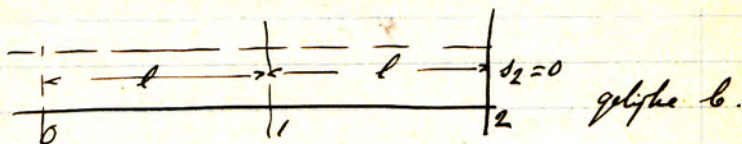
$$\begin{aligned}
 z_1^2 &= \cos^2 \frac{n\ell}{\omega} (e^{2\delta\ell} + e^{-2\delta\ell} - 2) + \sin^2 \frac{n\ell}{\omega} (e^{2\delta\ell} + e^{-2\delta\ell} + 2) \\
 &= e^{2\delta\ell} + e^{-2\delta\ell} - 2 \cos \frac{2n\ell}{\omega}
 \end{aligned}$$

$$z_1 = \sqrt{e^{2\delta\ell} + e^{-2\delta\ell} - 2 \cos \frac{2n\ell}{\omega}}$$

Verhouding  $\frac{s_0}{s_0}$  der amplituden van  $s_0$  en  $h_0$  is dus

$$\frac{aRe^{-\delta\ell}}{aR} = \frac{z_1}{2}$$

## Berekening doorlopend kanaal in twee afdeelingen.



Totale lengte van het kanaal is  $2l$ , In profiel 0 heerscht de getybeweging  $h_0$ , in profiel 2 is  $h_2 = 0$ , genaamd  $s_0$  en  $h_2$ .

Algemeene verp. is.

$$\begin{aligned} h_1 &= H_2' h_0 + H_5' s_0 & h_2 &= H_2'' h_1 + H_5'' s_1 \\ s_1 &= S_4' h_0 + S_5' s_0 & s_2 &= S_4'' h_1 + S_5'' s_1 \\ & & & \parallel \\ & & & 0 \end{aligned}$$

Elimineer  $h_1$  en  $s_1$ .

$$\begin{cases} h_2 = H_2'' (H_2' h_0 + H_5' s_0) + H_5'' (S_4' h_0 + S_5' s_0) \\ 0 = S_4'' (H_2' h_0 + H_5' s_0) + S_5'' (S_4' h_0 + S_5' s_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_2 = (H_2'' H_2' + S_4'' H_5') h_0 + (H_5'' H_2' + S_5'' H_5') s_0 \\ 0 = (H_2'' S_4' + S_4'' S_5') h_0 + (H_5'' S_4' + S_5'' S_5') s_0 \end{cases}$$

Elim. om  $s_0$ .  $s_0 = -\frac{H_2'' S_4' + S_4'' S_5'}{H_5'' S_4' + S_5'' S_5'} h_0$ .

$$\begin{aligned} h_2 &= h_0 \frac{(H_2'' H_2' + S_4'' H_5')(H_5'' S_4' + S_5'' S_5') - (H_5'' H_2' + S_5'' H_5')(H_2'' S_4' + S_4'' S_5')}{H_5'' S_4' + S_5'' S_5'} \\ &= h_0 \frac{H_2'' S_5'' (H_2' S_5' - H_5' S_4') - H_5'' S_4'' (-H_5' S_4' + H_2' S_5')}{H_5'' S_4' + S_5'' S_5'} \\ &= h_0 \frac{(H_2'' S_5'' - H_5'' S_4'') (H_2' S_5' - H_5' S_4')}{H_5'' S_4' + S_5'' S_5'} \end{aligned}$$

De factoren in den teller zijn beide = 1 (zie invaardree § ..) zodat

$$h_2 = \frac{h_0}{H_5' S_4'' + S_3' S_5''}$$

$$= \frac{4 h_0}{-\frac{\delta u_1}{\lambda b m} (e^{u_1 l} - e^{-u_1 l}) + \frac{\delta u_2}{\lambda m} (e^{u_2 l} - e^{-u_2 l}) + \frac{1}{4} \left( \frac{u_1 l}{e + e^{-u_1 l}} \right) \left( \frac{u_2 l}{e + e^{-u_2 l}} \right)}$$

$$h_2 = \frac{4 h_0 u_2}{u_1 (e^{u_1 l} - e^{-u_1 l}) (e^{u_2 l} - e^{-u_2 l}) + u_2 (e^{u_1 l} + e^{-u_1 l}) (e^{u_2 l} + e^{-u_2 l})}$$

$$\text{Nun ist } u_1 = \sigma_1 + i \frac{u}{\omega_1} \quad u_2 = \sigma_2 + i \frac{u}{\omega_2} \quad h_0 = a_0 e^{i \omega t}$$

$$h_2 = \frac{4 h_0 u_2}{u_1 \left\{ e^{(u_1 + u_2)l} + e^{-(u_1 + u_2)l} - e^{(u_1 - u_2)l} - e^{(u_1 - u_2)l} - \frac{(u_1 - u_2)l}{e} \right\} + u_2 \left\{ e^{(u_1 + u_2)l} + e^{-(u_1 + u_2)l} + e^{(u_1 - u_2)l} + e^{(u_1 - u_2)l} - \frac{(u_1 - u_2)l}{e} \right\}}$$

$$= \frac{4 h_0 u_2}{(u_1 + u_2) \left( e^{(u_1 + u_2)l} + e^{-(u_1 + u_2)l} \right) - (u_1 - u_2) \left( e^{(u_1 - u_2)l} + e^{-(u_1 - u_2)l} \right)}$$

$$u_1 + u_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) + i u \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right)$$

$$u_1 - u_2 = (\sigma_1 - \sigma_2) + i u \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)$$

Numer:

$$\left\{ (\sigma_1 + \sigma_2) + i u \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) \right\} \left\{ e^{(\sigma_1 + \sigma_2)l} + e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)l} \right\} \cos u l \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) + i \left\{ e^{(\sigma_1 + \sigma_2)l} - e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)l} \right\} \sin u l \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right)$$

$$- \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2) + i u \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) \right\} \left\{ e^{(\sigma_1 - \sigma_2)l} + e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)l} \right\} \cos u l \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) + i \left\{ e^{(\sigma_1 - \sigma_2)l} - e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)l} \right\} \sin u l \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)$$

$$= r + s i$$

$$z = (\sigma_1 + \sigma_2) \left( e^{(\sigma_1 + \sigma_2)l} + e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)l} \right) \cos u l \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) - u \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) \left\{ e^{(\sigma_1 + \sigma_2)l} - e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)l} \right\} \sin u l \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) - (\sigma_1 - \sigma_2) \left( e^{(\sigma_1 - \sigma_2)l} + e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)l} \right) \cos u l \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) + u \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) \left\{ e^{(\sigma_1 - \sigma_2)l} - e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)l} \right\} \sin u l \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)$$

$$d = (\sigma_1 + \sigma_2) \left( e^{(\sigma_1 + \sigma_2)t} - e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)t} \right) \sin \omega_2 \left( \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \right) + \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \left( e^{(\sigma_1 + \sigma_2)t} - e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)t} \right) \cos \omega_1 \left( \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \right) - (\sigma_1 - \sigma_2) \left( e^{(\sigma_1 - \sigma_2)t} - e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)t} \right) \sin \omega_1 \left( \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \right) - \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left( e^{(\sigma_1 - \sigma_2)t} - e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)t} \right) \cos \omega_2 \left( \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \right)$$

$$h_2 = \frac{4 a_0 \omega_2}{2 + d i}$$

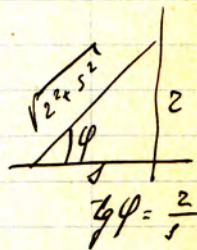
Teiler:  $4 a_0 (\cos \omega_2 t + i \sin \omega_2 t) (\sigma_2 + i \frac{\omega_2}{\omega_1})$   
 $= 4 a_0 \left\{ \underbrace{\sigma_2 \cos \omega_2 t - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_2 t}_p + i \left( \underbrace{\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \omega_2 t + \sigma_2 \sin \omega_2 t}_q \right) \right\}$

$$h_2 = \frac{4 a_0 (p + q i)}{2 + d i} = 4 a_0 \frac{(p + q i)(2 - d i)}{2^2 + d^2}$$

Reelle Teil:

$$h_2 = 4 a_0 \frac{p_2 + q_2 s}{2^2 + s^2}$$

$$= \frac{4 a_0}{\sqrt{2^2 + s^2}} \left( \frac{2}{\sin \varphi} p + \frac{s}{\cos \varphi} q \right)$$

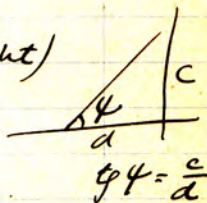


$$= \frac{4 a_0}{\sqrt{2^2 + s^2}} (p \sin \varphi + q \cos \varphi)$$

$$= \frac{4 a_0}{\sqrt{2^2 + s^2}} \left\{ \underbrace{\sigma_2 \sin \varphi + \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \varphi}_d \cos \omega_2 t + \underbrace{(\sigma_2 \cos \varphi - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \varphi)}_c \sin \omega_2 t \right\}$$

$$= \frac{4 a_0}{\sqrt{2^2 + s^2}} (d \cos \omega_2 t + c \sin \omega_2 t)$$

$$= \frac{4 a_0 \sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{2^2 + s^2}} \left( \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} \cos \omega_2 t + \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} \sin \omega_2 t \right)$$



$$\boxed{h_2 = 4 \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{2^2 + s^2}} a_0 \cos(\omega_2 t - \varphi)}$$

$$h_0 = a_0 \cos \omega_1 t$$

$$\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{\sigma_2^2 + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}$$

fällt das weg.

$$\varphi = \frac{\sigma_2 \cos \varphi - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \varphi}{\sigma_2 \sin \varphi + \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \varphi} = \frac{\sigma_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \tan \varphi}{\sigma_2 \tan \varphi + \frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

Stel  $\boxed{\varphi \chi = \frac{\delta_2}{\frac{n}{w_2}}}$  dan is

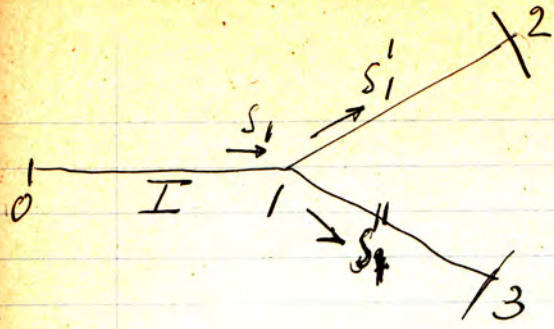
$$\varphi \psi = \frac{\varphi \chi - \varphi \psi}{1 + \varphi \chi \varphi \psi} = \varphi (\chi - \psi)$$

des  $\psi = \chi - \psi (\pm k\pi)$

Remetaat.

$$h_2 = \frac{4\sqrt{\delta_2^2 + \frac{n^2}{w_2^2}}}{\sqrt{l^2 + 12}} a_0 \cos(\omega t - \psi) \quad h_0 = a_0 \cos \omega t$$

$$\varphi \psi = \frac{\delta_2}{\omega} \quad \varphi \chi = \frac{\delta_2}{\frac{n}{w_2}} \quad \psi = \chi - \psi (\pm k\pi)$$



met ped  
die een blad vaders

Taxeer  $S_1$ : hiervan uitgaande, bereken:

$$\text{traject I: } \left. \begin{aligned} h_1 &= H_h' h_0 + H_s' s_0 \\ S_1 &= S_h' h_0 + S_s' s_0 \end{aligned} \right\} \text{ elim. } s_0$$

geeft  $h_1$  als f. v.  $h_0$ , waarin alle coeff. te bereken en  $S_1$  bekend

Nu bekend:  $\frac{h_1}{h_0}$ . Weken  $h_0$  dus om ook  $h_1$  (aangen.)

$$\text{traject II: } \left. \begin{aligned} h_2 &= H_h'' h_1 + H_s'' S_1' \\ S_2 &= S_h'' h_1 + S_s'' S_1' \end{aligned} \right\} \text{ elim. } S_1'$$

(beeds  
opgeloste  
vrijst.)

geeft  $\frac{h_2}{h_1}$   $h_1$  nu bekend dus om ook  $h_2$

$$\text{traject III: } h_3 = H_h''' h_1 + H_s''' S_1'' \quad \text{geeft } \frac{h_3}{h_1}$$

Nu ook bekend:

$$\frac{h_2}{h_0} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_0} \quad \frac{h_3}{h_0} = \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_0}$$

controleer uit de gegeven hoogte  $h_2$  en  $h_3$  (in verband met  $h_1$ ) de  $S_1'$  en  $S_1''$ ; geven deze samen bij benad. de g. hoze waarde van  $S_1$ .

$$\begin{array}{l} h_1 = H_h h_0 + H_s \cdot S_0 \\ s_1 = S_h h_0 + S_s \cdot S_0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot S_s \\ \cdot H_s \end{array} \right.$$

$$S_s h_1 - H_s s_1 = \underbrace{(H_h \cdot S_s - S_h \cdot H_s)}_1 h_0$$

$$h_1 = \frac{h_0 + H_s \cdot s_1}{S_s}$$

$$H_h = S_s = \frac{1}{2} (e^{ul} + e^{-ul})$$

$$H_s = \frac{i u}{2 b n} (e^{ul} - e^{-ul})$$

$$S_h = -\frac{i b n}{2 u} (e^{ul} - e^{-ul})$$

#

$$h_1 = \frac{h_0 + \frac{i u}{2 b n} (e^{ul} - e^{-ul}) \cdot s_1}{\frac{1}{2} (e^{ul} + e^{-ul})}$$

$$e^{ul} + e^{-ul} = (e^{\sigma l} + e^{-\sigma l}) \cos \frac{n}{w} l + i (e^{\sigma l} - e^{-\sigma l}) \sin \frac{n}{w} l$$

$$e^{ul} - e^{-ul} = (e^{\sigma l} - e^{-\sigma l}) \cos \frac{n}{w} l + i (e^{\sigma l} + e^{-\sigma l}) \sin \frac{n}{w} l$$

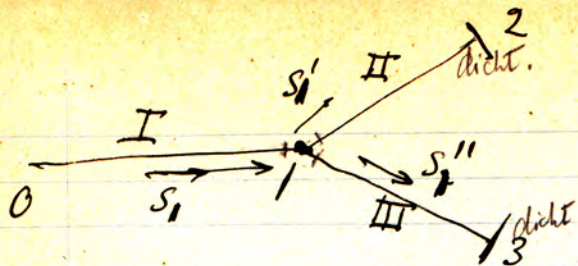
$$u = \sigma + i \frac{n}{w}$$

$$i u = i \sigma - \frac{n}{w}$$

$$\frac{i u}{2 b n} (e^{ul} - e^{-ul}) \cdot s_1 = \frac{i \sigma - \frac{n}{w}}{2 b n} \left[ (e^{\sigma l} - e^{-\sigma l}) \cos \frac{n}{w} l + i (e^{\sigma l} + e^{-\sigma l}) \sin \frac{n}{w} l \right]$$

$$= \frac{s_1}{2 b n} \left[ -\frac{n}{w} (e^{\sigma l} - e^{-\sigma l}) \cos \frac{n}{w} l - \sigma (e^{\sigma l} + e^{-\sigma l}) \sin \frac{n}{w} l \right. \\ \left. + i \left[ \sigma (e^{\sigma l} - e^{-\sigma l}) \cos \frac{n}{w} l - \frac{n}{w} (e^{\sigma l} + e^{-\sigma l}) \sin \frac{n}{w} l \right] \right]$$

Die zweiten  $s_1$  kann man jetzt in phase  
bestimmt. bestimmt



Nieuwe methode  
met compl. getaltes  
faet veel vlijpge

$$\text{Traject II: } \left. \begin{aligned} h_2 &= H_h'' \cdot h_1 + H_s'' \cdot s_1' \\ \mathcal{S}_2 = 0 &= S_h'' \cdot h_1 + S_s'' \cdot s_1' \end{aligned} \right\}$$

eerst  $s_1'$  elim. en oplossen  $\frac{h_2}{h_1}$ . bekend  
Darna  $s_1'$  oplossen  
vrgst.

Traject III idem  
en  $s_1''$ .  
zegt  $\frac{h_3}{h_1}$



Vel nu vectorisch op, i.i.  
gewoon optelling in complexe  
getaltes;

$$h_1 = a e^{int}$$

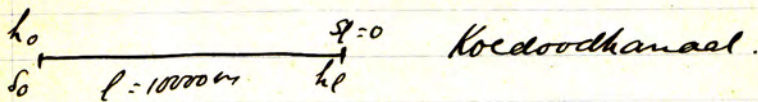
$$S_1 = S_1' + S_1''$$

We vinden  $S_1$  als compl. getaltes

$S_1$



Kruisvoordijde methode.  
 Biedt met platten werken



$$h_l = H_h h_0 + H_s S_0$$

$$S_l = S_h \cdot h_0 + S_s S_0 = 0$$

$$S_0 = -\frac{S_h}{S_s} h_0 \quad (\text{Zie f. 122})$$

$$h_l = \frac{H_h S_s - H_s S_h}{S_s} h_0 = \frac{h_0}{S_s}$$

$$S_s = \frac{1}{2} (e^{ul} + e^{-ul})$$

$$u = \frac{\omega}{\sqrt{\rho g c \cos \theta}} (\sin \frac{1}{2} \theta + i \cos \frac{1}{2} \theta)$$

$\cos \theta = 0.836$  voor  $v_m = 0.20, c = 50$  (zie Kruisvoordijde)

$$u = \frac{1.18}{100000} + \frac{2.50}{100000} i$$

$$e^{ul} = e^{0.0118} \times e^{0.25i} = 1.125 e^{0.25i} = 1.125 (\cos 0.25 \times 57.3 + i \sin 0.25 \times 57.3)$$

$$= 1.09 + 0.278 i$$

$$e^{-ul} = 0.861 - 0.220 i$$

$$S_s = 0.975 + 0.028 i$$

$$h_0 = a e^{iut} = 1.43 (\cos ut + i \sin ut)$$

$$h_l = \frac{1.43 (\cos ut + i \sin ut)}{0.975 + 0.028 i}$$

Ven. teller + noemer met  $(0.975 - 0.028 i)$  en neem reële deel.

$$h_l = \frac{1.43 (0.975 \cos ut + 0.028 \sin ut)}{0.975^2 + 0.028^2}$$

$$\text{Het } 2 \cos \varphi = 0.975$$

$$2 \sin \varphi = 0.028$$

$$\text{dus } \varphi = 0.0287 = 2 \frac{1}{2} \text{ min}$$

$$\text{of } \varphi (\text{waagling}) = 2 \frac{1}{2} \text{ min}$$

$$\text{ampl. v. } h_l = \underline{1.43}$$

$z^2 = 0,975^2 + 0,028^2$  is juist de noemer  
of  $z = 0,975$

$$\begin{aligned} \text{teller} &= 1,47 (z \cos \varphi \cos ut + z \sin \varphi \sin ut) = \\ &= 1,47 \times z \cos(ut + \varphi) \end{aligned}$$

$$h_f = \frac{1,43 \times 0,975}{0,975^2} \cos(ut + \varphi)$$

$$h_f = \frac{1,43}{0,975} = 1,47 \text{ m}$$

dit was op andere wijze ook gevonden.

## Algemene opzet der methode Lorentz.

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2 \partial t} = -b \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -b \gamma \frac{\partial h}{\partial x} \quad \omega = \frac{1}{\gamma}$$
$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2 \partial t} = -b \omega^2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Algemene oplossing hiervan is:

$$h = f\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{\omega}\right) \dots \dots (1)$$

want:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f'\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + \varphi'\left(t + \frac{x}{\omega}\right)$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f''\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + \varphi''\left(t + \frac{x}{\omega}\right)$$
$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\omega} f'\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + \frac{1}{\omega} \varphi'\left(t + \frac{x}{\omega}\right)$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = +\frac{1}{\omega} f''\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + \frac{1}{\omega} \varphi''\left(t + \frac{x}{\omega}\right)$$

substitueer (1) in overeenkomstige vgl:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -b f'\left(t - \frac{x}{\omega}\right) - b \varphi'\left(t + \frac{x}{\omega}\right)$$
$$s = +b \omega f\left(t - \frac{x}{\omega}\right) - b \omega \varphi\left(t + \frac{x}{\omega}\right) + F(t)$$

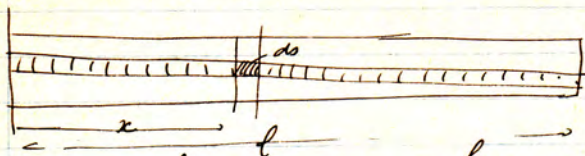
$$\frac{\partial J}{\partial t} = +b \omega f'\left(t - \frac{x}{\omega}\right) - b \omega \varphi'\left(t + \frac{x}{\omega}\right) \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = +b \omega f'\left(t - \frac{x}{\omega}\right) - b \omega \varphi'\left(t + \frac{x}{\omega}\right) + F'(t) \dots \dots (3)$$

Waar (2) = (3) moet  $F'(t) = 0$  zijn  
of  $F(t) = C.$

Kombinatieformule voor gelijk blijven  
verticaal getij over de gehele kanaallengte.

$\uparrow$   $2a$   
 $\downarrow$   $v$   
 asint



constante constant = b

$$ds = \int_0^l da \, dh \, b = b \int_0^l da \, dh$$

$$h = a \sin u(t + \frac{x}{w})$$

$$dh = a \cos u(t + \frac{x}{w}) \, dt$$

$$ds = abw \, dt \int_0^l \cos u(t + \frac{x}{w}) \, da$$

dt is constant, want ds is de hoeveelheid water die door de mond gaat in de tijdsseenheid dt.

$$ds = abw \, dt \left[ \sin u(t + \frac{x}{w}) \right]_0^l$$

$$ds = abw \, dt \left( \sin u(t + \frac{l}{w}) - \sin u(t) \right)$$

$$ds = abw \, dt \cdot \frac{2 \sin \frac{ul}{2w} \cos u(t + \frac{l}{2w})}{}$$

Neen w variabel  
 Neen l variabel

naarling van  
 de sinus van  
 tot. p. h. j. m.

$$\frac{dh}{dx} = \text{vraag} = \frac{na}{w} \cos u(t + \frac{x}{w})$$

ds tussen  $l_1$  en  $l_2$ .

$$= abw \, dt \left( \sin u(t + \frac{l_1}{w}) - \sin u(t + \frac{l_2}{w}) \right)$$

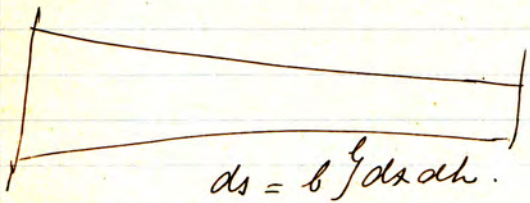
$$= 2abw \, dt \times \sin \frac{u}{2w} (l_2 - l_1) \cos \left( ut + \frac{u}{2w} (l_1 + l_2) \right)$$

ampl.

naarling tot  
 de mond.

?

Kombergingsformule van gedempte golfbeweging.  
Precedente constant.



$$h = a e^{-px} \sin n \left( t - \frac{x}{w} \right)$$

$$dh = an e^{-px} \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) dx$$

$$ds = abn \int_0^l e^{-px} \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) dx$$

Neem:  $\int e^{-px} \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) dx = F(x) \quad \dots (1)$

$$-\frac{w}{n} \int e^{-px} d \sin n \left( t - \frac{x}{w} \right) =$$

$$\underline{-\frac{w}{n} \left[ e^{-px} \sin n \left( t - \frac{x}{w} \right) + p \int \sin n \left( t - \frac{x}{w} \right) x e^{-px} dx \right]}$$

Porto is  $\int e^{-px} \sin n \left( t - \frac{x}{w} \right) dx = +\frac{w}{n} \int e^{-px} d \left[ \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) \right]$

$$= +\frac{w}{n} \left[ e^{-px} \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) + p \int \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) e^{-px} dx \right]$$

Kud in (1)

$$F(x) = -\frac{w}{n} e^{-px} \sin n \left( t - \frac{x}{w} \right) - \frac{pw^2}{n^2} e^{-px} \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) - \frac{p^2 w^2}{n^2} F(x)$$

$$\frac{n^2 + p^2 w^2}{n^2} F(x) = -\frac{w}{n^2} e^{-px} \left[ n \sin n \left( t - \frac{x}{w} \right) + p n \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) \right]$$

$$F(x) = \frac{-w}{n^2 + p^2 w^2} e^{-px} \left[ n \sin n \left( t - \frac{x}{w} \right) + p n \cos n \left( t - \frac{x}{w} \right) \right]$$

$$\boxed{\phi = \frac{pw}{n}} \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2 w^2}{n^2}}}$$

$$F(x) = \frac{-w e^{-px}}{\sqrt{n^2 + p^2 w^2}} \sin \left[ n \left( t - \frac{x}{w} \right) + \phi \right] + C$$

" f(t)

$$ds = -ab \int dt \left[ w \cos \phi x e^{-px} \sin \left[ n \left( t - \frac{x}{w} \right) + \phi \right] + f(t) \right]_0^l$$

$$ds = abw \cos \varphi dt \left[ e^{-pt} \sin \left[ n \left( t - \frac{l}{w} \right) + \varphi \right] - \sin (nt + \varphi) \right]$$
~~$$ds = abw \cos \varphi \left[ e^{-pt} \sin \left[ n \left( t - \frac{l}{w} \right) + \varphi \right] - \sin (nt + \varphi) \right]$$~~

Proof: Is de integratie goed geweest?

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{w e^{-px}}{\sqrt{m^2 + p^2 w^2}} \left[ -p \sin (x) + \frac{m}{w} \cos (x) \right] \\ &= \frac{w e^{-px}}{\sqrt{m^2 + p^2 w^2}} \left[ -pw \sin (x) + \cos (x) \right] \\ &= \frac{w e^{-px}}{\sqrt{m^2 + p^2 w^2}} \left[ -\tan \varphi \sin (x) + \cos (x) \right] \\ &= \frac{w e^{-px}}{\cos \varphi \sqrt{m^2 + p^2 w^2}} \left[ \cos \left[ n \left( t - \frac{x}{w} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2 + p^2 w^2}} \quad \text{dus kloopt.}$$

Von l zeer klein:

rechsantwikkeling

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \dots$$

$$e^x = 1 + x.$$

$$e^{-pt} = 1 - pt$$

Von l zeer klein is dit zo.

$$\sin \left( nt - \frac{nl}{w} + \varphi \right) = \sin (nt + \varphi) - \frac{nl}{w} \cos (nt + \varphi)$$

$$\sin (x + \alpha) = \sin x + \alpha \cos x.$$

$$(1 - pt) \left[ \sin (x) + \frac{nl}{w} \cos (x) \right] - \sin (x)$$

$$- pt \sin (nt + \varphi) + \frac{nl}{w} \cos (nt + \varphi)$$

bus von zeer kort kanaal:

$$ds = ablw \cos \varphi \left[ -pw \sin (nt + \varphi) + n \cos (nt + \varphi) \right]$$

$$= ablw \cos \varphi \left[ -\tan \varphi \sin (nt + \varphi) + \cos (nt + \varphi) \right]$$

$$\text{of } ds = ablw \cos \varphi.$$

Nof iets verder herleiden om de gewone sinusfunctie te krijgen.

$$a_1 \sin(x + \beta) = a_1 \cos \beta \sin x + a_1 \sin \beta \cos x$$

ds =

$$a_1 e^{-pt} \cos \left( \frac{u}{w} t - \varphi \right) \cos \alpha t + e^{-pt} \cos \left( \frac{u}{w} t - \varphi \right) \sin \alpha t \quad - \sin(\alpha t - \varphi)$$

$$a_1 = e^{-pt}$$

$$ds = a_1 \sin(x + \beta) - \sin \beta$$

$$x = ut + \varphi$$

$$\beta = \frac{u}{w}$$

$$(a_1 \cos \beta - 1) \sin x + (a_1 \sin \beta) \cos x =$$

$$(a_1 \cos \beta - 1) \left\{ \sin x + \frac{a_1 \sin \beta}{a_1 \cos \beta - 1} \cos x \right\} =$$

$$= \varphi x$$

$$= \frac{a_1 \cos \beta - 1}{\cos \varphi} \sin(x + \varphi) \quad \cos \varphi = \frac{a_1 \cos \beta - 1}{\sqrt{a_1^2 + 1 - 2a_1 \cos \beta}}$$

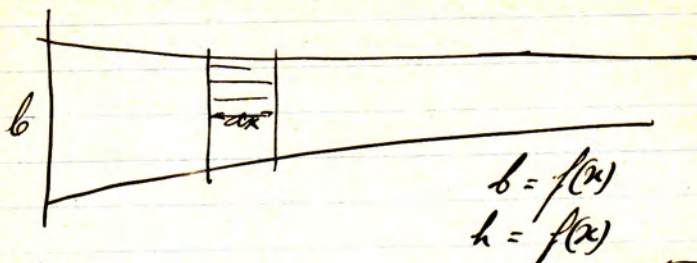
$$= \sqrt{a_1^2 + 1 - 2a_1 \cos \beta} \times \sin(x + \varphi)$$

of:

$$ds = a_1 w \cos \varphi dt \sqrt{e^{-2pt} + 1 - 2e^{-pt} \cos \frac{u}{w} t} \sin(ut + \varphi - \varphi)$$

$$\varphi x = \frac{e^{-pt} \sin \frac{u}{w} t}{e^{-pt} \cos \frac{u}{w} t - 1} \quad ; \quad \varphi \varphi = \frac{pw}{u}$$

Veranderlijke breedte e veranderlijke amplitude.



Van de amplitude nemen wij termen  
 $a e^{-px}$

Naarmate  $x$  voortv. wordt neemt  $a$  dus af  
In den mond is de ampl. =  $a$ .

Neem eenzelfde afname aan van de  
breedte  $n.l.$

$b e^{-qx}$   
In den mond is de breedte =  $b$ , verder naar  
binnen kleiner.

$$ds = \int_0^l b \frac{dh}{dt} dt dx.$$

$$h = a e^{-px} \sin u \left( t + \frac{x}{\omega} \right)$$

$$\frac{dh}{dt} = a \omega e^{-px} \cos u \left( t + \frac{x}{\omega} \right)$$

$$ds = \int_0^l a \omega b e^{-qx} e^{-px} \cos u \left( t + \frac{x}{\omega} \right) dx$$

$$= a \omega \int_0^l e^{-(p+q)x} \cos u \left( t + \frac{x}{\omega} \right) dx.$$

Is precies dezelfde uitkomst, doch  
de  $s$  dempt niet volgens  $p$ , doch  
volgens  $p+q$ .

Verhangeren  $\frac{dh}{dx} =$

Voor gedempte trilling:

$$h = a e^{-px} \sin u \left( t + \frac{\pi}{\omega} \right)$$

$$\frac{dh}{dx} = a(-p) e^{-px} \sin u \left( t + \frac{\pi}{\omega} \right) + a e^{-px} \cos u \left( t + \frac{\pi}{\omega} \right) \times \frac{u}{\omega} =$$

$$= -ph + a e^{-px} \cos u \left( t + \frac{\pi}{\omega} \right) \times \frac{u}{\omega} \quad (\text{zie pag 465 Com 96})$$

Maak er weer de gewone trillingfunctie van:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{a e^{-px}}{\omega} \left\{ -pw \sin u \left( t + \frac{\pi}{\omega} \right) + u \cos u \left( t + \frac{\pi}{\omega} \right) \right\}$$

Neem  $\varphi = \frac{pw}{u}$ , dan is:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{u a e^{-px}}{\omega \cos \varphi} \cos \left( ut + \frac{u\pi}{\omega} + \varphi \right)$$

$$p = \sigma = \frac{1.5}{10000} \text{ afgevoerd van Koolvorkaan}$$

Werken met complexe methodes:

$$\int e^{-2x} \cos(ux+d) dx. \quad \text{--- (1)}$$

$$\cos(ux+d) = \frac{e^{i(ux+d)} + e^{-i(ux+d)}}{2}$$

want:  $e^{xi} = \cos x + i \sin x$

$e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

aus (1) want:

$$\frac{1}{2} \int e^{i(ux+d)-2x} dx + \frac{1}{2} \int e^{-i(ux+d)-2x} dx =$$

$$\frac{e^{i(ux+d)-2x}}{2(ui-2)} + \frac{e^{-i(ux+d)-2x}}{-2(ui+2)} + C =$$

$$= \frac{e^{-2x}}{2} \left\{ \frac{(ui+2) e^{i(ux+d)}}{2^2+u^2} - \frac{(ui-2) e^{-i(ux+d)}}{2^2+u^2} \right\} + C$$

$$\text{teller} = ui \left\{ e^{i(ux+d)} - e^{-i(ux+d)} \right\} +$$

$$+ 2 \left\{ e^{i(ux+d)} - e^{-i(ux+d)} \right\} =$$

$$= -2u \sin(ux+d) + 2 \cos(ux+d)$$

het komt:

$$\frac{e^{-2x}}{2^2+u^2} \left\{ u \sin(ux+d) - 2 \cos(ux+d) \right\}$$

$$2 \rightarrow p \quad u \rightarrow \frac{u}{w} \quad d \rightarrow ut$$

$$\frac{e^{-px}}{w^2+p^2} \left\{ \frac{u}{w} \sin\left(\frac{ux}{w} + ut\right) + p \cos u\left(\frac{x}{w} + t\right) \right\}$$

~~dit was het resultaat.~~

$$\tan \varphi = \frac{p\omega}{n}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi}} = \frac{n}{\sqrt{p^2 + n^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{n \omega e^{-p\lambda}}{n^2 + p^2 \omega^2} & \left\{ \sin n \left( t - \frac{\lambda}{\omega} \right) + \frac{p\omega}{n} \cos n \left( t - \frac{\lambda}{\omega} \right) \right\} = \\ & = \frac{\omega e^{-p\lambda}}{n} \cos^2 \varphi \left\{ \cos \varphi \sin n \left( t - \frac{\lambda}{\omega} \right) + \sin \varphi \cos n \left( t - \frac{\lambda}{\omega} \right) \right\} \\ & = \frac{\omega e^{-p\lambda}}{n} \cos \varphi \sin \left\{ n \left( t - \frac{\lambda}{\omega} \right) + \varphi \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds &= ab \omega dt \int_0^l \dots \\ &= ab \omega dt \left[ e^{-p\lambda} \cos \varphi \sin \left\{ n \left( t - \frac{\lambda}{\omega} \right) + \varphi \right\} - \sin(n\lambda + \varphi) \right] \\ &\text{dus dezelfde uitkomst.} \end{aligned}$$

Voor  $p=0$  moet de uitkomst zijn

$$ds = 2ab \omega \sin \frac{n\lambda}{2\omega} \cos n \left( t - \frac{\lambda}{2\omega} \right)$$

$$\tan \varphi = \frac{p\omega}{n} \rightarrow \varphi = 0 \rightarrow \cos \varphi = 1.$$

$$ds = ab \omega \cos \varphi dt \sqrt{1 - 2\frac{p\lambda}{\omega} + 1 - 2e^{-p\lambda} \frac{\cos n\lambda}{\omega}} \sin(n\lambda + \varphi - \lambda)$$

$p=0$ :

$$= ab \omega dt \sqrt{2 - 2 \frac{\cos n\lambda}{\omega}} \sin(n\lambda - \lambda)$$

$$\text{Nu is: } (1 - \cos 2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

dus:

$$ds = ab \omega dt 2 \sin \frac{n\lambda}{2\omega} : \text{Amplitude kloopt dus.}$$

$$\text{Te herinneren: } \cos n \left( t - \frac{\lambda}{2\omega} \right) = \sin(n\lambda - \lambda)$$

$$\cos n\lambda \cos \frac{n\lambda}{2\omega} + \sin n\lambda \sin \frac{n\lambda}{2\omega}$$

$$\begin{array}{l} \sin n\lambda \cos \lambda - \cos n\lambda \sin \lambda \\ \cos \lambda / \sin n\lambda - \varphi \lambda \cos n\lambda \\ \cos \lambda / \sin n\lambda \sin \frac{n\lambda}{2\omega} + \cos n\lambda \cos \frac{n\lambda}{2\omega} \\ \sin \frac{n\lambda}{2\omega} \end{array}$$

ben nog te bewijzen dat

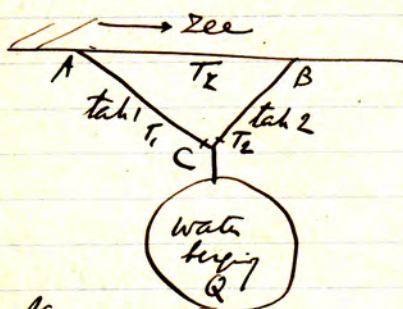
$$\cos \chi = \sin \frac{nl}{2w}$$

$$\phi \chi = \frac{\sin \frac{nl}{w}}{\cos \frac{nl}{w} - 1} = \frac{2 \sin \frac{nl}{2w} \cos \frac{nl}{2w}}{-2 \sin^2 \left( \frac{nl}{2w} \right)} = -\cot^2 \frac{nl}{2w}$$

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \frac{nl}{2w}$$

des  $\cos \chi = \sin \frac{nl}{2w}$

Berekening lichte uitstraling uit  
monden.



Gelij. lichtig komt  
van lichte.

des

$$T_1 = T_2 + T_2$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

klein zij bekeed:

$$Q \propto T_2$$

Voorziet dat in de mond even  
hetzelfde land aan weeg is, des. dat  
 $T_2$  voortdurend bepaald is, dat als met  
de weersad van het land teg. uit  
schuring overeenkomt.

Voorzietal verder gelijkblijven en  
amplitude, da is

$$F_1 = c \sqrt{\frac{T_1}{l_1}} \quad \text{en} \quad F_2 = c \sqrt{\frac{T_2}{l_2}}$$

des  $\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2} \frac{l_2}{l_1}}$  als  $l_1 = l_2$ .

Hoe is de verhouding  $\frac{l_1^{3/2}}{l_2^{3/2}}$  welke er is

zal instellen?

Daar  $T_c$  vast is, is  $T_1$  zoowel als  $T_2$  constant (dit hangt af van de zandsoort)  
 dus  $\frac{F_1}{F_2} = p$  (constant)

$$\frac{Q_1}{b_1 h_1^{3/2}} : \frac{Q_2}{b_2 h_2^{3/2}} = p : 1 \quad \text{--- (1)}$$

~~$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \text{--- (2)}$$~~

De volgende vergelijkingen:

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \text{(bekend)} \quad \text{--- (1)}$$

$$(b_1 h_1^{3/2}) + (b_2 h_2^{3/2}) = G \quad \text{(totaal veld, vsm) (2)}$$

$$\frac{Q_1}{b_1 h_1^{3/2}} = f \sqrt{T_1} \quad \text{(bekend)} \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{Q_2}{b_2 h_2^{3/2}} = f \sqrt{(T_1 - T_2)} \quad \text{(bekend)} \quad \text{--- (3)}$$

Mijn antekend:  $Q_1, Q_2, (b_1 h_1^{3/2}, b_2 h_2^{3/2})$

Opl:

$$\sqrt{T_1} (b_1 h_1^{3/2}) + \sqrt{(T_1 - T_2)} (b_2 h_2^{3/2}) = Q$$

~~$$\sqrt{T_1} G - \sqrt{T_1} b_2 h_2^{3/2} + T_1 b_2 h_2^{3/2} - T_2 b_2 h_2^{3/2} = Q$$~~

~~$$T_1 G = T_2 (b_2 h_2^{3/2}) \quad \text{--- (4)}$$~~

~~$$b_2 h_2^{3/2} = \frac{T_1}{T_2} \frac{G}{Q} \quad \text{--- (5)}$$~~

~~$$T_1 (b_1 h_1^{3/2}) + (T_1 - T_2) (G - b_1 h_1^{3/2}) = Q$$~~

~~$$T_1 G = T_2 G + T_2 (b_1 h_1^{3/2}) = Q$$~~

~~$$b_1 h_1^{3/2} = \frac{(T_2 - T_1) G}{T_2} \quad \text{--- (6)}$$~~

$$G \sqrt{T_1} - (b_2 h_2^{3/2}) \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} (b_2 h_2^{3/2}) = Q$$

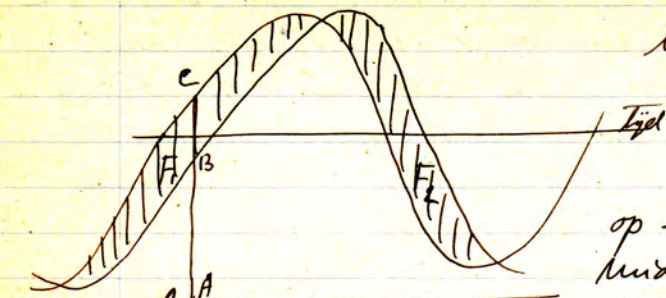
$$(b_2 h_2^{3/2}) = \frac{Q - G \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}} \quad \text{--- (a)}$$

$$(b_1 h_1^{3/2}) = \frac{Q - G \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}} \quad \text{--- (b)}$$

$$= \frac{Q - G \sqrt{(T_1 - T_2)}}{\sqrt{T_1} - \sqrt{(T_1 - T_2)}}$$

$$Q_1 = \sqrt{T_1} \times \frac{Q - G \sqrt{(T_1 - T_2)}}{\sqrt{T_1} - \sqrt{(T_1 - T_2)}} \quad \text{--- (c)}$$

$$Q_2 = \sqrt{(T_1 - T_2)} \times \frac{Q - G \sqrt{T_1}}{(\sqrt{T_1 - T_2}) - \sqrt{T_1}} \quad \text{--- (d)}$$



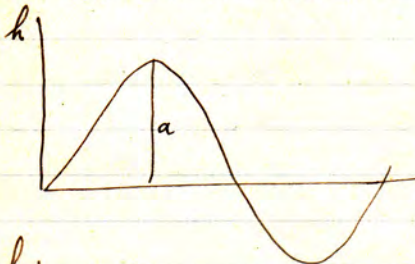
Motorsch oppervlak  
is  $F_1 + F_2$

Bij voortplanting  
op horizontaal  
middelvlak is  $F_1 = F_2$

Ander geeft  $F_1 - F_2$  de verhoofing van de  
middelenstand. Dit volgt oopenlijkheit uit  
integratie  $\epsilon_{AB} - \epsilon_{AC}$

Het motorsch oppervlak is dus een bijzonder  
merkwaardig vlak. Het geeft niet alleen de  
verhangen, maar tevens de voortplanting.

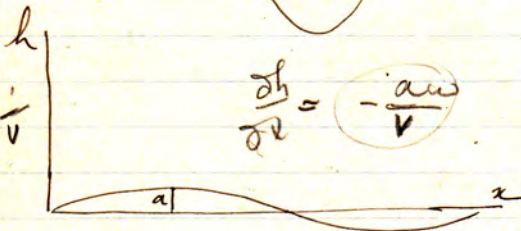
Men moet onderscheid maken tusschen  $\frac{\partial h}{\partial x}$  en  $\frac{\partial h}{\partial t}$



$$h = a \sin\left\{\omega t - \frac{x}{v}\right\}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\omega \sin\left\{\omega t - \frac{x}{v}\right\} + \frac{\pi}{2}$$

$v$  is watpl. snelh.



$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{a\omega}{v}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a\omega}{v} \sin\left\{\omega t - \frac{x}{v}\right\} + \frac{\pi}{2}$$

De term  $-\frac{x}{v}$  kan  
men voor een bepaald

plaats  $x=0$  natuurlijk weglaten.

Er bestaat de betrekking  $\lambda = vT =$  golflengte

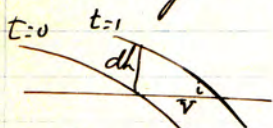
$$\text{en } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{dus } \lambda = \frac{2\pi v}{\omega}$$

De verhangsinusside is dus  $\frac{\pi}{2}$  phase  
achter bij de tijtsinusside. De amplitude  
van de verhangsinusside is  $\frac{a\omega}{v}$ .

Indien de wortpl. melheid groot is, is de  
getijpog een langpreet en zijn de  
oekangen, des ook ~~klein~~ de stroomsterkten  
betrekkelyk klein.

dit volgt ook nog uit volgend figuurtje:



$$dh = iV$$

Hoe groter  $V$ , des te kleiner  $i$

Analytisch:

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial h}{\partial x}} = \frac{aw \sin \omega(t - \frac{x}{V}) + \frac{\pi}{2}}{-\frac{aw}{V} \sin \omega(t - \frac{x}{V}) + \frac{\pi}{2}} = -V$$

Analogie waterstroomen met de wet van Ohm.

$$E = IR \quad \xrightarrow{\quad} \quad \begin{array}{c} A \\ | \\ \text{---} \\ | \\ B \end{array} \quad \text{gelijktroom.}$$

$E$  is potentiaaloverval tusschen A en B

$I$  is de stroomsterkte in een dron. per see

$R$  is de weerstand tusschen A en B.

Bij een gewone afvloeiende rivier is

$$Q = cbh^{3/2} V_i$$

hetgeen te schrijven is:

$$V_i = \frac{Q}{cbh^{3/2}}$$

hier is  $V_i$  de "potentiaal" of het verhang

$Q$  de stroomsterkte door een dron per see

en  $\frac{1}{cbh^{3/2}}$  de weerstand per lengte eenheid

de analogie is dus duidelyk. Bij water heeft  
men alleen het wortelteeken voor de potentiaal.  
dit geeft ook eenige complicatie bij de lengte  
van het behoude vak:

$$\text{verval} = \frac{\text{afvoer}}{\text{weerstand}}$$

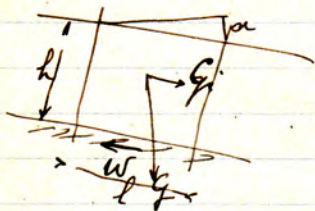
$$V_i = \frac{Q R}{cbh^{3/2}}$$

Als de weerstand in een rivierwach wordt  
voorzield door

$$W = \frac{VE}{c b h^{3/2}}$$

M.a.w. ~~met~~ is de weerstand niet  $\propto l$  maar  
met  $VE$ .

het vindt zijn oorsake in de verandering  
dat  $W \propto v^2$  wordt genomen.



$$W = Qa \quad (a = \text{li.} \\ a = \text{veval})$$

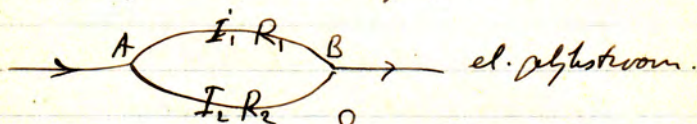
$$c_1 a b v^2 = q h b l i$$

$$c_1 v^2 = q h l i$$

$$v = c \sqrt{h l i}$$

$$Q = c b h \sqrt{h l i}$$

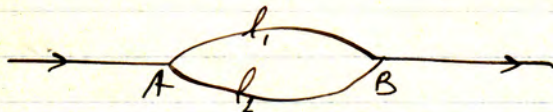
Kirchhof. Bewondert geval is:



$$E_{AB} = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

$$\text{of } \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Waterstroom (el. st.)



$$\sqrt{l_1} i_1 = \sqrt{l_2} i_2 =$$

$$\frac{Q_1 \sqrt{l_1}}{c_1 b_1 l_1^{3/2}} = \frac{Q_2 \sqrt{l_2}}{c_2 b_2 l_2^{3/2}}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W_2}{W_1}$$

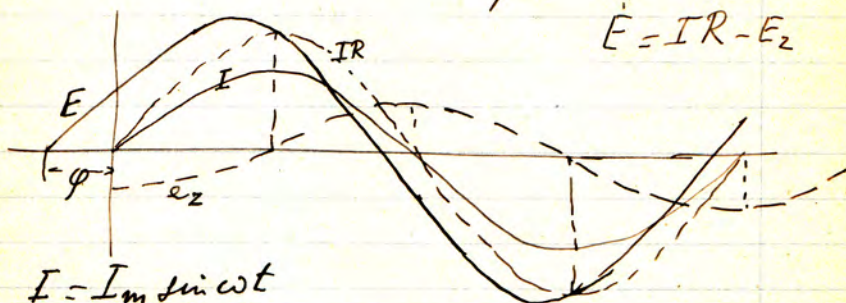
was volkomen analoog met el. st.

## Wisselstroom.

Van el. wisselst. is  $E = IR \cos \varphi$   
 Deze  $\cos \varphi$  komt in de p.k. door de werking  
 der zelfinductie

$$E_2 = -L \frac{dI}{dt}$$

den vermindert dus  $90^\circ$  fase met  $i$ .



$$I = I_m \sin \omega t$$

$$E_2 = -L \frac{dI}{dt} = -L \omega I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$E = I_m \sin \omega t - L \omega I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

De stroom heeft hier dus een phase-afwijking  
 ten opz. van de E.H.K. groot  $\varphi$ .

De  $\varphi$  kan ook analytisch worden bepaald:

$$E = E_m \sin \omega t - L \frac{dI}{dt}$$

Ten tijde  $t$  is dus de stroomsterkte:

$$I = \frac{E_m \sin \omega t - L \frac{dI}{dt}}{R}$$

waarin  $R$  de weerstand v.d. stroomkabel  
 opz. deze diff. verg. met behulp v. hulpvoorneden  
 u en v.

$$I = u v$$

$$u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} = \frac{dI}{dt} = -\frac{IR}{L} + \frac{E_m}{L} \sin \omega t$$

$$u dv + v du + u v \frac{R}{L} dt = \frac{E_m}{L} \sin \omega t dt$$

$$\text{of } u (dv + \frac{R}{L} v dt) + v du = \frac{E_m}{L} \sin \omega t dt$$

Geef nu aan  $v$  een zoodanige waarde, dat  $dv + \frac{R}{L} v dt = 0$   
 wordt en noemt men  $\frac{R}{L} = b$ , dan is

$$\frac{dv}{v} = -b dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = \log_e v = -\int b dt + \log_e K_1$$

$$\text{of } v = K_1 e^{-bt}$$

Konts wordt

$$v du = \frac{E_m}{L} \sin \omega t dt$$

$$du = \frac{1}{K_1} e^{-\beta t} \frac{E_m}{L} \sin \omega t dt$$

$$u = K_2 + \frac{1}{K_1} \int e^{\beta t} \frac{E_m}{L} \sin \omega t dt$$

Stel nu  $K_1 K_2 = K$

$$I = u v = e^{-\beta t} \left\{ \frac{E_m}{L} \int e^{\beta t} \sin \omega t dt + K \right\}$$

$$I = e^{-\beta t} \frac{E_m}{L} \int e^{\beta t} \sin \omega t dt + K e^{-\beta t}$$

baar:

$$\int e^{\beta t} \sin \omega t dt = \frac{e^{\beta t}}{\omega^2 + \beta^2} (\beta \sin \omega t - \omega \cos \omega t)$$

wordt:

$$I = \frac{E_m}{L(\omega^2 + \beta^2)} (\beta \sin \omega t - \omega \cos \omega t) + K e^{-\beta t}$$

De term  $K e^{-\beta t}$  is bij de aanvang ( $t$  klein) een negatieve van betekenis, doch wordt steeds kleiner naarmate  $t$  toeneemt - teverloren gaan.

Stel voort

$$\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin \omega t - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos \omega t = \sin(\omega t - \varphi)$$

waarin  $\varphi$  een nieuwe constante wordt, als voor alle waarden van  $t$  aan de vergelijking voldaan wordt.

$$\text{Bij } t=0 \rightarrow \sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$$

$$\text{en voor } \omega t = \frac{\pi}{2}:$$

$$\rightarrow \cos \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega L}{R}$$

$$\text{beveel. wordt dan: } I = \frac{E_m}{L \sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

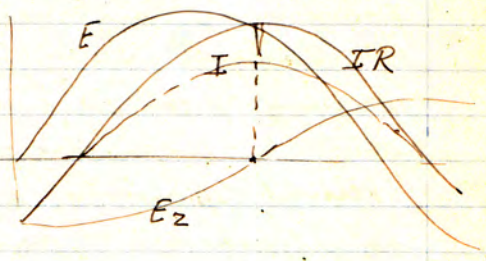
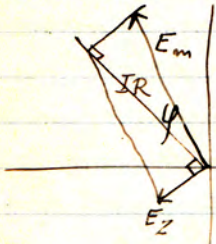
$$= \frac{E_m}{R \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$I = \frac{E_m \cos \varphi}{R} \sin(\omega t - \varphi)$$

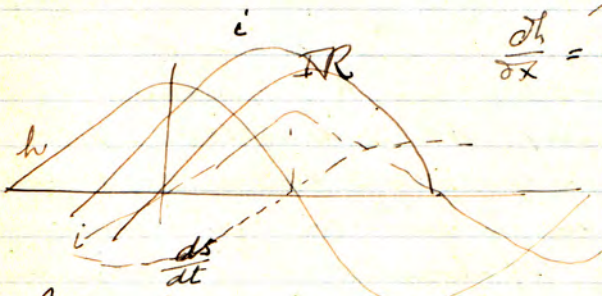
De max waarde wordt dus  $E_m \cos \varphi$ .

Vectoriële:

$$E = IR \cos \varphi - E_2 \text{ voor elke tijd } t.$$



Cyclisch:



$$h = a \sin \omega t - \frac{x}{v}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i = -\frac{a\omega}{v} \sin \left( \omega t - \frac{x}{v} \right)$$

Verhangkromme  
 verschilt dus  $90^\circ$   
 in phase met de  
 qty kromme.

Verhangkromme is analoog aan E kromme.  
 Stroomkromme ijlt  $\varphi$  ( $\approx 30^\circ$ ) na t.o.v. verhang  
 kromme terugvolgt van werking hoeveel. v. bew.

$$i = \frac{\partial h}{\partial x} = + \frac{a\omega}{v} \sin \omega t - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  ijlt  $90^\circ$  na t.o.v. de verhangkromme

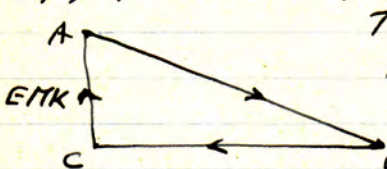
Istücken Theor. paracheef d. Electrotechniek  
 het doet verdeelen het probleem van spanning  
 en stroom als een soort weerstand te bepalen  
 bij wisselst.  $\rightarrow Z = \frac{E}{I}$

$Z = \frac{R}{\cos \varphi}$   
 $Z$  is de schijnbare weerstand of impedantie.

Wanneer men van stroomsterkte of  
 spanning spreekt bij wisselstroom bedoelt men  
 altijd de middelbare waarde.

Verskil spanning en elektr. mot. kracht

Bij gelijkstroom: spanning = hoogteverschil.



Tussen A en B regelmatig of  
 onregelmatig spanningsverschil  
 stroom moet rondgaan

en dus ploteling opgepompt  
 worden van C naar A (bij rivieren is dit de  
 verdelving) AC is de EMK.

Een elektr. mot. kracht drijft de  
 stroom van een punt van laag naar een hoogere  
 spanning. (Salvaant element, dynamo mach.  
 de zon) EMK door alleer bij de verwetters  
 de waan

Klein spanning

Spanning bij wisselstroom is middelbare waarde  
 zoo. nulspanning (aarde). Spanningverschil  
 tussen twee punten = mot. oppervlak per seconde

Opmer. De electrotechniek meet in een bepaald  
 punt procedurele vele perioden en vindt daar  
 de ty verschillen of middelbare ty verschillen  
 het verschil van deze ty. spanning is niet de  
 spanning wanneer phaseverschil optreedt. Bij  
 water veel meer phaseverschil dan bij elects.

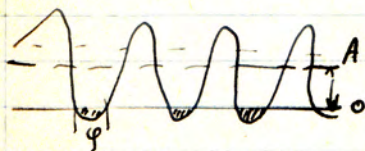
Arbeid v. wisselst.

$$D = E_m I_m \cos \varphi$$

$E_m$  en  $I_m$  hier de middelbare waarden

$A$  de gemiddelde waarde, die veel positief,  
weinig neg.

$A \cos \varphi$  is dus tot nul toe  
en geldt dus in ien profiel.



Hoe is dit bij een  
kwaad van sekens lengte?

$\varphi$  is dan veel groter  $A$  door  
phasvershillen + ampl. verschillen.