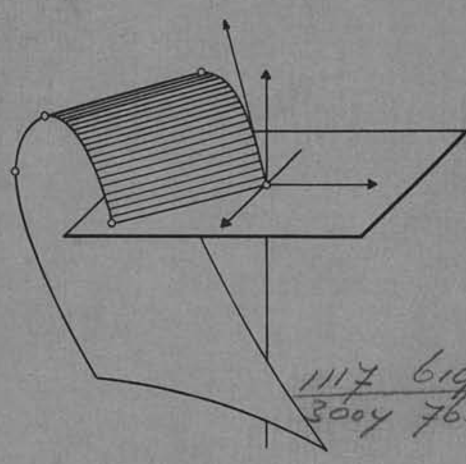
OPGAVEN
STELSELS
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

[LINEAIRE STELSELS MET CONSTANTE COËFFICIËNTEN]

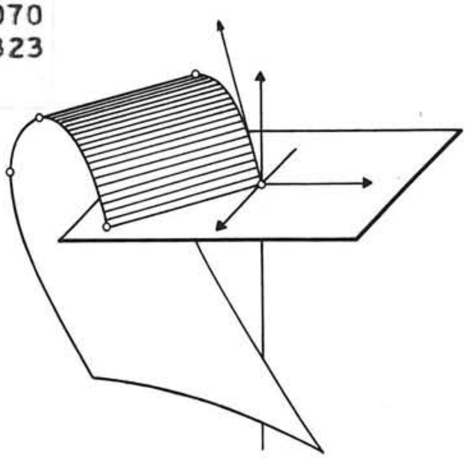
DELFTSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ 1977



CHUITMAN

OPGAVEN
STELSELS
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

[LINEAIRE STELSELS MET CONSTANTE COËFFICIËNTEN]



VERENIGING VOOR STUDIE- EN STUDENTENBELANGEN
TE DELFT 1977

SCHUITMAN

DIT BOEKJE BEVAT EEN AANTAL VRAAGSTUKKEN OVER STELSELS DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (LINEAIR EN MET CONSTANTE COEFFICIENTEN). BIJNA ALLE VRAAGSTUKKEN HEBBEN ALS UITGANGSPUNT EEN REDELIJK EENVOUDIGE MATRIX: DE EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN ZIJN MET BETREKKELIJK WEINIG MOEITE OP TE SPOREN.

LEZERS DIE MEER VRAAGSTUKKEN WILLEN HEBBEN DAN ER ZIJN OPGENOMEN, KUNNEN DIE ZELF MAKEN. EEN EN DEZELFDE MATRIX KAN VAAK DIENST DOEN BIJ VERSCHILLENDE SOORTEN OPDRACHTEN. BOVENDIEN IS ACHTERIN NOG EEN HOEVEELHEID CONSTRUCTIEMATERIAAL OPGENOMEN.

OPMERKINGEN:

1 (2,2) MATRICES WORDEN NIET GEBRUIKT OM VRAAGSTUKKEN TE MAKEN; ZE KOMEN BIJ ELK COLLEGE EN IN ELK BOEK UITVOERIG AAN DE ORDE.

2 EEN BEETJE KENNIS VAN DE LINEAIRE ALGEBRA IS NODIG.

3 "2 (MULT 3)" BETEKENT "2 IS EEN EIGENWAARDE MET MULTIPLICITEIT 3".

4 EEN EIGENVECTOR IS NIET DE NULVECTOR.

5 VECTOREN ZIJN KOLOMVECTOREN. OM RUIMTE TE SPAREN STAAN ZE SOMS (.,.,.,.) GENOTEERD.

DELFT, 1977. A.SCHUITMAN.

INHOUD.

0. INLEIDING.

De vraagstukken in dit bundeltje gaan over stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficienten. De gedaante van zo'n stelsel is (in het geval van drie vergelijkingen)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

Om veel schrijfwerk te vermijden zullen we voor het stelsel steeds schrijven (vectordifferentiaalvergelijking)

(1) $$\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{p}(t)$$

Als $\underline{p}(t)=\underline{0}$ heet het stelsel homogeen, anders inhomogeen. Onder een oplossing van (1) verstaan we een op $(-\infty,\infty)$ gedefinieerde vectorfunctie $t \to \underline{x}(t)$ die ingevuld in (1) een identiteit in t geeft. Blijkbaar kunnen we ons alleen interesseren voor differentieerbare vectorfunties.
De gedaante van de oplossingen van (1) hangt nauw samen met de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A. De volgorde van de vraagstukken weerspiegelt dat.

OPMERKING VOOR DE GEBRUIKER. TUSSEN DIKKE HORIZONTALE LIJNEN STEEDS EEN EXPOSÉ VAN DE HOOFDZAKEN DIE EEN ROL SPELEN BIJ DE VOLGENDE VRAAGSTUKKEN. DAARBIJ WORDT DAN ALS VOORBEELD EEN 3 BIJ 3 STELSEL GENOMEN. MET WEINIG MOEITE IS EEN EN ANDER TE VERTALEN VOOR ANDERE FORMATEN.

1.

A heeft de verschillende eigenwaarden λ_1, λ_2, λ_3, met bijbehorende eigenvectoren $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$, $\underline{c}_3$. De algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t)$ is

$$\underline{x}(t) = C_1\underline{c}_1e^{\lambda_1 t} + C_2\underline{c}_2e^{\lambda_2 t} + C_3\underline{c}_3e^{\lambda_3 t}$$

waarbij C_1, C_2, C_3 reële constanten zijn. (We zullen ons steeds beperken tot reële oplossingen).

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t)$.

Oplossing. De karakteristieke vergelijking (kv) is

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \text{(uitgewerkt) } \lambda(1-\lambda)(\lambda-2).$$

De eigenwaarden van A zijn dus 2,1,0. Een eigenvector bij 2 vinden we uit

$$\begin{pmatrix} 0-2 & 2 & 2 \\ 1 & -1-2 & -2 \\ -1 & 3 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Denk er altijd aan de afhankelijkheid van het verkregen stelsel na te gaan). We nemen voor $\underline{c}$ b.v. (1,-1,2); maar ook (b.v.) kun je nemen (2,-2,4). Op dezelfde manier vinden we bij 1 de vector (0,1,-1) en bij de eigenwaarde 0 de vector (1,-1,1).
De algemene oplossing is dan

$$\underline{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Bepaal de algemene oplossing van $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. idem.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. idem.

---

2. Als $\underline{A}$ een reële matrix is en $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde is, dan is $\bar{\lambda}$ (toegevoegd complexe) eveneens een eigenwaarde van A. Is $\underline{c}$ een bij λ behorende eigenvector (complexe coördinaten), dan is $\underline{c}\exp(\lambda t)$ een formele oplossing van het gegeven stelsel. Om reële oplossingen te krijgen pas je de volgende (werkbesparende) regel toe:

$\mathrm{Re}(\underline{c}e^{\lambda t})$ en $\mathrm{Im}(\underline{c}e^{\lambda t})$ zijn onafhankelijke oplossingen.

---

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.

Oplossing. De eigenwaarden zijn 0,i,-i. Bij 0 is (-1,3,2) en eigenvector. Een eigenvector bij i vinden we uit

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ -2 & -4-i & 5 \\ -3 & -3 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De afhankelijkheid van het stelsel (1) zie je meestal pas na enig gereken. In dit geval is het dan ook vaak verstandig om maar rechtuit rechtaan te gaan oplossen en achteraf je antwoorden door invullen in (1) te controleren.
Neem de derde vergelijking en "tel daarbij op" drie maal de eerste vergelijking. Om $\underline{c}$ te bepalen heb je dan

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ -3i & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kies $c_1=1$; dan is $c_3=-3$ en $c_2=-4+i$. Ter controle invullen in de tweede vergelijking van (1)!
Een oplossing van het gegeven stelsel is nu

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4+i \\ -3 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4+i \\ -3 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t).$$

Reële onafhankelijke oplossingen:

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ -4\cos t - \sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} \sin t \\ -4\sin t + \cos t \\ -3\sin t \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is nu eenvoudig op te schrijven.

6.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$	Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.
7.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \\ -5 & -15 & 4 \end{pmatrix}.$	Idem.
8.	$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$	Idem.

3. Als A een eigenwaarde λ heeft met multipliciteit 2 is het stelsel eveneens oplosbaar als de bij λ behorende eigenruimte de dimensie 2 heeft. Voor die eigenruimte moet dan een basis worden bepaald. De algemene oplossing is weer een lineaire combinatie van de op deze manier verkregen onafhankelijke oplossingen.

9.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.

<u>Oplossing.</u> Eigenwaarden 2, 1 (mult. 2). Bij 2 is (1,1,-1) een eigenvector. Voor eigenwaarde 1 vinden we

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & -1 \\ 1 & 0-1 & -1 \\ -1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en dit stelsel is gelijkwaardig met

$$c_1 - c_2 - c_3 = 0.$$

De eigenruimte is twee-dimensionaal. Een basis is b.v.

$$((1,1,0),(1,0,1)).$$

Onafhankelijke oplossingen voor het stelsel zijn

$$(1,1,-1)e^{2t},\ (1,1,0)e^{t},\ (1,0,1)e^{t}$$

waarmee dan de algemene oplossing bekend is.

10.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$	Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.
11.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	Idem.
12.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	Idem.

4. Als de dimensie van de bij een eigenwaarde behorende eigenruimte lager is dan de multipliciteit van de eigenwaarde, loopt de oplossing een beetje anders.
Stel dat A een eigenwaarde λ heeft met multipliciteit 2 en dat de bijbehorende eigenruimte de dimensie 1 heeft. Laat $\underline{c}$ de vector zijn die die ruimte opspant. Naast de oplossing $\underline{c}\ \exp(\lambda t)$ proberen we nu een oplossing te construeren van de gedaante

$$\underline{x}(t) = (\underline{a}t + \underline{b})e^{\lambda t}.$$

Invullen in de vectordifferentiaalvergelijking (het stelsel):

$$(\underline{a} + \lambda\underline{a}t + \lambda\underline{b}t)e^{\lambda t} = A\underline{a}te^{\lambda t} + A\underline{b}e^{\lambda t}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

We hebben dus succes als $A\underline{a} = \lambda\underline{a}$ en $(A - \lambda I)\underline{b} = \underline{a}$.
Voor $\underline{a}$ nemen we de reeds bekende vector $\underline{c}$ (eigenvector bij λ) en $\underline{b}$ bepalen we dan als oplossing van het stelsel

$$(A - \lambda I)\ \underline{b} = \underline{a}.$$

Het bewijs dat dit stelsel altijd oplosbaar is, is omvangrijk.

13.	$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.

Oplossing. 1 is een eigenwaarde met L((1,0,-1)) als eigenruimte. 2 is een tweevoudige eigenwaarde met als eigenruimte L((2,-1,-2)). Als onafhankelijke oplossingen verschijnen dus al

$$(1,0,-1)e^{t} \text{ en } (2,-1,-2)e^{2t}.$$

Om een derde oplossing te vinden zetten we

$$\underline{x}(t) = (\underline{a}t + \underline{b})e^{2t}$$

Invullen geeft

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{a}+2\underline{a}t+2\underline{b})e^{2t} = (A\underline{a}t+A\underline{b})e^{2t}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Door gelijkstellen destilleren we hieruit

$$A\underline{a} = 2\underline{a}. \quad (A - 2I)\underline{b} = \underline{a}.$$

Neem $\underline{a}=(2,-1,-2)$ (eigenvector bij eigenwaarde 2).
$\underline{b}$ volgt dan uit

$$\begin{pmatrix} -1-2 & -2 & -2 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 3 & 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Een "mooie" oplossing voor $\underline{b}$ is $(2,-1,-3)$. Als oplossing voor het stelsel differentiaalvergelijkingen krijgen we

$$((2,-1,-2)t + (2,-1,-3))e^{2t}.$$

We hebben nu drie onafhankelijke oplossingen van het stelsel tot onze beschikking en kunnen dus de algemene oplossing opschrijven.

14.	$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.
15.	$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	Idem.
16.	$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	Idem.

5. Als λ een drievoudige eigenwaarde is van de matrix A met een twee-dimensionale eigenruimte, komt er een kleine moeilijkheid bij. Een poging om een oplossing van de vorm

$$(\underline{a}t + \underline{b})e^{\lambda t}$$

te bepalen geeft net als in het vorige geval

$$A\underline{a} = \lambda\underline{a} \quad \text{en} \quad (A - \lambda I)\underline{b} = \underline{a}.$$

Dit laatste stelsel is echter niet automatisch oplosbaar voor elke eigenvector $\underline{a}$. Je kunt bewijzen dat er wel altijd een bij λ behorende eigenvector bestaat die een oplossing voor $\underline{b}$ garandeert. De te volgen strategie blijkt uit de uitwerking van de volgende opgave.

17.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.

<u>Oplossing.</u> 1 is eigenwaarde met multipliciteit 3.
Eigenruimte bepalen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Een basis voor de eigenruimte is b.v.

$$((1,1,0),(-1,0,1)).$$

De eigenruimte wordt beschreven door

$$\underline{x} = (\lambda-\mu,\lambda,\mu)$$

en onafhankelijke oplossingen zijn

$$(1,1,0)e^t \quad \text{en} \quad (-1,0,1)e^t.$$

Het tweede stelsel (1) schrijven we nu op met een willekeurige eigenvector $\underline{a}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

Door de eerste vergelijking resp. te vergelijken met de tweede en de derde zie je dat dit stelsel oplosbaar is als je neemt

$$\lambda - \mu = \mu$$

$\lambda=2$ en $\mu=1$ (b.v.) is een goede keuze. Voor $\underline{a}$ hebben we daarmee (1,2,1) en voor $\underline{b}$ volgt dan uit de eerste vergelijking (1,0,0) als fraaie oplossing; je mag echter weer elke andere nemen. Als derde gezochte oplossing van het gegeven stelsel differentiaalvergelijkingen komt er op deze manier

$$(\underline{a}t+\underline{b})e^t = ((1,2,1)t + (1,0,0))e^t$$

en de algemene oplossing is er.

18.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\underline{x}(t) = A\,\underline{x}(t)$.
19.	$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$	Idem.

6. Als λ een eigenwaarde is van A en de multipliciteit van die eigenwaarde 2 groter is dan de dimensie van de bijbehorende eigenruimte, zoeken we een oplossing van de vorm

$$(\tfrac{1}{2}\underline{a}t^2 + \underline{b}t + \underline{c})e^{\lambda t},$$

(de factor $\frac{1}{2}$ vereenvoudigt de berekeningen). Invullen in het gegeven stelsel geeft

$$\underline{a}t + \underline{b} + \tfrac{1}{2}\lambda\underline{a}t^2 + \lambda\underline{b}t + \lambda\underline{c} = \tfrac{1}{2}A\underline{a}t^2 + A\underline{b}t + A\underline{c}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Gelijkstellen links en rechts naar machten van t:

$$(1)\qquad A\underline{a} = \lambda\underline{a}$$
$$(2)\qquad (A - \lambda I)\underline{b} = \underline{a}$$
$$(3)\qquad (A - \lambda I)\underline{c} = \underline{b}$$

Uit (1) volgt dat we voor $\underline{a}$ een eigenvector moeten nemen. Je kunt aantonen dat het mogelijk is om $\underline{a}$ zodanig te kiezen dat het stelsel (2) oplossingen toelaat voor $\underline{b}$; als je uit die oplossingsverzameling voor $\underline{b}$ een geschikte kiest, is met die $\underline{b}$ het stelsel (3) oplosbaar naar $\underline{c}$ (bewijs erg moeilijk). Het aardige is nu dat het hele probleem is opgelost. Onafhankelijke oplossingen zijn namelijk

$\underline{a}e^{\lambda t}$, $(\underline{a}t + \underline{b})e^{\lambda t}$, $(\frac{1}{2}\underline{a}t^2 + \underline{b}t + \underline{c})e^{\lambda t}$

De te volgen strategie is te zien in het volgende voorbeeld.

---

20. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.

Oplossing. 2 is eigenwaarde met multipliciteit 3. De eigenruimte is L((1,1,0)). In (2) nemen we $\underline{a}$ = (1,1,0); (andere keuze, b.v. (2,2,0) is ook mogelijk, maar weinig interessant). We lossen $\underline{b}$ op:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De derde vergelijking is afhankelijk van de beide eerste. De oplossingsverzameling is

$$\{\underline{b}\ |\underline{b} = (\lambda-1,\lambda,2)\}$$

Nog niet λ kiezen, eerst kijken naar (3):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vegen: verg.3 - 2·verg.2 geeft $2c_1-2c_2=2-2\lambda$. Vergelijk je dat met de eerste vergelijking, dan zie je dat de keuze van λ vrij is: voor elke λ is het stelsel (3) oplosbaar. Neem $\lambda=1$ (dus $\underline{b}$ = (0,1,2)) en een geschikte $\underline{c}$ is (1,1,1). Onafhankelijke oplossingen zijn

$$(1,1,0)e^{2t},\quad ((1,1,0)t+(0,1,2))e^{2t}$$
$$(\tfrac{1}{2}(1,1,0)t^2+(0,1,2)t+(1,1,1))e^{2t}.$$

21. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.

Oplossing. 1 is een viervoudige eigenwaarde. De eigenruimte wordt bepaald door

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

De eigenruimte is

$$\{\underline{a} \mid \underline{a} = (2\lambda-\mu,\lambda,\lambda,\mu)\}.$$

Op naar stelsel (2): (met een willekeurige vector $\underline{a}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda-\mu \\ \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

De eerste en derde vergelijking geven direct

$$2\lambda - \mu = \mu$$

Vegen: verg.4 + verg.2; uitkomst vergelijken met verg.1:

$$\lambda + \mu = 2(2\lambda - \mu).$$

Uit deze beide betrekkingen volgt $\lambda=\mu$. Neem $\lambda=\mu=1$, (dus $\underline{a}=(1,1,1,1)$). $\underline{b}$ volgt dan uit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Oplossingsverzameling

$$\{\underline{b} \mid \underline{b} = (2\alpha-\beta+1,\alpha-1,\alpha,\beta)\}$$

Nu naar het stelsel (3) en nog geen keuze maken voor α en β:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha-\beta+1 \\ \alpha-1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Na enig vegen (als boven) blijkt het stelsel oplosbaar te zijn voor $\alpha=1$, $\beta=2$ (dus $\underline{b} = (1,0,1,2)$), waarbij $\underline{c}$ volgt uit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Een simpele oplossing: $(1,0,0,0)$. Neem in de tweedimensionale eigenruimte van A nog de vector $(1,0,0,-1)$ b.v. en als onafhankelijke oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen verschijnen

$$(1,0,0,-1)e^t$$
$$(1,1,1,1)\, e^t$$
$$((1,1,1,1)t + (1,0,1,2))e^t$$
$$(\tfrac{1}{2}(1,1,1,1)t^2 + (1,0,1,2)t + (1,0,0,0))e^t.$$

22. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$.

23. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ Idem

24. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ Idem

7. We moeten nu het inhomogene probleem aanpakken in de volgende vraagstukken. De algemene oplossing van het stelsel

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$$

waarin $\underline{b}(t)$ een gegeven vector is, bepalen we als volgt. Stel dat we er op een of andere manier in slagen om van het gegeven stelsel een oplossing te vinden. Noem de oplossingsverzameling van het bijbehorende homogene stelsel V. Als we de gevonden oplossing even aangeven met $\underline{x}_0(t)$, is de oplossingsverzameling van het gegeven stelsel

$$\{\underline{x}(t) \mid \underline{x}(t) = \underline{x}_0(t) + \underline{x}_V(t),\ \underline{x}_V \in V\}$$

Het bepalen van $\underline{x}_0(t)$ doen we met variatie der constanten: de algemene oplossing van het homogene stelsel heeft de vorm

$$\underline{x}(t) = A\underline{x}_1(t) + B\underline{x}_2(t) + C\underline{x}_3(t)$$

waarin $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ onafhankelijke oplossingen zijn en A, B, C constanten zijn. We construeren vervolgens een oplossing van het gegeven stelsel door uit te gaan van de vorm

$$\underline{x}(t) = u_1(t)\underline{x}_1(t) + u_2(t)\underline{x}_2(t) + u_3(t)\underline{x}_3(t)$$

De onbekende functies u_1, u_2, u_3 bepalen we door substitutie.

25. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t+e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$.

Bepaal de algemene oplossing van $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$.

Oplossing. De algemene oplossing van het homogene stelsel is

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}.$$

We schrijven dat een beetje anders:

$$\begin{pmatrix} 2e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ -e^t & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

We zoeken nu een oplossing van het niet homogene stelsel door daarin te substitueren

$$\begin{pmatrix} 2e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ -e^t & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = F(t).\underline{u}(t)$$

Dat geeft (en let even op bij het uitvoeren van het differentiëren)

$$\underline{\underline{F'(t)\underline{u}(t)}} + F(t)\dot{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{A\ F(t)\underline{u}(t)}} + \underline{b}(t).$$

Dit valt tegen elkaar weg. Dat volgt uit het feit dat F een fundamentaalmatrix is, zodat F'(t)=AF(t).

Om $\underline{u}(t)$ te bepalen blijft er

$$F(t).\dot{\underline{u}}(t) = \underline{b}(t).$$

F(t) is een fundamentaalmatrix. De kolommen in F zijn onafhankelijk en de inverse van F bestaat dus. Om die te bepalen gebruiken we onderstaand schema.

$$\begin{array}{ccc|ccc} e^t & e^t & e^{2t} & & & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

We vegen met rijen. Om veel schrijfwerk te voorkomen staan de e-machten boven de betreffende kolommen.
Na enig vegen krijg je

$$\begin{array}{ccc|ccc} e^t & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & e^t & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & e^{2t} & -1 & 0 & -2 \end{array}$$

waarbij we de e-machten weer hebben ingevuld. Nu de $1^e, 2^e, 3^e$ rij (lees goed: rij! en niet kolom) resp. vermenigvuldigen met e^{-t}, e^{-t}, e^{-2t} en er komt

$$\dot{\underline{u}}(t)=F^{-1}(t)\underline{b}(t)= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & 0 & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t+e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Door te primitiveren (geen constanten opnemen) vinden we

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-t}-te^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Een oplossing van het niet homogene stelsel is dan

$$F(t).\underline{u}(t) = (-e^t, -1-t-e^t, e^t).$$

De algemene oplossing van het gegeven stelsel is daarmee volledig bekend.

OPMERKING. Bij het bepalen van F^{-1} is het bijna altijd voordelig om in het veegschema de e-machten uit de matrix te halen. Lees ook in het antwoordengedeelte de oplossing van vraagstuk 28. Daar vind je een voorbeeld van een iets ingewikkelder systeem.

26.	Los het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$ op als $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}(t) = -\begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}$
27.	Idem, als $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ te^t \\ t+te^t \end{pmatrix}$
28.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}(t) = \begin{pmatrix} 6t+1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$. Idem.
29.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\underline{b}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 4t \\ 4t \end{pmatrix}$. Idem.

8. BEGINWAARDEN PROBLEMEN.

Als $\underline{b}$ een gegeven vector is, heeft

(1) $$\underline{x}(t) = A\,\underline{x}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{b}$$

precies één oplossing. Die wordt gegeven door

(2) $$\underline{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\,\underline{b}.$$

Enkele methoden om e^{tA} te berekenen vind je in item 9. Een andere methode om dit probleem aan te pakken berust op het volgende stukje lineaire algebra.

1. Stelling van Cayley-Hamilton: een matrix voldoet aan zijn karakteristieke vergelijking. Als die kv is
$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s} = 0$$
dan is dus
$$(A-\lambda_1 I)^{m_1}(A-\lambda_2 I)^{m_2}\ldots.(A-\lambda_s I)^{m_s} = O.$$
$\lambda_1,\lambda_2,\ldots.,\lambda_s$ zijn de verschillende eigenwaarden van A met resp. multipliciteiten $m_1,m_2,\ldots,m_s$ en
$$m_1 + m_2 + \ldots. + m_s = n, \quad (A \text{ is } n\times n\text{-matrix}).$$

2. Als P(.) een polynoom is en P(A) = O (= nulmatrix), zegt men dat het polynoom P de matrix annihileert. Het polynoom van de laagste graad dat A annihileert is op een constante na eenduidig bepaald. Als de coëfficient van de term met de hoogste macht in dit

polynoom één is, spreken we van het minimumpolynoom van A. Het minimumpolynoom heeft de gedaante

$$(\lambda-\lambda_1)^{q_1}(\lambda-\lambda_2)^{q_2}\ldots\ldots(\lambda-\lambda_s)^{q_s}$$

met $\quad 1 \leqq q_k \leqq m_k \quad (k=1,2,\ldots,s)$

3. Definieer $X_k = \{\underline{u} \in R^n \mid (A-\lambda_k I)^{q_k}\underline{u} = \underline{0}\}$, $k=1,2,\ldots s$.

   Dan is $\quad R^n = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots\ldots \oplus X_s$

   We noemen X_k de ruimten van gegeneraliseerde eigenvectoren. Verder geldt $\dim X_k = m_k$, $k = 1,2,\ldots,s$.

4. Als $\underline{b} \in R^n$, dan is $\underline{b}$ op precies één manier te schrijven als

$$\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots\ldots + \underline{b}_s, \quad \underline{b}_k \in X_k \ .$$

<u>Opmerking.</u> $q_k = 1$ als de algebraische en de meetkundige multipliciteit van λ_k aan elkaar gelijk zijn. Dat wil dus zeggen als de dimensie van de eigenruimte bij λ_k gelijk is aan de multipliciteit van de wortel λ_k van de kv.

<u>Opmerking.</u> We zullen de ruimten X_k daadwerkelijk moeten bepalen als we vraagstukken gaan oplossen. Daarbij vind je q_k het snelst door tijdens het berekenen van de machten $(A-\lambda_k I)$, $(A-\lambda_k I)^2,\ldots,$ steeds te letten op de dimensie van de oplossingsruimten van $(A-\lambda_k I)\underline{u} = \underline{0}$, $(A-\lambda_k I)^2\underline{u} = \underline{0},\ldots\ldots$. Als die dimensie m_k is ga je niet verder met het uitvermenigvuldigen van de matrices.

De oplossing van (1) is nu "eenvoudig" te bepalen.

$$\begin{aligned} e^{tA}\,\underline{b} &= e^{tA}(\underline{b}_1+\underline{b}_2+\ldots+\underline{b}_s) \\ &= e^{tA}\underline{b}_1 + e^{tA}\underline{b}_2 + \ldots\ldots + e^{tA}\underline{b}_s. \\ e^{tA}\underline{b}_k &= e^{\lambda_k tI}.e^{t(A-\lambda_k I)}\,\underline{b}_k \\ e^{tA}\underline{b}_k &= e^{\lambda_k t}\ .\ \sum_{j=0}^{q_k-1}\frac{t^j}{j!}\,(A-\lambda_k I)^j\,\underline{b}_k \end{aligned}$$

(Dat de laatste som afbreekt bij q_k-1 is een gevolg van het feit dat $\underline{b}_k$ een vector is in X_k). Door t te vervangen door $t-t_0$ kunnen we de gevraagde oplossing neerschrijven.

<u>Opmerking.</u> Herhaling van een <u>definitie:</u> $e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}A^j$

<u>Opmerking.</u> De bewijzen van bovenstaande stellingen zijn moeilijk en omvangrijk. Raadpleeg je docent voor literatuur als je er meer van wilt weten.

30

> Gegeven is $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
>
> a) Bepaal de eigenwaarden van A en de ruimten van de gegeneraliseerde eigenvectoren.
> b) Ontbind $\underline{b}$ langs die ruimten.
> c) Los $\underline{x}$ op uit $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$, $\underline{x}(0) = \underline{b}$.

Oplossing. a) (In $|A-\lambda I|=0$ 4^e rij met 2^e verminderen en je ziet de factor $\lambda-2$ verschijnen . Haal die eruit en vereenvoudig de eerste rij met de vierde).
De eigenwaarden van A zijn 1 (mult.3) en 2.

$$A-I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en de eigenruimte is tweedimensionaal.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en $(A-I)^2\underline{u} = \underline{0}$ geeft een driedimensionale oplossingsruimte; (dus niet doorgaan met $(A-I)^3$!, het doel is bereikt). Vergelijking van de oplossingsruimte

(*) $\quad X_1: \; u_2 - u_4 = 0.$

Bij $\lambda=2$ vind je de eigenruimte

$$X_2 = L((1,0,0,-1))$$

b) Schrijf $\underline{b} = \underline{b}_1 + \rho(1,0,0,-1)$, met $\underline{b}_1$ in X_1.
$\underline{b}_1 = (2-\rho,-1,1,1+\rho)$ en dit invullen in (*) geeft $\rho=-2$. Daaruit halen we $\underline{b}_1 = (4,-1,1,-1)$, $\underline{b}_2 = (-2,0,0,2)$.

c)

$$e^{tA}\underline{b}_1 = e^{t}\left(I + t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA}\underline{b}_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De oplossing:

$$\underline{x}(t) = e^{tA}\underline{b}_1 + e^{tA}\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1+6t \\ 1+6t \\ -1+6t \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}.$$

31.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Los op $\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) \\ \underline{x}(0) = \underline{b} \end{cases}$
32.	$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = (3,3,3)$. Idem.
33.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & -6 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = (1,0,0,0)$. Idem.

9. De kolommen van e^{tA} noemen we $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$. Daarmee kunnen we dan schrijven

(1) $$e^{tA}\,\underline{b} = b_1\underline{k}_1 + b_2\underline{k}_2 + b_3\underline{k}_3 .$$

Je kunt $\underline{b}$ willekeurig kiezen. Bij elke keuze krijg je een oplossing die voor $t=0$ de voorgeschreven waarde $\underline{b}$ aanneemt. Deze oplossing is uniek. Daar je voor elke oplossing kunt nagaan wat de waarde $\underline{x}(0)$ is, heb je in (1) kennelijk alle oplossingen van het stelsel, als je $\underline{b}$ R^3 laat doorlopen. conclusie: e^{tA} is een fundamentaalmatrix. Je kunt hem opsporen door in het beginwaardenprobleem

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t), \quad \underline{x}(0) = \underline{b}$$

de vector $\underline{b}$ willekeurig te nemen.

34	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$. Bepaal een fundamentaalmatrix voor het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)$ door in $\underline{x}(0) = \underline{b}$ voor $\underline{b}$ een willekeurige vector te nemen.

Oplossing. Eigenwaarden zijn 1 (mult.2) en -1. Ruimte van gegeneraliseerde eigenvectoren bij de eigenwaarde 1 heeft als vergelijking

(1) $$X_1:\ u_1 - u_2 - u_3 = 0$$

zoals uit $(A-I)^2\underline{u} = \underline{0}$ volgt. Eigenruimte bij -1:

$$X_2 = L((1,2,-1))$$

Neem $\underline{x}(0) = \underline{b}$ en zet $\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 = \underline{b}_1 + \rho(1,2,-2)$.

Dan voldoet $(b_1-\rho, b_2-2\rho, b_3+2\rho)$, waarbij b_1, b_2, b_3 de kentallen van $\underline{b}$ zijn, aan (1). Dat geeft

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} b_2+b_3 \\ -2b_1+3b_2+2b_3 \\ 2b_1-2b_2-b_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = (b_1-b_2-b_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Met de formule van blz. 14 komt er dan weer

$$e^{tA}\underline{b_1} = e^t \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ -4t & 1+4t & 4t \\ 6t & -7t & 1-6t \end{pmatrix} \underline{b_1}, \quad e^{tA}\underline{b_2} = e^{-t}\underline{b_2}.$$

$$(1) \quad e^{tA}\underline{b} = e^t \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ -4t & 1+4t & 4t \\ 6t & -7t & 1-6t \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underline{b}}_{\textit{hier staat } \underline{b_1}} + \underbrace{e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{b}}_{\textit{hier staat } \underline{b_2}}.$$

$\underline{1^e \text{ methode:}}$ neem voor $\underline{b}$ achtereenvolgens (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) en je krijgt de kolommen van de matrix exp(tA)

$\underline{2^e \text{ methode:}}$ (1) netjes uitwerken tot je in het tweede lid krijgt

$$\begin{pmatrix} 2te^t + e^{-t} & (1-3t)e^t - e^{-t} & (1-2t)e^t - e^{-t} \\ -2e^t + 2e^{-t} & 3e^t - 2e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ 2(1+t)e^t - 2e^{-t} & (-2-3t)e^t + 2e^{-t} & (-1-2t)e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

En dit is dan de gevraagde e^{tA}.

35. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$Y'(t) = A\,Y(t),$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = (b_1, b_2, b_3).$$

a) Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.
b) Bepaal de ruimten X_1 en X_2 van gegeneraliseerde eigenvectoren van A en ontbind Y(0) langs X_1 en X_2.
c) Bepaal e^{tA}.

10.

Een paar trucs om in bepaalde gevallen e^{tA} te berekenen zijn de volgende.

1. Als A diagonaliseerbaar is geldt

$$C^{-1}\,A\,C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Hierin zijn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A (multipliciteit in rekening gebracht) en C is een matrix die als kolommen onafhankelijke eigenvectoren van A heeft, in een met de volgorde van de eigenwaarden overeenstemmende volgorde.
De volgende formule geldt:

$$e^{tA} = C\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\,C^{-1}.$$

2. Alle eigenwaarden van A gelijk. Dan geldt

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j$$

3. Als A een (3×3)-matrix is met eigenwaarden λ,λ,μ, dan geldt

$$e^{tA} = e^{\lambda t}I + te^{\lambda t}(A-\lambda I) + \{\frac{e^{\mu t}-e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2} - \frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}\}(A-\lambda I)^2.$$

Voor grotere formaten van A is er een dergelijke formule. We zullen die niet ten tonele voeren wegens de onaangename gevolgen die zo'n formule in de toepassingen meebrengt in de vorm van veel rekenwerk.

---

36. Los het stelsel $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$ op door e^{tA} te berekenen, als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing. A heeft als eigenwaarden 2, 1(mult.2). De eigenruimten zijn L((1,1,0)) en L((1,0,-1),(1,1,1)). De matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

diagonaliseert A. Met vegen:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

We krijgen nu

$$e^{tA} = C\,\mathrm{diag}(e^{2t},e^{t},e^{t})C^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} e^{t} =$$

$$\begin{pmatrix} -e^{2t}+2e^{t} & 2e^{2t}-2e^{t} & -e^{2t}+e^{t} \\ -e^{2t}+e^{t} & 2e^{2t}-e^{t} & -e^{2t}+e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Deze laatste matrix is een fundamentaalmatrix. De kolommen zijn onafhankelijke oplossingen en de algemene oplossing van het stelsel is bepaald.

37. Als 36. voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

38. Bepaal exp(tA) als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

39.	$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Bereken e^{tA}.
40.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Idem.
41	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Idem.
42.	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Idem.
43.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Idem.

11. Als je er in slaagt om e^{tA} voor een matrix A te berekenen, kun je heel eenvoudig het niet homogene beginwaardeprobleem

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{a}(t), \qquad \underline{x}(t_0) = \underline{b}$$

oplossen. De oplossing is namelijk

$$\underline{x}(t) = e^{(t-t_0)}\underline{b} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A}\underline{a}(u)\,du$$

44. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Los het beginwaardenprobleem $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)+\underline{a}(t)$, $\underline{x}(0)=\underline{b}$ op.

Oplossing. De eigenwaarden zijn 1 en -1 (mult.2). Met regel 3. uit item 9 vinden we

(o) $$e^{tA}=e^{-t}\left(I+t\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right)+\left(\frac{e^{t}-e^{-t}}{4}-\frac{te^{-t}}{2}\right)\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt door t door t-u te vervangen

$$e^{(t-u)A}\underline{a}(t)=e^{-t+u}\left(\begin{pmatrix} u \\ u \\ -u \end{pmatrix}+(t-u)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+\left(\frac{e^{t-u}-e^{u-t}}{4}-(t-u)\frac{e^{u-t}}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} ue^{u} \\ ue^{u} \\ ue^{u} \end{pmatrix}.$$

Daaruit halen we

(*) $$\int_0^t e^{(t-u)A}\underline{a}(u)\,du = \begin{pmatrix} -1+t+e^{-t} \\ -1+t+e^{-t} \\ 1-t-e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Verder is

(**) $$e^{(t-0)A}\underline{b} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+2t \\ 1+2t \end{pmatrix} .$$

Door samen te stellen vinden we dan de gevraagde oplossing:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -1+t+2e^{-t}+2te^{-t} \\ -1+t+2e^{-t}+2te^{-t} \\ 1-t-2te^{-t} \end{pmatrix} .$$

Opmerking. Om (*) en (**) uit (o) af te leiden is het voordelig om in (o) de daarin voorkomende matrices eerst te vermenigvuldigen met de gegeven vectoren $\underline{a}(t)$ en $\underline{b}$; als je (o) eerst herleidt tot één matrix krijg je meer schrijfwerk.

45. Gegeven is

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} , \quad \underline{a}(t) = (e^{3t}, e^{3t}, 2e^{3t}).$$

Los $\underline{x}$ op uit $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{a}(t)$. $\underline{x}(0) = \underline{0}$.

46. De matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

heeft (zoals direct is in te zien) de eigenwaarde 1.

a) Bepaal de eigenruimte bij 1 en daarna alle eigenwaarden.
b) Bepaal e^{tA}
c) Los op $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$, $\underline{x}(0) = (1,1,1,1)$.

12. De lineaire derde orde vergelijking (constante coëfficienten)

(1) $$y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$$

kunnen we als volgt oplossen. Voer nieuwe functies in:

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y' &= y_2 \\ y'' &= y_3 \\ y''' &= -a_3y_1 - a_2y_2 - a_1y_3. \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\} \rightarrow y_1' = y_2 \\ &\} \rightarrow y_2' = y_3 \\ &\} \rightarrow y_3' = -a_3y_1 - a_2y_2 - a_1y_3. \end{aligned}$$

Dit laatste stelsel kunnen we schrijven als

(2) $$\underline{y}'(x) = A\,\underline{y}(x)$$

waarin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing van (1) komt overeen met de oplossing y_1 van het stelsel (2).

47. **Bepaal de algemene oplossing van $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.**

Oplossing. Het bijbehorende stelsel heeft als karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

De eigenwaarden zijn 1,-1,-2. Bijbehorende eigenvectoren zijn (1,1,1),(1,-1,1),(1,-2,4). Hieruit blijkt

$$\underline{y} = A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{x} + B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-x} + C\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}e^{-2x}.$$

Op de bovenste regel staat de oplossing $y(x)$ die we zoeken:

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + Ce^{-2x}.$$

Op de tweede en derde regel zie je respectievelijk y' en y'' en dat geeft een aardige contrôle op rekenfouten.

48. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}.$$

a) schrijf de equivalente vectordifferentiaalvergelijking

(×) $\qquad \dot{\underline{y}}(t) = A\,\underline{y}(t) + \underline{a}(t)$

op en bepaal de eigenwaarden van A.

b) Bereken met behulp van de eigenwaarden e^{tA}.

c) Bepaal van (×) de oplossing met $\underline{y}(0) = (0,0,0)$.

d) Bereken de onder c) bedoelde oplossing door uit te gaan van de gegeven vergelijking.

13.

Hogere orde stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten kun je eveneens oplossen door nieuwe functies in te voeren. Een demonstratie van de methode in het volgende uitgewerkte voorbeeld. Vergelijk echter ook eens de methode uit het appendix (de "D"-techniek).

49. Gegeven is het stelsel

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

Bepaal de algemene oplossing.

Oplossing. Stel $x = x_1$, $x' = x_2$. Dan is $x_1' = x_2$ en $x'' = x_2'$. De vergelijkingen gaan over in

$$\begin{cases} x_2' = 3x_2 + y' - x_1 - y \\ y' = -x_1 + y \,. \end{cases}$$

Samen met $x_1' = x_2$ komt er na wat manipuleren

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} .$$

De eigenwaarden zijn 1 en 2 en de algemene oplossing

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} e^t + C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} .$$

Eerste en derde regel:

$$x(t) = \quad -Be^t + Ce^{2t}$$

$$y(t) = Ae^t + Bte^t - Ce^{2t}$$

Ter contrôle: 2^e regel is de afgeleide van de 1^e regel.

50. Bepaal de algemene oplossing van het volgende stelsel.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 4\,\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} - 3x + y \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x - y \,. \end{cases}$$

51. Gegeven is het stelsel

$$\begin{cases} x'' - 2y'' = x' \\ \qquad -y'' = -x' + y' \end{cases}$$

waarbij x en y functies zijn van t. Gevraagd wordt de algemene oplossing van het stelsel.

APPENDIX.

A1. Als je een vectordifferentiaalvergelijking (constante coëfficiënten) wilt oplossen zonder eigenwaarde technieken te gebruiken, ben je wel aangewezen op elimineren. Voor d/dt schrijven we D en de inhoud van de uitdrukking

"vermenigvuldig de differentieerbare functie f met $D+\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)"

valt samen met

"$f(t) \rightarrow\rightarrow\rightarrow (D+\alpha)f(t) = \frac{d}{dt}f(t) + \alpha f(t)$".

Het volgende voorbeeld geeft de methode aan.

Bepaal de algemene oplossing van $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3x + 8y + 2z\\ -2x + 2y + 4z\\ -2x + 4y + 2z\end{pmatrix}$

Oplossing. De eerste vergelijking kun je schrijven als

$$(D+3)x - 8y - 2z = 0$$

De andere net zo en je krijgt het schema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} D+3 & -8 & -2 & 0\\ 2 & D-2 & -4 & 0\\ 2 & -4 & D-2 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c}(v_1)\\ (v_2)\\ (v_3)\end{array}$$

We sturen aan op een vergelijking waar alleen x,y of z in voorkomt. We gaan x elimineren.
$v_3 - v_2$ geeft

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & D+2 & -D-2 & 0\end{array}\right) \quad (v_4)$$

$(D+3)v_2 - 2v_1$ geeft

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & (D-2)(D+3)+18 & -4(D+3)+4 & 0\end{array}\right)$$

en wat uitwerken geeft

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & D^2+D+10 & -4(D+2) & 0\end{array}\right) \quad (v_5)$$

Uit $v_5 - 4v_4$ haal je tenslotte $y''-3y'+2y=0$ met als algemene oplossing

$$y = Ae^t + Be^{2t}.$$

Invullen in v_4 geeft

$$z' + 2z = 3Ae^t + 4Be^{2t}$$

met de algemene oplossing

$$z = Ce^{-2t} + Ae^t + Be^{2t}.$$

Je hebt nu drie constanten, dus je zult x(t) moeten kunnen vinden zonder te integreren. Inderdaad, invullen in v_2 geeft direct x.

OPMERKINGEN.

1. De methode vereist handigheid en veel oefening.
2. De methode werkt ook voor hogere orde stelsels, eveneens voor stelsels met niet-constante coëfficiënten.

3. Vergeet in het niet homogene geval niet om ook in de bekende termen te opereren met de D.

4. Je bent niet steeds zo gelukkig dat je op een tweede orde vergelijking stuit zoals in het bovenstaande geval. Echter zó inrichten dat je niet hoger komt dat een derde orde vergelijking (in het geval van een 3 bij 3 stelsel, enz.)

5. Let er op dat je niet te veel constanten krijgt.

A2. Als je van een stelsel één oplossing kent, kun je het stelsel "verkleinen". Demonstratie in het volgende voorbeeld.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -6 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ heeft eigenwaarden 2 (mult.2) en -3.

Bij 2 hoort de eigenruimte L((1,2,-1)). Een oplossing is dus b.v. $(1,2,-1)e^{t}$. We substitueren in het stelsel $\underline{\dot{x}}=A\underline{x}$

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{2t} \\ 0 & 1 & 2e^{2t} \\ 0 & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix} \underline{y}(t) = T\underline{y}.$$

(Je moet altijd voor deze truc de bekende oplossing zó in de eenheidsmatrix plaatsen als kolom, dat er een niet singuliere matrix ontstaat; dus op de nullen letten).
Invullen in het stelsel geeft

$$\underline{\dot{y}}(t) = T^{-1}(AT - T')\underline{y}(t)$$

en na uitwerken komt er

$$\underline{\dot{y}}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 \\ 6e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \end{pmatrix} \underline{y}(t). \qquad (1)$$

(T^{-1} bepaal je zoals in vraagstuk 25 met het schema

		e^{2t}			
1	0	1	1	0	0
0	1	2	0	1	0
0	0	-1	0	0	1

We kijken nu naar het "kleinere" stelsel

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

De oplossing is

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} e^{-3t} + B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Invullen in de derde vergelijking van (1) geeft

$$y_3 = 30Ae^{-5t} + 12Ae^{-5t} + B,$$

zodat

$$y_3 = \frac{-42}{5}Ae^{-5t} + Bt + C$$

de oplossing is voor y_3. De algemene oplossing vinden we nu door T weer te gebruiken om naar $\underline{x}$ te gaan.

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{2t} \\ 0 & 1 & 2e^{2t} \\ 0 & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5Ae^{-3t} \\ 12Ae^{-3t} + Be^{2t} \\ -42/_5\, Ae^{-5t} + Bt + C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-17}{5} Ae^{-3t} + Bte^{2t} + Ce^{2t} \\ \frac{-24}{5} Ae^{-3t} + 2Bte^{2t} + (B+2C)e^{2t} \\ \frac{42}{5} Ae^{-3t} - Bte^{2t} - Ce^{2t} \end{pmatrix}$$

Opmerking. Deze methode berust op het feit dat door de gekozen substitutie er in het stelsel (1) een kolom met nullen ontstaat.
Let er op dat in dit voorbeeld de matrix defect is. De eigenruimte bij de eigenwaarde 2 heeft dimensie 1. We hebben dus naast de methode uit item 3 hier een andere om in zo'n geval het stelsel op te lossen.

ANTWOORDEN.

2. eigw. 0,1,2. $\underline{x}=A(1,2,-3)+B(2,2,-3)e^{t}+C(2,1,-2)e^{2t}$.

3. eigw. 1,-1,2. $\underline{x}=A(1,1,-1)e^{t}+B(2,1,-2)e^{-t}+C(0,1,-1)e^{2t}$.

4. eigw.-1,2,3. $\underline{x}=A(o,1,-1)e^{-t}+B(1,0,1)e^{2t}=C(1,-1,1)e^{3t}$.

6. eigw. 1,-1+i,-1-i. eigv. bij -1+i: (-5+i,2,-4+2i).
$\underline{x}(t)=A(1,1,0)e^{t}+e^{-t}(B(-5\cos t - \sin t, 2\cos t, -4\cos t - 2\sin t)$
$+C(\cos t - 5\sin t, 2\sin t, 2\cos t - 4\sin t))$.

7. eigw. 2,3i,-3i. $\underline{x}=A(1,1,10)e^{2t}+B(\cos 3t,-\cos 3t-3\sin 3t,-7\cos 3t$
$-6\sin 3t)+C(\sin 3t,3\cos 3t-\sin 3t,6\cos 3t-7\sin 3t)$.

8. eigw. 1,2+2i,2-2i. $\underline{x}=A(1,0,-1)e^{t}+B(2\cos 2t,\cos 2t,-2\sin 2t)e^{2t}$
$+C(2\sin 2t,\sin 2t,2\cos 2t)e^{2t}$

10. eigw. 2,1(mult.2). $\underline{x}(t) = A(1,2,1)e^{2t}+(B(1,-1,0)+C(2,0,1))e^{t}$.

11. eigw.1,2(mult.2). $\underline{x}(t) = A(1,-1,1)e^{t} + (B(1,1,0)+C(1,0,1))e^{2t}$.

12 eigw.2,3(mult.2). $\underline{x}(t) = A(2,-1,-1)e^{2t}+e^{3t}(B(1,-1,0)+C(2,0,-1))$

14. eigw.1,-1(mult2). $\underline{x}(t) = A(1,0,1)e^{t}+e^{-t}(B(2,-1,1)+C((2,-2,1)+$
$+t(2,-1,1)))$.

15. eigw.2,1(mult.2). $\underline{x}(t) = A(2,1,0)e^{2t}+(B(1,1,1)+C((1,1,2)+$
$+t(1,1,1)))e^{t}$.

16. eigw.-1,2(mult.2). $\underline{x}(t) = A(1,1,0)e^{-t}+(B(2,1,2)+C((1,0,1)+$
$+t(2,1,2)))e^{2t}$.

18. eigw.2(mult3). basis eigenr.((1,1,0),(0,1,1)). $(A-2I)\underline{b} =$
$= (\lambda,\lambda+\mu,\mu)$ is oplosbaar als b.v. $\lambda=1$ en $\mu=-2$. $\underline{b}=(0,1,0)$ is
een goede keuze (maar b.v. (2,3,0) mag ook).
$\underline{x}(t) = (A(1,1,0)+B(0,1,1)+C(t(1,-1,-2)+(o,1,0)))e^{2t}$

19 eigw. -3 (mult.3).
$\underline{x}(t) = A(1,1,0)+B(0,1,-1)+C(t(1,2,-1)+(0,1,0)))e^{-3t}$.

22 eigw. 1 (mult. 3); $\underline{x}(t) = A(1,-1,-2)e^{t}+B((1,-1,-2)t+(0,-1,-2))$.
$.e^{t}+C(\tfrac{1}{2}(1,-1,-2)t^{2}+(0,-1,-2)t+(0,0,-1))e^{t}$.

23. eigw. 5 (mult.3). $\underline{x}(t) = A(1,-2,-1)e^{5t}+B((1,-2,-1)t+$
$+(o,1,-1))e^{5t}+C(\tfrac{1}{2}(1,-2,-1)t^{2}+(0,1,-1)t+(0,-1,0))e^{5t}$.

24. 2 is viervoudige eigenwaarde. eigenruimte=$\{\underline{a}\,|\,\underline{a}=(\lambda,\mu,0,-\lambda)\}$.
(2) van blz.9 is oplosbaar als $\lambda=0$, $\mu=1$ ($\underline{a}=(0,1,0,0)$). Oplos-
singsverzameling van (2): $\{\underline{b}\,|\,\underline{b}=(\alpha,\beta,1,-\alpha+2)\}$. (3) van blz.9
is oplosbaar als $\alpha=\beta=0$, ($\underline{b}=(0,0,1,2)$). voor $\underline{c}$ is (1,0,0,0)
goed. Oplossing $\underline{x}(t) = A(1,0,0,-1)e^{2t} + B(0,1,0,0)e^{2t}+$
$+C(t(0,1,0,0)+(0,0,1,2))e^{2t} + D(\tfrac{1}{2}(0,1,0,0)t^{2}+(0,0,1,2)t+$
$+(1,0,0,0))e^{2t}$.

26. $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t} + B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{3t} + C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}t+2\\t+2\\t+1\end{pmatrix}.$

27. part. opl.: $\begin{pmatrix}2t/3+8/9-\frac12 te^{t}-\frac14 e^{t}\\ \text{id.}\\ -t/3-1/9-\frac12 te^{t}-\frac14 e^{t}\end{pmatrix}$

28. drievoudige eigenwaarde 1. Eigenruimte L((1,-1,0),(2,0,-1)). $(\underline{a}t+\underline{c})e^{t}$ invullen geeft voor $\underline{c}$ (met algemene eigenvector in het rechterlid):

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\ -\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$$

Dit stelsel is oplosbaar als (b.v.) $\alpha=-1$, $\beta=1$. Dan is $\underline{a}=(1,1,-1)$ en $\underline{c}=(1,0,0)$ (b.v.). Als onafhankelijke oplossingen komen er

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}e^{t},\ \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}e^{t},\ \begin{pmatrix}t+1\\t\\-t\end{pmatrix}e^{t}.$$

Schema om $F^{-1}(t)$ te bepalen:

e^t	e^t	e^t			
1	2	t+1	1	0	0
-1	0	t	0	1	0
0	-1	-t	0	0	1

Zo vegen dat je links I krijgt. Prettig werkt meestal om eerst zover mogelijk de kolom schoon te maken waar de t in voorkomt. Er komt

$$F^{-1}(t) = \begin{pmatrix}t & t-1 & 2t\\ -t & -t & -2t-1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} e^{-t}.$$

We vinden na enig gereken $\underline{u}'(t)=(6t^2-1,-6t^2+1,6t)$.
Daaruit de particuliere oplossing $F.\underline{u}$:

$$\begin{pmatrix}t^3+3t^2+t\\ t^3+t\\ -t^3-t\end{pmatrix}e^{t}.$$

De algemene oplossing is nu snel te verkrijgen.

29. $\underline{x}(t) = Ae^{t}(0,1,1)+Be^{-t}(1,1,0)+Ce^{2t}(1,1,1)$
$-(2t+1,2t+1,2t+1)$.

31. $e^{t}(4-6t,-2-6t,1,1) + e^{2t}(-2,0,0,-2)$.

32. $e^{2t}(3-15t,9+30t,-3+15t) + e^{3t}(0,-6,6)$.

33. eigw. -2 (mult 4). $(A+2I)^3=O$. Het stelsel $(A+2I)^3\underline{u}=\underline{0}$ heeft een vierdimensionale oplossingsruimte.
$e^{tA}\underline{b} = e^{-2t}(I+t(A+2I)+\frac12 t^2(A+2I)^2)\underline{b} =$

$$e^{-2t}((1+t)^2,-2t(1+t),4t^2,-2t(2+t)).$$

35. a) eigw. 3(mult.2) en -1. Eigenruimten resp. L((1,2,1)) en L((0,0,1)).

b) $(A-3I)^2\underline{u} = \underline{0}$ geeft X_1: $u_1 - u_3 = 0$. X_2 = L((0,0,1)).

$Y(0) = (b_1, b_2, b_1) + (0,0,-b_1+b_3)$

c) $\begin{pmatrix} (1-2t)e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ -4te^{3t} & (1+2t)e^{3t} & 0 \\ (1-2t)e^{3t}-e^{-t} & te^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+e^{t} & e^{2t}-e^{t} \\ e^{2t}-e^{t} & -e^{2t}+2e^{t} & e^{2t}-e^{t} \\ e^{2t}-e^{t} & -e^{2t}+e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.

38. $\begin{pmatrix} e^{t} & 0 & e^{t}-e^{-t} & 0 \\ 0 & 2e^{t}-e^{2t} & e^{t}-e^{-t} & -e^{t}+e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 2e^{t}-2e^{2t} & e^{t}-e^{-t} & -e^{t}+2e^{2t} \end{pmatrix}$.

39. $e^{t}\left(I+t\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}t^2\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$

40. drievoudige eigenwaarde 1, $(A-I)^2=O$.

$e^{t}\begin{pmatrix} 1+t & -2t & t \\ t & 1-2t & t \\ t & -2t & 1+t \end{pmatrix}$.

41. eigw. 1 (mult. 4)

$e^{t}\begin{pmatrix} 1-t & -t & t & -t \\ t & 1+t & -t & t \\ t & t & 1-t & t \\ t & t & -t & 1+t \end{pmatrix}$

42. eigw. 1 (mult. 2), -1.

$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{t}-e^{-t} \\ e^{t}-e^{-t} & e^{t} & -e^{t}+e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} -e^{t}-te^{t}+2e^{2t} & te^{t} & -2e^{t}-2te^{t}+2e^{2t} \\ te^{t} & e^{t}-te^{t} & 2te^{t} \\ e^{t}+te^{t}-e^{2t} & -te^{t} & 2e^{t}+2te^{t}-e^{2t} \end{pmatrix}$

45. eigw. 3 (mult. 2) en 2.

$(e^{3t}-e^{2t}, e^{3t}-e^{2t}+t^2e^{3t}, 2te^{3t}+2t^2e^{3t})$

46. a) L((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)). sp A geeft eigw 1 (m 4).

b) $e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 3t & -3t & 3t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t & t \\ 0 & t & -t & 1+t \end{pmatrix}$

c) $e^{t}(3t+1,1,t+1,t+1)$.

48. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

b) $$e^{tA} = \begin{pmatrix} -2te^{t}+e^{2t} & (3t+2)e^{t}-2e^{2t} & -(t+1)e^{t}+e^{2t} \\ -2(t+1)e^{t}+2e^{2t} & (3t+5)e^{t}-4e^{2t} & -(t+2)e^{t}+2e^{2t} \\ -2(t+2)e^{t}+4e^{2t} & (3t+8)e^{t}-8e^{2t} & -(t+3)e^{t}+4e^{2t} \end{pmatrix}$$

(let op het verband tussen de 1e, 2e 2n 3e rij van deze matrix)

c) $y(t) = te^{2t} + te^{t} - 2e^{2t} + 2e^{t}$. d) uitk.c) 2 keer different.

50. $x(t) = Ae^{t} + Ce^{2t}$, $y(t) = Be^{t} + Ce^{2t}$.

51. Met $x = x_1$, $x' = x_2$, $y = y_1$, $y' = y_2$ wordt het stelsel

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Oplossing:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \\ \cos t-\sin t \\ -\cos t-\sin t \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t+\sin t \\ \cos t-\sin t \end{pmatrix}.$$

2e en 4e regel afgeleiden! Op de eerste en derde regel lees je resp. $x(t)$ en $y(t)$ af.

In de linkse kolom staat telkens een matrix vermeld. In de middelste kolom de eigenwaarden en in de rechter kolom bijbehorende eigenvectoren. Als er achter een matrix niets is vermeld, heeft hij dezel-fde eigenwaarden als de voorgaande en hebben de bijbehorende eigenruimten dezelfde dimensie als bij de vorige.

$\begin{matrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{matrix}$	0 1 -1	(3,-3,2) (1,0,1) (1,-1,1)
$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix}$	1 -1 2	(1,-1,0) (0,1,-1) (1,-1,1)
$\begin{matrix} -5 & 1 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 11 & -1 & 12 \end{matrix}$	0 1 6	(1,-1,-1) (1,0,-1) (1,-1,-2)
$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{matrix}$	1 2+i 2-i	(1,0,-1) (1,-1,-2-i) (1,-1,-2+i)
$\begin{matrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$	2 i -i	(1,1,0) (1,2,i) (1,2,-i)
$\begin{matrix} 7 & -5 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \end{matrix}$	2 1+2i 1-2i	(0,0,1) (1+2i,2+2i,1+2i) (1-2i,2-2i,1-2i)
$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{matrix}$		
$\begin{matrix} -1 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 4 \end{matrix}$	1 2 3 4	(1,0,0,-1) (1,1,0,0) (1,2,-1,0) (1,1,0,-1)
$\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}$	1 1 0	(1,0,2) (1,-1,0) (1,-1,1)
$\begin{matrix} 5 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{matrix}$		
$\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}$	2 2 1	(1,-1,0) (0,1,-1) (1,-1,1)

$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$		
$\begin{matrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{matrix}$	1 1 -1	(1,1,0) (1,0,1) (1,1,1)
$\begin{matrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 7 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{matrix}$	4 4 1	(1,-1,0) (1,0,-1) (1,-1,1)
$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{matrix}$	2 1 1	(1,0,-1) (-1,1,2)
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}$		
$\begin{matrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{matrix}$		
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 6 \end{matrix}$	0 4 4	(1,-1,0) (1,1,2)
$\begin{matrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -5 \end{matrix}$	1 -1 -1	(1,0,1) (1,-1,2)
$\begin{matrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix}$	1 1 1	(1,0,-1) (1,1,1)
$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix}$		
$\begin{matrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{matrix}$	2 2 2	(0,0,1) (2,1,2)
$\begin{matrix} -4 & 9 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \end{matrix}$		
$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{matrix}$	-1 -1 -1	(1,-1,0) (1,0,-1)
$\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{matrix}$		

1 0 0 0 1 0 1 0 1 -1 2 0 1 -1 0 2	1 1 1 2	(1,0,-1,-1) (1,1,0,0) (0,0,0,1)
2 -1 0 0 1 0 1 -1 1 -1 2 -1 1 -1 0 1		
1 1 0 1 0 1 1 2 2	1 1 1	(1,0,-1)
3 3 -2 1 -1 -1 0 3 1		
0 1 0 -2 -2 1 0 -2 -4	-2 -2 -2	(1,-2,2)
1 1 0 1 1 1 4 -4 4	2 2 2	(1,1,0)
0 3 1 0 2 1 8 -12 4		

0 1 0 0 0 1 1 0 0 -1 0 1 -1 -1 -2 3	1 1 1 1	(1,1,0,1)
1 1 -1 1 -1 2 0 1 0 1 0 1 1 0 -1 1	1 1 1 1	(1,0,1,1) (0,1,0,-1)
2 1 -1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1	1 1 1 1	(1,0,1,0) (0,1,1,0) (0,0,1,1)
0 1 0 1 -2 1 1 1 -2 2 0 3 0 1 -1 1	i -i 1+i 1-i	(0,1,i,-1) (0,1,-i,-1) (1,1+i,1+i,0) (1,1-i,1-i,0)
0 1 0 2 -2 2 2 0 0 0 -2 5 0 0 -1 2		
0 -1 -2 2 -2 2 0 2 2 -2 0 -1 0 -2 -2 2	1+i 1+i 1-i 1-i	(1-i,2,-2,0) (2,0,1-i,2) (1+i,2,-2,0) (2,0,1+i,2)