

IR. J. WITTEVEEN

## HET GEDRAG VAN IN DE HOEKEN DOOR PUNTLASTEN BELASTE PLATEN

MET TOEPASSINGEN OP HET GEBIED VAN EXPERIMENTEEL  
SPANNINGS- EN MATERIAALONDERZOEK

U.D.C. 624.012.45  
624.042.12  
624.073.13

*Na een verklarende inleiding wordt het gedrag besproken van parallellogramvormige platen in de hoekpunten belast met afwisselend naar boven, resp. naar beneden gerichte puntlasten.*

*Bijzondere gevallen hiervan zijn de vierkante plaat, bekend als het belastingsgeval van Nadai, en de ruitvormige plaat.*

*Met behulp van dit laatste belastingsgeval kan op eenvoudige wijze de plaatstijfheid en de dwarscontractiecoëfficiënt van het plaatmateriaal worden bepaald. Ook biedt dit belastingsgeval mogelijkheden bij de bestudering van het gedrag van gewapend-betonplaten.*

### 0 Inleiding

In Heronsfontein 4 (Heron, jaargang 13 no. 2) werd het gedrag beschreven van een vierkante plaat in de hoekpunten belast met afwisselend naar boven, resp. naar beneden gerichte krachten  $P$ . Dit belastingsgeval, in de literatuur meestal aangeduid als het belastingsgeval van Nadai, speelt bij recente onderzoeken op het gebied van de plaattheorie een belangrijke rol [1]. Bij nadere analyse blijkt echter dat het aan dit geval toegeschreven bijzondere aspect, namelijk dat van een homogene buigingstoestand, ook aanwezig is bij van de vierkante afwijkende plaatvormen, i.c. die met twee aan twee evenwijdige zijden (ruiten, parallelogrammen). Een desbetreffende uitwerking en een bespreking van de mogelijke toepassingen vormen de inhoud van dit artikel.

### 1 Formules en begrippen uit de elementaire plaattheorie

Voor een elementair deeltje van een oorspronkelijk vlakke plaat, belast als in fig. 1 is aangegeven, gelden de volgende betrekkingen tussen de momenten resp. de dwarskrachten en de krommingen:

$$\left. \begin{aligned}
 m_x &= -K \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \text{ of: } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{K(1-\nu^2)} (m_x - \nu m_y) \\
 m_y &= -K \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \text{ of: } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{K(1-\nu^2)} (m_y - \nu m_x) \\
 m_{xy} &= m_{yx} = -K(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 q_x &= -K \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 q_y &= -K \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \right\} (1)$$

Hierin is  $K$  de buigstijfheid van de plaat, nl.:

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

uitgedrukt in de dikte  $h$ , de contractiecoëfficiënt  $\nu$  en de elasticiteitsmodulus  $E$  van het plaatmateriaal.

De spanningstoestand in een plaat wordt homogeen genoemd indien de momentencomponenten  $m_x$ ,  $m_y$  en

$m_{xy}$  in elk punt daarvan onderling even groot zijn. Hetzelfde geldt dan voor de krommingscomponenten  $\partial^2 w / \partial x^2$ ,  $\partial^2 w / \partial y^2$  en  $\partial^2 w / \partial x \partial y$ .

Uit vgl. (1) volgt dat de verdeelde dwarskrachten  $q_x$  en  $q_y$ , als eerste afgeleiden van de krommingscomponenten, in dit geval derhalve nul zijn.

Bij de in het navolgende te behandelen gevallen is steeds sprake van een homogene spanningstoestand.

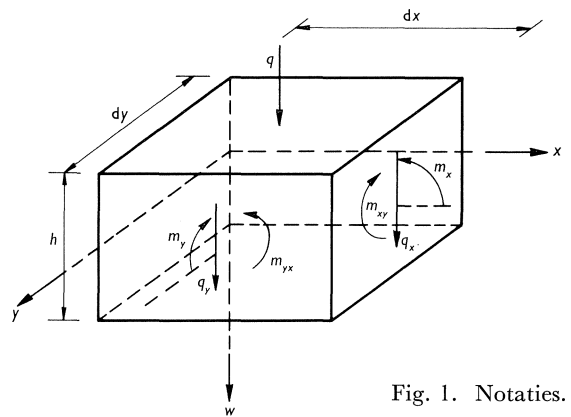


Fig. 1. Notaties.

## 2 Gevallen van homogene buiging

### 2.1 De vierkante plaat

Dit belastingsgeval werd besproken in de vierde aflevering van de Heronsfontein (zie Heron, jaargang 13 no. 2). Omdat het de basis vormt voor de verdere beschouwingen zij de betreffende tekst hier opnieuw weergegeven.

Op de vier hoekpunten van de vierkante horizontaal gelegen plaat (fig. 2a) werken afwisselend naar boven, resp. naar beneden gerichte krachten  $P$ .

In de figuur zijn de neerwaarts belaste hoeken met A en C aangeduid

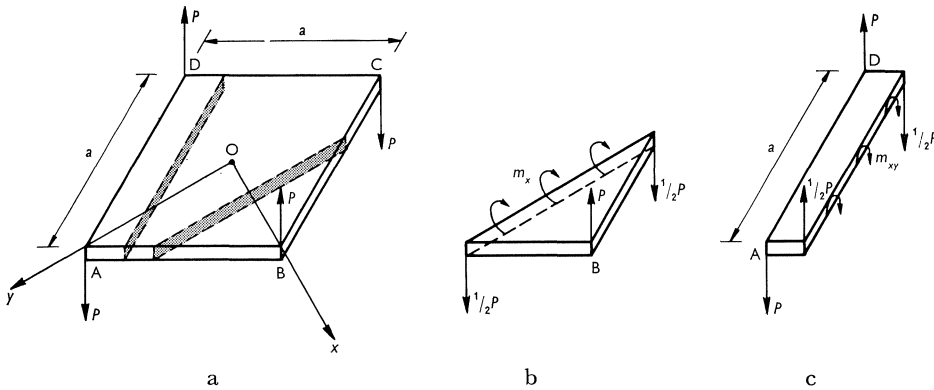


Fig. 2. Krachtsverdeling in de vierkante plaat.

en de opwaarts belaste hoeken met B en D. Aangenomen is een assenkruis  $xoy$ , gericht volgens de diagonalen. In een snede evenwijdig aan de diagonaal AC op een afstand  $x$  van het hoekpunt heerst het totaal buigend moment  $Px$ . De plaattheorie leert dat dit moment over de breedte van de snede constant is.

Aangezien de breedte van de beschouwde snede  $2x$  bedraagt is het verdeelde moment  $m_x$  gelijk aan  $\frac{1}{2}P$ . Voor de grootte van het moment  $m_x$  speelt de afstand  $x$  dus geen rol, zodat  $m_x$  over de plaat constant in grootte is. Op dezelfde wijze kan worden aangetoond dat het verdeelde moment  $m_y$  de waarde  $-\frac{1}{2}P$  heeft en eveneens over de plaat constant in grootte is. De waarde van de momenten is bovendien *onafhankelijk* van de plaatgrootte. Omdat in de beschouwde snede geen wringend moment heerst zijn  $m_x$  en  $m_y$  de hoofdmomenten in de plaat, en aangezien zowel  $m_x$  als  $m_y$  in grootte onafhankelijk is van de plaats, is de spanningstoestand in de plaat homogeen.

Hieruit volgt dat de verdeelde dwarskrachten  $q_x$  en  $q_y$  nul zijn. Het verticale evenwicht van de beschouwde snede leert echter dat een dwarskracht groot  $P$  moet worden overgebracht. Omdat de verdeelde dwarskracht in de snede nul is moeten derhalve geconcentreerde dwarskrachten het evenwicht verzekeren.

Uit symmetrie-overwegingen volgt dan dat aan de rand van de plaat op het snedevlak geconcentreerde krachten werken, elk groot  $\frac{1}{2}P$  (fig. 2b). In fig. 3 is het verloop van de dwarskracht langs de plaatranden weergegeven. Op de werkelijke verschijningsvorm van deze geconcentreerde krachten zal in het navolgende nog nader worden ingegaan.

In een snede evenwijdig aan één der plaatranden werken derhalve een verdeeld wringend moment  $m_{xy}$  alsmede twee tegengestelde geconcentreerde krachten  $\frac{1}{2}P$  (fig. 2c).

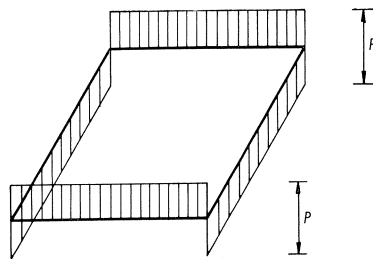


Fig. 3. Dwarskrachtenverloop in de vierkante plaat.

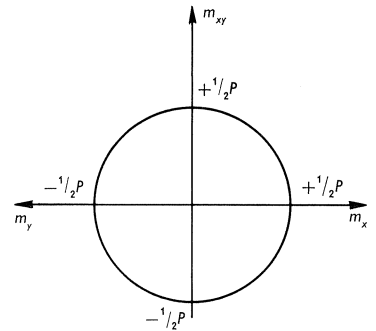


Fig. 4. Cirkel van Mohr.

Uit het evenwicht van het afgesneden deel volgt dan:

$$m_{xy} \cdot a + \frac{1}{2}P \cdot a = P \cdot a, \text{ zodat:}$$

$$m_{xy} = \frac{1}{2}P$$

Uitgaande van de hoofdmomenten  $m_x$  en  $m_y$  kan men de grootte van  $m_{xy}$  in een snede evenwijdig aan één der plaatranden ook bepalen met behulp van de cirkel van Mohr (fig. 4).

De vorm van het doorbuigingsvlak kan worden verkregen door de differentiaaluitdrukkingen voor de krommingen te integreren.

Uit vgl. (1) volgt, indien  $m_x = \frac{1}{2}P$  en  $m_y = -\frac{1}{2}P$  wordt ingevuld:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{-P}{2K(1-\nu)} \dots \dots \dots (2)$$

Integratie levert:

$$w = -\frac{P}{4K(1-\nu)} (x^2 - y^2) \dots \dots \dots (3)$$

waarbij het middenvlak van de onbelaste plaat als nulvlak geldt. Het doorbuigingsvlak heeft de vorm van een hyperbolische paraboloid; verticale vlakken evenwijdig aan de  $x$ -, resp. de  $y$ -as snijden dat vlak volgens kwadratische parabolen met de holle zijde naar boven, resp. naar beneden. Verticale vlakken door  $O$  onder  $45^\circ$  met de  $x$ -, resp. de  $y$ -as ( $x = y$ ;  $x = -y$ ) hebben doorsnijdingen zodanig dat vgl. (3) luidt  $w = 0$ . Hieraan evenwijdige lijnen, dus ook de randen van de plaat blijven recht, doch draaien over een zekere hoek, die toeneemt met de afstand van deze lijnen tot de oorsprong  $O$ .

Door de plaat op te vatten als een op wringing belaste rechthoekige doorsnede, waarvan de dikte klein is ten opzichte van de zijde-afmetingen kan op eenvoudige wijze de uitdrukking voor het wringingstraagheidsmoment en die

voor de grootte van de schuifspanning van een dergelijke doorsnede worden afgeleid.

Uit vgl. (1) volgt nl.:

$$m_{xy} = \frac{1}{2}P = -K(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \text{ of}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{\frac{1}{2}P}{K(1-\nu)} = -\frac{\frac{1}{2}P}{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu)} = -\frac{P}{\frac{1}{3} \cdot \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot h^3} = -\frac{P}{\frac{1}{3}Gh^3}.$$

Per definitie geldt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{M_w}{GI_w} = -\frac{Pa}{GI_w}, \text{ zodat}$$

$$I_w = \frac{1}{3}ah^3 \dots \dots \dots (4)$$

Het verdeelde moment  $m_{xy} = \frac{1}{2}P$  veroorzaakt horizontale schuifspanningen die over de hoogte lineair verlopen (fig. 5).

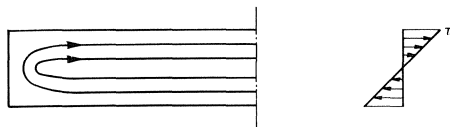


Fig. 5. Schuifspanningstrajectoriën.

Aan de onder- en bovenzijde treedt de grootste waarde van  $\tau$  op, nl.:

$$\tau = \frac{\frac{1}{2}P}{\frac{1}{6}h^2}, \text{ of } \tau = \frac{Pa}{\frac{1}{3}ah^2} \dots \dots \dots (5)$$

Bovenstaande uitkomsten zijn dezelfde als die welke worden gevonden met de theorie van De Saint Venant voor wringing van prismatische staven [2]. Uit deze theorie volgt ook het schuifspanningsverloop, waarvan men zich o.a. een beeld kan vormen met behulp van de zeepvliesanalogie.

De richting van de schuifspanning is die van de raaklijn aan de in fig. 5 getekende krommen, welke in de zeepvliesanalogie hoogtelijnen van het zeepvlies voorstellen.

Op enige afstand van de plaatrand is de richting van de schuifspanning vrijwel horizontaal ( $\parallel$  boven- en benedenvlak), hetgeen in overeenstemming is met hetgeen hiervoor met de plaattheorie werd gevonden. In de omgeving van de rand lopen de schuifspanningstrajectoriën echter overwegend verticaal ( $\perp$  boven- en benedenvlak).

Door Lord Kelvin [3] is aangetoond dat de resultante van de schuifspanningen in deze zone de waarde  $\frac{1}{2}P$  heeft.

Ook dit is in overeenstemming met het resultaat dat uit de plaattheorie volgt. Dat de verticale resultante daarbij langs de rand geconcentreerd wordt gedacht is een gevolg van de uitgangspunten van die theorie.

## 2.2 De rechthoekige plaat

Voor de behandeling van de rechthoekige plaat kan op de reeds besproken vierkante plaat worden teruggegrepen.

Het door middel van een willekeurige snede evenwijdig aan AD afgesneden deel van de vierkante plaat van fig. 2a wordt daartoe aan een nadere beschouwing onderworpen. In fig. 6a is dit deel opnieuw weergegeven. Uit de literatuur, zie bijv. [4], is bekend dat de verdeelde wringende momenten in de snede EF kunnen worden vervangen door een statisch equivalent systeem van telkens twee tegengestelde krachten  $m_{xy}$  (zie fig. 6b). Een dergelijk vervangingsysteem veroorzaakt alleen enige storing langs de rand van de beschouwde snede over een afstand die ongeveer overeenkomt met de plaatdikte. Vooropgesteld wordt hierbij dat de dikte van de plaat klein is ten opzichte van de lengte- en breedteafmetingen.

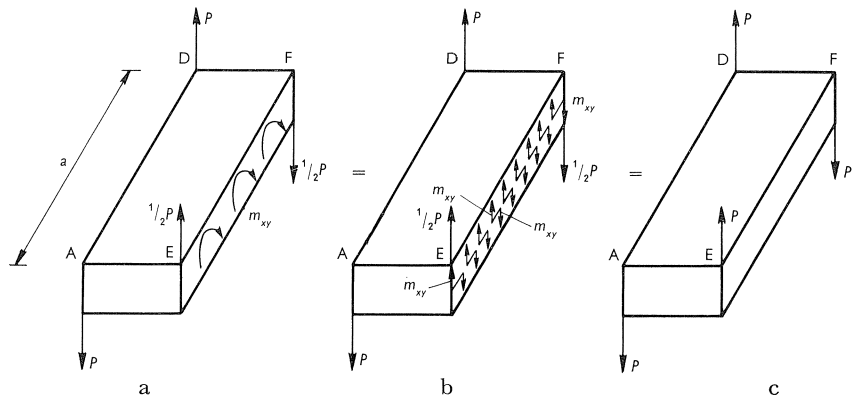


Fig. 6.

De onderscheiden vervangingskrachten  $m_{xy}$  heffen elkaar op, uitgezonderd aan de einden van de snede. In elk der hoekpunten E en F resteert een kracht groot  $m_{xy} = \frac{1}{2}P$ . Deze krachten werken in dezelfde richting als de geconcentreerde dwarskrachten  $\frac{1}{2}P$  in E en F. De resulterende krachten in de hoekpunten E en F bedragen derhalve  $P$  (zie fig. 6c). De spanningstoestand in een op de aangegeven wijze afgesneden deel van de vierkante plaat is derhalve dezelfde als die in een rechthoekige plaat, in de hoekpunten belast met afwisselend naar boven, resp. naar beneden gerichte puntlasten.

Ook in een aldus belaste rechthoekige plaat heerst blijkbaar een homogene spanningstoestand, waarbij, evenals in het geval van de vierkante plaat, voor de grootte van de momenten en dwarskrachten de zijde-afmetingen geen rol spelen.

De hoofdspanningsrichtingen maken een hoek van  $45^\circ$  met de zijden van de plaat.

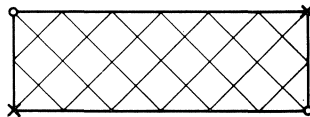
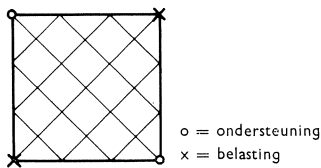


Fig. 7. Hoofdspanningstrajectoriën in een vierkante resp. een rechthoekige plaat. In beide gevallen zijn bij gelijke puntlasten de momenten en dwarskrachten dezelfde.

In fig. 7 is het hoofdspanningstrajectoriënbeeld van een vierkante zowel als van een rechthoekige plaat weergegeven.

### 2.3 De ruitvormige plaat

In fig. 8 is een ruitvormige plaat voorgesteld, in de hoekpunten belast met afwisselend naar boven, resp. naar beneden gerichte krachten  $P$ .

De neerwaarts belaste hoekpunten zijn met A en C aangeduid, de opwaarts belaste punten met B en D. Een aangenomen assenkruis  $xoy$  is gericht volgens de diagonalen, welke de afmetingen  $2a$  en  $2b$  hebben. In een snede evenwijdig aan de diagonaal AC op een afstand  $x$  van het hoekpunt heerst het buigende moment  $Px$ .

Met behulp van de plaattheorie kan worden aangetoond dat, evenals bij de vierkante plaat, ook dit moment gelijkmatig over de breedte van de snede is verdeeld. Het verdeelde moment  $m_x$  bedraagt  $a/2b \cdot P$ . Het verdeelde moment  $m_y$  heeft de waarde  $-b/2a \cdot P$ . Voor de grootte van  $m_x$  en  $m_y$  speelt de afstand  $x$  geen rol: deze momenten zijn over de gehele plaat constant in grootte.

De grootte van de momenten is slechts afhankelijk van de geometrische gedaante van de plaat, niet van de afmetingen. Omdat in de beschouwde doorsnede geen wringend moment heerst zijn  $m_x$  en  $m_y$  de hoofdmomenten in de plaat; aangezien de grootte van  $m_x$  en  $m_y$  onafhankelijk is van de plaats, is de spanningstoestand in de plaat homogeen. De verdeelde dwarskrachten  $q_x$  en  $q_y$  zijn derhalve nul. Evenals bij de vierkante plaat blijkt ook hier dat het verticale evenwicht alleen kan worden verzekerd als langs de rand van de plaat, aan de uiteinden van het snedevlak, geconcentreerde krachten ter grootte van  $\frac{1}{2}P$  werken.

In een snede evenwijdig aan één der plaatranden werken een verdeeld wringend moment  $m_{xy}$ , alsmede twee tegengestelde krachten  $\frac{1}{2}P$ . Uit het evenwicht volgt voor de grootte van het verdeelde wringende moment  $m_{xy} = \frac{1}{2}P$ .

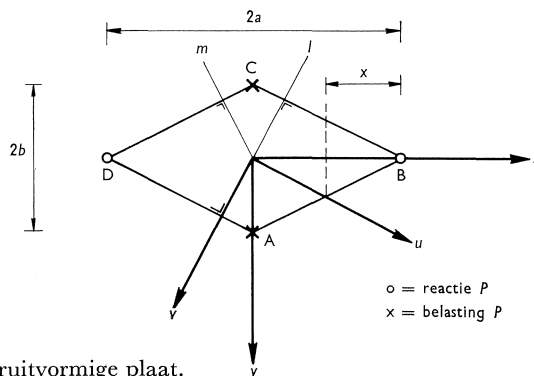


Fig. 8. De ruitvormige plaat.

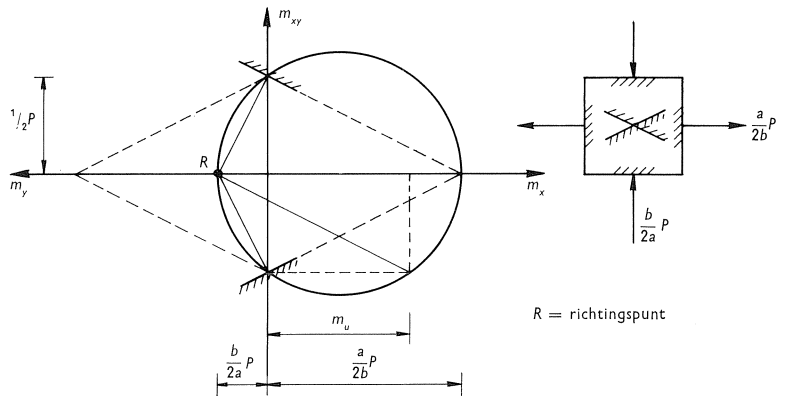


Fig. 9.  
Cirkel van Mohr.

Met als uitgangspunt de hoofdmomenten  $m_x$  en  $m_y$  kan met behulp van de cirkel van Mohr in iedere snede de grootte van de momentencomponenten worden bepaald. In fig. 9 is dit uitgevoerd, waarbij blijkt dat de cirkel van Mohr overeenkomt met de omgeschreven cirkel van de driehoek die de helft is van de ruitvormige plaat. In de figuur zijn de vlakken geconstrueerd waarop alleen een wringend moment werkt. Zoals hiervoor reeds bleek zijn dit de vlakken evenwijdig aan de randen van de plaat met een waarde voor  $m_{xy} = \frac{1}{2}P$ .

De vergelijking van het doorbuigingsvlak kan worden verkregen door de differentiaaluitdrukkingen voor de krommingen te integreren.

Uit vgl. (1) volgt, indien aldaar  $m_x = a/2b \cdot P$  en  $m_y = -b/2a \cdot P$  worden ingevuld:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{-P}{2K(1-\nu^2)} \left( \frac{a}{b} + \nu \frac{b}{a} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{P}{2K(1-\nu^2)} \left( \frac{b}{a} + \nu \frac{a}{b} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Integratie hiervan levert nu:

$$w = -\frac{P}{4K(1-\nu^2)} \left[ x^2 \left( \frac{a}{b} + \nu \frac{b}{a} \right) - y^2 \left( \frac{b}{a} + \nu \frac{a}{b} \right) \right] \dots \dots \dots (7)$$

met als nulvlak het middenvlak van de oorspronkelijk vlakke onbelaste plaat.

Evenals bij de vierkante plaat heeft het doorbuigingsvlak de vorm van een hyperbolische paraboloid. De plaats van de rechten van de plaat die geen doorbuiging ondergaan als gevolg van de belasting is te vinden uit:

$$x^2 \left( \frac{a}{b} + \nu \frac{b}{a} \right) = y^2 \left( \frac{b}{a} + \nu \frac{a}{b} \right) \dots \dots \dots (8)$$

De ligging van die lijnen is dus niet alleen afhankelijk van de lengteverhouding van de diagonalen van de plaat maar ook van de grootte van de dwarscontractiecoëfficiënt.



Voor het theoretische geval dat deze de waarde nul heeft, geeft vgl. (8)

$$x = \pm \frac{b}{a} y$$

Deze lijnen staan loodrecht op de zijden van de plaat ( $l$  en  $m$  in fig. 8). Lijnen hieraan evenwijdig blijven recht en draaien over een zekere hoek die toeneemt met de afstand van deze lijnen tot de oorsprong.

In tegenstelling tot het gedrag van de vierkante plaat blijven de randen zelf hier dus niet recht.

#### 2.4 De parallelogramvormige plaat

Op analoge wijze als bij de rechthoekige plaat kan worden afgeleid dat de spanningstoestand in een evenwijdig aan één der zijden afgesneden deel van een ruitvormige plaat overeenkomt met die in een parallelogramvormige plaat, in de hoeken belast met afwisselend naar boven, resp. naar beneden gerichte puntlasten.

De betreffende zijden van de parallelogramvormige plaat dienen daarbij dezelfde hoeken in te sluiten als de zijden van de ruitvormige plaat. De hoofdspansingstrajectoriën zijn georiënteerd volgens de deellijn van elke door twee zijden ingesloten hoek.

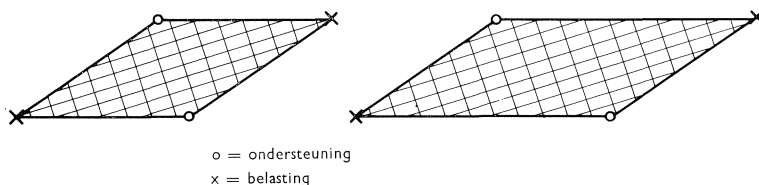


Fig. 10. Hoofdspansingstrajectoriën in een ruitvormige en een parallelogramvormige plaat, waarvan de zijden dezelfde hoek insluiten. In beide gevallen zijn bij gelijke puntlasten de momenten en de dwarskrachten dezelfde.

In fig. 10 is het hoofdspansingstrajectoriënbeeld van een ruitvormige en van een parallelogramvormige plaat weergegeven. De parallelogramvormige plaat kan worden beschouwd als het meest algemene geval van homogene buiging. De ruitvormige zowel als de vierkante plaat vormen hiervan telkens een bijzonder geval.

### 3 Toepassingen

#### 3.1 Bepaling van de plaatstijfheid en van de dwarscontractiecoëfficiënt van een plaatmateriaal

Zoals bekend wordt bij de moiré-methode\*) van Ligtenberg [5] gebruik gemaakt van de vierkante plaat om de plaatstijfheid  $K$  van het toegepaste modelmateriaal te bepalen.

\*) Zie noot op blz. 10.

Volgens vgl. (2) geldt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{P}{2K(1-\nu)}$$

Uit een moiré-foto\*) bepaalt men de grootte van de kromming  $\partial^2 w / \partial x^2$ , doch de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$  moet ook bekend zijn, of (op een andere wijze) bepaald worden, om het verlangde resultaat te verkrijgen.

Door gebruik te maken van de *ruitvormige* plaat is het echter mogelijk zowel  $K$  als  $\nu$  te bepalen, immers hiervoor geldt (zie vgl. (6) en fig. 8):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{-P}{2K(1-\nu^2)} \left( \frac{a}{b} + \nu \frac{b}{a} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{P}{2K(1-\nu^2)} \left( \frac{b}{a} + \nu \frac{a}{b} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Uit een tweetal moiré-foto's van de ruitvormige plaat, genomen met het lijnenraster opeenvolgend in onderling loodrechte standen, parallel aan de diagonalen van de ruit, kunnen de krommingen worden afgeleid, (fig. 11 en 12), waarna  $K$  en  $\nu$  kunnen worden opgelost. Omdat de krommingen constant zijn over de plaat, blijken de moiré-lijnen recht te zijn en op onderling gelijke afstanden te liggen.

In het voorgaande is aangetoond, dat voor  $\nu = 0$  de lijnen  $l$  en  $m$  (zie fig. 8) en de hieraan evenwijdige lijnen recht blijven. Het ligt daarom voor de hand, indien  $\nu \neq 0$ , voor de bepaling van  $\nu$  gebruik te maken van de krommingen in  $u$ - en  $v$ -richting.

In de figuren 13 en 14 zijn de moiré-foto's voor deze laatste richtingen afgebeeld.

Uit vgl. (1) volgt:

$$\left. \begin{aligned} m_u &= -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) \\ m_v &= -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

---

\*) Kort samengevat komt de moiré-methode hierop neer [5, 6]: Men weerspiegelt een patroon van witte en zwarte lijnen met gelijke breedte op het plaatvormige model. Door dit lijnenpatroon zowel in onbelaste als belaste toestand van het model op hetzelfde negatief te fotograferen, ontstaat het zogenaamde moiré-effekt. De moiré-lijnen vormen als het ware een hoogtelijnenkaart van punten met constante hoekverdraaiing. Op de foto's blijken de witte lijnen, waar de hoekverdraaiing  $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2} \dots$  eenheden bedraagt, het best zichtbaar. Uit deze hoekverdraaiingslijnen zijn zowel de krommingen door differentiatie als de zakkingen door integratie gemakkelijk af te leiden. Hoe groter de kromming is des te dichter liggen de moiré-lijnen bijeen; men kan het aantal moiré-lijnen per lengte-eenheid beschouwen als een maat voor de kromming.

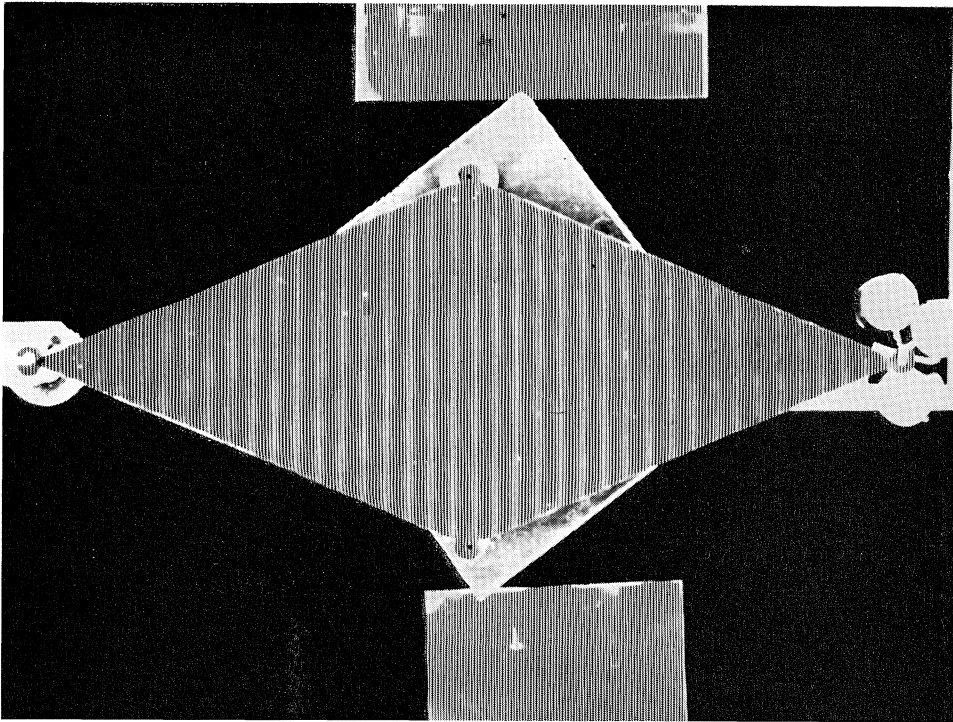


Fig. 11. Hoogtelijnenpatroon van de hoekverdraaiing  $\partial w / \partial x$  (zie fig. 8).

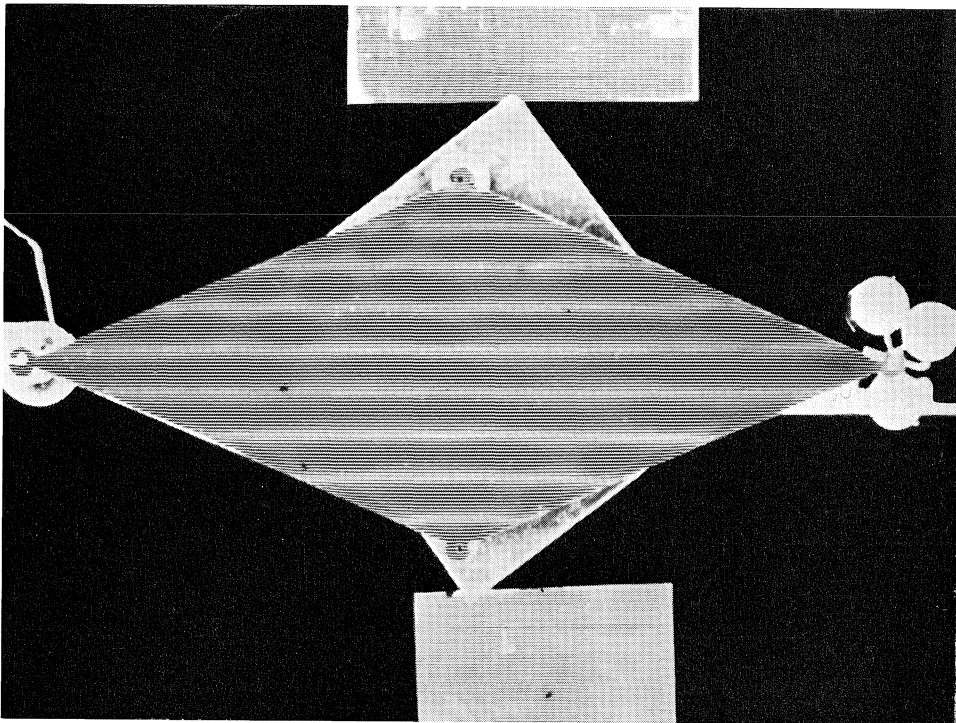


Fig. 12. Hoogtelijnenpatroon van de hoekverdraaiing  $\partial w / \partial y$  (zie fig. 8).

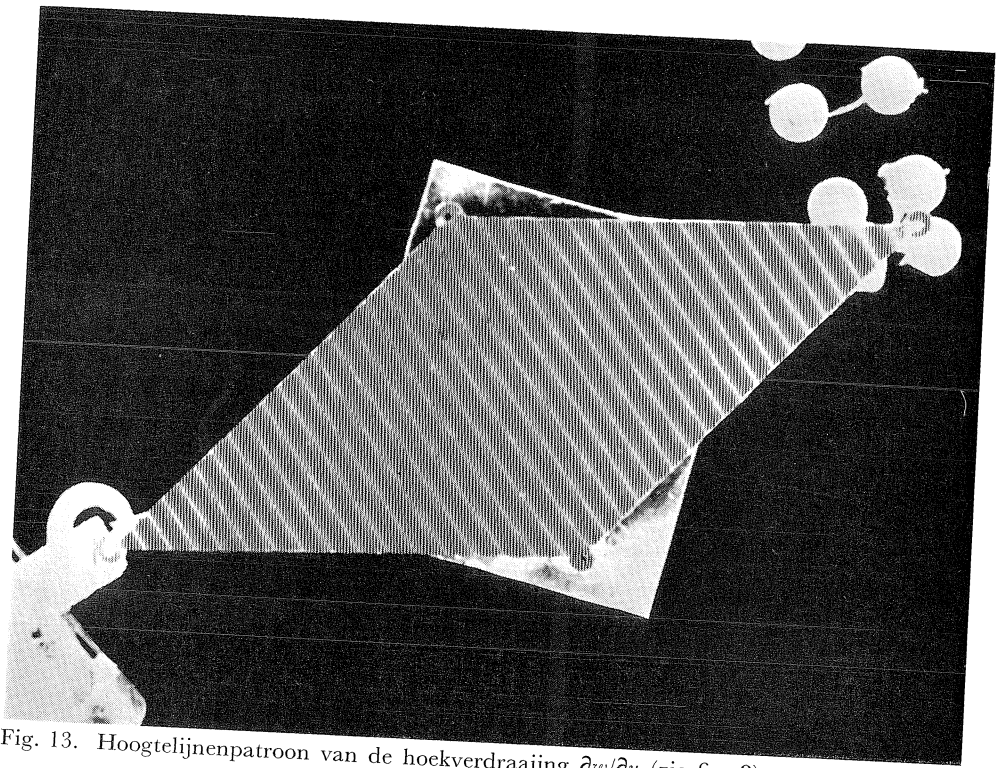


Fig. 13. Hoogtelijnenpatroon van de hoekverdraaiing  $\partial w/\partial u$  (zie fig. 8).

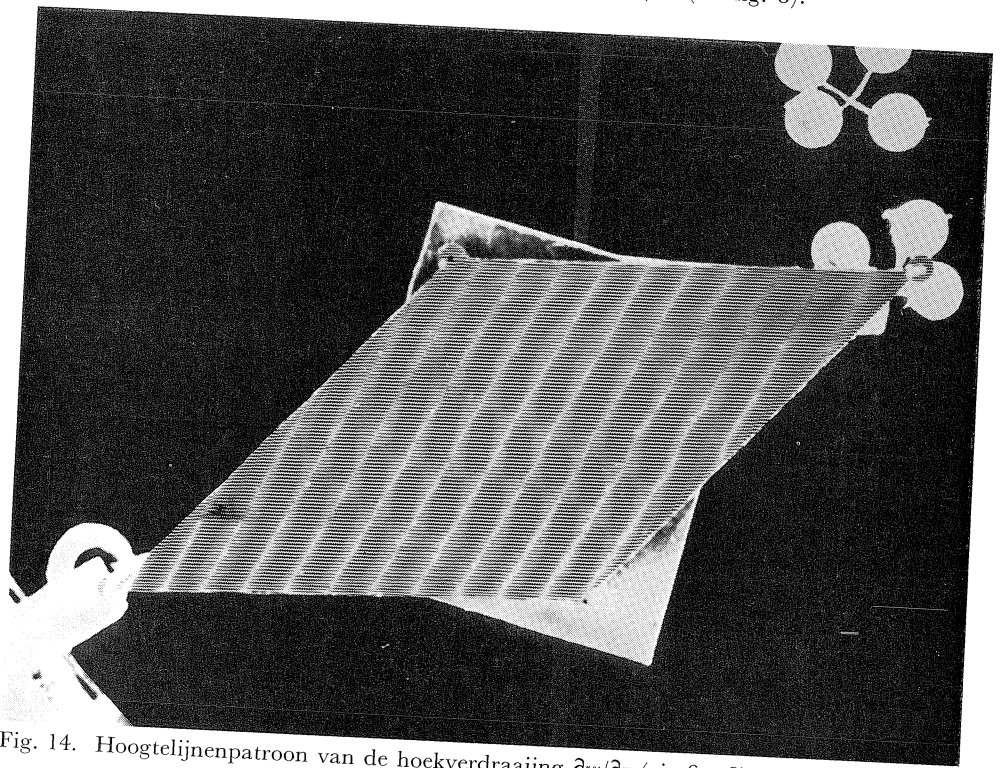


Fig. 14. Hoogtelijnenpatroon van de hoekverdraaiing  $\partial w/\partial v$  (zie fig. 8).

Met de cirkel van Mohr (zie fig. 9) is te vinden.

$$\left. \begin{aligned} m_u &= \frac{P}{2} \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \\ m_v &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Na substitutie van vgl. (10) in vgl. (9) en na enige herleiding ontstaat:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= - \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}} \\ K &= - \frac{P \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)}{2(1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

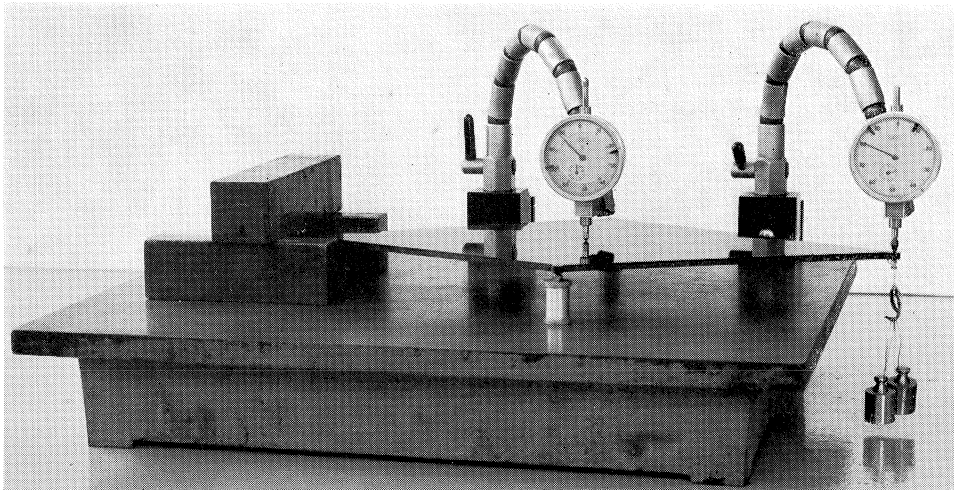


Fig. 15. Het meten van de doorbuiging in twee punten van een ruitvormige perspexplaat, ter bepaling van de krommingen.

Ter illustratie volgt hieronder de bepaling van  $\nu$  van het plaatmateriaal (perspex) waarop de moiré-foto's van fig. 13 en 14 betrekking hebben.

Hieruit blijkt:  $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$  = evenredig met het aantal moiré-lijnen per lengte-eenheid  
in  $v$ -richting = 0,97/cm,

$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$  = evenredig met het aantal moiré-lijnen per lengte-eenheid  
in  $u$ -richting = 2,60/cm,

dus  $\nu = \frac{0,97}{2,60} = 0,37$

Indien geen moiré-apparaat ter beschikking staat kunnen de krommingen ook worden bepaald uit een directe doorbuigingsmeting. Omdat, zoals eerder opgemerkt, de krommingen over de plaat constant zijn is het meten van de verplaatsing van twee punten hierbij voldoende (zie fig. 15).

### 3.2 Eventuele toepassing ter bestudering van het gedrag van gewapend-betonplaten

In fig. 16 is schematisch het verband weergegeven tussen het moment  $m_x$  en de kromming  $\partial^2 w / \partial x^2$  van een homogene gewapend-betonplaat waarop een buigend moment  $m_x$  en een dwarsmoment  $m_y = \alpha m_x$  werkt. Voor het gebied van de 'ongescheurde tak' geldt:

$$m_x = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \alpha m_x$$

Na eliminatie van  $\partial^2 w / \partial y^2$  volgt hieruit:

$$m_x = -K \frac{(1 - \nu^2)}{(1 - \nu\alpha)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \dots \dots (12)$$

Het is zeer goed denkbaar dat bij platen van gewapend beton als gevolg van bijv. door krimp ontstane microscheuren de invloed van  $\nu$  niet in die mate tot uitdrukking komt als uit vgl. (12) volgen zou. Voor zover bekend is de geldigheid van deze vergelijking voor gewapend beton nooit experimenteel bevestigd.

Voor het gebied van de 'gescheurde tak' is het verband tussen moment en kromming sterk afhankelijk van de mate van scheurvorming. Voor zover is kunnen worden nagegaan zijn nooit proeven genomen om de invloed van een dwarsmoment op het verloop van deze tak te onderzoeken.

Ook de vraag, in welke mate het scheurmoment door een dwarsmoment wordt beïnvloed, is voor zover bekend evenmin nog aanleiding geweest tot onderzoek.

De grootte van het vloeimoment wordt tot dusver onafhankelijk gesteld van het al of niet aanwezig zijn van een dwarsmoment. Deze aanname, essentieel bij het toepassen van de vloeilijentheorie van Johansen, is zoals uit de literatuur [7, 8] blijkt niet geheel bevredigend.

In de hiervóór genoemde problemen zou – voor negatieve waarden van  $\alpha$  – een inzicht kunnen worden verkregen door ruitvormige platen van gewapend beton op de aangegeven wijze te beproeven. Door dergelijke platen tot breuk te belasten zou tevens verificatie mogelijk zijn van de aanname dat het vloeimoment onafhankelijk gesteld kan worden van het dwarsmoment [8].

Een desbetreffend speurwerkprogramma is bij het Instituut TNO voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies in voorbereiding.

Daarnaast zijn proefnemingen onderhanden waarbij de invloed van verschillende wapeningsrichtingen op het vloeimoment wordt onderzocht. Ook bij dit programma zal van de ruitvormige plaat gebruik kunnen worden gemaakt.

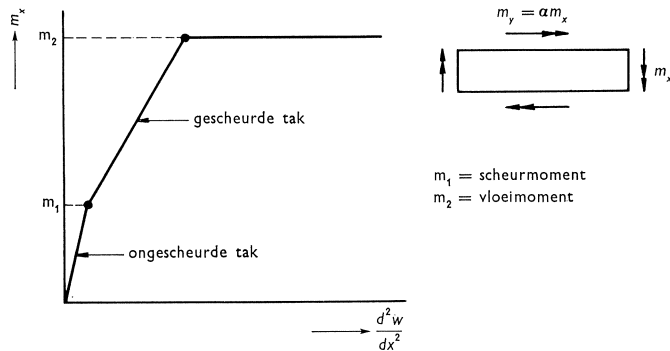


Fig. 16.  $M$ - $K$ -diagram van een gewapend-beton plaat, waarop een buigend moment  $m_x$  en een dwarsmoment  $m_y = am_x$  werkt.

#### 4 Verantwoording

De schrijver stelt er prijs op zijn erkentelijkheid te betuigen jegens de heer W. van der Zee, medewerker van het I.B.B.C., voor de door hem verrichte uitvoering van de benodigde experimenten.

#### 5 Literatuur

1. WITTEVEEN, Ir. J., Het berekenen van platen met sprongsgewijs veranderende dikte met behulp van de differentiemethode. *Heron*, jaargang 13, no. 3/4, Delft 1965.
2. TIMOSHENKO, S., *Theory of Elasticity*, 2e druk. McGraw Hill, New York 1951. Pag. 268 e.v.
3. KELVIN and TAIT, *Natural Philosophy*, vol. 2. Pag. 267 e.v.
4. TIMOSHENKO, S., and S. WOINOWSKI-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, 2e druk. McGraw Hill, New York 1959. Pag. 83 e.v.
5. LIGTENBERG, Ir. F. K., Over een methode, om door een eenvoudig experiment de momenten in stijve platen te bepalen. *De Ingenieur* 1952, no. 9.
6. C.U.R.-rapport 29A, 1965. Paddestoelvroeren, Theorie en modelonderzoek. (In dit rapport wordt op blz. 64 en 65 een uitvoerige toelichting gegeven op de interpretatie van moiré-foto's.)
7. WOOD, R. H., *Plastic and elastic design of slabs and plates with particular reference to reinforced concrete floor slabs*. Thames and Hudson, London 1961. Pag. 11 . . . 14 en pag. 111 . . . 114.
8. BAUS, R. et S. TOLACCIA, Calcul à la rupture des dalles en béton armé et étude expérimentale du critère de rupture en flexion pure. *Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics*, sept. 1963. Pag. 871 . . . 892.