

A.W. Grootendorst
B. Meulenbeld

ANALYSE

Deel 3, Differentiaalvergelijkingen



572006

analyse 3

differentiaalvergelijkingen

Bibliotheek TU Delft



C 0003813867

2414
577
3

3. Results

The first part of the analysis

analyse 3

differentiaalvergelijkingen

Dr. B. Meulenbeld, *oud-hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft*

Dr. A.W. Grootendorst, *oud-hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft*

Verbeterde tweede druk

Delftse Uitgevers Maatschappij b.v.

CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Meulenbeld, B.

Analyse / B. Meulenbeld, A.W. Grootendorst. – Delft: Delftsche U.M.

3: Differentiaalvergelijkingen. – Ill.

Oorspr. titel: Analyse voor propaedeutische examens / B. Meulenbeld en W.K. Baart.

– Dl. 2 (p. 205–314). – Haarlem: Stam Technische Boeken, 1960.

ISBN 90-6562-066-4

SISO 515 UDC 517.9(075.8)

Trefw.: differentiaalvergelijkingen.

© VSSD

Tweede druk 1987, verbeterd 1992

Delftse Uitgevers Maatschappij b.v.

P.O. Box 2851, 2601 CW Delft, The Netherlands

Tel. 015-123725

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90 6562 066 4

Voorbericht bij de eerste druk

Deze uitgave kan beschouwd worden als de vijfde druk van de pagina's 205...314 van het boek: „Analyse II” voor propaedeutische examens van de hand van Meulenbeld en Baart. Dit gedeelte verschijnt thans als apart boek onder de titel: „Analyse 3, differentiaalvergelijkingen”.

Tot een splitsing in twee delen van het genoemde boek is besloten, enerzijds om te voorkomen dat de uitbreiding van de behandelde stof zou leiden tot een te dik boek, anderzijds om te voldoen aan de vraag naar een apart boek over differentiaalvergelijkingen.

De inhoud beslaat de gebruikelijke inleidende behandeling van de gewone differentiaalvergelijkingen en simultane stelsels daarvan. Ruime aandacht is daarbij geschonken aan de z.g. trillingsvergelijking, speciaal met het oog op de fysische toepassingen. Een hoofdstuk over de Laplace-transformatie is opgenomen in verband met de toepassing daarvan op het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

De hoofdstukken over numerieke methoden en partiële differentiaalvergelijkingen vallen in feite buiten het bestek van dit boek. Ze zijn meer ter kennismaking opgenomen.

Bij het laatstgenoemde hoofdstuk staan enkele praktische oplossingsmethoden van de vergelijking van de trillende snaar en van de warmtegeleidingsvergelijking centraal. Daarbij is van een theoretische fundering van de partiële differentiaalvergelijkingen afgezien.

Bij het verschijnen van dit derde en laatste deel „Analyse” stellen de schrijvers het op prijs de uitgever te danken voor de prettige samenwerking bij het omzetten van het manuscript in bruikbare kopij en voor de verzorgde uitvoering van de boeken, in het bijzonder de duidelijke lay-out.

Delft, juli 1976.

De schrijvers
B. Meulenbeld
A. W. Grootendorst

Voorbericht bij de tweede druk

Deze tweede druk van „Analyse 3, differentiaalvergelijkingen” verschilt niet alleen daarin van de eerste dat een aantal zetfouten en andere onjuistheden gecorrigeerd is, maar ook door de toevoeging van een paragraaf waarin dieper is ingegaan op de lineaire en quasi-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. Hiermee is aan de wens van een aantal gebruikers voldaan.

Evenals de jongste drukken van „Analyse 1” en „Analyse 2” is ook deze druk verzorgd door de VSSD. Volgaarne willen wij deze Vereniging danken voor haar bereidwilligheid en voor de keurige uitvoering van dit werk.

Als steeds houden we ons aanbevolen voor constructieve opmerkingen.

Delft, januari 1987

De schrijvers

B. Meulenbeld

A.W. Grootendorst

Voorbericht bij de verbeterde tweede druk

De voor u liggende uitgave Analyse, deel 3, Differentiaalvergelijkingen, verschilt slechts daarin van de vorige druk dat een aantal drukfouten is gecorrigeerd en dat op drie plaatsen een onjuistheid is recht gezet. Ondergetekenden danken de opmerkzame lezers die de schrijvers op enkele van deze ongerechtigheden attent maakten.

Daar het verschil met de voorafgaande editie zo gering is, lijkt het beter te spreken van een verbeterde tweede druk dan van een derde druk.

Ook nu weer gaat onze dank uit naar de uitgever voor zijn goede zorgen en ook nu weer spreken wij de wens uit dat de gebruikers ons hun constructieve kritiek niet zullen onthouden.

Delft, juni 1992

De schrijvers

B. Meulenbeld

A.W. Grootendorst

Inhoud

Hoofdstuk 1	
<i>Gewone differentiaalvergelijkingen</i>	
1 De gewone differentiaalvergelijking; orde en graad	11
2 Het optreden van differentiaalvergelijkingen	14
3 De differentiaalvergelijking van de eerste orde	18
4 Meetkundige betekenis van de D.V. van de eerste orde. Lijnelementenveld. Isoklinen	20
5 Existentiebewijs voor de oplossing van $y' = F(x, y)$	25
6 Overzicht van elementaire methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde	33
7 Homogene differentiaalvergelijkingen	41
8 De exacte differentiaalvergelijking. Integrerende factor	50
9 De lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde. De vergelijking van Bernoulli	57
10 Lineaire differentiaalvergelijkingen van de n -de orde ($n > 1$)	67
11 Lineaire afhankelijkheid van functies. Determinant van Wronski	70
12 De homogene differentiaalvergelijking van de orde n ($n > 1$)	75
13 De homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten	79
14 De homogene lineaire differentiaalvergelijking van Euler	84
15 De inhomogene lineaire differentiaalvergelijking	87
16 De trillingsvergelijking; de vrije trilling	90
17 De elektrische keten zonder generator	96
18 De gedwongen trilling	98
19 De elektrische keten met generator	104
20 Variatie van constanten	107
21 Het oplossen van een differentiaalvergelijking door middel van ordeverlaging	113
22 Orthogonale trajectoriën	121
Hoofdstuk 2	
<i>Het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van machtreeksen</i>	
23 Oplossing van een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde met behulp van machtreeksen	131
24 Gewone en singuliere punten van een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde	138
25 Oplossingen in een omgeving van een gewoon punt. Differentiaalvergelijking van Legendre	141
26 Oplossingen in een omgeving van een regulier-singulier punt. Differentiaalvergelijking van Bessel	145

Hoofdstuk 3

Simultane differentiaalvergelijkingen

27 Inleiding	155
28 Lineaire stelsels. Fundamentele stellingen	163
29 Oplossingsmethoden voor lineaire stelsels met constante coëfficiënten 1	167
30 Oplossingsmethoden voor lineaire stelsels met constante coëfficiënten 2	173
31 Standaardvormen van lineaire stelsels met twee onbekende functies	183

Hoofdstuk 4

De Laplace-transformatie

32 Definitie en achtergrond	191
33 Enkele voorbeelden en belangrijke stellingen	194
34 De Laplace-transformatie van afgeleiden en primitieve functies	199
35 De inverse Laplace-transformatie	203
36 Het oplossen van een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten met behulp van Laplace-transformatie	206
37 Convolutie	211

Hoofdstuk 5

Numerieke methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen

38 Stapsgewijze integratie. Methode van Euler	219
39 De methode van Heun	221
40 De verbeterde trapeziumregel	224
41 Toepassing van de behandelde methoden	225
42 De methode van Runge-Kutta	229

Hoofdstuk 6

Partiële differentiaalvergelijkingen

43 Inleiding	230
44 Partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde	232
45 Quasi-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen	238
46 De warmtegeleidingsvergelijking voor een dunne homogene staaf	245
47 De vergelijking van de trillende snaar	248
48 De oplossing volgens d'Alembert van de golfvergelijking	256
49 De vergelijking van Laplace	259
50 De oplossing van de vergelijking van Laplace in cilindercoördinaten. De vergelijking van Bessel	263
51 De oplossing van de vergelijking van Laplace in bolcoördinaten. De toegevoegde vergelijking van Legendre	264

Beknopte lijst van gebruikte symbolen

$a = b$	a gelijk aan b
$a \neq b$	a niet gelijk aan b
$a \approx b$	a „ongeveer” gelijk aan b
$a > b$	a groter dan b
$a \geq b$	a groter dan b of a gelijk aan b
$a < b$	a kleiner dan b
$a \leq b$	a kleiner dan b of a gelijk aan b
\Rightarrow	impliceert; als ..., dan ...; hieruit volgt
\Leftrightarrow	is equivalent met; is gelijkwaardig met
\wedge	en
\vee	of
$V = \{a, b, c\}$	V is de verzameling van de elementen a , b en c
$V = \{x P(x)\}$	V is de verzameling van alle elementen x die de eigenschap P hebben
\emptyset	de lege verzameling
$a \in V$	a is een element van V
$p \notin V$	p is geen element van V
$V \subset W$	V is een deelverzameling van W
$V \not\subset W$	V is geen deelverzameling van W
$C \cap D$	de doorsnede van C en D („ C door D ”)
$E \cup F$	de vereniging van E en F („ E met F ”)
$A \setminus B$	„ A , en daaruit weggelaten B ”; $\{x \in A x \notin B\}$
$V \times W$	de verzameling geordende paren (x, y) , waarvoor geldt $x \in V \wedge y \in W$
\mathbb{N}	de verzameling natuurlijke getallen $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
\mathbb{Z}	de verzameling gehele getallen
\mathbb{Q}	de verzameling rationale getallen
\mathbb{R}	de verzameling reële getallen
\mathbb{C}	de verzameling complexe getallen
\circ	operatieteken
$\forall_{a, b \in \mathbb{R}} [\dots]$	voor iedere a en b , element van \mathbb{R} geldt ... („alquantor”)
$\exists_{x \in V} [\dots]$	er is een $x \in V$, waarvoor geldt ... („existentiequantor”)
$n!$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ($n \in \mathbb{N}$); spreek uit: n -faculteit

Gebruikte symbolen van

1. de naam van de organisatie of instelling

2. de naam van de afdeling

3. de naam van de persoon

4. de naam van de organisatie of instelling

5. de naam van de afdeling

6. de naam van de persoon

7. de naam van de organisatie of instelling

8. de naam van de afdeling

9. de naam van de persoon

10. de naam van de organisatie of instelling

11. de naam van de afdeling

12. de naam van de persoon

13. de naam van de organisatie of instelling

14. de naam van de afdeling

15. de naam van de persoon

16. de naam van de organisatie of instelling

17. de naam van de afdeling

18. de naam van de persoon

19. de naam van de organisatie of instelling

20. de naam van de afdeling

21. de naam van de persoon

22. de naam van de organisatie of instelling

23. de naam van de afdeling

24. de naam van de persoon

25. de naam van de organisatie of instelling

26. de naam van de afdeling

27. de naam van de persoon

28. de naam van de organisatie of instelling

Gewone differentiaalvergelijkingen

1 De gewone differentiaalvergelijking; orde en graad

In veel toepassingen van de wiskunde, met name in de natuurwetenschappen en de econometrie, treden z.g. *gewone differentiaalvergelijkingen* op. Daarbij doet zich het volgende probleem voor.

Gegeven:

Een vergelijking in een aantal onbekenden $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$ die we aangeven als:

$$F(t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) = 0 \quad (1.1)$$

Gevraagd:

Een functie f van de reële variabele x te bepalen, zodanig dat de vergelijking (1.1) overgaat in een identiteit in x (voor alle x behorende tot een zeker interval I), als we $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ vervangen door resp. $x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

Dit probleem wordt meestal aangegeven in de vorm van de differentiaalvergelijking (D.V.):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

De opgave is dan alle functies f van x te bepalen, gedefinieerd op I , zodanig dat er een identiteit in x ontstaat ($\forall x \in I$), indien we stellen $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$, \dots , $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Een functie f met die eigenschap heet dan een *oplossing* van de (gewone) D.V. Vaak zeggen we ook dat $f(x)$ een oplossing is van de D.V.

Het bepalen van alle functies f die voldoen, noemen we het *oplossen* of *integreren* van de D.V.

In vele gevallen vinden we de oplossing niet expliciet in de gedaante $y = f(x)$, maar impliciet. D.w.z. we vinden een uitdrukking $\varphi(x, y) = 0$ met de eigenschap, dat elke functie f , waarvoor geldt dat $\varphi\{x, f(x)\} = 0$ een identiteit in x is, een oplossing van de D.V. is. We noemen in dat geval $\varphi(x, y) = 0$ een *integraal* van de D.V.

Een en ander kunnen we vertalen in meetkundige termen: de grafiek van $y = f(x)$ noemen we een *oplossingskromme*; de grafiek van $\varphi(x, y) = 0$ noemen we een *integraalkromme*. Een oplossingskromme ligt dus op een integraalkromme.

Voorbeeld 1

Aan de gewone D.V.:

$$y' - y + x = 0$$

voldoen de functies $f: x \mapsto 1 + x + Ae^x$

Voorbeeld 2

Aan:

$$y' - e^x + 2y = 0$$

voldoen de functies $f: x \mapsto Ae^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$

Voorbeeld 3

De D.V.:

$$(y')^2 - xy' + y = 0$$

heeft tot oplossingen $f: x \mapsto Ax - A^2$

In de drie voorbeelden stelt A een willekeurige constante voor.

Opmerking:

Juist bij de D.V. zullen we vaak de in deel 1, par. 16 genoemde notatie $y^{(n)}$ in plaats van $\frac{d^n f}{dx^n}$ gebruiken.

Definitie

De orde van een differentiaalvergelijking is de orde van de hoogste afgeleide van de onbekende functie die in de D.V. voorkomt.

De genoemde D.V.-en uit de drie voorbeelden zijn alle van de eerste orde. Van de tweede orde zijn b.v.: $y'' - y - x = 0$ en $y'' \cos x + y' \sin x - y \cos^3 x = 0$.

Indien het linkerlid van de op nul herleide D.V. een veelterm is in y en in de afgeleiden $y', y'', \dots, y^{(n)}$, met coëfficiënten die van x mogen afhangen, dan kunnen we de D.V. schrijven als:

$$\sum_{(v_0 + \dots + v_n) = 0}^m a_{v_0, \dots, v_n} y^{v_0} (y')^{v_1} \dots (y^{(n)})^{v_n} = 0 \quad (1.2)$$

Definitie

Onder de graad van een D.V. van het bovengenoemde type verstaan we de hoogste graad die onder de termen $y^{v_0} y'^{v_1} \dots y^{(n)v_n}$ voorkomt; d.w.z. de maximale waarde van $v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

Voorbeeld 4

De D.V.:

$$6x^5(y''')^2 + 2xy(y'')^3 \sin x + 5x^8y - 13 = 0$$

is een D.V. van de orde 3 en de graad 4.

Voorbeeld 5

Van de D.V.:

$$y'' \cos x + \cos y = 0$$

is de graad niet gedefinieerd.

Van groot belang zijn de D.V.-en van de eerste graad of de *lineaire differentiaalvergelijkingen*. Deze hebben de gedaante:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - b(x) = 0$$

In het algemeen bevat een oplossing (resp. integraal) van een D.V. van de orde n steeds n willekeurige constanten. Zo'n oplossing (integraal) noemen we de *algemene oplossing (integraal)*. Geven we deze constanten een bepaalde waarde, dan krijgen we een *particuliere oplossing (integraal)*. De waarden van deze constanten bij een bepaald probleem worden bepaald door de *beginvoorwaarden* of door de *randvoorwaarden*, waaraan de oplossing (integraal) bij het beschouwde probleem moet voldoen. Bij differentiaalvergelijkingen van hogere graad kunnen ook oplossingen voorkomen die niet uit de algemene oplossing te vinden zijn door aan de constanten bepaalde waarden te geven. Dergelijke oplossingen noemen we *singuliere oplossingen*.

Naast de hiervoor genoemde „gewone” differentiaalvergelijkingen kennen we ook de z.g. *partiële* differentiaalvergelijkingen. Dit zijn D.V.-en waarbij de onbekende functie een functie is van meer dan één variabele en waarbij dientengevolge partiële afgeleiden voorkomen.

Voorbeeld 6

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Dit is een partiële D.V. van de orde 2.

Een oplossing hiervan wordt bepaald door $f(x, y) = x + y$, maar ook door: $f(x, y) = e^x \cos y + e^y \sin x$.

Voorlopig zullen we onze aandacht richten op de gewone D.V.-en. De partiële D.V.-en komen later aan de orde.

2 Het optreden van differentiaalvergelijkingen

Zoals opgemerkt, komen differentiaalvergelijkingen veelvuldig voor bij fysische problemen. De gang van zaken is daarbij als volgt. We gaan uit van de fysische realiteit, waarbij we zo nodig een aantal vereenvoudigingen aanbrengen. Daarna maken we een mathematisch model in de vorm van een D.V. We lossen deze op en vergelijken de uitkomst met de realiteit.

Vaak is de onbekende functie in de D.V. een functie van de tijd. De oplossing stelt ons dan in staat om een prognose voor de toekomst te maken.

Met nadruk wijzen wij er op dat het slechts zelden voorkomt dat we de oplossing vinden in gesloten vorm, d.w.z. in een „eindige formule” van de gedaante $y = f(x)$.

Dikwijls vinden we de oplossing in de vorm van een machtreeks: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ of is de oplossing alleen numeriek aan te geven in de vorm van een tabel.

We proberen vaak zoveel mogelijk te weten te komen over de oplossing, zonder de D.V. op te lossen, maar door uitsluitend de D.V. te bestuderen.

We geven hier drie voorbeelden van het ontwerpen van een mathematisch model, uitgaande van de fysische werkelijkheid.

Voorbeeld 1

De trillende veer

We beschouwen een verticaal opgehangen spiraalveer die in onbelaste toestand de lengte l heeft. Aan de veer hangen we een voorwerp met massa m , waardoor de veer een uitrekking d krijgt. Wanneer we de veer in verticale trilling brengen, krijgt het voorwerp een uitwijking $y(t)$ die van de tijd t afhangt (zie fig. 1).

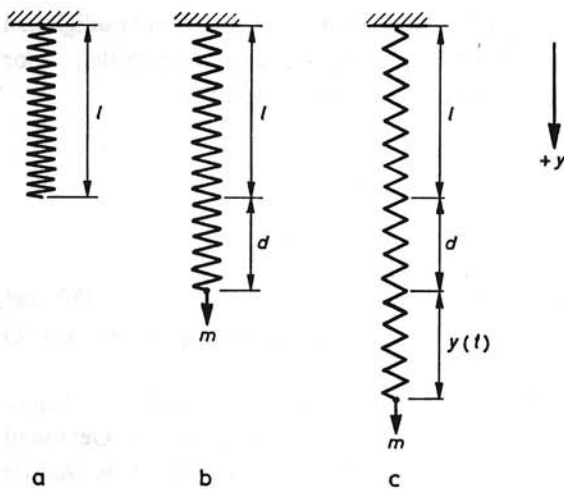


Fig. 1

We gaan uit van de wet van Hooke,* die zegt dat, zolang de grens van de veerkracht niet is overschreden, de uitrekking evenredig is met de uittrekkende kracht. Noemen we de evenredigheidsconstante ρ en de versnelling van de zwaartekracht g , dan geldt in de situatie b van fig. 1 (veer belast, maar in rust):

$$mg - \rho d = 0 \quad (2.1)$$

Wanneer de veer trilt (toestand c), dan geldt volgens de wet van Newton ($F = m \cdot a$):

$$mg - \rho(d + y(t)) = m\ddot{y}(t) \quad (2.2)$$

Uit (2.1) en (2.2) volgt dat y voldoet aan de D.V.:

$$m\ddot{y} + \rho y = 0$$

De algemene oplossing hiervan luidt:

$$y(t) = A \sin\left(t \sqrt{\frac{\rho}{m}}\right) + B \cos\left(t \sqrt{\frac{\rho}{m}}\right)$$

Hierin zijn A en B constanten die bepaald worden door de beginsituatie, d.w.z. door de uitwijking en de snelheid ten tijde $t = 0$, dus door $y(0)$ en $\dot{y}(0)$. Stellen we deze voor door y_0 en \dot{y}_0 , dan blijkt dat $y_0 = B$ en $\dot{y}_0 = A \sqrt{\frac{\rho}{m}}$, zodat de beweging van de veer beschreven wordt door de formule:

$$y(t) = \dot{y}_0 \sqrt{\frac{m}{\rho}} \sin\left(t \sqrt{\frac{\rho}{m}}\right) + y_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{\rho}{m}}\right) \quad (2.3)$$

* R. Hooke, 1635-1703.

Uit het resultaat blijkt duidelijk dat we in feite ontoelaatbare vereenvoudigingen hebben aangebracht: volgens (2.3) zou de veer tot in eeuwigheid blijven trillen. Voor niet al te lange tijd t blijkt (2.3) redelijk de beweging voor te stellen.

Voorbeeld 2

De vlakke mathematische slinger

Hierbij is een punt P met massa m bevestigd aan een gewichtsloze staaf OP met lengte l die alleen onder invloed van de zwaartekracht zonder wrijving om het punt O beweegt in een verticaal vlak (zie fig. 2).

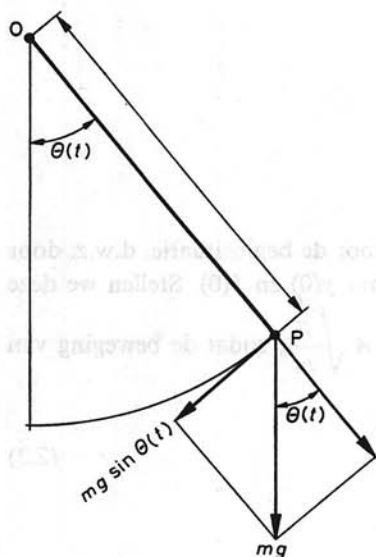
We geven de staaf een beginuitwijking uit de verticale stand (en eventueel een beginsnelheid). We laten de staaf daarna een slingerende beweging uitvoeren. Gevraagd wordt hoe de uitwijkhoek afhangt van de tijd. Als deze hoek ten tijde t de waarde $\theta(t)$ heeft, dan zal in de getekende stand de tangentiële component van de versnelling $l\ddot{\theta}(t)$ bedragen. De tangentiële component van de terugdrijvende kracht bedraagt $mg \sin \theta(t)$ en is tegengesteld gericht. We vinden dus:

$$-mg \sin \theta(t) = ml\ddot{\theta}(t)$$

We kunnen voor θ de volgende D.V. schrijven:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.4)$$

Fig. 2



Dit is een niet-lineaire D.V. (wegens $\sin \theta$). Voor kleine uitwijkingen geldt echter: $\sin \theta \approx \theta$, zodat we voor *kleine* uitwijkingen eenzelfde soort D.V. vinden als in het eerste voorbeeld, nl.:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Het oplossen van (2.4) is veel moeilijker. We stuiten hierbij op bepaalde niet-elementaire functies, de z.g. elliptische functies.

De beide gegeven voorbeelden waren van kinematische aard.

Ook bij statische problemen kunnen we op een D.V. stuiten, zoals we in het volgende voorbeeld zullen zien.

Voorbeeld 3

De kettinglijn

We vragen naar de stand van een volkomen buigzaam, onrekbaar koord dat aan twee punten A en B is opgehangen (zie fig. 3) en dat alleen de invloed van het eigen gewicht ondervindt. Wanneer we de vorm van het koord beschrijven met behulp van de x - resp. de y -coördinaat van elk punt daarvan, dan blijkt te gelden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.5)$$

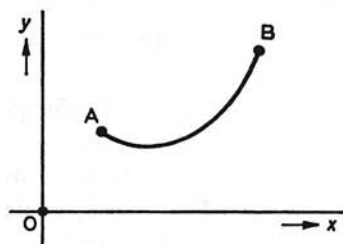
waarbij k een constante is die afhangt van de lengte en het gewicht van het koord en van de ligging van de punten A en B (randvoorwaarden).

Aan (2.5) wordt voldaan door:

$$y = k \cosh \frac{x}{k}$$

die de vergelijking van de *kettinglijn* of *catenaria* wordt genoemd.

Fig. 3



3 De differentiaalvergelijking van de eerste orde

Een eenvoudig voorbeeld van een D.V. van de eerste orde is

$$y' = \frac{y}{a} \quad (a \neq 0)$$

die voor $y \neq 0$ ook is te schrijven als:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{a}$$

of als:

$$\frac{d \ln |y|}{dx} = \frac{1}{a}$$

Door integratie volgt:

$$\ln |y| = \frac{x}{a} + C$$

waarin C een willekeurige constante is.

Hieruit volgt:

$$|y| = e^{\frac{x}{a} + C}$$

dus:

$$|y| = C_1 e^{\frac{x}{a}}$$

waarin C_1 een positieve constante is, maar overigens willekeurig. Dit betekent echter dat:

$$y = Ke^{\frac{x}{a}} \tag{3.1}$$

waarin K een willekeurige constante $\neq 0$ is.

Bij de gevolgde oplossingsmethode hebben we het geval $y = 0$ uitgesloten. Directe substitutie laat echter zien dat $y = 0$ ook voldoet, zodat (3.1) de algemene oplossing is van de D.V. met K als een willekeurige constante die alle reële waarden kan aannemen.

De verzameling grafieken van alle oplossingen is een stelsel krommen die afhankelijk zijn van één parameter K . Dit geldt algemeen bij een D.V. van de eerste orde.

Is omgekeerd een stelsel krommen gegeven, afhankelijk van één parameter, dan vinden we door differentiatie en door eliminatie van de parameter een D.V. van de eerste orde, de z.g. D.V. van het stelsel met de gegeven krommen als oplossingskrommen.

Voorbeeld

Gegeven is het stelsel krommen voorgesteld door:

$$y = C e^x + x \quad (3.2)$$

Gevraagd wordt de D.V. van dit stelsel.

Oplossing:

Uit (3.2) volgt door differentiëren naar x :

$$y' = C e^x + 1 \quad (3.3)$$

Door elimineren van de parameter C , hetgeen hier eenvoudig gaat door (3.2) van (3.3) af te trekken, volgt:

$$y' - y = 1 - x$$

of:

$$y' = 1 - x + y$$

als D.V. van het stelsel. We zien dat $y = x$ een particuliere oplossing van deze D.V. is. Later zullen we zien dat (3.2) de algemene oplossing van de D.V. is, met willekeurige constante C .

Opmerking:

Hier en ook verderop in het boek zullen we vaak zeggen: „ $y = f(x)$ is een oplossing” i.p.v. de formeel correcte uitdrukking: „ $f: x \mapsto f(x)$ is een oplossing”.

Is algemeen gegeven het stelsel krommen bepaald door:

$$f(x, y, C) = 0 \quad (3.4)$$

dan volgt door impliciet differentiëren (indien mogelijk):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \quad (3.5)$$

Door de parameter C uit (3.4) en (3.5) te elimineren volgt de D.V. van de eerste orde:

$$F(x, y, y') = 0$$

4 Meetkundige betekenis van de D.V. van de eerste orde. Lijnelementenveld. Isoklinen

Voorlopig beperken we ons tot differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en wel die waarbij y' expliciet is uitgedrukt in x en y , dus D.V.-en van de gedaante:

$$y' = F(x, y) \quad (4.1)$$

Hierbij denken we ons F gedefinieerd op een deelgebied G van (eventueel op het gehele) platte vlak.

In par. 5 zullen we nagaan onder welke voorwaarden deze D.V. een oplossing heeft. Hier zullen wij ons bezighouden met enkele meetkundige aspecten.

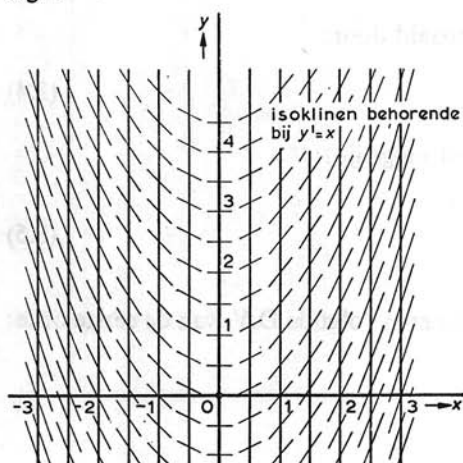
Stel dat (x_0, y_0) een punt is in G en f een oplossing van de D.V. waarvoor geldt: $y_0 = f(x_0)$. Door (4.1) is dan $f'(x_0)$ bepaald. Meetkundig betekent dit dat van een oplossingskromme die door $P(x_0, y_0)$ gaat de richtingscoëfficiënt in P bepaald is door de D.V. Wanneer we een punt met de raaklijn aan de oplossingskromme in dat punt een *lijnelement* noemen, dan kunnen we zeggen dat door de D.V. voor het definitiegebied G van F een verzameling lijnelementen is gegeven. Deze verzameling noemen we een *lijnelementenveld* of *richtingsveld*. Het oplossen van de D.V. komt meetkundig neer op het bepalen van alle krommen die „aan de lijnelementen raken”, d.w.z. wanneer deze door een punt $P(x_0, y_0)$ gaan juist raken aan de lijn door P die door het richtingsveld aan P is toegevoegd. We geven hiervan enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$$y' = x$$

De waarde van y' wordt bij deze D.V. uitsluitend door de waarde van x bepaald.

Fig. 4



Voor ieder punt van de rechte $x = C$ is dus $y' = C$, d.w.z. in ieder punt van een rechte evenwijdig aan de y -as hebben de lijnelementen dezelfde richting.

In fig. 4 is het lijnelementenveld weergegeven door aan C diverse waarden te geven. We kunnen de oplossing van de D.V. grafisch benaderen, door uitgaande van een bepaald punt met kleine stapjes in de richting van de lijnelementen verder te gaan. Het vermoeden ligt in dat geval voor de hand dat de algemene oplossingskrommen parabolen zullen zijn. Dat dit zo is, volgt door een eenvoudige integratie. Uit $y' = x$ volgt nl.: $y = \frac{1}{2}x^2 + A$.

Om de lijnelementen systematisch te ordenen, kunnen we de punten bepalen waarvoor y' een voorgeschreven waarde C heeft. Bij de algemene D.V.: $y' = F(x, y)$ zijn dat de punten van de kromme met vergelijking: $F(x, y) = C$. In ieder punt van deze kromme: $F(x, y) = C$ heeft dus de raaklijn aan de door dit punt gaande integraalkromme dezelfde helling, vandaar dat de krommen waarop $F(x, y) = C$, *isoklinen* genoemd worden. Bij het voorbeeld $y' = x$ zijn de isoklinen de rechten $x = C$.

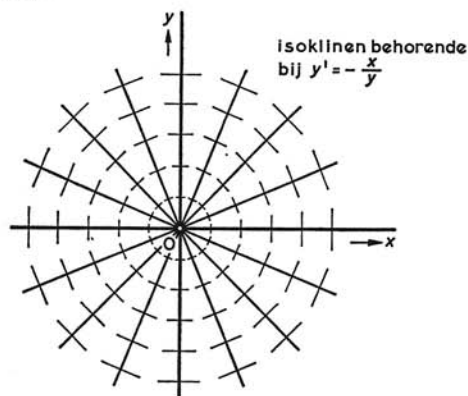
Voorbeeld 2

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Het rechterlid is slechts gedefinieerd als $y \neq 0$. Voor de isoklinen geldt: $-\frac{x}{y} = C$ of $y = -\frac{x}{C}$. D.w.z. het zijn rechten door O, waarvan O zelf is uitgezonderd (zie fig. 5).

Omdat de richting van de raaklijn in een punt aan de integraalkromme bepaald wordt door $\tan \alpha = C$, staat de integraalkromme in dit punt loodrecht op de betreffende rechte ($mm' = -1$). Het vermoeden is gewettigd dat de integraalkrommen concentrische cirkels zijn met O tot middelpunt. Dat dit zo is, blijkt als volgt.

Fig. 5



Uit $y' = -x/y$, volgt: $2y'y = -2x$, of $\frac{d(y^2)}{dx} = -2x$, met als oplossing:

$$y^2 = -x^2 + A$$

of:

$$x^2 + y^2 = A$$

Voorbeeld 3

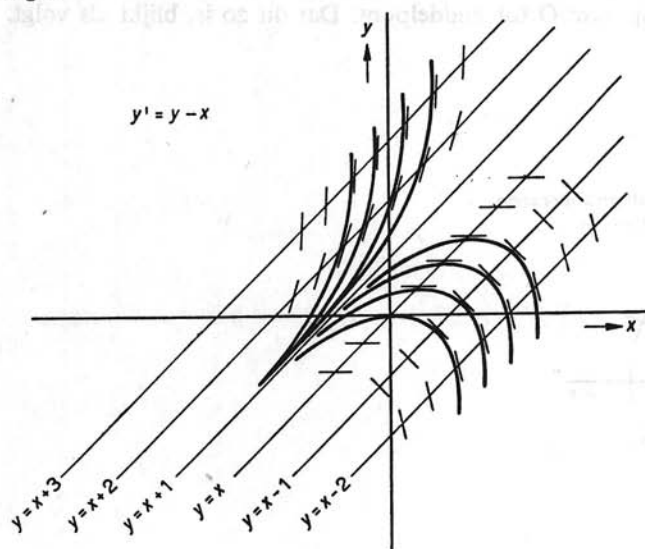
$$y' = y - x$$

Ook in dit voorbeeld kunnen we veel over de oplossingen te weten komen zonder de D.V. op te lossen. De isoklinen hebben tot vergelijking: $y = x + C$. Het zijn onderling evenwijdige lijnen die een hoek van $\frac{1}{4}\pi$ radiaal met de positieve x -as maken (zie fig. 6). We merken op dat de isokline waarop geldt $y' = 1$ juist de lijn $y = x + 1$ is. Deze heeft ook de richtingscoëfficiënt 1, m.a.w. deze lijn is een aaneenschakeling van lijnelementen en is dus zelf oplossingskromme. Het is eenvoudig in te zien dat $y = x + 1$ voldoet aan de D.V. Later zullen we zien dat de algemene oplossing van de D.V. is:

$$y = 1 + x + Ce^x$$

Hiervoor geldt: $y' = 1 + Ce^x$. Daaruit blijkt dat er oplossingskrommen zijn zonder hoogste punt, nl. die met $C \geq 0$ en oplossingskrommen met hoogste punt, nl. die met $C < 0$. Dit is in overeenstemming met wat we schetsenderwijs in fig. 6 vonden.

Fig. 6



Voorbeeld 4

$$y' = \frac{x}{x+2y} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Uit de D.V. volgt onmiddellijk dat de oplossingskrommen een horizontale raaklijn hebben in hun snijpunt met de lijn: $x = 0$ en een verticale raaklijn in hun snijpunt met de lijn: $x + 2y = 0$. Verder volgt uit het tekenverloop van $\frac{x}{x+2y}$ dat de oplossingskrommen stijgend zijn in het gebied:

$$\{(x, y) | x > 0; x + 2y > 0\} \cup \{(x, y) | x < 0; x + 2y < 0\}$$

en dalend in het gebied:

$$\{(x, y) | x > 0; x + 2y < 0\} \cup \{(x, y) | x < 0; x + 2y > 0\}$$

(zie fig. 7).

De isoklinen hebben tot vergelijking: $\frac{x}{x+2y} = C$, dus $(1-C)x - 2Cy = 0$

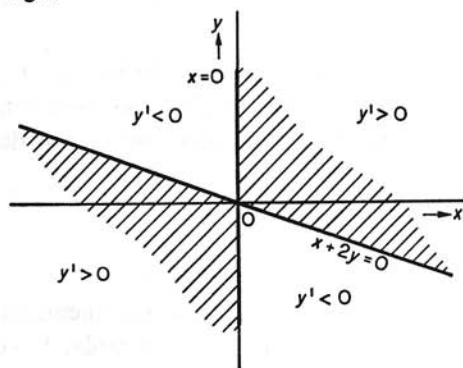
($x + 2y = 0$ correspondeert met $C = \infty$). De richtingscoëfficiënt van een isokline is $\frac{1-C}{2C}$, waaruit volgt dat een isokline oplossingskromme is als $\frac{1-C}{2C} = C$,

d.w.z. $2C^2 + C - 1 = 0$, dus $C = \frac{1}{2}$ en $C = -1$. De isoklinen: $y = \frac{1}{2}x$ en $y = -x$ zijn dus tevens oplossingskrommen. In fig. 8 zijn aan de hand van enkele isoklinen enige oplossingskrommen geschetst.

Bij de hiervoor gegeven voorbeelden gaat in het algemeen door ieder punt van het beschouwde gebied één en slechts één integraalkromme, omdat y' voor een gegeven punt eenduidig is bepaald. Dit is niet het geval, wanneer in een bepaald punt (x_0, y_0) de afgeleide meer dan één waarde heeft, of zelfs geheel onbepaald is.

Het kan inderdaad voorkomen dat in ieder punt van het gebied waarvoor de D.V. zin heeft, de afgeleide y' meer dan één waarde heeft. Dit laatste is slechts het geval, indien de D.V. van hogere graad is. We geven hiervan een voorbeeld.

Fig. 7



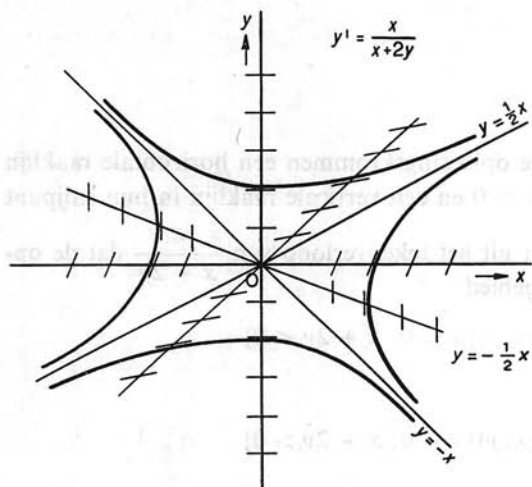


Fig. 8

Voorbeeld 5

$$(y')^2 - xy' + y = 0$$

Vat men deze D.V. op als vierkantsvergelijking in y' , dan volgt:

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

waaruit blijkt dat de D.V. slechts een oplossing heeft als $x^2 - 4y \geq 0$ is, d.w.z. $y \leq \frac{1}{4}x^2$ is. Dit is het vlakdeel „beneden” de parabool: $y = \frac{1}{4}x^2$, de parabool als grens inbegrepen. In het gebied $\{(x, y) | y < \frac{1}{4}x^2\}$ vinden we in ieder punt (x_0, y_0) twee waarden van y' .

De isoklinen van de gegeven D.V. zijn de rechten:

$$C^2 - xC + y = 0$$

anders geschreven als:

$$y = Cx - C^2$$

Dit stelsel rechten is in fig. 9 aangegeven. De richtingscoëfficiënt van zo'n rechte is C ; de rechte valt dus samen met de raaklijn aan de integraalkromme door een punt van de rechte. Dit betekent dat de isoklinen tevens oplossingskrommen zijn en dat de algemene oplossing van de gegeven D.V. luidt:

$$y = Cx - C^2$$

(zie ook par. 1, vb. 3).

De lijnen van dit stelsel raken aan de parabool: $y = \frac{1}{4}x^2$. Fig. 9 maakt aannemelijk dat ook deze parabool een integraalkromme is hetgeen bij substitutie inderdaad het

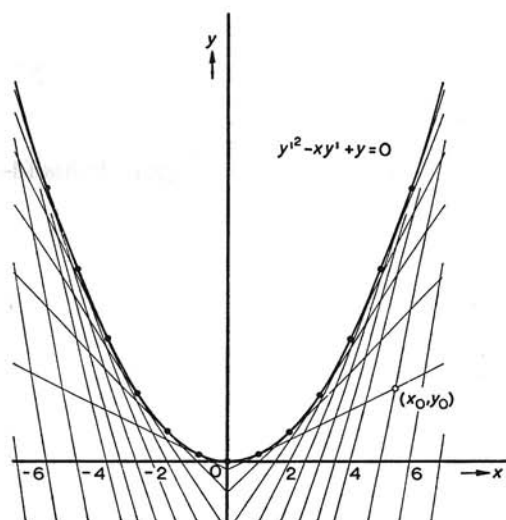


Fig. 9

geval blijkt te zijn. Gaan we bij het grafisch oplossen uit van een punt van de parabool, dan kunnen we de kromme zelf volgen of de raaklijn, eventueel een deel van de kromme volgen en verder op de raaklijn overgaan. Alle krommen op deze wijze verkregen, zijn integraalkrommen. Ze kunnen echter niet verkregen worden door in de algemene oplossing aan C bepaalde waarden te geven; het zijn dus singuliere oplossingen. In het bijzonder is de functie, bepaald door: $y = \frac{1}{2}x^2$, een singuliere oplossing van de gegeven D.V.

In het navolgende zullen we enkele typen van differentiaalvergelijkingen systematisch oplossen.

5 Existentiebewijs voor de oplossing van $y' = F(x, y)$

5.1 Gelijkwaardigheid van het beginvoorwaarde-probleem met een integraalvergelijking

Stel dat gegeven is de D.V.: $y' = F(x, y)$ en gevraagd wordt een functie φ te bepalen, zodanig dat deze voor alle x die tot een zeker interval I behoren, voldoet aan de D.V., maar ook aan een zekere beginvoorwaarde voldoet. M.a.w. we vragen φ met:

$$\left. \begin{array}{l} a \quad \varphi'(x) = F\{x, \varphi(x)\} \quad \forall x \in I \\ b \quad \varphi(a) = b \quad a \in I, b \text{ willekeurig} \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

We zullen aantonen dat dit z.g. beginvoorwaarde-probleem equivalent is met de volgende *integraalvergelijking*, waarbij wordt gevraagd een functie φ te bepalen,

zodat:

$$\varphi(x) = b + \int_a^x F\{t, \varphi(t)\} dt \quad (5.2)$$

We kunnen dit als volgt inzien.

Voldoet φ aan (5.2), dan gelden $\varphi(a) = b$ en $\varphi'(x) = F\{x, \varphi(x)\}$ volgens de hoofdstelling van de integraalrekening.

Voldoet φ aan (5.1), dan geldt:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(a) &= \int_a^x \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^x F\{t, \varphi(t)\} dt \end{aligned}$$

Dus geldt:

$$\varphi(x) = b + \int_a^x F\{t, \varphi(t)\} dt$$

Voorbeeld 1

$$\left. \begin{array}{l} y' = y \\ \varphi(0) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt$$

Voorbeeld 2

$$\left. \begin{array}{l} y' = y - x \\ \varphi(0) = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \varphi(x) = 2 + \int_0^x \{\varphi(t) - t\} dt$$

Voorbeeld 3

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2x(y + 1) \\ \varphi(0) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \varphi(x) = \int_0^x 2t\{\varphi(t) + 1\} dt$$

Het voordeel van (5.2) is, dat het probleem kan worden opgelost door *successieve benaderingen*. We laten dit zien aan de hand van voorbeeld 1.

De integraalvergelijking luidt in dit geval:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt \quad (5.3)$$

We kiezen een functie φ_0 die in ieder geval aan de beginvoorwaarde voldoet, b.v. φ_0 met $\varphi_0(x) = 1$, geldend $\forall x$. Met behulp van (5.3) construeren we, uitgaande van φ_0 , de functie φ_1 , gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 + \int_0^x \varphi_0(t) dt \\ &= 1 + \int_0^x 1 dt \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

De volgende stap levert φ_2 als volgt:

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= 1 + \int_0^x \varphi_1(t) dt \\ &= 1 + \int_0^x (1+t) dt \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Algemeen bepalen we φ_n uit:

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^x \varphi_{n-1}(t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4)$$

We vinden dan:

$$\varphi_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Zo ontstaat een rij functies φ_n , die *geen van alle aan de integraalvergelijking voldoen* (vergelijk (5.4) met (5.3)).

Maar we hopen dat

- a iedere stap een nieuwe functie φ_n oplevert;
- b de rij $\varphi_n(x)$ convergeert, dus dat er een $\varphi(x)$ bestaat, zodanig dat

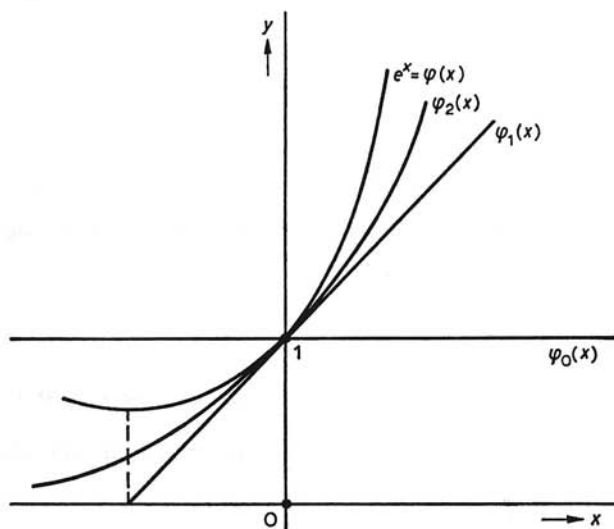
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

- c deze φ wel aan de integraalvergelijking (5.3) voldoet;
- d φ de enige functie is, die voldoet aan (5.3).

In dit voorbeeld geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = e^x$. Hiervoor geldt inderdaad: $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(x) = \varphi(x)$.

In fig. 10 is een en ander meetkundig toegelicht.

Fig. 10



In het vorenstaande zijn we niet ingegaan op de voorwaarden waaronder de toegepaste operaties zijn toegestaan. Deze voorwaarden zullen we nu gaan onderzoeken. Het zal blijken dat we aan de hand van de hiervoor geschetste methode het bewijs kunnen leveren van het bestaan van een oplossing van de D.V.: $y' = F(x, y)$. We noemen zo'n bewijs een *existentiebewijs*. Daar het hier gaat om een bewijs dat tevens een oplossing construeert, spreken we in zo'n geval van een *constructief existentiebewijs*.

5.2 Het existentiebewijs voor de oplossing van: $y' = F(x, y)$

We bewijzen de volgende stelling.

Existentiestelling

Stel dat F continu is in een gebied G van het x, y -vlak en stel dat F begrensd is in G ; d.w.z. er bestaat een positieve constante M , zó dat in G geldt:

$$|F(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in G$$

Stel verder dat F in G voldoet aan de voorwaarde van Lipschitz* in y ; d.w.z. er bestaat een positieve constante N , zodanig dat voor twee willekeurige punten (x, y_1) en (x, y_2) van G geldt:

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$$

Er bestaat dan bij elk punt $P(x_0, y_0) \in G$ één en slechts één functie φ , gedefinieerd op een zeker interval

$$I = \{x \mid |x - x_0| < h\}$$

zodanig dat:

- a φ differentieerbaar is op I ;
- b de punten $\{x, \varphi(x)\}$ in G liggen voor alle $x \in I$;
- c φ voldoet aan de D.V., dus:

$$\varphi'(x) = F\{x, \varphi(x)\} \quad \forall x \in I;$$

- d φ aan de beginvoorwaarde $\varphi(x_0) = y_0$ voldoet.

Meetkundig betekenen c en d , dat er door elk punt van G een oplossingskromme gaat in de door de D.V. aangegeven richting.

Opmerking:

De voorwaarde van Lipschitz zegt in feite dat het differentiequotient van F naar y , d.w.z. $\frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2}$ (met $y_1 \neq y_2$) uniform begrensd is in G . Immers als

* R. Lipschitz, 1832-1903.

$y_1 \neq y_2$, dan geldt volgens de voorwaarde van Lipschitz:

$$\left| \frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq N$$

waarbij N niet van x afhangt.

Aan deze voorwaarde is zeker voldaan indien $|F_y(x, y)|$ bestaat en begrensd is op G . Volgens de middelwaardstelling is dan:

$$F(x, y_1) - F(x, y_2) = (y_1 - y_2)F_y(x, \eta) \quad (\text{met } y_1 < \eta < y_2)$$

De voorwaarde van Lipschitz is echter minder eisend, omdat we daarbij niet verlangen dat F_y in elk punt van G bestaat.

Bewijs van de existentiëlestelling:

Voor het bewijs gaan we uit van de hiervoor aangetoonde gelijkwaardigheid van de eisen:

$$\varphi'(x) = F\{x, \varphi(x)\} \text{ en } \varphi(x_0) = y_0$$

met de integraalvergelijking:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F\{t, \varphi(t)\} dt$$

We construeren de rij van de approximerende functies $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ als volgt:

$$\varphi_0(x) = y_0$$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F\{t, \varphi_0(t)\} dt$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F\{t, \varphi_1(t)\} dt$$

.....

.....

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F\{t, \varphi_{n-1}(t)\} dt$$

.....

We zullen bewijzen dat, als $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ de gevraagde oplossing bepaalt.

N.B. De hier ingevoerde integralen bestaan inderdaad, want φ_0 is als functie met constante waarde continu. Volgens de hoofdstelling van de integraalrekening volgt dan uit de continuïteit van F dat φ_1 continu is, en zo ook de continuïteit van de volgende functies $\varphi_2, \varphi_3, \dots$

We bepalen nu een rechthoek R met middelpunt $P(x_0, y_0)$ en zijden evenwijdig aan de coördinaatassen, geheel binnen G gelegen (zie fig. 11).

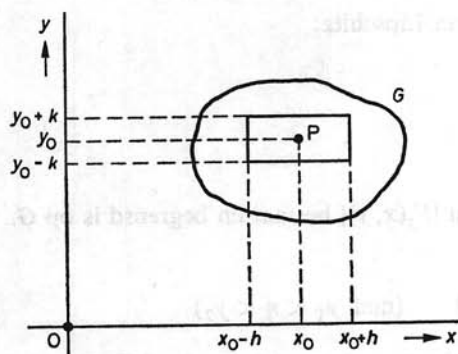


Fig. 11

Als $R = \{(x, y) \mid |x - x_0| < h; |y - y_0| < k\}$, dan zullen we aan h en k nog nadere eisen moeten stellen voor het bewijs. In de eerste plaats een eis voor de verhouding van h en k , nl. $Mh < k$, waardoor de grafieken van $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ alle binnen R verlopen. In de tweede plaats de eis $Nh < 1$, waardoor de eenduidigheid van de oplossing wordt gegarandeerd, zoals straks zal blijken.

We tonen eerst aan dat de constructie van de rij: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ onder de gestelde voorwaarden gelukt. We vinden:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &= |\varphi_1(x) - y_0| \\ &= \left| \int_{x_0}^x F\{t, \varphi_0(t)\} dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |F\{t, \varphi_0(t)\}| dt \\ &\leq M|x - x_0| < Mh < k \end{aligned}$$

De grafiek van φ_1 verloopt dus geheel binnen R als we aan x de beperking opleggen: $|x - x_0| < h$.

Op analoge wijze kunnen we aantonen: $|\varphi_2(x) - y_0| < k$, als $|x - x_0| < h$. In het algemeen: $|\varphi_n(x) - y_0| < k$, als we weten dat $|\varphi_{n-1}(x) - y_0| < k$ (en uiteraard $|x - x_0| < h$).

We zullen nu bewijzen dat de rij van de functies $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ convergeert als $n \rightarrow \infty$. Daartoe tonen we aan:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \quad (|x - x_0| < h) \quad (5.5)$$

Dit doen we met behulp van volledige inductie.

Voor $n = 1$ is het gestelde hierboven al bewezen.

Stel dat de bewering juist is voor een zeker natuurlijk getal p , dus:

$$|\varphi_p(x) - \varphi_{p-1}(x)| \leq \frac{MN^{p-1}}{p!} |x - x_0|^p \quad (5.6)$$

dan volgt de juistheid voor $p + 1$ aldus:

$$\begin{aligned} |\varphi_{p+1}(x) - \varphi_p(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [F\{t, \varphi_p(t)\} - F\{t, \varphi_{p-1}(t)\}] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |F\{t, \varphi_p(t)\} - F\{t, \varphi_{p-1}(t)\}| dt \\ &\leq N \int_{x_0}^x |\varphi_p(t) - \varphi_{p-1}(t)| dt \end{aligned}$$

op grond van de voorwaarde van Lipschitz. Volgens de inductieveronderstelling (5.6) geldt:

$$|\varphi_{p+1}(x) - \varphi_p(x)| \leq N \left| \int_{x_0}^x \frac{MN^{p-1}}{p!} |t - x_0|^p dt \right| = \frac{MN^p |x - x_0|^{p+1}}{(p+1)!}$$

waarmede de bewering (5.5) voor $p + 1$ bewezen is.

Dit betekent dat de termen van de reeks:

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)\} \quad (5.7)$$

gemajoreerd worden door de termen van de reeks:

$$y_0 + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^{n-1} |x - x_0|^n}{n!} \quad (5.8)$$

De termen hiervan worden, indien $|x - x_0| < h$, gemajoreerd door die van de convergente reeks met constante positieve termen:

$$y_0 + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^{n-1} h^n}{n!}$$

Volgens het criterium van Weierstrasz (zie deel 1, par. 114) convergeert de reeks (5.8) en dus ook (5.7) absoluut en uniform in het interval $\{x \mid |x - x_0| < h\}$. Noemen we de som van de reeks in (5.7) $\varphi(x)$, dan geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)\} = \varphi(x) \quad (\text{voor } |x - x_0| < h)$$

De functie φ is als somfunctie van een uniform convergente reeks van continue functies $(\varphi_n - \varphi_{n-1})$ zelf ook continu in alle $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ (zie deel 1, par. 113). Derhalve is ook de functie $x \mapsto F\{x, \varphi(x)\}$ continu en bestaat

$$\int_{x_0}^x F\{t, \varphi(t)\} dt \text{ op } \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$$

Daar $\varphi_n(x)$ uniform nadert tot $\varphi(x)$ en volgens de voorwaarde van Lipschitz geldt:

$$|F\{x, \varphi(x)\} - F\{x, \varphi_n(x)\}| \leq N |\varphi(x) - \varphi_n(x)|$$

nadert ook $F\{x, \varphi_n(x)\}$ uniform tot $F\{x, \varphi(x)\}$ op $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$. We laten nu in de definitie van $\varphi_n(x)$, nl.

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F\{t, \varphi_{n-1}(t)\} dt$$

de index n naderen tot ∞ . Er ontstaat dan:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x F\{t, \varphi_{n-1}(t)\} dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} F\{t, \varphi_{n-1}(t)\} dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x F\{t, \varphi(t)\} dt\end{aligned}$$

(Ga zelf na dat de verwisseling van integratie en limietovergang geoorloofd is op grond van het feit dat $F\{x, \varphi_n(x)\}$ uniform nadert tot $F\{x, \varphi(x)\}$.)

Het is dan direct duidelijk dat $\varphi(x_0) = y_0$ en dat φ differentieerbaar is. Differentiatie geeft:

$$\varphi'(x) = F\{x, \varphi(x)\}$$

zodat φ aan de in de stelling genoemde eigenschappen voldoet.

We moeten tenslotte nog bewijzen dat φ de enige oplossing is op $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ die aan de D.V. en aan de beginvoorwaarde $y_0 = \varphi(x_0)$ voldoet.

Stel dat ook ψ op $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ zou voldoen, d.w.z.

$$\left. \begin{aligned}\psi(x_0) &= y_0 \\ \psi'(x) &= F\{x, \psi(x)\}\end{aligned}\right\}$$

dan zou gelden:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F\{t, \psi(t)\} dt$$

en dus:

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x) - \psi(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [F\{t, \varphi_{n-1}(t)\} - F\{t, \psi(t)\}] dt \right| \\ &\leq N \left| \int_{x_0}^x |\varphi_{n-1}(t) - \psi(t)| dt \right|\end{aligned}$$

Noemen we U_n het supremum van $|\varphi_n(x) - \psi(x)|$ bij vaste n en $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$, dan geldt op het genoemde interval:

$$U_n \leq NhU_{n-1}$$

zodat:

$$U_1 \leq NhU_0; U_2 \leq NhU_1 \leq (Nh)^2 U_0$$

In het algemeen:

$$U_n \leq (Nh)^n U_0 \tag{5.9}$$

We hadden evenwel h zo klein gekozen dat $Nh < 1$. Uit (5.9) volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

en dus ook:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \psi(x)$$

d.w.z.

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$$

Opmerking:

Dit existentiebewijs is een „lokaal” bewijs, d.w.z. er is bewezen dat onder de gegeven voorwaarden een oplossing φ bestaat die eenduidig bepaald is in een zekere omgeving $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ van het punt P (x_0, y_0) .

6 Overzicht van elementaire methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

In de volgende paragrafen zullen we een aantal gevallen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde behandelen, die met elementaire „standaardmethoden” oplosbaar zijn. Het betreft de volgende gevallen:

- a D.V. met gescheiden veranderlijken;
- b D.V., waarin de veranderlijken te scheiden zijn,
 - 1 hetzij door een handige substitutie,
 - 2 hetzij doordat de D.V. homogeen is (valt ook onder b1);
- c de exacte D.V.;
- d de lineaire D.V.;
- e de D.V. van Bernoulli.

Met nadruk wijzen wij er op dat de meeste in de praktijk voorkomende gevallen gecompliceerder zijn en niet tot deze vijf gevallen behoren. Vaak trachten we dan door hetzij het fysisch model, hetzij de D.V. te vereenvoudigen (door minder invloedrijke termen weg te laten), tot één van de vijf genoemde gevallen te geraken. Vooral reductie tot de lineaire D.V. verdient de voorkeur. Verder merken we op dat het in de gevallen a, b en c gaat om de – zeldzame – situaties, waarin een *niet-lineaire* D.V. op elementaire wijze kan worden opgelost zonder benaderingen.

Dikwijls wordt een D.V. van de eerste orde niet geschreven in de gedaante:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

maar in de differentiaalvorm:

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$$

Bij deze laatste schrijfwijze is bedoeld dat de oplossing van twee D.V.-en wordt verlangd, nl. één waarin gevraagd wordt y als functie van x te bepalen, dus:

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

en één waarin gevraagd wordt x als functie van y te bepalen, dus:

$$A(x, y) \frac{dx}{dy} + B(x, y) = 0$$

a. Scheiding van de variabelen

Stel dat gegeven is de D.V.:

$$y' = F(x, y)$$

waarbij $F(x, y)$ het produkt is van een factor die alleen van x afhangt en een factor die alleen van y afhangt, dus:

$$y' = p(x) \cdot q(y)$$

In dit geval zeggen we dat de variabelen te scheiden zijn, omdat we (indien $q(y) \neq 0$) de D.V. kunnen schrijven in de gedaante:

$$r(y)y' = p(x) \quad \left(\text{met } r(y) = \frac{1}{q(y)} \right)$$

Voorbeelden hiervan zijn:

$$y' = x^2 y^3; \quad y' = x \sin y; \quad y' = \frac{\ln x}{y^2 + 1},$$

maar b.v. *niet*: $y' = \sin xy$.

Deze D.V.-en kunnen we oplossen door eenvoudige integratie. We vinden daarbij een betrekking van de gedaante:

$$H(x, y) = C$$

die bij variërende C alle oplossingen van de D.V. impliciet bevat. De keuze van C voor een zeker probleem wordt bepaald door de beginvoorwaarde.

Om dit in te zien veronderstellen we dat door $y = f(x)$ een oplossing is bepaald, waarbij we aannemen dat f gedefinieerd is op een open interval I en daar een continue eerste afgeleide heeft.

Voor deze oplossing geldt dan:

$$r(y) \cdot f'(x) = p(x) \quad (6.1)$$

Als R een primitieve is van r en P een primitieve van p , dan is (6.1) gelijkwaardig met:

$$R\{f(x)\} \cdot f'(x) = P'(x)$$

of:

$$(R \circ f)'(x) = P'(x)$$

dus:

$$R \circ f = P + C$$

waarin C een willekeurige constante voorstelt.

We hebben dus:

$$R\{f(x)\} = P(x) + C \quad (6.2)$$

of:

$$R(y) = P(x) + C \quad (6.3)$$

Hierbij is verondersteld dat de optredende primitieven inderdaad bestaan. Elke oplossing f met continue f' voldoet aan (6.3). Omgekeerd is het duidelijk dat elke differentieerbare functie f die aan (6.3) voldoet, een oplossing is van de D.V., hetgeen door differentiatie van (6.2) blijkt.

Meetkundig betekent dit dat (6.3), of anders geschreven:

$$\int r(y)dy = \int p(x)dx + C$$

de vergelijking is van een integraalkromme. Elke oplossingskromme ligt op zo'n integraalkromme.

Voorbeeld 1

Los op de D.V.:

$$x(y^2 - 1) - y(x^2 - 1)y' = 0 \quad (6.4)$$

Oplossing:

We veronderstellen eerst: $y \neq \pm 1$ en $x \neq \pm 1$; dan gaat (6.4) over in:

$$\frac{y}{y^2 - 1} y' = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Door integratie volgt:

$$\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C$$

dus:

$$|y^2 - 1| = |x^2 - 1| \cdot e^{2C}$$

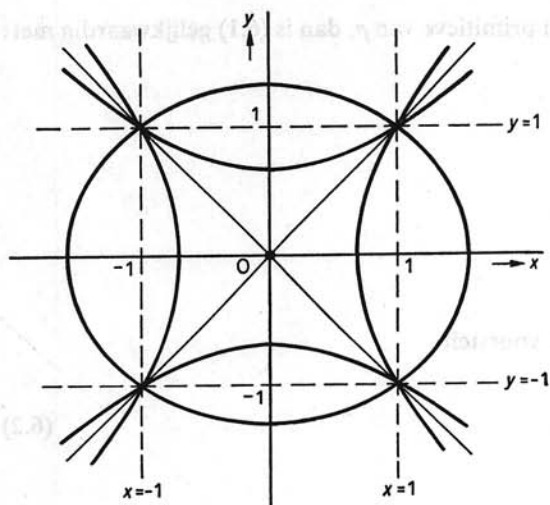


Fig. 12

of:

$$y^2 - 1 = A(x^2 - 1) \quad (A \neq 0) \quad (6.5)$$

Indien we dit schrijven in de gedaante:

$$x^2 - \frac{y^2}{A} = 1 - \frac{1}{A}$$

dan zien we dat de integraalkrommen ellipsen zijn indien $A < 0$ en hyperbolen als $A > 0$, die alle gaan door de punten $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ en $(-1, -1)$ (zie fig. 12). We moeten nog onderzoeken wat er gebeurt als $y = \pm 1$ en als $x = \pm 1$. Bij substitutie blijken $y = 1$ en $y = -1$ aan de D.V. te voldoen. Dit betekent dat (6.5) ook oplossingen definieert als $A = 0$. Uiteraard voldoen $x = 1$ en $x = -1$ niet aan (6.4), daar hierdoor geen functie van x wordt gedefinieerd. Zouden we echter x opvatten als een functie van y , dan zouden $x = 1$ en $x = -1$ voldoen aan:

$$x(y^2 - 1) \frac{dx}{dy} - y(x^2 - 1) = 0$$

hetgeen betekent dat alle oplossingen van

$$x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0$$

vervat zijn in:

$$y^2 - 1 = A(x^2 - 1)$$

indien we A alle waarden laten doorlopen (inclusief „ ∞ ”, d.w.z. $x^2 - 1 = \frac{1}{A}(y^2 - 1)$ (met $\frac{1}{A} = 0$)).

Voorbeeld 2

Los op de D.V.:

$$\sqrt{1-x^2} y' + \sqrt{1-y^2} = 0$$

Oplossing:

Indien $|x| \neq 1$ en tevens $|y| \neq 1$, dan kunnen we de D.V. ook schrijven als:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y' + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Door integratie volgt dan:

$$\arcsin y + \arcsin x = C \quad (6.6)$$

Aangezien $-\frac{1}{2}\pi \leq \arcsin x \leq \frac{1}{2}\pi$ en $-\frac{1}{2}\pi \leq \arcsin y \leq \frac{1}{2}\pi$, geldt zeker

$$-\pi \leq C \leq \pi.$$

Echter $C = \pi$ is uitgesloten, omdat uit $C = \pi$ zou volgen:

$$\arcsin y + \arcsin x = \pi$$

Hieraan kan alleen voldaan worden indien zowel $\arcsin y = \frac{1}{2}\pi$, als ook $\arcsin x = \frac{1}{2}\pi$.

Dat betekent echter, dat èn $x = 1$ èn $y = 1$; maar dan is y niet als een differentieerbare functie van x gedefinieerd. Om analoge reden is ook $C = -\pi$ uitgesloten.

Alle oplossingen van de D.V. zijn dus impliciet gevat in:

$$\arcsin y + \arcsin x = C \quad (\text{met } -\pi < C < \pi)$$

We kunnen hieruit y oplossen en op de volgende wijze een andere impliciete voorstelling voor y bepalen:

$$\arcsin y = C - \arcsin x$$

Dit is gelijkwaardig met:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin(C - \arcsin x) \\ -\frac{1}{2}\pi < C - \arcsin x < \frac{1}{2}\pi \end{aligned} \right\}$$

dus met:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin C \cos(\arcsin x) - \cos C \sin(\arcsin x) \\ -\frac{1}{2}\pi < C - \arcsin x < \frac{1}{2}\pi \end{aligned} \right\}$$

en derhalve met:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin C \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cos C \\ \frac{1}{2}\pi < C - \arcsin x < \frac{1}{2}\pi \end{aligned} \right\}$$

Stellen we $\cos C = c$, dan volgt:

$$\left. \begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - c^2}, & \text{als } 0 \leq C < \pi \\ \sin C &= -\sqrt{1 - c^2}, & \text{als } -\pi < C < 0 \end{aligned} \right\}$$

We vinden:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{1 - c^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} - cx & \text{als } 0 \leq C < \pi \\ y &= -\sqrt{1 - c^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} - cx & \text{als } -\pi < C < 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

waarin $-1 < c \leq 1$ en het definitiegebied bepaald wordt door de eis:

$$-\frac{1}{2}\pi < C - \arcsin x < \frac{1}{2}\pi$$

Wanneer we in (6.7) kwadrateren, dan vinden we dat y voldoet aan de betrekking:

$$x^2 + 2cxy + y^2 = 1 - c^2 \quad (6.8)$$

Maar niet iedere y die hieraan voldoet definieert een oplossing, daar uit de D.V. en ook uit (6.7) volgt dat $y' < 0$.

De betrekking (6.8) geeft ons meetkundig inzicht in het verloop van de oplossingskrommen.

Door (6.8) wordt een stelsel kegelsneden voorgesteld met middelpunt O . De discriminant van dit stelsel is $4 - 4c^2$. Deze is dus positief als $|c| < 1$ en 0 als $c = 1$. Voor $|c| < 1$ hebben we een stelsel ellipsen die blijken te raken aan de rechten: $x = +1$, $x = -1$, $y = +1$ en $y = -1$. Voor $c = 1$ gaat (6.8) over in

$$x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

Dit stelt een dubbeltellende rechte voor met vergelijking: $y = -x$. Van de ellipsen zijn echter die delen waar de afgeleide positief is geen oplossingskrommen. Zij zijn bij het kwadrateren ingevoerd.

In verband met de in het begin opgelegde beperking: $|x| \neq 1$ en $|y| \neq 1$, moeten we nog onderzoeken: $x = \pm 1$ en $y = \pm 1$. Door substitutie in de D.V. blijkt dat $y = 1$ en $y = -1$ voldoen aan de D.V. Echter $x = +1$ en $x = -1$ voldoen niet. Ze voldoen daarentegen wel aan:

$$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} \frac{dx}{dy} = 0$$

b. D.V. waarin de veranderlijken te scheiden zijn door een substitutie

Vaak komt het voor dat de variabelen niet gescheiden zijn, maar dat we wel door een handig gekozen substitutie een D.V. vinden, die van het type „gescheiden variabelen” is.

Voorbeeld 3

Los op de D.V. (zie par. 4, voorbeeld 3):

$$y' = y - x$$

Oplossing:

We voeren een nieuwe, van x afhankelijke, variabele z in door te stellen:

$$y - x = z$$

We vinden dan: $y' - 1 = z'$ en voor de D.V. in z :

$$z' = z - 1$$

Als we voorlopig onderstellen: $z - 1 \neq 0$, kunnen we hiervoor schrijven:

$$\frac{z'}{z - 1} = 1$$

waaruit we oplossen:

$$\ln |z - 1| = x + C$$

$$|z - 1| = e^{x+C}$$

$$z - 1 = Ae^x \quad (A \neq 0)$$

dus:

$$y = Ae^x + x + 1 \quad (A \neq 0) \tag{6.9}$$

Echter blijkt ook $z = 1$ te voldoen, d.w.z. $y = x + 1$. Deze oplossing blijkt te ontstaan als we in (6.9) ook $A = 0$ zouden toelaten, zodat alle oplossingen gegeven worden door:

$$y = Ae^x + x + 1 \quad (\forall A \in \mathbb{R})$$

Voorbeeld 4

Los op de D.V.:

$$xy' = x + 2y \tag{6.10}$$

Oplossing:

Ook in deze D.V. zijn de veranderlijken niet gescheiden. Dit scheiden lukt echter door de substitutie:

$$y = z - x$$

Hierdoor gaat (6.10) over in:

$$x(z' - 1) = -x + 2z$$

of:

$$xz' = 2z$$

wat voor $z \neq 0$, $x \neq 0$ ook te schrijven is als:

$$\frac{z'}{2z} = \frac{1}{x}$$

Hiervan is de oplossing:

$$\ln |z| = \ln x^2 + C$$

dus:

$$z = Ax^2 \quad (A \neq 0)$$

zodat:

$$y = Ax^2 - x \quad (A \neq 0) \quad (6.11)$$

We moeten nu nog onderzoeken: $x = 0$ en $z = 0$. Blijkbaar geeft $x = 0$ geen oplossing, terwijl $z = 0$, dus $y = -x$ wel een oplossing bepaalt. In verband met (6.11) kunnen we zeggen dat alle oplossingen gegeven worden door:

$$y = Ax^2 - x \quad (\forall A \in \mathbb{R})$$

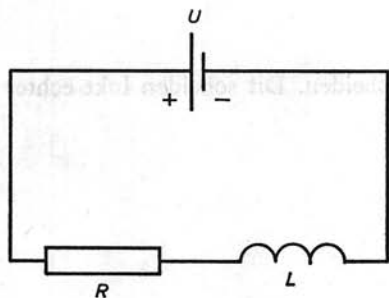
Voorbeeld 5

Los op de D.V.:

$$U = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Deze D.V. is de D.V. voor de stroomsterkte i in een enkelvoudige keten met constante klemspanning U , constante weerstand R en constante zelfinductie L (zie fig. 13).

Fig. 13



Oplossing:

We kunnen de D.V. schrijven als:

$$-\frac{R \frac{di}{dt}}{U - i \cdot R} = -\frac{R}{L}$$

waaruit volgt door integratie:

$$\ln|U - i \cdot R| = -\frac{R}{L} t + A$$

zodat:

$$U - i \cdot R = C \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \quad (C \neq 0)$$

en

$$i = \frac{U}{R} - \frac{C}{R} e^{-\frac{R}{L} t} \quad (6.12)$$

De constante C in (6.12) is te bepalen, als we de toestand in de elektrische keten op een bepaald ogenblik geven. Geldt b.v. voor $t = 0$ ook $i = 0$, dan volgt daaruit dat $C = U$. Dus:

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})$$

7 Homogene differentiaalvergelijkingen

De differentiaalvergelijking van de eerste orde:

$$y' = F(x, y) \quad (7.1)$$

heet *homogeen*, indien F een functie van x en y is die homogeen is van de graad 0. We noemen een functie F van x en y homogeen van de graad n , indien er een reëel getal n (niet noodzakelijk een geheel getal!) bestaat zodanig dat:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$$

(zie ook deel 2, par. 3). In dit geval noemen we ook de vorm $F(x, y)$ homogeen.

Voorbeeld 1

a Als $F(x, y) = x^2 + xy + y^2$, dan is F homogeen van de graad 2;

b Als $F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, dan is F homogeen van de graad 0;

- c Als $F(x, y) = \sin \frac{x}{y}$, dan is F homogeen van de graad 0;
 d Als $F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$, dan is F homogeen van de graad $\frac{2}{3}$.

Wanneer de D.V. de gedaante heeft:

$$P(x, y)y' = Q(x, y)$$

dan is deze D.V. homogeen indien P en Q homogeen zijn van dezelfde graad.

De homogene D.V. in (7.1) is te herleiden tot een D.V. met gescheiden variabelen door te stellen:

$$y = zx$$

Er geldt dan immers:

$$z'x + z = F(x, zx) = x^0 F(1, z) = F(1, z)$$

en dus:

$$z'x = F(1, z) - z$$

Dit is een D.V. met gescheiden variabelen.

Voorbeeld 2

Los op:

$$2xyy' + (x^2 - y^2) = 0 \quad (7.2)$$

Oplissing:

We zien dat $2xy$ en $x^2 - y^2$ beide homogeen zijn van de graad 2. We hebben hier dus inderdaad een homogene D.V..

Door de substitutie: $y = zx$, gaat (7.2) over in:

$$2zx^2(z'x + z) + x^2(1 - z^2) = 0$$

We veronderstellen $x \neq 0$ en vinden dan:

$$(1 + z^2) + 2zx \frac{dz}{dx} = 0$$

of:

$$\frac{2z}{1 + z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}$$

Hierin zijn de variabelen gescheiden. Er volgt door integratie:

$$\ln(1 + z^2) = -\ln|x| + C$$

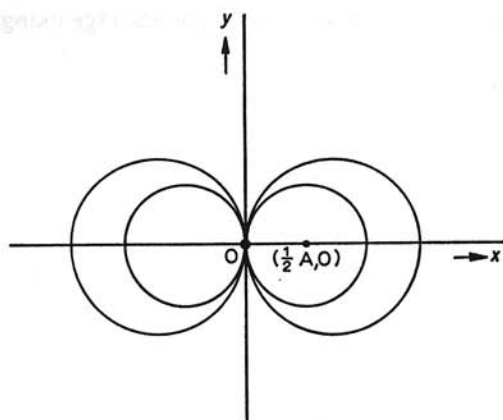


Fig. 14

dus:

$$x(1 + z^2) = e^C = A \quad (A \neq 0)$$

Substitutie van $z = \frac{y}{x}$ levert:

$$x^2 + y^2 - Ax = 0 \quad (A \neq 0)$$

De hierdoor voorgestelde krommen zijn cirkels die in O raken aan de y-as. We moeten echter O uitsluiten. Het zijn dus „gepunteeerde cirkels” (zie fig. 14).

N.B. O correspondeert met $A = 0$!

We moeten nog het geval: $x = 0$ afzonderlijk beschouwen. Het is duidelijk dat y door $x = 0$ niet gedefinieerd wordt als functie van x . Indien we echter x als functie van y beschouwen, zien we dat $x = 0$ wel voldoet aan:

$$(x^2 - y^2) \frac{dx}{dy} + 2xy = 0$$

Dit betekent dat de oplossing van:

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

bepaald wordt door:

$$x^2 + y^2 - Ax = 0 \quad (A \neq 0) \tag{7.3}$$

en $x = 0$.

N.B. $A = 0$ levert noch y als differentieerbare functie van x , noch x als differentieerbare functie van y . Wel volgt uit (7.3) $x = 0$, als we delen door A en dan A laten naderen tot ∞ .

Een belangrijk type homogene D.V. wordt gevormd door de differentiaalvergelijking van de gedaante:

$$(cx + d)y' = ax + b$$

waarin a, b, c en d constanten zijn.

Voorbeeld 3

Los op:

$$(2x + y)y' = 4x - y$$

Oplossing:

We veronderstellen: $2x + y \neq 0$ en vinden dan door deling:

$$y' = \frac{4x - y}{2x + y}$$

We stellen hierin: $y = xz$. Er ontstaat dan:

$$xz' + z = \frac{4x - xz}{2x + xz}$$

Veronderstellen we $x \neq 0$, dan krijgen we:

$$xz' = \frac{4 - z}{2 + z} - z$$

of:

$$xz' = \frac{-z^2 - 3z + 4}{2 + z}$$

Als we aannemen: $z^2 + 3z - 4 \neq 0$, dan kunnen we schrijven:

$$\frac{z + 2}{(z + 4)(z - 1)} z' = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{5} \left\{ \frac{2}{z + 4} + \frac{3}{z - 1} \right\} z' = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{2}{5} \ln |z + 4| + \frac{3}{5} \ln |z - 1| = -\ln |x| + C$$

$$(z + 4)^{\frac{2}{5}} (z - 1)^{\frac{3}{5}} = \frac{A^*}{x} \quad (A^* \neq 0)$$

$$(y + 4x)^2 (y - x)^3 = A \quad (A \neq 0)$$

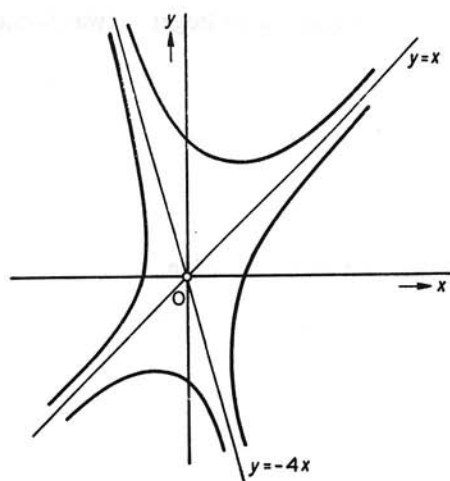


Fig. 15

We moeten nog apart onderzoeken: $z^2 + 3z - 4 = 0$, dus $z - 1 = 0$ of $z + 4 = 0$, d.w.z. $y = x$ of $y = -4x$.

Substitutie in de D.V. toont aan dat $y = x$ en $y = -4x$ voldoen aan de D.V. (mits $x \neq 0$).

Dit betekent dat we als algemene oplossing vinden:

$$(y + 4x)^2(y - x)^3 = A \quad (\forall A \in \mathbb{R})$$

Een en ander is door het schetsen van enkele oplossingskrommen in fig. 15 toegelicht. O heet in dit geval een *zadelpunt*.

De volgende D.V. is eenvoudig te herleiden tot een D.V. van het vorige type:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad (7.4)$$

waarin a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 en c_2 constanten zijn.

Voor we tot behandeling van deze D.V. overgaan, wijzen we eerst op het belang van deze D.V.

De algemene D.V. van de eerste orde luidt:

$$y' = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

Onder bepaalde voorwaarden kunnen we $F(x, y)$ en $G(x, y)$ in een Taylorreeks ontwikkelen. Dus:

$$y' = \frac{a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + \dots}{b_{00} + (b_{10}x + b_{01}y) + (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + \dots}$$

Wanneer x en y zo klein zijn dat de termen van de graad 2 en hoger verwaarloosd mogen worden, krijgen we:

$$y' = \frac{a_{00} + a_{10}x + a_{01}y}{b_{00} + b_{10}x + b_{01}y}$$

Dat is juist het type (7.4).

Bij de beschouwing van de D.V. (7.4) hebben we drie mogelijkheden.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ en } a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

kunnen voorstellen:

- 1 snijdende rechte lijnen;
- 2 evenwijdige rechte lijnen;
- 3 samenvallende rechte lijnen.

We zullen de verschillende gevallen achtereenvolgens behandelen aan de hand van voorbeelden.

Geval 1

Los op:

$$(2x + y - 1)y' = 4x - y + 7 \quad (7.5)$$

Oplossing:

We bepalen het snijpunt van de rechten met vergelijking:

$$2x + y - 1 = 0$$

$$4x - y + 7 = 0$$

Dit snijpunt is $P(-1, 3)$.

We verschuiven het assenkruis naar $P(-1, 3)$ en voeren als nieuwe coördinaten in:

$$u = x + 1$$

$$v = y - 3$$

v is dan een functie van u . Daar we het assenkruis evenwijdig hebben verschoven, geldt:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$$

(7.5) gaat over in:

$$(2u + v) \frac{dv}{du} = 4u - v$$

Deze D.V. is homogeen en heeft als oplossing (zie vorig probleem):

$$(v - u)^3(v + 4u)^2 = C$$

De gegeven D.V. heeft dus als oplossing:

$$(y - x - 4)^3(y + 4x + 1)^2 = C$$

Geval 2

Los op:

$$(2x + y + 2)y' = 2x + y + 1 \quad (7.6)$$

Oplossing:

De rechten:

$$2x + y + 2 = 0$$

$$2x + y + 1 = 0$$

zijn evenwijdig. We stellen nu:

$$2x + y = z$$

Dus:

$$2 + y' = z'$$

(7.6) gaat dan over in:

$$(z + 2)(z' - 2) = z + 1$$

of:

$$z' = \frac{z + 1}{z + 2} + 2 = \frac{3z + 5}{z + 2} \quad (z + 2) \neq 0$$

$$\frac{z + 2}{3z + 5} z' = 1 \quad (3z + 5 \neq 0)$$

$$\left(1 + \frac{1}{3z + 5}\right) z' = 3$$

$$z + \frac{1}{3} \ln |3z + 5| = 3x + C$$

$$\ln |3z + 5| = 9x - 3z + 3C = 3x - 3y + A$$

$$Be^{3(x-y)} = 6x + 3y + 5 \quad (B \neq 0)$$

Bekijken we de gevallen die we uitgezonderd hebben:

$$z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2 = 0 \text{ voldoet niet aan (7.6).}$$

$$3z + 5 = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 5 = 0 \text{ voldoet aan (7.6).}$$

Dus B mag ook nul zijn.

De algemene oplossing van (7.6) is dus:

$$6x + 3y + 5 = B \cdot e^{3(x-y)} \quad (\forall B \in \mathbb{R})$$

Geval 3

In het geval 3 (samenvallende rechten) geldt:

$$a_1x + b_1y + c_1 = \lambda(a_2x + b_2y + c_2)$$

Als $a_2x + b_2y + c_2 \neq 0$, dan volgt eenvoudig:

$$y' = \lambda$$

met als oplossing:

$$y = \lambda x + C$$

D.w.z. de oplossingskrommen vormen een stelsel evenwijdige rechten, waarop de snijpunten met $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ uitgezonderd moeten worden.

Voorbeeld

$$y' = \frac{4x + 8y + 12}{x + 2y + 3}$$

Oplossing:

Hier geldt (als $x + 2y + 3 \neq 0$):

$$y' = 4$$

dus:

$$y = 4x + C$$

met uitzondering van de snijpunten met de lijn: $x + 2y + 3 = 0$ (zie fig. 16).

Opmerking:

De algemene oplossing van de D.V.:

$$(x + 2y + 3)y' = 4x + 8y + 12$$

verschilt van de vorige, daar ook de rechte $x + 2y + 3 = 0$ een oplossing is (zie fig. 17).

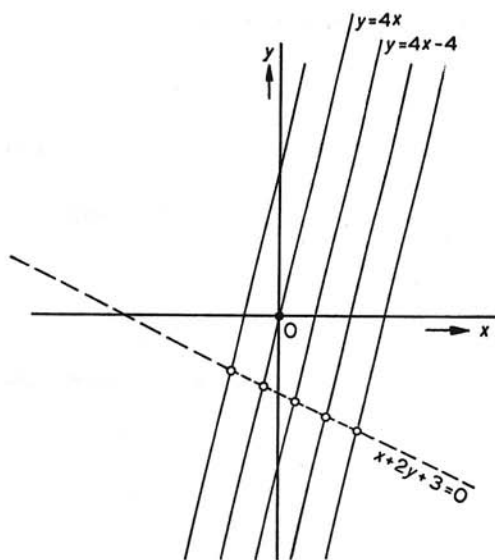


Fig. 16

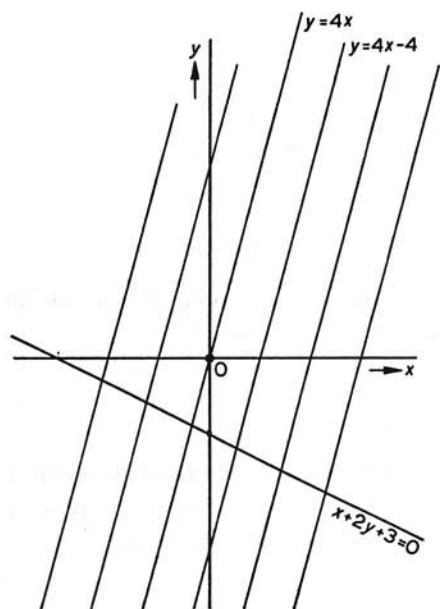


Fig. 17

8 De exacte differentiaalvergelijking. Integrerende factor

De D.V.

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (8.1)$$

heet exact indien er een functie F van de variabelen x en y bestaat zodanig dat:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

Anders gezegd:

De D.V. (8.1) heet exact indien er een functie F van de variabelen x en y bestaat zodanig dat:

$$\begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \text{grad } F(x, y)$$

Voorbeeld 1

De D.V.:

$$(x + 2y - 1) + (2x - y + 3) \frac{dy}{dx} = 0$$

is exact.

Hier is nl.: $P(x, y) = x + 2y - 1$ en $Q(x, y) = 2x - y + 3$.

Als we kiezen (hoe, dat blijkt later):

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - x + 3y$$

dan is:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= x + 2y - 1 = P(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2x - y + 3 = Q(x, y) \end{aligned} \right\}$$

Met behulp van de bovengenoemde functie F kunnen we alle oplossingen van de D.V. (8.1) beschrijven. Voor deze F geldt nl. de volgende stelling.

Stelling

Indien we stellen: $F(x, y) = C$, waarbij C een willekeurige constante is en indien y daaruit kan worden opgelost als „een differentieerbare functie f van x ”, (d.w.z.: $y = f(x)$ met f differentieerbaar), gedefinieerd op een zeker interval I , zodat:

$$y = f(x) \quad (x \in I) \quad \text{en} \quad F\{x, f(x)\} = C \quad (\forall x \in I)$$

dan voldoet deze functie f aan de D.V. (8.1).

Immers, uit:

$$F\{x, f(x)\} = C$$

volgt door differentiatie naar x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} = 0$$

dus:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

Omgekeerd geldt de volgende stelling.

Stelling

Indien op het interval I een differentieerbare functie f voldoet aan de D.V. (8.1), waarbij

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{en} \quad Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

dan geldt:

$$F\{x, f(x)\} = C \quad (\forall x \in I)$$

Bewijs:

We stellen:

$$F(x, y) = F\{x, f(x)\} = F^*(x) \quad (\forall x \in I)$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} \frac{dF^*}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{df}{dx} \\ &= P(x, y) + Q(x, y) \frac{df}{dx} = 0 \end{aligned}$$

omdat f aan (8.1) voldoet. Dus is:

$$F^*(x) = C \quad (\forall x \in I)$$

en dus:

$$F\{x, f(x)\} = C$$

Wanneer we F kennen, zijn alle oplossingen van de D.V. (8.1) bekend.

Vaak schrijven we juist een exacte D.V. in de gedaante:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (8.2)$$

Op grond van het vorenstaande is deze D.V. dan en slechts dan exact als het linkerlid van (8.2) een exacte differentiaal is (zie deel 2, par. 59).

Het ligt voor de hand te vragen onder welke voorwaarden een D.V. exact is. In dit verband herinneren we aan de in deel 2, par. 59 genoemde Stelling 6.

Stelling

Indien G een enkelvoudig samenhangend deelgebied is van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en indien P , Q , P_y en Q_x continue functies zijn, gedefinieerd op G , dan is de differentiaalvorm:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

dan en slechts dan exact, indien:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in G$$

De bewuste functie kan dan worden voorgesteld door de lijnintegraal:

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta$$

waarbij $(x_0, y_0) \in G$ en de weg van (x_0, y_0) naar (x, y) een willekeurige Jordanboog in G is.

Indien G convex is en de punten (x_0, y_0) , (x, y_0) en (x, y) in G liggen, dan kunnen we als integratieweg kiezen de gebroken rechte van (x_0, y_0) over (x, y_0) naar (x, y) . We vinden dan:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, s) ds$$

Op dezelfde wijze, indien (x_0, y_0) , (x_0, y) en (x, y) in het convexe gebied G liggen, vinden we:

$$F(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds + \int_{x_0}^x P(t, y) dt \quad (8.3)$$

Een andere manier om $F(x, y)$ te berekenen is de volgende. Uit

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$$

volgt:

$$F(x, y) = P^*(x, y) + h(y)$$

waarin P^* een functie is waarvoor geldt: $\frac{\partial P^*}{\partial x} = P(x, y)$ en h alleen van y afhangt (deze valt dus bij de differentiatie naar x weg): h wordt bepaald door:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

dus:

$$\frac{\partial P^*}{\partial y} + h'(y) = Q(x, y)$$

waaruit volgt:

$$h'(y) = Q(x, y) - \frac{dP^*}{dy} \quad (8.4)$$

Het is duidelijk dat hieruit slechts dan h kan worden berekend indien het rechterlid van (8.4) geen x bevat. Dit is inderdaad het geval. Immers differentiatie naar x levert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 P^*}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 P^*}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Overigens is het rechterlid van (8.4) een continue functie van y , zodat h hieruit inderdaad te vinden is.

Voorbeeld 2

Integreer de D.V.:

$$(x + 2y - 1) + (2x - y + 3)y' = 0$$

(zie voorbeeld 1).

Oplossing:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= x + 2y - 1 \\ Q(x, y) &= 2x - y + 3 \end{aligned} \right\}$$

dus $\frac{\partial P}{\partial y} = 2$ en $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$, waaruit volgt dat de D.V. exact is.

Volgens (8.3) geldt (als we stellen $x_0 = y_0 = 0$):

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^y (-s + 3) ds + \int_0^x (t + 2y - 1) dt \\ &= -\frac{1}{2}y^2 + 3y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy - x \end{aligned}$$

De algemene integraal van de D.V. is:

$$\frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - x + 3y = C \quad (8.5)$$

We lossen deze D.V. ook nog op volgens de tweede geschetste methode:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) = x + 2y - 1$$

dus:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - x + h(y)$$

Verder is

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + h'(y) = Q(x, y) = 2x - y + 3$$

zodat:

$$h'(y) = -y + 3$$

en dus:

$$h(y) = -\frac{1}{2}y^2 + 3y + K$$

Een $F(x, y)$ die voldoet is b.v.:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - x - \frac{1}{2}y^2 + 3y$$

waaruit de algemene integraal (8.5) volgt.

Een variant op deze methode verloopt aldus:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x + 2y - 1 \Rightarrow F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - x + h(y) \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x - y + 3 \Rightarrow F(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}y^2 + 3y + g(x) \quad (8.7)$$

Vergelijking van (8.6) en (8.7) geeft als mogelijkheid:

$$h(y) = -\frac{1}{2}y^2 + 3y$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

waaruit weer de algemene integraal (8.5) volgt.

Soms geeft het minder rekenwerk als we „bij $Q(x, y)$ ” beginnen in plaats van „bij $P(x, y)$ ”.

Voorbeeld 3

Los op de D.V.:

$$e^x(x^2 + y^2 + 2x) + 2e^xy \frac{dy}{dx} = 0$$

Oplossing:

$$P(x, y) = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$$

$$Q(x, y) = 2e^xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2ye^x$$

waaruit volgt dat de D.V. exact is.

$F(x, y)$ vinden we aldus:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2e^xy$$

dus:

$$F(x, y) = e^xy^2 + g(x)$$

en

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^xy^2 + g'(x) = P(x, y) = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$$

waaruit we vinden:

$$g'(x) = e^xx^2 + 2e^xx$$

$$g(x) = x^2e^x + K$$

De algemene integraal van de D.V. is:

$$e^x(x^2 + y^2) = C$$

Is de D.V.:

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

niet exact, dan is het in theorie mogelijk een factor $\mu(x, y)$ te vinden zo dat de D.V.:

$$\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

wel exact is. Een dergelijke factor heet *integrerende factor*.

Deze factor moet dan voldoen aan de voorwaarde:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad (8.8)$$

Uitwerking van deze voorwaarde levert een partiële D.V. voor μ op, die vaak moeilijker is op te lossen dan de oorspronkelijke D.V. Slechts indien vooraf een en ander van de integrerende factor bekend is, b.v. dat deze alleen van x afhangt of alleen van y , is op deze wijze de D.V. eenvoudig op te lossen.

Voorbeeld 4

Gegeven is dat de D.V.:

$$(x - 2y - 1) + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

een integrerende factor $\mu(x, y)$ heeft die alleen afhankelijk is van x . Los deze D.V. op.

Oplossing:

Volgens (8.8) moet gelden:

$$\frac{\partial\mu(x - 2y - 1)}{\partial y} = \frac{\partial 2\mu}{\partial x}$$

Uitgewerkt:

$$-2\mu(x, y) = 2 \frac{d\mu}{dx}$$

of:

$$\frac{d\mu}{\mu(x, y)} = -dx$$

waaruit volgt:

$$\ln |\mu(x, y)| = -x$$

dus een mogelijkheid voor μ is:

$$\mu(x, y) = e^{-x}$$

Bijgevolg is de D.V.:

$$e^{-x}(x - 2y - 1) + 2e^{-x} \frac{dy}{dx} = 0$$

exact.

Volgens (8.3) is:

$$F(x, y) = \int_0^y 2 ds + \int_0^x e^{-t}(t - 2y - 1) dt = (2y - x)e^{-x}$$

De algemene integraal van de D.V. is:

$$(2y - x)e^{-x} = C$$

9 De lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde. De vergelijking van Bernoulli

Een D.V. van de orde n heet lineair indien daarin de gezochte $y, y', \dots, y^{(n)}$ uitsluitend tot de eerste macht voorkomen met coëfficiënten die alleen van x afhangen.

De algemene gedaante van een lineaire D.V. van de n -de orde is:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (9.1)$$

Hierin geldt: $a_n(x) \neq 0$ op het beschouwde interval I van x .

Indien $b(x) = 0 \quad \forall x \in I$, dan noemen we de D.V. *gereduceerd* of *homogeen*. We noemen de D.V.:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (9.2)$$

de bij (9.1) behorende gereduceerde (homogene) vergelijking.

In deze paragraaf beperken we ons tot de lineaire D.V. van de 1ste orde. We schrijven die in de gedaante:

$$y' + yP(x) = Q(x) \quad (9.3)$$

waarin P en Q continue functies zijn gedefinieerd op een interval I .

Het zal blijken dat we alle oplossingen van (9.3) kunnen vinden, als we alle oplossingen kennen van de *gereduceerde* vergelijking van (9.3):

$$y' + yP(x) = 0 \quad (9.4)$$

en één particuliere oplossing van de niet-gereduceerde D.V. (9.3). Er geldt namelijk de volgende stelling.

Stelling

We krijgen alle oplossingen van de niet-gereduceerde D.V. (9.3) door elke oplossing van de gereduceerde D.V. (9.4) te vermeerderen met één vaste particuliere oplossing van de niet-gereduceerde D.V. (9.3).

Bewijs:

Stel dat de volledige verzameling oplossingen van (9.4) is:

$$V = \{\dots, f_i, \dots\}$$

waarin i een zekere indexverzameling J doorloopt, en dat φ_0 een particuliere oplossing is van (9.3). De bewering is dan dat de verzameling W , gedefinieerd door:

$$W = \{\dots, f_i + \varphi_0, \dots\}$$

de volledige verzameling oplossingen is van (9.3). We bewijzen daartoe dat elke functie van W voldoet aan (9.3) en dat elke oplossing van (9.3) behoort tot W .

Voor een element van W , b.v. $f_j + \varphi_0$, geldt, omdat φ_0 voldoet aan (9.4) en f_j aan (9.3):

$$\begin{aligned}(f_j + \varphi_0)'(x) + \{(f_j + \varphi_0)(x)\}P(x) &= f_j'(x) + \varphi_0'(x) + \{f_j(x) + \varphi_0(x)\}P(x) \\ &= \{f_j'(x) + f_j(x)P(x)\} + \{\varphi_0'(x) + \varphi_0(x)P(x)\} \\ &= 0 + Q(x) = Q(x)\end{aligned}$$

m.a.w. $f_j + \varphi_0$ voldoet aan (9.3).

Omgekeerd: Stel dat g een oplossing is van (9.3), dan geldt:

$$g'(x) + g(x)P(x) = Q(x)$$

Ook geldt:

$$\varphi_0'(x) + \varphi_0(x)P(x) = Q(x)$$

dus:

$$\{g'(x) - \varphi_0'(x)\} + \{g(x) - \varphi_0(x)\}P(x) = 0$$

en dus:

$$(g - \varphi_0)'(x) + \{(g - \varphi_0)(x)\}P(x) = 0$$

d.w.z. $(g - \varphi_0)$ voldoet aan (9.3) en dus $g - \varphi_0 \in V$.

Hieruit volgt: $g = \varphi_0 + f_k$ voor zekere $k \in J$ en dus $g \in W$.

Het probleem van het oplossen van (9.3) valt uiteen in twee problemen:

- a* het bepalen van *alle* oplossingen van de gereduceerde D.V. (9.4);
- b* het bepalen van *slechts één* oplossing van de niet-gereduceerde D.V. (9.3), een z.g. particuliere oplossing.

Ad. a

De oplossing van (9.4) komt neer op een eenvoudige integratie. Immers, als $y \neq 0$, dan geldt:

$$\frac{y'}{y} = -P(x)$$

en dus:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C \neq 0)$$

Hierin is $\int P(x)dx$ een willekeurige primitieve van P . Daar ook $y = 0$ voldoet, is de algemene oplossing van (9.4):

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

Ad. b

Voor het bepalen van een particuliere oplossing van de niet-gereduceerde D.V. (9.3) beschikken we in hoofdzaak over twee methoden. In de eerste plaats het met verstand „gokken” van een oplossing, d.w.z. we proberen een oplossing van een te verwachten gedaante, waarin een aantal constanten geschikt bepaald moeten worden (zie voorbeelden).

Een tweede methode die zekerder werkt, maar wel meer rekenwerk vergt, is de methode van Lagrange of de methode van variatie van constanten.

Van beide methoden geven we voorbeelden.

Voorbeeld 1

Los op de D.V.:

$$xy' - (x + 1)y = x^2 - x^3 \quad (x \neq 0) \quad (9.5)$$

Oplossing:

De bijbehorende gereduceerde D.V. is:

$$xy' - (x + 1)y = 0 \quad (9.6)$$

Als $y \neq 0$, schrijven we:

$$\frac{y'}{y} = 1 + \frac{1}{x}$$

waaruit volgt:

$$\ln|y| = x + \ln|x| + K$$

$$y = Cx e^x \quad (C \neq 0)$$

Daar $y = 0$ een oplossing is, vinden we als oplossing van (9.6):

$$y = Cx e^x \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

We proberen nu een particuliere oplossing van (9.5) te bepalen door te gissen. Een verstandig proberen lijkt, gezien het rechterlid, een oplossing in de gedaante van een

veelterm in x en wel, lettend op de factor $(x + 1)$ in het linkerlid, een oplossing van de vorm: $ax^2 + bx + c$.

Substitutie in (9.5) geeft dan:

$$-ax^3 + (a - b)x^2 - cx - c = -x^3 + x^2 \quad (\forall x \neq 0)$$

Dus is $a = 1$, $a - b = 1$, $c = 0$.

Een particuliere oplossing van (9.5) is dus $y = x^2$.

De algemene oplossing van (9.5) is:

$$y = Cx e^x + x^2$$

Voorbeeld 2

Los op de D.V.:

$$y' + y = \sin x \quad (9.7)$$

Oplossing:

De bijbehorende gereduceerde D.V. is:

$$y' + y = 0 \quad (9.8)$$

We zien eenvoudig in dat de algemene oplossing van (9.8) is:

$$y = C e^{-x}$$

Als particuliere oplossing van (9.7) proberen we:

$$y = a \sin x + b \cos x \quad (9.9)$$

N.B. Het is duidelijk dat $a \sin x$ alleen niet kan voldoen en $b \cos x$ alleen ook niet.

Substitutie van (9.9) in (9.7) geeft:

$$(a - b) \sin x + (a + b) \cos x = \sin x \quad (\forall x)$$

dus $a - b = 1$ en $a + b = 0$, zodat een particuliere oplossing van (9.7) luidt:

$$y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

De algemene oplossing van (9.7) is dan:

$$y = C e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

De *methode van Lagrange* of van *variatie van constanten* berust daarop dat we eerst de gereduceerde D.V. oplossen en daarna de daarin optredende constante opvatten

als een functie van de onafhankelijk veranderlijke. We trachten deze functie zó te bepalen, dat er een particuliere oplossing ontstaat van de niet-gereduceerde D.V.

In het algemene geval

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (9.3)$$

zagen we dat:

$$y = C e^{-\int P(x)dx}$$

de algemene oplossing is van de gereduceerde D.V.

We proberen nu een *functie van x*, die we C_0 noemen, zodanig te bepalen dat

$$y = C_0(x)e^{-\int P(x)dx}$$

een oplossing geeft van (9.3).

Daartoe is in ieder geval noodzakelijk:

$$C'_0(x)e^{-\int P(x)dx} + C_0(x)e^{-\int P(x)dx}\{-P(x)\} + P(x)C_0(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

of:

$$C'_0(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Door een integratie vinden we dan $C_0(x)$ (één is al voldoende). Daardoor is een particuliere oplossing van (9.3) bekend. De algemene oplossing is:

$$y = C e^{-\int P(x)dx} + C_0(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Voorbeeld 3

Los op de D.V.:

$$xy' - (x + 1)y = x^2 - x^3 \quad (x \neq 0) \quad (9.5)$$

(zie voorbeeld 1).

Oplossing:

De bijbehorende gereduceerde D.V. luidt:

$$xy' - (x + 1)y = 0$$

Deze heeft als algemene oplossing:

$$y = Cx e^x \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

We vervangen nu C weer door $C_0(x)$, die zó bepaald wordt dat $C_0(x)x e^x$ voldoet aan (9.5), d.w.z. we eisen:

$$x^2 C'_0(x)e^x + x C_0(x)e^x + x^2 C_0(x)e^x - (x + 1)C_0(x)x e^x = x^2 - x^3$$

Hieruit vinden we:

$$C_0'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$$

Een $C_0(x)$ die voldoet is

$$C_0(x) = x e^{-x}$$

zodat een particuliere oplossing van (9.5) is:

$$y = x e^{-x} \cdot x e^x = x^2$$

De algemene oplossing van (9.5) is:

$$y = C x e^x + x^2$$

Voorbeeld 4

Los op de D.V.:

$$y' + y = \sin x \quad (9.7)$$

(zie voorbeeld 2).

Oplossing:

De oplossing van de bijbehorende gereduceerde D.V.:

$$y' + y = 0$$

luit:

$$y = C \cdot e^{-x}$$

We proberen als oplossing van (9.7):

$$y = C_0(x) e^{-x}$$

met nader te bepalen $C_0(x)$. Deze $C_0(x)$ moet voldoen aan:

$$C_0'(x) e^{-x} - C_0(x) e^{-x} + C_0(x) e^{-x} = \sin x$$

of:

$$C_0'(x) = e^x \sin x$$

In deel 1, par. 57 zagen we dat er een C_0 met deze eigenschap bepaald wordt door:

$$C_0(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

zodat een particuliere oplossing van (9.7) is:

$$y = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) e^{-x} = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x)$$

De algemene oplossing van (9.7) is:

$$y = C e^{-x} + \frac{1}{2} (\sin x - \cos x)$$

Methode van Bernoulli

Een in theorie andere methode die echter tot hetzelfde rekenwerk voert als de methode van Lagrange, is de methode van Bernoulli.

Hierbij wordt de onbekende functie vervangen door het produkt van twee andere onbekende functies, die we dan zo bepalen dat hun produkt de algemene oplossing van de D.V. oplevert.

In (9.3) stellen we:

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

waardoor (9.3) overgaat in:

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + P(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = Q(x)$$

of:

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \{v'(x) + P(x) \cdot v(x)\} = Q(x)$$

We zoeken nu eerst een functie v , zodanig dat

$$v'(x) + P(x) \cdot v(x) = 0$$

hetgeen door een eenvoudige integratie bereikt kan worden.

De gegeven D.V. is dan gelijkwaardig met

$$u'(x) \cdot v(x) = Q(x)$$

Hieruit kunnen we u vinden en dus ook de gezochte y .

Bij het berekenen van v kunnen we volstaan met één functie v . Hierbij treedt geen willekeurige constante op. Bij de berekening van u komt in de uitkomst wel een willekeurige constante voor, hetgeen de volledigheid van de gevonden verzameling oplossingen garandeert.

Voorbeeld 5

Los op de D.V.:

$$xy' - (x + 1)y = x^2 - x^3 \quad (x \neq 0) \quad (9.5)$$

(zie voorbeeld 1).

Oplossing:

We stellen $y = u(x) \cdot v(x)$, waardoor (9.5) overgaat in:

$$x\{u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\} - (x + 1)u(x) \cdot v(x) = x^2 - x^3$$

$$u(x)\{xv'(x) - (x + 1)v(x)\} + xu'(x)v(x) = x^2 - x^3$$

De D.V. (9.5) is equivalent met:

$$\left. \begin{aligned} xv'(x) - (x+1)v(x) &= 0 \\ u'(x) \cdot v(x) &= x - x^2 \\ y &= u(x) \cdot v(x) \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

Uit de eerste D.V. van (9.10) volgt, indien $v(x) \neq 0$

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = 1 + \frac{1}{x}$$

met als oplossing, b.v.:

$$v(x) = x e^x$$

Door substitutie hiervan in de tweede D.V. van (9.10) vinden we:

$$u'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$$

met als algemene oplossing:

$$u(x) = x e^{-x} + C$$

De algemene oplossing van (9.5) is:

$$y = u(x) \cdot v(x) = x^2 + C x e^x$$

Voorbeeld 6

Een aan de elektrotechniek ontleend voorbeeld van een lineaire D.V. van de eerste orde is dat van een elektrische keten met constante weerstand R en constante zelf-inductie L , die aangesloten is op een wisselspanning. Hiervoor geldt:

$$L \frac{di}{dt} + i(t)R = U_0 \sin \omega t \quad (9.11)$$

Hierin zijn U_0 en ω constant; i is de stroomsterkte in de keten, opgevat als functie van de tijd (zie ook fig. 13).

Stellen we: $i(t) = u(t) \cdot v(t)$, dan is (9.11) equivalent met het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{dv}{dt} + Rv(t) &= 0 \\ Lv(t) \frac{du}{dt} &= U_0 \sin \omega t \\ i(t) &= u(t) \cdot v(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

De eerste D.V. van (9.12) heeft als oplossing:

$$v(t) = e^{-\frac{R}{L}t}$$

waardoor de tweede D.V. van (9.12) overgaat in:

$$\frac{du}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t$$

Het te integreren rechterlid is van het type $e^{at} \sin bt$, de berekening van $u(t)$ volgt door partiële integratie. De primitieven van $e^{at} \sin bt$ zijn voor te stellen door:

$$\frac{e^{at} \sin(bt - \varphi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} + C$$

waarin

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ en } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Hieruit volgt voor $u(t)$ de waarde:

$$u(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{\frac{R}{L}t} \sin(\omega t - \varphi) + C$$

en voor $i(t) = u(t)v(t)$:

$$i(t) = \frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

waarin

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ en } \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

In de elektrotechniek noemt men ωL de inductieve reactantie, $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ de impedantie en $C e^{-\frac{R}{L}t}$ de kortsluitstroom.

Soms is een D.V. niet-lineair als we y opvatten als afhankelijk van x , maar wel indien we x opvatten als afhankelijk van y .

Voorbeeld 7

De D.V.:

$$xy' = \sin y$$

is niet lineair als we y opvatten als afhankelijk van x (in verband met de term $\sin y$).

De D.V.:

$$\sin y \frac{dx}{dy} = x$$

is echter wel lineair indien we x opvatten als afhankelijk van y .

We kunnen dan deze laatste D.V. oplossen. Indien x als functie van y een inverse bezit, dan kunnen we weer y uitdrukken in x .

Voorbeeld 8

De D.V.:

$$(y^3 - 2xy^2 + x)y' = y(1 - y^2)$$

is niet-lineair indien we stellen: $y = f(x)$. Denken we ons echter: $x = g(y)$, dan kunnen we schrijven:

$$y(1 - y^2)g'(y) + (2y^2 - 1)g(y) = y^3$$

Dit is een lineaire D.V. voor g als functie van y .

Soms kan een D.V. door een eenvoudige substitutie worden herleid tot een lineaire D.V. Dit is b.v. het geval met de (niet-lineaire) D.V. van Bernoulli:

$$y' + yP(x) = y^n Q(x) \quad (n \neq 1, n \neq 0)$$

Voor $n = 0$, resp. 1 zou hier een lineaire D.V. staan. Het is duidelijk dat voor $n > 0$ de functie die identiek nul is, aan de D.V. voldoet. Indien echter $y \neq 0$, en indien we stellen: $y = f(x)$, dan geldt:

$$\frac{1}{\{f(x)\}^n} \frac{df}{dx} + \frac{1}{\{f(x)\}^{n-1}} P(x) = Q(x) \quad (9.13)$$

We voeren nu een nieuwe functie g in die met f samenhangt als volgt:

$$g(x) = \frac{1}{\{f(x)\}^{n-1}}$$

Hiervoor geldt:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{(1-n)}{\{f(x)\}^n} \cdot \frac{df}{dx}$$

zodat (9.13) overgaat in:

$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dg}{dx} + P(x)g(x) = Q(x)$$

Dit is een lineaire D.V. voor g als functie van x .

10 Lineaire differentiaalvergelijkingen van de n -de orde ($n > 1$)

Zoals reeds in par. 9 is opgemerkt, heeft de lineaire D.V. van de orde n de gedaante:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (10.1)$$

Hierin zijn de functies a_i en b continu in een zeker interval I en is $a_n(x) \neq 0 \forall x \in I$. Indien $b(x) = 0 \forall x \in I$, noemen we de D.V. gereduceerd (homogeen); indien $b(x)$ niet voor alle $x \in I$ de waarden nul aanneemt, noemen we de D.V. niet-gereduceerd (inhomogeen).

Teneinde het schrijfwerk te bekorten, voeren we de differentiaaloperator D in, die gedefinieerd wordt als:

$$D \cdot f(x) = f'(x)$$

terwijl we verder nog definiëren de n -de macht van deze operator als:

$$D^n \cdot f(x) = f^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

waarbij $D^0 \cdot f(x) = f(x)$.

Voor de som en het produkt van deze operatoren definiëren we:

$$(D^n + D^m) \cdot f(x) = D^n \cdot f(x) + D^m \cdot f(x)$$

$$D^n D^m \cdot f(x) = D^n \{D^m \cdot f(x)\}$$

Uit de laatste regel volgt:

$$D^n D^m = D^{n+m} = D^m D^n$$

Het produkt van een functie van x met een macht van die operator definiëren we door:

$$P(x)D^n \cdot f(x) = P(x)f^{(n)}(x)$$

De som van een functie van x en een macht van die operator definiëren we door:

$$\{P(x) + D^n\} \cdot f(x) = P(x)f(x) + D^n \cdot f(x)$$

$$\{D^n + P(x)\} \cdot f(x) = D^n \cdot f(x) + P(x)f(x)$$

Als we stellen: $y = f(x)$, dan is bijv.:

$$(D^3 + x^2 D^2 + 5D - 6) \cdot y = \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} - 6y$$

We kunnen eenvoudig nagaan dat voor constante a en b geldt:

$$(D + a)(D + b) \cdot y = \{D^2 + (a + b)D + ab\} \cdot y = y'' + (a + b)y' + aby$$

De regel:

$$\{D + a(x)\}\{D + b(x)\} = D^2 + \{a(x) + b(x)\}D + a(x)b(x)$$

geldt echter *niet* voor niet-constante a en b . Immers:

$$\begin{aligned} \{D + a(x)\}\{D + b(x)\} \cdot y &= \{D + a(x)\} \cdot \{y' + b(x)y\} \\ &= y'' + b'(x)y + b(x)y' + a(x)y' + a(x)b(x)y \\ &= y'' + \{a(x) + b(x)\}y' + \{b'(x) + a(x)b(x)\}y \\ &= [D^2 + \{a(x) + b(x)\}D + b'(x) + a(x)b(x)] \cdot y \end{aligned}$$

We voeren nu verder in de operator L , gedefinieerd door:

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)D^0$$

dus door:

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(x)D^i$$

De algemene lineaire D.V. van de orde n (10.1) kunnen we kortweg opschrijven als:

$$L \cdot y = b(x)$$

Stelling

De operator L is een lineaire operator, d.w.z.

$$L \cdot (\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda L \cdot y_1 + \mu L \cdot y_2$$

indien λ en μ constanten zijn.

Bewijs:

$$\begin{aligned} L \cdot (\lambda y_1 + \mu y_2) &= \sum_{i=0}^n a_i(x)D^i \cdot (\lambda y_1 + \mu y_2) = \sum_{i=0}^n a_i(x)(D^i \cdot \lambda y_1 + D^i \cdot \mu y_2) \\ &= \sum_{i=0}^n \{a_i(x)\lambda D^i \cdot y_1 + a_i(x)\mu D^i \cdot y_2\} \\ &= \lambda \sum_{i=0}^n a_i(x)D^i \cdot y_1 + \mu \sum_{i=0}^n a_i(x)D^i \cdot y_2 \\ &= \lambda L \cdot y_1 + \mu L \cdot y_2 \end{aligned}$$

Met behulp van de operator L kunnen we nu op eenvoudige wijze het verband aantonen dat er bestaat tussen de oplossingen van de inhomogene D.V.:

$$L \cdot y = b(x) \tag{10.2}$$

en de bijbehorende homogene D.V.:

$$L \cdot y = 0 \tag{10.3}$$

Vooraf geven we eerst de volgende stelling.

Existentiëstelling

De lineaire D.V. van de orde n :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

waarbij op een zeker interval I geldt:

a a_0, a_1, \dots, a_n en b zijn continue functies in I ,

b $a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

bezit één en slechts één oplossing f die in een gegeven punt $x_0 \in I$ voldoet aan de volgende beginvoorwaarden:

$$f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y_1, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

waarbij y_0, y_1, \dots, y_{n-1} willekeurig voorgeschreven getallen zijn.

Deze stelling zullen we zonder bewijs accepteren.

Opmerking:

Voor een lineaire D.V. van de orde 2 betekent dit b.v. dat we van een oplossingskromme kunnen eisen dat deze door een voorgeschreven punt gaat en daar een voorgeschreven richting heeft.

Met betrekking tot het verband tussen de oplossingen van de homogene en die van de inhomogene D.V. geldt de volgende stelling.

Stelling

We krijgen alle oplossingen van de inhomogene D.V. (10.2) door één particuliere oplossing daarvan achtereenvolgens te vermeerderen met alle oplossingen van de homogene D.V. (10.3).

Zie ook de stelling in par. 9.

Bewijs:

Stel dat de volledige verzameling oplossingen van (10.3) is:

$$V = \{\dots, f_i, \dots\}$$

waarin i een zekere indexverzameling J doorloopt. Stel verder dat φ_0 een particuliere oplossing is van (10.2). De bewering is dan dat de verzameling W , gedefinieerd door:

$$W = \{\dots, f_i + \varphi_0, \dots\} \quad (i \in J)$$

de volledige verzameling oplossingen voorstelt van (10.2). We bewijzen daartoe dat elke functie in W voldoet aan (10.2) en dat elke oplossing van (10.2) behoort tot W . Neem een element van W , b.v. $f_j + \varphi_0$, dan geldt, omdat $f_j \in V$ dus $L \cdot f_j(x) = 0$ en omdat φ_0 voldoet aan (10.2), tevens $L \cdot \varphi_0(x) = b(x)$.

Op grond van de lineariteit van L geldt dan:

$$\begin{aligned}L \cdot (f_j + \varphi_0)(x) &= L \cdot \{f_j(x) + \varphi_0(x)\} \\ &= L \cdot f_j(x) + L \cdot \varphi_0(x) \\ &= 0 + b(x) = b(x)\end{aligned}$$

M.a.w. $f_j + \varphi_0$ voldoet aan (10.2).

Omgekeerd geldt voor een willekeurige oplossing g van (10.2):

$$L \cdot g(x) = b(x)$$

Ook geldt:

$$L \cdot \varphi_0(x) = b(x)$$

zodat:

$$\begin{aligned}L \cdot (g - \varphi_0)(x) &= L \cdot \{g(x) - \varphi_0(x)\} \\ &= L \cdot g(x) - L \cdot \varphi_0(x) \\ &= b(x) - b(x) = 0\end{aligned}$$

Dus $g - \varphi_0$ voldoet aan (10.3), d.w.z.

$$g = \varphi_0 + f_k \quad (\text{voor zekere } k \text{ uit } J)$$

Hieruit volgt dat $g \in W$. Hiermee is de stelling volledig bewezen.

Het is zaak voor de oplossing van (10.2) om alle oplossingen te kennen van (10.3) en één particuliere oplossing van (10.2).

11 Lineaire afhankelijkheid van functies. Determinant van Wronski*

Definitie 1

De functies f_1, f_2, \dots, f_n heten *lineair afhankelijk* op het interval I , indien er (eventueel niet-reële) getallen c_1, c_2, \dots, c_n bestaan, die niet alle nul zijn, zodanig dat

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Definitie 2

De functies f_1, f_2, \dots, f_n heten *lineair onafhankelijk* op het interval I indien zij niet lineair afhankelijk zijn op I .

* J. M. Hoene-Wronski, 1778–1853.

In dit geval volgt uit:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

dat

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Voorbeeld 1

De functies: $x \mapsto 1$; $x \mapsto \sin^2 x$; $x \mapsto \cos^2 x$ zijn lineair afhankelijk op \mathbb{R} , daar

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot \sin^2 x - 1 \cdot \cos^2 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 2

De functies: $x \mapsto 1$; $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$ zijn lineair onafhankelijk op elk deelinterval I van \mathbb{R} , daar de vergelijking:

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0$$

bij gegeven c_1 , c_2 en c_3 nooit meer dan twee wortels kan hebben, zodat dus zeker niet kan gelden:

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0 \quad \forall x \in I$$

Voorbeeld 3

De functies $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ zijn niet lineair afhankelijk op \mathbb{R} . Stel dat er getallen c_1 en c_2 bestaan, zodanig dat

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dan geldt:

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left\{ \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin x + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos x \right\} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dus:

$$\sin(x + \varphi_0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

met $\tan \varphi_0 = \frac{c_2}{c_1}$.

Maar $\sin(x + \varphi_0) = 0$ geldt dan en slechts dan als $x = -\varphi_0 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), dus zeker niet voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 4

De functies $x \mapsto e^{ax}$, $x \mapsto e^{bx}$ ($a \neq b$) zijn lineair onafhankelijk op ieder interval I . Stel dat er getallen c_1 en c_2 bestaan, zodanig dat

$$c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} = 0 \quad \forall x \in I \quad (11.1)$$

dan zou ook de volgende betrekking gelden die uit (11.1) door differentiatie volgt:

$$ac_1 e^{ax} + bc_2 e^{bx} = 0 \quad \forall x \in I \quad (11.2)$$

De determinant van het stelsel vergelijkingen voor c_1 en c_2 , gevormd door (11.1) en (11.2) is:

$$\begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ ae^{ax} & be^{bx} \end{vmatrix} = (b-a)e^{(a+b)x} \neq 0$$

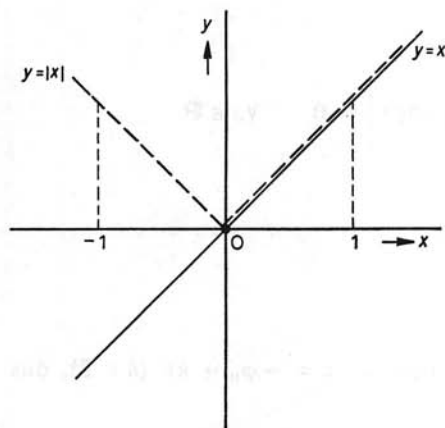
zodat alleen de nuloplossing $c_1 = c_2 = 0$ mogelijk is. De functies $x \mapsto e^{ax}$ en $x \mapsto e^{bx}$ zijn dus lineair onafhankelijk op I .

Het volgende voorbeeld illustreert dat lineaire afhankelijkheid of onafhankelijkheid niet alleen van de betrokken functies, maar ook van het betrokken interval afhangt.

Voorbeeld 5

De functies $x \mapsto x$ en $x \mapsto |x|$ zijn lineair afhankelijk op $[0, 1]$, maar lineair onafhankelijk op $[-1, 1]$ (zie fig. 18).

Fig. 18



a Op $[0, 1]$ geldt: $|x| = x$. We zien: $1 \cdot x - 1 \cdot |x| = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

b De lineaire onafhankelijkheid op $[-1, 1]$ blijkt als volgt:

Stel $c_1x + c_2|x| = 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$, dan geldt dit voor $x = 1$, dus $c_1 + c_2 = 0$; maar ook voor $x = -1$, dus $-c_1 + c_2 = 0$. Hieruit volgt: $c_1 = c_2 = 0$.

We veronderstellen dat de functies f_1, f_2, \dots, f_n elk $(n-1)$ maal differentieerbaar zijn op het interval I . We leiden daaruit een *noodzakelijke* voorwaarde af voor lineaire afhankelijkheid, die echter niet steeds een voldoende voorwaarde zal blijken te zijn.

Indien de genoemde functies lineair afhankelijk zijn op I , dan bestaan er constanten c_1, c_2, \dots, c_n die niet alle nul zijn, zodat:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

dus ook:

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x) = 0$$

.....

$$c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0$$

voor alle waarden van $x \in I$.

Dit stelsel vergelijkingen heeft voor elke waarde $x \in I$ een oplossing c_1, c_2, \dots, c_n , ongelijk aan de nuloplossing, dan en slechts dan als

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in I$$

Deze determinant wordt *determinant van Wronski (Wronskiaan)* genoemd en aangegeven door $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$, of met $W\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$.

Het op I identiek nul zijn van de determinant van Wronski is dus een *noodzakelijke* voorwaarde opdat de $(n-1)$ maal differentieerbare functies lineair afhankelijk zijn op I . Een direct gevolg is dat, indien $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ niet identiek nul is op I , de functies f_1, f_2, \dots, f_n ook niet lineair afhankelijk zijn op I .

Voorbeeld 6

De functies f_1, f_2, \dots, f_n met

$$f_1(x) = e^{t_1 x}, f_2(x) = e^{t_2 x}, \dots, f_n(x) = e^{t_n x}$$

waarin de constanten t_1, t_2, \dots, t_n alle verschillend zijn, zijn lineair onafhankelijk. Immers:

$$\begin{aligned}
W(e^{t_1 x}, e^{t_2 x}, \dots, e^{t_n x}) &= \begin{vmatrix} e^{t_1 x} & e^{t_2 x} & \dots & e^{t_n x} \\ t_1 e^{t_1 x} & t_2 e^{t_2 x} & \dots & t_n e^{t_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} e^{t_1 x} & t_2^{n-1} e^{t_2 x} & \dots & t_n^{n-1} e^{t_n x} \end{vmatrix} \\
&= e^{(t_1+t_2+\dots+t_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= e^{(t_1+t_2+\dots+t_n)x} \cdot \prod_{\substack{k,l \\ (k>l)}}^n (t_k - t_l) \neq 0 \quad (\text{Vandermonde})
\end{aligned}$$

De voorwaarde $W\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \forall x \in I$ is echter in het algemeen *niet voldoende* voor lineaire afhankelijkheid, hetgeen uit het volgende voorbeeld blijkt.

Voorbeeld 7

Stel:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad \text{en} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

dan zijn f_1 en f_2 lineair onafhankelijk op \mathbb{R} , want uit

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

zou volgen:

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \quad (\text{als we } x = 1 \text{ kiezen})$$

en

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \quad (\text{als we } x = -1 \text{ kiezen})$$

dus $c_1 = c_2 = 0$.

De Wronskiaan van f_1 en f_2 is echter identiek nul, want

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{als } x \geq 0$$

en

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{als } x \leq 0$$

We zullen in een volgende paragraaf zien, dat als f_1, f_2, \dots, f_n oplossingen zijn van een homogene lineaire D.V. van de orde n , de voorwaarde: $W(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$ nodig *en* voldoende is voor lineaire afhankelijkheid.

12 De homogene differentiaalvergelijking van de orde n

In deze paragraaf besteden we aandacht aan de homogene lineaire D.V. van de orde n :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (12.1)$$

waarin de functies $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ continu zijn in een zeker interval I , terwijl $a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$.

In verkorte notatie: $L \cdot y = 0$.

Volgens de existentiëstelling, genoemd in par. 10, bestaat er precies één oplossing f die in een gegeven punt $x_0 \in I$ een voorgeschreven waarde aanneemt, terwijl ook de $(n-1)$ afgeleiden: $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ in x_0 voorgeschreven waarden hebben. We zullen de volgende stellingen bewijzen.

Stelling 1

Iedere lineaire combinatie van oplossingen met coëfficiënten in \mathbb{C} van (12.1) is eveneens een oplossing van (12.1).

Stelling 2

Er bestaan n , op I lineair onafhankelijke oplossingen die een z.g. fundamenteel stelsel vormen.

Stelling 3

Iedere oplossing van (12.1) is te schrijven als een lineaire combinatie van de in stelling 2 genoemde lineair onafhankelijke oplossingen.

Stelling 4

Als g_1, g_2, \dots, g_n een willekeurig stelsel lineair onafhankelijke oplossingen is, dan is iedere oplossing te schrijven als een lineaire combinatie van deze oplossingen.

Stelling 5

Indien f_1, f_2, \dots, f_n oplossingen zijn van (12.1), dan is

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$$

een noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat deze functies lineair afhankelijk zijn op I .

Opmerking 1:

De inhoud van de stellingen 1...4 is in wezen de bewering dat de oplossingsverzameling van (12.1) een n -dimensionale vectorruimte is over het lichaam van de complexe getallen.

Opmerking 2:

Een logisch gevolg van stelling 5 is, dat $W\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \neq 0$ een noodzakelijk en voldoende voorwaarde is, opdat de oplossingen f_1, f_2, \dots, f_n van (12.1) *lineair onafhankelijk* zijn.

Bewijs van Stelling 1:

Als f_1, f_2, \dots, f_k oplossingen van $L \cdot y = 0$ zijn, dan geldt:

$$L \cdot f_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

en dus op grond van de lineariteit van L :

$$L \cdot \sum_{i=1}^k c_i f_i(x) = \sum_{i=1}^k c_i L \cdot f_i(x) = \sum_{i=1}^k c_i (L \cdot f_i(x)) = 0 \quad (\forall c_i \in \mathbb{C})$$

waaruit volgt dat $\sum_{i=1}^k c_i f_i(x)$ ook een oplossing is van (12.1).

Uit een oogpunt van overzichtelijkheid zullen we de Stellingen 2, 3 en 4 bewijzen voor een D.V. van orde 2. Voor hogere orden gaat het bewijs analoog en levert geen speciale moeilijkheden.

Bewijs van Stelling 2:

Laat gegeven zijn de D.V.:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (12.2)$$

waarin a_i continu is in I .

Als $x_0 \in I$, dan bestaan er volgens de existentiëlestelling oplossingen f_1 en f_2 van (12.2), die voldoen aan de beginvoorwaarden: $f_1(x_0) = 1$; $f_1'(x_0) = 0$; $f_2(x_0) = 0$; $f_2'(x_0) = 1$.

We bewijzen nu dat f_1 en f_2 lineair onafhankelijk zijn op I . Veronderstel dat er constanten c_1 en c_2 zouden bestaan, zodanig dat

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

dan zou gelden:

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

In het bijzonder zou dit gelden voor x_0 . Substitutie $x = x_0$ geeft: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. f_1 en f_2 zijn dus lineair onafhankelijk op I . We zeggen dan dat zij een *fundamenteelstelsel* vormen.

Bewijs van Stelling 3:

Stel dat h een oplossing is van (12.2) en dat $h(x_0) = A$ en $h'(x_0) = B$. Beschouw de functie h_1 , gedefinieerd voor alle $x \in I$ door:

$$h_1(x) = Af_1(x) + Bf_2(x)$$

waarin f_1 en f_2 de in stelling 2 ingevoerde functies zijn. Het is dan direct duidelijk dat

$$h_1(x_0) = A = h(x_0)$$

$$h_1'(x_0) = B = h'(x_0)$$

De functies h en h_1 hebben blijkbaar in x_0 dezelfde waarden en dezelfde afgeleiden. Volgens de existentiëlestelling zijn ze dan identiek op I . Er geldt dus:

$$h(x) = Af_1(x) + Bf_2(x) \quad \forall x \in I$$

Bewijs van Stelling 4:

In Stelling 3 hebben we iedere oplossing van (12.2) uitgedrukt in twee *speciaal gekozen* lineair onafhankelijke oplossingen. We moeten nu aantonen dat, als f en g twee *willekeurige* lineair onafhankelijke oplossingen zijn, voor iedere oplossing h van (12.2) geldt:

$$h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \quad \forall x \in I \tag{12.3}$$

met geschikt gekozen $\lambda \in \mathbb{C}$ en $\mu \in \mathbb{C}$.

We nemen een punt $x_0 \in I$ en stellen $h(x_0) = A$ en $h'(x_0) = B$. We kiezen λ en μ nu zodanig dat:

$$\left. \begin{aligned} \lambda f(x_0) + \mu g(x_0) &= A \\ \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0) &= B \end{aligned} \right\} \tag{12.4}$$

Hieruit zijn λ en μ op te lossen dan en slechts dan, indien

$$\begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Dit laatste is inderdaad het geval, want f en g zijn op I lineair onafhankelijke oplossingen van een homogene lineaire D.V. Volgens stelling 5 (die we hierna onafhankelijk van stelling 4 zullen bewijzen) geldt dan dat de Wronskiaan:

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ g'(x) & f'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I$$

Nu geldt in x_0 :

$$h(x_0) = \lambda f(x_0) + \mu g(x_0) \text{ en } h'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$$

We zullen laten zien dat (12.3) geldt voor $\forall x \in I$ met de uit (12.4) gevonden waarden voor λ en μ . Daartoe beschouwen we de functie h_1 , gedefinieerd door:

$$h_1(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

Volgens stelling 1 is h_1 ook een oplossing van de D.V. (12.2) en wel één, die in x_0 met h overeenstemt, terwijl in x_0 ook geldt (zie (12.4)):

$$h'(x_0) = h'_1(x_0)$$

Op grond van de eenduidigheid van de oplossing geldt voor alle $x \in I$:

$$h_1(x) = h(x)$$

d.w.z.

$$h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \quad \forall x \in I$$

Hiermede is stelling 4 bewezen.

Bewijs van Stelling 5:

In par. 11 zagen we dat, indien f_1, f_2, \dots, f_n lineair afhankelijke oplossingen zijn van (12.1), geldt:

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$$

We moeten nog bewijzen:

Als voor de oplossingen f_1, f_2, \dots, f_n op I geldt:

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$$

dan zijn de functies f_1, f_2, \dots, f_n lineair afhankelijk op I .

Is $x_0 \in I$, dan zijn er constanten c_1, c_2, \dots, c_n (niet alle nul!), zodanig dat:

$$\left. \begin{aligned} c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0) + \dots + c_n f_n(x_0) &= 0 \\ c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) + \dots + c_n f_n'(x_0) &= 0 \\ \dots & \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 f_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

daar $W\{f_1, f_2, \dots, f_n\} = 0 \quad \forall x \in I$, dus zeker voor $x_0 \in I$.

We definiëren nu op I de functie g door:

$$g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

Volgens Stelling 1 is g een oplossing van (12.1) en volgens (12.5) is:

$$g(x_0) = 0, g'(x_0) = 0, \dots, g^{(n-1)}(x_0) = 0$$

De triviale oplossing y_0 die op I identiek nul is, is ook een oplossing van (12.1). Hiervoor geldt ook:

$$y_0(x_0) = 0, y_0'(x_0) = 0, \dots, y_0^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Aangezien er volgens de existentiëlestelling, genoemd in par. 10, slechts één oplossing is met de voorgeschreven waarden van de functie en zijn eerste $(n - 1)$ afgeleiden, geldt ook voor g :

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

of:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

d.w.z. de functies f_1, f_2, \dots, f_n zijn op I lineair afhankelijk.

Opmerking 3:

Uit stelling 5 volgt dat, indien de Wronskiaan in één punt van I de waarde nul heeft, deze voor alle $x \in I$ de waarde nul heeft.

Het bepalen van de algemene oplossing is, althans „in gesloten vorm”, slechts in een zeer beperkt aantal gevallen mogelijk. In de volgende paragraaf zullen we behandelen de homogene lineaire D.V. met constante coëfficiënten en de homogene lineaire D.V. van Euler. Andere typen zullen we in niet-gesloten vorm moeten oplossen door middel van reeksontwikkelingen of via numerieke methoden.

13 De homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

Bij het oplossen van de homogene lineaire D.V. in de gedaante:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (13.1)$$

waarin a_i reële constanten zijn ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), proberen we een oplossing te bepalen in de vorm:

$$y = e^{\alpha x}$$

waarbij α een nader te bepalen reële of niet-reële constante is. Indien $e^{\alpha x}$ voldoet, dan blijkt na substitutie in (13.1), wegens $y^{(k)} = \alpha^k e^{\alpha x}$, dat moet gelden:

$$(a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) e^{\alpha x} = 0$$

Daar $e^{\alpha x} \neq 0$, moet α voldoen aan:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (13.2)$$

Deze vergelijking heet de *karakteristieke vergelijking* van (13.1). Eenvoudig blijkt dat als α voldoet aan (13.2) de functie bepaald door $y = e^{\alpha x}$ voldoet aan (13.1).

We onderscheiden drie gevallen:

- a (13.2) heeft n verschillende reële wortels;
- b (13.2) heeft n verschillende wortels, waaronder ook niet-reële voorkomen;
- c (13.2) heeft ook meervoudige wortels.

Ad. a

Indien (13.2) n verschillende reële wortels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ heeft, dan beschikken we over n oplossingen, t.w. $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$. Deze zijn volgens par. 11, voorbeeld 6, lineair onafhankelijk. Volgens par. 12 is dus de algemene oplossing van (13.1):

$$y = \sum_{k=1}^n C_k \cdot e^{\alpha_k x}$$

Hierin zijn de coëfficiënten C_k willekeurige complexe constanten.

Voorbeeld 1

Los op de D.V.:

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Oplossing:

De karakteristieke vergelijking is:

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

met als oplossingen: $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$.

De algemene oplossing van de D.V. is dus:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

Ad. b

Indien de karakteristieke vergelijking een niet-reële wortel heeft, b.v. $a + bi$ (a en b reëel), dan is ook de toegevoegde complexe $a - bi$ een wortel van de karakteristieke vergelijking, daar de coëfficiënten alle reëel zijn (zie deel 1, par. 51). We beschikken dan niet alleen over de particuliere oplossing f met

$$f(x) = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

maar ook over de oplossing g met

$$g(x) = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$$

Uit het lineaire karakter van de D.V. volgt dat f^* en g^* ook oplossingen zijn, indien we definiëren:

$$f^*(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x)\}$$

en

$$g^*(x) = \frac{1}{2i}\{f(x) - g(x)\}$$

Dus:

$$f^*(x) = e^{ax} \cos bx$$

en

$$g^*(x) = e^{ax} \sin bx$$

Verder is het eenvoudig na te gaan dat de lineaire onafhankelijkheid van de oplossingen y_1, y_2, \dots, y_n niet verstoord wordt, indien we twee oplossingen, b.v. y_j en y_k vervangen door resp. $\frac{1}{2}(y_j + y_k)$ en $\frac{1}{2i}(y_j - y_k)$. Dit betekent dat we met de toegevoegd complexe enkelvoudige wortels $a + bi$ en $a - bi$ van de karakteristieke vergelijking kunnen laten corresponderen de oplossingen: $e^{ax} \cos bx$ en $e^{ax} \sin bx$.

Voorbeeld 2

Los op de D.V.:

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0 \quad (13.3)$$

Oplossing:

De karakteristieke vergelijking van (13.3) is:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 9\alpha + 13 = 0$$

of:

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4\alpha + 13) = 0$$

met als wortels: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2 + 3i$, $\alpha_3 = 2 - 3i$.

De algemene oplossing van (13.3) is dus te schrijven als:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x$$

Ad. c

Indien de karakteristieke vergelijking meervoudige wortels heeft, dan heeft deze vergelijking dus minder dan n verschillende wortels, b.v. m .

De bijbehorende oplossingen: $y_1 = e^{\alpha_1 x}$, $y_2 = e^{\alpha_2 x}$, ..., $y_m = e^{\alpha_m x}$ vormen geen fundamenteelsysteem. Om nu toch tot een fundamenteelsysteem te komen, bewijzen we de volgende stelling.

Stelling

Indien α_0 een k -voudige wortel is van de volgende karakteristieke vergelijking:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (13.4)$$

dan heeft de homogene lineaire D.V.:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

als particuliere oplossingen:

$$e^{\alpha_0 x}, x e^{\alpha_0 x}, x^2 e^{\alpha_0 x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha_0 x}$$

Bewijs:

We stellen het linkerlid van (13.4) voor door $P(\alpha)$ en herinneren aan de stelling (zie deel 1, par. 120): Indien α_0 een k -voudige wortel is van de vergelijking: $P(\alpha) = 0$, dan voldoet α_0 ook aan de vergelijkingen:

$$P'(\alpha) = 0, P''(\alpha) = 0, \dots, P^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

We beschouwen in $e^{\alpha x}$ zowel x als α als onafhankelijke variabelen. We merken op dat hier bij partiële differentiaties de volgorde verwisseld mag worden, d.w.z.:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} e^{\alpha x} \right) = \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{\alpha x} \right)$$

Indien we, zoals gebruikelijk, de lineaire operator L invoeren als:

$$L = \sum_{i=0}^n a_i D^i$$

dan moeten we, als we α en x als onafhankelijke variabelen beschouwen, de operator D opvatten als $\frac{\partial}{\partial x}$ in plaats van $\frac{d}{dx}$.

We merken nog op dat $x e^{\alpha x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{\alpha x}$. We kunnen dan op grond van de lineariteit van L schrijven:

$$L \cdot x e^{\alpha x} = L \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{\alpha x} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (L \cdot e^{\alpha x}) \quad (13.5)$$

Nu geldt:

$$L \cdot e^{\alpha x} = \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i}{\partial x^i} e^{\alpha x} = \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i e^{\alpha x} = e^{\alpha x} P(\alpha)$$

en dus:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (L \cdot e^{\alpha x}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \{e^{\alpha x} P(\alpha)\} = x e^{\alpha x} P(\alpha) + e^{\alpha x} P'(\alpha) \quad (13.6)$$

Uit (13.5) en (13.6) volgt:

$$L \cdot x e^{\alpha x} = x e^{\alpha x} P(\alpha) + e^{\alpha x} P'(\alpha) \quad (13.7)$$

Indien α_0 een tweevoudige wortel is van (13.4), dan geldt: $P(\alpha_0) = 0$ en $P'(\alpha_0) = 0$. Wegens (13.7) geldt dan:

$$L \cdot x e^{\alpha_0 x} = 0$$

d.w.z. naast $e^{\alpha_0 x}$ voldoet ook $x e^{\alpha_0 x}$ aan de D.V.

Door partiële differentiatie van (13.7) naar α vinden we:

$$L \cdot x^2 e^{\alpha x} = x^2 e^{\alpha x} P(\alpha) + 2x e^{\alpha x} P'(\alpha) + e^{\alpha x} P''(\alpha)$$

Hieruit volgt, dat als α_0 een drievoudige wortel is van $P(\alpha) = 0$ en dus voldoet aan $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$ en $P''(\alpha) = 0$, ook $x^2 e^{\alpha_0 x}$ aan de D.V. voldoet. Zo doorgaande zien we dat, als α_0 een k -voudige wortel is van (13.4),

$$e^{\alpha_0 x}, x e^{\alpha_0 x}, x^2 e^{\alpha_0 x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha_0 x}$$

voldoen aan de lineaire homogene D.V.:

$$L \cdot y = 0$$

De voorgaande redenering blijft geldig als α_0 een k -voudige complexe wortel is van (13.4). Dan is ook de toegevoegd complexe wortel $\bar{\alpha}_0$ een k -voudige wortel. We kunnen de bijbehorende niet-reële oplossingen van de D.V.: $L \cdot y = 0$ twee aan twee samennemen, waardoor we weer reële oplossingen krijgen.

Als $\alpha_0 = a + bi$ een k -voudige oplossing is van (13.4), dan zijn de bijbehorende oplossingen van de D.V.:

$$x^j e^{ax} \cos bx, x^j e^{ax} \sin bx \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k-1)$$

Wanneer (13.4) een aantal reële of niet-reële enkelvoudige wortels heeft en een aantal verschillende reële of niet-reële meervoudige wortels, dan krijgen we op deze wijze juist n verschillende oplossingen. Hiervan kunnen we de lineaire onafhankelijkheid α op \mathbb{R} aantonen door te bewijzen dat de bijbehorende determinant van Wronski voor minstens één $x \in \mathbb{R}$ verschilt van nul.

Voorbeeld 3

Los op de D.V.:

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

Oplossing:

De karakteristieke vergelijking is:

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$$

of:

$$(\alpha - 1)^2(\alpha + 2) = 0$$

met als oplossingen: $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

De algemene oplossing van de D.V. is:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

Voorbeeld 4

Los op de D.V.:

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4 = 0$$

Oplossing:

De karakteristieke vergelijking is:

$$\alpha^4 + 4\alpha^3 + 8\alpha^2 + 8\alpha + 4 = 0$$

of:

$$(\alpha^2 + 2\alpha + 2)^2 = 0$$

De vergelijking: $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$ heeft als wortels: $\alpha_1 = -1 + i$ en $\alpha_2 = -1 - i$.

De karakteristieke vergelijking heeft deze wortels dubbel, zodat de algemene oplossing van de D.V. is:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$$

14 De homogene lineaire differentiaalvergelijking van Euler

In het geval dat de coëfficiënten van de homogene lineaire D.V.:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

de bijzondere gedaante hebben:

$$a_k(x) = A_k(a + bx)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n; a \text{ en } b \text{ reële constanten, } A_k \text{ reëel en alleen afhankelijk van } k)$$

noemen we deze D.V. een *homogene lineaire D.V. van Euler*.

De algemene gedaante daarvan is:

$$A_n(a + bx)^n y^{(n)} + A_{n-1}(a + bx)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots \\ + A_1(a + bx)y' + A_0 y = 0 \quad (14.1)$$

Deze D.V. is terug te brengen tot een homogene lineaire D.V. met constante coëfficiënten door de substitutie:

$$a + bx = e^u \quad (\text{indien } a + bx > 0) \\ -(a + bx) = e^u \quad (\text{indien } a + bx < 0)$$

of algemeen:

$$a + bx = \sigma e^u$$

waarin $\sigma = +1$ als $a + bx > 0$ en $\sigma = -1$ als $a + bx < 0$.

Bij deze substitutie wordt x afhankelijk van u :

$$x = x^*(u) \quad \left(\text{d.w.z. } x = \frac{\sigma e^u - a}{b} \right)$$

en

$$u = u^*(x) \quad \left(\text{d.w.z. } u = \ln \frac{a + bx}{\sigma}, \text{ dus } u = \ln|a + bx| \right)$$

Hierdoor gaat $y = f(x)$ over in:

$$y = f\{x^*(u)\} = f^*(u) = f^*\{u^*(x)\}$$

zodat $y' = \frac{df}{dx}$ overgaat in:

$$y' = \frac{df^*}{du} \cdot \frac{du^*}{dx}$$

Nu geldt echter:

$$\frac{du^*}{dx} = \frac{be^{-u}}{\sigma}$$

waardoor we krijgen:

$$y' = \frac{be^{-u}}{\sigma} \frac{df^*}{du} \quad (14.2)$$

De term $A_1(a + bx)y'$ gaat dus over in:

$$A_1 \sigma e^u \cdot \frac{be^{-u}}{\sigma} \cdot \frac{df^*}{du} = A_1 b \frac{df^*}{du}$$

Differentiatie van (14.2) naar x geeft:

$$y'' = \left\{ -\frac{be^{-u}}{\sigma} \frac{df^*}{du} + \frac{be^{-u}}{\sigma} \frac{d^2f^*}{du^2} \right\} \frac{du^*}{dx}$$

$$= \frac{b^2 e^{-2u}}{\sigma^2} \left\{ -\frac{df^*}{du} + \frac{d^2f^*}{du^2} \right\}$$

Hierdoor gaat de term $A_2(a + bx)^2 y''$ over in:

$$A_2 b^2 \left(-\frac{df^*}{du} + \frac{d^2f^*}{du^2} \right)$$

Gaan we zo door, dan blijkt dat iedere term van (14.1) overgaat in een lineaire combinatie van afgeleiden van f^* naar u met constante coëfficiënten. (14.1) gaat dus over in een homogene lineaire D.V. met constante coëfficiënten.

Voorbeeld

Los op de D.V.:

$$(2+x)^3 y''' + (2+x)y'' + 3(2+x)y' - 8y = 0 \quad (14.3)$$

Oplossing:

Stel $2+x = \sigma e^u$, waarbij $\sigma = +1$ als $2+x > 0$ en $\sigma = -1$ als $2+x < 0$.

Dan geldt (notaties als hiervoor):

$$y' = \frac{df^*}{du} \cdot \frac{du^*}{dx} = \frac{e^{-u}}{\sigma} \cdot \frac{df^*}{du}$$

$$y'' = \left(-\frac{e^{-u}}{\sigma} \cdot \frac{df^*}{du} + \frac{e^{-u}}{\sigma} \cdot \frac{d^2f^*}{du^2} \right) \frac{du^*}{dx}$$

$$= \frac{e^{-2u}}{\sigma^2} \left(\frac{d^2f^*}{du^2} - \frac{df^*}{du} \right)$$

$$y''' = \left\{ \frac{e^{-2u}}{\sigma^2} \left(\frac{d^3f^*}{du^3} - \frac{d^2f^*}{du^2} \right) - 2 \frac{e^{-2u}}{\sigma^2} \left(\frac{d^2f^*}{du^2} - \frac{df^*}{du} \right) \right\} \frac{du^*}{dx}$$

$$= \frac{e^{-3u}}{\sigma^3} \left(\frac{d^3f^*}{du^3} - 3 \frac{d^2f^*}{du^2} + 2 \frac{df^*}{du} \right)$$

Substitutie in (14.3) geeft de D.V.:

$$\frac{d^3f^*}{du^3} - 2 \frac{d^2f^*}{du^2} + 4 \frac{df^*}{du} - 8f^*(u) = 0 \quad (14.4)$$

waarvan de karakteristieke vergelijking is:

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0$$

of:

$$(\alpha - 2)(\alpha^2 + 4) = 0$$

De wortels hiervan zijn: $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 2i$, $\alpha_3 = -2i$.

De algemene oplossing van (14.4) is:

$$f^*(u) = C_1 e^{2u} + C_2 \cos 2u + C_3 \sin 2u$$

Omdat $u = \ln|2 + x|$ is de oplossing van (14.3):

$$y = C_1(2 + x)^2 + C_2 \cos \{2 \ln|2 + x|\} + C_3 \sin \{2 \ln|2 + x|\}$$

15 De inhomogene lineaire differentiaalvergelijking

In par. 10 is aangetoond dat we alle oplossingen van de inhomogene lineaire D.V. krijgen door alle oplossingen van de bijbehorende homogene D.V. te vermeerderen met één particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking. In de volgende paragrafen zullen we twee methoden aangeven voor het bepalen van een particuliere oplossing van de inhomogene D.V., en wel (evenals bij de lineaire D.V. van de 1ste orde) de methode van „gokken” en de methode van variatie van constanten.

De methode van „gokken” of „gissen” of „proberen” van een oplossing berust daarop, dat we op grond van de gedaante van het rechterlid van de D.V. een verstandige keuze doen ten aanzien van een mogelijke oplossing van de D.V. We laten daarin een aantal constanten optreden, die we achteraf zó bepalen, dat we inderdaad een oplossing krijgen. We zullen van deze methode een aantal voorbeelden geven.

Voorbeeld 1

Los op de D.V.:

$$y'' - 3y' + 2y = x^3$$

Oplossing:

De algemene oplossing van de gereduceerde D.V.:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

luit:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Gezien het rechterlid van de D.V. kunnen we vermoeden dat er een particuliere oplossing bestaat die de gedaante heeft van een veelterm van de graad 3, dus:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Substitutie in de D.V. geeft:

$$(6a_3x + 2a_2) - 3(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) + 2(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = x^3$$

dus:

$$2a_3x^3 + (-9a_3 + 2a_2)x^2 + (6a_3 - 6a_2 + 2a_1)x + 2a_2 - 3a_1 + 2a_0 = x^3 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Dit geeft de volgende vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} 2a_3 = 1 \\ -9a_3 + 2a_2 = 0 \\ 6a_3 - 6a_2 + 2a_1 = 0 \\ 2a_2 - 3a_1 + 2a_0 = 0 \end{array} \right\}$$

Aan dit stelsel vergelijkingen wordt voldaan door: $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 2\frac{1}{4}$, $a_1 = 5\frac{1}{4}$ en $a_0 = 5\frac{5}{8}$.

Een particuliere oplossing van de D.V. is bepaald door:

$$y = \frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{4}x^2 + 5\frac{1}{4}x + 5\frac{5}{8}$$

De algemene oplossing is bepaald door:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{4}x^2 + 5\frac{1}{4}x + 5\frac{5}{8}$$

Voorbeeld 2

Los op de D.V.:

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}$$

Oplossing:

De algemene oplossing van de gereduceerde D.V. is bepaald door:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x$$

Als particuliere oplossing van de D.V. proberen we ae^{2x} . Dit geeft de eis:

$$(4a - 4a + a)e^{2x} = e^{2x} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Dus $a = 1$, zodat een particuliere oplossing van de D.V. is e^{2x} en de algemene oplossing:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + e^{2x}$$

Een voorbeeld dat hierop lijkt, doch waarvan de oplossing anders verloopt is het volgende.

Voorbeeld 3

Los op de D.V.:

$$y'' - 2y' + y = e^x \quad (15.1)$$

Oplossing:

Aangezien de gereduceerde D.V. als algemene oplossing heeft: $C_1 e^x + C_2 x e^x$, hoeven we als particuliere oplossing van (15.1) niet te proberen $a e^x$ of $a x e^x$, omdat deze bij substitutie in het linkerlid van (15.1) nul opleveren. Echter lukt wel een oplossing van de gedaante: $a x^2 e^x$. Substitutie daarvan in (15.1) levert:

$$2a e^x + 4a x e^x + a x^2 e^x - 4a x e^x - 2a x^2 e^x + a x^2 e^x = e^x$$

of:

$$2a e^x = e^x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

dus $a = \frac{1}{2}$.

De algemene oplossing van (15.1) is:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

Voorbeeld 4

Los op de D.V.:

$$y'' - 3y' + 2y = 20 \sin 2x \quad (15.2)$$

Oplossing:

Het ligt voor de hand een particuliere oplossing te proberen van de gedaante:

$$a_1 \sin 2x + a_2 \cos 2x$$

Substitutie hiervan in de D.V. geeft:

$$(-2a_1 + 6a_2) \sin 2x - (6a_1 + 2a_2) \cos 2x = 20 \sin 2x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Dit geeft de eis:

$$\left. \begin{array}{l} -2a_1 + 6a_2 = 20 \\ 6a_1 + 2a_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Hieruit vinden we: $a_1 = -1$ en $a_2 = 3$.

De oplossing van de gereduceerde D.V. is:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

zodat de algemene oplossing van (15.2) gegeven wordt door:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \sin 2x + 3 \cos 2x$$

Voorbeeld 5

Los op de D.V.:

$$y'' + 4y = \cos 2x \quad (15.3)$$

Oplossing:

De gereduceerde D.V. heeft als karakteristieke vergelijking: $\alpha^2 + 4 = 0$, met als wortels: $\alpha_1 = 2i$ en $\alpha_2 = -2i$, zodat de algemene oplossing daarvan gegeven wordt door:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Hieruit blijkt dat we als particuliere oplossing van (15.3) niet hoeven te proberen: $a_1 \cos 2x + a_2 \sin 2x$, daar dit het linkerlid van (15.3) nul maakt.

We proberen nu een oplossing van de gedaante:

$$a_1 x \cos 2x + a_2 x \sin 2x$$

Bij substitutie in (15.3) blijkt dat a_1 en a_2 moeten voldoen aan:

$$-4a_1 \sin 2x + 4a_2 \cos 2x = \cos 2x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Dit levert: $a_1 = 0$ en $a_2 = \frac{1}{4}$.

De algemene oplossing van (15.3) wordt derhalve bepaald door:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x$$

Voordat we de methode van variatie van constanten gaan bespreken, zullen we eerst een bijzonder belangrijk voorbeeld behandelen, nl. de z.g. *trillingsvergelijking*.

16 De trillingsvergelijking; de vrije trilling

In deze paragraaf besteden we speciale aandacht aan een bepaalde lineaire D.V. van de tweede orde met constante coëfficiënten, die van groot belang is voor de toepassingen, de z.g. *trillingsvergelijking*. We nemen t als onafhankelijk variabele (in fysische toepassingen is t de tijd) en $x(t)$ is de met t variërende afhankelijk variabele. De eerste en tweede afgeleide daarvan geven we aan met $\dot{x}(t)$ en $\ddot{x}(t)$. De algemene gedaante

van de trillingsvergelijking geven we als:

$$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

h en k zijn reële constanten en $t \in I$. Indien $f(t) = 0$ ($\forall t \in I$), dan spreken we van een *vrije trilling*, anders van een *gedwongen trilling*.

In deze paragraaf bespreken we het geval van de vrije trilling met $f(t) = 0$ ($\forall t \in I$).

We onderscheiden daarbij de volgende gevallen:

a het geval $h = 0$;

b het geval $h \neq 0$.

In par. 18 zullen we het geval van de gedwongen trilling behandelen.

Geval a

In dit geval heeft de D.V. de gedaante:

$$\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

We onderscheiden de volgende drie gevallen:

1 $k = 0$;

2 $k > 0$;

3 $k < 0$.

a1

Als $k = 0$, geldt voor de oplossing:

$$x(t) = C_1 t + C_2$$

waarin C_1 en C_2 constanten zijn, die door de beginvoorwaarden bepaald worden.

a2

Als $k > 0$, stellen we: $k = \omega_0^2$, waardoor de vergelijking wordt:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

met als karakteristieke vergelijking:

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

waarvan de wortels zijn: $\alpha_1 = \omega_0 i$ en $\alpha_2 = -\omega_0 i$.

De algemene oplossing is dus:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

waarin C_1 en C_2 door de beginvoorwaarden worden vastgelegd. We herleiden dit antwoord tot:

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left\{ \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega_0 t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega_0 t \right\}$$

Als we een hulphoek φ_0 invoeren, gedefinieerd door:

$$\sin \varphi_0 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi)$$

dan vinden we:

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Dit is een z.g. *harmonische trilling*. Hierin heet $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ de *amplitude* (dit is de maximale waarde van $x(t)$); ω_0 heet de *cirkelfrequentie*; $\frac{2\pi}{\omega_0}$ heet de *trillingstijd*; φ_0 noemen we de *fasehoek* (zie fig. 19). Een fysisch voorbeeld is het in par. 2 genoemde massa-veersysteem.

Fig. 19

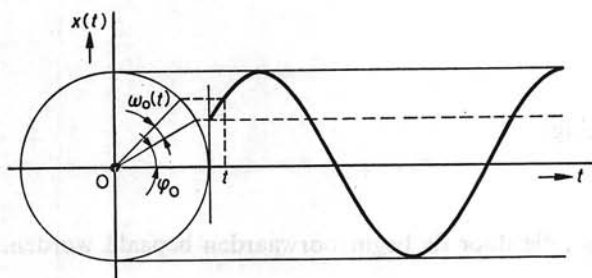
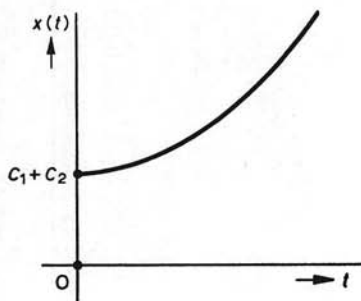


Fig. 20



a3

Als $k < 0$, stellen we $k = -p^2$ ($p > 0$). De D.V. wordt dan:

$$\ddot{x}(t) - p^2 x(t) = 0$$

met als karakteristieke vergelijking:

$$\alpha^2 - p^2 = 0 \quad (\alpha_1 = p, \alpha_2 = -p)$$

Als algemene oplossing van de D.V. geldt:

$$x(t) = C_1 e^{-pt} + C_2 e^{pt}$$

Indien de beginvoorwaarden zo zijn dat $C_2 \neq 0$, dan geldt: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$. Zie voor het verloop van $x(t)$ in dit geval fig. 20.

Geval b

De D.V. heeft de gedaante:

$$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (h \neq 0)$$

We onderscheiden de volgende drie gevallen:

- 1 $h^2 - k < 0$;
- 2 $h^2 - k > 0$;
- 3 $h^2 - k = 0$.

b1

In dit geval is $k > 0$. We stellen $h^2 - k = -\omega^2$. De karakteristieke vergelijking: $\alpha^2 + 2h\alpha + k = 0$, kunnen we dan schrijven in de gedaante:

$$(\alpha + h)^2 + \omega^2 = 0$$

De wortels hiervan zijn: $\alpha_1 = -h + \omega i$ en $\alpha_2 = -h - \omega i$. De algemene oplossing van de D.V. is:

$$x(t) = C_1 e^{-ht} \cos \omega t + C_2 e^{-ht} \sin \omega t$$

of:

$$x(t) = e^{-ht} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

met

$$\sin \varphi_0 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \quad \text{en} \quad \cos \varphi_0 = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \quad (\varphi_0 \in [0, 2\pi])$$

Als $h > 0$, wordt de amplitude van de trillende beweging bij toenemende t steeds kleiner. We spreken dan van een *gedempte* trilling (zie fig. 21).

Als $h < 0$, wordt de amplitude bij toenemende t steeds groter.

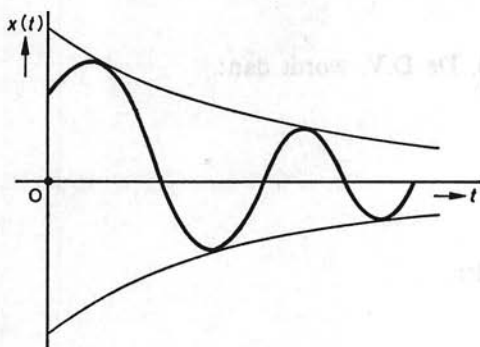


Fig. 21

b2

We onderscheiden drie gevallen:

- 2.1 $k > 0$;
- 2.2 $k < 0$;
- 2.3 $k = 0$.

b2.1

$k > 0$. Daar voor de wortels α_1 en α_2 van de karakteristieke vergelijking geldt: $\alpha_1 + \alpha_2 = -h$ en $\alpha_1\alpha_2 = k$, zijn, als $h > 0$, beide wortels negatief. Stellen we deze voor door $-p^2$ en $-q^2$, dan luidt de oplossing van de D.V.:

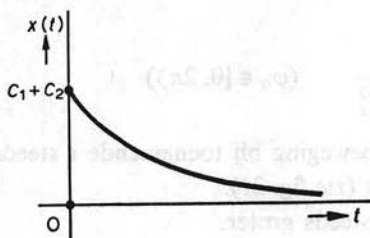
$$x(t) = C_1 e^{-p^2 t} + C_2 e^{-q^2 t}$$

Voorts geldt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Het verloop van de grafiek van $x(t)$ is geschetst in fig. 22. De beweging is dan sterk gedempt.

Fig. 22



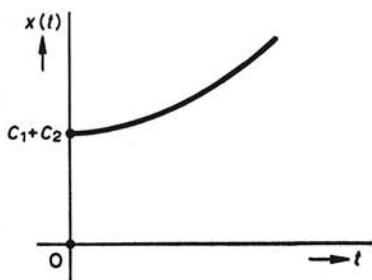


Fig. 23

Als $h < 0$, zijn beide wortels positief. Stellen we deze voor door r^2 en s^2 , dan luidt de oplossing van de D.V.:

$$x(t) = C_1 e^{r^2 t} + C_2 e^{s^2 t}$$

en geldt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$$

(zie fig. 23).

b2.2

$k < 0$. De karakteristieke vergelijking heeft nu een positieve en één negatieve wortel. Duiden we deze aan met p^2 en $-q^2$, dan luidt de oplossing van de D.V. in dit geval:

$$x(t) = C_1 e^{p^2 t} + C_2 e^{-q^2 t}$$

Indien de beginvoorwaarden zo zijn dat $C_1 \neq 0$, dan geldt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$$

Het verloop van de grafiek van $x(t)$ is geschetst in fig. 23.

b2.3

$k = 0$. De D.V. is dan:

$$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) = 0$$

We stellen $\dot{x}(t) = y(t)$. De D.V. gaat over in:

$$\dot{y}(t) + 2hy(t) = 0$$

waarvan de algemene oplossing is:

$$y = C_1 e^{-2ht}$$

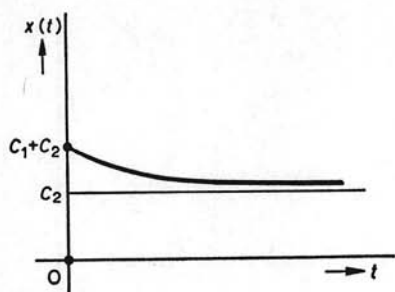


Fig. 24

zodat:

$$x(t) = -\frac{C_1}{2h} e^{-2ht} + C_2$$

of:

$$x(t) = C_1^* e^{-2ht} + C_2$$

Het is duidelijk dat dit een gedempte trilling voorstelt als $h > 0$ is (zie fig. 24).

b3

De karakteristieke vergelijking luidt in dit geval: $(\alpha + h)^2 = 0$, met als wortels: $\alpha_1 = -h$ en $\alpha_2 = -h$. De D.V. heeft als oplossing:

$$x(t) = C_1 e^{-ht} + C_2 t e^{-ht}$$

Als $h > 0$, geldt: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. In dit geval spreken we van een *kritische* demping.

Als $h < 0$ is, geldt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.

Opmerking:

We zien dat in al deze gevallen bij $h < 0$ de trilling bij toenemende t onbeperkt toeneemt. In fysische voorbeelden wordt een wrijvingskracht (dempingskracht) gerepresenteerd door een positieve h .

17 De elektrische keten zonder generator

Een voorbeeld van de trillingsvergelijking wordt gegeven door de z.g. *L-C-R-keten*, d.w.z. een elektrisch circuit met condensator (capaciteit C , lading $Q(t)$), zelfinductie L , weerstand R , met stroomsterkte $i(t)$ (zie fig. 25).

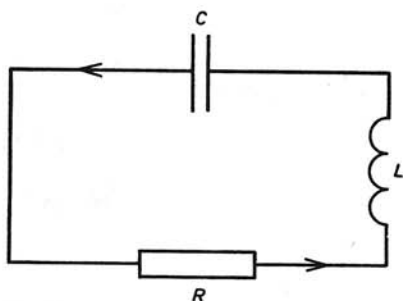


Fig. 25

Volgens de tweede wet van Kirchoff* geldt:

$$\frac{Q(t)}{C} + L \frac{di}{dt} + Ri(t) = 0$$

Daar $\frac{dQ}{dt} = i(t)$, volgt door differentiatie naar t :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0$$

of:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = 0 \quad (17.1)$$

De karakteristieke vergelijking van (17.1) luidt:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L} \alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

en heeft tot wortels:

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}} \quad \text{en} \quad \alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$$

Indien $R^2C - 4L < 0$, dan ontstaat in de keten een gedempte trilling (zie par. 16, geval *bI*). Er geldt dan:

$$i(t) = i_{\max} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

waarin i_{\max} de maximale stroomsterkte in de keten voorstelt en $\omega^2 = \frac{4L - R^2C}{4L^2C}$. φ_0 hangt af van de begintoestand.

* G. R. Kirchoff, 1824-1887.

18 De gedwongen trilling

In het geval van een gedwongen trilling heeft de D.V. de gedaante:

$$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (18.1)$$

We beperken ons tot de situatie waarin f een periodieke functie is. We nemen aan:

$$f(t) = P \sin \omega_1 t \quad (\omega_1 \neq 0, P > 0)$$

In par. 16 hebben we in de onderscheiden gevallen de algemene oplossing van de gereduceerde D.V. bepaald. We moeten dus slechts nog een particuliere oplossing van (18.1) bepalen.

Gezien de opmerking aan het eind van par. 16 zullen we ons hier beperken tot de gevallen $h \geq 0$ en onderscheiden daarbij:

- a $h = 0$;
- b $h > 0$.

Geval a

$h = 0$. De D.V. heeft de gedaante:

$$\ddot{x}(t) + kx(t) = P \sin \omega_1 t \quad (18.2)$$

We onderscheiden vervolgens weer drie gevallen:

- 1 $k = 0$;
- 2 $k > 0$;
- 3 $k < 0$.

a1 $k = 0$. Door directe integratie volgt:

$$x(t) = -\frac{P}{\omega_1^2} \sin \omega_1 t + C_1 t + C_2$$

a2 $k > 0$. We stellen $k = \omega_0^2$. Als particuliere oplossing proberen we:

$$x(t) = Q \sin \omega_1 t$$

Substitutie in (18.2) geeft:

$$(-\omega_1^2 + \omega_0^2)Q \sin \omega_1 t = P \sin \omega_1 t$$

De eis voor Q wordt dan:

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)Q = P$$

We moeten dus nu weer verdere gevallen onderscheiden.

a2.1 $\omega_1^2 \neq \omega_0^2$.

In dit geval is $Q = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$. De algemene oplossing van (18.2) is:

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{P}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t$$

(zie par. 16, geval a2).

a2.2 $\omega_0^2 = \omega_1^2$.

Een oplossing van de gedaante $Q \sin \omega_1 t$ ($= Q \sin \omega_0 t$) voldoet dan reeds aan de gereduceerde D.V. en geeft bij substitutie in (18.2) als resultaat nul. We proberen als particuliere oplossing van (18.2):

$$x(t) = Qt \sin \omega_0 t + Rt \cos \omega_0 t$$

Dan geldt:

$$\dot{x}(t) = Q \sin \omega_0 t + \omega_0 Qt \cos \omega_0 t + R \cos \omega_0 t - \omega_0 Rt \sin \omega_0 t$$

$$\ddot{x}(t) = 2\omega_0 Q \cos \omega_0 t - \omega_0^2 Qt \sin \omega_0 t - 2\omega_0 R \sin \omega_0 t - \omega_0^2 Rt \cos \omega_0 t$$

Substitutie in (18.2) levert:

$$2\omega_0 Q \cos \omega_0 t - 2\omega_0 R \sin \omega_0 t = P \sin \omega_0 t$$

zodat:

$$R = -\frac{P}{2\omega_0} \text{ en } Q = 0$$

De algemene oplossing van (18.2) is dus:

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{P}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

We zien dat voor toenemende t de term

$$-\frac{P}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

gaat overheersen. De beweging wordt dan in hoofdzaak bepaald door de „opgelegde” trilling. We spreken in dit geval van *resonantie*.

a3 $k < 0$. We stellen dan: $k = -p^2$ ($p > 0$). Als particuliere oplossing van (18.2) vinden we:

$$-\frac{P}{p^2 + \omega_1^2} \sin \omega_1 t \quad (p^2 + \omega_1^2 \neq 0)$$

Voor de algemene oplossing (zie par. 16, geval a3) geldt:

$$x(t) = C_1 e^{-pt} + C_2 e^{pt} - \frac{P}{p^2 + \omega_1^2} \sin \omega_1 t$$

Geval b

De D.V. heeft de gedaante:

$$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + kx(t) = P \sin \omega_1 t \quad (18.3)$$

Ook nu onderscheiden we weer twee gevallen:

- 1 $k = 0$;
- 2 $k \neq 0$.

b1 $k = 0$. We stellen: $\dot{x}(t) = y(t)$. (18.3) gaat dan over in:

$$\dot{y}(t) + 2hy(t) = P \sin \omega_1 t \quad (18.4)$$

De algemene oplossing van de gereduceerde D.V. hiervan is (zie par. 16, geval b2.3):

$$y = C_1 e^{-2ht}$$

Als particuliere oplossing van (18.4) proberen we:

$$Q \sin \omega_1 t + R \cos \omega_1 t$$

Substitutie in (18.4) levert:

$$(\omega_1 Q + 2hR) \cos \omega_1 t + (-\omega_1 R + 2hQ) \sin \omega_1 t = P \sin \omega_1 t$$

Dus is:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 Q + 2hR &= 0 \\ 2hQ - \omega_1 R &= P \end{aligned} \right\}$$

waaruit we vinden:

$$Q = \frac{2hP}{\omega_1^2 + 4h^2} \quad \text{en} \quad R = \frac{-\omega_1 P}{\omega_1^2 + 4h^2}$$

De algemene oplossing van (18.4) is dus:

$$y(t) = C_1 e^{-2ht} + \frac{2hP}{\omega_1^2 + 4h^2} \sin \omega_1 t - \frac{\omega_1 P}{\omega_1^2 + 4h^2} \cos \omega_1 t$$

en die van (18.3) met $k = 0$:

$$x(t) = -\frac{C_1}{2h} e^{-2ht} - \frac{2hP}{\omega_1(\omega_1^2 + 4h^2)} \cos \omega_1 t - \frac{P}{\omega_1^2 + 4h^2} \sin \omega_1 t + C_2$$

b2 $k \neq 0$. We bepalen eerst een particuliere oplossing van de D.V. (18.3) en wel een oplossing van de gedaante:

$$x(t) = Q \sin \omega_1 t + R \cos \omega_1 t$$

Substitutie in (18.3) geeft:

$$(-\omega_1^2 Q - 2\omega_1 h R + kQ) \sin \omega_1 t + (-\omega_1^2 R + 2\omega_1 h Q + kR) \cos \omega_1 t = P \sin \omega_1 t$$

Q en R moeten voldoen aan:

$$\left. \begin{aligned} (k - \omega_1^2)Q - 2\omega_1 h R &= P \\ 2\omega_1 h Q + (k - \omega_1^2)R &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De determinant van dit stelsel is:

$$\begin{vmatrix} k - \omega_1^2 & -2\omega_1 h \\ 2\omega_1 h & k - \omega_1^2 \end{vmatrix} = (k - \omega_1^2)^2 + 4h^2 \omega_1^2 \neq 0$$

daar $\omega_1 \neq 0$ en tevens $h \neq 0$.

Q en R zijn dus op te lossen. We vinden als particuliere oplossing van (18.3):

$$x(t) = Q \sin \omega_1 t + R \cos \omega_1 t = \sqrt{Q^2 + R^2} \sin(\omega_1 t + \psi_0)$$

met

$$Q = \frac{P(k - \omega_1^2)}{(k - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2 h^2} \quad \text{en} \quad R = \frac{-2\omega_1 h P}{(k - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2 h^2} \quad (18.5)$$

en

$$\sin \psi_0 = \frac{R}{\sqrt{Q^2 + R^2}} \quad \text{en} \quad \cos \psi_0 = \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + R^2}} \quad (\psi_0 \in [0, 2\pi))$$

Voor de algemene oplossing van de gereduceerde D.V. (18.3) maken we voor dit geval weer dezelfde driedeling als in par. 16, geval b.

b2.1 $h^2 - k < 0$.

We stellen: $h^2 - k = -\omega^2$. Voor dit geval wordt de algemene oplossing van (18.3):

$$x(t) = e^{-ht} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega t + \varphi_0) + \sqrt{Q^2 + R^2} \sin(\omega_1 t + \psi_0) \quad (18.6)$$

(zie par. 16, geval b₁).

Nu zal, daar $h > 0$, bij grote t de term

$$\sqrt{Q^2 + R^2} \sin(\omega_1 t + \psi_0)$$

„overheersen”, omdat $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ht} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$. Voor grote t wordt dan dus de bewegingstoestand nagenoeg geheel bepaald door de „opgelegde” trilling $P \sin \omega_1 t$.

b2.2 $h^2 - k > 0$.

We stellen: $h^2 - k = p^2$ en vinden dan (zie par. 16, gevallen b2.1 en b2.2):

$$x(t) = C_1 e^{(-h+p)t} + C_2 e^{(-h-p)t} + \sqrt{Q^2 + R^2} \sin(\omega_1 t + \psi_0)$$

b2.3 $h^2 - k = 0$.

We vinden (zie par. 16, geval b3):

$$x(t) = C_1 e^{-ht} + C_2 t e^{-ht} + \sqrt{Q^2 + R^2} \sin(\omega_1 t + \psi_0)$$

We willen nu nog iets dieper ingaan op het geval b2.1 met $h^2 - k = -\omega^2$, $h > 0$, $k > 0$, daar dit voor technische toepassingen van belang is.

De algemene oplossing van (18.3) is gegeven door (18.6).

Bij vaste h , k en P en variërende ω_1 , gaan we de verhouding bepalen tussen de amplitudo P van de „uitwendige” kracht en de amplitudo $\sqrt{Q^2 + R^2}$ van de „overheersende” resulterende trilling (zie (18.6)). Stellen we nu $k = \omega_0^2$ (ω_0 is de cirkelfrequentie van het ongedempte systeem, $\omega_0 > 0$), dan volgt op grond van (18.5):

$$Q = \frac{P(\omega_0^2 - \omega_1^2)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2 h^2} \quad \text{en} \quad R = \frac{-2\omega_1 h P}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2 h^2}$$

zodat:

$$\sqrt{Q^2 + R^2} = \frac{P}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2 h^2}}$$

Dus is, als we in de noemer onder het wortelteken een „kwadraat afsplitsen”:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{Q^2 + R^2}}{P} \omega_0^2 &= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2 h^2}} \\ &= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\{\omega_1^2 - (\omega_0^2 - 2h^2)\}^2 + \omega_0^4 - (\omega_0^2 - 2h^2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left\{ \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 - \left(1 - \frac{2h^2}{\omega_0^2} \right) \right\}^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} - \frac{4h^4}{\omega_0^4}}} \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat de grootheid $\frac{\sqrt{Q^2 + R^2}}{P} \omega_0^2$ als functie van ω_1 een maximum M aanneemt indien $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ de waarde v_M heeft, gedefinieerd door:

$$v_M = \sqrt{1 - \frac{2h^2}{\omega_0^2}} \quad (18.7)$$

v_M is echter alleen reëel indien

$$\frac{h^2}{\omega_0^2} < \frac{1}{2} \quad (18.8)$$

Voor dit maximum M geldt dan:

$$M = \frac{1}{\sqrt{\frac{4h^2}{\omega_0^2} - \frac{4h^4}{\omega_0^4}}} = \frac{1}{\frac{2h}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega_0^2}}} \quad (18.9)$$

De hier optredende noemer is wegens (18.8) reëel en van nul verschillend.

Uit (18.7) zien we dat de waarde van $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ waarvoor $\frac{\sqrt{Q^2 + R^2}}{P} \omega_0^2$ zijn maximum bereikt, des te dichter bij 1 ligt, naarmate $\frac{2h^2}{\omega_0^2}$ kleiner is. We zullen de grootheid $\frac{\omega_0}{2h}$ – om redenen, die hierna duidelijk zullen worden – de *kwaliteitsfactor* noemen. We stellen deze voor door q . (18.7) en (18.9) gaan dan over in:

$$v_M = \sqrt{1 - \frac{1}{2q^2}}$$

$$M = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q^2}}} = \frac{2q^2}{\sqrt{4q^2 - 1}}$$

We zullen laten zien dat M monotoon stijgt als q toeneemt, mits $q^2 > \frac{1}{2}$. Er geldt nl.:

$$\frac{dM}{dq} = \frac{4q(2q^2 - 1)}{(4q^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

I.v.m. (18.8) is aan $q^2 > \frac{1}{2}$ voldaan.

Als ω_1 varieert, dan varieert ook $\frac{\sqrt{Q^2 + R^2}}{P} \omega_0^2$. Deze laatste grootheid bereikt bij geschikte keuze van ω_1 een maximum. Dit maximum is des te groter naarmate q groter is. Vandaar dat men q de kwaliteitsfactor noemt.

Opmerking 1:

Het geval $q = \infty$ correspondeert met $h = 0$, dus met de ongedempte trilling. In dit geval zou het maximum bereikt worden indien $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1$, hetgeen in overeenstemming is met hetgeen we onder a2.2 vonden.

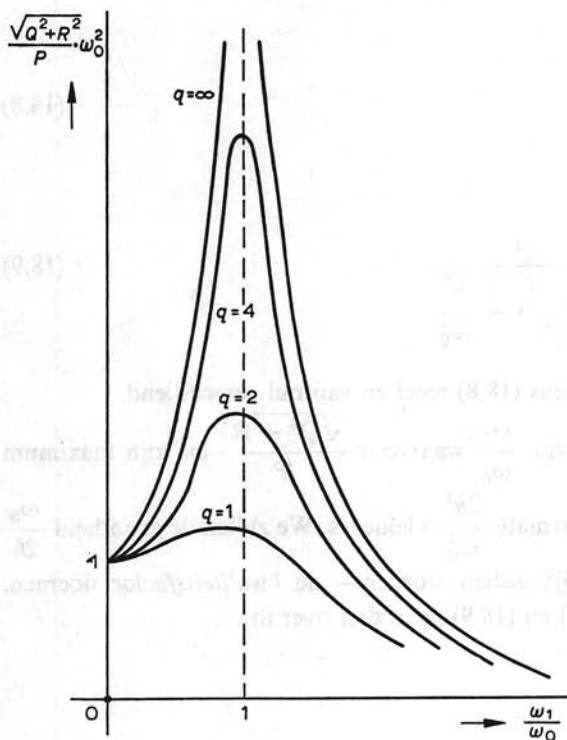


Fig. 26

Opmerking 2:

Wanneer $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ de waarde v_M aanneemt, dus $\frac{\sqrt{Q^2 + R^2}}{P} \omega_0^2$ maximaal is, spreken we ook hier van resonantie.

In fig. 26 laten we voor enkele waarden van q het verband zien tussen $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ en $\frac{\sqrt{Q^2 + R^2}}{P} \omega_0^2$.

19 De elektrische keten met generator

Een voorbeeld uit de elektrotechniek, dat aanleiding geeft tot een lineaire D.V. van het type uit par. 18 is dat van een elektrische keten met een in serie geschakelde zelfinductie L , weerstand R , capaciteit C , waarop een generator G is aangesloten (zie fig. 27).

Stellen we de spanning ten tijde t aan de condensator, gemeten in de richting van de stroom, voor door $u_C(t)$ en de lading van de condensator op dat moment door $q(t)$,

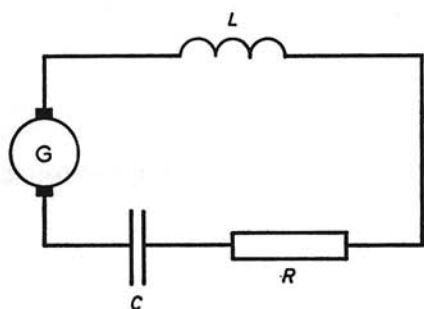


Fig. 27

dan geldt:

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

De stroomsterkte $i(t)$ ten tijde t in de keten is gelijk aan $\frac{dq}{dt}$, de spanning aan de weerstand R is:

$$u_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq}{dt}$$

De zelfinductiespanning is:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$$

De totale spanning moet gelijk zijn aan de spanning van de generator, waarvoor we nemen:

$$U_G \sin \omega_1 t$$

waarin U_G en ω_1 constant zijn, zodat geldt:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = U_G \sin \omega_1 t \quad (19.1)$$

De bijbehorende gereduceerde vergelijking van (19.1) is:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (19.2)$$

De in de keten opgewekte elektrische trilling is ongedempt indien $R = 0$. De D.V. (19.2) luidt dan:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (19.3)$$

waarvan de karakteristieke vergelijking is:

$$\alpha^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

Stellen we $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$, dan zijn de wortels: $\alpha_1 = \omega_0 i$ en $\alpha_2 = -\omega_0 i$. De oplossing van (19.3) luidt:

$$q(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

waarbij C_1 en C_2 afhankelijk van de begintoestand. Door te definiëren:

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \varphi_0 \quad \text{en} \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \varphi_0 \quad (\varphi_0 \in [0, 2\pi))$$

en

$$Q_{\max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

is deze oplossing ook voor te stellen door:

$$q(t) = Q_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Indien $R \neq 0$, is de trilling gedempt. De karakteristieke vergelijking van (19.2) is dan:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L} \alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

met wortels:

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{en} \quad \alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Indien we aannemen: $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$ en evenals in par. 17 stellen:

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = -\omega^2$$

dan vinden we als oplossing van (19.2):

$$q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{R}{2L} t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

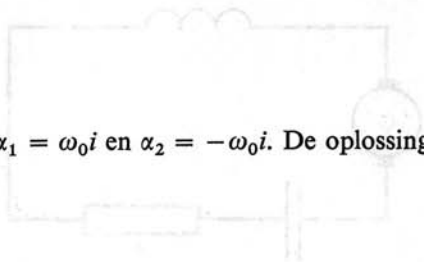
waarin Q_{\max} en φ_0 constanten zijn die van de begintoestand afhankelijk.

Om de oplossing van de volledige D.V. (19.1) te krijgen, hebben we slechts één particuliere oplossing van (19.1) te zoeken.

We proberen een oplossing van de gedaante:

$$a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \cos \omega_1 t$$

en bepalen a_1 en a_2 zó dat deze oplossing aan (19.1) voldoet.



Volgens par. 18 vinden we dat deze particuliere oplossing van (19.1) te schrijven is als:

$$Q_{\max}^* \sin(\omega_1 t + \psi_0)$$

waarbij

$$Q_{\max}^* = \frac{U_G}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_1^2\right)^2 + \frac{\omega_1^2 R^2}{L^2}}}$$

en

$$\cos \psi_0 = \frac{\frac{1}{LC} - \omega_1^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_1^2\right)^2 + \frac{\omega_1^2 R^2}{L^2}}}$$

$$\sin \psi_0 = \frac{-\omega_1 \frac{R}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_1^2\right)^2 + \frac{\omega_1^2 R^2}{L^2}}}$$

De volledige oplossing van (19.1) luidt dus:

$$q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{R}{2L} t} \sin(\omega t + \varphi_0) + Q_{\max}^* \sin(\omega_1 t + \psi_0)$$

We zien ook hier dat de eerste term, die beantwoordt aan de vrije trilling met toenemende t steeds kleiner wordt, zodat de toestand in de keten op den duur bepaald wordt door de tweede term die de „opgelegde” trilling weergeeft.

20 Variatie van constanten

Een andere methode om een particuliere oplossing van de lineaire D.V. te vinden is de *methode van variatie van constanten*. Deze methode werkt systematischer dan die in par. 15 werd beschreven, maar is bewerklijker. Daarom is deze methode in veel gevallen niet te prefereren boven de „probeer”- of „gok”methode.

De methode berust daarop dat we eerst de algemene oplossing van de gereduceerde D.V. bepalen, en vervolgens de daarin optredende constanten vervangen door functies van de onafhankelijk variabele. We moeten deze zo kiezen dat er een oplossing van de niet-gereduceerde D.V. ontstaat.

Terwille van de duidelijkheid zullen we de methode eerst demonstreren met een lineaire D.V. van de orde twee.

Stel dat de D.V.:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{20.1}$$

is en stel dat de algemene oplossing van de bijbehorende gereduceerde D.V. bepaald wordt door:

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad (\forall x \in I)$$

waarin f_1 en f_2 twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn van de gereduceerde D.V. We vervangen de constanten c_1 en c_2 door resp. $C_1(x)$ en $C_2(x)$, waarin C_1 en C_2 nader te bepalen functies van x zijn (die we voldoende vaak differentieerbaar veronderstellen) zodat:

$$y = C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x) \quad (20.2)$$

Er geldt dan:

$$y' = C_1'(x)f_1(x) + C_2'(x)f_2(x) + C_1(x)f_1'(x) + C_2(x)f_2'(x)$$

We stellen vervolgens aan C_1 en C_2 de eis:

$$C_1'(x)f_1(x) + C_2'(x)f_2(x) = 0 \quad (20.3)$$

Dan geldt dus:

$$y' = C_1(x)f_1'(x) + C_2(x)f_2'(x)$$

en derhalve:

$$y'' = C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) + C_1(x)f_1''(x) + C_2(x)f_2''(x)$$

De y uit (20.2) zal – onder de aan C_1 en C_2 in (20.3) gestelde voorwaarde – dan en slechts dan voldoen aan de D.V. (20.1) indien:

$$\begin{aligned} & a_2(x)\{C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) + C_1(x)f_1''(x) + C_2(x)f_2''(x)\} \\ & + a_1(x)\{C_1(x)f_1'(x) + C_2(x)f_2'(x)\} + a_0(x)\{C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x)\} = b(x) \end{aligned}$$

dus dan en slechts dan indien:

$$\begin{aligned} & a_2(x)\{C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x)\} \\ & + C_1(x)\{a_2(x)f_1''(x) + a_1(x)f_1'(x) + a_0(x)f_1(x)\} \\ & + C_2(x)\{a_2(x)f_2''(x) + a_1(x)f_2'(x) + a_0(x)f_2(x)\} = b(x) \end{aligned} \quad (20.4)$$

Aangezien echter f_1 en f_2 oplossingen zijn van de gereduceerde D.V. hebben de laatste twee tussen accoladen geplaatste vormen in (20.4) de waarde nul voor alle x van het beschouwde interval I . Dus is de tweede eis voor C_1 en C_2 :

$$a_2(x)\{C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x)\} = b(x)$$

De nodige en voldoende voorwaarden opdat de door (20.2) gedefinieerde functie van x voldoet aan de D.V. zijn dus:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x)f_1(x) + C_2'(x)f_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_2(x)} \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

daar $a_2(x) \neq 0$ ($\forall x \in I$).

Aangezien f_1 en f_2 volgens aanname twee op I lineair onafhankelijke oplossingen zijn van de gereduceerde lineaire D.V., geldt op I dat de Wronskiaan daarvan van nul verschilt. Dus op I geldt:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Uit het stelsel (20.5) kunnen we dus $C_1'(x)$ en $C_2'(x)$ oplossen, waarna we door integratie $C_1(x)$ en $C_2(x)$ vinden.

Voorbeeld

Bepaal een particuliere oplossing van de D.V.:

$$y'' + 4y = \cos 2x \quad (20.6)$$

Oplossing:

De bijbehorende gereduceerde D.V. luidt:

$$y'' + 4y = 0$$

en heeft als algemene oplossing:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

We proberen nu als particuliere oplossing van (20.6):

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$$

Volgens het vorenstaande moeten C_1 en C_2 voldoen aan:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x &= 0 \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x &= \cos 2x \end{aligned} \right\}$$

Dus geldt:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \cos 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = -\frac{1}{4} \sin 4x$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

Voor C_1 en C_2 kunnen we kiezen:

$$\left. \begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{16} \cos 4x \\ C_2(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x \end{aligned} \right\}$$

zodat een particuliere oplossing van (20.6) bepaald is door:

$$f(x) = \frac{1}{16} \cos 4x \cos 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x \sin 2x$$

of:

$$f(x) = \frac{1}{16} \cos 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x$$

De algemene oplossing van (20.6) is:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{16} \cos 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x$$

of ook:

$$y = c_1^* \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x$$

(zie par. 15, voorbeeld 5).

Het zal nu duidelijk zijn hoe we in het algemene geval van een D.V. van orde n te werk gaan.

Stel dat in het geval van de lineaire D.V.:

$$L \cdot y = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (x \in I) \quad (20.7)$$

het n -tal functies f_1, f_2, \dots, f_n , een op I lineair onafhankelijk stelsel oplossingen is van de bijbehorende gereduceerde D.V. We vervangen in de algemene oplossing daarvan:

$$y = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)$$

de constanten c_1, c_2, \dots, c_n door resp. $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. Er ontstaat dan een nieuwe functie, bepaald door:

$$y = \sum_{k=1}^n C_k(x) f_k(x)$$

waaruit we vinden:

$$y' = \sum_{k=1}^n C_k'(x) f_k(x) + \sum_{k=1}^n C_k(x) f_k'(x) \quad (20.8)$$

We trachten de functies C_1, C_2, \dots, C_n zó te kiezen dat

$$\sum_{k=1}^n C'_k(x) f_k(x) = 0$$

Differentiëren we (20.8), met inachtneming van deze laatste eis, dan volgt:

$$y'' = \sum_{k=1}^n C'_k(x) f'_k(x) + \sum_{k=1}^n C_k(x) f''_k(x) \quad (20.9)$$

We eisen verder ook:

$$\sum_{k=1}^n C'_k(x) f'_k(x) = 0$$

Differentiatie van (20.9) geeft dan:

$$y''' = \sum_{k=1}^n C_k(x) f'''_k(x)$$

mits we ook eisen:

$$\sum_{k=1}^n C'_k(x) f''_k(x) = 0$$

Gaan we zo door, dan geldt:

$$y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^n C_k(x) f_k^{(n-1)}(x)$$

indien

$$\sum_{k=1}^n C'_k(x) f_k^{(n-2)}(x) = 0$$

Tenslotte vinden we dan:

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^n C_k(x) f_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n C'_k(x) f_k^{(n-1)}(x)$$

Substitueren we de gevonden uitdrukkingen voor $y^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots, n$) in (20.7), dan vinden we:

$$\begin{aligned} L \cdot y &= \sum_{j=0}^n a_j(x) y^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)} + a_n(x) y^{(n)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) \left\{ \sum_{k=1}^n C_k(x) f_k^{(j)}(x) \right\} + a_n(x) \left\{ \sum_{k=1}^n C_k(x) f_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n C'_k(x) f_k^{(n-1)}(x) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^n a_j(x) \left\{ \sum_{k=1}^n C_k(x) f_k^{(j)}(x) \right\} + a_n(x) \sum_{k=1}^n C'_k(x) f_k^{(n-1)}(x) \\
 &= \sum_{k=1}^n C_k(x) \left\{ \sum_{j=0}^n a_j(x) f_k^{(j)}(x) \right\} + a_n(x) \sum_{k=1}^n C'_k(x) f_k^{(n-1)}(x)
 \end{aligned}$$

We weten dat de functies f_1, f_2, \dots, f_n voldoen aan de gereduceerde D.V. Dit betekent dat de som tussen de accoladen in de laatste vorm de waarde nul heeft voor $k = 1, 2, \dots, n$. De D.V. (20.7) kan worden herleid tot:

$$a_n(x) \left\{ \sum_{k=1}^n C'_k(x) f_k^{(n-1)}(x) \right\} = b(x)$$

of, daar $a_n(x) \neq 0$ ($\forall x \in I$), tot:

$$\sum_{k=1}^n C'_k(x) f_k^{(n-1)}(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)}$$

Ter bepaling van de functies C_1, C_2, \dots, C_n hebben we het volgende systeem van lineaire vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned}
 C'_1(x)f_1(x) + C'_2(x)f_2(x) + \dots + C'_n(x)f_n(x) &= 0 \\
 C'_1(x)f'_1(x) + C'_2(x)f'_2(x) + \dots + C'_n(x)f'_n(x) &= 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots &\dots \dots \dots \\
 C'_1(x)f_1^{(n-1)}(x) + C'_2(x)f_2^{(n-1)}(x) + \dots + C'_n(x)f_n^{(n-1)}(x) &= \frac{b(x)}{a_n(x)}
 \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

Dit stelsel is eenduidig oplosbaar daar de coëfficiëntendeterminant juist de Wronskiaan is van de op I lineair onafhankelijke oplossingen f_1, f_2, \dots, f_n en dus ongelijk aan nul.

Zijn de functies C'_k oplossingen van het stelsel (20.10), dan rest nog een integratie om de functies C_k te bepalen.

Voorbeeld

Los op de D.V.:

$$y''' - y'' + y' - y = 4 \sin x \tag{20.11}$$

Oplossing:

De karakteristieke vergelijking van de gereduceerde vergelijking luidt:

$$\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + 1) = 0$$

met als wortels $1, i$ en $-i$. De algemene oplossing van de gereduceerde D.V. is:

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

We denken ons nu verder C_1 , C_2 en C_3 als functies van x en vinden ter bepaling van C_1 , C_2 en C_3 volgens (20.10) de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x &= 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x &= 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x &= 4\sin x \end{aligned} \right\}$$

We vinden hieruit als oplossingen:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x) &= 2e^{-x}\sin x \\ C_2'(x) &= 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x \\ C_3'(x) &= -2\sin^2 x - 2\sin x \cos x \end{aligned} \right\}$$

Voor C_1 , C_2 en C_3 kunnen we kiezen:

$$\left. \begin{aligned} C_1(x) &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) \\ C_2(x) &= x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x \\ C_3(x) &= -x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x \end{aligned} \right\}$$

zodat een particuliere oplossing van (20.11) bepaald is door:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(\sin x + \cos x) + x \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x \cos x \\ &\quad + \frac{1}{2}\cos 2x \cos x - x \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x \sin x \end{aligned}$$

of wel:

$$f(x) = -\frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + x \cos x - x \sin x$$

De algemene oplossing van (20.11) is dus:

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + x \cos x - x \sin x$$

of ook:

$$y = c_1 e^x + c_2^* \cos x + c_3^* \sin x + x \cos x - x \sin x$$

21 Het oplossen van een differentiaalvergelijking door middel van ordeverlaging

In een aantal gevallen lukt het om een D.V. op te lossen door middel van ordeverlaging. Hiermee bedoelen we het volgende.

Uit de gegeven D.V. wordt een nieuwe D.V. in een andere onbekende functie afgeleid, zó dat deze nieuwe D.V. van lagere orde is dan de gegeven D.V. Uit de ingevoerde nieuwe functie, die hieruit wordt opgelost, kan dan de oorspronkelijk gevraagde functie worden berekend.

We zullen deze methode in een drietal gevallen aan de hand van voorbeelden illustreren.

21.1 De gegeven D.V. bevat de afhankelijk veranderlijke y niet expliciet

Voorbeeld

Bepaal de algemene oplossing van de D.V.:

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} = 1 \quad (x \neq 1, x \neq -1)$$

Oplossing:

We stellen: $\frac{dy}{dx} = z(x)$.

De functie z moet dan voldoen aan de D.V.:

$$(1 - x^2) \frac{dz}{dx} - 2xz(x) = 1$$

Dit is een lineaire D.V. voor de functie z , die we kunnen oplossen op één van de bekende manieren (zie par. 9); b.v. door te stellen: $z(x) = u(x) \cdot v(x)$.

We vinden dan:

$$(1 - x^2)\{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\} - 2xu(x)v(x) = 1$$

of:

$$(1 - x^2)u'(x)v(x) + u(x)\{(1 - x^2)v'(x) - 2xv(x)\} = 1$$

We eisen nu:

$$(1 - x^2)v'(x) - 2xv(x) = 0$$

waaraan b.v. voldoet:

$$v(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

De functie u moet dan nog voldoen aan:

$$u'(x) = 1$$

dus:

$$u(x) = x + C_1$$

waaruit volgt:

$$z(x) = \frac{x + C_1}{1 - x^2}$$

y moet voldoen aan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - x^2} + \frac{C_1}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} + \frac{1}{2}C_1 \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right)$$

waaruit we oplossen:

$$y(x) = -\frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + \frac{1}{2}C_1 \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C_2 \quad (x \neq 1, x \neq -1)$$

21.2 De gegeven D.V. bevat de onafhankelijk veranderlijke x niet expliciet

Voorbeeld

Bepaal de algemene oplossing van de D.V.:

$$y(y - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \quad (21.1)$$

Oplossing:

Het principe van de methode is dat we de afgeleide functie y' , die in eerste instantie van x afhangt, gaan opvatten als een functie van y :

$$\frac{dy}{dx} = z(y)$$

Volgens de kettingregel geldt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y)$$

Hierdoor gaat (21.1) over in:

$$y(y - 1) \frac{dz}{dy} z(y) + \{z(y)\}^2 = 0$$

Dus:

a $z(y) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$, dus $y(x) = A$ (constant)

b $z(y) \neq 0$, dus:

$$y(y - 1) \frac{dz}{dy} + z(y) = 0$$

We veronderstellen: $y \neq 0$, $y \neq 1$; dan geldt:

$$\frac{1}{z(y)} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{-1}{y(y-1)}$$

of:

$$\frac{1}{z(y)} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}$$

waaruit volgt:

$$\ln |z(y)| = \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| + B^*$$

dus:

$$z(y) = B \frac{y}{y-1} \quad (B \neq 0)$$

Dit levert:

$$\frac{dy}{dx} = B \frac{y}{y-1}$$

of:

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = B$$

en dus:

$$y - \ln |y| = Bx + C \quad (B \neq 0)$$

Achteraf blijkt dat $y = 0$ en $y = 1$ ook aan de D.V. voldoen. Deze oplossingen zijn echter al vervat in de oplossing van geval 21.2a (kies nl. $A = 0$, resp. $A = 1$), zodat alle oplossingen bepaald worden door:

$$y = A$$

en

$$y - \ln |y| = Bx + C \quad (B \neq 0)$$

Opmerking 1:

Dat we de functie y' kunnen opvatten als functie van y , zoals in geval 21.2 is toegepast, is onder bepaalde voorwaarden mogelijk. We geven hiervan een voorbeeld.

Stel $y = \arctan x$, dan geldt: $x = \tan y$. Dus geldt voor de afgeleide: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Deze hangt af van y op de volgende wijze:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \cos^2 y$$

m.a.w.:

$$\frac{dy}{dx} = z(y) \quad (z(y) = \cos^2 y)$$

Opmerking 2:

Een voorbeeld van een D.V. die zowel onder 21.1 als 21.2 valt, is:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

De lezer verifiëre zelf, dat de oplossing hiervan is:

$$y(x) = \ln|Ae^x + e^{-x}| + B$$

$y = x$ voldoet ook.

21.3 De gegeven D.V. is een lineaire D.V., terwijl van de bijbehorende gereduceerde D.V. een oplossing bekend is

Voorbeeld

Bepaal de algemene oplossing van de lineaire D.V.:

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2 \frac{dy}{dx} - (1 + x^2)y = 0 \quad (x^2 \neq 1) \quad (21.2)$$

als gegeven is dat de functie $y: x \mapsto e^x$ een particuliere oplossing is.

Oplossing:

We voeren een nieuwe functie z in, gedefinieerd door:

$$y(x) = z(x)e^x$$

Hiervoor geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} e^x + z(x)e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} e^x + 2 \frac{dz}{dx} e^x + z(x)e^x$$

Substitutie in (21.2) geeft:

$$(1 - x^2) \left\{ \frac{d^2 z}{dx^2} e^x + 2 \frac{dz}{dx} e^x + z(x) e^x \right\} \\ + 2x^2 \left\{ \frac{dz}{dx} e^x + z(x) e^x \right\} - (1 + x^2) z(x) e^x = 0$$

of:

$$(1 - x^2) \left\{ \frac{d^2 z}{dx^2} e^x + 2 \frac{dz}{dx} e^x \right\} \\ + 2x^2 \frac{dz}{dx} e^x + z(x) \{ (1 - x^2) e^x + 2x^2 e^x - (1 + x^2) e^x \} = 0$$

Hierin is de laatste vorm tussen accoladen juist 0, daar $x \mapsto e^x$ voldoet aan de gegeven D.V., m.a.w. z voldoet aan:

$$(1 - x^2) e^x \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 e^x \frac{dz}{dx} = 0$$

of:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dz}{dx} = 0$$

Stellen we: $\frac{dz}{dx} = u(x)$, dan voldoet u aan de eerste-orde D.V.:

$$(1 - x^2) \frac{du}{dx} + 2u = 0$$

waaruit we oplossen:

$$u(x) = C_1 \frac{1 - x}{1 + x}$$

zodat:

$$\frac{dz}{dx} = C_1 \frac{1 - x}{1 + x}$$

dus:

$$z(x) = -C_1 x + 2C_1 \ln|x + 1| + C_2$$

waaruit volgt:

$$y(x) = \{-C_1 x + 2C_1 \ln|x + 1| + C_2\} e^x \quad (x^2 \neq 1)$$

De methode berust hierop dat bij de gevolgde handelwijze een D.V. ontstaat zonder z , waardoor ordeverlaging (volgens 21.2a) mogelijk is. We zullen laten zien dat dit niet van het toevallig gekozen voorbeeld afhangt, maar algemeen mogelijk is.

Stel dat gegeven is de lineaire D.V.:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

Stel verder dat u_0 een particuliere oplossing is van de bijbehorende gereduceerde D.V. We kunnen dan schrijven:

$$y(x) = u_0(x) \cdot z(x)$$

Volgens de regel van Leibniz geldt dan (zie deel 1, par. 66):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{du_0}{dx} z(x) + u_0(x) \frac{dz}{dx} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 u_0}{dx^2} z(x) + 2 \frac{du_0}{dx} \frac{dz}{dx} + u_0(x) \frac{d^2 z}{dx^2} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} &= \frac{d^{n-1} u_0}{dx^{n-1}} z(x) + \dots \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= \frac{d^n u_0}{dx^n} z(x) + \dots \end{aligned}$$

We substitueren dit in de D.V., waarbij we eerst de termen die $z(x)$ bevatten, samen-nemen. Het resultaat is:

$$z(x) \left\{ a_n(x) \frac{d^n u_0}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} u_0}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x) u_0(x) \right\} + G(x) = b(x) \quad (21.3)$$

Hierin is $G(x)$ een veelterm in $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, ..., $\frac{d^n z}{dx^n}$ met coëfficiënten die van x af-hangen. In $G(x)$ komt echter $z(x)$ niet meer voor! $G(x)$ heeft dus de gedaante:

$$g_n(x) \frac{d^n z}{dx^n} + g_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + g_1(x) \frac{dz}{dx}$$

De vorm tussen accoladen in (21.3) heeft de waarde nul, daar u_0 een particuliere oplossing is van de gereduceerde D.V. Dit betekent dat z voldoet aan de lineaire D.V.:

$$g_n(x) \frac{d^n z}{dx^n} + g_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + g_1(x) \frac{dz}{dx} = b(x)$$

Door te stellen: $\frac{dz}{dx} = w(x)$ kunnen we (volgens 21.2a) de orde van de D.V. met één verlagen. Immers w voldoet dan aan:

$$g_n(x) \frac{d^{n-1} w}{dx^{n-1}} + g_{n-1}(x) \frac{d^{n-2} w}{dx^{n-2}} + \dots + g_1(x) w = b(x)$$

Wanneer we eenmaal ingezien hebben dat de termen met $z(x)$ wegvallen, kunnen we ons veel rekenwerk besparen, hetgeen zal blijken uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

Bepaal de algemene oplossing van de lineaire D.V.:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \quad (x > 0)$$

als verder gegeven is dat de functie $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ een particuliere oplossing is.

Oplossing:

We stellen: $y(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot z(x)$.

Dan geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dz}{dx} + z(x) \frac{2x \cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dz}{dx} \cdot \frac{2x \cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}} + z(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{2x \cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}} \right\}$$

zodat z voldoet aan:

$$x^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + 2x^2 \frac{dz}{dx} \cdot \frac{2x \cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}} + \frac{x \sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

aangezien de termen met $z(x)$ wegvallen.

Herleiding geeft:

$$\sin x \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \cos x \frac{dz}{dx} = 0$$

Stellen we: $\frac{dz}{dx} = w(x)$, dan vinden we:

$$\sin x \frac{dw}{dx} + 2 w(x) \cos x = 0$$

met oplossing:

$$w(x) = \frac{C_1}{\sin^2 x}$$

Dus:

$$z(x) = -C_1 \cot x + C_2$$

zodat:

$$y(x) = -C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

Opmerking:

De gekozen voorbeelden waren gemakshalve alle homogene lineaire D.V., doch dit schaadt niet de principiële wijze van oplossen.

22 Orthogonale trajectoriën

In de vorige paragrafen hebben we een aantal differentiaalvergelijkingen opgelost. We zagen daarbij dat de integralen van een lineaire D.V. van de eerste orde een – van de beginvoorwaarden afhappende – parameter λ bevatten, daar de algemene gedaante van zo'n integraal is: $F(x, y, \lambda) = 0$ (zie par. 3). Meetkundig stellen deze integralen tezamen een stelsel krommen voor, afhappend van één parameter.

In par. 3 zagen we ook dat bij een gegeven stelsel vlakke krommen die van één parameter afhappend een D.V. behoort, waarvan deze krommen integraalkrommen zijn. In de genoemde paragraaf is daarvan een voorbeeld gegeven. We illustreren dit nu weer met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

Gegeven is het stelsel krommen met parameter λ (rechten door O):

$$x = \lambda y \tag{22.1}$$

Als we y opvatten als functie van x , dan vinden we door differentiatie naar x :

$$1 = \lambda y' \tag{22.2}$$

Eliminatie van λ uit (22.1) en (22.2) geeft als D.V. voor dit stelsel krommen:

$$xy' = y$$

Voorbeeld 2

Gegeven is het stelsel krommen met parameter λ (concentrische cirkels met middelpunt O):

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

Differentiatie naar x geeft:

$$x + yy' = 0$$

Dit is de D.V. waarvan de krommen integraalkrommen zijn.

Voorbeeld 3

Gegeven is het stelsel krommen met parameter λ (cirkels met middelpunt op de x -as en rakend aan de y -as):

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x = 0$$

Differentiatie naar x geeft:

$$x + yy' + \lambda = 0$$

Het resultaat van de eliminatie van λ uit deze twee vergelijkingen is in determinantvorm:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 2x \\ x + yy' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zodat de D.V. voor dit stelsel cirkels is:

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

Algemeen vinden we de D.V. van het stelsel krommen, voorgesteld door

$$F(x, y, \lambda) = 0$$

door deze uitdrukking naar x te differentiëren en daarna uit de twee verkregen vergelijkingen de λ te elimineren, zoals ook in par. 3 is aangegeven.

Stel dat twee stelsels vlakke krommen gegeven zijn, elk afhankelijk van één parameter (resp. λ en μ) door de vergelijkingen:

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

$$g(x, y, \mu) = 0$$

Indien iedere kromme van het tweede stelsel iedere kromme van het eerste stelsel loodrecht snijdt (d.w.z. dat de raaklijnen aan die krommen in een snijpunt loodrecht op elkaar staan), dan noemen we de krommen van het tweede (resp. eerste) stelsel de *orthogonale trajectoriën* van het eerste (resp. tweede) stelsel.

We zullen uit de D.V. van het eerste stelsel, b.v.:

$$F(x, y, y') = 0$$

die voor het stelsel orthogonale trajectoriën afleiden.

Stel dat K_1 (zie fig. 28) een kromme is van het eerste stelsel, die in P loodrecht gesneden wordt door een kromme K_2 van het tweede stelsel. Als de coördinaten van P zijn: x_0 en y_0 en de richtingscoëfficiënt van K_1 in P de waarde y'_0 heeft, dan geldt tussen deze getallen x_0 , y_0 en y'_0 de gelijkheid:

$$F(x_0, y_0, y'_0) = 0 \quad (22.3)$$

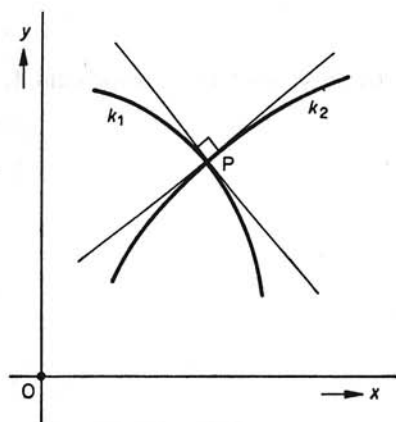


Fig. 28

Wanneer we P denken als punt van de kromme K_2 , die K_1 in P loodrecht snijdt en als we deze kromme – tijdelijk – beschrijven met de coördinaten ξ en η , terwijl we de coördinaten van P (als punt van K_2) noemen ξ_0 en η_0 en de richtingscoëfficiënt van K_2 in P voorstellen door η'_0 , dan geldt:

$$\xi_0 = x_0$$

$$\eta_0 = y_0$$

$$\eta'_0 = -\frac{1}{y'_0}$$

Op grond van (22.3) bestaat tussen de getallen ξ_0 , η_0 en η'_0 de betrekking:

$$F\left(\xi_0, \eta_0, -\frac{1}{\eta'_0}\right) = 0 \quad (\eta'_0 \neq 0)$$

Daar deze redenering geldt voor elk snijpunt van een kromme van het eerste stelsel met een kromme van het tweede stelsel, liggen de krommen van het tweede stelsel op de integraalkrommen van de D.V.:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \tag{22.4}$$

Dit is de z.g. D.V. voor de orthogonale trajectoriën van het eerste stelsel. Integratie daarvan geeft de orthogonale trajectoriën. Het is evenwel niet gezegd dat *alle* oplossingen van (22.4) orthogonale trajectoriën geven.

Op deze kwestie gaan we niet verder in.

Voorbeeld 4

Bepaal de orthogonale trajectoriën van het stelsel rechten door O uit voorbeeld 1, gegeven door:

$$y = \lambda x$$

Oplossing:

We vonden in voorbeeld 1 voor de D.V. van dit stelsel:

$$xy' = y$$

Op grond van het vorenstaande is de D.V. van het stelsel orthogonale trajectoriën:

$$x + yy' = 0$$

Door integratie volgt de vergelijking van het stelsel orthogonale trajectoriën:

$$x^2 + y^2 = \mu$$

waarin μ alle niet-negatieve waarden kan aannemen.

Dit levert dus concentrische cirkels op met O als middelpunt.

Voorbeeld 5

Bepaal de orthogonale trajectoriën van het stelsel cirkels uit voorbeeld 3.

Oplossing:

Voor de D.V. van het stelsel vonden we in voorbeeld 3:

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

De D.V. van de orthogonale trajectoriën luidt:

$$(x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$$

Dit is een homogene D.V., die we oplossen door te stellen: $y = xz$, waarin z beschouwd wordt als een functie van x . Er volgt dan:

$$(x^2 - x^2z^2)(z + xz') - 2x^2z = 0$$

Eén integraalkromme hiervan heeft als vergelijking: $x^2 = 0$, d.w.z. de dubbelgetelde y -as. Dit is evenwel geen orthogonale trajectorie.

Stellen we $x \neq 0$, dan volgt na enige herleiding:

$$(1 - z^2)xz' = z^3 + z$$

Hieraan voldoet: $z = 0$, dus $y = 0$. Dit levert de x -as die inderdaad alle cirkels van het stelsel loodrecht snijdt. Is $z \neq 0$, dan volgt:

$$\frac{1 - z^2}{z(z^2 + 1)} z' = \frac{1}{x}$$

waaruit we gemakkelijk oplossen:

$$\frac{z}{1 + z^2} = Cx \quad (C \neq 0)$$

of:

$$\frac{yx}{x^2 + y^2} = Cx$$

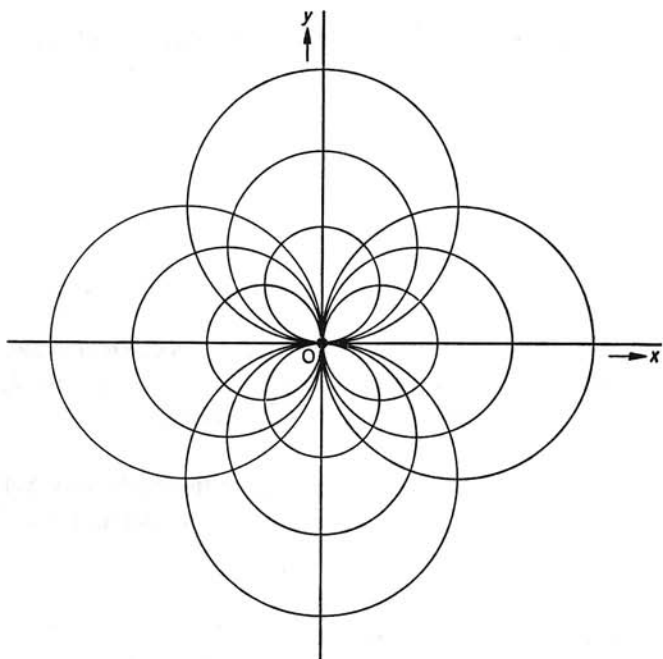
of, daar $x \neq 0$:

$$C(x^2 + y^2) = y \quad (C \neq 0)$$

We vonden al als oplossing: $y = 0$, zodat we het stelsel orthogonale trajectoriën beschrijven door:

$$C(x^2 + y^2) = y \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

Fig. 29



Indien $C \neq 0$, schrijven we $\mu = \frac{1}{2C}$. We vinden dan:

$$x^2 + (y - \mu)^2 = \mu^2$$

Dit stelt een stelsel cirkels voor met middelpunt $(0, \mu)$ op de y -as, rakend aan de x -as in O (zie fig. 29).

Voorbeeld 6

Bepaal de orthogonale trajectoriën van de schaar confocale parabolen, voorgesteld door:

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda^2 \quad (22.5)$$

Oplossing:

Differentiatie naar x geeft:

$$2yy' = 2\lambda \quad (22.6)$$

Eliminatie van λ uit (22.5) en (22.6) levert:

$$y^2 = 2xyy' + y^2(y')^2$$

waarvoor we ook mogen schrijven:

$$y = 2xy' + y(y')^2 \quad (22.7)$$

We hebben weliswaar door y gedeeld, maar $y = 0$ is ook een oplossing van (22.7).

De D.V. van de orthogonale trajectoriën wordt:

$$y = -\frac{2x}{y'} + \frac{y}{(y')^2}$$

die ook te schrijven is als:

$$y = 2xy' + y(y')^2$$

Dit is dezelfde vergelijking als (22.7).

Het stelsel orthogonale trajectoriën is dus de oorspronkelijke schaar zelf. De oorzaak van deze merkwaardigheid is dat de parabolen van het stelsel (22.5) met positieve λ , de parabolen met negatieve λ loodrecht snijden (zie fig. 30). Ga dit na.

Tenslotte behandelen we nog het probleem van de orthogonale trajectoriën voor het geval dat de krommen gegeven zijn door een vergelijking in poolcoördinaten, b.v.:

$$r = R(\varphi)$$

(N.B. Ter bekorting zullen we $R'(\varphi)$ ($= \frac{dR}{d\varphi}$) aangeven met r' .)

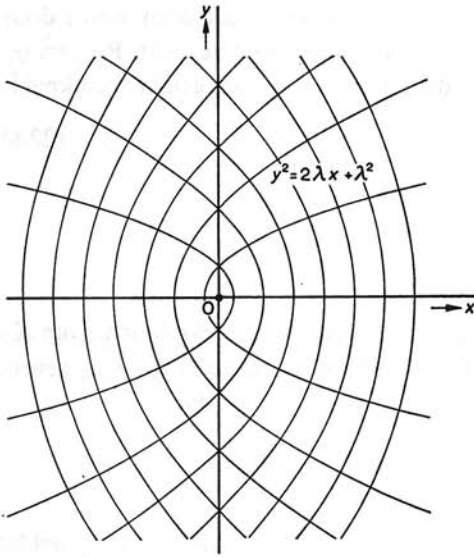


Fig. 30

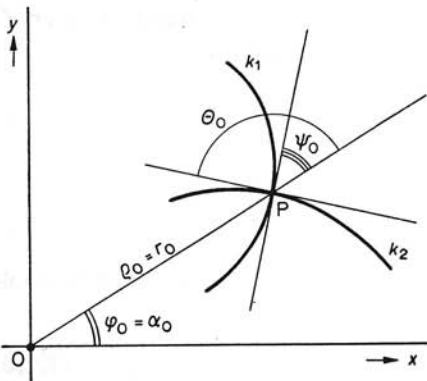
Neem aan dat de D.V. van het eerste stelsel krommen, waarvan de orthogonale trajectoriën bepaald moeten worden, luidt:

$$F(r, \varphi, r') = 0$$

We zullen gebruik maken van de in deel 2, par. 27 afgeleide formule voor de hoek ψ tussen voerstraal en raaklijn (in positieve richting gemeten), m.a.w.:

$$\tan \psi = \frac{r}{r'}$$

Fig. 31



Stel dat K_1 een kromme is van het stelsel, die in P loodrecht gesneden wordt door een orthogonale trajectorie K_2 (zie fig. 31). Als de poolcoördinaten van P r_0 en φ_0 zijn en de afgeleide $R'(\varphi_0)$ de waarde r'_0 heeft, dan geldt de volgende getallengelijkheid:

$$F(r_0, \varphi_0, r'_0) = 0 \quad (22.8)$$

terwijl voor de hoek ψ_0 tussen voerstraal en raaklijn in P geldt:

$$\tan \psi_0 = \frac{r_0}{r'_0}$$

We denken ons P nu als punt van de orthogonale trajectorie K_2 . We beschrijven K_2 – tijdelijk – met poolcoördinaten ρ en α , waarbij we P de coördinaten ρ_0 en α_0 geven. Voor de hoek θ_0 tussen voerstraal en raaklijn in P aan K_2 geldt dan:

$$\tan \theta_0 = \frac{\rho_0}{\rho'_0}$$

Aangezien de raaklijn in P aan K_1 loodrecht staat op de raaklijn in P aan K_2 , geldt: $\theta_0 - \psi_0 = \frac{1}{2}\pi$. Dus:

$$\tan \theta_0 \cdot \tan \psi_0 = -1$$

m.a.w.:

$$\frac{\rho_0}{\rho'_0} \cdot \frac{r_0}{r'_0} = -1 \quad (22.9)$$

In P geldt echter $\rho_0 = r_0$ en $\alpha_0 = \varphi_0$, zodat (22.9) overgaat in:

$$r'_0 = -\frac{\rho_0^2}{\rho'_0}$$

waardoor we uit (22.8) afleiden:

$$F\left(\rho_0, \alpha_0, -\frac{\rho_0^2}{\rho'_0}\right) = 0$$

Wanneer we de coördinaten „lopend” maken en overgaan op de notatie r , φ en r' , dan vinden we voor de D.V. van de orthogonale trajectoriën:

$$F\left(r, \varphi, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0$$

Voorbeeld 7

Bepaal de orthogonale trajectoriën van het stelsel krommen, gegeven door de poolvergelijking:

$$r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\varphi + a^4 = \lambda^4 \quad (22.10)$$

Hierin is a constant en λ een parameter. Deze krommen heten *krommen van Cassini**; het zijn de verzamelingen van punten waarvoor het produkt van de afstanden tot twee vaste punten $(a, 0)$ en $(-a, 0)$ constant (λ^2) is. Voor $\lambda = a$ is de verzameling de lemniscaat van Bernoulli.

Oplossing:

Door differentiëren van (22.10) naar φ volgt:

$$4r^3 r' - 4a^2 r r' \cos 2\varphi + 4a^2 r^2 \sin 2\varphi = 0$$

of, als we $r = 0$ even buiten beschouwing laten:

$$r^2 r' - a^2 r' \cos 2\varphi + a^2 r \sin 2\varphi = 0$$

Door r' te vervangen door $-r^2/r'$, volgt hieruit na vereenvoudiging als de D.V. van de orthogonale trajectoriën, de D.V. van Bernoulli (zie par. 9):

$$-2r^4 + 2a^2 r^2 \cos 2\varphi + 2a^2 r r' \sin 2\varphi = 0$$

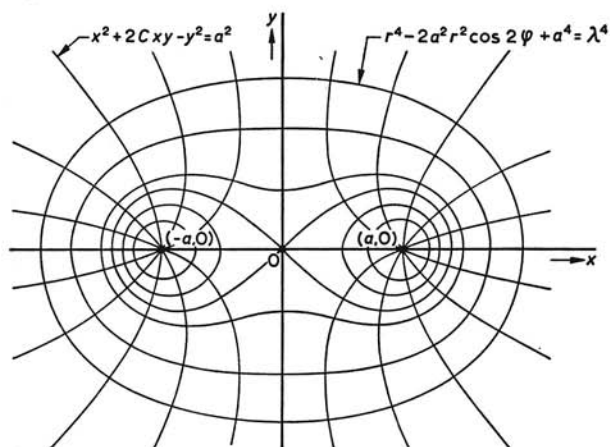
Door de substitutie $r^2 = 1/z$, gaat deze vergelijking over in de lineaire D.V.:

$$a^2 z' \sin 2\varphi - 2a^2 z \cos 2\varphi + 2 = 0$$

waarvan de oplossing luidt:

$$z = \frac{1}{a^2} (\cos 2\varphi + C \sin 2\varphi)$$

Fig. 32



* G. D. Cassini, 1625–1712.

Omdat $z = 1/r^2$, is de vergelijking van de orthogonale trajectoriën in poolcoördinaten:

$$a^2 = r^2 \cos 2\varphi + Cr^2 \sin 2\varphi \quad (22.11)$$

De vergelijking (22.11) wordt eenvoudiger door overgang op rechthoekige coördinaten:

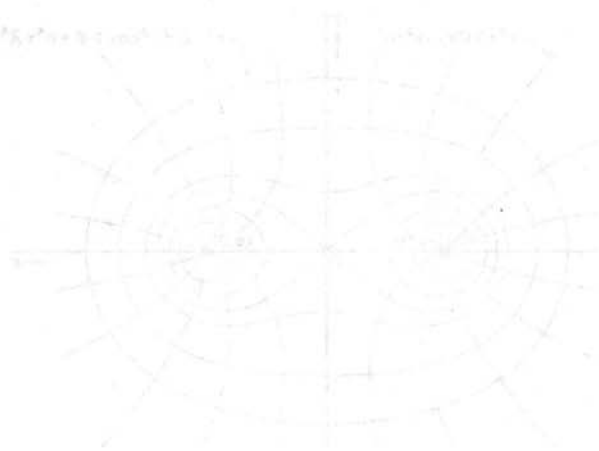
$$r^2 \cos 2\varphi = r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = x^2 - y^2$$

$$r^2 \sin 2\varphi = 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi = 2xy$$

Hierdoor gaat (22.11) over in:

$$x^2 + 2Cxy - y^2 = a^2 \quad (22.12)$$

Door (22.12) wordt een bundel orthogonale hyperbolen voorgesteld, die gaan door de vaste punten $(a, 0)$ en $(-a, 0)$. Een en ander is weergegeven in fig. 32.



Het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van machtreeksen

23 Oplossing van een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde met behulp van machtreeksen

Tot nu toe hebben we steeds te maken gehad met differentiaalvergelijkingen waarvan de oplossing geschreven kon worden in gesloten vorm, d.w.z. met behulp van eindig veel elementaire functies. In het algemeen heeft een differentiaalvergelijking echter niet zo'n „mooie” oplossing. Dikwijls wordt dan getracht een oplossing te bepalen in de vorm van een machtreeks in de onafhankelijk variabele. Maar ook indien een oplossing in gesloten vorm mogelijk is, kan het aanbeveling verdienen om toch een oplossing in de vorm van een machtreeks te bepalen, vooral als we geïnteresseerd zijn in numerieke waarden van de oplossing voor kleine waarden van de variabele. Daar-toe zouden we immers toch de in gesloten vorm verkregen oplossing in een reeks ontwikkelen!

We zullen de methode voor eerste orde differentiaalvergelijkingen aan de hand van twee voorbeelden toelichten.

Voorbeeld 1

Bepaal de algemene oplossing van de D.V.:

$$y' - xy = 0 \quad (23.1)$$

Oplossing:

We proberen een oplossing van de gedaante:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

Daar een machtreeks binnen zijn convergentie-interval termsgewijze gedifferentieerd mag worden, geldt:

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots$$

Substitutie in (23.1) geeft:

$$y' - xy = (c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots) - (c_0x + c_1x^2 + c_2x^3 + \dots) = 0$$

Daar een machtreeks dan en slechts dan voor alle x waarvoor deze convergent is (mits niet alleen voor $x = 0!$) de waarde nul aanneemt indien alle coëfficiënten nul zijn, geldt:

$$c_1 = 0, 2c_2 = c_0, 3c_3 = c_1, 4c_4 = c_2, 5c_5 = c_3, \dots$$

Hieruit volgt:

$$0 = c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = \dots$$

c_0 is echter willekeurig. Verder geldt:

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0, c_4 = \frac{1}{2 \cdot 4} c_0, c_6 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} c_0, \dots$$

We zien dus: $c_{2n+1} = 0$, en vermoeden:

$$c_{2n} = \frac{c_0}{2^n n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Dit laatste vermoeden is eenvoudig te bevestigen door middel van volledige inductie. De algemene oplossing luidt:

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \quad (23.2)$$

Met behulp van het kenmerk van d'Alembert zien we eenvoudig in, dat deze reeks convergent is $\forall x \in \mathbb{R}$, immers:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{t_{n+1}}{t_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n n!}{x^{2n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(n+1)} = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Overigens zien we dat de oplossing ook in gesloten vorm te schrijven is; immers (23.2) kunnen we schrijven als:

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n = c_0 e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (23.3)$$

Dit blijkt eveneens als we de D.V. opvatten als een D.V. met gescheiden variabelen, want uit

$$y' - xy = 0$$

volgt, als we stellen $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = x$$

Integratie geeft:

$$\ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} \quad (C \neq 0)$$

Aangezien ook $y = 0$ een oplossing is, is de algemene oplossing:

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

Dit is in overeenstemming met (23.3).

Het bezwaar van de gevolgde methode is, dat er nogal „met stippeltjes gewerkt is” bij het noteren van de reeks. We kunnen dit bezwaar ondervangen door met Σ -tekens te werken, waardoor we tevens beter inzicht krijgen in de algemene coëfficiënt van de reeksontwikkeling. We stellen daartoe:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

waaruit volgt:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

We merken hierbij op dat de reeks voor y' begint bij $n = 1$, hetgeen uit het vorige direct duidelijk is. Denk eraan dat de term met $n = 0$ voor $x \neq 0$ gelijk aan 0 is, maar onbepaald voor $x = 0$.

Substitutie in (23.1) geeft dan:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

of:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \quad (23.4)$$

Om de algemene coëfficiënten van de machten van x goed te doorzien, zorgen we dat beide reeksen geschreven worden met x^{n+1} als macht van x . Daartoe vervangen

we in de eerste reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

de variabele $n - 1$ door $\mu + 1$.

Er geldt dan: $n - 1 = \mu + 1$, dus $\mu = n - 2$ en $n = \mu + 2$. Hieruit blijkt dat μ de waarden $-1, 0, 1, 2, \dots$ doorloopt als n de waarden $1, 2, 3, \dots$ aanneemt. We vinden dan:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{\mu=-1}^{\infty} (\mu + 2) c_{\mu+2} x^{\mu+1}$$

Daar μ slechts een sommatievariabele is, waarbij alleen de doorlopen waarden van belang zijn, kunnen we dit toch weer schrijven als: $\sum_{n=-1}^{\infty} (n + 2) c_{n+2} x^{n+1}$. (23.4) gaat dan over in:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n + 2) c_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

Als we de term met $n = -1$ apart nemen en de gelijknamige machten van x samenvoegen, krijgen we:

$$c_1 - \sum_{n=0}^{\infty} \{(n + 2) c_{n+2} - c_n\} x^{n+1} = 0$$

Dit levert: $c_1 = 0$ en de recurrente betrekking:

$$(n + 2) c_{n+2} - c_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

of, daar $n + 2 \neq 0$ is:

$$c_{n+2} = \frac{c_n}{n + 2} \quad (n \geq 0)$$

Hieruit blijkt weer dat:

$$0 = c_1 = c_3 = c_5 = \dots$$

en

$$c_{2n} = \frac{c_0}{2^n n!}$$

Dus:

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

Voorbeeld 2

Bepaal de algemene oplossing van de D.V.:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 \quad (23.5)$$

Oplossing:

Deze vergelijking lossen we op met b.v. de methode van Bernoulli (zie par. 9). We stellen daartoe:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Dan geldt:

$$u'(x)v(x) + u(x)\{v'(x) + 2xv(x)\} = 1$$

Als we eisen:

$$v'(x) + 2xv(x) = 0$$

dus b.v.:

$$v(x) = e^{-x^2}$$

dan wordt aan $u(x)$ de voorwaarde gesteld:

$$u'(x)e^{-x^2} = 1$$

dus:

$$u(x) = F(x) + C$$

waarbij F een functie is met de eigenschap: $F'(x) = e^{x^2}$. We vinden:

$$y = F(x)e^{-x^2} + Ce^{-x^2} \quad (23.6)$$

F kan niet geschreven worden met behulp van bekende elementaire functies. Wel kunnen we e^{x^2} ontwikkelen in een machtreeks naar opklimmende machten van x^2 en dan termgewijze integreren. Dit is geoorloofd, daar de machtreeks uniform convergent is in elk eindig interval. We krijgen dan:

$$y = C \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots \right) + \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots \right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \dots \right)$$

of:

$$y = C \left(1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots \right) + \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{105}x^7 + \dots \right) \quad (23.7)$$

We zullen nu trachten de oplossing van (23.5) in de vorm van een machtreeks direct te vinden, zonder gebruik te maken van de gesloten vorm (23.6).

We stellen daartoe:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

waardoor (23.5) overgaat in:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$$

of:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 1$$

Evenals in voorbeeld 1 schrijven we beide reeksen met $n + 1$ in de exponent van x door in de eerste reeks $n - 1$ te vervangen door $\mu + 1$ en dat daarna te noteren als $n + 1$. Er ontstaat dan:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+2)c_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 1$$

Door gelijkstelling van de coëfficiënten in het linker- en rechterlid vinden we dan:

$$c_1 = 1 \quad (n = -1)$$

en de recurrente betrekking:

$$(n+2)c_{n+2} + 2c_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

zodat:

$$c_{n+2} = -\frac{2}{n+2} c_n \quad (n \geq 0) \quad (23.8)$$

Voor de coëfficiënten met even index vinden we dus (waarbij we c_0 willekeurig mogen kiezen):

$$n = 0: \quad c_2 = -\frac{2}{2} c_0 = -c_0$$

$$n = 2: \quad c_4 = -\frac{2}{4} c_2 = \frac{(-2)^2}{4 \cdot 2} c_0 = \frac{1}{2!} c_0$$

$$n = 4: \quad c_6 = -\frac{2}{6} c_4 = \frac{(-2)^3}{6 \cdot 4 \cdot 2} c_0 = -\frac{1}{3!} c_0$$

Algemeen:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} c_0$$

Voor de coëfficiënten met oneven index geldt, daar $c_1 = 1$:

$$n = 1: c_3 = \frac{-2}{3} c_1 = -\frac{2}{3}$$

$$n = 3: c_5 = -\frac{2}{5} c_3 = \frac{(-2)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$n = 5: c_7 = -\frac{2}{7} c_5 = \frac{(-2)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Algemeen:

$$c_{2n+1} = \frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \quad (23.9)$$

De algemene oplossing van (23.5) luidt:

$$y = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) + \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{105}x^7 + \dots \right)$$

Dit is in overeenstemming met (23.7).

We kunnen gemakkelijk nagaan uit (23.9), dat de reeks tussen accoladen convergeert voor elke waarde van x .

Opmerking 1:

Het is duidelijk dat deze methode faalt, indien de onderstelling dat er een oplossing in de vorm van een machtreeks bestaat, onjuist is. Zo heeft de D.V.:

$$xy' = 1 \quad (x \neq 0)$$

geen oplossing in de vorm van een machtreeks. Immers bij substitutie van $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ zou het linkerlid een graad hebben die minstens één is, terwijl het rechterlid de graad nul heeft. Dit zou alleen mogelijk zijn, indien alle coëfficiënten in het linkerlid nul zouden zijn.

Dit kan echter niet, omdat het rechterlid de waarde 1 heeft. De oplossing van deze D.V. is echter eenvoudig te vinden:

$$y = \ln|x| + C$$

Opmerking 2:

Een geheel andere methode om de in het eerste voorbeeld gegeven D.V. door middel van een machtreeks op te lossen is de volgende.

Als f een oplossing is, dan weten we dat de machtreeksontwikkeling (zo deze bestaat) er aldus uit ziet:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

Uit de gegeven D.V. zijn echter $f'(0)$, $f''(0)$, ... te berekenen als $f(0)$ gegeven is. Immers er geldt voor een oplossing f :

$$f'(x) = xf(x)$$

Stel dat gegeven is: $f(0) = A$, dan geldt: $f'(0) = 0$ en $f''(x) = f(x) + xf'(x)$, zodat $f''(0) = f(0) = A$.

Verder is $f'''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$, zodat $f'''(0) = 2f'(0) = 0$.

Zo doorgaande vinden we: $f^{IV}(x) = 3f''(x) + xf'''(x)$, dus $f^{IV}(0) = 3A$.

Men vindt:

$$f(x) = A \left\{ 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \dots \right\}$$

Bepaal met deze methode zelf de oplossing van de D.V.: $y' = x^2 + y^2$, die voor $x = 0$ de waarde 1 aanneemt.

24 Gewone en singuliere punten van een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde

We beschouwen de homogene lineaire D.V. van de tweede orde:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (24.1)$$

We maken daarbij de onderscheiding in *gewone* en *singuliere* punten van deze D.V.

Definitie

Een punt x_0 met de eigenschap dat $a_2(x_0) \neq 0$, terwijl $a_2(x)$, $a_1(x)$ en $a_0(x)$ zijn te ontwikkelen in een machtreeks in $(x - x_0)$ (eventueel een eindige machtreeks, dus een veelterm) heet een *gewoon punt* van de D.V.

Definitie

Een punt dat geen gewoon punt is van de D.V., noemen we een *singulier punt* van die D.V.

Voorbeeld 1

De D.V.:

$$(4 - x^2)y'' + 3xy' - 7y = 0$$

bezit twee singuliere punten, nl. $x = 2$ en $x = -2$.

Voorbeeld 2

De D.V.:

$$xy'' - y' + xy = 0$$

heeft $x = 0$ als enig singulier punt.

Voorbeeld 3

De D.V.:

$$y'' + xy' + y = 0$$

heeft geen singuliere punten.

Voorbeeld 4

De D.V.:

$$x^2 y'' + y' \ln(x-1) + y = 0$$

heeft $x = 1$ als singulier punt. Hier geldt nl.: $a_2(x) = x^2$ en $a_1(x) = \ln(x-1)$. Nu geldt weliswaar $a_2(1) \neq 0$, maar $a_1(x)$ is niet te ontwikkelen naar machten van $x-1$ (alle punten x met $x \leq 1$ zijn singulier).

Het blijkt zinvol om ook bij de singuliere punten twee soorten te onderscheiden: de *regulier-singuliere* punten en de *irregulier-singuliere* punten.

Wanneer x_0 een singulier punt is van (24.1) terwijl $a_2(x)$, $a_1(x)$ en $a_0(x)$ in een machtreeks naar $(x-x_0)$ zijn te ontwikkelen, dan moet dus gelden $a_2(x_0) = 0$. Dan is $a_2(x)$ deelbaar door $(x-x_0)$, d.w.z. dat we $a_2(x)$ kunnen schrijven als $(x-x_0)^\alpha a_2^*(x)$, waarbij α een geheel getal ≥ 1 is, $a_2^*(x_0) \neq 0$ en $a_2^*(x)$ ontwikkelbaar is in een machtreeks naar $(x-x_0)$.

Delen we het linker- en het rechterlid van (24.1) door $a_2(x)$, dan ontstaat:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$\text{waarbij } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ en } q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}.$$

Hierin kunnen $p(x)$ en $q(x)$ een macht van $(x-x_0)$ in de noemer hebben.* Welke macht dit is hangt af van $a_2(x)$, $a_1(x)$ en $a_0(x)$.

* Als we zeggen dat $(x-x_0)$ in de noemer van $p(x)$ optreedt, dan bedoelen we dat $(x-x_0)$ nog in de noemer voorkomt als factor, nadat we $a_1(x)$ en $a_2(x)$ ontwikkeld hebben naar machten van $(x-x_0)$ en eventuele gemeenschappelijke factoren $(x-x_0)$ uitgedeeld hebben (zie voorbeeld 6).

Definitie

x_0 heet een regulier-singulier punt indien x_0 een singulier punt van bovengeschetste aard is en $p(x)$ de factor $(x - x_0)$ in de noemer niet in een hogere macht dan één bevat en $q(x)$ de factor $(x - x_0)$ in de noemer niet in een hogere macht dan twee bevat.

Definitie

Indien x_0 wel een singulier punt is, maar geen regulier-singulier punt, dan noemen we x_0 een irregulier-singulier punt.

Voorbeeld 5

$$x(x - 2)^2(x + 1)y'' + x^2y' + (x^2 + 3x + 3)y = 0$$

Hiervoor is

$$p(x) = \frac{x}{(x - 2)^2(x + 1)}$$

$$q(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x(x - 2)^2(x + 1)}$$

De singuliere punten zijn $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$.

De factor x komt niet voor in de noemer van $p(x)$, en in die van $q(x)$ tot de eerste macht. Dus $x = 0$ is een regulier-singulier punt.

De factor $(x - 2)$ komt in de tweede macht voor in de noemer van $p(x)$, dus hoger dan de toegestane eerste macht. Het punt $x = 2$ is dus een irregulier-singulier punt.

De factor $(x + 1)$ komt in de noemer van $p(x)$ en $q(x)$ tot de eerste macht voor. $x = -1$ is dus een regulier-singulier punt.

Voorbeeld 6

$$x^2y'' + y'x \sin x + y \ln(1 + x) = 0 \quad (x > -1)$$

Hiervoor is:

$$p(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

$$q(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots \right)$$

Het enige singuliere punt van de D.V. is $x = 0$. De factor x komt niet voor in de noemer van $p(x)$ en in die van $q(x)$ tot eerste macht. Dus $x = 0$ is een regulier-singulier punt van de D.V.

Voorbeeld 7

$$x^2 y'' + \frac{x}{1-x^2} y' + y = 0 \quad (x \neq \pm 1)$$

Hiervoor is

$$p(x) = \frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x} (1 + x^2 + x^4 + \dots)$$

$$q(x) = \frac{1}{x^2}$$

De factor x komt in de noemer van $p(x)$ voor in de eerste macht en in die van $q(x)$ tot de tweede macht. Het punt $x = 0$ is dus een regulier-singulier punt van de D.V.

25 Oplossingen in een omgeving van een gewoon punt. Differentialvergelijking van Legendre

Stel $x = 0$ is een gewoon punt van de lineaire D.V.:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

We kunnen dan bewijzen dat er een oplossing bestaat in de gedaante van een machtsreeks, dus:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (25.1)$$

Hierin zijn c_0 en c_1 willekeurig te kiezen. De reeks convergeert binnen het interval $\langle -a, a \rangle$, waarbij a het dichtst bij de oorsprong gelegen singuliere punt is. Heeft de D.V. geen singuliere punten, dan geldt de oplossing voor alle waarden van x . Op het bewijs van deze stelling gaan we niet in.

De bepaling van de coëfficiënten in (25.1) geschiedt op analoge wijze als in par. 23.

Voorbeeld 1

Bepaal de algemene oplossing van de D.V.:

$$y'' + xy' + y = 0 \quad (25.2)$$

geldig in een omgeving van het gewone punt $x = 0$.

Oplossing:

Stel weer:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Invullen in (25.2) geeft:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

We schrijven dit als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Voor $n = 0$ vinden we:

$$2c_2 + c_0 = 0$$

en voor $n = 1, 2, \dots$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + n c_n + c_n = 0$$

of:

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{n+2}$$

c_0 en c_1 zijn willekeurig,

$$c_2 = -\frac{c_0}{2}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2 \cdot 4}$$

$$c_5 = \frac{c_1}{3 \cdot 5}$$

$$c_6 = -\frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$c_7 = -\frac{c_1}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

De oplossing kan dus geschreven worden als:

$$y = c_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}x^{2n} + \dots \right) \\ + c_1 \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}x^{2n-1} + \dots \right)$$

Met behulp van het kenmerk van d'Alembert voor reeksen (zie deel 1, par. 96), zien we direct in, dat beide reeksen (absoluut) convergeren voor alle waarden van x in overeenstemming met de bewering in het begin van deze paragraaf.

Elk van de reeksen voldoet aan de D.V. (25.2) (kies voor $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ resp. $c_0 = 0$, $c_1 = 1$). Daar de functies y_1 en y_2 , gedefinieerd door:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$$

linear onafhankelijk zijn op $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$, stelt

$$y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

de algemene oplossing van de D.V. (25.2) voor.

Voorbeeld 2

Bepaal de algemene oplossing van de D.V. van Legendre*:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0 \quad (25.3)$$

in een omgeving van het gewone punt $x = 0$.

Oplossing:

Door weer te stellen:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

gaat (25.3) over in:

$$(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + m(m+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

* A. M. Legendre, 1752-1833.

We schrijven dit als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + m(m+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Het nulstellen van de coëfficiënten levert:

$$c_2 = -\frac{m(m+1)}{2} c_0$$

$$c_3 = \frac{2-m(m+1)}{3 \cdot 2} c_1 = -\frac{(m-1)(m+2)}{3!} c_1$$

$$c_4 = \frac{3 \cdot 2 - m(m+1)}{4 \cdot 3} c_2 = -\frac{(m-2)(m+3)}{4 \cdot 3} c_2 = \frac{m(m+1)(m-2)(m+3)}{4!} c_0$$

$$c_5 = \frac{4 \cdot 3 - m(m+1)}{5 \cdot 4} c_3 = -\frac{(m-3)(m+4)}{5 \cdot 4} c_3$$

$$= \frac{(m-1)(m+2)(m-3)(m+4)}{5!} c_1$$

.....

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - m(m+1)}{(n+2)(n+1)} c_n = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} c_n$$

De algemene oplossing van (25.3) is dus:

$$y = c_0 \left\{ 1 - \frac{m(m+1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!} x^4 - \dots \right\} \\ + c_1 \left\{ x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!} x^3 + \frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!} x^5 - \dots \right\}$$

Uit deze vorm voor y zien we dat, als m een positief geheel getal is of 0, een van de reeksen tussen accoladen afbreekt en een veelterm wordt.

Zo ontstaan de volgende veeltermen $F_m(x)$:

$$m = 0 \quad F_0(x) = 1$$

$$m = 2 \quad F_2(x) = 1 - 3x^2$$

$$m = 4 \quad F_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{3 \cdot 5}{3} x^4$$

.....

$$m = 1 \quad F_1(x) = x$$

$$m = 3 \quad F_3(x) = x - \frac{5}{3} x^3$$

$$m = 5 \quad F_5(x) = x - \frac{1 \cdot 4}{3} x^3 + \frac{2 \cdot 1}{5} x^5$$

.....

Hieruit ontstaan de z.g. *polynomen van Legendre* $P_m(x)$, door $F_m(x)$ te vermenigvuldigen met een zodanige constante dat $P_m(1) = 1$. Zo krijgen we:

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x); \dots$$

Opmerking:

Wensen we oplossingen in een omgeving van een ander punt dan $x = 0$, dan kunnen we eerst de oorsprong naar dat punt transformeren en daarna dezelfde methode toepassen.

26 Oplossingen in een omgeving van een regulier-singulier punt. Differentialvergelijking van Bessel

Stel dat $x = 0$ een regulier-singulier punt is van de D.V.:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (26.1)$$

Volgens de definitie in par. 24 betekent dit dat $p(x)$ en $q(x)$ elk de gedaante hebben van het quotiënt van twee machtreeksen in x , terwijl de noemer van $p(x)$ de factor x hoogstens in de eerste macht bevat en in de noemer van $q(x)$ de factor x hoogstens de tweede macht. Dit houdt in dat we kunnen schrijven:

$$p(x) = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots$$

$$q(x) = \frac{q_0}{x^2} + \frac{q_1}{x} + q_2 + q_3x + q_4x^2 + \dots$$

Dit betekent weer dat we (26.1) ook kunnen schrijven in de gedaante:

$$x^2y'' + xp^*(x)y' + q^*(x)y = 0 \quad (26.2)$$

waarin $p^*(x)$ en $q^*(x)$ machtreeksen in x zijn, en wel van de gedaante:

$$p^*(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots$$

$$q^*(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots$$

We proberen nu oplossingen te vinden die de gedaante hebben van een z.g. *gegeneraliseerde machtreeks*, d.w.z. een reeks van de gedaante $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha}$, dus $x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Hierin is α een nader te bepalen reëel getal. We beperken ons tot een *gereduceerde* omgeving van $x = 0$, d.w.z. we sluiten $x = 0$ uit.

Voordat we aangeven op welke wijze een oplossing van de geschetste gedaante bepaald kan worden, willen we in het kort plausibel maken, dat er zulke oplossingen zouden kunnen bestaan. Daartoe herinneren we aan de lineaire D.V. van Euler (zie par. 14), waarvan ook de volgende D.V. een voorbeeld is:

$$x^2 y'' + Pxy' + Qy = 0 \quad (x \neq 0) \quad (26.3)$$

waarin P en Q constanten zijn. De oplossingstechniek bestond daarin dat we stelden: $x = e^u$ (indien $x > 0$, anders $x = -e^u$). Hierdoor gaat dan y als functie van x over in y^* als functie van u . Het blijkt dat y^* voldoet aan een lineaire D.V. van de tweede orde met constante coëfficiënten:

$$a_2 \frac{d^2 y^*}{du^2} + a_1 \frac{dy^*}{du} + a_0 y^* = 0$$

Als de wortels van de bijbehorende karakteristieke vergelijking α_1 en α_2 zijn, dan vinden we als lineair onafhankelijke oplossingen y_1^* en y_2^* (functies van u):

$$\alpha_1 \neq \alpha_2: y_1^* = e^{\alpha_1 u}$$

$$y_2^* = e^{\alpha_2 u}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2: y_1^* = e^{\alpha_1 u}$$

$$y_2^* = u e^{\alpha_1 u}$$

Voor y als functie van x houdt dit in:

$$\alpha_1 \neq \alpha_2: y_1 = x^{\alpha_1}, y_2 = x^{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2: y_1 = x^{\alpha_1}, y_2 = x^{\alpha_1} \ln x$$

De algemene oplossing van (26.3) luidt:

$$\alpha_1 \neq \alpha_2: y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2: y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_1} \ln x$$

waarin C_1 en C_2 constanten zijn.

De gedachtengang is nu als volgt:

Vergelijken we (26.3) met (26.2), dan zien we dat bij de overgang van (26.3) naar (26.2) de constanten P en Q vervangen zijn door de machtreksen $p^*(x)$ en $q^*(x)$. Dit doet ons het idee aan de hand om oplossingen van (26.2) te proberen waarin de constanten C_1 en C_2 vervangen zijn door machtreksen $C_1(x)$ en $C_2(x)$; d.w.z. we proberen oplossingen te vinden van de gedaante:

$$x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Dat zijn juist de genoemde gegeneraliseerde machtreksen. De methode is in feite dus een methode door middel van variatie van constanten. Over oplossingen van de

gedaante:

$$(x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) \ln x$$

zullen we later spreken.

We gaan in (26.2) substitueren:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha} = c_0 x^\alpha + c_1 x^{\alpha+1} + \dots$$

waarin α, c_0, c_1, \dots nader bepaald moeten worden. Differentiatie levert:

$$y' = c_0 \alpha x^{\alpha-1} + c_1 (\alpha+1) x^\alpha + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\alpha) x^{n+\alpha-1}$$

en

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha-2}$$

(N.B. De sommatie in de gedifferentieerde reeksen begint nu met $n=0$, daar $x \neq 0$, in tegenstelling tot de situatie in par. 23.)

We merken op dat we mogen aannemen dat $c_0 \neq 0$. Immers, zou de eerste coëfficiënt die van nul verschilt b.v. c_p zijn, dan zou de reeks er uitzien als:

$$x^\alpha (c_p x^p + c_{p+1} x^{p+1} + \dots)$$

Dit is te schrijven als $x^{\alpha+p} (c_p + c_{p+1} x + c_{p+2} x^2 + \dots)$. Als we dan opnieuw nummeren en stellen $c_p = c_0^*$, $c_{p+1} = c_1^*$, \dots , dan hebben we toch een reeks met begincoëfficiënt $c_0^* \neq 0$ uiteraard met andere $\alpha!$

Bij substitutie schrijven we de D.V. bij voorkeur in de gedaante (26.2). We vinden dan:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\alpha) x^{n+\alpha} \right) \\ + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha} \right) = 0 \end{aligned}$$

of, als we de voorkomende produkten in de reeksen uitwerken*:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 0, j \geq 0}} p_i c_j (j+\alpha) \right\} x^{n+\alpha} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 0, j \geq 0}} q_i c_j \right\} x^{n+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

dus:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) + \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 0, j \geq 0}} p_i c_j (j+\alpha) + \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 0, j \geq 0}} q_i c_j \right\} x^{n+\alpha} = 0$$

* Daar de machtrekken absoluut convergent zijn is de vermenigvuldiging toegestaan. We gaan hierop niet nader in.

In deze reeks moeten alle coëfficiënten 0 zijn. In het bijzonder geldt voor de coëfficiënt van de laagste macht van x , x^α (dus $n = 0$):

$$c_0\alpha(\alpha - 1) + p_0c_0\alpha + q_0c_0 = 0$$

of, daar $c_0 \neq 0$:

$$\alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0 = 0 \quad (26.4)$$

Deze vergelijking die de *indexvergelijking* wordt genoemd, is een vierkantsvergelijking in α , daar p_0 en q_0 gegeven constanten zijn. In het algemeen zijn er dus twee waarden van α , dus twee oplossingen van de D.V. die de gedaante hebben van gegeneraliseerde machtreksen. Elk van de wortels α van de indexvergelijking bepaalt zo'n oplossing. De coëfficiënten c_n worden gevonden door de coëfficiënten van $x^{n+\alpha}$ ($n \geq 1$) nul te stellen.

We kunnen bewijzen dat we op deze wijze twee lineair onafhankelijke oplossingen krijgen, indien de wortels α_1 en α_2 van (26.4) *geen geheel getal verschillen*. We zullen dit hier niet bewijzen en evenmin het geval behandelen dat $\alpha_1 - \alpha_2$ een geheel getal (evt. nul) is. We volstaan met op te merken dat er dan oplossingen optreden van de gedaante: $(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\alpha}) \ln x$ (zie ook de opmerking bij de generalisering van de D.V. van Euler in het begin van deze paragraaf). We verwijzen voor een volledige behandeling hiervan naar de literatuur.*

De algemene methode zullen we met enkele voorbeelden verduidelijken.

Voorbeeld 1

Bepaal oplossingen in een gereduceerde omgeving van $x = 0$ van de D.V.:

$$(2x - 4x^2)y'' + (1 - 16x)y' - 8y = 0 \quad (x \neq 0, x \neq \frac{1}{2})$$

Oplossing:

We zien dat $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}$ singuliere punten van de D.V. zijn. Schrijven we de D.V. in de gedaante:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

dan blijkt:

$$p(x) = \frac{1 - 16x}{x(2 - 4x)}$$

$$q(x) = \frac{-8}{x(2 - 4x)}$$

* B.v. „Handboek der Wiskunde” onder redactie van L. Kuipers en R. Timman, Hoofdstuk IX, Uit. Oosthoek Scheltema en Holkema, Utrecht, of „The Theory of Ordinary Differential Equations” door J. C. Burkill, Uitg. Oliver and Boyd, Edinburgh.

zodat:

$$p^*(x) = \frac{1 - 16x}{2(1 - 2x)}$$

$$q^*(x) = \frac{-8x}{2(1 - 2x)}$$

$p^*(x)$ en $q^*(x)$ kunnen in machtreeksen in x worden ontwikkeld die geldig zijn voor $|x| < \frac{1}{2}$.

Door een oplossing van de gedaante $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha}$ te substitueren, vinden we:

$$(2x - 4x^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n + \alpha)(n + \alpha - 1)x^{n+\alpha-2} \\ + (1 - 16x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n + \alpha)x^{n+\alpha-1} - 8 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha} = 0$$

of:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n + \alpha)(2n + 2\alpha - 1)x^{n+\alpha-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n + \alpha + 1)(n + \alpha + 2)x^{n+\alpha} = 0 \quad (26.5)$$

De laagste macht van x , nl. $x^{\alpha-1}$ komt alleen in de eerste som voor en wel als $n = 0$. Nodig en voldoende opdat deze term nul is, is de eis:

$$c_0 \alpha (2\alpha - 1) = 0$$

of, daar $c_0 \neq 0$:

$$\alpha(2\alpha - 1) = 0 \quad (\text{indexvergelijking})$$

α heeft dus de waarden $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Door de coëfficiënt van een willekeurige macht $x^{n+\alpha}$ nul te stellen, vinden we uit (26.5) de recurrente betrekking:

$$c_{n+1}(n + 1 + \alpha)(2n + 2\alpha + 1) = 4c_n(n + \alpha + 1)(n + \alpha + 2)$$

Voor $\alpha = 0$ vinden we hiervoor:

$$c_{n+1}(n + 1)(2n + 1) = 4c_n(n + 1)(n + 2)$$

en voor $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$c_{n+1}(n + \frac{3}{2})(2n + 2) = 4c_n(n + \frac{3}{2})(n + \frac{5}{2})$$

Daar de factoren $n + 1$ en $n + \frac{3}{2}$ nooit nul zijn, kunnen we deze betrekkingen dus schrijven als:

$$c_{n+1} = 4 \frac{n + 2}{2n + 1} c_n \quad (\alpha = 0) \quad (n \geq 0)$$

en

$$c_{n+1} = \frac{2n+5}{n+1} c_n \quad (\alpha = \frac{1}{2}) \quad (n \geq 0)$$

Voor $\alpha = 0$ zijn de coëfficiënten:

$$c_1 = \frac{4 \cdot 2}{1} c_0$$

$$c_2 = \frac{4 \cdot 3}{3} c_1 = \frac{4^2 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3} c_0$$

$$c_3 = \frac{4 \cdot 4}{5} c_2 = \frac{4^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} c_0$$

enz.

zodat de reeks (26.5) in dit geval wordt:

$$c_0 \left\{ 1 + \frac{2}{1}(4x) + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 3} (4x)^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} (4x)^3 + \dots \right\}$$

Voor $\alpha = \frac{1}{2}$ zijn de coëfficiënten:

$$c_1 = \frac{5}{1} c_0; \quad c_2 = \frac{7}{2} c_1 = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 2} c_0; \quad c_3 = \frac{9}{3} c_2 = \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} c_0; \quad \text{enz.}$$

zodat hier de oplossing wordt:

$$c_0 x^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{5}{1} x + \frac{5 \cdot 7}{2!} x^2 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{3!} x^3 + \dots \right\}$$

Geven we de reeksen tussen accoladen aan door resp. y_1 en y_2 , dan is de algemene oplossing van de D.V.:

$$y = Ay_1 + Bx^{\frac{1}{2}}y_2$$

waarin A en B willekeurige constanten zijn.

Met het convergentiekenmerk van d'Alembert kunnen we gemakkelijk bewijzen dat de convergentiestraal van beide reeksen gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

Voorbeeld 2

Bepaal de algemene oplossing van de D.V. van Bessel*:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \quad (m \geq 0) \quad (26.6)$$

in een gereduceerde omgeving van het punt $x = 0$.

* F. W. Bessel, 1784-1846.

Oplossing:

Ook hier proberen we een oplossing in de vorm van een gegeneraliseerde machtreeks. We stellen daartoe:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha} \quad (c_0 \neq 0)$$

waardoor (26.6) overgaat in:

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\alpha)x^{n+\alpha-1} \\ + (x^2 - m^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

of (na „verschuiving” van indices):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\alpha-m)(n+\alpha+m)x^{n+\alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+\alpha} = 0 \quad (26.7)$$

Nodig en voldoende voorwaarde opdat dit geldt voor alle x uit een gereduceerde omgeving van 0 is, dat alle coëfficiënten nul zijn. Dit geeft voor $n=0$:

$$c_0(\alpha-m)(\alpha+m) = 0$$

of, daar $c_0 \neq 0$:

$$(\alpha-m)(\alpha+m) = 0 \quad (26.8)$$

Dit is weer de *indexvergelijking* met als wortels: $\alpha_1 = m$ en $\alpha_2 = -m$.

De eis dat de coëfficiënt van $x^{\alpha+1}$ (dus $n=1$) de waarde nul heeft, geeft:

$$c_1(\alpha+1-m)(\alpha+1+m) = 0 \quad (26.9)$$

terwijl de eis dat de coëfficiënt van $x^{\alpha+n}$ (met $n \geq 2$) nul is, oplevert:

$$c_n(n+\alpha-m)(n+\alpha+m) + c_{n-2} = 0$$

of:

$$c_n = - \frac{c_{n-2}}{(n+\alpha-m)(n+\alpha+m)} \quad (n \geq 2) \quad (26.10)$$

We behandelen eerst het geval: $\alpha_1 = m$. Uit (26.9) volgt dan:

$$c_1(1+2m) = 0$$

Indien we veronderstellen dat $2m$ geen negatief geheel getal is, geldt o.a. $1+2m \neq 0$ en dus $c_1 = 0$.

Uit (26.10) volgt dan: $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$.

In het algemeen dus:

$$c_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Indien we de even indices beschouwen en daarbij stellen: $n = 2p$ ($p \geq 0$), dan levert (26.10) in het geval $\alpha_1 = m$:

$$c_{2p} = - \frac{c_{2p-2}}{2p(2p+2m)} = - \frac{c_{2(p-1)}}{4p(p+m)}$$

Voor de coëfficiënten met even index vinden we dus:

$$c_2 = - \frac{c_0}{4 \cdot 1 \cdot (1+m)}$$

$$c_4 = - \frac{c_2}{4 \cdot 2 \cdot (2+m)} = \frac{c_0}{4^2 \cdot 2! (m+1)(m+2)}$$

$$c_6 = - \frac{c_4}{4 \cdot 3 \cdot (3+m)} = - \frac{c_0}{4^3 \cdot 3! (m+1)(m+2)(m+3)}$$

of in het algemeen:

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p c_0}{4^p p! (m+1)(m+2) \dots (m+p)} \quad (p \geq 0)$$

hetgeen met volledige inductie is aan te tonen.

Bij de wortel $\alpha_1 = m$ van de indexvergelijking (bij de onderstelling dat $2m$ geen negatief geheel getal is), behoort de oplossing:

$$c_0 x^m \left\{ 1 - \frac{1}{1!(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(m+1)(m+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!(m+1)(m+2)(m+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right\} \quad (26.11)$$

De tweede wortel van de indexvergelijking $\alpha_2 = -m$ geeft na een analoge redenering, onder de onderstelling dat $2m$ geen positief geheel getal is, als oplossing:

$$c_0 x^{-m} \left\{ 1 - \frac{1}{1!(-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(-m+1)(-m+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!(-m+1)(-m+2)(-m+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right\} \quad (26.12)$$

Het is eenvoudig na te gaan dat de reeksen tussen accoladen uit (26.11) en (26.12) convergeren voor alle x .

We herleiden het rechterlid van (26.11) nog tot een veel gebruikte gedaante. We schrijven hiervoor:

$$c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \left(\frac{x}{2}\right)^{2t+m} 2^m}{t!(m+1)(m+2) \dots (m+t)} = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \Gamma(m+1) 2^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2t+m}}{t! \Gamma(m+t+1)}$$

waarin $\Gamma(m+1) = m(m-1) \dots (m-[m])$ (mits m geen negatief geheel getal is), dus (26.11) gaat over in:

$$c_0 2^m \Gamma(m+1) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \left(\frac{x}{2}\right)^{2t+m}}{t! \Gamma(m+t+1)} = A J_m(x)$$

waarin A een constante is, en

$$J_m(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \left(\frac{x}{2}\right)^{2t+m}}{t! \Gamma(m+t+1)}$$

J_m noemen we een *Besselfunctie van de eerste soort en orde m* .

Voor (26.12) vinden we:

$$c_0 2^{-m} \Gamma(-m+1) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t \left(\frac{x}{2}\right)^{2t-m}}{t! \Gamma(-m+t+1)} = B J_{-m}(x)$$

waarin B constant is en $J_{-m}(x)$ een Besselfunctie van de eerste soort is en orde $-m$. Daar J_m en J_{-m} onafhankelijk zijn voor $x \neq 0$ (als $m \notin \mathbb{Z}$) is de algemene oplossing van (26.6):

$$y = K_1 J_m(x) + K_2 J_{-m}(x) \quad (2m \notin \mathbb{Z} - \{0\})$$

Hierin zijn K_1 en K_2 willekeurige constanten.

Indien $m = 0$, dan zijn de beide reeksen identiek. We vinden dan slechts één oplossing:

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

of:

$$y = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2t}}{(t!)^2}$$

Dit is een z.g. *Besselfunctie van de eerste soort en orde nul*.

Op het bepalen van een tweede oplossing van (26.6) voor $m = 0$ zullen we niet diep ingaan. We volstaan met de volgende opmerking.

Opmerking:

Als we in de oplossing α laten staan (zie (26.10)), d.w.z. niet vervangen door m of $-m$, dan kunnen we de oplossing zien als een functie van x en α , b.v. $W(x, \alpha)$. Het blijkt dat als $m_1 = m_2 = m$, niet alleen $W(x, m)$ voldoet, maar ook $\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=m}$.

Stellen we:

$$W(x, \alpha) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha) x^n$$

dan geldt:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = x^\alpha \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha) x^n + x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(\alpha) x^n$$

We kunnen hiermee bewijzen (het bewijs zullen we hier niet geven) dat voor $m = 0$ als oplossing geldt:

$$y = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) - \dots$$

Dit is een *Besselfunctie van de tweede soort en de orde nul*. De notatie voor deze functie is Y_0 .

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 3t \frac{dx}{dt} - t^2 \frac{dy}{dt} + x(t) - 5y(t) &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + t^3 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 4x(t) - ty(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27.3)$$

herleiden tot een eerste-orde stelsel met 4 onbekende functies, door te stellen:

$$u(t) = \frac{dx}{dt}, \quad v(t) = \frac{dy}{dt}$$

(27.3) gaat dan over in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(t) \\ \frac{dy}{dt} &= v(t) \\ \frac{du}{dt} &= -x(t) + 5y(t) - 3tu(t) + t^2v(t) \\ \frac{dv}{dt} &= -4x(t) + ty(t) - t^3u(t) + v(t) \end{aligned} \right\} \quad (27.4)$$

Op deze wijze kunnen we ook elke D.V. van hogere orde herleiden tot een eerste-orde stelsel. B.v.:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} \sin t + t \frac{dx}{dt} - 6x(t) = 0 \quad (27.5)$$

Hierin stellen we:

$$u(t) = \frac{dx}{dt}, \quad v(t) = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

waardoor (27.5) overgaat in het eerste-orde stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(t) \\ \frac{du}{dt} &= v(t) \\ \frac{dv}{dt} &= 6x(t) - tu(t) + v(t) \sin t \end{aligned} \right\}$$

Een voorbeeld van een fysisch probleem dat leidt tot een stelsel simultane differentiaalvergelijkingen is het volgende:

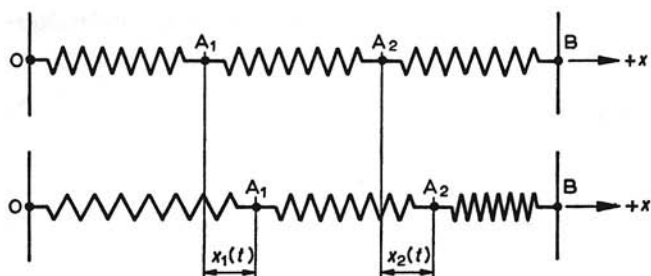


Fig. 33

Twee massapunten A_1 en A_2 met massa's resp. m_1 en m_2 zijn met elkaar en met twee vaste punten verbonden door veren. Hiervoor geldt de wet van Hooke, met veerconstanten resp. c_1, c_2, c_3 (zie fig. 33).

Op A_1 en A_2 werken krachten langs de x -as die van de tijd t afhangen. Gemeten in de richting van de positieve x -as zijn deze resp. $F_1(t)$ en $F_2(t)$. De uitwijkingen, die A_1 en A_2 daardoor ondergaan in de richting van de positieve x -as, zijn $x_1(t)$ en $x_2(t)$. Ten tijde t is de uitrekking van de veer OA_1 in de richting van de positieve x -as: $c_1 x_1(t)$. Deze veroorzaakt op A_1 een kracht in tegengestelde richting, dus een kracht: $-c_1 x_1(t)$.

Op dat tijdstip is de veer $A_1 A_2$ uitgerekt over een afstand $x_2(t) - x_1(t)$ in de richting van de positieve x -as en daardoor werkt op A_1 een kracht die in de richting van de positieve x -as voorgesteld wordt door $c_2 \{x_2(t) - x_1(t)\}$. Op A_2 veroorzaakt deze uitrekking een kracht $-c_2 \{x_2(t) - x_1(t)\}$.

Daar de „uitrekking” van $A_2 B$ in de richting van de positieve x -as $-x_2(t)$ is, veroorzaakt deze een kracht op A_2 voorgesteld door $-c_3 x_2(t)$, zodat toepassing van de wet van Newton ($F = m \cdot A$) oplevert:

$$F_1(t) - c_1 x_1(t) + c_2 \{x_2(t) - x_1(t)\} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$F_2(t) - c_3 x_2(t) - c_2 \{x_2(t) - x_1(t)\} = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

Met de fluxienotatie kunnen we dit korter schrijven als:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= -(c_1 + c_2)x_1(t) + c_2 x_2(t) + F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= c_2 x_1(t) - (c_2 + c_3)x_2(t) + F_2(t) \end{aligned} \right\}$$

Definitie

Onder een oplossing van het simultane stelsel (27.2) verstaan we een n -tal functies x_1, x_2, \dots, x_n , die gedefinieerd zijn voor alle t op een zeker interval en bij substitutie in (27.2) een n -tal identiteiten voor t opleveren.

Vaak stellen we de oplossing voor als een vector. We spreken dan van een *oplossingsvector*:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ of } \underline{v}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Zo heeft (27.1) o.a. de oplossingsvector:

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3)e^{2t} \\ (\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2)e^{2t} \end{pmatrix}$$

Dit is echter niet de enige oplossing. Hierop komen we later nog terug.

Met betrekking tot de *existentie* van oplossingen van het stelsel (27.2) volstaan we er mede om zonder bewijs de volgende stelling te vermelden.

Existentiestelling

Indien de functies F_1, F_2, \dots, F_n (die afhangen van de $n + 1$ variabelen t, y_1, y_2, \dots, y_n) in een bepaald gebied G van de t, y_1, y_2, \dots, y_n -ruimte continue partiële afgeleiden van de eerste orde hebben, dan kunnen we bij vooraf opgegeven waarden $t_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ (mits $(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \in G$) precies één stelsel functies van t vinden: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, die gedefinieerd zijn op een zekere omgeving I van t_0 , die in die omgeving voldoen aan het stelsel (27.2) en in t_0 de voorgeschreven waarden a_1, a_2, \dots, a_n aannemen, dus $\alpha_1(t_0) = a_1, \alpha_2(t_0) = a_2, \dots, \alpha_n(t_0) = a_n$.

Anders gezegd:

Bij gegeven $P(t_0, a_1, \dots, a_n) \in G$ bestaat precies één oplossingsvector:

$$\underline{A}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

die gedefinieerd is in een omgeving I van t_0 , voldoet aan het stelsel (27.2) en de eigenschap heeft, dat

$$\underline{A}(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Om daadwerkelijk oplossingen te bepalen kunnen we het stelsel herleiden tot één D.V. van hogere orde en proberen deze op te lossen. Deze herleiding schetsen we

hier voor een eerste-ordestelsel met twee vergelijkingen, aannemende dat de toegepaste differentiaties geoorloofd zijn.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1\{t, x(t), y(t)\} \\ \frac{dy}{dt} &= F_2\{t, x(t), y(t)\} \end{aligned} \right\} \quad (27.6)$$

Differentiatie van linker- en rechterlid van de eerste D.V. van (27.6) levert:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = H_1 \left\{ t, x(t), y(t), \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\} \quad (27.7)$$

Substitutie van $\frac{dy}{dt}$ uit de tweede D.V. van (27.6) in (27.7) geeft:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = H_2 \left\{ t, x(t), y(t), \frac{dx}{dt} \right\}$$

Uit deze D.V. en de eerste D.V. van (27.6) kunnen we onder bepaalde voorwaarden $y(t)$ elimineren, zodat we een D.V. van de tweede orde voor $x(t)$ krijgen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = H_3 \left\{ t, x(t), \frac{dx}{dt} \right\}$$

De algemene oplossing zal twee willekeurige constanten bevatten. Met $x(t)$ kunnen we uit de eerste D.V. van (27.6) $y(t)$ oplossen.

Op soortgelijke wijze kunnen we tewerk gaan bij een eerste-orde stelsel met drie vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1\{t, x(t), y(t), z(t)\} \\ \frac{dy}{dt} &= F_2\{t, x(t), y(t), z(t)\} \\ \frac{dz}{dt} &= F_3\{t, x(t), y(t), z(t)\} \end{aligned} \right\} \quad (27.8)$$

Differentiatie van de eerste D.V. naar t levert:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = H_1 \left\{ t, x(t), y(t), z(t), \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\}$$

Substitutie van $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{dz}{dt}$, gegeven door de tweede en derde D.V. van (27.8), geeft:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = H_2 \left\{ t, x(t), y(t), z(t), \frac{dx}{dt} \right\} \quad (27.9)$$

We differentiëren nu (27.9) naar t en substitueren weer $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{dz}{dt}$, zodat we krijgen:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = H_3 \left\{ t, x(t), y(t), z(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right\} \quad (27.10)$$

Eliminatie van $y(t)$ en $z(t)$ uit de eerste D.V. van (27.8), (27.9) en (27.10) geeft tenslotte een derde-orde D.V. voor $x(t)$, nl.:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = H_4 \left\{ t, x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right\}$$

In het algemeen vereisen de voorkomende eliminaties nogal wat vaardigheid. Voor een bepaald soort stelsels, nl. lineaire stelsels met constante coëfficiënten, bestaat, zoals wij in een volgende paragraaf zullen zien, een meer vaste lijn van oplossen. We geven enkele voorbeelden van het algemene geval.

Voorbeeld 1

Los op het volgende stelsel D.V.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{t} y(t) + t^2 e^t \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{t} x(t) + 3t e^t \end{aligned} \right\} \quad (t \neq 0) \quad (27.11)$$

Oplossing 1:

Differentieer de eerste vergelijking naar t . Dit geeft:

$$t \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 3t^2 e^t + t^3 e^t$$

Substitueren van $\frac{dy}{dt}$ uit de tweede D.V. van (27.11) in deze vergelijking geeft:

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} - x(t) = t^4 e^t + 3t^3 e^t - 3t^2 e^t$$

Dit is een D.V. van Euler die op de bekende manier is op te lossen, waarna we via de eerste D.V. van (27.11) ook $y(t)$ kunnen vinden.

Daar deze manier nogal bewerkelijk is, proberen we een tweede manier.

Oplossing 2:

We schrijven (27.11) als:

$$\left. \begin{aligned} t \frac{dx}{dt} + y(t) &= t^3 e^t \\ t \frac{dy}{dt} + x(t) &= 3t^2 e^t \end{aligned} \right\} \quad (27.12)$$

Hieruit volgt door optelling:

$$t \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) + x(t) + y(t) = t^3 e^t + 3t^2 e^t$$

Stel $x(t) + y(t) = u(t)$, dan volgt:

$$t \frac{du}{dt} + u(t) = t^3 e^t + 3t^2 e^t$$

zodat:

$$\frac{d\{tu(t)\}}{dt} = \frac{d}{dt} (t^3 e^t)$$

of wel:

$$tu(t) = t^3 e^t + A$$

en dus:

$$x(t) + y(t) = t^2 e^t + \frac{A}{t} \quad (27.13)$$

Hieruit en uit de eerste D.V. van (27.12) volgt, dat $x(t)$ voldoet aan de eerste-orde D.V.:

$$t \frac{dx}{dt} - x(t) = t^3 e^t - t^2 e^t - \frac{A}{t}$$

Dit is een lineaire D.V. voor $x(t)$ met als algemene oplossing:

$$x(t) = t^2 e^t - 2t e^t + \frac{A}{2t} + Bt$$

weer met behulp van de eerste D.V. van (27.12) volgt dan:

$$y(t) = 2te^t + \frac{A}{2t} - Bt$$

De algemene oplossing in vectorvorm is dus:

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} t^2 e^t - 2te^t \\ 2te^t \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2t} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 2

Los op het volgende stelsel D.V.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y(t) - z(t) \\ \frac{dy}{dt} &= x^2(t) + y(t) \\ \frac{dz}{dt} &= x^2(t) + z(t) \end{aligned} \right\} \quad (27.14)$$

Oplossing:

Trekken we de derde vergelijking van de tweede af, dan vinden we:

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = y(t) - z(t)$$

waaruit we oplossen:

$$y(t) - z(t) = Ae^t$$

Uit de eerste D.V. van (27.14) volgt dan:

$$\frac{dx}{dt} = Ae^t$$

dus:

$$x(t) = Ae^t + B$$

De tweede D.V. van (27.14) geeft dan:

$$\frac{dy}{dt} - y(t) = A^2 e^{2t} + 2ABe^t + B^2$$

met als oplossing:

$$y(t) = A^2 e^{2t} + 2ABte^t - B^2 + Ce^t$$

Uit de eerste vergelijking van (27.14) volgt:

$$z(t) = A^2 e^{2t} + 2ABte^t - B^2 + (C - A)e^t$$

28 Lineaire stelsels. Fundamentele stellingen

Een speciaal geval van (27.2) is voor de toepassingen van bijzonder belang, en wel het geval dat (27.2) een *lineair stelsel* is, d.w.z. de gedaante heeft:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \dots &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

Indien $b_1(t) = b_2(t) = \dots = b_n(t) = 0$ ($t \in I$), dan spreken we van een *homogeen lineair stelsel*, anders van een *inhomogeen lineair stelsel*. Indien $a_{ij}(t)$ onafhankelijk is van t (voor $i, j = 1, \dots, n$), dan spreken we van een *lineair stelsel met constante coëfficiënten*.

N.B. De functies b_i mogen daarbij nog wel van t afhangen.

Teneinde het schrijfwerk te bekorten, zullen we ons in deze paragraaf beperken tot lineaire stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekende functies, dus tot stelsels van de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}(t)x(t) + a_{12}(t)y(t) + b_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(t)x(t) + a_{22}(t)y(t) + b_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

De *existentiestelling* voor dit stelsel luidt dan (wij aanvaarden die zonder bewijs!):
Zijn de functies a_{ij} en b_i ($i = 1, 2; j = 1, 2$) continu in een interval I van de reële getallenrechte, dan bestaat er bij gegeven A en B en een willekeurig gekozen $t_0 \in I$, precies één oplossingsvector:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

zó dat

$$\underline{v}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Voor het homogeen stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}(t)x(t) + a_{12}(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(t)x(t) + a_{22}(t)y(t) \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

zullen we vier stellingen bewijzen die grote analogie vertonen met de vier stellingen die we bewezen voor een homogene lineaire D.V. (zie par. 12).

We merken eerst op, dat we de begrippen lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid van functies op voor de hand liggende wijze kunnen uitbreiden tot vectoren waarvan de componenten functies zijn die op een zeker interval I zijn gedefinieerd. Zo heten \underline{v}_1 en \underline{v}_2 met $\underline{v}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ en $\underline{v}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ lineair afhankelijk op I , indien er constanten c_1 en c_2 bestaan, niet beide nul, zodanig dat:

$$c_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in I)$$

Lineair onafhankelijk betekent ook hier: niet lineair afhankelijk.

N.B. Het is direct duidelijk dat uit de lineaire afhankelijkheid van de vectoren $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ de lineaire afhankelijkheid van de functies $x_1(t)$ en $x_2(t)$ volgt evenals de lineaire afhankelijkheid van de functies $y_1(t)$ en $y_2(t)$.

Het omgekeerde behoeft niet juist te zijn. Zo zijn de functies t en $2t$ lineair afhankelijk, evenals de functies $3t$ en $5t$, maar de vectoren $\begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2t \\ 5t \end{pmatrix}$ zijn niet lineair afhankelijk!

Stelling 1

Iedere lineaire combinatie van oplossingsvectoren is een oplossingsvector, d.w.z. als $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ voldoen aan (28.3), dan voldoet ook

$$c_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

met willekeurige complexe c_1 en c_2 aan (28.3).

Bewijs:

De juistheid van deze stelling blijkt door substitutie.

Stelling 2

Er bestaan twee op I lineair onafhankelijke oplossingsvectoren.

Bewijs:

Is $t_0 \in I$, dan bestaat er volgens de existentiestelling één oplossingsvector $\underline{v}_1(t)$ met de eigenschap dat $\underline{v}_1(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ y_1(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en eveneens een oplossingsvector $\underline{v}_2(t)$ met de eigenschap: $\underline{v}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De lineaire onafhankelijkheid op I blijkt dan door directe toepassing van de definitie van lineaire onafhankelijkheid.

Opmerking:

Er zijn dus volgens stelling 1 ook oneindig veel van deze tweetallen.

Stelling 3

Iedere oplossingsvector is een lineaire combinatie van een tweetal vector als bedoeld in stelling 2.

Bewijs:

Stel dat $\underline{w}(t)$ een oplossingsvector is met $\underline{w}(t_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, dan geldt:

$$\underline{w}(t_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\underline{v}_1(t_0) + B\underline{v}_2(t_0)$$

De oplossingsvector $\underline{w}(t)$ stemt in t_0 overeen met $A\underline{v}_1(t) + B\underline{v}_2(t)$. Wegens de eenduidigheid van de oplossing geldt op geheel I :

$$\underline{w}(t) = A\underline{v}_1(t) + B\underline{v}_2(t)$$

Stelling 4

Ieder tweetal op I lineair onafhankelijke oplossingsvectoren vormt een basis voor de oplossingsruimte, d.w.z. als $\underline{v}_1(t)$ en $\underline{v}_2(t)$ twee oplossingsvectoren zijn die op I lineair onafhankelijk zijn, dan is iedere oplossingsvector $\underline{w}(t)$ te schrijven in de gedaante:

$$\underline{w}(t) = c_1\underline{v}_1(t) + c_2\underline{v}_2(t)$$

met zekere complexe c_1 en c_2 .

Bewijs:

Stel dat $\underline{w}(t)$ een oplossingsvector is en dat voor een zekere $t_0 \in I$ geldt: $\underline{w}(t_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. We moeten nu aantonen dat er getallen c_1 en c_2 bestaan zodanig dat:

$$\underline{w}(t) = c_1\underline{v}_1(t) + c_2\underline{v}_2(t) \quad (\forall t \in I) \quad (28.4)$$

We bepalen eerst c_1 en c_2 zodanig dat

$$\underline{w}(t_0) = c_1 \underline{v}_1(t_0) + c_2 \underline{v}_2(t_0) \quad (28.5)$$

d.w.z. dat aan (28.4) voldaan is in t_0 . Dit kan dan en slechts dan indien er getallen c_1 en c_2 bestaan, zó dat:

$$\left. \begin{aligned} A &= c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) \\ B &= c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

waarbij gesteld is:

$$\underline{v}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

(28.6) heeft dan en slechts dan een oplossing indien

$$\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ y_1(t_0) & y_2(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (28.7)$$

Dit laatste is inderdaad het geval. Zou nl. gelden:

$$\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ y_1(t_0) & y_2(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

dan zouden er getallen λ en μ bestaan (niet beide nul), zodanig dat:

$$\lambda x_1(t_0) + \mu x_2(t_0) = 0$$

$$\lambda y_1(t_0) + \mu y_2(t_0) = 0$$

maar dan zou

$$\underline{u}(t) = \lambda \underline{v}_1(t) + \mu \underline{v}_2(t)$$

een oplossingsvector zijn van (28.3) (als lineaire combinatie van twee oplossingen), die in t_0 overeenstemt met de nuloplossing $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Op grond van de eenduidigheid zou dan op het gehele interval I de oplossing $\underline{u}(t)$ identiek zijn met de nuloplossing. Dit zou betekenen:

$$\lambda \underline{v}_1(t) + \mu \underline{v}_2(t) = \underline{0} \quad (\forall t \in I)$$

hetgeen in strijd is met de lineaire onafhankelijkheid van \underline{v}_1 en \underline{v}_2 .

We kunnen dus inderdaad getallen c_1 en c_2 vinden, zo dat aan (28.5) is voldaan. Dan stemt echter de oplossing $c_1 \underline{v}_1(t) + c_2 \underline{v}_2(t)$ in t_0 overeen met $\underline{w}(t)$. Deze geldt dus weer op grond van de eenduidigheid in geheel I :

$$\underline{w}(t) = c_1 \underline{v}_1(t) + c_2 \underline{v}_2(t)$$

hetgeen te bewijzen was.

Het verband tussen de oplossingen van het homogene stelsel (28.3) en die van het inhomogene stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}(t)x(t) + a_{12}(t)y(t) + b_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(t)x(t) + a_{22}(t)y(t) + b_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (28.8)$$

wordt gelegd door de volgende stelling:

Stelling 5

Alle oplossingen van het inhomogene stelsel (28.8) worden verkregen door alle oplossingen van het homogene stelsel (28.3) te vermeerderen met één vaste oplossing van het inhomogene stelsel (28.8).

Bewijs:

Het bewijs verloopt met het minste schrijfwerk indien we (28.3) en (28.8) in matrixnotatie schrijven:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = A(t)\underline{v}(t)$$

resp.

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = A(t)\underline{v}(t) + \underline{b}(t)$$

waarin:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}; \quad \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

Het verloop van het bewijs is dan volkomen analoog aan dat van de stelling in par. 10.

Opmerking:

De in deze paragraaf genoemde stellingen gelden mutatis mutandis ook voor lineaire stelsels met meer dan twee vergelijkingen met evenveel onbekende functies.

29 Oplossingsmethoden voor lineaire stelsels met constante coëfficiënten 1

Bij lineaire stelsels met constante coëfficiënten bestaat er een eenvoudige rekenwijze om de in par. 27 genoemde herleiding tot één D.V. van hogere orde uit te voeren

met behulp van de in par. 10 ingevoerde D -operator. Deze operator werd als volgt gedefinieerd.

Voor een differentieerbare functie $f: t \mapsto f(t)$ schrijven we: $Df(t) = f'(t)$.

De in par. 10 genoemde eigenschappen van de D -operator, waarbij essentieel is dat de optredende coëfficiënten constant zijn, zullen we toepassen om de bovenbedoelde rekenwijze aan de hand van voorbeelden te illustreren. Hierbij schrijven we vaak $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ in plaats van $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$.

Voorbeeld 1

Los op het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) + \sin 2t \\ \dot{y}(t) &= x(t) + \cos 2t \end{aligned} \right\} \quad (29.1)$$

Oplossing:

Met behulp van de D -operator kunnen we voor (29.1) schrijven:

$$\left. \begin{aligned} Dx(t) + y(t) &= \sin 2t \\ -x(t) + Dy(t) &= \cos 2t \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

Vermenigvuldiging van linker- en rechterlid in de eerste vergelijking met D doet (29.2) overgaan in:

$$\left. \begin{aligned} D^2x(t) + Dy(t) &= 2 \cos 2t \\ -x(t) + Dy(t) &= \cos 2t \end{aligned} \right\}$$

Aftrekking levert op:

$$(D^2 + 1)x(t) = \cos 2t \quad (29.3)$$

Op de bekende wijze vinden we voor de algemene oplossing van de bij (29.3) behorende homogene D.V.:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Als particuliere oplossing van (29.3) geldt:

$$x_0(t) = -\frac{1}{3} \cos 2t$$

De algemene oplossing van (29.3) is dus:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{3} \cos 2t$$

Substitutie in de eerste D.V. van (29.1) geeft:

$$y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t + \frac{1}{3} \sin 2t$$

De algemene oplossingsvector van (29.1) is dus:

$$\underline{v}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad (29.4)$$

Dat (29.4) inderdaad de algemene oplossingsvector is, blijkt daaruit dat $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ twee lineair onafhankelijke oplossingsvectoren zijn van het bij (29.1) behorende homogene stelsel, terwijl $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ een particuliere oplossingsvector is van (29.1).

Voorbeeld 2

Los op het stelsel gegeven in (27.1):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) - y(t) + t^2 e^{2t} \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t) - t e^{2t} \end{aligned} \right\} \quad (29.5)$$

Oplossing:

Met de D -operator wordt dit stelsel:

$$\left. \begin{aligned} (D - 3)x(t) + y(t) &= t^2 e^{2t} \\ -x(t) + (D - 1)y(t) &= -t e^{2t} \end{aligned} \right\} \quad (29.6)$$

Vermenigvuldiging van de eerste D.V. in (29.6) met $D - 1$ geeft:

$$\left. \begin{aligned} (D - 1)(D - 3)x(t) + (D - 1)y(t) &= 2t e^{2t} + 2t^2 e^{2t} - t^2 e^{2t} \\ -x(t) + (D - 1)y(t) &= -t e^{2t} \end{aligned} \right\}$$

waaruit door aftrekking volgt:

$$(D - 2)^2 x(t) = t^2 e^{2t} + 3t e^{2t} \quad (29.7)$$

De algemene oplossing van de bij (29.7) behorende homogene (gereduceerde) D.V. is:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

Met variatie van constanten vinden we als particuliere oplossing van (29.7):

$$x_0(t) = \frac{1}{12} t^4 e^{2t} + \frac{1}{2} t^3 e^{2t}$$

De algemene oplossing van (29.7) is dus:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{12} t^4 e^{2t} + \frac{1}{2} t^3 e^{2t}$$

Wanneer we dit substitueren in de eerste D.V. van (29.5), vinden we voor $y(t)$:

$$y(t) = (c_1 - c_2) e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{12} t^4 e^{2t} + \frac{1}{6} t^3 e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

De algemene oplossingsvector is dus:

$$\underline{v}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{2t} \\ te^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{12}t^4 e^{2t} + \frac{1}{2}t^3 e^{2t} \\ \frac{1}{12}t^4 e^{2t} + \frac{1}{6}t^3 e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Dat deze methode ook toepasbaar is op een simultaan stelsel met drie vergelijkingen blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3

Los op het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) - y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= -3x(t) + y(t) + 3z(t) \\ \dot{z}(t) &= 2x(t) + 2y(t) \end{aligned} \right\} \quad (29.8)$$

Oplossing:

Met de D -operator schrijven we dit stelsel als:

$$\left. \begin{aligned} (D - 3)x(t) + y(t) + z(t) &= 0 \\ 3x(t) + (D - 1)y(t) - 3z(t) &= 0 \\ 2x(t) + 2y(t) - Dz(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De coëfficiëntenmatrix hiervan is:

$$\begin{pmatrix} D - 3 & 1 & 1 \\ 3 & D - 1 & -3 \\ 2 & 2 & -D \end{pmatrix}$$

Door op de uit de lineaire algebra bekende wijze te „vegen” met de rijen, vinden we als coëfficiëntenmatrix van een gelijkwaardig stelsel:

$$\left[\begin{array}{ccc} D^2 - 6D + 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (D + 2)(D^2 - 6D + 8) \\ 0 & (D + 2)(D^2 - 6D + 8) & 0 \end{array} \right]$$

Het bijbehorende simultane stelsel is dan:

$$\left. \begin{aligned} (D - 2)(D - 4)x(t) &= 0 \\ (D + 2)(D - 2)(D - 4)y(t) &= 0 \\ (D + 2)(D - 2)(D - 4)z(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

met als oplossing:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{2t} + a_2 e^{4t} \\ y(t) &= b_1 e^{2t} + b_2 e^{-2t} + b_3 e^{4t} \\ z(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{4t} \end{aligned} \right\} \quad (29.9)$$

Op het eerste gezicht lijkt het alsof de oplossingsvector afhangt van de 8 vectoren, t.w.:

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Op grond van de theorie weten we echter dat de oplossingsruimte wordt opgespannen door drie lineair onafhankelijke vectoren. Er moeten dus betrekkingen bestaan tussen de 8 constanten. Deze relaties vinden we door in (29.8) de oplossing (29.9) te substitueren. We vinden dan:

$$\begin{aligned} 2a_1 e^{2t} + 4a_2 e^{4t} &= 3a_1 e^{2t} + 3a_2 e^{4t} \\ &\quad - b_1 e^{2t} - b_2 e^{-2t} - b_3 e^{4t} \\ &\quad - c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} - c_3 e^{4t} \end{aligned} \quad (29.10)$$

$$\begin{aligned} 2b_1 e^{2t} - 2b_2 e^{-2t} + 4b_3 e^{4t} &= -3a_1 e^{2t} - 3a_2 e^{4t} \\ &\quad + b_1 e^{2t} + b_2 e^{-2t} + b_3 e^{4t} \\ &\quad + 3c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-2t} + 3c_3 e^{4t} \end{aligned} \quad (29.11)$$

$$\begin{aligned} 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} + 4c_3 e^{4t} &= 2a_1 e^{2t} + 2a_2 e^{4t} \\ &\quad + 2b_1 e^{2t} + 2b_2 e^{-2t} + 2b_3 e^{4t} \end{aligned} \quad (29.12)$$

Daar dit geldt voor alle t , vinden we de betrekkingen:

Uit (29.10): $a_1 = b_1 + c_1$; $b_2 + c_2 = 0$; $a_2 = -b_3 - c_3$;

Uit (29.11): $b_1 = -3a_1 + 3c_1$; $b_2 + c_2 = 0$; $b_3 = -a_2 + c_3$;

Uit (29.12): $c_1 = a_1 + b_1$; $b_2 + c_2 = 0$; $2c_3 = a_2 + b_3$.

Hieruit volgt: $b_1 = 0$; $c_3 = 0$; $a_1 = c_1$; $a_2 = -b_3$; $b_2 = -c_2$.

De algemene oplossing van (29.8) is dus:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} + a_2 e^{4t} \\ y(t) &= -c_2 e^{-2t} - a_2 e^{4t} \\ z(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \end{aligned} \right\}$$

De oplossingsvectoren zijn dan:

$$\underline{v}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dat we deze methode ook kunnen toepassen bij een simultaan stelsel met constante coëfficiënten, waarbij hogere afgeleiden voorkomen (mits lineair), laten we zien in voorbeeld 4.

Voorbeeld 4

Een stoffelijk punt P beweegt zich in het platte vlak op zodanige wijze dat de plaatscoördinaten $x(t)$ en $y(t)$ voldoen aan het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 0 \\ \dot{x}(t) + \ddot{y}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29.13)$$

Ten tijde $t = 0$ geldt:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= a, \quad y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) &= 0, \quad \dot{y}(0) = v \end{aligned} \right\} \quad (29.14)$$

Bepaal de baan van P.

Oplossing:

Met behulp van de D -operator kunnen we het stelsel (29.13) schrijven als:

$$\left. \begin{aligned} D^2x(t) - Dy(t) &= 0 \\ Dx(t) + D^2y(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Eliminatie van $y(t)$ geeft:

$$(D^3 + D)x(t) = 0$$

of:

$$D(D^2 + 1)x(t) = 0$$

waaruit we oplossen:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3$$

Uit de eerste D.V. van (29.13) volgt:

$$\dot{y}(t) = -c_1 \cos t - c_2 \sin t$$

dus:

$$y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_4$$

De eisen uit (29.14) geven de betrekkingen:

$$a = c_1 + c_3; \quad c_2 + c_4 = 0$$

$$c_2 = 0; \quad -c_1 = v$$

De baan van P wordt bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= -v \cos t + a + v \\ y(t) &= v \sin t \end{aligned} \right\}$$

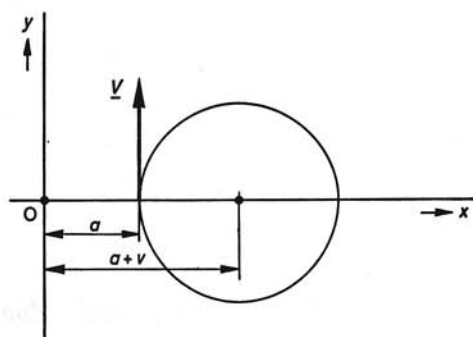


Fig. 34

In rechthoekige coördinaten is de vergelijking van de baan (zie fig. 34):

$$(x - a - v)^2 + y^2 = v^2$$

30 Oplossingsmethoden voor lineaire stelsels met constante coëfficiënten 2

Een tweede oplossingsmethode is het analogon van die welke we in de paragrafen 13 en 15 behandelden voor lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde met constante coëfficiënten. Hierin probeerden we voor de homogene D.V.-en oplossingen te bepalen in de vorm van e -machten. Daarna hetzij met de methode van variatie van constanten, hetzij met „gokken” een particuliere oplossing van de niet gereduceerde D.V.

We geven eerst een voorbeeld.

Voorbeeld 1

Los op het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5x(t) - 6y(t) + e^t \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) - 4y(t) + e^{-t} \end{aligned} \right\} \quad (30.1)$$

Oplossing:

We lossen eerst het bijbehorende homogene stelsel op:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5x(t) - 6y(t) \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) - 4y(t) \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$

We stellen daartoe:

$$x(t) = A e^{\alpha t} \text{ en } y(t) = B e^{\alpha t}$$

met nader te bepalen constanten A , B en α .

Substitutie in (30.2) geeft:

$$\left. \begin{aligned} \alpha A e^{\alpha t} &= 5A e^{\alpha t} - 6B e^{\alpha t} \\ \alpha B e^{\alpha t} &= 3A e^{\alpha t} - 4B e^{\alpha t} \end{aligned} \right\}$$

Daar dit moet gelden voor alle t , krijgen we:

$$\left. \begin{aligned} (5 - \alpha)A - 6B &= 0 \\ 3A - (4 + \alpha)B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Deze twee homogene lineaire vergelijkingen voor A en B kunnen dan en slechts dan een van de nuloplossing verschillende oplossing bezitten, indien

$$\begin{vmatrix} 5 - \alpha & -6 \\ 3 & -4 - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

D.w.z. de waarden voor α die in aanmerking komen, en bij substitutie inderdaad oplossingen blijken te leveren, zijn juist de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix van (30.2).

Dit zijn dus de wortels van

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

dus $\alpha_1 = 2$ en $\alpha_2 = -1$.

De wortel $\alpha_1 = 2$ geeft:

$$3A - 6B = 0$$

dus $A = 2B$, en de oplossingsvectoren:

$$c_1 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

met willekeurige constante c_1 .

De wortel $\alpha_2 = -1$ geeft:

$$6A - 6B = 0$$

dus $A = B$ en de oplossingsvectoren:

$$c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

met willekeurige constante c_2 .

Aangezien de vectoren $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ lineair onafhankelijk zijn op de gehele getallenrechte, is de algemene oplossing van (30.2):

$$\underline{v}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \quad (30.3)$$

Met de methode van variatie van constanten gaan we een particuliere oplossing bepalen van (30.1). Daartoe vervangen we in (30.3) de constanten c_1 en c_2 door nader te bepalen functies C_1 en C_2 van t , d.w.z. we stellen:

$$\underline{v}_0(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

We proberen C_1 en C_2 zodanig te bepalen dat $\underline{v}_0(t)$ voldoet aan (30.1). Voor dit laatste is nodig en voldoende dat:

$$\begin{aligned} 2\dot{C}_1(t)e^{2t} + 4C_1(t)e^{2t} + \dot{C}_2(t)e^{-t} - C_2(t)e^{-t} \\ = 10C_1(t)e^{2t} + 5C_2(t)e^{-t} - 6C_1(t)e^{2t} - 6C_2(t)e^{-t} + e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t)e^{2t} + 2C_1(t)e^{2t} + \dot{C}_2(t)e^{-t} - C_2(t)e^{-t} \\ = 6C_1(t)e^{2t} + 3C_2(t)e^{-t} - 4C_1(t)e^{2t} - 4C_2(t)e^{-t} + e^{-t} \end{aligned}$$

of:

$$\begin{aligned} 2\dot{C}_1(t)e^{2t} + \dot{C}_2(t)e^{-t} &= e^t \\ \dot{C}_1(t)e^{2t} + \dot{C}_2(t)e^{-t} &= e^{-t} \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{1 - e^{-2t}}{e^t} = e^{-t} - e^{-3t} \\ \dot{C}_2(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & e^t \\ e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{2e^t - e^{3t}}{e^t} = 2 - e^{2t} \end{aligned} \tag{30.4}$$

We merken hierbij op, dat we konden voorspellen dat de determinant in de noemers niet nul zou zijn, daar het hier twee lineair onafhankelijke oplossingen betreft.

Daar we slechts één particuliere oplossing van (30.1) zoeken, kunnen we volstaan met één functie C_1 en één functie C_2 , die voldoen aan (30.4), dus b.v.:

$$C_1(t) = -e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t}$$

$$C_2(t) = 2t - \frac{1}{2}e^{2t}$$

Een particuliere oplossing van (30.1) is:

$$\underline{v}_0(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}$$

met:

$$x_0(t) = -2e^t + \frac{2}{3}e^{-t} + 2te^{-t} - \frac{1}{2}e^t = -\frac{5}{2}e^t + \frac{2}{3}e^{-t} + 2te^{-t}$$

$$y_0(t) = -e^t + \frac{1}{3}e^{-t} + 2te^{-t} - \frac{1}{2}e^t = -\frac{3}{2}e^t + \frac{1}{3}e^{-t} + 2te^{-t}$$

De algemene oplossing van (30.1) is:

$$c_1 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}$$

We zullen ons thans bezighouden met de algemene oplossing van het homogene stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ \dot{y}(t) &= a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{aligned} \right\}$$

Uit het voorbeeld blijkt al dat de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

van groot belang zijn.

In het gegeven voorbeeld vinden we twee verschillende reële eigenwaarden, die aanleiding gaven tot twee lineair onafhankelijke oplossingen. We kunnen ons afvragen hoe de oplossing verloopt als we twee gelijke eigenwaarden, of twee niet-reële eigenwaarden vinden. We zullen van deze twee gevallen voorbeelden geven.

Voorbeeld 2

Los op het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

Oplossing:

We proberen een oplossing van de gedaante:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A e^{\alpha t} \\ B e^{\alpha t} \end{pmatrix} \quad (A, B) \neq (0,0)$$

Substitutie in (30.5) geeft:

$$\alpha A e^{\alpha t} = 3A e^{\alpha t} - B e^{\alpha t}$$

$$\alpha B e^{\alpha t} = A e^{\alpha t} + B e^{\alpha t}$$

Dit is gelijkwaardig met

$$\left. \begin{aligned} (3 - \alpha)A - B &= 0 \\ A + (1 - \alpha)B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dit stelsel heeft dan en slechts dan een oplossing die niet de nuloplossing is, indien:

$$\begin{vmatrix} 3 - \alpha & -1 \\ 1 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

d.w.z. indien $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$.

Hieruit volgt slechts één waarde voor α , nl. $\alpha = 2$.

Hiervoor is $A - B = 0$. We vinden als oplossing:

$$\underline{v}_1(t) = A \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Op grond van de theorie weten we echter dat (30.5) twee lineair onafhankelijke oplossingen heeft. We proberen op een andere manier nog een oplossing te vinden en passen daartoe een tactiek toe analoog aan die in het overeenkomstige geval van een lineaire D.V. met constante coëfficiënten, d.w.z. we stellen:

$$\underline{v}_2(t) = \begin{pmatrix} (a + bt)e^{2t} \\ (c + dt)e^{2t} \end{pmatrix}$$

We proberen a, b, c en d zó te bepalen dat $\underline{v}_2(t)$ voldoet aan (30.5). Substitutie geeft:

$$be^{2t} + 2(a + bt)e^{2t} = \{3a - c + (3b - d)t\}e^{2t}$$

$$de^{2t} + 2(c + dt)e^{2t} = \{a + c + (b + d)t\}e^{2t}$$

Voor alle t moet dus gelden:

$$(b - d)t + a - b - c = 0$$

$$(b - d)t + a - c - d = 0$$

Hieraan is te voldoen door b.v. te kiezen: $b = d = 1, a = 0, c = -1$.

Deze keuze geeft:

$$\underline{v}_2(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ (t - 1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

De algemene oplossing van (30.5) is:

$$\underline{v}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{2t} \\ (t - 1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

daar $\underline{v}_1(t)$ en $\underline{v}_2(t)$ lineair onafhankelijk zijn voor alle t .

Voorbeeld 3

Los op het stelsel:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) + 4y(t) \\ \dot{y}(t) = -4x(t) + 3y(t) \end{cases} \quad (30.6)$$

Oplossing:

We proberen weer een oplossing van de gedaante:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A e^{\alpha t} \\ B e^{\alpha t} \end{pmatrix} \quad (A, B) \neq (0, 0)$$

Substitutie in (30.6) geeft:

$$\alpha A e^{\alpha t} = 3A e^{\alpha t} + 4B e^{\alpha t}$$

$$\alpha B e^{\alpha t} = -4A e^{\alpha t} + 3B e^{\alpha t}$$

Dit leidt tot de eis:

$$(3 - \alpha)A + 4B = 0$$

$$-4A + (3 - \alpha)B = 0$$

Hieraan is dan en slechts dan voldaan – omdat $(A, B) \neq (0, 0)$ – indien:

$$\begin{vmatrix} 3 - \alpha & 4 \\ -4 & 3 - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

d.w.z. indien $(3 - \alpha)^2 + 16 = 0$, dus $\alpha_1 = 3 + 4i$ en $\alpha_2 = 3 - 4i$.

De wortel α_1 geeft: $-4Ai + 4B = 0$, dus $A = -iB$, waarbij de oplossingsvectoren behoren:

$$c_1 \begin{pmatrix} -i e^{(3+4i)t} \\ e^{(3+4i)t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t}(-i \cos 4t + \sin 4t) \\ e^{3t}(\cos 4t + i \sin 4t) \end{pmatrix}$$

De wortel $\alpha_2 = 3 - 4i$ geeft: $4iA + 4B = 0$ of $A = iB$, met als bijbehorende oplossingsvectoren:

$$c_2 \begin{pmatrix} i e^{(3-4i)t} \\ e^{(3-4i)t} \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} e^{3t}(i \cos 4t + \sin 4t) \\ e^{3t}(\cos 4t - i \sin 4t) \end{pmatrix}$$

Door c_1 en c_2 beide de waarde 1 te geven, vinden we twee lineair onafhankelijke oplossingsvectoren. Noemen we deze $\underline{v}_1^*(t)$ en $\underline{v}_2^*(t)$, dan zijn ook $\underline{v}_1(t) = \frac{\underline{v}_1^*(t) + \underline{v}_2^*(t)}{2}$ en $\underline{v}_2(t) = \frac{-\underline{v}_1^*(t) + \underline{v}_2^*(t)}{2i}$ lineair onafhankelijk voor alle t , zodat een basis voor de

oplossingsruimte wordt gevormd door:

$$\underline{v}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \sin 4t \\ e^{3t} \cos 4t \end{pmatrix} \text{ en } \underline{v}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \cos 4t \\ -e^{3t} \sin 4t \end{pmatrix}$$

De algemene oplossing van (30.6) wordt bepaald door:

$$\underline{v}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \sin 4t \\ e^{3t} \cos 4t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \cos 4t \\ -e^{3t} \sin 4t \end{pmatrix}$$

Ter illustratie van een toepassingsmogelijkheid voor het optreden van een stelsel, beschouwen we (30.6) als bewegingsvergelijkingen van een stoffelijk punt, waarvan de plaatsvector $\underline{v}(t)$ voldoet aan (30.6) en aan de voorwaarde dat ten tijde $t = 0$ de plaatsvector $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ is.

Dit laatste betekent dat voor de constanten c_1 en c_2 geldt: $c_1 = 5$, $c_2 = 12$, en dus:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= e^{3t}(5 \sin 4t + 12 \cos 4t) \\ y(t) &= e^{3t}(5 \cos 4t - 12 \sin 4t) \end{aligned} \right\}$$

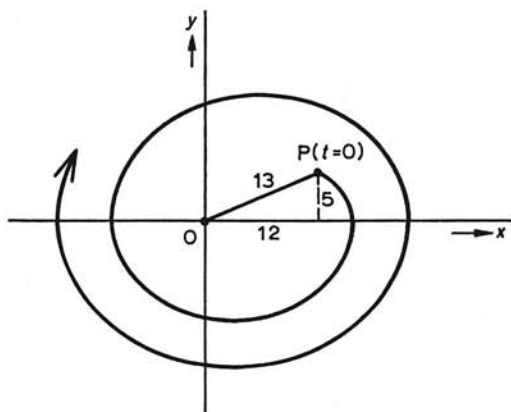
Door kwadrateren en daarna optellen vinden we dat voor de baan geldt:

$$\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2 = 169 e^{6t}$$

De baan van de kromme is in fig. 35 geschetst. Als $t \rightarrow \infty$, dan $OP \rightarrow \infty$.

Aan de hand van twee voorbeelden laten we zien hoe de boven behandelde methode werkt in het geval van drie vergelijkingen met drie onbekende functies.

Fig. 35



Voorbeeld 4

Los op het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) - y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= -3x(t) + y(t) + 3z(t) \\ \dot{z}(t) &= 2x(t) + 2y(t) \end{aligned} \right\} \quad (30.7)$$

Oplossing:

Analoog aan het geval met twee onbekende functies stellen we:

$$x(t) = A e^{\alpha t}, \quad y(t) = B e^{\alpha t}, \quad z(t) = C e^{\alpha t}$$

met nader te bepalen constanten A , B , C en α . Substitutie in (30.7) levert:

$$(3 - \alpha)A - B - C = 0$$

$$-3A + (1 - \alpha)B + 3C = 0$$

$$2A + 2B - \alpha C = 0$$

Deze drie homogene lineaire vergelijkingen in A , B en C hebben dan en slechts dan een oplossing die van de nuloplossing verschilt, indien:

$$\begin{vmatrix} 3 - \alpha & -1 & -1 \\ -3 & 1 - \alpha & 3 \\ 2 & 2 & -\alpha \end{vmatrix} = 0$$

d.w.z. indien $\alpha^3 - 4\alpha^2 - 4\alpha + 16 = 0$, of $(\alpha^2 - 4)(\alpha - 4) = 0$. De wortels van deze vergelijking zijn: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$ en $\alpha_3 = 4$.

De wortel $\alpha_1 = 2$ geeft:

$$A - B - C = 0$$

$$-3A - B + 3C = 0$$

$$2A + 2B - 2C = 0$$

Door „vegen” ontstaat hieruit het gelijkwaardige stelsel:

$$A - C = 0$$

$$B = 0$$

dus: $A = C$ en $B = 0$.

De hierbij behorende oplossingsvectoren zijn:

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$\alpha_2 = -2$ geeft als oplossingsvectoren:

$$c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

en $\alpha_3 = 4$:

$$c_3 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daar de drie vectoren $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$ lineair onafhankelijk zijn op \mathbb{R} , geldt voor de algemene oplossingsvector van (30.7):

$$\underline{v}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenslotte geven we nog een voorbeeld van een geval, waarin de α -vergelijking twee gelijke wortels heeft.

Voorbeeld 5

Los op het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned} \right\} \quad (30.8)$$

Oplossing:

Ook hier stellen we:

$$x(t) = A e^{\alpha t}, y(t) = B e^{\alpha t}, z(t) = C e^{\alpha t}$$

We substitueren dit in (30.8).

Hierdoor krijgen we:

$$-\alpha A + B + C = 0$$

$$A - \alpha B + C = 0$$

$$A + B - \alpha C = 0$$

welk stelsel dan en slechts dan een van de nuloplossing verschillende oplossing heeft, indien:

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0$$

of: $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0$, of $(\alpha + 1)^2(\alpha - 2) = 0$.

De wortels van deze vergelijking zijn: $\alpha_1 = 2$ en $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$.

De wortel $\alpha_1 = 2$ geeft:

$$-2A + B + C = 0$$

$$A - 2B + C = 0$$

$$A + B - 2C = 0$$

waaruit door „vegen” ontstaat:

$$-A + C = 0$$

$$A - B = 0$$

Anders gezegd: $A = B = C$.

Hierbij behoren de oplossingsvectoren:

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Voor het geval $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$ vinden we:

$$A + B + C = 0$$

We kunnen A en B willekeurig kiezen, b.v. c_2 en c_3 , waaruit dan volgt: $C = -c_2 - c_3$, waarbij de oplossingsvectoren behoren:

$$\begin{pmatrix} c_2 e^{-t} \\ c_3 e^{-t} \\ (-c_2 - c_3) e^{-t} \end{pmatrix}$$

Dit geeft dus het stelsel bepaald door:

$$c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Daar de vectoren $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ lineair onafhankelijk zijn op \mathbb{R} , geldt voor de algemene oplossingsvector $\underline{v}(t)$ van (30.8):

$$\underline{v}(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

31 Standaardvormen van lineaire stelsels met twee onbekende functies

In de vorige paragrafen hebben we aan de hand van enkele voorbeelden laten zien hoe een al dan niet homogeen lineair stelsel differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten kan worden opgelost door te stellen:

$$x_i(t) = A_i e^{\alpha t} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

In deze paragraaf zullen we nog enkele algemene beschouwingen wijden aan homogene „ 2×2 ”-stelsels met constante reële coëfficiënten, dus stelsels van de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= a_{11}X(t) + a_{12}Y(t) \\ \dot{Y}(t) &= a_{21}X(t) + a_{22}Y(t) \end{aligned} \right\} \quad (a_{ij} \in \mathbb{R})$$

Zonder bewijs delen we mee dat, indien de coëfficiëntenmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ niet-singulier is, d.w.z. indien de determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ is, zo'n stelsel door middel van een lineaire transformatie van de vorm:

$$X(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t)$$

$$Y(t) = A_{21}x(t) + A_{22}y(t)$$

te herleiden is tot één van de volgende gedaanten*:

$$1 \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) \\ \dot{y}(t) &= ay(t) \end{aligned} \right\} \quad a \neq 0 \quad (31.1)$$

$$2 \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) \\ \dot{y}(t) &= by(t) \end{aligned} \right\} \quad a \neq b, a \neq 0, b \neq 0 \quad (31.2)$$

$$3 \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= ay(t) \end{aligned} \right\} \quad a \neq 0 \quad (31.3)$$

$$4 \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) &= -bx(t) + ay(t) \end{aligned} \right\} \quad a \neq b, a \neq 0, b \neq 0 \quad (31.4)$$

$$5 \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= by(t) \\ \dot{y}(t) &= -bx(t) \end{aligned} \right\} \quad b \neq 0 \quad (31.5)$$

* Zie voor een bewijs b.v.: F. Brauer en J. Nohel, Ordinary differential equations, W. A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam.

We zullen elk van deze gevallen bespreken en ons daarbij voorstellen dat $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ de plaatsvector is van een punt P in het x, y -vlak ten tijde t . Aan de hand van de gevonden oplossingsvector zullen we dan de baanvorming van P schetsen in een z.g. *fasendiagram*.

Geval 1

De oplossing van (31.1) is direct duidelijk:

$$\begin{cases} x(t) = A e^{at} \\ y(t) = B e^{at} \end{cases} \quad (31.6)$$

In vectorvorm luidt de oplossing:

$$\underline{v}(t) = A \begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ e^{at} \end{pmatrix}$$

Eliminatie van t uit (31.6) geeft voor de baanvergelijking van P:

$$Bx = Ay$$

hetgeen een stelsel rechten door O voorstelt.

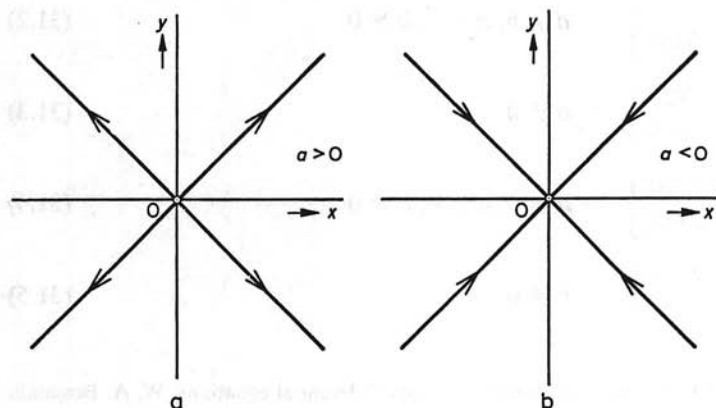
Uit (31.6) blijkt dat indien $a > 0$ P zich van O af beweegt en indien $a < 0$ P naar O toe gaat (zie fig. 36). De oorsprong heet hier een *knooppunt*.

Geval 2

De oplossing van (31.2) is:

$$\begin{cases} x(t) = A e^{at} \\ y(t) = B e^{bt} \end{cases} \quad (31.7)$$

Fig. 36



We onderscheiden de volgende drie gevallen:

- 2.1 $b < a < 0$;
- 2.2 $0 < b < a$;
- 2.3 $b < 0 < a$.

2.1

In dit geval stellen we voor de duidelijkheid: $b = -q^2$, $a = -p^2$, dus $p^2 < q^2$. De oplossing (31.7) kan dan geschreven worden als:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A e^{-p^2 t} \\ y(t) &= B e^{-q^2 t} \end{aligned} \right\} \quad (31.8)$$

We zien dat, als $t \rightarrow \infty$ het punt P tot O nadert. Eliminatie van t uit (31.8) geeft de baankrommen in de gedaante:

$$B_1 y^{p^2} = B_2 x^{q^2} \quad (31.9)$$

Uit (31.9) volgt:

$$\frac{dy}{dx} = K \cdot \frac{q^2}{p^2} x^{\frac{q^2}{p^2} - 1}$$

Daar $q^2 > p^2$ zien we hieruit dat voor alle krommen $y' = 0$ als $x = 0$. De baankrommen hebben de gedaante, zoals geschetst in fig. 37.

De oorsprong heet hier een *oneigenlijk knooppunt*.

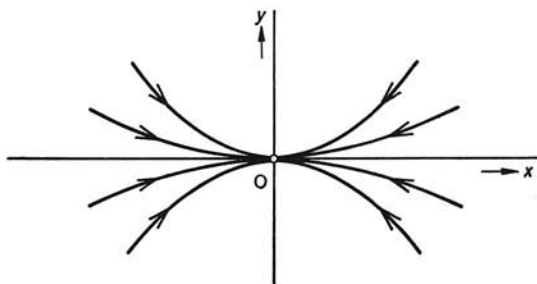
2.2

We stellen nu: $a = p^2$, $b = q^2$, dus $p^2 > q^2$.

Op analoge wijze als in 2.1 volgt dan:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A e^{p^2 t} \\ y(t) &= B e^{q^2 t} \end{aligned} \right\}$$

Fig. 37



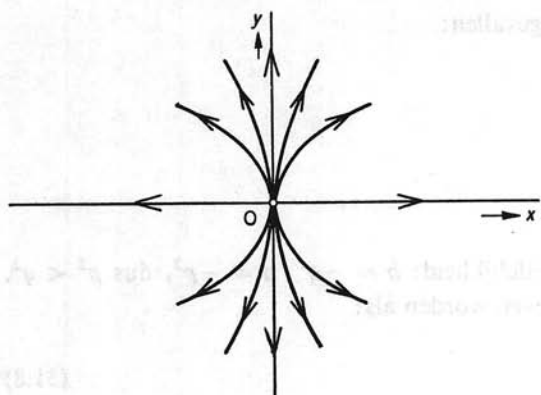


Fig. 38

Als $t \rightarrow \infty$, dan $x(t) \rightarrow \pm \infty$, $y(t) \rightarrow \pm \infty$ (al naargelang het teken van A of B).
De baankrommen hebben de vergelijking:

$$B_1 y^{p^2} = B_2 x^{q^2}$$

Daar $\frac{dy}{dx} = K \cdot \frac{q^2}{p^2} \cdot x^{\frac{q^2}{p^2}-1}$, geldt, omdat $p^2 > q^2$, dat $\frac{dy}{dx} \rightarrow \pm \infty$, als $x \rightarrow 0$.

De baankrommen zijn geschetst in fig. 38.

Ook hier heet de oorsprong een *oneigenlijk knooppunt*.

2.3

We stellen $a = p^2$, $b = -q^2$, dan is de oplossing van (31.2):

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A e^{p^2 t} \\ y(t) &= B e^{-q^2 t} \end{aligned} \right\}$$

Als $t \rightarrow \infty$, dan $x(t) \rightarrow \pm \infty$, al naar dat $A > 0$ of $A < 0$ en $y(t) \rightarrow 0$.

De vergelijking van de baankrommen is:

$$x^{q^2} y^{p^2} = K$$

Deze krommen zijn geschetst in fig. 39. De oorsprong heet hier een *zadelpunt*.

Geval 3

Voor het oplossen van (31.3) stellen we:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A e^{at} \\ y(t) &= B e^{at} \end{aligned} \right\}$$

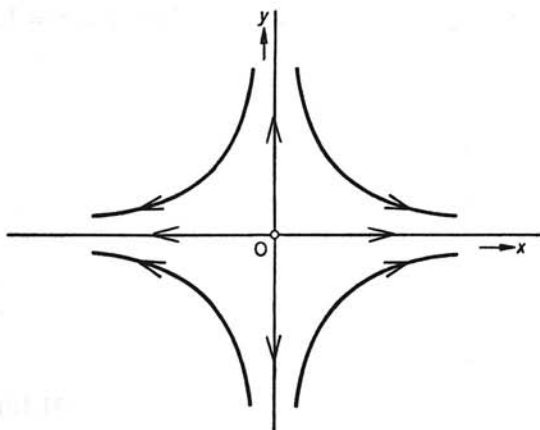


Fig. 39

Substitutie in (31.3) levert:

$$(a - \alpha)A + B = 0$$

$$(a - \alpha)B = 0$$

Dit stelsel heeft dan en slechts dan een van de nuloplossing verschillende oplossing, indien $\alpha = a$. In dit geval is $B = 0$. De oplossingen van (31.3) zijn dan bepaald door:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = A e^{at} \\ y(t) = 0 \end{array} \right\}$$

Een oplossingsvector is dus:

$$\underline{v}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix}$$

die we zullen lezen als:

$$\underline{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{at} \\ 0 \cdot e^{at} \end{pmatrix}$$

We proberen nu, evenals in par. 30 is aangegeven, een oplossing van de gedaante:

$$\underline{v}_2(t) = \begin{pmatrix} (p + qt)e^{at} \\ (r + st)e^{at} \end{pmatrix}$$

Substitutie hiervan in (31.3) geeft na enige herleiding:

$$q = r + st$$

$$s = 0$$

Hierin is voor alle $t \in \mathbb{R}$ te voldoen door b.v. te kiezen: $s = p = 0$ en $q = r = 1$, zodat een tweede oplossingsvector is:

$$\underline{v}_2(t) = \begin{pmatrix} t e^{at} \\ e^{at} \end{pmatrix}$$

De algemene oplossingsvector van (31.3) is:

$$\underline{v}(t) = A \begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} t e^{at} \\ e^{at} \end{pmatrix}$$

d.w.z.:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A e^{at} + B t e^{at} \\ y(t) &= B e^{at} \end{aligned} \right\} \quad (31.10)$$

Hieruit zien we dat geldt:

$$\text{als } a < 0: \quad \begin{aligned} x(t) &\rightarrow 0 & \text{als } t &\rightarrow \infty \\ y(t) &\rightarrow 0 & \text{als } t &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{als } a > 0: \quad \begin{aligned} x(t) &\rightarrow \pm \infty & \text{als } t &\rightarrow \infty \\ y(t) &\rightarrow \pm \infty & \text{als } t &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

afhankelijk van het teken van A en B .

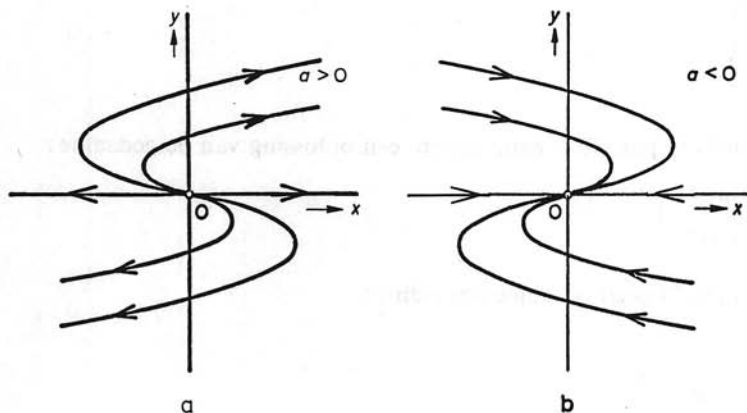
Eliminatie van t geeft als vergelijking van de baankrommen:

$$x = \frac{A}{B} y + \frac{y \ln \left| \frac{y}{B} \right|}{a}$$

De gedaanten van enkele van deze krommen zijn geschetst in fig. 40.

Ook hier heet de oorsprong een *oneigenlijk knooppunt*.

Fig. 40



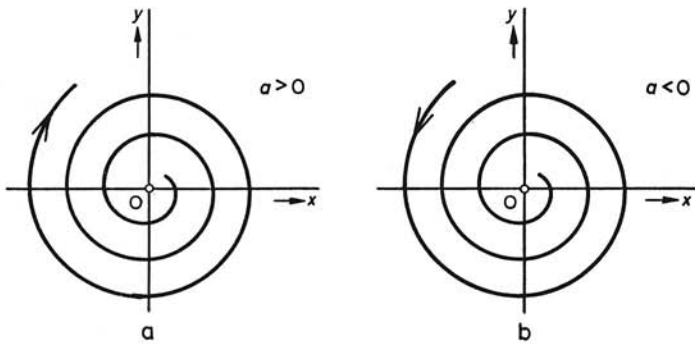


Fig. 41

Geval 4.

Een getallenvoorbeeld van zo'n stelsel (31.4) behandelden we al in par. 30 voorbeeld 3. Uit de daar uitgevoerde berekeningen leiden we af, dat de algemene oplossing van (31.4) bepaald wordt door:

$$\underline{v}(t) = A \begin{pmatrix} e^{at} \sin bt \\ e^{at} \cos bt \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt \\ -e^{at} \sin bt \end{pmatrix} \quad (31.11)$$

waaruit volgt, evenals in het aangehaalde voorbeeld:

$$\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2 = (A^2 + B^2)e^{2at} \quad (31.12)$$

P nadert dus tot O ($t \rightarrow \infty$) als $a < 0$ en tot ∞ als $a > 0$.

De baankrommen zijn spiralen, als geschetst in fig. 41.

De oorsprong heet hier een *spiraalpunt*.

Geval 5

Dit is het geval waartoe (31.4) is te reduceren indien we in (31.4) stellen $a = 0$.

De oplossing is dan ook direct af te lezen uit de oplossing (31.11), nl.:

$$\underline{v}(t) = A \begin{pmatrix} \sin bt \\ \cos bt \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \cos bt \\ -\sin bt \end{pmatrix}$$

en de vergelijking van de baankrommen uit (31.12):

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2 \quad (31.13)$$

Deze baankrommen zijn concentrische cirkels met O als middelpunt. De omloopszin op deze cirkels wordt bepaald door het teken van b hetgeen gemakkelijk uit het stelsel (31.5) is af te lezen (zie fig. 42).

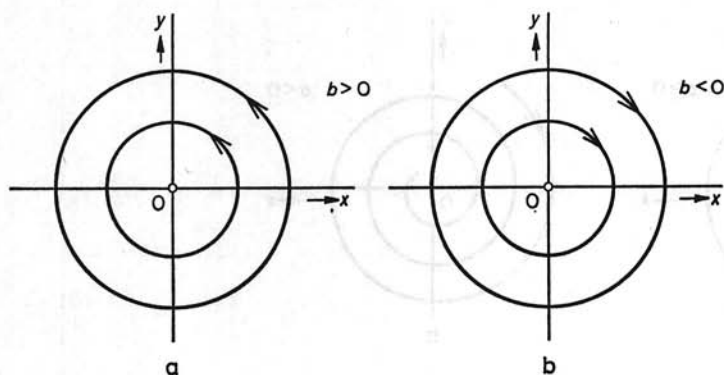


Fig. 42

Opmerking:

We hadden het resultaat (31.13) sneller kunnen afleiden door in (31.5) de beide leden van de eerste D.V. te vermenigvuldigen met $x(t)$, die van de tweede D.V. met $y(t)$ en daarna op te tellen. We vinden dan:

$$x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) = 0$$

Dit levert na integratie op:

$$\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2 = K$$

Deze methode geeft echter minder informatie over de wijze waarop de baan wordt doorlopen.

De Laplace-transformatie

32 Definitie en achtergrond

In dit hoofdstuk zullen we een speciale methode behandelen voor het oplossen van (een beperkt soort) differentiaalvergelijkingen, of stelsels daarvan. Bij deze methode wordt *op directe wijze* de oplossing gevonden die aan gegeven beginvoorwaarden voldoet, zonder dat eerst de algemene oplossing bepaald moet worden, waaruit dan weer door het invullen van de beginvoorwaarden de constanten berekend zouden moeten worden.

Deze methode maakt gebruik van de z.g. *Laplace-transformatie*. Deze berust op het volgende:

Volgens een bepaald voorschrift wordt aan een functie f (uit een beperkte klasse) op één-éénduidige wijze een andere functie F toegevoegd, de z.g. *Laplace-getransformeerde* van f . Dit geschiedt op zodanige wijze, dat als f aan een *differentiaalvergelijking* voldoet, de getransformeerde F voldoet aan een *algebraïsche* vergelijking. Deze laatste vergelijking wordt opgelost, waarna van de oplossing het „origineel” wordt bepaald, dat dan de gevraagde oplossing van de D.V. is. We kunnen aantonen dat de D.V. voor f en de algebraïsche vergelijking voor F equivalente problemen zijn. We geven nu eerst een korte behandeling van de Laplace-transformatie.

Stel dat f gedefinieerd is voor alle $t \in [0, \rightarrow)$ en voldoet aan later te noemen eisen.

Definitie

De Laplace-getransformeerde van de functie f is de functie F , gedefinieerd door:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (32.1)$$

waarin s een reële variabele is, die evenals f aan nader te bepalen voorwaarden moet voldoen.

De notatie voor F is: $\mathfrak{L}(f)$ of $\mathfrak{L}f$, of ook wel \tilde{f} (ter wille van de bekorting van het schrijfwerk). Verder schrijven we:

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}, \text{ of } F(s) = \tilde{f}(s)^*$$

Dikwijls schrijven we \mathfrak{L} -transformatie, resp. \mathfrak{L} -getransformeerde, in plaats van Laplace-transformatie, resp. Laplace-getransformeerde.

Wat betreft de *existentie* van de \mathfrak{L} -getransformeerde van een gegeven functie zullen we volstaan met het geven van *voldoende* voorwaarden. Om deze voorwaarden te kunnen formuleren zullen we eerst het begrip *bij gedeelten continu* invoeren.

Definitie

Een functie f heet *bij gedeelten continu* in een interval $\langle a, b \rangle$ van de reële getallenrechte, indien dit interval verdeeld kan worden in een eindig aantal deelintervallen waarin f continu is, terwijl f in de uiteinden van deze intervallen eindige linker-, c.q. rechterlimieten heeft.

Fig. 43 zal dit verduidelijken.

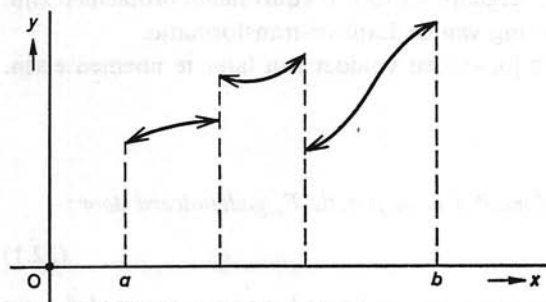
In dit verband verwijzen we naar deel 1, par. 74.

We zijn nu in staat om voldoende voorwaarden aan te geven voor de existentie van de \mathfrak{L} -getransformeerde van een functie f . Hiervoor geldt de volgende stelling.

Stelling

Indien de reële functie f van de reële variabele t voldoet aan de beide volgende voorwaarden:

Fig. 43



* $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ staat dus voor $\mathfrak{L}(f)(s)$ of $\mathfrak{L}f(s)$ of $\tilde{f}(s)$.

- a f is bij gedeelten continu in ieder eindig interval $\langle 0, a \rangle$ van de reële getallen-
rechte ($a > 0$);
b er bestaan positieve constanten M , c en t_0 , zodanig dat

$$|f(t)| \leq M e^{ct} \quad (t \geq t_0)$$

dan bestaat

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{32.2}$$

voor alle $s > c$.

Bewijs:

Volgens de definitie van oneigenlijke integraal geldt:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

We zullen zelfs aantonen dat de integraal uit (32.2) absoluut convergent is, d.w.z. dat

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A |e^{-st} f(t)| dt$$

bestaat. Nu weten we:

$$|e^{-st} f(t)| \leq M e^{-(s-c)t} \quad (t \geq t_0)$$

Indien $s > c$, dan geldt:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A M e^{-(s-c)t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{M}{s-c} \{e^{-(s-c)A} - 1\} = \frac{M}{s-c}$$

De integraal

$$\int_{t_0}^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt$$

kan dus worden gemajoreerd door een convergente integraal. De integraal in (32.2) is dus absoluut convergent.

Opmerking 1:

In het vorenstaande is de eis van het bij gedeelten continu zijn van f gebruikt bij de existentie van de integraal $\int_0^A e^{-st} f(t) dt$.

Opmerking 2:

De beperking tot reële s kan worden opgeheven, maar daarop gaan we niet in.

Opmerking 3:

Een functie die voldoet aan voorwaarde b uit de stelling noemen we een *functie van exponentiële orde c* .

Opmerking 4:

Uiteraard rijst de vraag welke overwegingen tot het invoeren van een Laplace-transformatie hebben geleid. We zullen hier volstaan met een summiere aanduiding. Stel dat een functie g ontwikkelbaar is in een machtreeks:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (32.3)$$

waarbij we voor ons doel stellen: $0 < x < R$ ($R > 0$).

We voeren de transformatie $x \mapsto e^{-s}$ ($s > 0$) uit, waardoor het interval $\langle 0, R \rangle$ overgaat in het interval op de s -as: $\langle -\ln R, \rightarrow \rangle$; immers als $x < R$, dan geldt $s = -\ln x > -\ln R$.

De reeks in (32.3) gaat dan over in:

$$g^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}$$

die convergeert voor alle $s > -\ln R$.

We vervangen formeel de *discontinue index n* door de *continue variabele t* , a_n door $f(t)$, $g^*(s)$ door $F(s)$ en de sommatie door integratie. Louter formeel ontstaat dan $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$, hetgeen juist (32.1) is. Deze integraal is dus in een bepaald opzicht een generalisering van de machtreeks.

33 Enkele voorbeelden en belangrijke stellingen

Van enkele van de meest gebruikte functies zullen we de \mathfrak{L} -getransformeerde berekenen.

Geval 1

$$f(t) = 1$$

dus:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

geldig voor $s > 0$, zodat:

$$\mathfrak{L}(1)^* = \frac{1}{s} \quad (s > 0) \quad (33.1)$$

Geval 2

$$f(t) = t^n$$

waarin n een positief geheel getal is.

$$F(s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \left. \frac{t^n e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

Dus geldt voor $s > 0$:

$$\mathfrak{L}(t^n) = \frac{n}{s} \mathfrak{L}(t^{n-1})$$

Door deze bewerking te herhalen, vinden we wegens (33.1):

$$\mathfrak{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (33.2)$$

Geval 3

$$f(t) = e^{at}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = - \left. \frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

mits $s > a$ is. We hebben dus:

$$\mathfrak{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

Geval 4

$$f(t) = \cos t$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos t dt = \frac{s}{1+s^2}$$

* We hebben in par. 32 de notatie $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ met accoladen ingevoerd. Wanneer echter in de notatie voor $f(t)$ geen gewone haakjes voorkomen, zoals in deze gevallen, schrijven we: $\mathfrak{L}(1)$, $\mathfrak{L}(t^n)$, $\mathfrak{L}(\cos t)$, enz.

voor $s > 0$ (zie deel 1, par. 57). Dus:

$$\mathfrak{L}(\cos t) = \frac{s}{1 + s^2} \quad (s > 0)$$

Evenzo vinden we:

$$\mathfrak{L}(\sin t) = \frac{1}{1 + s^2} \quad (s > 0)$$

De Laplace-transformatie is een *lineaire* operator, d.w.z. dat de volgende stelling geldt.

Stelling 1

Als f_1 en f_2 functies zijn die een \mathfrak{L} -getransformeerde hebben en c_1 en c_2 constanten zijn, dan geldt:

$$\mathfrak{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathfrak{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathfrak{L}\{f_2(t)\}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} dt \\ &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\ &= c_1 \mathfrak{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathfrak{L}\{f_2(t)\} \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Bepaal de \mathfrak{L} -getransformeerde van de veelterm:

$$P(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n$$

Oplossing:

Volgens (33.1) en (33.2) en stelling 1 hebben we:

$$\mathfrak{L}\{P(t)\} = \frac{c_0}{s} + \frac{1! c_1}{s^2} + \dots + \frac{n! c_n}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$$

Voorbeeld 2

Bepaal de \mathfrak{L} -getransformeerde van $\cosh at$.

Oplossing:

Daar $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, vinden we:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\cosh at) &= \mathfrak{L}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathfrak{L}(e^{-at}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (s > |a|)\end{aligned}$$

Zeer belangrijk voor het vinden van de \mathfrak{L} -getransformeerden van vele functies zijn de volgende drie stellingen, waarbij we aannemen dat de functies zodanig zijn dat de betrokken integralen bestaan.

Stelling 2 (Gelijkvormigheidsstelling)

Indien $\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s)$, dan geldt voor elke $a > 0$:

$$\mathfrak{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Bewijs:

Volgens de definitie geldt:

$$\mathfrak{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt$$

In de integraal vervangen we at door u , waardoor deze integraal overgaat in:

$$\frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Voorbeeld 3

Bereken $\mathfrak{L}(\cos at)$ en $\mathfrak{L}(\sin at)$.

Oplossing:

$$\mathfrak{L}(\cos t) = \frac{s}{1 + s^2}$$

zodat volgens stelling 2:

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{s}{a}}{1 + \frac{s^2}{a^2}} = \frac{s}{a^2 + s^2} \quad (s > 0)$$

Evenzo:

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{1 + s^2}$$

zodat:

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s^2}{a^2}} = \frac{a}{a^2 + s^2} \quad (s > 0)$$

Stelling 3 (Verschuivingsstelling)

Indien $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ en indien we voor $a > 0$ definiëren:

$$g(t) = f(t - a) \quad (t > a)$$

$$g(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq a)$$

dan geldt:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= \int_0^a e^{-st} g(t) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t - a) dt \end{aligned}$$

In deze laatste integraal vervangen we $t - a$ door u , waardoor ontstaat:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-s(a+u)} f(u) du &= e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

Voorbeeld 4

Als

$$g(t) = \sin(t - a) \quad (t > a)$$

$$g(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq a)$$

dan geldt volgens stelling 3:

$$\mathfrak{L}\{g(t)\} = e^{-sa}\mathfrak{L}(\sin t) = \frac{e^{-sa}}{1+s^2}$$

Stelling 4 (Dempingsstelling)

Indien $\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s)$, dan geldt voor elke $a > 0$:

$$\mathfrak{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{e^{-at}f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at}f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}f(t) dt \\ &= F(s+a)\end{aligned}$$

Voorbeeld 5

Bepaal $\mathfrak{L}(e^{-at} \cos bt)$ en $\mathfrak{L}(e^{-at} \sin bt)$.

Oplossing:

Door toepassing van de dempingsstelling vinden we:

$$\mathfrak{L}\{e^{-at} \cos bt\} = \mathfrak{L}(\cos bt)_{s \rightarrow s+a} = \frac{s+a}{b^2 + (s+a)^2} \quad (s > -a)$$

$$\mathfrak{L}\{e^{-at} \sin bt\} = \mathfrak{L}(\sin bt)_{s \rightarrow s+a} = \frac{b}{b^2 + (s+a)^2} \quad (s > -a)$$

34 De Laplace-transformatie van afgeleiden en primitieve functies

Stel dat F de \mathfrak{L} -getransformeerde is van f , dus:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t) dt$$

We veronderstellen dat f een aantal malen differentieerbaar is. We willen van de afgeleiden de \mathfrak{L} -getransformeerde berekenen.

$\mathfrak{L}\{f'(t)\}$ is gedefinieerd door:

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f'(t) dt$$

d.w.z.:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{f'(t)\} &= \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ \delta \downarrow 0}} \int_{\delta}^A e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ \delta \downarrow 0}} \{e^{-sA} f(A) + s \int_{\delta}^A e^{-st} f(t) dt\}\end{aligned}$$

Volgens par. 32 bestaan er constanten M , c en t_0 , zodanig dat:

$$|f(t)| \leq M e^{ct} \quad (t \geq t_0)$$

Dit impliceert het bestaan van $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ voor $s > c$, maar tevens houdt dit in dat

$$\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-sA} f(A) = 0 \quad (s > c) \quad (34.1)$$

Immers:

$$|e^{-sA} f(A)| \leq M e^{-(s-c)A}$$

Dus geldt de bewering in (34.1).

Volgens de in par. 32 aan f gestelde eisen bestaat ook $\lim_{\delta \downarrow 0} f(\delta)$. Geven we deze aan met $f(0^+)$, dan zien we:

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\} = s\mathfrak{L}\{f(t)\} - f(0^+) \quad (34.2)$$

Indien f' aan dezelfde voorwaarden voldoet als die welke aan f gesteld zijn, dan vinden we voor de \mathfrak{L} -getransformeerde van f'' :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{f''(t)\} &= s\mathfrak{L}\{f'(t)\} - f'(0^+) \\ &= s[s\mathfrak{L}\{f(t)\} - f(0^+)] - f'(0^+)\end{aligned}$$

zodat

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\} = s^2\mathfrak{L}\{f(t)\} - sf(0^+) - f'(0^+)$$

Zo doorgaande vinden we:

$$\left. \begin{aligned}\mathfrak{L}\{f'''(t)\} &= s^3\mathfrak{L}\{f(t)\} - s^2f(0^+) - sf'(0^+) - f''(0^+) \\ \mathfrak{L}\{f^{IV}(t)\} &= s^4\mathfrak{L}\{f(t)\} - s^3f(0^+) - s^2f'(0^+) - sf''(0^+) - f'''(0^+) \\ \text{enz.}\end{aligned}\right\} \quad (34.3)$$

Voorbeeld 1

Bepaal de \mathfrak{L} -getransformeerde van de functie f met $f(t) = e^t$ door toepassing van (34.2).

Oplossing:

Volgens (34.2) geldt met $f(t) = e^t$:

$$\mathfrak{L}(e^t) = s\mathfrak{L}(e^t) - 1$$

dus:

$$\mathfrak{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}$$

Deling door $s-1$ is geoorloofd, daar het hier gaat over het geval $s > 1$; anders zou de integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-1)t}dt$$

niet bestaan.

Voorbeeld 2

Bepaal de \mathfrak{L} -getransformeerde van de functie f met $f(t) = te^t - 1$ door toepassing van (34.2).

Oplossing:

$$\frac{d}{dt}(te^t - 1) = e^t + te^t$$

Dit geeft dus met (34.2):

$$\mathfrak{L}(e^t + te^t) = s\mathfrak{L}(te^t - 1) + 1$$

of:

$$\mathfrak{L}(e^t) + \mathfrak{L}(te^t - 1) + \mathfrak{L}(1) = s\mathfrak{L}(te^t - 1) + 1$$

$$\frac{1}{s-1} + \mathfrak{L}(te^t - 1) + \frac{1}{s} = s\mathfrak{L}(te^t - 1) + 1$$

waaruit:

$$\mathfrak{L}(te^t - 1) = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s} \quad (s > 1)$$

Voorbeeld 3

Bepaal de \mathfrak{L} -getransformeerde van de functie f met $f(t) = e^t \sin t$ door toepassing van (34.3).

Oplossing:

$$f(0^+) = 0$$

$$f'(t) = e^t \cos t + e^t \sin t \quad f'(0^+) = 1$$

$$f''(t) = 2e^t \cos t \quad f''(0^+) = 2$$

$$f'''(t) = -2e^t \sin t + 2e^t \cos t \quad f'''(0^+) = 2$$

$$f^{IV}(t) = -4e^t \sin t$$

Substitutie in (34.3) levert:

$$-4\mathfrak{L}(e^t \sin t) = s^4 \mathfrak{L}(e^t \sin t) - s^2 - 2s - 2$$

of:

$$\mathfrak{L}(e^t \sin t) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^4 + 4} = \frac{1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{1}{1 + (s - 1)^2}$$

hetgeen ook eenvoudig met de dempingsstelling te bewijzen is.

Voor de \mathfrak{L} -getransformeerde van een primitieve van f geldt de volgende stelling.

Stelling

Als f aan de eerder gestelde voorwaarden voldoet, dan is de \mathfrak{L} -getransformeerde van $\int_0^t f(u) du$ gegeven door:

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s} \mathfrak{L}\{f(t)\} \quad (34.4)$$

Bewijs:

We passen (34.2) toe met $g(t) = \int_0^t f(u) du$ in plaats van $f(t)$. We krijgen dan:

$$\mathfrak{L}\{g'(t)\} = s\mathfrak{L}\{g(t)\} - g(0^+)$$

In dit geval is $g'(t) = f(t)$ en $g(0^+) = 0$ zodat:

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = s\mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}$$

waarmee (34.4) bewezen is.

Voorbeeld 4

Bepaal de \mathfrak{L} -getransformeerde van de functies $t \mapsto \cos t$ en $t \mapsto \sin t$ door toepassing van (34.4).

Oplossing:

$$\mathfrak{L}(\sin t) = s\mathfrak{L}\left\{\int_0^t \sin u du\right\} = s\mathfrak{L}(1 - \cos t)$$

dus:

$$\mathfrak{L}(\sin t) = 1 - s\mathfrak{L}(\cos t)$$

Ook geldt:

$$\mathfrak{L}(\cos t) = s\mathfrak{L}\left\{\int_0^t \cos u \, du\right\} = s\mathfrak{L}(\sin t)$$

Uit de laatste twee vergelijkingen vinden we:

$$\mathfrak{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2 + 1}; \quad \mathfrak{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

In het vorenstaande is aan een aantal zeer eenvoudige functies de \mathfrak{L} -getransformeerde bepaald. In het algemeen is het bepalen van de \mathfrak{L} -getransformeerde van een functie niet zo eenvoudig. Het vereist een uitgebreide kennis van de analyse. Voor de praktijk zijn er tabellen samengesteld waarin we bij een gegeven functie de \mathfrak{L} -getransformeerde kunnen aflezen. Een voorbeeld van zo'n tabel (op beperkte schaal) is als losse bijlage in dit boek gestoken. Deze tabel kunnen we ook gebruiken voor het „terugzoeken” van een functie f waarvan de getransformeerde F gegeven is. Hierover handelt de volgende paragraaf.

35 De inverse Laplace-transformatie

In par. 32 gaven we een toepassingsgebied van de \mathfrak{L} -transformatie aan: het oplossen van D.V.-en of stelsels daarvan. Daarbij werd reeds opgemerkt dat deze methode berust op het „vertalen” van het probleem en het „terugvertalen” van de oplossing. Het is daarbij van belang dat we zeker weten of bij een gegeven Laplace-getransformeerde ook slechts één origineel behoort. Onder bepaalde voorwaarden is dit juist. Een uitgebreide discussie over deze voorwaarden valt buiten het bestek van dit boek. Wij volstaan hier met het noemen (zonder bewijs) van een stelling die van *Lerch** afkomstig is.

Stelling 1

Indien er bij gegeven functie F een continue functie f bestaat, zodanig dat $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$ ($s > 0$), dan is f de enige continue functie met deze eigenschap.

We noemen f de *inverse Laplace-getransformeerde* van F en gebruiken daarbij de notatie:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$$

* M. Lerch, 1860–1922.

In het volgende zullen we steeds aannemen dat aan de voorwaarden uit de stelling van Lerch voldaan is. Zo volgt uit de in het voorgaande uitgevoerde transformaties:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \quad (s > 0)$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at} \quad (s > a)$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \cos at \quad (s > 0)$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \sin at \quad (s > 0)$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right\} = e^{-at} \cos bt \quad (s > -a)$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right\} = e^{-at} \sin bt \quad (s > -a)$$

We geven enkele eenvoudige voorbeelden van het uitvoeren van de inverse \mathfrak{L} -transformatie. De door ons gebezigde methode berust in hoofdzaak daarop dat we de gegeven functie schrijven als een som van eenvoudige functies waarvan het origineel bekend is. Daarna merken we op dat de operator \mathfrak{L}^{-1} die aan $F(s)$ toevoegt $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$ een *lineaire operator* is, d.w.z.:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s)\} = c_1\mathfrak{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2\mathfrak{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Dit volgt direct uit het feit dat \mathfrak{L} een lineaire operator is (zie par. 33, stelling 1). Ook maken we gebruik van de volgende stelling.

Stelling 2

Als $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, dan is

$$\mathfrak{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t) \quad (35.1)$$

Bewijs:

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Differentiëren naar s geeft:

$$F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = \mathfrak{L}\{-tf(t)\}$$

waaruit (35.1) volgt.

Opmerking:

Het differentiëren naar een parameter onder het integraalteken is in dit geval geoorloofd. We gaan hierop niet nader in.

Voorbeeld 1

Bepaal $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 - 1)} \right\}$ ($s > 1$)

Oplossing:

$$\frac{1}{s(s^2 - 1)} = -\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 1}$$

zodat:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 - 1)} \right\} = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

op grond van de lineariteit van \mathcal{L}^{-1} .

Voorbeeld 2

Bepaal $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - 2s + 5} \right\}$ ($s > 1$)

Oplossing:

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{(s - 1)^2 + 4}$$

zodat:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - 2s + 5} \right\} = \frac{1}{2}e^t \sin 2t$$

Voorbeeld 3

Bepaal $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - 2s + 1} \right\}$ ($s > 1$)

Oplossing:

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 1} = \frac{1}{(s - 1)^2}$$

Nu is $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$, en dus volgens de dempingsstelling:

$$\mathcal{L}(te^t) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

zodat:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = te^t$$

Tenslotte geven we nog een voorbeeld van een toepassing van stelling 2.

Voorbeeld 4

Bepaal $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln\frac{s+1}{s-1}\right)$ ($s > 1$)

Oplossing:

Stellen we $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln\frac{s+1}{s-1}\right) = f(t)$, dan is volgens stelling 2:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right) = -tf(t)$$

of:

$$e^{-t} - e^t = -tf(t)$$

waaruit:

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t} = \frac{2 \sinh t}{t}$$

Opmerking:

In de complexe functietheorie wordt een formule afgeleid, die het origineel van een gegeven functie geeft in de vorm van een z.g. contourintegraal, waar we dan dat origineel mee kunnen berekenen.

36 Het oplossen van een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten met behulp van Laplace-transformatie

Zoals reeds in par. 32 is opgemerkt is de \mathcal{L} -transformatie een middel om een D.V. op te lossen. We zullen dit demonstreren bij de lineaire D.V. van de 1ste en 2de orde met constante coëfficiënten.

Stel dat gegeven is de D.V.:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Passen we op beide leden de \mathfrak{L} -transformatie toe, dan krijgen we:

$$\mathfrak{L}\{a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\}$$

Wegens de lineariteit van de \mathfrak{L} -operator geldt:

$$a_2 \mathfrak{L}\{y''(t)\} + a_1 \mathfrak{L}\{y'(t)\} + a_0 \mathfrak{L}\{y(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\}$$

Gebruik makende van de formules uit par. 34 vinden we:

$$a_2 [s^2 \mathfrak{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)] + a_1 [s \mathfrak{L}\{y(t)\} - y(0)] + a_0 \mathfrak{L}\{y(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\} \quad (36.1)$$

(Uiteraard is y als oplossing van een D.V. continu verondersteld in het beschouwde interval.)

Als de gegeven beginvoorwaarden zijn: $y(0) = y_0$ en $y'(0) = y'_0$, dan kunnen we (36.1) schrijven als:

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) \mathfrak{L}\{y(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\} + (a_2 s + a_1) y_0 + a_2 y'_0$$

waaruit volgt:

$$\mathfrak{L}\{y(t)\} = \frac{\mathfrak{L}\{f(t)\} + (a_2 s + a_1) y_0 + a_2 y'_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (36.2)$$

(verondersteld dat de noemer niet gelijk is aan nul).

Daar f een gegeven functie is, kan $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ hetzij elementair berekend worden, hetzij opgezocht worden in een tabel. Door (36.2) is dan $\mathfrak{L}\{y(t)\}$ geheel bepaald en daarmee ook $y(t)$ door elementaire methoden of door terugzoeken in een tabel.

Uit dit proces zien we de grote voordelen van deze methode. In de eerste plaats wordt het probleem tot een algebraïsch probleem teruggebracht. In de tweede plaats worden de aanvangsvoorwaarden onmiddellijk in de oplossing verrekend.

Voorbeeld 1

Los op:

$$y'(t) + y(t) = \sin t \quad (y(0) = 0)$$

Oplossing:

$$\mathfrak{L}\{y'(t)\} + \mathfrak{L}\{y(t)\} = \mathfrak{L}\{\sin t\}$$

of:

$$s \mathfrak{L}\{y(t)\} + \mathfrak{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

waaruit:

$$\mathfrak{L}\{y(t)\} = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} &= \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{L}\{e^{-t}\} - \frac{1}{2}\mathfrak{L}\{\cos t\} + \frac{1}{2}\mathfrak{L}\{\sin t\} \end{aligned}$$

zodat:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

Voorbeeld 2

Los op:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t$$

met $y(0) = 0$ en $y'(0) = -1$ (zie par. 15, voorbeeld 3).

Oplossing:

$$\mathfrak{L}\{y''(t)\} - 2\mathfrak{L}\{y'(t)\} + \mathfrak{L}\{y(t)\} = \mathfrak{L}\{e^t\}$$

of:

$$s^2\mathfrak{L}\{y(t)\} + 1 - 2s\mathfrak{L}\{y(t)\} + \mathfrak{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s-1}$$

of:

$$(s^2 - 2s + 1)\mathfrak{L}\{y(t)\} = \frac{2-s}{s-1}$$

waaruit:

$$\mathfrak{L}\{y(t)\} = \frac{2-s}{(s-1)^3}$$

Volgens de dempingsstelling is

$$\mathfrak{L}\{e^{-t}y(t)\} = \frac{1-s}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\{t^2\} - \mathfrak{L}\{t\} = \mathfrak{L}\left\{\frac{1}{2}t^2 - t\right\}$$

zodat:

$$y(t) = e^t\left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)$$

Ook bij het oplossen van een stelsel simultane D.V.-en kunnen we met succes de \mathfrak{L} -transformatie toepassen.

Voorbeeld 3

Los op het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) + t \\ \dot{y}(t) &= x(t) - t \end{aligned} \right\}$$

met beginvoorwaarden: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Oplossing:

We zullen hier de notatie $\mathfrak{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ gebruiken.
Toepassing van de \mathfrak{L} -transformatie geeft:

$$\left. \begin{aligned} s\tilde{x}(s) &= -\tilde{y}(s) + \frac{1}{s^2} \\ s\tilde{y}(s) &= \tilde{x}(s) - \frac{1}{s^2} \end{aligned} \right\}$$

Hieruit lossen we op:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}(s) &= \frac{s+1}{s^2(s^2+1)} \\ \tilde{y}(s) &= \frac{1-s}{s^2(s^2+1)} \end{aligned} \right\}$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s^2(s^2+1)} &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+1} \\ &= \mathfrak{L}(t) + \mathfrak{L}(1) - \mathfrak{L}(\cos t) - \mathfrak{L}(\sin t) \end{aligned}$$

zodat:

$$x(t) = t + 1 - \cos t - \sin t$$

Verder is:

$$\begin{aligned} \frac{1-s}{s^2(s^2+1)} &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s-1}{s^2+1} \\ &= \mathfrak{L}(t) - \mathfrak{L}(1) + \mathfrak{L}(\cos t) - \mathfrak{L}(\sin t) \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$y(t) = t - 1 + \cos t - \sin t$$

Voorbeeld 4

Los op het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 0 \\ \dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36.3)$$

met als beginvoorwaarden:

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v$$

(zie ook par. 29, voorbeeld 4).

Oplossing:

Toepassing van de \mathcal{L} -transformatie geeft:

$$\tilde{x}(s) = s\tilde{x}(s) - x(0) = s\tilde{x}(s) - a$$

$$\tilde{\dot{x}}(s) = s^2\tilde{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2\tilde{x}(s) - sa$$

$$\tilde{y}(s) = s\tilde{y}(s) - y(0) = s\tilde{y}(s)$$

$$\tilde{\dot{y}}(s) = s^2\tilde{y}(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2\tilde{y}(s) - v$$

zodat (36.3) overgaat in het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} s^2\tilde{x}(s) - s\tilde{y}(s) &= sa \\ s\tilde{x}(s) + s^2\tilde{y}(s) &= v + a \end{aligned} \right\}$$

Hieruit lossen we op:

$$\tilde{x}(s) = \frac{s^2a + a + v}{s(s^2 + 1)} \quad (s \neq 0)$$

$$\tilde{y}(s) = \frac{v}{s^2 + 1} \quad (s \neq 0)$$

Het origineel van $\tilde{y}(s)$ is direct in te zien:

$$y(t) = v \sin t$$

Voor het bepalen van $x(t)$ schrijven we:

$$\tilde{x}(s) = \frac{sa}{s^2 + 1} + (a + v) \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right\}$$

zodat:

$$x(t) = a \cos t + a + v - (a + v) \cos t$$

of:

$$x(t) = a + v - v \cos t$$

Dit is in overeenstemming met par. 29, voorbeeld 4.

37 Convolutie

In par. 33 zagen we dat de \mathcal{L} -transformatie een lineaire operatie is, hetgeen onder meer inhoudt dat:

$$\mathcal{L}\{(f + g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

We zouden ons kunnen afvragen hoe het staat met de \mathcal{L} -getransformeerde van het produkt $f \cdot g$ van twee functies, indien dit produkt op de gebruikelijke manier, nl. door $f \cdot g(t) = f(t)g(t)$ wordt gedefinieerd.

Hiervoor geldt in het algemeen *niet*:

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Het is echter wel mogelijk op een andere wijze een produkt van twee functies te definiëren, nl. door het *convolutieprodukt*, notatie $f * g$, dat de eigenschap bezit dat:

$$\mathcal{L}\{f * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (37.1)$$

Dit convolutieprodukt wordt op de volgende wijze gedefinieerd.

We nemen aan dat de functies f en g gedefinieerd zijn voor alle $t > 0$ en elk een \mathcal{L} -getransformeerde resp. F en G bezitten, die bestaan voor alle $s > a \geq 0$. Dus:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt$$

We zullen aantonen dat er een functie h bestaat die een \mathcal{L} -getransformeerde H bezit met de eigenschap:

$$H(s) = F(s) \cdot G(s)$$

of:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (37.2)$$

Deze functie h noemen we het convolutieprodukt van f met g , zodat $h = f * g$, waarbij $f * g$ het bovengenoemde convolutieprodukt is. De bewering (37.2) kunnen we dus schrijven als (37.1).

In een punt t wordt de waarde van h als volgt geconstrueerd. We nemen in het interval $\langle 0, t \rangle$ een punt τ . We bepalen de waarde van f in τ en die van g in het „complementaire” punt $t - \tau$ (zie fig. 44).

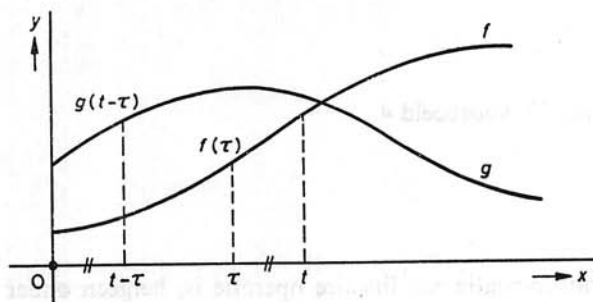


Fig. 44

We vormen nu het produkt $f(\tau)g(t - \tau)$ en integreren dat naar τ over het interval $\langle 0, t \rangle$, en definiëren dan:

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (37.3)$$

We zullen aantonen dat dit convolutieprodukt voldoet aan het in (37.1) gestelde. We bewijzen namelijk de volgende stelling.

Stelling

De Laplace-getransformeerde van het convolutieprodukt van twee functies is gelijk aan het produkt van de Laplace-getransformeerden van die functies.

In formule:

$$\mathfrak{L}(f * g) = \mathfrak{L}(f)\mathfrak{L}(g)$$

of zoals in (37.1) is aangegeven.

Bewijs:

Per definitie geldt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{f * g(t)\} &= \mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right\} \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right\}dt \end{aligned} \quad (37.4)$$

We voeren een functie u in, gedefinieerd als:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t \leq 0 \end{cases}$$

Dus is:

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > \tau \\ 0 & \text{voor } t \leq \tau \end{cases}$$

en:

$$f(\tau)g(t-\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} f(\tau)g(t-\tau) & \text{voor } \tau < t \\ 0 & \text{voor } \tau \geq t \end{cases}$$

zodat we voor (37.4) kunnen schrijven:

$$\mathfrak{L}\{f * g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)u(t-\tau) d\tau \right\} dt$$

We veranderen nu de volgorde van de integraties. Dat dit hier geoorloofd is, vereist natuurlijk een bewijs. We zullen dit hier niet geven, doch de juistheid zonder meer accepteren. We vinden dan:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{f * g(t)\} &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)u(t-\tau) e^{-st} dt \right\} d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_0^\infty g(t-\tau)u(t-\tau) e^{-st} dt \right\} d\tau \end{aligned}$$

Wegens de definitie van u is de binnenste integrand identiek gelijk aan 0 voor alle $t \leq \tau$, zodat we kunnen schrijven:

$$\mathfrak{L}\{f * g(t)\} = \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_\tau^\infty g(t-\tau) e^{-st} dt \right\} d\tau$$

In de binnenste integraal substitueren we nu $t - \tau = u$. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{f * g(t)\} &= \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_0^\infty g(u) e^{-s(u+\tau)} du \right\} d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \left\{ \int_0^\infty g(u) e^{-su} du \right\} d\tau \\ &= \left\{ \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right\} \left\{ \int_0^\infty e^{-su} g(u) du \right\} \\ &= \mathfrak{L}\{f(t)\} \cdot \mathfrak{L}\{g(t)\} \end{aligned}$$

Van het convolutieproduct noemen we nog enkele *algebraïsche eigenschappen*.

a *Commutativiteit:* $f * g = g * f$ (37.5)

b *Associativiteit:* $(f * g) * h = f * (g * h)$ (37.6)

c *Distributiviteit:* $f * (g + h) = f * g + f * h$ (37.7)

Indien $\underline{0}$ de functie is die identiek nul is, dan geldt:

$$f * \underline{0} = \underline{0} * f = \underline{0} \quad (37.8)$$

Bewijs van (37.5):

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

Substitueren we hierin: $u = t - \tau$, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} f * g(t) &= - \int_t^0 f(t-u)g(u) du \\ &= \int_0^t g(u)f(t-u) du \\ &= g * f(t) \end{aligned}$$

Bewijs van (37.6):

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{(f * g) * h(t)\} &= \mathfrak{L}\{f * g(t)\} \cdot \mathfrak{L}\{h(t)\} \\ &= [\mathfrak{L}\{f(t)\} \mathfrak{L}\{g(t)\}] \cdot \mathfrak{L}\{h(t)\} \\ &= \mathfrak{L}\{f(t)\} \cdot [\mathfrak{L}\{g(t)\} \cdot \mathfrak{L}\{h(t)\}] \\ &= \mathfrak{L}\{f(t)\} \cdot \mathfrak{L}\{g * h(t)\} \\ &= \mathfrak{L}\{f * (g * h)(t)\}\end{aligned}$$

Dus volgens de stelling van Lerch:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

Het bewijs van (37.7) verloopt analoog. Voor (37.8) kunnen we volstaan met de definitie.

We kunnen ons nog afvragen welke rol de eenheidsfunctie $\underline{1}$ (d.w.z. $\underline{1}(t) = 1 \quad \forall t$) in deze theorie speelt. Hiervoor geldt in het algemeen *niet*:

$$f * \underline{1}(t) = f(t)$$

Wel geldt echter (zoals direct uit de definitie volgt):

$$f * \underline{1}(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (37.9)$$

m.a.w. $f * \underline{1}$ toepassen op t betekent: f integreren van 0 tot t .

Uit (37.9) volgt: $\frac{df * \underline{1}}{dt} = f(t)$ en $f * \underline{1}(0) = 0$, zodat $f * \underline{1} = f$ dan en slechts dan als $f'(t) = f(t)$ en tevens $f(0) = 0$. Hieruit volgt $f(t) = Ke^t$ met $f(0) = 0$, dus $K = 0$, m.a.w.: $f * \underline{1} = f$ dan en slechts dan als $f(t) = 0$ voor alle t .

We geven drie voorbeelden van het berekenen van convolutieproducten en daarna twee toepassingen op het berekenen van een \mathfrak{L} -getransformeerde en een op het berekenen van de inverse \mathfrak{L} -getransformeerde. We zullen daarbij vaak de notatie $f(t) * g(t)$ gebruiken in plaats van $f * g(t)$. Zo zullen we, indien de functie I gedefinieerd is door $I(t) = t$ schrijven: $t * t$, in plaats van $I * I(t)$.

Voorbeeld 1

$$1 * 1 = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t$$

Voorbeeld 2

$$t * t = \int_0^t \tau(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2}t\tau^2 - \frac{1}{3}\tau^3 \Big|_0^t = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{6}t^3$$

Voorbeeld 3

Bereken:

$$\sin t * \sin t$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{\sin t * \sin t\} &= \mathfrak{L}(\sin t)\mathfrak{L}(\sin t) \\ &= \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{L}(\sin t - t \cos t) \quad (\text{zie tabel, formule 19})\end{aligned}$$

zodat:

$$\sin t * \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$$

Toepassing 1

Bereken:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s^2+4)}\right\}$$

Oplossing:

(Eerste manier).

$$\frac{2}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{2}{3}(1-s)}{s^2+4}$$

zodat:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s^2+4)}\right\} &= \frac{2}{3}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{3}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) - \frac{2}{3}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \\ &= \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}\sin 2t - \frac{2}{3}\cos 2t\end{aligned}\quad (37.10)$$

(Tweede manier).

$$\mathfrak{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathfrak{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}$$

zodat:

$$\begin{aligned}\frac{2}{(s+1)(s^2+4)} &= \mathfrak{L}(e^{-t})\mathfrak{L}(\sin 2t) \\ &= \mathfrak{L}(e^{-t} * \sin 2t) \\ &= \mathfrak{L}\left\{\int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin 2\tau \, d\tau\right\} \\ &= \mathfrak{L}\left\{e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \sin 2\tau \, d\tau\right\}\end{aligned}$$

Voor deze laatste integraal vinden we:

$$\frac{1}{2}e^t(\sin 2t - 2 \cos 2t) + \frac{2}{5}$$

zodat:

$$\frac{2}{(s+1)(s^2+4)} = \mathfrak{L}\left\{\frac{\sin 2t - 2 \cos 2t}{5} + \frac{2}{5}e^{-t}\right\}$$

waaruit het antwoord (37.10) volgt.

Toepassing 2

Bereken:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Oplossing:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \, d\tau$$

Door te substitueren $\tau = t \sin^2 \varphi$ (met $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) vinden we voor deze integraal:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2t \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{t \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}} = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi$$

zodat:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} = \pi$$

Dus volgens de produktstelling:

$$\left[\mathfrak{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right]^2 = \mathfrak{L}(\pi) = \frac{\pi}{s}$$

en wegens $\mathfrak{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) > 0$:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (s > 0) \quad (37.11)$$

Opmerking:

Volgens de definitie is

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt$$

zodat uit (37.11) met $s = 1$ volgt:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$$

Substitueren we hierin $t = x^2$, dan krijgen we:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} 2x}{x} dx = \sqrt{\pi}$$

of:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Dit is de integraal van Poisson, die we reeds in deel 2, par. 66 gevonden hebben.

De in deel 2, par. 89 bewezen formule:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p > 0, q > 0) \quad (37.12)$$

laat zich gemakkelijk afleiden met behulp van \mathfrak{L} -transformatie door gebruik te maken van het convolutieproduct:

$$t^{p-1} * t^{q-1}$$

Per definitie geldt:

$$t^{p-1} * t^{q-1} = \int_0^t \tau^{p-1} (t-\tau)^{q-1} d\tau$$

hetgeen door de substitutie $\tau = tx$ overgaat in:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{p-1} x^{p-1} (t-tx)^{q-1} t dx &= t^{p+q-1} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= t^{p+q-1} B(p, q) \end{aligned}$$

Daar

$$\mathfrak{L}(t^{p-1}) = \frac{\Gamma(p)}{s^p}, \quad \mathfrak{L}(t^{q-1}) = \frac{\Gamma(q)}{s^q} \quad \text{en} \quad \mathfrak{L}(t^{p+q-1}) = \frac{\Gamma(p+q)}{s^{p+q}}$$

vinden we door toepassing van de stelling over de convolutieproducten:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^p \cdot s^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{s^{p+q}} B(p, q)$$

waaruit (37.12) volgt.

Tenslotte leiden we nog de formule af:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

die we op andere wijze in deel 2, par. 88 afgeleid hebben.

We gaan daarbij uit van de convergente integraal:

$$\int_0^\infty e^{-su} u^p du \quad (s > 0, p > -1) \quad (37.13)$$

Na substitutie: $su = t$, gaat (37.13) over in:

$$\int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{s}\right)^p \frac{dt}{s} = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^p dt = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \quad (37.14)$$

Uit (37.13) en (37.14) volgt dus:

$$\mathfrak{L}(t^p) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \quad (s > 0, p > -1) \quad (37.15)$$

Dit is een formule die we voor $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ reeds in par. 33 bewezen hebben. In voorbeeld 2 vonden we:

$$\mathfrak{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (37.16)$$

Uit (37.15) met $p = -\frac{1}{2}$ en (37.16) volgt:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

zodat:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Numerieke methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen

38 Stapsgewijze integratie. Methode van Euler

Zoals reeds eerder is opgemerkt, kan in het algemeen de oplossing van een D.V. niet in een gesloten vorm worden geschreven. Dit is b.v. het geval met de eenvoudig uitziende D.V. van de eerste orde:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x$$

Willen we in zo'n geval een oplossing aangeven, bepaald door de beginvoorwaarde: voor $x = x_0$ geldt: $y = y_0$, dan trachten we langs numerieke weg de oplossing aan te geven in de vorm van een getabelleerde functie, die de waarden van $y = F(x)$ aangeeft voor waarden van x uit een interval met x_0 als beginpunt.

Door de ontwikkeling van de computers van grote snelheid is het belang van numerieke methoden zeer toegenomen. De oplossingen van een D.V. kunnen snel getabelleerd worden door de machine.

In dit hoofdstuk zullen we enkele fundamentele begrippen van numerieke benadering van oplossingen geven. Een van de eenvoudigste methoden is die van de *stapsgewijze integratie*.

We gaan uit van de algemene vorm van de D.V. van de eerste orde:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

waarin f een gegeven functie is van x en y en wel zodanig dat de D.V. in een zeker interval I een eenduidig bepaalde oplossing F heeft, die aan de beginvoorwaarde: $F(x_0) = y_0$ voldoet ($x_0 \in I$). De gedachte is nu de oplossingskromme, gaande door (x_0, y_0) , te vervangen door de raaklijn daaraan. Immers, de richtingscoëfficiënt daar-

van is bekend, nl. $f(x_0, y_0)$. De vergelijking van deze raaklijn is:

$$y - y_0 = (x - x_0)f(x_0, y_0)$$

We vinden voor $x = x_0 + h$ de benaderingswaarde

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Hierin wordt h de *stapgrootte* genoemd.

We stellen $x_0 + h = x_1$ en herhalen het procédé in het punt (x_1, y_1^*) , d.w.z. we beschouwen de rechte met vergelijking:

$$y - y_1^* = (x - x_1)f(x_1, y_1^*)$$

We vinden voor $x_2 = x_1 + h$ de benaderingswaarde

$$y_2^* = y_1^* + hf(x_1, y_1^*)$$

We merken hierbij op dat het punt (x_1, y_1^*) in het algemeen niet op de oplossingskromme van de D.V. ligt en dat daardoor $f(x_1, y_1^*)$ ook niet de richting van de raaklijn in het punt op de oplossingskromme met x_1 als x -coördinaat aangeeft (zie fig. 45). Zo voortgaande vinden we achtereenvolgens de benaderingswaarden y_3^*, y_4^*, \dots in $x_3 (= x_0 + 3h), x_4 (= x_0 + 4h), \dots$:

$$y_3^* = y_2^* + hf(x_2, y_2^*)$$

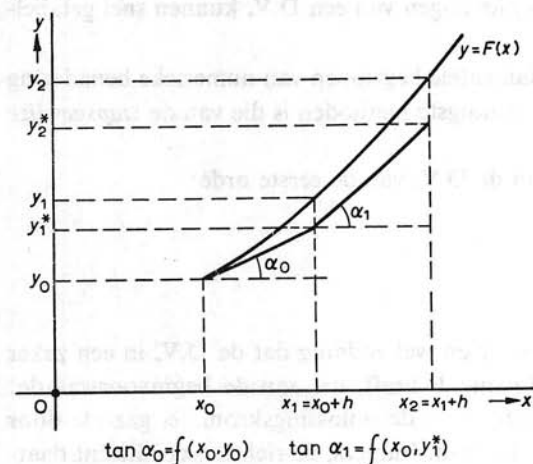
$$y_4^* = y_3^* + hf(x_3, y_3^*)$$

.....

Algemeen:

$$y_{n+1}^* = y_n^* + hf(x_n, y_n^*) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Fig. 45



Deze formule noemt men de *predictor*, omdat deze de volgende benaderingswaarde van y voorspelt.

We kunnen ook nog, als we willen, de stapgrootte h van stap tot stap variëren.

Deze methode van benadering, die ook wel de *methode van Euler* genoemd wordt, is in het algemeen niet zeer nauwkeurig. Stelt $y = F(x)$ de vergelijking voor van de gevraagde kromme, dan geldt als $F(x)$ in een Taylorreeks ontwikkeld kan worden:

$$y_0 = F(x_0)$$

$$y_1^* = F(x_0) + hF'(x_0)$$

en

$$y_1 = F(x_1) = F(x_0) + hF'(x_0) + \frac{h^2}{2!} F''(x_0) + \dots$$

zodat:

$$y_1 - y_1^* = \frac{h^2}{2!} F''(x_0) + \dots$$

Tenzij de reeks rechts snel convergeert, zal de fout groot zijn. Is h echter erg klein, dan zal de fout klein zijn, doch in dit geval zijn veel stappen noodzakelijk. Om te zien of h voldoende klein is om de fout binnen redelijke grenzen te houden, kunnen we als volgt te werk gaan. We voeren de berekening uit met een bepaalde h over een gegeven interval; dan herhalen we de berekening met een kleinere waarde van h , b.v. $\frac{1}{2}h$. Zijn de in beide gevallen berekende waarden van y veranderd met een te verwaarlozen grootte, dan beschouwen we de oplossing berekend met een toe te laten nauwkeurigheid. De behandelde methode noemen we ook wel een *eerste-orde methode*, omdat we $F(x)$ in feite benaderen door een lineaire vorm in h .

39 De methode van Heun*

Een andere manier om van de D.V.:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{39.1}$$

een benaderingsoplossing te bepalen die in x_0 de waarde y_0 aanneemt, is de volgende. Voor de oplossing F van (39.1), die voldoet aan $F(x_0) = y_0$, geldt in x_1 :

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f\{x, F(x)\} dx \tag{39.2}$$

In de integrand van de integraal in het rechterlid van (39.2) komt de gezochte functie F voor. We zullen de integraal op verschillende wijzen benaderen (zie ook deel 1, par. 35 en 126).

* K. Heun, 1859–1933.

Allereerst kunnen we $F(x)$ in de integrand ruw benaderen door $F(x_0) = y_0$, dus de integrand benaderen door $f\{x_0, F(x_0)\}$. Als we weer stellen: $x_1 - x_0 = h$, vinden we:

$$F(x_1) \approx F(x_0) + hf\{x_0, F(x_0)\}$$

of, als we weer de benaderingswaarde van $F(x_1)$ voorstellen door y_1^* :

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Deze benadering stemt overeen met die uit par. 38.

Een nauwkeuriger benadering krijgen we, als we de integraal uit het rechterlid van (39.2) benaderen met de trapeziumregel. Het rechterlid van (39.2) wordt dan benaderd door:

$$\frac{1}{2}h[f\{x_0, F(x_0)\} + f\{x_1, F(x_1)\}]$$

(39.2) geeft de volgende vergelijking voor de benaderingswaarde \hat{y}_1 van $F(x_1)$:

$$\hat{y}_1 = y_0 + \frac{1}{2}h[f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)] \quad (39.3)$$

Door het gebruik van de trapeziumregel is de waarde \hat{y}_1 in het algemeen niet de werkelijke waarde $F(x_1)$. De fout die we hierdoor maken noemen we de *procesfout*. We moeten echter nog \hat{y}_1 uit (39.3) oplossen. Dit is een gemakkelijke zaak indien $f(x, y)$ een eenvoudige gedaante heeft, b.v.:

$$f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

Hierop komen we nog terug.

In de andere gevallen zullen we \hat{y}_1 uit (39.3) oplossen door middel van *iteratie*. Dit gaat op de volgende wijze. We nemen een benaderingswaarde voor \hat{y}_1 , substitueren die in het rechterlid van (39.3). Hierdoor vinden we een nieuwe benadering van \hat{y}_1 . We substitueren deze waarde weer in (39.3), enz. Dit proces breken we na een aantal stappen af, waardoor opnieuw een fout ontstaat, de z.g. *afbreekfout* (Truncation-error).

Bij de nu volgende methode wordt éénmaal een geschikt gekozen benadering voor \hat{y}_1 in het rechterlid van (39.3) ingevuld, daarna wordt de iteratie gestopt. Als eerste benadering gebruiken we dan de predictorformule uit par. 38:

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

We vinden dan de volgende *benadering* \hat{y}_1^* van \hat{y}_1 .

(N.B. \hat{y}_1 is zelf al een benadering van y_1 !):

$$\hat{y}_1^* = y_0 + \frac{1}{2}h(f_0 + f_1^*) \quad \{\text{met } f_0 = f(x_0, y_0) \text{ en } f_1^* = f(x_1, y_1^*)\} \quad (39.4)$$

De formule (39.4) wordt de *corrector* genoemd. Bij de *methode van Heun* breken we het iteratieproces hier af. Eigenlijk moesten we zo lang het proces voortzetten totdat de gevonden benaderingswaarden binnen voorgeschreven grenzen liggen.

Samengevat bestaat de methode van Heun voor het benaderen van y_1 uit twee stappen:

$$\left. \begin{aligned} \text{predictor: } y_1^* &= y_0 + hf_0 \\ \text{corrector: } \hat{y}_1^* &= y_0 + \frac{h}{2}(f_0 + f_1^*) \end{aligned} \right\}$$

Met x_1 en \hat{y}_1^* als beginwaarden wordt nu de tweede integratiestap uitgevoerd, enz. Algemeen vinden we de recursie-formules:

$$\left. \begin{aligned} \text{predictor: } y_{n+1}^* &= \hat{y}_n^* + hf_n \\ \text{corrector: } \hat{y}_{n+1}^* &= \hat{y}_n^* + \frac{1}{2}h(f_n + f_{n+1}^*) \end{aligned} \right\} \quad (39.5)$$

Hierin geldt:

$$\begin{aligned} f_n &= f(x_n, \hat{y}_n^*) \\ f_{n+1}^* &= f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}^*) \end{aligned}$$

Zoals gezegd bestaat de totale fout uit twee delen: ten eerste de fout veroorzaakt door het gebruik van de trapeziumregel (de procesfout) en ten tweede de fout tengevolge van het afbreken van de iteratie bij het oplossen van (39.3).

We moeten dus met een vergroting van de afbrekfout bij het voortschrijden van het integratieproces rekening houden. Om te voorkomen dat het numerieke integratieproces „ontspoord”, zullen we in de praktijk de stapgrootte niet constant laten, maar b.v. verkleinen als we in intervallen komen waar $F(x)$ sterker varieert. Het blijkt dat in de praktijk de methode van Heun een vrij stabiele methode is voor het oplossen van D.V.-en van de eerste orde. Bij geschikte keuze van stapgrootten, iteraties en afrondingen van getalwaarden vormt het een *stabiel rekenproces*, d.w.z. een rekenmethode waarbij de fouten gedurende het proces praktisch niet aangroeien.

Is de D.V. $y' = f(x, y)$ lineair, dus

$$f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

dan wordt (39.3) een gewone lineaire vergelijking:

$$\hat{y}_1 = y_0 + \frac{1}{2}h[a(x_0)y_0 + b(x_0) + a(x_1)\hat{y}_1 + b(x_1)]$$

waaruit we \hat{y}_1 kunnen oplossen:

$$\hat{y}_1 = \frac{\{2 + ha(x_0)\}y_0 + h\{b(x_0) + b(x_1)\}}{2 - ha(x_1)}$$

De algemene recursieformule luidt in het lineaire geval bij stapgrootten h_n :

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{\{2 + h_n a(x_n)\}\hat{y}_n + h_n\{b(x_n) + b(x_{n+1})\}}{2 - h_n a(x_{n+1})} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (39.6)$$

40 De verbeterde trapeziumregel

In par. 39 werd de integraal

$$\int_{x_0}^{x_1} f\{x, F(x)\} dx \quad (40.1)$$

benaderd door middel van de trapeziumregel. We stelden:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\{x, F(x)\} dx \approx \frac{1}{2}h[f\{x_0, F(x_0)\} + f\{x_1, F(x_1)\}]$$

waarbij $h = x_1 - x_0$.

Een nauwkeuriger benadering van (40.1) krijgen we in de *verbeterde trapeziumregel*, die we hier zullen afleiden.

Als g een functie is die gedefinieerd is voor $x \in [x_0, x_1]$ en die in x_0 in een Taylorreeks ontwikkelbaar is, dan geldt:

$$g(x) = g(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} g'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} g''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} g'''(x_0) + \dots \quad (40.2)$$

Dus geldt:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = hg(x_0) + \frac{h^2}{2!} g'(x_0) + \frac{h^3}{3!} g''(x_0) + \frac{h^4}{4!} g'''(x_0) + \dots \quad (40.3)$$

Ook geldt, mede op grond van (40.2):

$$\frac{1}{2}h\{g(x_0) + g(x_1)\} = hg(x_0) + \frac{h^2}{2!} g'(x_0) + \frac{h^3}{2!2} g''(x_0) + \frac{h^4}{3!2} g'''(x_0) + \dots \quad (40.4)$$

Vermindering van (40.3) met (40.4) geeft:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = \frac{1}{2}h\{g(x_0) + g(x_1)\} - \frac{1}{12}h^3 g''(x_0) + \dots$$

Dus:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx \approx \frac{1}{2}h\{g(x_0) + g(x_1)\} - \frac{1}{12}h^3 g''(x_0) \quad (40.5)$$

Volgens de middelwaardstelling geldt:

$$g'(x_1) - g'(x_0) = (x_1 - x_0)g''(\xi)$$

met $x_0 < \xi < x_1$.

Als de stapgrootte h „klein” is, kunnen we schrijven:

$$g'(x_1) - g'(x_0) \approx hg''(x_0)$$

Daardoor gaat (40.5) over in:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx \approx \frac{1}{2}h\{g(x_0) + g(x_1)\} - \frac{1}{12}h^2\{g'(x_1) - g'(x_0)\} \quad (40.6)$$

We passen dit toe met

$$g(x) = f\{x, F(x)\}$$

Er geldt dan:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dF}{dx}$$

waaruit volgt:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f\{x, F(x)\}$$

(40.6) gaat dan over in:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, F(x)) dx \approx \frac{1}{2}h\{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\} + \frac{1}{12}h^2 \left\{ \left(\frac{dg}{dx} \right)_{x=x_0} - \left(\frac{dg}{dx} \right)_{x=x_1} \right\}$$

(40.7) wordt de *verbeterde trapeziumregel* genoemd.

(40.7)

Volgens (39.2) moeten we F zo bepalen dat:

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f\{x, F(x)\} dx \quad (40.8)$$

Uit (40.7) en (40.8) vinden we de volgende vergelijking voor de benadering \hat{y}_1 van $F(x_1)$:

$$\hat{y}_1 - y_0 = \frac{1}{2}h\{f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)\} + \frac{1}{12}h^2 \left\{ \left(\frac{dg}{dx} \right)_{x=x_0} - \left(\frac{dg}{dx} \right)_{x=x_1} \right\} \quad (40.9)$$

We zoeken in plaats van $y_1 (= F(x_1))$ die aan (40.8) voldoet \hat{y}_1 die aan (40.9) voldoet en lossen (40.9) weer op door middel van iteratie. Voor de eerste benadering van \hat{y}_1 kiezen we in het algemeen de met de methode van Heun berekende corrector, zie (39.4). Meestal kiezen we h zo klein dat de in (40.9) optredende „correctieterm”

$$\frac{h^2}{12} \left\{ \left(\frac{dg}{dx} \right)_{x=x_0} - \left(\frac{dg}{dx} \right)_{x=x_1} \right\}$$

beneden een voorgeschreven waarde blijft.

Evenals bij de methode van Heun kunnen we ook hier bij een lineaire D.V. van de eerste orde de waarde van \hat{y}_1 direct uit (40.9) berekenen. De verbeterde trapeziumregel is vanwege haar grote nauwkeurigheid en numerieke stabiliteit zeer aan te bevelen.

41 Toepassing van de behandelde methoden

We passen het voorgaande toe door de lineaire D.V.:

$$\frac{dy}{dx} = x - y \quad (41.1)$$

met beginvoorwaarde $y_0 (= F(x_0)) = 1$ van $x = 0$ tot $x = 1$ numeriek te integreren met de in par. 39 en 40 afgeleide integratieformules. De integratie voeren we uit met twee verschillende stapgrootten t.w. $h = 0,1$ en $h = 0,05$. We vergelijken daarbij de verkregen uitkomsten met die van de exacte oplossing. De gebruikte formules vinden we in de volgende vier punten.

a De D.V. (41.1) kan zeer eenvoudig exact opgelost worden.

De oplossing luidt:

$$y = -1 + x + 2e^{-x}$$

b De recursieformule (39.6) voor de trapeziumregel met $a(x) \equiv -1$, $b(x) \equiv x$ luidt:

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{(2-h)\hat{y}_n + h(x_n + x_{n+1})}{2+h}$$

c Voor de verbeterde trapeziumregel hebben we de afgeleide nodig van de functie g , gedefinieerd door:

$$g(x) = x - F(x)$$

Deze is:

$$\frac{dg}{dx} = 1 - \frac{dF}{dx} = 1 - x + y$$

Uit (40.9) leiden we de volgende formule af die \hat{y}_{n+1} uitdrukt in \hat{y}_n ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{1}{2}h(x_n - \hat{y}_n + x_{n+1} - \hat{y}_{n+1}) + \frac{1}{12}h^2(-x_n + \hat{y}_n + x_{n+1} - \hat{y}_{n+1})$$

Hieruit lossen we op:

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{(12 - 6h + h^2)\hat{y}_n + (6h - h^2)x_n + (6h + h^2)x_{n+1}}{12 + 6h + h^2}$$

d Beschouwen we de verbeterde trapeziumregel als corrector van de met de methode van Heun berekende waarden y , dan zijn de algemene recursieformules volgens (39.5) en (40.9) na de n -de stap:

$$y_{n+1}^* = y_n^* + h(x_n - y_n^*) \quad (\text{Euler})$$

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{1}{2}h(x_n - \hat{y}_n + x_{n+1} - y_{n+1}^*) \quad (\text{Heun})$$

$$\hat{\hat{y}}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{1}{2}h(x_n - \hat{y}_n + x_{n+1} - \hat{y}_{n+1}) + \frac{1}{12}h^2(-x_n + \hat{y}_n + x_{n+1} - \hat{y}_{n+1})$$

(corrector)

De tabellen 1 en 2 bevatten voor $h = 0,1$ en $h = 0,05$ de x -waarden en de bijbehorende waarden van y (exact), \hat{y} (trapeziumregel) en $\hat{\hat{y}}$ (verbeterde trapeziumregel), welke met de formules berekend zijn.

Tabel 1. $dy/dx = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.10$

x	y [exact]	\hat{y} [trap.]	\hat{y} [verb. trap.]
0	1		
0.10	0.909674836	0.909523810	0.909674861
0.20	0.837461506	0.837188209	0.837461552
0.30	0.781636441	0.781265522	0.781636503
0.40	0.740640092	0.740192615	0.740640167
0.50	0.713061319	0.712555223	0.713061404
0.60	0.697623272	0.697073774	0.697623364
0.70	0.693170608	0.692590557	0.693170704
0.80	0.698657928	0.698058123	0.698658028
0.90	0.713139320	0.712528778	0.713139421
1.00	0.735758882	0.735145085	0.735758985

Tabel 2. $dy/dx = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$

x	y [exact]	\hat{y} [trap.]	\hat{y} [verb. trap.]
0	1		
0.05	0.952458849	0.952439024	0.952458850
0.10	0.909674836	0.909637121	0.909674838
0.15	0.871415953	0.871362139	0.871415955
0.20	0.837461506	0.837393254	0.837461509
0.25	0.807601566	0.807520413	0.807601570
0.30	0.781636441	0.781543807	0.781636445
0.35	0.759376179	0.759273378	0.759376184
0.40	0.740640092	0.740528335	0.740640097
0.45	0.725256303	0.725136709	0.725256308
0.50	0.713061319	0.712934918	0.713061325
0.55	0.703899621	0.703767361	0.703899626
0.60	0.697623272	0.697486026	0.697623278
0.65	0.694091554	0.693950123	0.694091559
0.70	0.693170608	0.693025727	0.693170614
0.75	0.694733105	0.694585447	0.694733112
0.80	0.698657928	0.698508108	0.698657934
0.85	0.704829864	0.704678445	0.704829980
0.90	0.713139319	0.712986813	0.713139326
0.95	0.723482047	0.723328920	0.723482053
1.00	0.735758882	0.735605558	0.735758889

Tabel 3. $dy/dx = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$

x	y^* [euler]	\hat{y} [heun]	\hat{y} [cor.]	\hat{y} [cor.] - \hat{y} [heun]
0			1	
0.10	0.900000000	0.910000000	0.909658333	- 0.000341667
0.20	0.828692500	0.837740792	0.837431642	- 0.000309150
0.30	0.773688478	0.781875636	0.781595908	- 0.000279728
0.40	0.733436317	0.740844297	0.740591191	- 0.000253106
0.50	0.706532072	0.713235028	0.713006010	- 0.000229018
0.60	0.691705409	0.697770439	0.697563217	- 0.000207222
0.70	0.687806895	0.693294711	0.693107211	- 0.000187500
0.80	0.693796490	0.698762026	0.698592370	- 0.000169656
0.90	0.708733133	0.713226095	0.713072585	- 0.000153510
1.00	0.731765327	0.735830690	0.735691790	- 0.000138900

Tabel 4. $dy/dx = x - y$, $y(0) = 1$, $h = 0,05$

x	y^* [euler]	\hat{y} [heun]	\hat{y} [cor.]	\hat{y} [cor.] - \hat{y} [heun]
0			1	
0.05	0.950000000	0.952500000	0.952457813	- 0.000042188
0.10	0.907334922	0.909712994	0.909672864	- 0.000040130
0.15	0.869189221	0.871451312	0.871413139	- 0.000038173
0.20	0.835342482	0.837494249	0.837457938	- 0.000036311
0.25	0.805585041	0.807631863	0.807597323	- 0.000034540
0.30	0.779717457	0.781664454	0.781631598	- 0.000032856
0.35	0.757550018	0.759402058	0.759370804	- 0.000031253
0.40	0.738902264	0.740663978	0.740634249	- 0.000029729
0.45	0.723602536	0.725278329	0.725250050	- 0.000028279
0.50	0.711487548	0.713081610	0.713054710	- 0.000026900
0.55	0.702401975	0.703918293	0.703892705	- 0.000025588
0.60	0.696198070	0.697640436	0.697616096	- 0.000024340
0.65	0.692735291	0.694107311	0.694084159	- 0.000023153
0.70	0.691879951	0.693185056	0.693163032	- 0.000022024
0.75	0.693504881	0.694746334	0.694725385	- 0.000020950
0.80	0.697489116	0.698670022	0.698650095	- 0.000019928
0.85	0.703717590	0.704840902	0.704821947	- 0.000018956
0.90	0.712080849	0.713149377	0.713131345	- 0.000018031
0.95	0.722474778	0.723491192	0.723474040	- 0.000017152
1.00	0.734800338	0.735767181	0.735750865	- 0.000016315

De berekeningen zijn uitgevoerd met behulp van een rekenmachine. We zien dat de met de verbeterde trapeziumregel berekende waarden \hat{y} met $h = 0,10$ tot in 6 en met $h = 0,05$ tot in 8 decimalen nauwkeurig zijn. De methode voor deze tabellen geldt uiteraard alleen voor lineaire differentiaalvergelijkingen.

In de tabellen 3 en 4 zijn voor $h = 0,1$ en $h = 0,05$ de x -waarden en de, met in 4 gegeven formules berekende y^* -, \hat{y} - en \hat{y} -waarden, tezamen met de correcties $\hat{y} - y$ gegeven. We zullen bij de berekening h in het algemeen zo klein kiezen dat de correcties $(\hat{y}_{n+1} - y_{n+1})$ beneden de voorgeschreven tolerantie blijven. De methode voor de tabellen 3 en 4 kan ook gebruikt worden voor niet-lineaire D.V.

42 De methode van Runge-Kutta *

De methode van Heun kan nog verbeterd worden door in plaats van de trapeziumregel voor de benadering van de integraal de *regel van Simpson* (zie deel 1, par. 35 en 126) te benutten. In dit geval geschiedt de integratie trapsgewijs over een dubbel interval. De integraal

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x, y) dx$$

wordt dan benaderd door de grootheid:

$$\frac{1}{3}h[f\{x_0, y(x_0)\} + 4f\{x_1, y(x_1)\} + f\{x_2, y(x_2)\}]$$

waarin $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.

Voor de behandeling van deze zeer belangrijke methode, die de *methode van Runge-Kutta* heet, verwijzen we naar leerboeken over numerieke analyse**.

* C. Runge, 1856-1927; W. Kutta, 1867-1944.

** B.v. „Handboek der wiskunde”, onder redactie van L. Kuipers en R. Timman, hoofdstuk 12, uitg. Oosthoek, Scheltema en Holkema, Utrecht, of E. Stiefel, „Einführung in die Numerische Mathematik”, uitg. B. G. Teubner, Stuttgart.

Partiële differentiaalvergelijkingen

43 Inleiding

Hoewel de behandeling van de z.g. *partiële differentiaalvergelijkingen* buiten het bestek van dit boek valt, willen we toch enkele opmerkingen erover maken en de oplossing van een aantal belangrijke typen behandelen, zonder op de theoretische achtergronden in te gaan.

Het gaat hierbij om het probleem een functie van twee of meer veranderlijken te vinden, die voldoet aan een voorgeschreven betrekking tussen de partiële afgeleiden (inclusief de functie zelf als nulde afgeleide). Zo kunnen we b.v. vragen naar een functie F van de veranderlijken x en y die in een bepaald gebied van het x,y -vlak voldoet aan:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (43.1)$$

Het belang van dit soort problemen ligt grotendeels in de toepassingen ervan. Het gaat vaak om verschijnselen die zich in de ruimte afspelen en daarin met de tijd veranderen. Het betreft dan functies die afhankelijk zijn zowel van de ruimtecoördinaten als ook van de tijd, dus b.v. functies $F : (x, y, z, t) \mapsto F(x, y, z, t)$. Een voorbeeld van een partiële D.V. voor zo'n functie is:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Een *oplossing* van een partiële D.V. is een functie, die gedefinieerd is op een bepaald gebied R van de ruimte van de onafhankelijk veranderlijken en die, ingevuld in de partiële D.V. een op R geldende identiteit oplevert. Zo heeft b.v. de D.V. (43.1) als oplossing de functie F_1 , gedefinieerd door:

$$F_1(x, y) = x^2 - y^2$$

maar ook de functie F_2 , gedefinieerd door:

$$F_2(x, y) = e^x \sin y$$

Evenals bij de gewone differentiaalvergelijkingen kent men ook hier de begrippen "orde" en "graad" van een partiële D.V.

Definitie

Onder de orde van een partiële D.V. verstaat men de orde van die partiële afgeleide die tot de hoogste orde in de D.V. voorkomt.

Zo is de D.V.:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4 = 0$$

een D.V. van de orde 3.

Met betrekking tot de *graad* van een D.V. zullen we slechts de volgende driedeling maken: *lineair*, *quasi-lineair* en alle overige D.V.-en.

Definitie

Een partiële D.V. heet lineair als deze lineair is in de voorkomende afhankelijke variabele(n), en in alle voorkomende afgeleiden.

De meest algemene gedaante van een lineaire partiële D.V. van de eerste orde in twee onafhankelijke en één afhankelijke variabele is:

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y)z = S(x, y)$$

Alle andere typen heten *niet-lineair*.

Indien $S(x, y)$ identiek nul is, dan heet de D.V. *homogeen*.

Indien $S(x, y)$ niet identiek nul is, dan heet de D.V. *inhomogeen*.

Een belangrijke klasse onder de niet-lineaire D.V. wordt gevormd door de *quasi-lineaire* D.V. die voldoen aan de volgende

Definitie

Een partiële D.V. heet quasi-lineair indien deze lineair is in de hoogste partiële afgeleiden die voorkomen.

De manier waarop de andere afgeleiden, de onafhankelijke en de afhankelijke variabelen voorkomen doet daarbij niet ter zake. De meest algemene gedaante van een quasi-lineaire D.V. van de eerste orde in twee variabelen is:

$$P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z).$$

Ook hier maakt men op de gebruikelijke manier onderscheid tussen de begrippen homogeen en inhomogeen. Het is duidelijk dat de lineaire partiële D.V. een deelverzameling vormen van de quasi-lineaire partiële D.V.

Bij de homogene D.V. van de tweede orde voor functies van twee variabelen zijn de volgende typen van groot belang:

a *Parabolisch* type: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

b *Hyperbolisch* type: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

c *Elliptisch* type: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

In de paragrafen 46, 47 en 48 zullen we van elk van deze typen een voorbeeld geven.

44 Partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Van de partiële D.V. van de eerste orde zullen we enkele eenvoudige typen behandelen.

Voorbeeld 1

Gevraagd een functie f van de variabelen x en y die voldoet aan: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Oplossing:

Het is duidelijk dat die en alleen die functies voldoen die van y alleen afhangen.

Dus (zie fig. 46):

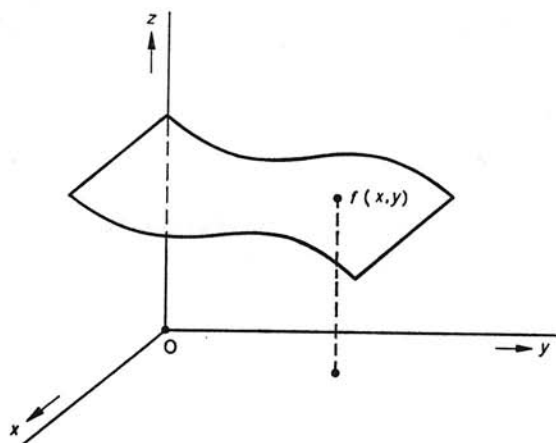
$$f(x, y) = F(y)$$

Voorbeeld 2

Gevraagd een functie f van x en y die voldoet aan:

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} + 4 \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (44.1)$$

Fig. 46



Oplossing:

We voeren nieuwe variabelen in door middel van:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi^*(x, y) = ax + by \\ \eta &= \eta^*(x, y) = cx + dy \end{aligned} \right\} \quad (44.2)$$

met nader te bepalen constanten a , b , c en d .

Nu wordt f die van x en y afhangt een functie f^* van ξ en η indien uit (44.2) x en y kunnen worden opgelost, dus indien:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Er geldt dan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f^*}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi^*}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f^*}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi^*}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

of:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= a \frac{\partial f^*}{\partial \xi} + c \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= b \frac{\partial f^*}{\partial \xi} + d \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \end{aligned} \right\}$$

De D.V. (44.1) gaat over in:

$$3\left(a \frac{\partial f^*}{\partial \xi} + c \frac{\partial f^*}{\partial \eta}\right) + 4\left(b \frac{\partial f^*}{\partial \xi} + d \frac{\partial f^*}{\partial \eta}\right) = 0$$

of:

$$(3a + 4b) \frac{\partial f^*}{\partial \xi} + (3c + 4d) \frac{\partial f^*}{\partial \eta} = 0.$$

We kiezen c en d zó dat $3c + 4d = 0$ (b.v. $c = 4$, $d = -3$). Verder eisen we $ad - bc \neq 0$, dus $-3a - 3b \neq 0$, en dus $3a + 4b \neq 0$. f^* voldoet dan aan:

$$(3a + 4b) \frac{\partial f^*}{\partial \xi} = 0$$

of:

$$\frac{\partial f^*}{\partial \xi} = 0.$$

Hieruit vinden we:

$$f^*(\xi, \eta) = F(\eta)$$

Een oplossing van (44.2) wordt dus bepaald door:

$$f(x, y) = F(4x - 3y)$$

We zouden nog nadere eisen kunnen stellen aan f , b.v.:

$$f(x, 0) = \sin x$$

dus:

$$F(4x) = \sin x$$

of in het algemeen: $F(4t) = \sin t$, voor elke t .

Maar dan geldt ook met $4t = 4x - 3y$:

$$F(4x - 3y) = \sin\left(\frac{4x - 3y}{4}\right)$$

hetgeen een oplossing is van (44.1).

Ga zelf na dat een oplossing van de D.V.:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

die voldoet aan: $f(x, 0) = x^2$, gegeven wordt door:

$$f(x, y) = (x - y)^2$$

Voorbeeld 2 is een bijzonder geval van de manier waarop men in het algemeen een lineaire partiële D.V. van de eerste orde kan oplossen (al dan niet homogeen).

Zij namelijk gegeven de lineaire partiële D.V.:

$$P(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} = R(x,y)f(x,y) \quad (44.3)$$

We voeren ook nu nieuwe onafhankelijke variabelen ξ en η in door middel van nader te bepalen functies ξ^* en η^* , aldus:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^*(x,y) \\ \eta &= \eta^*(x,y) \end{aligned} \quad (44.4)$$

met nu als eis dat de Jacobiaan:

$$\frac{\partial(\xi^*, \eta^*)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

zodat x en y kunnen worden uitgedrukt in ξ en η .

De onbekende functie f , die van x en y afhankelijk is, gaat dan over in een functie f^* die van ξ en η afhangt.

Dan geldt nu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f^*}{\partial \xi} \frac{\partial \xi^*}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f^*}{\partial \xi} \frac{\partial \xi^*}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta^*}{\partial y}$$

waardoor (44.3) overgaat in:

$$\begin{aligned} P^*(\xi, \eta) \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \xi} \frac{\partial \xi^*}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right\} + Q^*(\xi, \eta) \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \xi} \frac{\partial \xi^*}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right\} = \\ = R^*(\xi, \eta) f^*(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (44.5)$$

of

$$\begin{aligned} \left\{ P^*(\xi, \eta) \frac{\partial \xi^*}{\partial x} + Q^*(\xi, \eta) \frac{\partial \xi^*}{\partial y} \right\} \frac{\partial f^*}{\partial \xi} + \left\{ P^*(\xi, \eta) \frac{\partial \eta^*}{\partial x} + Q^*(\xi, \eta) \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right\} \frac{\partial f^*}{\partial \eta} = \\ = R^*(\xi, \eta) f^*(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (44.6)$$

Evenals in voorbeeld 2 proberen we nu de transformatie (44.4) zodanig te kiezen dat de coëfficiënt van $\partial f^*/\partial \eta$ in (44.6) de waarde nul krijgt, dat wil zeggen

$$P^*(\xi, \eta) \frac{\partial \eta^*}{\partial x} + Q^*(\xi, \eta) \frac{\partial \eta^*}{\partial y} = 0 \quad (44.7)$$

ofwel

$$P(x,y) \frac{\partial \eta^*}{\partial x} + Q(x,y) \frac{\partial \eta^*}{\partial y} = 0 \quad (44.8)$$

Het is nu eerst zaak om een functie η^* te vinden die aan deze eis voldoet.

Daartoe nemen we aan: $P(x,y) \neq 0$, en beschouwen de gewone D.V.:

$$\frac{dy^*}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad (y = y^*(x)) \quad (44.9)$$

voor een onbekende functie y^* van x .

Indien hiervan de algemene oplossing vervat is in:

$$\eta^*(x,y) = C \quad (44.10)$$

(C is een willekeurige constante),

dus η^* een zodanige functie is van twee variabelen dat

$$\eta^*\{x, y^*(x)\} = C,$$

dan blijkt deze η^* te voldoen aan (44.8).

Immers, als we (44.10) naar x differentiëren, dan vinden we:

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial x} + \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \frac{dy^*}{dx} = 0,$$

en dus uitgaande van (44.9):

$$P(x,y) \frac{\partial \eta^*}{\partial x} + Q(x,y) \frac{\partial \eta^*}{\partial y} = 0. \quad (44.11)$$

Hiermee is de keuze van de in (44.4) bedoelde η^* gemaakt.

Vervolgens kiezen we ξ^* , en wel zo dat

$$\xi^*(x,y) = x$$

Voor de Jacobiaan geldt dan:

$$\frac{\partial(\xi^*, \eta^*)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^*}{\partial x} & \frac{\partial \xi^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta^*}{\partial x} & \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \eta^*}{\partial x} & \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \neq 0 \quad (\text{zie (44.11)}).$$

Nu gaat (44.6) over in:

$$P^*(\xi, \eta) \frac{\partial f^*}{\partial \xi} = R^*(\xi, \eta) f^*(\xi, \eta) \quad (\text{N.B. } \frac{\partial \xi^*}{\partial \eta} = 0, \text{ daar } \xi^*(x,y) = x) \quad (44.12)$$

Bij vaste η integreren we naar ξ en vinden dan:

$$f^*(\xi, \eta) = K(\eta) \exp\left\{ \int \frac{R^*(\xi, \eta)}{P^*(\xi, \eta)} d\xi \right\} \quad (44.13)$$

waarin K een willekeurige functie van η is.

Dit betekent dat de functie g , gedefinieerd door:

$$g(\xi, \eta) = \exp\left\{ \int \frac{R^*(\xi, \eta)}{P^*(\xi, \eta)} d\xi \right\} \quad (44.14)$$

voldoet aan (44.3), en dat de functie f_0 , gedefinieerd door:

$$f_0(x,y) = g\{x, \eta^*(x,y)\} \quad (44.15)$$

een particuliere oplossing is van (44.3).

Zonder bewijs vermelden we dat de algemene oplossing van (44.3) luidt:

$$f_0(x,y) F\{\eta^*(x,y)\}$$

waarbij F een willekeurige functie van één variabele is met continue afgeleide, en f_0 en η^* de hierboven gevonden functies zijn.

Voorbeeld 3

Gevraagd een functie f van x en y , die voldoet aan:

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)f(x,y) \quad (44.16)$$

Oplossing:

In dit voorbeeld is dus $P(x,y) = x^2$; $Q(x,y) = y^2$; $R(x,y) = x+y$.

(44.9) wordt dan

$$\frac{dy^*}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$$

of

$$\frac{dy^*}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

en dus:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C \quad (C \text{ constant}).$$

Op grond van (44.10) geldt in dit geval:

$$\eta^*(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

Stellen we nu weer

$$\xi^*(x,y) = x,$$

dan volgt:

$$x = \xi$$

$$y = \frac{\xi}{1 + \xi\eta}$$

en dus

$$P^*(\xi, \eta) = \xi^2, \quad R^*(\xi, \eta) = \xi + \frac{\xi}{1 + \xi\eta},$$

zodat

$$\int \frac{R^*(\xi, \eta)}{P^*(\xi, \eta)} d\xi = \int \left\{ \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi(1 + \xi\eta)} \right\} d\xi$$

$$\int \left(\frac{2}{\xi} - \frac{\eta}{1 + \xi\eta} \right) d\xi = \ln \frac{\xi^2}{|1 + \xi\eta|} + G(\eta),$$

waarin G een willekeurige functie van η is.

Derhalve is volgens (44.13) en (44.14):

$$f^*(\xi, \eta) = K(\eta) \frac{\xi^2}{1 + \xi\eta}, \quad g(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{1 + \xi\eta}.$$

Een particuliere oplossing van (44.16) is dus:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 + x\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)} = xy$$

zodat de algemene oplossing van (44.16) is

$$xy F\left\{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right\} = xy F\left(\frac{x-y}{xy}\right).$$

45 Quasi-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen

Zoals in par. 43 is opgemerkt, heeft een quasi-lineaire partiële D.V. voor een functie van twee variabelen de gedaante:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (45.1)$$

Hierin hangt z af van de variabelen x en y , is dus een functie van x en y : $z = f(x, y)$, zodat het duidelijk is (45.1) te schrijven als:

$$P\{x, y, f(x, y)\} \frac{\partial f}{\partial x} + Q\{x, y, f(x, y)\} \frac{\partial f}{\partial y} = R\{x, y, f(x, y)\} \quad (45.2)$$

Van de functies P , Q en R veronderstellen we dat deze gedefinieerd zijn in een open deelgebied G van \mathbb{R}^3 , en aan nader aan te geven eisen voldoen. De projectie van G op het x, y -vlak noemen we G' . De opgave is nu alle functies f van x en y te bepalen die aan (45.2) voldoen voor alle $(x, y) \in G'$.

Meetkundig gesproken bepaalt zo'n oplossing een oppervlak in \mathbb{R}^3 , dat *integraaloppervlak* genoemd wordt.

Bij het zoeken naar oplossingen blijken bepaalde krommen, de zgn. *karakteristieke krommen* van de D.V., ook wel kortweg *karakteristieken* genoemd, een belangrijke rol te spelen. Deze krommen zijn de oplossingskrommen van het volgende stelsel gewone D.V.:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= P\{x(t), y(t), z(t)\} \\ \dot{y}(t) &= Q\{x(t), y(t), z(t)\} \\ \dot{z}(t) &= R\{x(t), y(t), z(t)\} \end{aligned} \right\} \quad (45.3)$$

De eerder genoemde “nader aan te geven” eisen zijn deze, dat P , Q en R zodanige functies zijn dat het stelsel (45.3) in ieder punt van G een eenduidig bepaalde oplossing heeft (zie hiervoor blz. 158), of (anders gezegd) dat door ieder punt van G precies één karakteristiek gaat. Met behulp van deze karakteristieken kunnen we de integraaloppervlakken, dus de oplossingen van (45.2) meetkundig karakteriseren, en wel met de volgende stelling.

Stelling 1

De integraaloppervlakken van de D.V. (45.1) zijn slechts die en slechts die oppervlakken die de eigenschap hebben dat een karakteristiek van de D.V. ofwel geen enkel punt daarmee gemeen heeft, ofwel geheel daarop ligt.

Ruwweg gezegd komt het hierop neer dat zo'n integraaloppervlak “opgebouwd” is uit karakteristieken.

Bewijs van stelling 1:

a Stel dat het oppervlak S , bepaald door $z = f(x, y)$ een integraaloppervlak is van de D.V. (45.2), en dat $P_0(x_0, y_0, z_0)$ een punt is op S . We moeten dan aantonen dat de – eenduidig bepaalde – karakteristiek door P_0 geheel op S ligt. Daartoe construeren we een bepaalde kromme waarvan we zeker weten dat deze door P_0 gaat en geheel op S ligt. We tonen daarna aan dat deze kromme de karakteristiek door P_0 is.

Om de bedoelde kromme te construeren bepalen we eerst de oplossing van het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= P\{x(t), y(t), f\{x(t), y(t)\}\} \\ \dot{y}(t) &= Q\{x(t), y(t), f\{x(t), y(t)\}\} \end{aligned} \right\}$$

gaande door (x_0, y_0) .

Deze oplossing geven we aan door $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}$.

Vervolgens beschouwen we de kromme in \mathbb{R}^3 die gedefinieerd is door:

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x}(t) \\ y(t) &= \bar{y}(t) \\ z(t) &= f\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\} \end{aligned}$$

met f als boven.

Uiteraard ligt deze kromme geheel op S , maar verder geldt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) &= P\{\bar{x}(t), \bar{y}(t), f\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}\} \\ \dot{y}(t) = \dot{\bar{y}}(t) &= Q\{\bar{x}(t), \bar{y}(t), f\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}\} \end{aligned} \right\}$$

en bovendien:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \dot{\bar{x}}(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{\bar{y}}(t) = \\ &= P\{\bar{x}(t), \bar{y}(t), f(\bar{x}(t), \bar{y}(t))\} \frac{\partial f}{\partial x} + Q\{\bar{x}(t), \bar{y}(t), f(\bar{x}(t), \bar{y}(t))\} \frac{\partial f}{\partial y} = \\ &= R\{\bar{x}(t), \bar{y}(t), f(\bar{x}(t), \bar{y}(t))\} \end{aligned}$$

omdat f een oplossing is van (45.2).

Dit betekent dat de geconstrueerde kromme door P_0 juist de karakteristiek is door P_0 , m.a.w. de karakteristiek door P_0 ligt geheel op S .

b Stel T is een oppervlak gedefinieerd door $z = g(x, y)$, en Q_0 is een punt daarop, zodanig dat de karakteristiek K door Q_0 geheel op S ligt. We moeten dan aantonen dat T een integraaloppervlak is van de D.V. (45.2).

Is K bepaald door $\{x(t), y(t), z(t)\}$, dan geldt omdat K een karakteristiek is:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= P\{x(t), y(t), z(t)\} \\ \dot{y}(t) &= Q\{x(t), y(t), z(t)\} \\ \dot{z}(t) &= R\{x(t), y(t), z(t)\} \end{aligned} \right\} \quad (45.3)$$

Daar K op T ligt, geldt tevens voor alle parameterwaarden van t :

$$z(t) = g\{x(t), y(t)\}.$$

Hieruit volgt:

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}(t).$$

In combinatie met (45.3) levert dit op:

$$R\{x(t), y(t), z(t)\} = P\{x(t), y(t), z(t)\} \frac{\partial g}{\partial x} + Q\{x(t), y(t), z(t)\} \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Dit geldt voor alle punten van K , d.w.z.:

$$R\{x, y, g(x, y)\} = P\{x, y, g(x, y)\} \frac{\partial g}{\partial x} + Q\{x, y, g(x, y)\} \frac{\partial g}{\partial y}$$

hetgeen betekent dat g een oplossing is van D.V. (45.2), en dus is T een integraaloppervlak. Hiermee is stelling 1 bewezen.

Met uitzondering van zeer bijzondere gevallen kunnen we het stelsel karakteristieken van een quasi-lineaire partiële D.V. opgebouwd denken als de snijkrommen van twee stelsels oppervlakken, bepaald door bijvoorbeeld

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \lambda \\ v(x, y, z) &= \mu \end{aligned} \right\} \quad (45.4)$$

en wel door daarin de reële parameters λ en μ te variëren. In dit verband bewijzen we de volgende stelling:

Stelling 2

Elk integraaloppervlak van een quasi-lineaire partiële D.V. heeft een vergelijking van de gedaante:

$$F\{u(x,y,z), v(x,y,z)\} = 0 \quad (45.5)$$

waarin F een (tot op zekere hoogte) willekeurige functie is. Omgekeerd: elke vergelijking van de gedaante (45.5) beschrijft een integraaloppervlak.

Bewijs:

a Is S een integraaloppervlak, dan betekent dit dat S gegenereerd wordt door in (45.4) λ en μ te variëren. Is $P_0(x_0, y_0, z_0)$ een punt van S , dan ligt P_0 uiteraard op een karakteristiek K met bijv. de parameters λ_0 en μ_0 . Er geldt dus:

$$\left. \begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \lambda_0 \\ v(x_0, y_0, z_0) &= \mu_0 \end{aligned} \right\} \quad (45.6)$$

Anderzijds ligt P_0 ook wel op een andere kromme op S , bijv. op die welke bepaald wordt door:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

voor zekere f en g , d.w.z.:

$$\left. \begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45.7)$$

Door nu uit (45.6) en (45.7) x_0 , y_0 en z_0 te elimineren verkrijgt men een betrekking:

$$F(\lambda_0, \mu_0) = 0$$

en dus

$$F\{u(x_0, y_0, z_0), v(x_0, y_0, z_0)\} = 0$$

Daar P_0 een willekeurig punt op S is, heeft S dus de gedaante (45.5).

Opmerking 1

De voorwaarden waaronder de genoemde eliminatie mogelijk is, zijn hierbij buiten beschouwing gelaten.

b We beschouwen een oppervlak T met als vergelijking:

$$F\{u(x,y,z), v(x,y,z)\} = 0 \quad \text{voor zekere } F.$$

Is $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ een punt van T , dan geldt:

$$F\{u(x_0, y_0, z_0), v(x_0, y_0, z_0)\} = 0.$$

We definiëren nu λ_0 en μ_0 door:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0$$

$$v(x_0, y_0, z_0) = \mu_0$$

Dan geldt dus:

$$F(\lambda_0, \mu_0) = 0.$$

De karakteristiek L door Q_0 wordt bepaald door:

$$u(x, y, z) = \lambda_0$$

$$v(x, y, z) = \mu_0$$

Voor alle (x, y, z) op L geldt dus:

$$F\{u(x, y, z), v(x, y, z)\} = 0$$

Dit betekent dat elke karakteristiek die één punt met T gemeen heeft, geheel op T ligt, en volgens het voorgaande betekent dit dat T een integraaloppervlak is.

Hiermee is stelling 2 bewezen.

Opmerkingen:

2 De hierboven geschetste stellingen over de quasi-lineaire partiële D.V. voor functies van twee onafhankelijke variabelen zijn afkomstig van J.L. Lagrange (1736–1813).

Uit deze stellingen blijkt dat de oplossing van een quasi-lineaire partiële D.V. teruggebracht kan worden tot de oplossing van een stelsel gewone D.V. (met alle problemen daarvan!).

3 Uit het feit dat elk integraaloppervlak uit karakteristieken is opgebouwd, volgt dat men in het algemeen een integraaloppervlak kan aangeven dat door een gegeven kromme gaat. Dit vraagstuk staat bekend als het *probleem van Cauchy* (1789–1857).

4 De geschetste methode laat zich op voor de hand liggende wijze uitbreiden tot functies van meer dan twee variabelen.

5 Uiteraard is in het vorige slechts globaal gesproken over de voorwaarden waaraan de onderscheiden functies moeten voldoen. Het gaat er hier slechts om een eerste inzicht te verkrijgen.

Voorbeeld 1

We kunnen de eerder genoemde homogene lineaire partiële D.V.:

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = (x + y)z \quad (45.8)$$

ook opvatten als een quasi-lineaire partiële D.V. en daarop de zojuist geschetste oplossingsmethode toepassen.

Allereerst gaat het dan om het stelsel:

$$\dot{x}(t) = x^2 \quad (45.9)$$

$$\dot{y}(t) = y^2 \quad (45.10)$$

$$\dot{z}(t) = (x + y)z \quad (45.11)$$

dus

$$\frac{dx}{x^2} = dt \quad \text{en} \quad \frac{dy}{y^2} = dt$$

met als oplossingen:

$$-\frac{1}{x} = t + c_1 \quad \text{en} \quad -\frac{1}{y} = t + c_2 \quad (45.12)$$

In (45.11) geeft dit:

$$\frac{dz}{z} = \frac{-dt}{t + c_1} - \frac{dt}{t + c_2}$$

dus

$$\ln|z| = -\ln|t + c_1| - |t + c_2| + c_3$$

en dus

$$\frac{z}{xy} = c_4$$

Eliminatie van t uit de beide componenten van (45.12) geeft:

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c_1 - c_2$$

dus

$$\frac{x-y}{xy} = c_5 \quad (\text{cilinder!})$$

Hierin zijn c_1, c_2, c_3, c_4 en c_5 willekeurige constanten.

De algemene oplossing van (45.8) is dus vervat in:

$$F\left(\frac{x-y}{xy}, \frac{z}{xy}\right) = 0.$$

Voorbeeld 2

$$x(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = z(x-y) \quad (45.13)$$

Het bijbehorende stelsel D.V. voor de karakteristieken is:

$$\dot{x}(t) = x(y-z)$$

$$\dot{y}(t) = y(z-x)$$

$$\dot{z}(t) = z(x-y)$$

Door optelling volgt:

$$\dot{x}(t) + \dot{y}(t) + \dot{z}(t) = 0$$

en dus

$$x + y + z = c_1.$$

Ook ziet men eenvoudig in:

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$$

dus $x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$

De karakteristieken zijn dus de cirkels, bepaald door:

$$x + y + z = c_1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

waarbij c_1 en c_2 willekeurige constanten zijn.

We kunnen nu vragen naar het integraaloppervlak dat door de z -as gaat.

We moeten de constanten c_1 en c_2 dan zodanig kiezen dat elk punt van de z -as op het integraaloppervlak ligt. Dit betekent dat voor een punt (x_0, y_0, z_0) op de z -as de volgende gelijkheden gelden:

$$x_0 + y_0 + z_0 = c_1$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = c_2$$

en natuurlijk ook:

$$x_0 = y_0 = 0.$$

Direct duidelijk is dan:

$$c_1 = z_0 \quad \text{en} \quad c_2 = z_0^2$$

De eis aan c_1 en c_2 is dus

$$c_1^2 = c_2$$

Voor de karakteristieken die het oppervlak samenstellen geldt dus:

$$x + y + z = c_1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$$

De vergelijking van het gezochte integraaloppervlak is dus:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2.$$

Het betreft dus de kegel met vergelijking:

$$xy + yz + zx = 0.$$

46 De warmtegeleidingsvergelijking voor een dunne homogene staaf

We beschouwen een dunne homogene metalen staaf met lengte l , gelegen langs de x -as (zie fig. 47). De temperatuur in een punt met x -coördinaat x daarvan ten tijde t zullen we voorstellen door $\Theta(x, t)$. We nemen aan dat de warmtestroom door een doorsnede loodrecht op de x -as evenredig is met het temperatuurverval $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ en dat de betrokken evenredigheidsconstante K is. Als we de warmtebalans opmaken voor een deel AB van de staaf gelegen tussen A met x -coördinaat x_0 en B met x -coördinaat $x_0 + \Delta x$, dan merken we op dat, als de warmtestroom in de richting van de negatieve x -as is, ten tijde t bij A „naar buiten” stroomt de hoeveelheid warmte $K \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_{x=x_0}$, en bij B „naar binnen” stroomt de hoeveelheid warmte $K \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_{x=x_0 + \Delta x}$.

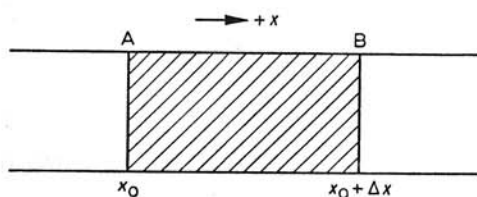


Fig. 47

Met behulp van de (geldig veronderstelde) Taylorontwikkeling kunnen we schrijven:

$$K \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_{x=x_0 + \Delta x} \approx K \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_{x=x_0} + K \Delta x \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right)_{x=x_0}$$

In een „korte” tijd Δt stroomt dus in AB naar binnen:

$$K \Delta x \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} \Delta t$$

Wanneer we de temperatuurstijging in AB bij „kleine” Δx voorstellen door: $\Theta(x_0, t_0 + \Delta t) - \Theta(x_0, t_0)$, dan geldt, indien σ de soortelijke warmte is:

$$\begin{aligned} K \Delta x \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} \Delta t &= \sigma \Delta x \{ \Theta(x_0, t_0 + \Delta t) - \Theta(x_0, t_0) \} \\ &\approx \sigma \Delta x \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)_{t=t_0} \Delta t \end{aligned}$$

Deling door $\Delta x \Delta t$ en limietovergang voor $\Delta t \rightarrow 0$ geeft:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{\sigma}{K} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

of, indien we de warmtegeleidingscoëfficiënt $p = \frac{K}{\sigma}$ invoeren:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (46.1)$$

Deze vergelijking die de *warmtegeleidingsvergelijking* genoemd wordt, is van het parabolische type.

We willen deze D.V. oplossen met een veel toegepaste methode, die de *methode van het scheiden van de veranderlijken* wordt genoemd.

We trachten daarbij particuliere oplossingen te vinden van de gedaante:

$$\Theta(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (46.2)$$

waarbij X een functie is van x alleen en T een functie van t alleen. We zullen zien dat daardoor de partiële D.V. wordt teruggebracht tot twee gewone differentiaalvergelijkingen. Substitueren we (46.2) in (46.1), dan krijgen we:

$$T(t) \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{p} X(x) \cdot \frac{dT}{dt}$$

of, na deling door $X(x)T(t)$ (uiteraard $\neq 0$):

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{pT(x)} \cdot \frac{dT}{dt} \quad (46.3)$$

In het linkerlid van (46.3) komt geen t voor, in het rechterlid geen x . Beide leden zijn aan elkaar gelijk voor elke x en t . Dit kan alleen indien *beide leden constant* zijn. Stellen we die constante c , dan krijgen we:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = cX(x) \quad (46.4)$$

$$\frac{dT}{dt} = cpT(t) \quad (46.5)$$

De vorm van de oplossing van (46.4) hangt af van het teken van c . Periodieke oplossingen waartoe we ons hier willen beperken, krijgen we dan en slechts dan indien c negatief is. Stellen we $c = -a^2$, dan is de oplossing van (46.4):

$$X(x) = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax \quad (46.6)$$

waarin c_1 en c_2 willekeurige constanten zijn.

Deze c_1 en c_2 kunnen vastgelegd worden door de z.g. *randvoorwaarden*. Wordt de temperatuur van de uiteinden $x = 0$ en $x = l$ van de staaf steeds gelijk aan nul gehouden, d.w.z. is voor $x = 0$ en $x = l$ en elke t voldaan aan $\Theta(x, t) = 0$, dan is $X(0) = 0$ en $X(l) = 0$. We vinden uit (46.6): $c_1 = 0$ en $\sin al = 0$, daar we uiteraard niet geïnteresseerd zijn in oplossingen die identiek nul zijn. Hieruit volgt:

$$al = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Er is dus een discrete rij van waarden a nl.:

$$a = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

waarvoor de vergelijking (46.4) een oplossing heeft. Deze oplossingen zijn:

$$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (46.7)$$

Zoals we uit (46.7) zien, worden er geen nieuwe oplossingen verkregen als $n = -1, -2, -3, \dots$

Substitueren we $c = -a^2 = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ in (46.5), dan krijgen we de gewone D.V.:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{n^2\pi^2 p}{l^2} \cdot T(t)$$

met als oplossing:

$$T(t) = c_3 e^{-\frac{n^2\pi^2 p}{l^2} t}$$

Een oplossing van (46.1) luidt dus wegens (46.2):

$$\Theta(x, t) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2 p}{l^2} t} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (46.8)$$

Al de functies van deze gedaante zijn oplossingen van de D.V. en voldoen aan de gegeven randvoorwaarden die $\Theta(0, t)$ en $\Theta(l, t)$ vastlegden.

We zien eenvoudig in dat elke lineaire combinatie van oplossingen (46.8) ook een oplossing is van de D.V. (46.1).

Vaak zijn we geïnteresseerd in een oplossing die ook nog aan een bepaalde *beginvoorwaarde* voldoet. B.v. een die de temperatuurverdeling ten tijde $t = 0$ voor alle punten van de staaf vastlegt; d.w.z. we vragen naar een oplossing die voldoet aan:

$$\Theta(x, 0) = f(x)$$

waarin f een gegeven functie is. Wanneer we deze oplossing zouden willen verkrijgen als een eindige lineaire combinatie van de in (46.8) genoemde oplossingen, dan zou moeten gelden:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

voor zekere $N \in \mathbb{N}$.

Het is duidelijk dat hieraan niet voldaan kan worden door een willekeurige functie f , hetgeen al direct blijkt uit het feit dat het rechterlid een periodieke functie is. Vaak proberen we dan in plaats van een eindige lineaire combinatie van functies van de

gedaante als in (46.8) een oneindige reeks van zulke functies:

$$\Theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2 p}{l^2} t}$$

Onder bepaalde voorwaarden van convergentie en differentieerbaarheid (waarop we hier niet ingaan) zal deze reeks aan (46.1) met de randvoorwaarden voldoen. Om aan de beginvoorwaarde: $\Theta(x, 0) = f(x)$ te voldoen trachten we de coëfficiënten A_n zodanig te bepalen dat de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

convergeert en dat voor de som daarvan geldt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (46.9)$$

Het onderzoek naar de voorwaarden waaraan f moet voldoen opdat de A_n zó bepaald kunnen worden dat aan (46.9) voldaan is en de bepaling van die A_n , wordt uitgevoerd in de theorie van de Fourierreeksen*. In par. 47 zullen we aan de hand van een voorbeeld iets meer hierover zeggen.

47 De vergelijking van de trillende snaar

Een voorbeeld van een partiële D.V. van het hyperbolische type wordt geleverd door die van de trillende snaar. Stel dat een snaar is gespannen tussen twee vaste punten van de x -as en dan in trilling wordt gebracht op zodanige wijze dat de deeltjes zich bewegen in het x, y -vlak en wel loodrecht op de x -as (transversale trilling). Verder veronderstellen we dat er geen uitwendige krachten op de snaar werken (dus ook geen zwaartekracht), dat de snaar homogeen is (d.w.z. de massadichtheid σ per lengte-eenheid is constant) en dat de uitwijkingen van de punten van de snaar zo klein zijn dat de spanning S van de snaar als constant mag worden beschouwd. We vragen nu naar de uitwijking $U(x, t)$ ten tijde t van een punt met x -coördinaat x , en beschouwen daartoe een deeltje van de snaar tussen de punten met x -coördinaten x en $x + \Delta x$ ten tijde t (zie fig. 48).

We merken op dat, aangezien er geen beweging in de x -richting ondersteld is, voor de horizontale component van de spanning S geldt:

$$H_1 = H_2 = H \quad (\text{constant}) \quad (47.1)$$

* J. B. J. Fourier, 1768-1830.

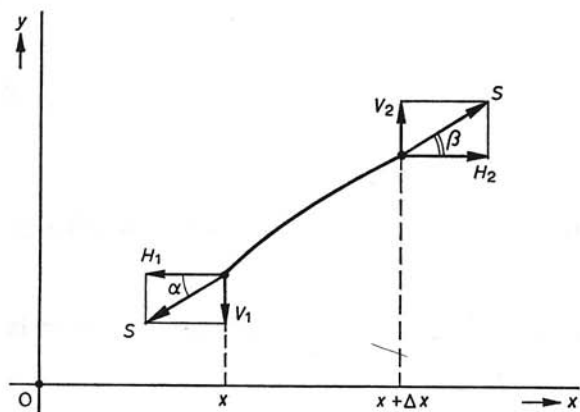


Fig. 48

Wanneer we de kracht in de y -richting op een punt met x -coördinaat x ten tijde t voorstellen door $V(x, t)$, dan geldt volgens de wet van Newton ($F = m \cdot a$):

$$V(x + \Delta x, t) - V(x, t) \approx \sigma \Delta x \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (47.2)$$

Bij vaste t is echter:

$$V(x + \Delta x, t) \approx V(x, t) + \Delta x \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \quad (47.3)$$

Ook geldt (zie fig. 48) bij vaste t :

$$\frac{V_1}{H_1} = \tan \alpha = \frac{\partial U}{\partial x}$$

dus op grond van (47.1):

$$V(x, t) = H \cdot \frac{\partial U}{\partial x}$$

zodat:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = H \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (47.4)$$

Uit (47.2), (47.3) en (47.4) volgt:

$$\Delta x \cdot H \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \sigma \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Hieruit volgt door limietovergang $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (47.5)$$

waarin a^2 de positieve constante $\frac{H}{\sigma}$ is.

(44.5) stelt een hyperbolische partiële D.V. voor; het is de *ééndimensionale golfvergelijking*.

Voor het bepalen van oplossingen passen we de methode van separatie van variabelen toe. We stellen daartoe:

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Substitutie in (47.5) geeft:

$$X(x) \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T(t) \cdot \frac{d^2 X}{dx^2}$$

of:

$$\frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{a^2}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Daar het linkerlid onafhankelijk is van x , het rechterlid onafhankelijk is van t en beide aan elkaar gelijk zijn voor alle x en t , zijn beide leden constant, zeg k , zodat we hebben:

$$\frac{a^2}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = k$$

$$\frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = k$$

Dit betekent dat X en T voldoen aan de gewone D.V.-en:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{k}{a^2} X(x) = 0 \quad (47.6)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - kT(t) = 0 \quad (47.7)$$

We kunnen nu drie gevallen onderscheiden:

Geval a: $k = 0$

Als algemene oplossingen van (47.6) en (47.7) vinden we resp.:

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

$$T(t) = c_3 x + c_4$$

Dus:

$$U(x, t) = X(x)T(t) = (c_1x + c_2)(c_3t + c_4)$$

De uitwijkingen $U(x, t)$ van de deeltjes (x, t) nemen bij toenemende t onbegrensd toe. De snaar zal dan gaan „springen”. Dit levert geen oplossing die ons interesseert.

Geval b: $k > 0$

Stellen we $k = b^2$, dan vinden we als algemene oplossingen van (47.6) en (47.7) resp.:

$$X(x) = c_1 e^{\frac{b}{a}x} + c_2 e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$T(t) = c_3 e^{bt} + c_4 e^{-bt}$$

Dus:

$$U(x, t) = (c_1 e^{\frac{b}{a}x} + c_2 e^{-\frac{b}{a}x})(c_3 e^{bt} + c_4 e^{-bt})$$

Om dezelfde reden als in geval a is deze oplossing voor de praktijk niet interessant.

Geval c: $k < 0$

We stellen nu $k = -b^2$. We vinden dan als algemene (periodieke) oplossingen van (47.6) en (47.7):

$$X(x) = c_1 \cos \frac{b}{a}x + c_2 \sin \frac{b}{a}x \quad (47.8)$$

$$T(t) = c_3 \cos bt + c_4 \sin bt$$

Dus:

$$U(x, t) = \left(c_1 \cos \frac{b}{a}x + c_2 \sin \frac{b}{a}x \right) (c_3 \cos bt + c_4 \sin bt) \quad (47.9)$$

Het is duidelijk dat U nog moet voldoen aan bepaalde *randvoorwaarden* en bepaalde *beginvoorwaarden*.

De randvoorwaarden zijn daardoor vastgelegd dat de snaar op twee punten (nl. $x = 0$ en $x = l$) is ingeklemd en daar op ieder tijdstip in rust is. M.a.w.:

$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \quad (\forall t)$$

Met (47.9) volgt dan:

$$0 = c_1 T(t) \quad (\forall t)$$

Dus $c_1 = 0$ en $X(x) = c_2 \sin \frac{b}{a}x$.

Verder volgt dan uit (47.9):

$$0 = c_2 \sin \frac{bl}{a} \cdot T(t) \quad (\forall t)$$

en dus:

$$\frac{bl}{a} = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Voor b komt dus alleen in aanmerking:

$$b = \frac{n\pi a}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Dit betekent dat X bepaald is door:

$$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Bij iedere gehele n vinden we een oplossing die aan (47.5) voldoet en aan de gestelde randvoorwaarden:

$$U_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (47.10)$$

De constante c_2 is daarbij verwerkt in A_n en B_n .

We moeten nu nog zorgen dat we oplossingen van bovenstaande gedaante krijgen die aan zekere beginvoorwaarden voldoen. Deze hangen af van de wijze waarop we de snaar in trilling brengen. Dit kan b.v. geschieden door „tokkelen”, d.w.z. we geven de snaar een zekere beginstand die beschreven wordt door $f(x)$. We laten dan de snaar los, zonder aan de deeltjes een beginsnelheid mee te geven. De beginvoorwaarden luiden in dit geval:

$$\left. \begin{aligned} U(x, 0) &= f(x) \\ \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (47.11)$$

We kunnen de snaar echter ook „aanstrijken”, zodat ieder deeltje een beginsnelheid ($\neq 0$) krijgt, beschreven door $v(x)$. De beginvoorwaarden luiden dan:

$$\left. \begin{aligned} U(x, 0) &= f(x) \\ \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t=0} &= v(x) \end{aligned} \right\}$$

We zullen dit laatste geval behandelen in par. 48.

We beperken ons hier tot het eerste geval, dus met voorwaarden (47.11).

Met behulp van een Fourierreeks willen we een oplossing van de D.V. vinden die voldoet aan (47.11). In plaats van een eindige lineaire combinatie van functies U_1, U_2, \dots van de gedaante als in (47.10) proberen we een oneindige reeks van zulke functies:

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Onder bepaalde voorwaarden van convergentie en differentieerbaarheid, waarop we ook hier niet ingaan, zal deze reeks aan de D.V. (47.5) met de randvoorwaarden voldoen. Dus:

$$f(x) = U(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (47.12)$$

$$0 = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t=0} = \frac{n\pi a}{l} \cdot B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (\forall x) \quad (47.13)$$

We namen hierbij aan dat de reeks termgewijze gedifferentieerd mag worden. Uit (47.13) volgt direct dat $B_n = 0$, zodat de som $U(x, t)$ de gedaante krijgt:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (47.14)$$

daar $n = 0$ geen bijdrage levert.

Teneinde in de rest van deze paragraaf de berekeningen iets overzichtelijker te maken, stellen we de lengte van de snaar op π , hetgeen op het principe van deze methode geen invloed heeft.

(47.14) gaat dan over in:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nat \sin nx$$

Er moet nog voldaan worden aan de beginvoorwaarde (47.12), m.a.w.:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \quad (x \in [0, \pi]) \quad (47.15)$$

We passen de Fouriemethode toe om de coëfficiënten A_n te berekenen. Allereerst zetten we de functie f die gedefinieerd is op $[0, \pi]$ voort tot een voor alle x gedefinieerde oneven functie F met periode 2π (zie fig. 49), door te definiëren:

$$F(x) = f(x) \quad (x \in [0, \pi])$$

$$F(x) = -f(-x) \quad (x \in [-\pi, 0])$$

$$F(x + 2\pi) = F(x)$$

N.B. Uit de aard van het vraagstuk volgt: $f(0) = f(\pi) = 0$.

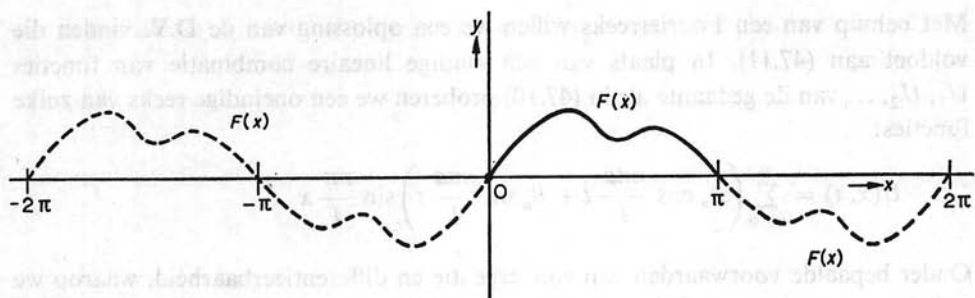


Fig. 49

We stellen als eis A_n zo te bepalen dat

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (47.16)$$

We vermenigvuldigen nu rechter- en linkerlid van (47.16) met $\sin mx$, waarbij m een vast positief geheel getal is.

Daardoor gaat (47.16) over in:

$$F(x) \sin mx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \sin mx \quad (47.17)$$

Vervolgens integreren we beide leden van (47.17) tussen $-\pi$ en π . We maken daarbij – zonder bewijs – gebruik van de eigenschap dat hier sommatie en integratie verwisseld mogen worden. Hierdoor gaat (47.17) over in:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin mx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \quad (47.18)$$

We kunnen nu eenvoudig nagaan dat

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= 0 \text{ als } m \neq n \\ &= \pi \text{ als } m = n \\ &(m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \right\} \quad (47.19)$$

Immers:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{-\cos(m+n)x + \cos(n-m)x\} \, dx$$

hetgeen voor het geval $m = n \neq 0$ zich reduceert tot:

$$-\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = -\frac{1}{4n} \sin 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

terwijl voor het geval $m \neq n$ dit te herleiden is tot:

$$\left[-\frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + \frac{1}{2(n-m)} \sin(n-m)x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Toepassing van (47.19) op (47.18) geeft:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx$$

Nu geldt volgens de definitie van $F(x)$:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -f(-x) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Substitueren we $x = -u$, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 -f(u) \sin(-nu)(-du) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

zodat:

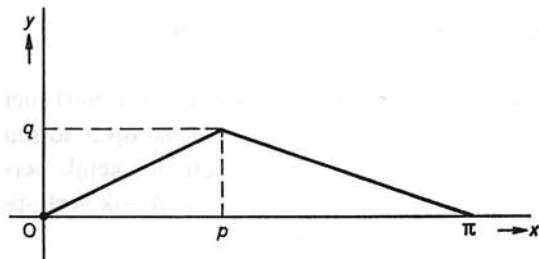
$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (47.20)$$

de gevraagde coëfficiënten uit (47.15) voorstellen. Hieruit kunnen we A_n berekenen en het probleem oplossen.

De coëfficiënten A_n heten de *Fouriercoëfficiënten*.

Ter illustratie geven we een concreet voorbeeld van zo'n berekening. We kiezen daarbij $f(x)$ als volgt (zie fig. 50):

Fig. 50



$$f(x) = \frac{q}{p} x \quad (0 \leq x \leq p < \pi)$$

$$f(x) = \frac{q}{\pi - p} (\pi - x) \quad (p \leq x \leq \pi)$$

Volgens (47.20) zijn de Fouriercoëfficiënten:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^p \frac{q}{p} x \sin nx \, dx + \int_p^\pi \frac{q}{\pi - p} (\pi - x) \sin nx \, dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{q}{pn} x \cos nx \Big|_0^p + \frac{q}{pn} \int_0^p \cos nx \, dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{q(\pi - x)}{(\pi - p)n} \cos nx \Big|_p^\pi - \frac{q}{(\pi - p)n} \int_p^\pi \cos nx \, dx \right\} \\ &= -\frac{2q}{\pi n} \cos np + \frac{2q}{\pi p n^2} \sin nx \Big|_0^p + \frac{2q}{\pi n} \cos np - \frac{2q}{\pi(\pi - p)n^2} \sin nx \Big|_p^\pi \\ &= \frac{2q}{\pi p n^2} \sin np + \frac{2q}{\pi(\pi - p)n^2} \sin np \\ &= \frac{2q \sin np}{n^2 p(\pi - p)} \end{aligned}$$

Deze waarden van A_n , ingevuld in (47.14) geven bij deze keuze van $f(x)$ als oplossing van de D.V. (47.5) met beginvoorwaarden (47.11) en randvoorwaarden: $U(0, t) = U(\pi, t) = 0$:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q \sin np}{n^2 p(\pi - p)} \cos nat \sin nx$$

48 De oplossing volgens d'Alembert van de golfvergelijking

De partiële D.V.-en die we in de par. 46 en 47 hebben behandeld, zijn opgelost met behulp van de methode van separatie van variabelen. Daarbij wordt de op te lossen functie geschreven als produkt van twee functies, elk van één onafhankelijk veranderlijke. Dit zijn echter niet de enige oplossingen van de D.V. Er zijn ook veel oplossingen die niet op deze wijze kunnen worden beschreven.

Als voorbeeld zullen we weer de golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (48.1)$$

behandelen. We zullen deze op geheel andere wijze oplossen, zoals door d'Alembert is aangegeven.

We voeren nieuwe variabelen v en z in, die met x en t samenhangen als:

$$v = V(x, t) = x + at$$

$$z = Z(x, t) = x - at$$

Hierdoor gaat de D.V. voor $U(x, t)$ over in een D.V. voor $U^*(v, z)$, die we als volgt vinden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial U^*}{\partial v} + \frac{\partial U^*}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U^*}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z \partial v} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial v \partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 U^*}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 U^*}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (48.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial U^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t} = a \left(\frac{\partial U^*}{\partial v} - \frac{\partial U^*}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= a \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z \partial v} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial^2 U^*}{\partial v \partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \\ &= a^2 \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 U^*}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (48.3)$$

Substitutie van (48.2) en (48.3) in (48.1) geeft:

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial z \partial v} = 0$$

Dit betekent dat $\frac{\partial U^*}{\partial v}$ geen z mag bevatten, daar $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U^*}{\partial v} \right) = 0$.
Dan is dus:

$$\frac{\partial U^*}{\partial v} = F^*(v)$$

waarin F^* een willekeurige functie is van v . Verder is dan:

$$U^*(v, z) = F(v) + G(z)$$

Hierin zijn F en G ook willekeurige functies van z . Vullen we v en z in, dan krijgen we:

$$U^*(v, z) = F(x + at) + G(x - at)$$

of anders geschreven:

$$U(x, t) = F(x + at) + G(x - at) \quad (48.4)$$

Opmerking 1:

Het is duidelijk dat we, achteraf, ook door directe substitutie in (48.1) kunnen zien, dat zowel $F(x + at)$ als $G(x - at)$ oplossingen zijn van de D.V. (48.1). Dit geldt ook voor elke lineaire combinatie hiervan:

$$c_1 F(x + at) + c_2 G(x - at)$$

met willekeurige constanten c_1 en c_2 .

Opmerking 2:

De vorm van oplossing (48.4) van de golf- of snaarvergelijking (48.1) is nuttig om de fysische betekenis van de parameter a te vinden. (48.4) stelt in wezen twee golven voor in tegengestelde richtingen langs de snaar elk met constante snelheid a . Immers, voor $t = 0$ bepaalt $F(x + at)$ de kromme: $y = F(x)$ en op een later tijdstip $t = t_1$ de kromme: $y = F(x + at_1)$. Maar deze krommen zijn identiek, behalve dat de laatste een translatie naar links heeft ondergaan over een afstand at_1 . De golf beweegt zich dus zonder vervorming langs de snaar over een afstand at_1 met snelheid a in t_1 sec. Zo stelt ook $G(x - at)$ een golf voor die naar rechts langs de snaar beweegt met constante snelheid a . De totale uitwijking $U(x, t)$ van de snaar is de som van deze lopende golven.

Opmerking 3:

Kiezen we voor F en G de functies bepaald door:

$$F(u) = G(u) = \sin nu \quad (n \in \mathbb{N})$$

dan geeft (48.4):

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \sin n(x + at) + \sin n(x - at) \\ &= 2 \sin nx \cos nat \end{aligned} \quad (48.5)$$

Kiezen we: $F(u) = \cos nu$ en $G(u) = -\cos nu$, dan levert (48.4):

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \cos n(x + at) - \cos n(x - at) \\ &= -2 \sin nx \sin at \end{aligned} \quad (48.6)$$

Lineaire combinatie van de oplossingen (48.5) en (48.6) (die ook oplossingen geven), geeft de oplossing (47.10) die we in par. 47 (met $l = \pi$) van de snaar gevonden hebben met de methode van separatie van variabelen. Voor de snaar ligt deze laatstgenoemde methode meer voor de hand.

Tenslotte zullen we als toepassing van de methode van d'Alembert het probleem van het „aanstrijken” van de snaar behandelen (zie par. 47).

Daarbij zoeken we oplossingen van de D.V. (48.1), met de beginvoorwaarden:

$$U(x, 0) = f(x); \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = v(x)$$

Om F en G uit (48.4) te bepalen, hebben we de voorwaarden:

$$U(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x) \quad (48.7)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = a\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=0} - a\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{t=0} = v(x) \quad (48.8)$$

Na deling van (48.8) door a en integratie, vinden we:

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x v(s) ds$$

waarin x_0 willekeurig is gekozen.

Hieruit en uit (48.7) volgt dan:

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\{ f(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x v(s) ds \right\}$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left\{ f(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x v(s) ds \right\}$$

zodat wegens (48.4):

$$U(x, t) = \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} v(s) ds + \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} v(s) ds$$

of:

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \{ f(x + at) + f(x - at) \} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v(s) ds$$

49 De vergelijking van Laplace

In deel 2, par. 23 is de operator van Laplace, werkend op een functie F van drie variabelen in rechthoekige coördinaten x , y en z , gedefinieerd als:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Analoog definiëren we in het geval dat F een functie is van de twee variabelen x en y in rechthoekige coördinaten:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

en, indien F een functie van één variabele x :

$$\nabla^2 F = \frac{d^2 F}{dx^2}$$

De vergelijking: $\nabla^2 F = 0$ noemen we de *vergelijking van Laplace*. Deze luidt dus:

driedimensionaal:
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

tweedimensionaal:
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \text{ (elliptisch type)}$$

ééndimensionaal:
$$\frac{d^2 F}{dx^2} = 0$$

Wanneer we in het tweedimensionale geval poolcoördinaten invoeren:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

dan gaat F over in een functie V van ρ en φ , aldus:

$$F = F\{\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi\} = V(\rho, \varphi)$$

We kunnen eenvoudig bewijzen (zie deel 2, par. 6):

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} \quad (49.1)$$

Voeren we in het driedimensionale geval cilindercoördinaten in:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

waarbij $F(x, y, z)$ overgaat in $V(\rho, \varphi, z)$, dan is het duidelijk op grond van (49.1), dat van $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ het deel $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ overgaat in $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho}$, terwijl $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, daar z in $F(x, y, z)$ en $V(\rho, \varphi, z)$ op dezelfde wijze voorkomt.

We vinden dus voor de *operator van Laplace in cilindercoördinaten*:

$$\nabla^2 F = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} \quad (49.2)$$

Voeren we in het driedimensionale geval bolcoördinaten in:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (49.3)$$

waarbij $F(x, y, z)$ overgaat in $W(r, \varphi, \theta)$, dan vergt de berekening van $\nabla^2 F$ meer moeite. We doen dit in twee stappen.

We stellen voorlopig: $r \sin \theta = p$, waardoor de transformatieformules (49.3) overgaan in:

$$x = p \cos \varphi$$

$$y = p \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

De eerste stap bestaat daarin dat we in $F(x, y, z)$ de variabelen x en y resp. vervangen door $p \cos \varphi$ en $p \sin \varphi$, terwijl we z onveranderd laten. Hierdoor gaat $F(x, y, z)$ over in $G(p, \varphi, z)$. We kunnen formule (49.2) toepassen, en zien dan:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial G}{\partial p} \quad (49.4)$$

De tweede stap is dat we r en θ invoeren, door te stellen:

$$\left. \begin{aligned} p &= r \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (49.5)$$

waardoor $G(p, \varphi, z)$ overgaat in $W(r, \varphi, \theta)$.

Wanneer we $G(p, \varphi, z)$ beschouwen als afhankelijk van de twee variabelen p en z (φ is al de uiteindelijk bedoelde variabele), dan lijkt (49.5) op het invoeren van poolcoördinaten in een functie van twee variabelen. Om de analogie volledig te maken stellen we: $\theta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, waardoor (49.5) overgaat in:

$$\left. \begin{aligned} p &= r \cos \alpha \\ z &= r \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (49.6)$$

We kunnen nu op grond van de formele gelijkheid met (49.1) terstond concluderen dat voor de middelste twee termen in het laatste lid van (49.4) geldt:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G^*}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G^*}{\partial r} \quad (49.7)$$

waarin:

$$G(r \cos \alpha, \varphi, r \sin \alpha) = G^*(r, \varphi, \alpha)$$

Daar echter $\theta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ en dus $G^*(r, \varphi, \frac{1}{2}\pi - \theta) = W(r, \varphi, \theta)$, geldt:

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial G^*}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 G^*}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}$$

Uit (49.4) en (49.7) volgt dus:

$$\nabla^2 F = \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \quad (49.8)$$

Hierin moet nog p vervangen worden in de eerste twee termen in het rechterlid van (49.8). Direct duidelijk is:

$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \quad (49.9)$$

De term $\frac{1}{p} \frac{\partial G}{\partial p}$ levert iets meer moeilijkheid op.

We merken op dat door de substitutie

$$p = r \sin \theta = p^*(r, \theta)$$

$$z = r \cos \theta = z^*(r, \theta)$$

$G(p, \varphi, z)$ overgaat in $W(r, \varphi, \theta)$.

Er geldt dus:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial G}{\partial p} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial r} = \frac{\partial G}{\partial p} \sin \theta + \frac{\partial G}{\partial z} \cos \theta$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial G}{\partial p} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial \theta} = \frac{\partial G}{\partial p} r \cos \theta - \frac{\partial G}{\partial z} r \sin \theta$$

Uit deze twee vergelijkingen lossen we op:

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{r \sin \theta \frac{\partial W}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial W}{\partial \theta}}{r} \quad (49.10)$$

Substitutie van (49.9) en (49.10) in (49.8) geeft als resultaat dat de operator van Laplace in bolcoördinaten luidt:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (49.11)$$

**50 De oplossing van de vergelijking van Laplace in cilindercoördinaten.
De vergelijking van Bessel**

Zoals uit (49.2) volgt, luidt de *vergelijking van Laplace in cilindercoördinaten*:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \quad (50.1)$$

Voor het oplossen van (50.1) passen we weer de methode van separatie van variabelen toe. We trachten particuliere oplossingen van de gedaante:

$$V(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z) \quad (50.2)$$

te vinden, waarin R , Φ , Z functies zijn van uitsluitend resp. ρ , φ en z . Na substitutie van (50.2) in (50.1) volgt:

$$\frac{R(\rho)Z(z)}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \Phi(\varphi)Z(z) \frac{d^2 R}{d\rho^2} + R(\rho)\Phi(\varphi) \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\Phi(\varphi)Z(z)}{\rho} \frac{dR}{d\rho} = 0$$

of, na deling door $R(\rho)Z(z)\Phi(\varphi)$:

$$\frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{R(\rho)} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{dR}{d\rho} = - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (50.3)$$

Daar het linkerlid van (50.3) geen z bevat en het rechterlid geen ρ en geen φ en beide leden aan elkaar gelijk zijn voor alle ρ , φ en z , moeten beide leden constant zijn, b.v. gelijk aan constante k . We hebben dus:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + kZ(z) = 0 \quad (50.4)$$

We beperken ons tot die oplossingen, waarbij k negatief is, b.v. $k = -a^2$. De algemene oplossing van (50.4) luidt dan:

$$Z(z) = c_1 e^{az} + c_2 e^{-az}$$

met willekeurige constanten c_1 en c_2 .

Uit (50.3) volgt:

$$\frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{R(\rho)} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{dR}{d\rho} = -a^2$$

of:

$$- \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \frac{\rho^2}{R(\rho)} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{dR}{d\rho} + a^2 \rho^2 \quad (50.5)$$

Ook hier zien we dat linker- en rechterlid constant zijn. Indien we eisen dat Φ een periodieke functie in φ is, dan moet de constante positief zijn, b.v. m^2 . Dus:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

met als algemene oplossing:

$$\Phi(\varphi) = c_3 \cos m\varphi + c_4 \sin m\varphi$$

met willekeurige constanten c_3 en c_4 .

Uit vergelijking (50.5) volgt dan in dit geval:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + a^2 \rho^2 R(\rho) = m^2 R(\rho)$$

Indien we stellen: $x = a\rho$ waardoor R overgaat in een functie R^* van x , krijgen we:

$$x^2 \frac{d^2 R^*}{dx^2} + x \frac{dR^*}{dx} + (x^2 - m^2)R^*(x) = 0$$

Dit is de *vergelijking van Bessel*, die we in par. 26 hebben behandeld. Stellen we de oplossing van deze vergelijking voor door $J_m(x)$ (Besselfuncties van de orde m), dan vinden we op deze wijze oplossingen van de vergelijking van Laplace (in cilindercoördinaten), die lineaire combinaties zijn van uitdrukkingen van de volgende gedaante:

$$e^{az} J_m(a\rho) \cos m\varphi, e^{az} J_m(a\rho) \sin m\varphi$$

$$e^{-az} J_m(a\rho) \cos m\varphi, e^{-az} J_m(a\rho) \sin m\varphi$$

51 De oplossing van de vergelijking van Laplace in bolcoördinaten. De toegevoegde vergelijking van Legendre

Zoals uit (49.11) volgt luidt de *vergelijking van Laplace in bolcoördinaten*:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \quad (51.1)$$

Ook nu proberen we particuliere oplossingen te vinden door te stellen:

$$W(r, \varphi, \theta) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot \Theta(\theta) \quad (51.2)$$

waarin R , Φ en Θ functies zijn van resp. r , φ en θ alleen. De substitutie van (51.2) in (51.1) levert:

$$\Phi(\varphi)\Theta(\theta) \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{R(r)\Theta(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{R(r)\Phi(\varphi)}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

$$+ \frac{2\Phi(\varphi)\Theta(\theta)}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{\cot \theta R(r)\Phi(\varphi)}{r^2} \frac{d\Theta}{d\theta} = 0$$

Na deling door $\frac{R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta)}{r^2}$ krijgen we:

$$\frac{1}{R(r)} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta)} \left(\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi) \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0 \quad (51.3)$$

Door de term: $\frac{1}{R(r)} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} \right)$ in (51.3) naar het rechterlid te brengen, zien we met de bekende redenering, dat deze term een constante moet zijn. Indien we deze constante $-c$ noemen, ontstaat:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + cR(r) = 0 \quad (51.4)$$

Dit is een gewone D.V. van Euler (zie par. 14). We stellen: $r = e^u$, waardoor R overgaat in een functie R^* van u , die voldoet aan:

$$\frac{d^2 R^*}{du^2} + \frac{dR^*}{du} + cR^*(u) = 0 \quad (51.5)$$

De karakteristieke vergelijking van deze D.V. met constante coëfficiënten is:

$$t^2 + t + c = 0$$

We noemen de wortels van deze vergelijking m en $-(m+1)$ (de som van de wortels is nl. -1). De oplossing van (51.5) is:

$$R^*(u) = c_1 e^{mu} + c_2 e^{-(m+1)u}$$

De oplossing van (51.4) is derhalve:

$$R(r) = c_1 r^m + c_2 r^{-m-1}$$

Daar $c = -m(m+1)$, volgt uit (51.3):

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \left(\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi) \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m(m+1) = 0$$

of:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \left(\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \sin^2 \theta + m(m+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

Stellen we de eis dat Φ periodiek moet zijn in φ , dan kunnen we beide leden gelijk stellen aan n^2 , zodat:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi(\varphi) = 0$$

met als oplossing:

$$\Phi(\varphi) = c_3 \cos n\varphi + c_4 \sin n\varphi$$

De vergelijking voor Θ wordt dan:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left\{ m(m+1) - \frac{n^2}{\sin^2\theta} \right\} \Theta(\theta) = 0$$

Door de substitutie: $x = \cos\theta$ gaat Θ over in een functie Θ^* van x die voldoet aan:

$$(1-x^2) \frac{d^2\Theta^*}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta^*}{dx} + \left\{ m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2} \right\} \Theta^*(x) = 0 \quad (51.6)$$

Deze vergelijking staat bekend als de *toegevoegde vergelijking van Legendre*.

Geven we de oplossingen van deze vergelijking aan met $P_m^n(x)$, dan vinden we op deze wijze als oplossingen van de vergelijking (51.1) van Laplace in bolcoördinaten lineaire combinaties van uitdrukkingen van de gedaante:

$$P_m^n(\cos\theta)r^m \cos n\varphi, P_m^n(\cos\theta)r^m \sin n\varphi$$

$$P_m^n(\cos\theta)r^{-1-m} \cos n\varphi, P_m^n(\cos\theta)r^{-1-m} \sin n\varphi$$

Er zijn vele problemen waarbij de oplossingen van (51.1) gevraagd worden die onafhankelijk moeten zijn van φ . In deze gevallen moet $n = 0$ zijn. De vergelijking (51.6) gaat dan over in:

$$(1-x^2) \frac{d^2\Theta^*}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta^*}{dx} + m(m+1)\Theta^*(x) = 0$$

Dit is de *D.V. van Legendre*, die we reeds in par. 25 ontmoet hebben.

Register

- aanstrijken 252, 259
- afbreekfout 222
- algemene oplossing (integraal) 13
- amplitude 92
- amplitudo 102

- beginvoorwaarden 13, 247, 251
- Besselfunctie 153
 - , van de eerste soort en orde m 153
 - , van de eerste soort en orde nul 153
 - , van de orde m 264
 - , van de tweede soort en orde nul 154
- bij gedeelten continu 192
- bolcoördinaten 261

- capaciteit 104
- catenaria 17
- cilindercoördinaten 260
- cirkelfrequentie 92
- confocale parabolen 126
- convolutie 211
- convolutieproduct 211
- convolutieproduct van twee functies 212
- corrector 222, 223

- d'Alembert 256, 257
- dempingskracht 96
- dempingsstelling 199
- determinant van Wronski 70, 73
- differentiaaloperator 67
- differentiaalvergelijking
 - , exacte 33, 50
 - , gewone 11
 - , graad van een 13, 231
 - , homogene 41, 75
 - , integraal van de 12
 - , inhomogene lineaire 87
 - , integreren van de 11
 - , lineaire 13, 33
 - , lineaire partiële 231
 - , lineaire, van de eerste orde 57
 - , lineaire, van de n -de orde 66
 - , oplossing van de (gewone) 11
 - , oplossing van een partiële 230
 - , orde van een 12
 - , orde van een partiële 231
 - , partiële 14, 230
 - , partiële, van de eerste orde 232
 - , quasi-lineaire 231
 - , quasi-lineaire partiële 238, 241, 242
- differentiaalvergelijking van Bernoulli 33, 57, 66
- differentiaalvergelijking van Bessel 145, 150
- differentiaalvergelijking van Euler 84, 265
- differentiaalvergelijking van Legendre 141, 143, 266

- differentiaalvergelijking voor de orthogonale trajectoriën 123
- D-operator 168

- ééndimensionale golfvergelijking 250
- elektrische keten 64
- elektrische keten met generator 104
- elliptisch type 232, 260
- exacte differentiaal 52
- existentiebewijs 25, 28
- existentiestelling 28, 29, 68, 158, 163

- fasehoek 92
- Fouriercoëfficiënten 255, 256
- Fouriermethode 253
- Fourierreksen 248, 253
- fundamenteelsysteem 83
- fundamenteel stelsel 75

- gedempte trilling 93, 96
- gedwongen trilling 91, 98
- gegeneraliseerde machtreeks 145
- gelijkvormigheidsstelling 197
- generator 104
- gereduceerd 57
- gescheiden veranderlijken 33
- gewoon punt 138
- golfvergelijking 258

- harmonische trilling 92
- homogeen 57, 231
- homogeen van de graad n 41
- homogène lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten 79
- homogene lineaire differentiaalvergelijking van Euler 84
- hyperbolisch type 232, 248

- impedantie 65
- indexvergelijking 148, 149, 151
- inductieve reactantie 65
- inhomogeen 231
- integraalkromme 12
- integraaloppervlak 239, 240, 241
- integraal van Poisson 217
- integraalvergelijking 25
- integrerende factor 50, 55
- irregulier-singulier 139, 140
- isoklinen 20, 21

- karakteristiek 239, 240
- karakteristieke krommen 239
- karakteristieke vergelijking 80
- kenmerk van d'Alembert 132
- kettinglijn 17

- Kirchhoff 97
 —, tweede wet van 97
 knooppunt 184
 —, oneigenlijk 185, 186, 188
 kortsluitstroom 65
 kritische demping 96
 krommen van Cassini 129
 kwaliteitsfactor 103
- Lagrange 60
 Laplace-getransformeerde 191
 Laplace-transformatie 191
 —, inverse 203
 Laplace-transformatie van afgeleiden 199
 lemniscaat van Bernoulli 129
 lineair 231
 lineair afhankelijk 70
 lineaire afhankelijkheid van functies 70
 lineaire combinatie 75
 lineaire operator 68, 196
 lineaire stelsels 163
 —, homogeen 163
 —, inhomogeen 163
 —, met constante coëfficiënten 163, 173
 lineair afhankelijk 70, 76
 lineair onafhankelijke oplossingen 75
 lineair onafhankelijke oplossingsvectoren 164
 lijnelement 20
 lijnelementenveld 20
- machtreeksen 131
 mathematische slinger 16
 methode van Bernoulli 63, 135
 methode van d'Alembert 259
 methode van Euler 219, 221
 methode van Heun 221
 methode van Lagrange 59
 methode van variatie van constanten 59, 107
- niet-lineair 231
 numerieke methoden 219
- operator van Laplace 259
 operator van Laplace in bolcoördinaten 262
 opgelegde trilling 99, 101
 oplossingskromme 12, 239
 oplossingsruimte 165
 oplossingsvector 164
 oplossing volgens d'Alembert 256
 ordeverlaging 113
 orthogonale trajectoriën 121, 122, 124, 128
- parabolisch type 232
 particuliere oplossing 13, 57, 69, 88, 238
 polynomen van Legendre 145
 poolcoördinaten 260
 predictor 221, 223
 probleem van Cauchy 242
 procesfout 222
- quasi-lineair 231
- randvoorwaarden 13, 247, 251
 regel van Simpson 229
 regulier-singulier 139, 140
 resonantie 99
 richtingsveld 20
 Runge-Kutta 229
- scheiden van de veranderlijken 34, 246
 scheiding van de variabelen *zie scheiding van de veranderlijken*
 separatie van variabelen *zie scheiding van de veranderlijken*
 singuliere oplossingen 13
 singulier punt 138, 140
 snaarvergelijking 258
 spiraalpunt 189
 stabiel rekenproces 223
 stapgrootte 220
 stelling van Lerch 203
 stelsel met constante coëfficiënten 171
 stelsel simultane differentiaalvergelijkingen 155
 successieve benaderingen 26
- Taylorreeks 45
 toegevoegde vergelijking van Legendre 264
 tokkelen 252
 trapeziumregel 222
 —, verbeterde 224, 225
 trillende veer 14
 trillingstijd 92
 trillingsvergelijking 90
- uitrekking van de veer 157
 uitwendige kracht 102
- variatie van constanten 60, 107
 vergelijking van Bessel 263, 264
 vergelijking van de trillende snaar 248
 vergelijking van Laplace 259, 260
 vergelijking van Laplace in bolcoördinaten 264
 vergelijking van Laplace in cilindercoördinaten 263
 verschuivingsstelling 198
 voorwaarde van Lipschitz 28
 vrije trilling 90, 91
- warmtegeleidingsvergelijking 245, 246
 warmtestroom 245
 weerstand 104
 Wronskiaan 73, 77, 79
 wrijvingskracht 96
- zadelpunt 45
 zelfinductie 104

Tabel van Laplace-transformaties

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt$$

No.	$f(t)$	$F(s)$	
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t^n (n geheel ≥ 0)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3	t^{-n} ($n \neq$ pos. geheel getal)	$\Gamma(1-n)s^{n-1}$	$s > 0$
4	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\pi} s^{-\frac{1}{2}}$	$s > 0$
5	$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} s^{-\frac{3}{2}}$	$s > 0$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$s > -a$
7	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$s > -a$
8	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
9	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
10	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > a $
11	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a $
12	$e^{-bt} - e^{-at}$	$\frac{a-b}{(s+a)(s+b)}$	$s > \max(-a, -b)$
13	$e^{-bt} \cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$	$s > \max(-b, 0)$
14	$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$s > \max(-b, 0)$
15	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$s > -a$
16	$t^{n-1} e^{-at}$ (n geheel > 0)	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$	$s > -a$
17	$e^{-at}(1-at)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$s > -a$
18a	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$

No.	$f(t)$	$F(s)$	
18b	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
19	$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
20	$\sin at \sinh at$	$\frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$	$s > a $
21	$\cos at \cosh at$	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$s > a $
22	$\sinh at - \sin at$	$\frac{2a^3}{s^4 - a^4}$	$s > a $
23	$\cosh at - \cos at$	$\frac{2a^2 s}{s^4 - a^4}$	$s > a $
24	$\sinh at + \sin at$	$\frac{2as^2}{s^4 - a^4}$	$s > a $
25	$\cosh at + \cos at$	$\frac{2s^3}{s^4 - a^4}$	$s > a $
26	$t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{a^2}{s^2(s^2 + a^2)}$	$s > 0$
27	$\frac{1}{a} \sinh at - t$	$\frac{a^2}{s^2(s^2 - a^2)}$	$s > a $
28	$\cos^2 at$	$\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$s > 0$
29	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	$s > 0$
30	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln \frac{s+b}{s+a}$	$s > \max(-a, -b)$
31	$\frac{\sinh t}{t}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1}$	$s > 1$
32	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	$s > 0$
33	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$	$s > 0$

© 1987 VSSD

Uit:

ISBN 90-6562-066-4

Dr. B. Meulenbeld/Dr. A. W. Grootendorst

Analyse, deel - 3 differentiaalvergelijkingen

Tabel van Laplace-transformaties

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt$$

No.	$f(t)$	$F(s)$	
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t^n (n geheel ≥ 0)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3	t^{-n} ($n \neq$ pos. geheel getal)	$\Gamma(1-n)s^{n-1}$	$s > 0$
4	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\pi} s^{-\frac{1}{2}}$	$s > 0$
5	$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} s^{-\frac{3}{2}}$	$s > 0$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$s > -a$
7	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$s > -a$
8	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
9	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
10	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > a $
11	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > a $
12	$e^{-bt} - e^{-at}$	$\frac{a-b}{(s+a)(s+b)}$	$s > \max(-a, -b)$
13	$e^{-bt} \cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$	$s > \max(-b, 0)$
14	$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$s > \max(-b, 0)$
15	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$s > -a$
16	$t^{n-1} e^{-at}$ (n geheel > 0)	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$	$s > -a$
17	$e^{-at}(1-at)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$s > -a$
18a	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$

No.	$f(t)$	$F(s)$	
18b	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
19	$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$s > 0$
20	$\sin at \sinh at$	$\frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$	$s > a $
21	$\cos at \cosh at$	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$s > a $
22	$\sinh at - \sin at$	$\frac{2a^3}{s^4 - a^4}$	$s > a $
23	$\cosh at - \cos at$	$\frac{2a^2 s}{s^4 - a^4}$	$s > a $
24	$\sinh at + \sin at$	$\frac{2as^2}{s^4 - a^4}$	$s > a $
25	$\cosh at + \cos at$	$\frac{2s^3}{s^4 - a^4}$	$s > a $
26	$t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{a^2}{s^2(s^2 + a^2)}$	$s > 0$
27	$\frac{1}{a} \sinh at - t$	$\frac{a^2}{s^2(s^2 - a^2)}$	$s > a $
28	$\cos^2 at$	$\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$s > 0$
29	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	$s > 0$
30	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln \frac{s+b}{s+a}$	$s > \max(-a, -b)$
31	$\frac{\sinh t}{t}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1}$	$s > 1$
32	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	$s > 0$
33	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$	$s > 0$

wiskunde: analyse, lineaire algebra, stochastiek en statistiek

ANALYSE

door dr. J.H.J. Almering e.a.
geheel herzien door dr. H. Bavinck
en dr. ir. R.W. Goldbach

'Analyse' behandelt de analyse op moderne wijze. De hoofdstukken behandelen de grondbegrippen, complexe getallen, limieten en continuïteit, differentiaalrekening, integraalrekening, afbeeldingen, differentiaalvergelijkingen, meervoudige integralen, lijnintegralen, oppervlakteintegralen en reeksen.

Aan het eind van de meeste paragrafen is een aantal oefeningen opgenomen om de lezer vertrouwd te maken met de voorafgaande leerstof. Aan het eind van elk hoofdstuk is een paragraaf met vraagstukken toegevoegd, gerangschikt overeenkomstig de behandeling van de leerstof in het betreffende hoofdstuk.

Het boek doet o.a. dienst bij het analyseonderwijs bij nagenoeg alle afdelingen van de TU-Delft.

592 pag., ISBN 90-6562-078-8 (gebonden)

ANALYSE

**209 tentamenopgaven met
uitwerkingen, door dr. H. Bavinck**

Aansluitend aan Analyse door dr. J.H.J. Almering e.a. redigeerde dr. H. Bavinck een boek met opgaven en uitwerkingen.

Het aan studenten ter beschikking stellen van vraagstukken met uitwerkingen, betekent didactisch gezien een risico; van de gebruikers moet dan ook, wil men het boekje met vrucht hanteren, een zekere zelfdiscipline worden verwacht.

96 pag., ISBN 90-6562-060-5

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

**220 voorbeelden en opgaven met
oplossingen en beknopte theorie,
door dr. A. Schuitman**

Aan de hand van voorbeelden en vele opgaven wordt in dit boek een overzicht gegeven van de verschillende typen differentiaalvergelijkingen en op toepassingen op partiële differentiaalvergelijkingen. Tenslotte worden Laplacetransformaties en randwaardeproblemen behandeld.

Het boek is vooral bedoeld als vraagstukkenverzameling naast een college of leerboek.

160 pag., ISBN 90-6562-026-5

DISCRETE ANALYSE

door Peter Nooy, Jan Vons en
Rob Eveleens, syllabus bij het
college van prof.dr. H.J.A. Duparc

Naast de conventionele analyse, die wel wordt aangeduid als 'continue' analyse, komt steeds meer de 'discrete' analyse naar voren. In tegenstelling tot de continue analyse wordt in de discrete analyse het begrip 'limiet' niet of nauwelijks gebruikt.

Vanuit andere wetenschappen dan wiskunde en de techniek dienen zich vele discrete problemen aan; zo is voor het zoeken van oplossingen met behulp van een computer vaak discretisering nodig.

Bij de opzet van dit vak kan dankbaar gebruik worden gemaakt van de continue analyse.

De behandelde onderwerpen en hun (tussen haakjes geplaatste) analogon uit de continue analyse zijn:

- differentierekening (differentiaalrekening);
- somrekening (integraalrekening);
- reeksen (reeksen);
- differentievergelijkingen (differentiaalvergelijkingen);
- Z-transformatie (Laplace-transformatie).

52 pag.

DICTAAT LINEAIRE ALGEBRA

door dr. G.W. Decnop,
ir. H. van Iperen en dr. R. Martini

In een systematische opbouw behandelen de auteurs de lineaire algebra, zoals die wordt gegeven aan de TU-Delft. Daarbij zijn vele voorbeelden en vraagstukken opgenomen.

Vectorruimten, matrices en rekentechnieken in \mathbb{R}^n , lineaire afbeeldingen en bilineaire vormen, inwendige productruimten, stelsels lineaire vergelijkingen, determinanten, lineaire operatoren van inwendige productruimten en kwadratische vormen zijn de onderwerpen van de hoofdstukken.

236 pag. (formaat 19x26), ISBN 90-6562-036-2

MATRIXREKENING

door ir. C.A. den Braber,
ir. H. van Iperen, dr. A. Schuitman en
dr. ir. M.A. Viergever

Dit boek onderscheidt zich van 'Dictaat Lineaire Algebra' door een directere aansluiting bij de programma-eisen van enkele studierichtingen aan de TU-Delft.

De lineaire algebra en matrixrekening zijn in dit boek vooral toepassingsgericht behandeld, bijvoorbeeld met het oog op vakken als technische mechanica,

stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen en statistiek.

De volgende hoofdstukken zijn in het boek opgenomen:

- Het oplossen van eenvoudige stelsels lineaire vergelijkingen
- Matrixen, bewerkingen met matrixen
- Analytische meetkunde in de ruimte en het platte vlak
- IR^n & C^n , rang van een matrix, methode der kleinste kwadraten
- Determinanten
- Eigenwaarden en eigenvectoren.

Het is een leerboek met veel oefenstof, waarbij de docent zonodig de weg kan wijzen.

328 pag. (formaat 19 x 26), ISBN 90-6562-077-x

ANALYSE

door prof.dr. B. Meulenbeld en
prof.dr. A.W. Grootendorst

In drie kloeke delen (die voorheen bij Educaboek verschenen) presenteren de auteurs een volledige cursus analyse, die nu – erg laag geprijsd – opnieuw op de markt wordt gebracht. Het werk is in de periode 1971–1980 ingrijpend gemoderniseerd.

Deel 1 beperkt zich in hoofdzaak tot *functies van één veranderlijke*. Beginselen van differentiaal- en integraalrekening, complexe getallen, extreme waarden en het schetsen van krommen, systematische berekening van de primitieven van enige klassen van functies, oneigenlijke integralen, rijen, reeksen, vergelijkingen, numerieke integratie en differentiatie, en hyperbolische functies. Tenslotte wordt kort aandacht besteed aan functies van twee veranderlijken.

Deel 2 behandelt *functies met twee of meer variabelen*. De hoofdstukken gaan over impliciete functies, extreme waarden, vectoranalyse, vlakke krommen, ruimtekrommen, lijnintegralen, meervoudige integralen, integraalstellingen, massa, zwaartepunt en traagheidsmoment, en de gamma- en bèta-functie.

De differentiaalvergelijkingen zijn het onderwerp van *deel 3*. Gewone differentiaalvergelijkingen, het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van machtrekken, simultane differentiaalvergelijkingen, de Laplace-transformatie, numerieke methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen en partiële differentiaalvergelijkingen.

Over deel 1 schreef O. Bottema in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde van februari 1982:

"Dit werk is voorwaar een leerboek. Bij het schrijven moet de toekomstige lezer voortdurend in de geest aanwezig zijn geweest. De hoge didactische kwaliteit berust op een streven naar evenwicht; de behandeling is exact maar een acribie die het wezenlijke kan versluieren is vermeden. Evenwicht is er ook tussen de zakelijke tekst en een groot aantal goed gekozen voorbeelden. Ook de typografie werkt mee aan de uitnemende presentatie."

Deel 1, 433 pag., ISBN 90-6562-064-8

Deel 2, 344 pag., ISBN 90-6562-065-6

Deel 3, 280 pag., ISBN 90-6562-066-4

ELEMENTAIRE STATISTIEK door ir. J. van Soest

Het bekende boekje van ir. Van Soest richt zich vooral op de *toepassingen* van de statistiek. Achtereenvolgens worden behandeld de beschrijvende statistiek, de kansrekening, stochastische variabelen, populatie en steekproef, de binomiale verdeling, de Poissonverdeling, de normale verdeling, functies van continue stochastische variabelen, de centrale limietstelling, statistische toetsen voor ligging, toetsen voor verschil in ligging en toetsen voor varianties, regressie- en correlatierekening. Tal van vraagstukken zijn opgenomen.

176 pag., ISBN 90-6562-003-6

aanvulling

ELEMENTAIRE STATISTIEK
door ir. J. van Soest, ir. A.J. Meelen
en ir. J.M.G. Vermeulen

Ten behoeve van een meer mathematische benadering van de statistiek is een aanvulling beschikbaar, die een verdieping inhoudt van hetgeen in de hoofdstukken 3, 7, 8 en 13 van Elementaire Statistiek is weergegeven.

60 pag., ISBN 90-6562-006-0

RRGRAPH

Stichting Reactor Research

RRGRAPH is een speciaal voor gebruik in een wetenschappelijke omgeving ontwikkeld programma voor het verwerken van meetgegevens in grafieken en tabellen. Het uitzetten van punten in een grafiek, de verzameling punten te 'smoothen' en het trekken van een (al dan niet ge-smooth-de lijn) door de verzameling (waarbij de grenzen van het 95%-betrouwbaarheidsgebied eveneens weergegeven kunnen worden) is met dit menu-gestuurde pakket eenvoudig mogelijk. Men kan bovendien met RRGRAPH een functie $y = f(x)$ interactief inlezen en tekenen.

De mogelijkheden die het pakket verder biedt zijn het 'rescalen' van de puntenverzameling, het gebruiken van lineaire of logaritmische assen, het bepalen van de eerste en tweede afgeleiden aan en het oppervlak onder de 'ge-spline-de' curve, het interpoleren in 'beide richtingen', het inlezen van SYMPHONY- en LOTUS.PRN-files, het voorzien van de grafieken van tekst, symbolen e.d. en het 'over elkaar heen leggen' van meer grafieken.

Het programma werkt op IBM-PC compatibelen en kan gebruik maken van CGA-kaart, Herculeskaart en AT&T-kaart; uitvoer vindt plaats naar parallelle of seriële printer in 'draft' of presentatie-kwaliteit.

disk ISBN 90-6562-083-4

handleiding (24 pag.) ISBN 90-6562-084-2

pakket 90-6562-085-0

Dit boek wordt ten behoeve van de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft (VSSD) uitgegeven door de Delftse Uitgevers Maatschappij.

De VSSD is een vereniging van studenten aan de Technische Universiteit Delft, die zich ten doel stelt de belangen van de studenten te behartigen.

Deze belangenbehartiging heeft vele, overigens samenhangende, kanten. De bevordering van de kwaliteit van het onderwijs, bezinning op de beroepspraktijk en het toegankelijker maken van het wetenschappelijk onderwijs voor alle lagen van de bevolking zijn de hoofdzaken van wat de 'ideële' kant van de belangenbehartiging genoemd kan worden..

De 'materiële' kant van dit werk betreft het opkomen voor een aanvaardbaar inkomen voor de student, voor goede leefomstandigheden, goed en goedkoop studiemateriaal e.d.

Bij het verzorgen en doen uitgeven van boeken zoals deze zijn de beide aspecten vertegenwoordigd: de beschikbaarheid van goede en handzame boeken vergroot de kwaliteit van het onderwijs, anderzijds worden ze zo goedkoop mogelijk in de handel gebracht.

ISBN 90-6562-066-4