



C10021
69140

VERVALLEN

P1019
4443

Bibliotheek TU Delft



C

1742365

№ 43.

BIJDRAGEN TOT DE THEORIE DER SLINGERWAARNEMINGEN.

BIJDAGEN TOT DE THEORIE DER SLINGERWAARNEMINGEN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN
DOCTOR IN DE TECHNISCHE WETENSCHAP
AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE
DELFT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNI-
FICUS W. K. BEHRENS c. l., HOOGLEERAAR IN DE
AFDEELING DER WEG- EN WATERBOUWKUNDE,
VOOR EENE COMMISSIE UIT DEN SENAAT
TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 26 MAART 1915,
DES NAMIDDAGS TE 3 UUR, DOOR

FELIX ANDRIES VENING MEINESZ,
CIVIEL-INGENIEUR, GEB. TE SCHEVENINGEN.



Aan mijne Moeder.

VOORREDE.

Bij het verschijnen van dit proefschrift zijn er velen wien ik mijne erkentelijkheid zou willen betuigen voor wat ik hun verschuldigd ben.

In de allereerste plaats zie ik daaronder Professor Dr. J. J. A. Muller te Zeist. Niet alleen heeft hij mij den tijd en de gelegenheid geschonken om deze verhandeling samen te stellen, waarvoor ik hem mijn welgemeenden dank breng, maar hij heeft bovendien de groote welwillendheid gehad om de drukproeven na te gaan, zoodat ik een menigte goede wenken en tekstverbeteringen aan hem schuldig ben. De moeite die hij zich daarvoor heeft willen geren zal bij mij in dankbare herinnering blijven.

Het spreekt vanzelf dat ik de Hoogleeraren Dr. G. Schouten en Dr. J. Cardinaal w. i. onder degenen reken, aan wie ik zeer veel verplichting heb. De eerste had mij toegezegd het promotorschap te willen aanvaarden en ik had reeds menigen goeden raad van hem ontvangen; tot mijn groot leedwezen werd ik door de omstandigheden genoodzaakt den datum van de promotie uit te stellen en beroofde zijn heengaan uit Delft mij zoodoende van zijn steun. Zeer waardeerde ik toen daarop Professor Dr. J. Cardinaal mij de toezegging deed, het promotorschap op zich te willen nemen. Den goeden raad, dien ik steeds van hem mocht ontvangen, de welwillendheid waarmede hij mij zijn steun verleende en zich te mijnen behoefte moeite gaf, stelde ik op hoogen prijs, zoodat ik gaarne de gelegenheid aangrijp daarvoor mijn welgemeenden dank openlijk uit te spreken.

Het is mij tevens een behoefte op dit oogenblik mijn groote erkentelijkheid te betuigen aan al diegenen, wien ik voor mijne vorming

dank verschuldigd ben. Het zou het kader van dit voorbericht overschrijden als ik allen persoonlijk wilde opnoemen en naar waarde wilde trachten te memoreeren wat ik hun te danken heb; ik moet dus volstaan met te zeggen, dat ik hierbij allereerst op het oog heb de Hoogleraren van de Afdeelingen Weg- en Waterbouwkunde en Algemeene Wetenschappen, enkele leden der Rijkscmissie voor Graadmeting en Waterpassing, den Directeur der Utrechtsche Sterrenwacht, den Directeur van het Geodetisch Instituut te Potsdam, F. R. Helmert en eenige hoogleraren aldaar, waaronder ik in het bijzonder noemen wil Professor L. Haasemann, voor zijne hooggeschatte voorlichting op het gebied der slingerwaarnemingen.

Wat ik hun allen verschuldigd ben zal een blijvende plaats in mijne herinnering innemen.

INHOUD.

INLEIDING

| | |
|--|----|
| BESCHRIJVING VAN DE WAARNEMINGEN | 1 |
| BESCHRIJVING VAN DE TOESTELLEN | 10 |

HOOFDSTUK I

| | |
|--|----|
| MOEILIKHEDEN BIJ DE WAARNEMINGEN IN NEDERLAND. . | 16 |
|--|----|

HOOFDSTUK II

| | |
|--|----|
| ALGEMEENE STORINGSVERGELIJKING | 21 |
|--|----|

HOOFDSTUK III

| | |
|---|----|
| BEHANDELING VAN VERSCHILLENDE STORINGSOORZAKEN . . | 36 |
| 1 ^o . DE AMPLITUDE | 37 |
| 2 ^o . DE ELASTISCHE VERVORMING VAN DEN SLINGER . . | 37 |
| 3 ^o . DE INVLOED VAN DE OMRINGENDE LUCHT | 50 |
| 4 ^o . DE INVLOED VAN DE MESSEN | 56 |
| 5 ^o . DE STATIEFBEWEGINGEN | 69 |
| 6 ^o . DE GRONDBEWEGINGEN | 84 |
| TWEESLINGERMETHODE | 92 |

HOOFDSTUK IV

| | |
|---|-----|
| DE BEPALING VAN HET MEESLINGEREN | 102 |
| 1 ^o . STATISCHE METHODE | 103 |
| 2 ^o . INTERFERENTIEMETHODE | 107 |
| 3 ^o . TWEESLINGERMETHODEN | 108 |
| 4 ^o . STOOTMETHODE | 124 |

HOOFDSTUK V

| | |
|--|-----|
| INTEGRATIE DER FORMULES VOOR TWEE EN MEER TEGELIJKERTIJD OP EEN STATIEF SLINGERENDE SLINGERS | 130 |
| TOEPASSINGEN | 153 |

INLEIDING.

De bepaling der zwaartekracht op verschillende punten der aarde is uit den aard der zaak een onderzoek dat weinig algemeen bekend is. Het schijnt mij daarom wenschelijk toe aan deze verhandeling een inleiding te doen voorafgaan, met een korte beschrijving der waarnemingen en der daarbij gebruikte toestellen.

De zwaartekracht op het aardoppervlak is door verschillende omstandigheden niet constant. Zij is de resultante der aantrekkingskrachten van alle deeltjes der aarde, vermeerderd met een kracht die door de aswenteling ontstaat. Zoowel richting en grootte varieeren met de plaats op aarde. Ten eerste treden op plaatselijke storingen door opeenhoopingen van massa, zooals gebergten of onderaardsche verdichtingen der aardkorst, en massatekorten, zooals bij zeeën of lichtere aardlagen. Ziet men hiervan af, dan zal wel op elke parallel de zwaartekracht gelijk zijn, doch zij zal nog een vrij sterke veranderlijkheid vertoonen langs de meridianen. Deze wordt in hoofdzaak veroorzaakt doordien de aarde geen bol is, maar bij benadering een omwentelings-ellipsoïde.

Onder den vorm der aarde verstaan wij het potentiaalvlak van de zwaartekracht ter hoogte van het gemiddeld zeeoppervlak; men noemt het gewoonlijk geoïde. Ter bepaling van den vorm en de afmetingen der geoïde levert de van dien vorm afhankelijke zwaartekracht waardevolle gegevens, aanvullende de op andere wijze gevonden cijfers. Natuurlijk moeten de zwaartekrachtswaarnemingen zoo nauwkeurig zijn, dat men er voor die berekeningen wat aan heeft. Tegenwoordig is men er in geslaagd met vrij gemakkelijk transporteerbare toestellen een nauwkeurigheid te bereiken van 0,001 cm. in de versnelling der zwaartekracht.

Het is natuurlijk wenschelijk deze bepalingen op zooveel mogelijk punten der aarde uit te voeren; de meeste beschaafde landen houden zich daar dan ook gedurende den laatsten tijd mee bezig. De waarnemingen in Nederland gaan uit van de Rijksc commissie voor Graadmeting en Waterpassing, in opdracht waarvan schrijver dezès in 1912 de bepalingen aanving.

Voor de bepaling van de geóide heeft de zwaartekracht, ontdaan van de plaatselijke storingen, waarde. De plaatselijke storingen echter leveren op zich zelf gewichtige resultaten op. Brengt men in rekening de afwijkingen die onevenheden van den bodem zooals bergen en hoogvlakten door hun aantrekking uitoefenen, dan houdt men tenslotte over de plaatselijke storing ontstaande door massaverdichtingen en massatekorten onder het aardoppervlak. Men krijgt hiermee dus aanwijzingen die voor de kennis van de aardkorst van veel belang zijn.

Eenige algemeene verschijnselen zijn daardoor gevonden. Zoo blijkt bijvoorbeeld dat onder hooge gebergten een onderaardsch massatekort is, terwijl men op de zeeën in het algemeen een massaoverschot vindt, wat dus heenwijst op dichter gesteenten op den zeebodem. Men is daarom geneigd te gelooven, dat de totaal-massa van de aardkorst begrepen tusschen loodrechte vlakken die een gebied van een zekere grootte omgrenzen, overal op aarde gelijk is. Men vindt op dezen regel echter ook uitzonderingen. Zoo blijkt bijvoorbeeld onder den Harz geen tekort maar een overschot te zijn, wat dus op een abnormale ontstaanswijze van het gebergte wijst.

Het doel van het onderzoek is hiermede in groote trekken gegeven. De uitvoering hangt van omstandigheden af. Op het vasteland is de zwaartekracht het best door slingerwaarnemingen te bepalen. Men houdt zich op 't oogenblik in Duitschland bezig met de mogelijkheid haar uit den invloed op stemvorken te bepalen; de uitvoerbaarheid en bruikbaarheid dezer methode is echter nog niet vastgesteld. Op zee is voor de slingertoestellen geen vaste opstelling mogelijk, zoodat deze methode aldaar in den steek laat. Men maakt dan gebruik van de mogelijkheid den luchtdruk op twee verschillende manieren te meten, waarvan de eene onafhankelijk is van de zwaartekracht, de tweede niet, zoodat een vergelijking der resultaten een waarde voor de

zwaartekracht oplevert. De van de zwaartekracht onafhankelijke methode is de luchtdrukbeplating door kookpuntswaarnemingen, de tweede methode is de meting van de met den luchtdruk equivalente kwikkolom, welke wel met de zwaartekracht samenhangt.

De zwaartekrachtsbepaling door slingerwaarnemingen berust op den invloed der zwaartekracht op den slingertijd volgens de bekende formule :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Handwritten notes: $g = \frac{4\pi^2 l}{t^2}$

Aan deze formule moeten nog tal van kleine correcties toegevoegd worden; wij komen hierop later uitvoerig terug.

Voor de bepaling van g zijn dus noodig: de meting van t , de meting van l en de bepaling van alle correctietermen. Dit geeft aanleiding tot uitgebreide waarnemingen en zeer ingewikkelde toestellen, die toelaten behalve den slingertijd ook l te meten en de correctietermen te bepalen of te elimineeren. Veel eenvoudiger is de verhouding te bepalen van de zwaartekracht op twee verschillende punten, welke blijkens de formule gegeven wordt door het omgekeerde van het kwadraat der verhouding van de gecorrigeerde slingertijden voor beide punten. Men behoeft daarvoor alleen de slingertijden t_2 en t_1 te bepalen, en van de correcties alleen diegene die niet uit het resultaat wegvallen. Daar de zwaartekrachtsverschillen en dus ook de slingertijdsverschillen zeer gering zijn, kan men zonder bezwaar stellen

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{t_1^2}{t_2^2} = 1 + \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_2^2} = 1 + \frac{2}{t} (t_1 - t_2)$$

en

$$g_2 - g_1 = 2 \frac{g}{t} (t_1 - t_2)$$

waarin men voor t en g ruwweg den waargenomen slingertijd en de zwaartekracht op een der beide punten mag stellen. Men heeft dus alleen $t_1 - t_2$ zeer nauwkeurig te bepalen; alle correctietermen die voor t_1 en t_2 even groote correcties geven, worden dus geëlimineerd en behoeven niet bepaald te worden. Voor dit geval kan men volstaan met veel eenvoudiger toestellen en een tamelijk gering aantal waarnemingen.

Dit geeft aanleiding tot het invoeren van het volgende schema:

Men bepaalt op enkele punten der aarde de absolute grootte van de zwaartekracht met daarvoor speciaal gebouwde toestellen, en tracht daarbij de uiterste nauwkeurigheid te bereiken. Door middel van eenvoudiger en gemakkelijker transporteerbare toestellen vergelijkt men de zwaartekracht op alle punten waar men haar kennen wil, met een dier centrale punten. Op deze wijze zijn de waarnemingen weinig omslachtig en kan men het aantal punten zonder bezwaar groot nemen.

De absolute grootte van de zwaartekracht is o. a. bepaald te Parijs, te Weenen en te Potsdam. De laatste, meest uitvoerige en grondigste bepaling is die te Potsdam; de voorbereiding en de waarnemingen aldaar hebben jaren in beslag genomen. Voor de Nederlandsche waarnemingen is als centraal punt De Bilt gekozen. Het zwaartekrachtsverschil De Bilt—Potsdam is zoo nauwkeurig mogelijk door directe waarnemingen bepaald. De verdere punten in Nederland worden alle met De Bilt vergeleken.

De geschiedkundige ontwikkeling der slingerwaarnemingen en der toestellen zal hier terzijde gelaten worden; wij zullen er ons toe bepalen met een enkel woord den aard der toestellen voor de meting van de absolute waarde van g aan te duiden; om dan meer in het bijzonder de twee in Nederland gebruikte toestellen voor de relatieve waarnemingen te beschrijven. (Onder relatieve waarnemingen verstaan wij de bepaling van het zwaartekrachtsverschil tusschen twee punten).

Voor de absolute zwaartekrachtsbepaling, waarbij dus l ook gemeten moet worden, wordt te dien einde steeds een reversieslinger gebruikt, d. w. z. een slinger welke om twee evenwijdige assen kan slingeren die zoo gekozen zijn dat de slingertijd voor beide gevallen gelijk is. De voorwaarde hiervoor is, naar bekend mag verondersteld worden, dat de afstanden h_1 en h_2 van het zwaartepunt tot de beide ophangpunten voldoen aan:

$$\frac{I_0}{m} = h_1 h_2$$

Hierin is m de slingermassa en I_0 het traagheidsmoment om een as door het zwaartepunt evenwijdig aan de draaiingsassen.

De slingertijd wordt dan gegeven door:

$$t = \pi \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{g}}$$

d. w. z. de mathematische slingerlengte l is gelijk aan de som van h_1 en h_2 . Deze formule geeft een middel om l te meten. Gebruikt men immers een reversieslinger waarvan h_1 en h_2 in elkaars verlengde vallen, dan heeft men slechts den afstand der beide ophangpunten te meten.

Het zal natuurlijk nooit gelukken om een slinger te construeeren waarbij het product $h_1 h_2$ precies de vereischte waarde heeft. De afwijking kan men echter elimineeren door toe te passen de gemakkelijk af te leiden formule:

$$T^2 = \frac{h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2}{h_1 - h_2} = \pi^2 \frac{(h_1 + h_2)}{g}$$

Hierin zijn T_1 en T_2 de slingertijden behoorende bij de twee ophangpunten.

T noemt men de gereduceerde slingertijd.

De messen van den slinger zullen in de praktijk niet voldoen aan den eisch dat de slinger om een mathematische lijn draait. Om de onregelmatigheden en storingen, die daardoor in den slingertijd ontstaan, te kunnen elimineeren, maakt men de slinger zóó, dat de messen uitgenomen kunnen worden en verwisseld. Wij komen hierop later uitvoerig terug. Bij een Fransch toestel geconstrueerd door DEFFORGES wordt hetzelfde doel op iets andere wijze bereikt: Men maakt de messen vast maar door een speciale inrichting kan men het zwaartepunt zoodanig verplaatsen, dat de nieuwe h_1 vrijwel gelijk aan de oude h_2 wordt en de nieuwe h_2 aan de oude h_1 . Dit geeft dus hetzelfde effect als een verwisseling der messen.

De metingen te Potsdam zijn uitgevoerd met een groot aantal verschillende messen; zelfs heeft men nog onderzocht of er verschil ontstond als aan den slinger zelf een plat horizontaal ophangvlak werd bevestigd, rustende op een mes, aangebracht aan het statief. Een systematische afwijking heeft men hiermee niet gevonden.

Natuurlijk zijn maatregelen genomen om de temperatuur der

verschillende deelen van het toestel te kunnen aflezen, zoodat de invloed daarvan in rekening kan gebracht worden.

De weerstand, die de omringende lucht op den slinger uitoefent, heeft een duidelijk merkbare slingertijdsverandering ten gevolge. Men heeft deze dan ook steeds nauwkeurig bepaald door vergelijking der slingertijden bij verschillenden luchtdruk.

Verder wordt nog in aanmerking genomen de invloed die de elasticiteit van het statief op den slingertijd heeft, welken invloed wij in het vervolg „het meeslingeren” zullen noemen. De door den slinger uitgeoefende zijdelingsche ophangreactie heeft een kleine beweging van het statief tengevolge, die omgekeerd weer de slingerbeweging influenceert. Wij komen later op dezen storingsinvloed uitvoerig terug.

Men heeft bij de metingen bovendien meenen waar te nemen dat het mes over het ophangvlak heen en weer schoof. Ook dit geeft een slingertijdsafwijking. Om haar te elimineeren voerde men achtereenvolgens metingen uit met slingers van gelijk gewicht, en sterk uiteenloopenden slingertijd. Zooals later aangetoond zal worden, geloof men daardoor deze storing te kunnen berekenen.

Dan moet men nog in rekening brengen de afwijking, ontstaande door de buiging van den slinger, tengevolge van de bij de slingering ontstaande massakrachten. Bij sommige der gebruikte slingers, die minder stijf geconstrueerd waren dan de andere, gaf dit vrij groote afwijkingen, die men vroeger, voordat deze storings oorzaak in studie werd genomen, niet terecht had weten te brengen.

Bij de absolute zwaartekrachtmeting is ook onderzocht of een magnetisch veld, zooals b. v. het aardmagnetisme, invloed op den slingertijd uitoefent. Theoretisch is een dergelijke invloed onwaarschijnlijk; de praktijk bevestigde hier de theorie.

Een der belangrijkste quaesties was de bepaling van den slingertijd. Om een zoo groot mogelijke nauwkeurigheid te bereiken, neemt men natuurlijk een groot aantal slingeringen achter elkaar en bepaalt de tijdstippen van aanvang en van einde der waarnemingsperiode. Teneinde dit met groote nauwkeurigheid te kunnen verrichten, construeerde men de slingers zóó dat hun slingertijd slechts weinig verschilt van een secunde respectievelijk een halve secunde. Met speciale methoden kan men bepalen de

tijdstippen waarop de slinger van het toestel en die van het gebruikte praecisieuurwerk in gelijke of in tegenstelde fase verkeerden. Daar het verschil der slingertijden klein is, liggen deze momenten vrij ver uiteen. Neemt men eenige dezer zoogenaamde coincidenties waar aan het begin van de waarnemingsperiode, dan heeft men een zeer nauwkeurig gegeven omtrent den aanvang der slingeren; op dezelfde wijze bepaalt men ook het einde. Door het tijdsverloop te deelen door het aantal der slingeren, vindt men de slingertijd. Men bereikt op deze wijze in het resultaat een nauwkeurigheid van een tienmillioenste secunde, waardoor men de versnelling van de zwaartekracht tot op $\frac{1}{5000}$ c.m. kan berekenen. Men kan hiermede nog juist het zwaartekrachtsverschil constateeren voor een meter hoogteverschil.

Bij de beschrijving der toestellen voor relatieve metingen zullen wij twee methoden behandelen ter bepaling van de tijdstippen van coincidentie.

Zeer sterk is de nauwkeurigheid van het resultaat afhankelijk van den juisten gang van het uurwerk, waarmee de metingen uitgevoerd worden, of beter uitgedrukt van de juiste kennis van den gemiddelden gang tijdens de waarnemingsperiode. Deze moet tot op 0,01 secunde per 24 uur bekend zijn. Voor de vervulling van dezen eisch heeft men noodig astronomische uurwerken van den eersten rang, die zoo nauwkeurig mogelijk gecontroleerd moeten worden.

Hiermede zijn in groote trekken de bij de absolute zwaartekrachtswaarnemingen voorkomende quaesties aangestipt. Ze geven aanleiding tot zeer uitgebreide onderzoekingen.

De relatieve metingen kunnen in verschillende opzichten eenvoudiger uitgevoerd worden. Men behoeft de slingerlengte niet te kennen, als men er maar zeker van is, dat deze constant is. Waar wij dus zoeven ten behoeve der lengtemeting een reversieslinger gebruikten, is dit hier onnoodig. Echter moet er nu den vollen nadruk op gelegd worden dat de slingerlengte gelijk blijft tijdens de geheele reeks waarnemingen die men vanuit het centrale punt uitvoert. Men richt daarom de metingen zóó in, dat men eerst in het centrale punt de slingertijd bepaalt, vervolgens de waarnemingen uitvoert op de stations waar men de zwaartekracht bepalen wil, en tenslotte weer in het centrale punt de

slingertijd meet. Is de slingerlengte constant gebleven, dan moeten de waarnemingen bij aanvang en einde overeenstemmen.

Van de verschillende storingsorzaken geven enkele op alle stations dezelfde slingertijdsafwijkingen; uit het verschil der slingertijden, waarom het te doen is, worden deze dus van zelf geëlimineerd.

De buiging van den slinger heeft bijvoorbeeld een constanten invloed, zoodat deze niet bepaald behoeft te worden.

Evenmin behoeft men zich te bekommeren om de slingertijdsstoring tengevolge van den vorm en de geaardheid der messen, mits tenminste de slinger steeds op hetzelfde gedeelte van het mes rust, en de amplitude op de verschillende punten niet te veel uiteenloopt. (De messeninvloed is n.l. eenigszins afhankelijk van de amplitude). Het is dus onnoodig de slingers zóó te construeeren, dat de messen door andere vervangen kunnen worden, zooals voor de absolute bepalingen noodig was. Zij kunnen dus stevig aan de slingers bevestigd worden, wat ten goede komt aan de onveranderlijkheid der slingerlengte.

De invloeden van temperatuur en luchtweerstand zijn op elk station verschillend ¹⁾, en moeten dus steeds in rekening gebracht worden. Proefondervindelijk worden voor elken slinger de slingertijdcorrecties voor verschillende temperaturen en luchtdichtheden bepaald, zoodat men op elk station de correctie kan aanbrengen als beide bekend zijn.

De luchtdichtheid wordt uit barometerstand en vochtigheidspercentage zonder bezwaar nauwkeurig genoeg afgeleid. Om de vereischte nauwkeurigheid voor de temperatuurcorrectie te bereiken, moet men de temperatuur van den slinger tot op $0,02^{\circ}$ Celsius kunnen aflezen. Daarvoor zijn goede thermometers noodig, en een gelijkmatige temperatuursverdeeling, zoodat de verschillende deelen van het toestel dezelfde temperatuur hebben. Om deze reden voert men de waarnemingen steeds uit in ruimten, waar de temperatuur regelmatig is en niet sterk wisselt (b.v. kelders).

¹⁾ Theoretisch schijnt het uitvoerbaar om door het uitpompen van lucht steeds eenzelfde luchtdruk in het toestel te doen ontstaan. In de praktijk is dit bij reistoestellen echter niet zóó nauwkeurig uitvoerbaar, dat men den invloed op den slingertijd als constant mag beschouwen. Men past de correctie dus steeds toe, ook al werkt men om andere reden in verdunde lucht.

Om met den temperatuurseisch minder moeilijkheden te overvinden heeft men slingers geconstrueerd van invar, d. i. een legering van nikkel en staal met zeer geringen uitzettingscoëfficiënt. Hierdoor oefent de temperatuur op den slingertijd veel kleiner invloed uit, zoodat men haar lang zoo nauwkeurig niet behoeft te kennen. In den laatsten tijd heeft men met hetzelfde doel ook slingers van kwarts geconstrueerd, dat eveneens een zeer kleinen uitzettingscoëfficiënt heeft.

De correctie van „het meeslingeren” moet op elk station bepaald worden. De grootte der statiefbewegingen, die de ophangpuntsreactie veroorzaakt, is n. l. niet alleen afhankelijk van den bouw en de elasticiteit van het statief, doch ook van de opstelling en van de vastheid van den bodem. De daardoor veroorzaakte slingertijdsafwijking is dus daarvan eveneens afhankelijk.

De meting van den slingertijd moet evenals bij de absolute waarnemingen zeer nauwkeurig zijn. Men gaat daarbij van het zelfde beginsel uit: de slingers zijn zoo geconstrueerd dat hun slingertijd ongeveer gelijk is aan den slingertijd van het uurwerk; men neemt waar de coïncidentietijdstippen, d. w. z. de tijdstippen waarop beide in gelijke fase zijn.

Zooals boven reeds werd opgemerkt is een hoofdvoorwaarde voor de relatieve waarnemingen dat de slingerlengte constant blijft. Zou men nu van uit het centrale punt een reis ondernemen, langs een reeks waarnemingspunten en teruggekomen in het centrale punt de slingerlengte veranderd vinden, dan is men in het onzekere waar dat geschied is en moet men dus alle waarnemingen verwerpen. Zelfs al vindt men dezelfde slingerlengte op het centrale punt terug, dan heeft men nog geen zekerheid of de slinger niet een tijdelijke verandering heeft ondergaan, die de gevonden waarden voor enkele stations zou hebben kunnen beïnvloeden. Om meer contrôle te hebben, neemt men daarom een aantal slingers mee. Het verschil der slingertijden na aanbrenging der noodige correcties, moet constant zijn; heeft een der slingers tijdens de reis een verandering ondergaan, dan bemerkt men daaraan, waar dat gebeurd is en weet men welke waarden men voor de berekening mag aanhouden en welke weggeworpen dienen te worden.

Wij laten hier nog een korte beschrijving volgen van de twee

apparaten, die voor de Nederlandsche relatieve metingen beschikbaar zijn (zie fig. 1 en 2, Bijlage I).

I. *Het toestel van von Sterneek.*

Van dit door de Firma STÜCKRATH, Berlijn, gebouwde toestel is de constructie aangegeven door R. v. STERNECK, in hoofdtrekken reeds in 1881. Deze apparaten zijn zeer handelbaar en gemakkelijk transporteerbaar, terwijl toch de resultaten nauwkeurig zijn. Zij worden dan ook vrij algemeen gebruikt.

Het statief rust op drie stelschroeven om de oplegvlakken van de slingers te kunnen nivelleeren. Bovenaan een stevige middenzuil zijn vier armen aangebracht in twee onderling loodrechte richtingen. Aan elk is een horizontaal agaten oplegvlak bevestigd, waarop het mes van een slinger kan rusten. Het vlak van slingering bevat de verticale middenas van het toestel; vier slingers slingeren dus in twee onderling loodrechte vlakken.

De slingertijd is ongeveer een halve seconde; het mes is van agaat en is vast bevestigd aan het slingerlichaam. Dit is een metalen steel, waaraan onderaan een dubbelkegelvormig slinger-gewicht.

Over het geheel kan een metalen mantel gezet worden, die op een afgeslepen rand onder aan het toestel rust, zoodat de slingerruimte luchtdicht afgesloten kan worden en men de slingers desgewenscht bij verminderden luchtdruk kan doen slingeren. Tevens geeft de mantel een beschutting tegen zijdelingsche luchtstromingen en bevordert hij het in stand blijven van een gelijkmatige temperatuur. Deze kan door een in den mantel aangebracht venstertje worden afgelezen op een binnenin bevestigden thermometer. Elke slinger kan door een hefboom, die onderaan tegen het slingergewicht drukt, uit den evenwichtstoestand gebracht en daarna losgelaten worden. De hefboomen zijn van buitenaf te bewegen, zoodat de mantel daarvoor niet afgenomen behoeft te worden.

De coïncidenties van de slingers met den tijdmetr worden met behulp van een tweede apparaat, het coïncidentie-toestel, bepaald: Door een lichtbron wordt elke seconde een lichtflits uitgezonden in de richting van het slingertoestel. Dit geschiedt door middel van een electrischen stroom die elke seconde door

het uurwerk (hetzij pendule, hetzij chronometer) gedurende een oogenblik gesloten wordt, en dan een hefboom aantrekt die een voor de lichtbron aangebrachte opening ontsluit.

De doorgelaten lichtflits valt door een venstertje in den mantel op een stelsel van spiegeltjes en prisma's midden op het slingerstatief. Deze richten de straal horizontaal op het boveneind van den slinger, waaraan een, in ruststand verticaal, spiegeltje is aangebracht. Is de slinger in den evenwichtsstand, dan komt de straal weder ongeveer denzelfden weg terug, en valt in een kijker die aan het coïncidentietoestel bevestigd is. Deze is zoo gesteld dat het beeld van de lichtflits in het midden van het veld verschijnt. Is echter de slinger op het oogenblik van de lichtflits niet in den evenwichtsstand, dan krijgt de lichtstraal een verticale afwijking, zoodat het beeld in den kijker boven of onder het veldcentrum komt. Is de slingertijd nauwkeurig een halve secunde, dan zal de tweede lichtflits den slingerspiegel onder denzelfden hoek treffen, zoodat men het lichtbeeld in den kijker weer op hetzelfde punt ziet terugkomen. Is de slingertijd echter een weinig grooter of kleiner dan een halve secunde, dan beweegt het telkens verschijnend lichtbeeld zich langzaam.

Neemt men waar het tijdstip van doorgang door den horizontalen middendraad van het veld, dan is hiermee het oogenblik bekend, waarop de slinger door den evenwichtsstand gaat op het moment dat de lichtflits verschijnt. Dit verschijnsel herhaalt zich na een zekere periode, waarin de slinger een slingering voor of achter komt bij het secundenuurwerk. Is deze periode bekend, dan is dus de slingertijd te berekenen.

Bij de vier Nederlandsche slingers is de periode ongeveer drie minuten. Men voert de waarnemingen dan als volgt uit: Men vangt aan met een aantal coïncidenties waar te nemen, wacht daarna dertig minuten en herhaalt dan de coïncidentie-waarnemingen.

Hoe kleiner de amplitude van den slinger is, hoe langzamer het lichtbeeld in den kijker zich beweegt, en hoe minder nauwkeurig men dus den doorgang kan waarnemen. De middelbare fout in de coïncidentie-waarnemingen neemt dus toe bij kleine amplitude. Gewoonlijk slingeren de slingers met een amplitude van 10' à 25'; de slingertijd is dan zonder bezwaar tot op een tienmillioenste secunde te bepalen. Dit is ruim voldoende en

het is dus onnoodig grooter amplituden te gebruiken, die het bezwaar hebben dat ze door de grootere zijdelingsche ophangpunt-reactie eerder de mogelijkheid in het leven roepen van een zijdelingsch glijden der messen over de ophangvlakken.

De amplitude is met het coïncidentie-toestel ook te meten. Men kan n.l. voor de opening van de lichtbron een goed verlichte verticale schaal plaatsen, die dus eveneens op den slingerspiegel reflecteert en een beeld in den kijker geeft. Bij beweging van den slinger danst dit op en neer. Men leest op het schaalbeeld af de twee uiterste posities van den middendraad en berekent daaruit het aantal schaaldeeltjes, dat onder dien draad passeert. Dit is evenredig aan de amplitude, die dus te bepalen is als men den afstand van coïncidentie-toestel tot slingertoestel kent. Hoe sneller de schaal heen en weer beweegt, hoe onnauwkeuriger de aflezing wordt. De nauwkeurigheid der amplitudebepaling is dus ook kleiner bij groote amplitude.

Men laat in den regel maar een van de vier slingers slingeren, behalve in enkele gevallen dat het wenschelijk is twee slingers tegelijkertijd te doen slingeren. Wij komen daarop later uitvoerig terug.

II. *Het toestel van Defforges.*

Dit door DEFFORGES ontworpen apparaat is geconstrueerd door de firma BIANCHI. Het is geheel gelijkvormig met de in Frankrijk gebruikte toestellen voor de absolute zwaartekrachtsbepaling.

De slinger is een reversieslinger, waarvan de mesafstand 0.50 m. is. Hij slingert in een verticalen hollen koker, die van buiten ter hoogte van het oplegvlak van den slinger voorzien is van drie verticale stelschroeven, om te kunnen nivelleeren. Deze rusten op een zwaar metalen statief dat vast op den bodem bevestigd is. De koker is door een metalen deksel luchtdicht te sluiten, zoodat alle waarnemingen ook bij uitgepompte lucht kunnen uitgevoerd worden. De luchtdruk en de temperatuur zijn door vensters af te lezen.

De slingertijd van den slinger is ongeveer 0.71 secunde; men heeft dus, om bij de waarnemingen de coïncidentiemethode te kunnen toepassen, een speciaal daarvoor geconstrueerd uurwerk

noodig, waarvan de slingertijd eveneens ongeveer 0.71 secunde is.

De waarnemingen worden als volgt uitgevoerd:

Een lichtbron, opgesteld voor een venstertje in den omhullingskoker van den slinger, ter hoogte van het ondereinde daarvan, werpt zijn licht naar binnen op een vaststaand metalen schermpje met een rechthoekige opening, waarachterlangs een onder aan den slinger bevestigde dikke stift heen en weer slingert.

In den ruststand van den slinger wordt de opening door de stift juist afgesloten; bij een uitwijking uit den evenwichtsstand komt de opening vrij en vervolgt de lichtbundel zijn weg, valt door een tweede venster van den koker naar buiten en wordt door een stelsel prisma's weerkaatst in de richting van de pendule. Daar valt zij door een lens die een beeld van bovenvermelde opening ontwerpt op een onderaan den penduleslinger bevestigd plaatje (liggende in het slingervlak) dat met den slinger heen en weer slingert. In het plaatje is een verticale spleet, even breed als het geprojecteerde lichtbeeld. Bij elke passage door den evenwichtsstand worden de lichtstralen even doorgelaten en vallen in een kijker, waarmee men het geprojecteerde openingsbeeldje waar kan nemen. Men ziet hierin dus bij elke penduleslingering een lichtbeeldje verschijnen, tenzij juist ten tijde van het doorlaten van de stralen door de spleet van den penduleslinger, de eerste slinger de lichtopening afsluit. Dit gebeurt als de slingers in gelijke of tegengestelde fase zijn; het tijdstip daarvan is dus in den kijker waar te nemen door het verdwijnen van het overigens regelmatig verschijnende lichtbeeld.

Deze optische wijze om de coincidenties te bepalen, vereischt dus een slingeruurwerk, terwijl bij het vorige toestel de elektrische stroom ook door een chronometer gesloten kan worden. Echter heeft men het voordeel dat men geen storingen door elektrische oorzaken behoeft te vreezen.

Ook bij deze methode neemt de nauwkeurigheid der coincidentiebepaling toe bij het gebruik van grootere amplituden. Om dezelfde m. f. in den slingertijd te bereiken, moet de amplitude grooter zijn dan bij het vorige toestel. Men kiest de slingeramplitude meestal tusschen 30' en 60'.

De amplitude wordt met 't bloote oog afgelezen op een schaal, waar de stift onder aan den slinger langs heen en weer slingert.

Zooals reeds werd opgemerkt is de slinger een reversieslinger; buitendien kan de invloed der messen op den slingertijd geëlimineerd worden door een symmetrische omlegging van het zwaartepunt zooals bij de bespreking der absolute metingen reeds in 't kort werd aangeduid. De slinger is uiterlijk symmetrisch ten opzichte van het vlak dat de mesafstand loodrecht middendoor deelt; aan de uiteinden buiten de punten waar de twee agaten messen bevestigd zijn is de slinger hol, welke holte afgesloten wordt door een opgeschroefden dop. Aan den binnenkant van een der doppen is een slingergewicht bevestigd, zoodat daardoor het zwaartepunt van het geheel buiten het slingermiddelpunt komt te liggen. Door verwisseling van de doppen kan men dus het zwaartepunt symmetrisch ten opzichte van dit middelpunt verplaatsen.

Zooals reeds werd opgemerkt heeft de eliminatie van den invloed der messen weinig waarde bij relatieve waarnemingen. Men heeft echter bovengenoemden slingervorm hiervoor aangehouden, omdat de slingertijden, gevonden voor de verschillende posities van den slinger en het slingergewicht, bij onderlinge vergelijking een contrôle opleveren voor de standvastigheid van de slingerlengte. Weliswaar kan men zich theoretisch wel een verandering van den slinger denken die aan zulke voorwaarden voldoet, dat de verschillen van deze slingertijden dezelfde blijven, terwijl toch de slingerlengte verandert; in 't algemeen echter beïnvloedt een verandering ook deze, zoodat men als de verschillen constant blijven, met vrij groote zekerheid tot de standvastigheid van den slinger kan besluiten.

Al heeft men dus op deze wijze met één slinger ook een contrôle bereikt, toch heeft men wat dat betreft veel meer aan het eerste toestel met vier slingers. Treedt immers een afwijking tijdens een waarnemingsreis op, dan zijn met dit toestel alle cijfers betreffende de daaropvolgende stations onbetrouwbaar, terwijl men bij het vierslingertoestel alleen die van den veranderden slinger behoeft weg te werpen.

Het Defforges-toestel heeft verder een groot nadeel. Het verschroeven der slingerdoppen brengt de standvastigheid van den slingertijd in gevaar, die immers juist bij relatieve waarnemingen van zooveel gewicht is. Inderdaad blijken hierdoor steeds

afwijkingen te ontstaan, die een te onregelmatig karakter hebben, om in rekening gebracht te kunnen worden.

De in Nederland gebruikte toestellen zijn hiermee in hoofdzaak beschreven.

We zullen in Hoofdstuk I een overzicht geven van de vraagstukken, die zich bij de waarnemingen voordoen en aanleiding geven tot deze verhandeling.

HOOFDSTUK I.

Bij de toepassing der gewone waarnemingsmethoden in Nederland, deden zich moeilijkheden voor tengevolge van den slappen bodem, dien men op vele waarnemingspunten aantreft. Het blijkt op die stations zeer moeilijk te zijn een opstelling voor de instrumenten te vinden, die voldoende vast en onbewegelijk is om de waarnemingen goed te kunnen uitvoeren.

Het sterkste komen de bezwaren tot uiting, wanneer men een slinger wil stil laten hangen, wat voor een der meest gebruikte methoden ter bepaling van „het meeslingeren”, zooals wij hieronder nader zullen zien, noodig is. De stilhangende slinger komt reeds na korten tijd in vrij heftige beweging en de waarneming wordt daardoor waardeloos. Al is het minder direct merkbaar, het is toch te verwachten dat ook de andere waarnemingen ter bepaling van den slingertijd storing zullen ondervinden. Het moet dus van belang geacht worden, den invloed der bodembewegingen grondig te onderzoeken en na te gaan of het mogelijk is de bezwaren te ontgaan.

De storingsverschijnselen waren intusschen geen verrassing; Professor L. HAASEMANN van het Geodetisch Instituut te Potsdam, die reeds vele jaren met het Stuckrath-toestel waarnemingen in Duitschland uitvoert, had mij reeds gewaarschuwd voor stations op slappen bodem. Zoolang men zand of rotsgrond te zijner beschikking heeft, schijnen bodembewegingen zich bij de slingerwaarnemingen niet te openbaren. Zonder twijfel bestaan ze dan ook wel in meerdere of mindere mate, daar men zelfs opgemerkt heeft, dat vaste gronden een beter voortplanting voor trillingen bieden dan slappe. Echter schijnen ze dan meer het karakter

aan te nemen van kortperiodische trillingen, die zooals later aangetoond zal worden, geen invloed uitoefenen op de slingerbeweging.

Bij veen en anderen slappen grond zijn de bewegingen veel heftiger, langzamer, en volkomen onregelmatig.

Te Delft waar het eerst moeilijkheden ontmoet werden, waren de toestellen opgesteld in het gebouw voor Geodesie aan den Oostsingel. Het voorbij rijden van wagens op den zijweg tusschen den singel en het Gebouw was aan den stilhangenden slinger onmiddellijk te bemerken. Nog grooter invloed oefende echter een voorbij varende schuit uit; blijkbaar heeft dit op den bodem nog meer effect.

Daar een groot gedeelte van Nederland veenbodem heeft, is het niet mogelijk de waarnemingspunten alle op vasten grond te kiezen. Het was dus noodzakelijk de quaestie onder de oogen te zien en te onderzoeken welken invloed de bodembewegingen op slingertijd en amplitude hebben. Het eerste vraagstuk wat in verband daarmee gesteld moest worden, was, om de storingen na te gaan die in slingertijd en amplitude teweeg gebracht worden door een geheel willekeurige storingsoorzaak; immers de grondbewegingen zijn volkomen onregelmatig zoodat zij niet in formule zijn uit te drukken.

Dit vraagstuk is in Hoofdstuk II behandeld. De daarin gevonden algemeene storingsformule opent echter de mogelijkheid den invloed van de andere storingsoorzaken, die in de inleiding bij de vermelding der absolute zwaartekrachtmetingen opgesomd zijn, op snelle en volledige wijze te ontwikkelen. Wel is de invloed daarvan reeds sinds geruimen tijd afgeleid, doch daarbij werd steeds elke quaestie van voren af aan behandeld, en meestal werd alleen berekend den invloed op den slingertijd, die voor de waarnemingen natuurlijk het belangrijkste is. In Hoofdstuk III zullen de verschillende storingsoorzaken daarom achtereenvolgens behandeld worden, met toepassing van de algemeene formules. Wij zullen daardoor verschillende nieuwe gezichtspunten zien ontstaan.

Het tweede doel van deze verhandeling is om een andere methode te ontwikkelen voor de bepaling van het meeslingeren, teneinde ook hierbij zooveel mogelijk den schadelijken invloed

der bodembewegingen te ontgaan. Het is van veel belang de meest praktische methode te kiezen, daar zooals reeds in de inleiding gezegd werd, op elk waarnemingsstation het meeslingeren opnieuw bepaald moet worden.

Wij zullen hieronder eerst de bestaande methoden in het kort beschrijven.

Bij de statische methoden meet men de uitwijking van het statief, onder invloed van een bekende horizontale kracht, die men ter hoogte van het oplegvlak op het statief laat aangrijpen. Hieruit kan men afleiden hoe groot de uitwijking is tengevolge van de horizontale slingerreactie, waaruit de slingertijdsstoring te berekenen is.

Bij de praktische uitvoering leveren deze methoden echter bezwaren op, daar het zeer moeilijk is de uitwijking met de noodige nauwkeurigheid te meten. Het hoofdbezwaar is, dat de kracht die op het statief aangrijpt, ook invloed uitoefent op den bodem waarop het is opgesteld, waardoor de vaste stand van het toestel waarmede men de uitwijking meet, in gevaar wordt gebracht.

Bij het Stückerathtoestel wordt meestal gebruik gemaakt van de tweeslingermethode. Men hangt daartoe een slinger stil en geeft den slinger, waarvan het slingervlak met dat van den eersten samenvalt, een flinke amplitude. Dit brengt het statief in periodieke beweging, die tengevolge heeft dat de stilhangende slinger in beweging komt. Leest men na eenigen tijd de amplitude van beide slingers af, dan is daaruit het „meeslingeren” voor beide slingers te bepalen, zooals later nader aangetoond zal worden. Het meeslingeren der twee andere slingers van het Stückerathtoestel, die onderling eveneens in hetzelfde vlak slingeren, is op gelijke wijze te bepalen.

Deze methode is gemakkelijk in de praktijk: men heeft geen extra toestellen nodig, en de waarneming duurt slechts 20 à 25 minuten. De eenige moeilijkheid is den slinger stil te hangen. Bij het Nederlandsche Stückerath-toestel moet men dit verrichten terwijl de metalen mantel over het toestel heen gezet is, want het afnemen heeft, zooals gebleken is, een vermindering van het meeslingeren tengevolge, en de overige waarnemingen, waarvoor we de slingertijdsstoring willen kennen, worden met opgezetten mantel uitgevoerd. Men moet den slinger dus van buitenaf stil-

hangen, wat uit te voeren is door den amplitudehefboom, die den slinger uit den evenwichtsstand drukt, zeer langzaam weg te draaien, door middel van een micrometerschroef buiten den mantel. Met eenige oefening is op deze wijze het doel te bereiken.

Op slappen grond laat deze methode in den steek om twee redenen.

Ten eerste is de stilhangende slinger zeer gevoelig voor de bodemstoringen, en dientengevolge is de na eenigen tijd verkregen amplitude niet alleen het gevolg van de statiefbewegingen door den tweeden slinger veroorzaakt, doch tevens van de bodembewegingen.

Ten tweede is het onmogelijk den slinger op bovenstaande wijze stil te krijgen, terwijl de bodem in onrust is. Gedurende het terugdraaien van den amplitudehefboom ontstaan dan botsingen tusschen hefboom en slingergewicht, die den slinger in vrij heftige beweging brengen.

Er zijn verder nog twee andere methoden ter bepaling van het meeslingeren.

Volgens de eene meet men de statiefbewegingen tijdens het slingeren van den slinger. Uit de grootte der uitwijking is dan de slingertijdsafwijking langs theoretischen weg te berekenen. Daar echter de statiefbewegingen uiterst klein zijn, heeft men voor de meting ingewikkelde toestellen noodig, waarbij gebruik gemaakt wordt van lichtinterferentie. Ten eerste is dus deze methode kostbaar en voor waarnemingsreizen minder practisch; ten tweede is de bereikte nauwkeurigheid maar nauwelijks voldoende. Zij is in hoofdzaak in Amerika toegepast.

De laatste methode is de zoogenaamde stootmethode. Men laat op het statief ter hoogte van het ophangpunt een horizontale kracht aangrijpen, in de richting van het slingervlak, en periodiek wisselend van nul tot een zekere waarde bijvoorbeeld 5 Kg. Dit is bijv. uit te voeren door met een veerbalans tegen het statief te drukken, waarbij men de naald tusschen 0 en 5 Kg. laat heen en weer gaan. Deze kracht roept een vrij sterke periodieke statiefbeweging te voorschijn, die, als men er voor zorgt dat de periode ongeveer gelijk is aan den dubbelen slingertijd, een stilhangenden slinger in beweging brengt. De amplitude is evenredig met het aantal stooten, de grootte van den stoot, en met de elasticiteit van het statief. Deze laatste kan men dus uit de amplitude afleiden, waardoor tevens het meeslingeren te

berekenen is. Wij komen hierop uitvoerig terug in Hoofdstuk IV.

De bij deze methode ontstaande amplituden zijn vrij groot, zoodat de grondbewegingsinvloed in verhouding veel geringer is dan bij de tweeslingermethode. Echter is de methode bij het Stuckrath-toestel niet toe te passen, als de mantel er overheen staat, daar men dan geen gelegenheid heeft tot het uitvoeren der stooten. Het bezwaar zou wel te ondervangen zijn, door eenige veranderingen aan het toestel aan te brengen, doch het lag voor de hand eerst te onderzoeken of niet op andere wijze het meeslingeren op slappen bodem te bepalen zou zijn.

Een der andere genoemde methoden komt wegens de vermelde bezwaren niet in aanmerking.

Naar aanleiding van een uiting van Prof. E. BORRASS van het Geodetisch Instituut te Potsdam, werd onderzocht of de tweeslingermethode wellicht met voordeel zòd gewijzigd kon worden, dat het meeslingeren afgeleid werd uit den invloed van twee in hetzelfde vlak slingerende slingers, uitgaande van een anderen begintoestand dan den evenwichtsstand voor een der slingers. Hiervoor was het noodig de bewegingsvergelijkingen van twee slingers op een elastisch statief tegelijkertijd slingerende, in algemeen vorm op te lossen en de daardoor geschapen mogelijkheden te bestudeeren.

In Hoofdstuk III en Hoofdstuk V zijn de bewegingsvergelijkingen van twee slingers ontwikkeld, uitgaande van de in Hoofdstuk II afgeleide algemeene storingsvergelijking.

In Hoofdstuk IV zijn de verschillende mogelijkheden ter bepaling van het meeslingeren opgenomen, waarbij tevens de theoretische grondslag der bestaande, hierboven vermelde, methoden behandeld is. Daarbij is voor elke methode onderzocht in hoeverre de bodembewegingen storingen geven en welke overigens de voor- en na-deelen van elk zijn.

De algemeene bewegingsvergelijkingen van twee slingers op een elastisch statief tegelijkertijd slingerende, zijn eveneens toepasselijk op een heel ander gebied van verschijnselen. Zoo zijn ze zonder meer aan te wenden voor het geval dat twee trillingen wederzijds invloed op elkaar uitoefenen. Ook op het gebied der wisselstroomen kunnen zij toepassing vinden. Deze quaesties liggen echter buiten het bestek van deze verhandeling.

HOOFDSTUK II.

Algemeene Storingsvergelijking.

Wij zullen aanvangen de bewegingsvergelijkingen van het slingerlichaam op te stellen.

Wij voegen aan elk massadeeltje de traagheidskracht van D'ALEMBERT toe; hiermede is het vraagstuk tot een statisch vraagstuk teruggebracht.

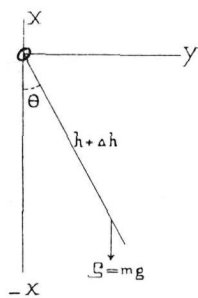
Wij veronderstellen verder, dat het verticale vlak gelegd door twee willekeurige punten van de baan, die het zwaartepunt beschrijft, een symmetrievlak is voor het geheele verschijnsel. Hieruit volgt dat deze baan geheel in dit vlak ligt.

Als coördinatenstelsel kiezen wij drie onderling loodrechte assen, waarvan wij de x as en de y as in het symmetrievlak leggen. Als oorsprong nemen wij een punt van het slingerlichaam in de onmiddellijke nabijheid van het aangrijpingspunt van de statiefreactie. Had men te doen met een vast mathematisch ophangpunt, zoodat deze statiefreactie steeds in hetzelfde punt van den slinger aangreep, dan zou men dat punt kunnen kiezen. In de praktijk zal het aangrijpingspunt zich in het slingerlichaam verplaatsen, doordien het mes van den slinger, bij verschillende uitwijking uit den evenwichtsstand, niet steeds op dezelfde punten zal rusten, doch een heen en weer rollende beweging zal uitvoeren.

De x as kiezen wij verticaal, positief naar boven, de y as horizontaal, positief naar rechts.

De oorsprong is geen vast punt in de ruimte, daar in 't algemeen geen enkel punt van den slinger op zijn plaats blijft. Ons

coördinatenstelsel zal dus kleine translaties ondergaan, gegeven door de coördinaten x_0 en y_0 van den oorsprong ten opzichte van een in de ruimte vaststaand assenstelsel, waarvan de assen aan de vorige evenwijdig zijn.



Den hoek, dien de verbindingslijn van zwaartepunt en oorsprong met de negatieve x as maakt, noemen wij θ ;

den afstand van oorsprong tot zwaartepunt bij stilhangenden slinger h ;

de massa van den slinger m ;

de massa van een willekeurig deeltje dm ;

de voerstraal van dit deeltje ρ .

Stellen wij nu de evenwichtsvergelijkingen op van het slingerlichaam voor de daarop werkende krachten en de toegevoegde traagheidskrachten van D'ALEMBERT.

De som der y componenten, nul gesteld, levert dan een uitdrukking op, waaruit de y component der ophangpuntsreactie te berekenen is.

De som der x componenten, nul gesteld, geeft een uitdrukking voor de x component dezer reactie.

De som der momenten om den oorsprong, nul gesteld, geeft de bewegingsvergelijking voor θ .

Stellen wij eerst de laatste op:

1°. Momenten der op het lichaam werkende krachten om den oorsprong:

a. de som der momenten van de op elk deeltje werkende zwaartekracht. Dit is gelijk aan het moment van het in het zwaartepunt geconcentreerd gedachte gewicht.

Hierbij moet opgemerkt worden, dat het slingerlichaam zich elastisch zal vervormen tengevolge van de erop werkende krachten. Daardoor zal de afstand h kleine veranderingen ondergaan, welke wij Δh noemen. Dit is niet een eenvoudige elastische verandering van de lengte h , want het zwaartepunt zal niet steeds met hetzelfde deeltje van den slinger samenvallen.

Het zwaartekrachtsmoment wordt dan voorgesteld door :

$$mg(h + \Delta h) \sin \theta$$

b. De ophangpuntreactie R , grijpt niet precies in den oorsprong aan, doch op een kleinen afstand daarvan, zoodat men hierdoor een klein moment krijgt.

Buitendien kan in de aanrakingspunten van mes en ophangvlak nog een klein moment overgedragen worden, dat wij als wrijvingsmoment zouden kunnen karakteriseeren.

Wij vatten beide termen samen in M_R .

c. Op het oppervlak van den slinger grijpen kleine krachten aan, tengevolge van het medium, waarin de slinger slingert. Wij zullen dezen weerstand, ontstaande door wrijvingen, botsingen en luchtdruk later nader analyseeren.

Het veroorzaakte moment noemen wij M_R .

2°. Momenten der traagheidskrachten van D'ALEMBERT.

a. Men heeft een klein moment tengevolge van de evenwijdige translatiebeweging van het coördinatenstelsel.

De versnelling daarvan is y_0'' en x_0'' (de tweede differentiaal naar de tijd t wordt door een dubbel accent aangeduid).

De resultante der toe te voegen traagheidskrachten voor het heele slingerlichaam heeft dus de componenten $-m y_0''$ en $-m x_0''$ en grijpt aan in het zwaartepunt.

Het moment om den oorsprong is dus:

$$+ m x_0'' (h + \Delta h) \sin \theta + m y_0'' (h + \Delta h) \cos \theta$$

b. Het moment der traagheidskrachten ten gevolge van de beweging van den slinger ten opzichte van het coördinatenstelsel.

De traagheidskracht van een oneindig klein deeltje dm van den slinger is samengesteld uit verschillende stukken.

De hoofdterm ontstaat tengevolge van de draaiing om den oorsprong. Dit geeft voor een deeltje op afstand ρ van den oorsprong een moment:

$$\theta'' \rho^2 dm$$

De elastische vervorming van het lichaam maakt dat ρ^2 niet geheel constant blijft, zoodat bovenstaande term daardoor wijziging ondergaat. Bovendien ontstaan daardoor elastische verplaatsings-

versnellingen, die ook een bijdrage leveren voor de traagheidskracht van het deeltje.

Deze beide gevolgen van de elastische vervorming van het lichaam geven een kleine bijdrage tot het traagheidskrachtmoment van het deeltje dm , welke wij aanduiden door dM_B .

Bij de bestudeering der vervormingsverschijnselen in Hoofdstuk III zullen wij deze grootheid nader analyseeren.

Geïntegreerd over het geheele lichaam krijgen wij voor het traagheidskrachtmoment:

$$g'' \int \rho^2 dm + \int dM_B = g'' I + M_B$$

Hierin heeft ρ^2 betrekking op den stilhangenden slinger en dus beteekent I het traagheidsmoment daarvan om den oorsprong.

Onder M_B verstaan wij de integraal van dM_B over den geheelen slinger.

De som van al deze momenten nul gesteld geeft:

$$mg h \theta + I \theta'' + \left[-mg(h + \Delta h)(\theta - \sin \theta) + M_R + M_D + \right. \\ \left. + M_B + mg \theta \Delta h + m x_0''(h + \Delta h) \sin \theta + m y_0''(h + \Delta h) \cos \theta \right] = 0$$

of wel:

$$I \frac{g}{l} \theta + \theta'' + S = 0$$

waarin $l = \frac{I}{mh}$ = slingerlengte van den mathematischen slinger.

$$S = \frac{I}{l} \left[-mg(h + \Delta h)(\theta - \sin \theta) + M_R + M_D + M_B + \right. \\ \left. + mg \theta \Delta h + m x_0''(h + \Delta h) \sin \theta + m y_0''(h + \Delta h) \cos \theta \right]$$

Verstaan wij nu onder *den theoretischen slinger* een slinger waarbij alle termen, waaruit S is samengesteld, nul zijn. Dit wil zeggen, dat de slinger om een vast mathematisch punt slingert, samenvallend met den oorsprong, dat de amplitude

oneindig klein is, dat er geen uitwendige krachten op den slinger aangrijpen, en tenslotte, dat het slingerlichaam geen vervormingen ondergaat.

De bewegingsvergelijking wordt dan

$$\text{I A} \quad \frac{g}{l} \theta + \theta'' = 0$$

S is dus de samenvatting van alle storingstermen, die men in de praktijk aan de bewegingsvergelijking moet toevoegen.

Zooals bekend mag verondersteld worden, is de oplossing van vergelijking I A :

$$\theta = a \sin nt$$

waarbij verondersteld wordt, dat t gerekend wordt vanaf het oogenblik dat de slinger den evenwichtsstand passeert.

De grootheid a is de amplitude van den slinger.

De hoek nt noemen wij de fasehoek φ van den slinger. Deze is dus nul bij doorgang door den evenwichtsstand.

De snelheid waarmee de fasehoek φ verandert, noemen wij de fasesnelheid. Deze is dus door n voorgesteld, en is constant.

De slingertijd τ is te definiëeren als de tijd waarin de fasehoek φ met π toeneemt, dus:

$$\tau = \frac{\pi}{n}$$

Verder is als bekend te veronderstellen :

$$n = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ en } \tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

De hoeksnelheid van den slinger θ' is:

$$\theta' = an \cos nt$$

De oplossing van de algemeene slingervergelijking I zullen wij in denzelfden vorm trachten te brengen. Te dien einde voeren wij in de grootheden a en φ , gegeven door:

$$\text{II} \quad \begin{aligned} \theta &= a \sin \varphi \\ \theta' &= an \cos \varphi \text{ waarin } n = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

a is weer op te vatten als de amplitude van den slinger, welke echter om aan vergelijking I te kunnen voldoen, niet constant zal zijn. Volgens dit begrip der amplitude is het een continue grootheid, die op elk oogenblik, onverschillig of de slinger zijn grootste uitwijking heeft of niet, een zekere waarde heeft.

φ is weer te beschouwen als de fasehoek van den slinger, die volgens de gemaakte veronderstellingen nul is, wanneer de slinger door den evenwichtsstand gaat.

De afgeleide van φ naar den tijd noemen wij μ . Dit is dus de hoeksnelheid, waarmee de fasehoek verandert, m. a. w. de fasesnelheid. Zij zal in 't algemeene geval niet constant zijn. Het verschil met de constante fasesnelheid n van den theoretischen slinger noemen wij f .

f is dus de veranderlijke toename van de fasesnelheid door het optreden van den storingsterm S .

Den slingertijd T definiëren wij weder als den tijd waarin φ met π toeneemt, d. w. z.:

$$\pi = \int_t^{t+T} \mu dt$$

Uit II volgt door differentiatie van θ naar t :

$$\theta' = a \mu \cos \varphi + a' \sin \varphi = a n \cos \varphi$$

dus

$$\text{III A} \quad a f \cos \varphi + a' \sin \varphi = 0$$

Een tweede verband tusschen a , φ en f vindt men door invoering van θ en θ'' in vergelijking I:

$$\begin{aligned} \theta'' &= - a n \mu \sin \varphi + a n' \cos \varphi \\ &= - a n^2 \sin \varphi - a n f \sin \varphi + a' n \cos \varphi \end{aligned}$$

geeft in I ingevoerd:

$$\text{III B} \quad a' \cos \varphi - a f \sin \varphi + \frac{S}{n} = 0$$

Lost men f en a' uit de vergelijkingen III A en III B op, dan vindt men

$$\text{IV A} \quad f = \frac{S}{an} \sin \varphi$$

$$\text{IV B} \quad a' = -\frac{S}{n} \cos \varphi$$

Hiermede is het vraagstuk in hoofdzaak opgelost.

III B geeft den invloed van S op de amplitude, terwijl uit IV A onmiddellijk die op den slingertijd is af te leiden:

$$-\int_0^T f dt = -\int_0^T \mu dt + \int_0^T n dt = -\pi + n T = n(T - \tau)$$

$$\text{IV C} \quad \text{dus } T - \tau = -\frac{1}{n^2} \int_0^T \frac{S}{a} \sin \varphi dt.$$

Wij zullen verder steeds onderstellen dat S klein is, zoodat de storingen in slingertijd en amplitude klein zijn. In dat geval kan men voor de berekening daarvan uit IV B en IV C, in die formules voor φ zonder bezwaar $n t$ stellen, en voor a een gemiddelde amplitude invoeren. Men kan dan IV B en IV C integreeren, mits S als functie van t , φ of a bekend is.

De formule neemt dan den vorm aan:

$$T - \tau = -\frac{1}{n^2 a} \int_0^T S \sin \varphi dt = -\frac{1}{n^2 a} \int_0^{\pi} S \sin \varphi d\varphi$$

Voor de direct daarop volgende slingering krijgt men:

$$T - \tau = -\frac{1}{n^2 a} \int_T^{2T} S \sin \varphi dt = -\frac{1}{n^2 a} \int_{\pi}^{2\pi} S \sin \varphi d\varphi$$

Wij zullen ons in het vervolg steeds bezig houden met de gemiddelde slingertijdsstoring in twee achtereenvolgende slingeringen, gedurende welke de fasehoek met 2π toeneemt. Deze wordt dus gegeven door:

$$\text{IV D} \quad T - \tau = -\frac{1}{2n^2 a} \int_0^{2T} S \sin \varphi dt = -\frac{1}{2n^2 a} \int_0^{2\pi} S \sin \varphi d\varphi$$

Verstaat men nu verder onder a' steeds de amplitudeverandering gedurende dezen zelfden tijdsduur, gedeeld door $2T$, dat wil dus zeggen, de gemiddelde amplitudeverandering per tijdseenheid gedurende twee achtereenvolgende slingeringen, dan vindt men uit IV B:

$$\text{IV E} \quad a' = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2T} S \cos \varphi dt = - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} S \cos \varphi d\varphi$$

Wij zullen nu nog berekenen, hoe groot ongeveer de fout is, die men door de bovenstaande verwaarloozing maakt, zoodat men kan nagaan beneden welke grens S moet blijven, om een zekere nauwkeurigheid in het resultaat te waarborgen.

De graad van nauwkeurigheid, die met de slingertoestellen ter bepaling van de zwaartekracht te bereiken is, is 1×10^{-7} seconde in den slingertijd.

Men moet dus den eisch stellen, dat de gemaakte berekeningsfout in de slingertijdsstoring $T - \tau$ kleiner is dan $0.5 \cdot 10^{-7}$ seconde. Men vindt dan dat de storingsterm S zoo klein moet zijn, dat de slingertijdsafwijking blijft beneden 0.0001 seconde, en de verhouding $\frac{a'}{a}$ beneden 0.0016.

Door deze voorwaarde kan men echter reeds bij kleine waarden van S op moeilijkheden stuiten, ingeval de amplitude van den slinger zeer klein is, wat ook wel duidelijk is, daar dan o. a. de verandering van fasesnelheid groot kan zijn en dus de invoering van een constant gemiddelde tot groote fouten moet leiden.

Voor dit geval moeten wij dus de formules verder ontwikkelen.

Vermenigvuldig daartoe III A met $\cos nt$, III B met $-\sin nt$ en tel samen:

$$a' \sin(\varphi - nt) + af \cos(\varphi - nt) - \frac{S}{n} \sin nt = 0$$

Dit is te integreeren:

$$\text{V A} \quad -a \sin(\varphi - nt) = -\frac{1}{n} \int_0^t S \sin nt dt$$

Vermenigvuldig III A met $\sin nt$, III B met $\cos nt$ en tel samen :

$$a' \cos(\varphi - nt) - af \sin(\varphi - nt) + \frac{S}{n} \cos nt = 0$$

geïntegreerd :

$$\text{V B} \quad a \cos(\varphi - nt) - a_0 = -\frac{1}{n} \int_0^t S \cos nt \, dt$$

Hierin is a_0 de amplitude ten tijde $t = 0$, terwijl wij de fasehoek φ op dat moment 0 veronderstelden.

Is a_0 gegeven en S als functie van den tijd bekend, dan zijn uit de formules V a en φ te berekenen; de slingertijd T ten tijde t volgt weer uit:

$$\pi = \varphi_{t+T} - \varphi_t$$

Hiermede is dus de algemeene oplossing gegeven.

Wij kunnen het verband van de formules V met de formules IV D en E onmiddellijk inzien, als wij de integratie in V uitsprekken over den tijd $2T$. Men krijgt dan:

$$a \sin 2n(T - \tau) = -\frac{1}{n} \int_0^{2T} S \sin nt \, dt$$

$$a \cos 2n(T - \tau) - a_0 = -\frac{1}{n} \int_0^{2T} S \cos nt \, dt$$

Is de afwijking $T - \tau$ klein, dan krijgt men:

$$2n a(T - \tau) = -\frac{1}{n} \int_0^{2T} S \sin nt \, dt$$

$$a - a_0 = -\frac{1}{n} \int_0^{2T} S \cos nt \, dt$$

wat overeenstemt met de formules IV D en E.

Wanneer in het vervolg het tegendeel niet uitdrukkelijk vermeld is, wordt verondersteld dat aan de bovenbesproken verwaarloozingsvoorwaarden voldaan wordt en dat dus de formules IV D en E gebruikt kunnen worden. Wij zullen slechts bij uitzondering de formules V A en B hebben toe te passen.

Uit de twee andere evenwichtsvergelijkingen is de ophangpuntreactie R te bepalen.

Het is wenschelijk dit uit te voeren, om de door deze reactie veroorzaakte bewegingen van het statief te kunnen nagaan. Buitendien moeten wij haar kennen om de kleine onder M_R aangeduide momenten te kunnen berekenen, ontstaande wanneer het aangrijpingspunt niet samenvalt met den oorsprong van het coördinatenstelsel.

Voor beide doeleinden kan men volstaan met het berekenen van de hoofdtermen van R . Het heeft dus geen zin de kleine termen te berekenen, voortvloeiende uit de verschillende oorzaken, waarvan wij den invloed op de bewegingsvergelijking in den term S hebben samengevat. Dit aan te toonen levert geen moeilijkheden op; wij zullen het hier achterwege laten. Voor de berekening van R zullen wij dus uitgaan van den theoretischen slinger.

Van de op een oneindig klein deeltje werkende zwaartekracht, is de x component $-g dm$ en de y component 0 .

Van de op dat deeltje werkende traagheidskracht is de component langs den voerstraal: $\rho (\theta')^2 dm$ en loodrecht daarop: $\rho \theta'' dm$, zoodat de x component is:

$$x (\theta')^2 dm - y \theta'' dm$$

en de y component:

$$y (\theta')^2 dm + x \theta'' dm$$

In het ophangpunt grijpt dan nog R aan met de componenten R_x en R_y . Geïntegreerd over het geheele slingerlichaam krijgt men:

$$R_x - mg - (\theta')^2 h m \cos \theta - \theta'' h m \sin \theta = 0$$

$$R_y + (\theta')^2 h m \sin \theta - \theta'' h m \cos \theta = 0$$

Bij de waarnemingen met de slingertoestellen is de amplitude zoo klein (zelfs bij de Fransche toestellen overtreft zij nooit 1°) dat bij de nauwkeurigheid die wij voor R wenschen, de termen van de orde θ^3 en hooger verwaarloosd kunnen worden.

Wij vinden dan:

$$R_x = mg + mh (\theta')^2 + mh \theta'' \theta$$

$$R_y = mh \theta'' = -mg \frac{h}{l} \theta$$

Beschouwen wij nu nog de vergelijkingen IV nader, om er eenige belangrijke algemeene conclusies uit te trekken.

Allereerst blijkt dat wij den invloed van elk der termen van S op slingertijd en amplitude afzonderlijk kunnen bepalen, zonder de andere in rekening te brengen. Dit is ook wel duidelijk, daar het voortvloeit uit de gemaakte veronderstelling dat S zoo klein is, dat $(T - \tau)$ kleiner dan 0.0001 secunde is, en $\frac{a'}{a}$ beneden 0.0016.

Dit komt n.l. hierop neer dat de afwijkingen zoo klein zijn, dat hun producten en quadraten verwaarloosd kunnen worden, wat we ook zòd kunnen formuleeren, dat de verandering, die een storing ondergaat door het gelijktijdig werken van een tweeden afwijkingsinvloed, verwaarloosd wordt.

In verband hiermee kunnen wij in formule I de producten der afwijkingsinvloeden verwaarloozen en vinden dan:

$$S = \frac{1}{I} \left[M_R + M_D + M_B - mgh (\theta - \sin \theta) + mg \theta \Delta h + \right.$$

$$\left. + m x_0'' h \theta + mh y_0'' \right]$$

Ter herinnering diene dat hierin is:

$-mgh (\theta - \sin \theta)$: de invloed van de eindige amplitude.

M_R : het moment om den oorsprong van R .

M_D : het moment door de omringende lucht op den slinger uitgeoefend.

$M_B + mg \theta \Delta h$: de invloed van de elastische vervorming.

+ $mh \delta x_0''$: de invloed van de verticale beweging van den oorsprong.

+ $mh y_0''$: de invloed van de horizontale beweging van den oorsprong.

Wij zullen in het volgende hoofdstuk achtereenvolgens de grootte van deze termen en hun invloed'op slingertijd en amplitude nagaan.

OPMERKINGEN :

1^o. Tengevolge van de kleinheid van δ blijkt uit de twee laatste termen van S :

Verticale bewegingen van den oorsprong oefenen een invloed uit van kleiner orde dan horizontale bewegingen.

2^o. Uit de formule IV D volgt dat de slingertijdsafwijking nul is wanneer S voor gelijke positieve en negatieve φ dezelfde waarde heeft, m. a. w.:

De slingertijdsafwijking is nul wanneer het storend moment dezelfde waarde heeft bij gelijke uitwijking uit den evenwichtsstand naar weerskanten.

Is S bijvoorbeeld een functie van de hoeksnelheid δ' , dan is deze voorwaarde vervuld, daar

$$\delta' = a \mu \cos \varphi$$

dus δ' is onafhankelijk van het teeken van δ (met verwaarloozing van termen van hoogere orde).

Storende momenten, waarin als eenige veranderlijke de hoeksnelheid optreedt hebben dus geen slingertijdsafwijking tengevolge.

Uit IV E volgt, dat de amplitude niet verandert, wanneer S dezelfde waarde heeft voor twee waarden van φ die samen 180° zijn, d. w. z.:

De amplitude verandert niet wanneer het storend moment even groot is bij dezelfde uitwijking uit den evenwichtstand bij heen- en bij teruggaande beweging van den slinger.

Met verwaarloozing van termen van hoogere orde kan men weer zeggen dat hieraan wordt voldaan als S een functie is van δ of δ'' , dus

De amplitude van den slinger verandert niet als het storend

moment een functie is van den uitwijkingshoek of van de hoekversnelling.

3°. Heeft men twee slingers met ongeveer gelijken slingertijd, die met gelijke amplitude slingeren, maar waarvan het faseverschil π is, dan zullen, wanneer te allen tijde S voor beide slingers gelijk is, de afwijkingen in slingertijd en amplitude voor beide slingers gelijk zijn doch tegengesteld van teeken. Immers de integralen

$$\int_0^{2\pi} S \sin \varphi d\varphi \quad \text{en} \quad \int_0^{2\pi} S \cos \varphi d\varphi$$

zijn voor beide slingers gelijk en tegengesteld, daar $\sin \varphi_1 = -\sin \varphi_2$ en $\cos \varphi_1 = -\cos \varphi_2$.

Wij zullen hiervan bij de behandeling der grondbewegingsstoringen een toepassing maken, waardoor het mogelijk zal blijken de storingen bij het Stückrathtoestel te elimineeren.

Eveneens kan men zeggen, dat wanneer twee slingers met gelijke amplitude en in gelijke fase slingeren, de invloed van een voor beide slingers gelijken term S op slingertijd en amplitude gelijk is.

4°. Voor den reversieslinger kan men het volgende opmerken:

Noemt men de slingertijden om de twee messen T_1 en T_2 , dan is, zooals in de inleiding vermeld is, de gereduceerde slingertijd T gegeven door:

$$T^2 = \frac{h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2}{h_1 - h_2}$$

Wij zullen dit voor het volgende betoog eenigszins herleiden.

Indien de reversieslinger goed geconstrueerd is, verschillen T_1 en T_2 zoo weinig, dat men het kwadraat en de hoogere machten van $T_1 - T_2$ mag verwaarloozen ten opzichte van T . Neemt men als de bereikbare nauwkeurigheid voor T aan $1 \cdot 10^{-7}$ secunde, dan moet daartoe $T_1 - T_2 < 0.0002$ secunde. Wij kunnen dan schrijven:

$$T = T_1 - \frac{h_2}{h_1 - h_2} (T_2 - T_1)$$

of wel

$$\text{VII} \quad T = \frac{h_1 T_1 - h_2 T_2}{h_1 - h_2}$$

Is nu een storingsoorzaak aanwezig die in de bewegingsvergelijkingen voor beide gevallen te allen tijde een gelijk moment om den oorsprong geeft, dan is dus:

$$M_1 = I_1 S_1 = I_2 S_2 = M_2$$

of wel

$$m l_1 h_1 S_1 = m l_2 h_2 S_2$$

Daar l tot op grootheden van hogere orde gelijk is aan l_2 is dus:

$$h_1 S_1 = h_2 S_2 \quad \text{en}$$

$$\frac{S_1}{h_2} = \frac{S_2}{h_1}$$

Wanneer in beide gevallen de amplitude gelijk was, volgt uit IV D dat de slingertijdsafwijkingen omgekeerd evenredig aan h_2 en h_1 waren.

De afwijking in T is dan volgens VII nul:

Wanneer een reversieslinger in zijn twee posities met gelijke amplitude geslingerd heeft, zal een storingsoorzaak die voor beide gevallen een gelijk storend moment gegeven heeft, geen afwijking veroorzaken in den gereduceerden slingertijd T .

5°. Uit de vergelijkingen IV volgt nog dat in 't algemeen een storend moment den grootsten invloed op den slingertijd heeft, als het aangrijpt terwijl de slinger in de buurt van de grootste uitwijking is. De amplitudestoring is dan klein.

Omgekeerd is de amplitudestoring groot en de slingertijdsstoring klein als het aangrijpt terwijl de slinger in de buurt van den evenwichtsstand is.

6°. Als toepassing in de praktijk is te beschouwen de werking van het echappement van een slingeruurwerk.

Stelt men den eisch dat dit zoo weinig mogelijk invloed moet hebben op den slingertijd, dan kan dit met behulp van IV D in formule gebracht worden:

$$\int_0^{.2 T} S \sin \varphi d \varphi = 0$$

Hieraan wordt volgens opmerking 2 voldaan, wanneer het op den slinger uitgeoefende moment een gelijke waarde heeft bij gelijke uitwijking uit den evenwichtsstand naar weerskanten. Gemakkelijk is in te zien dat alleen in dat geval de slingertijdsstoring nul is voor elke amplitude.

HOOFDSTUK III.

Behandeling der storingsoorzaken.

Wij zullen in dit hoofdstuk achtereenvolgens den invloed der verschillende termen van S nagaan. Het is niet de bedoeling alle invloeden te behandelen, die zich bij de slingerwaarnemingen voordoen, doch alleen diegene, waarbij de aard der storing niet onmiddellijk is in te zien.

Onder de niet te behandelen quaesties kunnen bijvoorbeeld genoemd worden alle afwijkingen in de afmetingen en de gedaante van den slinger, voor zoover zij constant zijn tijdens de slingeringen. Deze oefenen invloed uit op de mathematische slingerlengte l , zoodat in de formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

een andere l moet ingevoerd worden. Het verband met de slingertijdsafwijking volgt hieruit onmiddellijk; de amplitudeafwijking is nul.

Onder deze rubriek zijn te rekenen:

- 1°. De invloed van de temperatuur.
- 2°. De gevolgen van het niet pallel zijn der messen van een reversieslinger, waardoor de formule voor den gereduceerden slingertijd ingewikkelder wordt.
- 3°. Het verschil in mesafstand van den stilhangenden reversieslinger, al naarmate de slinger aan het eene of aan het andere mes hangt. Immers doordien het zwaartepunt van den slinger niet in het midden ligt, is de elastische vervorming van het slingerlichaam in beide posities niet gelijk.

Deze en soortgelijke quaesties die als statische vraagstukken behandeld kunnen worden, laten wij verder buiten beschouwing.

Achtereenvolgens zullen wij nagaan:

1. Den invloed van de eindige amplitude.
2. Den invloed van de elastische vervorming.
3. Den invloed van de omringende gassen.
4. Den invloed van de messen, waaronder wij samenvatten het geheele verschijnsel dat zich bij het ophangpunt afspeelt.
5. Den invloed van het meeslingeren, d.w.z. den invloed van de oorsprongsbeweging tengevolge van de reactie van den slinger op het statief.
6. Den invloed van de grondbewegingen, die eveneens een beweging van den oorsprong tengevolge hebben.

1. Amplitude.

De S term $-\frac{g}{l}(\theta - \sin \theta)$ is alleen van θ afhankelijk en heeft dus geen invloed op de amplitude doch alleen op den slingertijd.

Wij ontwikkelen $(\theta - \sin \theta)$ naar θ en verwaarloozen wegens de kleinheid van θ de hogere termen

$$S = -\frac{\mu^2}{6}\theta^3 \dots = -\frac{\mu^2 a^3}{6} \sin^3 \varphi$$

$$\text{VIII} \quad T - \tau = +\frac{a^2}{12\mu} \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{a^2}{16} T$$

waarin a in radialen is uitgedrukt.

2. Elastische vervorming.

Daar wij bij het opstellen der algemeene bewegingsvergelijkingen uitgingen van de afmetingen van den stilhangenden slinger, zijn de afwijkingen waarop wij nu het oog hebben, veroorzaakt door het verschil der elastische verplaatsingen van den stilhangenden en den bewegenden slinger.

Wij zullen voor de volgende beschouwingen uitgaan van een slinger, symmetrisch ten opzichte van het slingervlak, doch verder van geheel willekeurigen vorm. De wijziging van de beschouwingen voor den asymmetrischen slinger stuit trouwens niet op groote moeilijkheden.

Wij zullen aannemen dat het materiaal waaruit de slinger bestaat voldoet aan de wetten der elasticiteitsleer; voor de bij de waarnemingen gebruikte slingers kan men dit veilig doen. Of de onlangs vervaardigde kwarts-slingers hieraan beantwoorden, is mij niet bekend; echter zijn ze voor relatieve waarnemingen geconstrueerd, zoodat de correctie er niet op aankomt.

Wij zullen de inwendige wrijving verwaarloozen, zoodat wij veronderstellen, dat te allen tijde de op een deeltje werkende elastische spanningskrachten in evenwicht zijn met de uitwendige krachten, die te splitsen zijn in de zwaartekracht, en de traagheidskracht van D'ALEMBERT met in het ophangpunt de aldaar aangrijpende reactie.

Beschouwen wij eerst den stilhangenden slinger.

Noem de hoek die de voerstraal van een oneindig klein deeltje dm maakt met de voerstraal van het zwaartepunt α .

Als uitwendige kracht werkt alleen de zwaartekracht, met de componenten:

$$\begin{aligned} \text{IX A} \quad & \text{In } \rho \text{ richting: } P_1 = g \, dm \, \cos \alpha \\ & \text{loodrecht daarop: } Q_1 = -g \, dm \, \sin \alpha \end{aligned}$$

Bekend is verder:

$$\text{X A} \quad \int_0^m \rho \sin \alpha \, dm = 0 \quad \int_0^m \rho \cos \alpha \, dm = hm$$

welke de ligging van het zwaartepunt bepalen.

Wij noemen de verandering van ρ bij bewegenden slinger $\Delta \rho$ en die van α : $\Delta \alpha$. Zoowel $\Delta \rho$ als $\Delta \alpha$ zijn dus veranderlijke elastische grootheden.

Bij bewegenden slinger zijn de componenten der uitwendige krachten en traagheidskrachten op een oneindig klein deeltje dus: in ρ richting:

$$P_2 = +g \, dm \, \cos (\rho + \alpha + \Delta \alpha) + dm (\rho + \Delta \rho) \left[g' + (\Delta \alpha)' \right]^2 - dm (\Delta \rho)''$$

in tangentieele richting :

$$Q_2 = -g dm \sin(\theta + \alpha + \Delta\alpha) - dm(\rho + \Delta\rho) \left[\theta'' + (\Delta\alpha)'' \right] - \\ - 2 dm (\Delta\rho)' \left[\theta' + (\Delta\alpha)' \right]$$

of met verwaarloozing van kwadraten en producten van elastische grootheden :

$$P_2 = g dm \cos(\theta + \alpha + \Delta\alpha) + dm \rho (\theta')^2 + dm \Delta\rho (\theta')^2 + \\ + 2 dm \rho \theta' (\Delta\alpha)' - dm (\Delta\rho)''$$

IX B

$$Q_2 = -g dm \sin(\theta + \alpha + \Delta\alpha) - dm \rho \theta'' - dm \Delta\rho \theta'' - \\ - dm \rho (\Delta\alpha)'' - 2 dm (\Delta\rho)' \theta'$$

terwijl in het ophangpunt nog de reactie R_2 werkt.

De ligging van het zwaartepunt in den slinger en daarmee van de voerstraal van waaruit θ gemeten wordt, wordt weer gegeven door :

$$\int (\rho + \Delta\rho) \sin(\alpha + \Delta\alpha) dm = 0 \\ \int (\rho + \Delta\rho) \cos(\alpha + \Delta\alpha) dm = (h + \Delta h) m$$

of met dezelfde verwaarloozing en gebruikmaking van X A :

$$\int_0^m \rho \Delta\alpha \cos \alpha dm + \int_0^m \Delta\rho \sin \alpha dm = 0$$

X B

$$- \int_0^m \rho \Delta\alpha \sin \alpha dm + \int_0^m \Delta\rho \cos \alpha dm = \Delta h \times m$$

Noemt men de elastische verplaatsing evenwijdig aan de

voerstraal van het zwaartepunt Δu dan kan men het linkerlid ook schrijven :

$$\int_0^m \Delta u \, dm = m \Delta h$$

Men had dit ook uit arbeidsoverwegingen onmiddellijk kunnen afleiden.

Het verschil der elastische verplaatsingen bij bewegenden en stilhangenden slinger, d. w. z. de groottheden $\Delta \varphi$ en $\Delta \alpha$ worden veroorzaakt door het verschil der op deze werkende krachten, welk verschil dus de componenten heeft (IX B - IX A) :

in φ richting :

$$\begin{aligned} \text{IX} \quad P = & -g \, dm \, (\vartheta + \Delta z) \sin \left[\alpha + \frac{(\vartheta + \Delta z)}{2} \right] + dm \, \varphi \, \vartheta'^2 + \\ & + dm \, \Delta \varphi \, (\vartheta')^2 + 2 \, dm \, \varphi \, \vartheta' \, (\Delta \alpha)' - dm \, (\Delta \varphi)'' \end{aligned}$$

loodrecht daarop :

$$\begin{aligned} Q = & -g \, dm \, (\vartheta + \Delta z) \cos \left[\alpha + \frac{(\vartheta + \Delta z)}{2} \right] - dm \, \varphi \, \vartheta'' - \\ & - dm \, \Delta \varphi \, \vartheta'' - dm \, \varphi \, (\Delta \alpha)'' - 2 \, dm \, (\Delta \varphi)' \, \vartheta' \end{aligned}$$

In het ophangpunt werkt verder het verschil der reacties $R_2 - R_1 = R$ welk verschil evenwicht maakt met de resultante der krachten P en Q .

Deze krachten zijn als statische belastingen van het slingerlichaam te beschouwen.

In het algemeen zal de theoretisch strenge bepaling van de elastische verplaatsingen, door P en Q veroorzaakt, groote moeilijkheden opleveren, temeer daar P en Q zelve daarvan weer direct afhankelijk zijn. Wij veronderstellen nu echter dat de elastische verplaatsingen en de afgeleiden daarvan naar den tijd zoo klein zijn, dat de daaraan evenredige termen van P en Q verwaarloosd kunnen worden. Aan deze onderstelling voldoen wellicht niet de elastische verplaatsingen tengevolge van trilbewegingen, want die verplaatsingen zelf zijn wel zeer gering, maar de afgeleiden naar den tijd behoeven dat niet te zijn, omdat de periode zoo

klein is, dat de snelheden en versnellingen groot kunnen worden. Daar deze trilbewegingen zich zeer wel bij den slinger zouden kunnen voordoen, zou hierin een bezwaar tegen bovenstaande verwaarloozing gelegen zijn. Echter zal later aangetoond worden dat dergelijke kortperiodische verschijnselen geen invloed kunnen uitoefenen op den slingertijd en de amplitude, zoodat hierdoor het bezwaar vervalt.

Wij krijgen nu voor P en Q :

$$P = -g dm \ell \sin \left(\alpha + \frac{\theta}{2} \right) + dm \rho (\theta')^2$$

$$Q = -g dm \ell \cos \left(\alpha + \frac{\theta}{2} \right) - dm \rho \theta''$$

Wij kunnen hierin voor $\theta \theta'$ en θ'' met voldoende nauwkeurigheid stellen: $a \sin \varphi$, $a \rho \cos \varphi$ en $-a \rho^2 \sin \varphi$, zoodat men krijgt, na verwaarloozing der 3^o en hoogere machten van a :

$$P = -g dm \sin \alpha a \sin \varphi - \frac{g dm}{2} \cos \alpha a^2 \sin^2 \varphi + g dm \frac{\rho}{l} a^2 \cos^2 \varphi$$

XI

$$Q = -g dm \cos \alpha a \sin \varphi + g dm \frac{\rho}{l} a \sin \varphi + \frac{g dm}{2} \sin \alpha a^2 \sin^2 \varphi$$

terwijl in het ophangpunt de daarmee evenwicht makende reactie R optreedt.

In het algemeen zal de invloed der termen met a dien der termen met a^2 verre overheerschen.

Wij moeten thans nagaan welke afwijking het moment van zwaartekracht en traagheidskrachten om den oorsprong ondergaat tengevolge van de grootheden $\Delta \alpha$ en $\Delta \rho$; welke afwijking wij in hoofdstuk II hebben samengevat in de termen

$$mg \ell \Delta h + M_B$$

Het moment van de op een massadeeltje dm werkende krachten om den oorsprong is, met verwaarloozing der quadraten en producten van $\Delta \rho$ en Δz :

$$-(\rho + \Delta\rho) Q_2 = g dm \rho \sin(\theta + \alpha) + dm \rho^2 \theta'' + \Delta\rho g dm \sin(\theta + \alpha) + \\ + \rho \Delta z g dm \cos(\theta + \alpha) + 2 dm \rho \Delta\rho \theta'' + dm \rho^2 (\Delta z)'' + 2 dm \rho \theta' (\Delta\rho)'$$

De andere storende momenten worden hier, in overeenstemming met de opmerking op blz. 31 verwaarloosd.

Waren $\Delta\rho$ en Δz nul dan zou het moment zijn:

$$g dm \rho \sin(\theta + \alpha) + dm \rho^2 \theta''$$

Integreert men deze laatste termen over het geheele slingerlichaam met gebruikmaking van X A, dan vindt men, zooals natuurlijk te verwachten was, de twee hoofdtermen van de bewegingsvergelijking van den slinger:

$$mg h \sin \theta + I \theta''$$

De afwijking van dit moment tengevolge van de elastische vervormingen Δz en $\Delta\rho$ is dus voor het deeltje dm :

$$g dm \theta \Delta h + dM_B = \Delta\rho g dm \sin(\theta + \alpha) + \rho \Delta\alpha g dm \cos(\theta + \alpha) + \\ + 2 dm \rho \Delta\rho \theta'' + dm \rho^2 (\Delta z)'' + 2 dm \rho \theta' (\Delta\rho)'$$

De eerste twee termen van het rechterlid stellen voor de verandering van het zwaartekrachtsmoment, zooals blijkt met behulp van vergelijking X B. Met verwaarloozing van termen van hogere orde krijgt men:

$$\int_0^m g \Delta\rho \sin(\theta + \alpha) dm + \int_0^m g \rho \Delta\alpha \cos(\theta + \alpha) dm = mg \theta \Delta h$$

waarin Δh zooals wij reeds vonden gegeven is door:

$$\int_0^m \Delta u dm = m \Delta h$$

zoodat de verandering in het zwaartekrachtsmoment wordt:

$$\text{XII A} \quad mg \theta \Delta h = g a \sin \varphi \int_0^m \Delta u dm$$

Wij moeten nu nog M_B berekenen door de drie laatste termen te integreeren. Wij kunnen daarbij weder invoeren:

$$\begin{aligned} l &= a \sin \varphi \\ l' &= a\mu \cos \varphi \\ l'' &= -a\mu^2 \sin \varphi \end{aligned}$$

en vinden dan:

$$\text{XII B} \quad M_B = \int_0^m \left[\rho^2 (\Delta\alpha)'' - 2\frac{g}{l} \rho a \sin \varphi \Delta\varphi + 2\mu \rho a \cos \varphi (\Delta\rho') \right] dm$$

Samengeteld geven dus de vergelijkingen XII A en B het storend moment; hierin zal de eerste term van XII B het belangrijkste zijn, daar de andere termen alle den factor a hebben.

Een beschouwing van de formules XI en XII tezamen maakt verschillende vereenvoudigingen mogelijk. Uit XI n.l. blijkt dat de elastische verplaatsingen door P en Q veroorzaakt zullen bestaan uit drie deelen:

- 1^o. een deel evenredig aan $a \sin \varphi$ vermenigvuldigd met een van t onafhankelijken factor;
- 2^o. een deel evenredig aan $a^2 \sin^2 \varphi$ vermenigvuldigd enz.
- 3^o. " " " " $a^2 \cos^2 \varphi$ " "

Ingevoerd in de formules XII A en B geeft het 1^e deel:

$$\begin{array}{llll} \text{een term evenredig aan } a \sin \varphi & \text{vermenigvuldigd enz.} & & \\ \text{" " " " } a^2 \sin^2 \varphi & \text{" " " " } & & \\ \text{" " " " } a^2 \cos^2 \varphi & \text{" " " " } & & \end{array}$$

Past men de algemeene storingsformule IV D en E toe op de laatste twee termen, dan blijken deze noch een slingertijdsstoring, noch een amplitudestoring te geven.

De eerste term, ontstaande door substitutie van de aan $a \sin \varphi$ evenredige elastische verplaatsing in den term $\int_0^m \rho^2 (\Delta\alpha)'' dm$, blijkt geen amplitudestoring, doch wel een slingertijdsstoring te geven.

Het tweede deel der elastische verplaatsingen geeft in XII A en B ingevoerd:

een term evenredig aan $a^2 \sin^2 \varphi$ vermenigvuldigd enz.
 " " " " $a^3 \sin^3 \varphi$ " "
 " " " " $a^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi$ " "

De eerste term geeft weer geen storing in amplitude of slinger-tijd. De laatste twee termen hebben den factor a^3 en mogen dientengevolge verwaarloosd worden tegenover die met a .

Het derde deel der elastische verplaatsingen geeft tenslotte in XII A en B ingevoerd:

een term evenredig aan $a^2 \cos^2 \varphi$ vermenigvuldigd enz.
 " " " " $a^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi$ " "
 " " " " $a^3 \cos^3 \varphi$ " "

De eerste term geeft geen storing in amplitude en slingertijd en de twee laatste termen kunnen weer verwaarloosd worden wegens den factor a^3 .

Wij kunnen ons bij de berekening van het storend moment voorzoover het van belang is voor de slingertijdsstoring dus bepalen tot den term:

$$\int_0^m \rho^2 (\Delta z_1)^2 dm$$

waarin Δz_1 is de elastische hoekverandering van den voerstraal veroorzaakt door de aan $a \sin \varphi$ evenredige termen van P en Q :

in ρ richting: $-g \sin \alpha a \sin \varphi dm$

loodrecht daarop: $-g \cos \alpha a \sin \varphi dm + g \frac{z}{l} a \sin \varphi dm$

met den daarmee evenwicht makenden hoofdterm van R in het ophangpunt.

De amplitudeverandering blijkt uit het bovenstaande nul te zijn.

Wij moeten nu nog een opmerking maken naar aanleiding van de as ten opzichte waarvan de elastische verplaatsing gemeten

wordt. De totale elastische verplaatsingen veroorzaakt door de krachten P en Q hebben wij gemeten ten opzichte van een stelsel, waarvan de as door het ophangpunt en het zwaartepunt gaat, d. w. z. de elastische verplaatsing van het zwaartepunt (niet te verwarren met de punten van het lichaam, waarmee het tijdelijk samenvalt) loodrecht op de as is nul (1^o vergelijking van X B).

Dit is op elk moment juist, dus onafhankelijk van de waarde van φ . Hieruit volgt dat de zwaartepuntsverplaatsing loodrecht op de as nul is voor elk van de drie deelen, waarin wij de totale elastische verplaatsingen splitsen. Bij de vervorming door de hoofdtermen van P en Q , wordt dus ook de elastische verplaatsing gemeten ten opzichte van een as door het zwaartepunt.

Ten behoeve der verdere berekening zullen wij invoeren de constante elastische verplaatsingen Δr in de richting van den voorstraal en Δs loodrecht daarop, die veroorzaakt worden door een stelsel constante krachten K evenredig aan de hoofdtermen van P en Q :

$$\begin{aligned} K_\rho &= -g \, dm \sin \alpha && \text{in } \rho \text{ richting} \\ \text{XIII A} \quad K_s &= -g \, dm \cos \alpha + \frac{\rho}{l} g \, dm && \text{in } s \text{ richting} \end{aligned}$$

Ook hierbij blijft de as door het zwaartepunt gaan wat analoog aan X B tot uitdrukking komt in:

$$\text{XIII B} \quad \int_0^m (\Delta s \cos \alpha + \Delta r \sin \alpha) \, dm = 0$$

Wij krijgen nu:

$$\rho \Delta z_1 = a \sin \varphi \Delta s$$

dus

$$\rho (\Delta z_1)'' = -a \mu^2 \sin \varphi \Delta s$$

Het storend moment is dus:

$$-a \mu^2 \sin \varphi \int_0^m \rho \Delta s \, dm$$

De daarmee overeenkomende storingsterm in S is dan:

$$-\frac{a \mu^2}{hml} \sin \varphi \int_0^m \rho \Delta s dm$$

Ingevoerd in IV D krijgt men:

$$\text{XIII C} \quad T - \tau = + \frac{T}{2 hml} \int_0^m \rho \Delta s dm$$

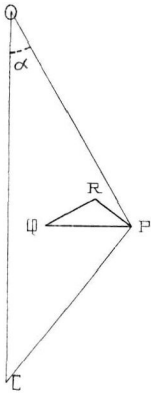
terwijl IV E geeft:

$$a' = 0$$

zooals hierboven reeds werd opgemerkt.

Hiermede is de oplossing gegeven.

Wij kunnen haar nog in eenvoudiger vorm brengen:



Wij zetten daartoe op de as een lengte $OC = l$ uit en noemen C het *slingerpunt*. Is de slinger een reversieslinger dan valt het tweede ophangpunt met het slingerpunt samen.

$OP = \rho =$ voerstraal van een willekeurig deeltje dm .

Noem $CP = \rho_s$

Maak $QP \perp OC$ en $QP = g dm$

Maak $QR \perp OP$ en $QR = \frac{\rho}{l} g dm$

Uit XIII A volgt dan:

$$PR = K.$$

Daar $\Delta QRP \sim \Delta OPC$ staat $PR \perp CP$ en is lang $\frac{\rho_s}{l} g dm$ dus:

De kracht K staat loodrecht op de verbindingslijn ρ_s met het slingerpunt en is groot

$$\text{XIII D} \quad K = \frac{\rho_s}{l} g dm$$

XIII C is met behulp van XIII A en XIII B nog in anderen vorm te schrijven:

$$T - \tau = \frac{T}{2 hmg} \int_0^m \frac{\rho}{l} \Delta s g dm = \frac{T}{2 hmg} \int_0^m (K_s \Delta s + K_\rho \Delta r) =$$

$$= \frac{T}{hmg} A$$

XIII E

$$T - \tau = \frac{T}{hmg} A$$

waarin wij onder A verstaan de vormveranderingsarbeid door de krachten K met bijbehorende reactie in het ophangpunt in het leven geroepen. (De reactie R in het ophangpunt verricht geen arbeid bij bovengebruikt assenstelsel; inderdaad is de integraal dus de totale vormveranderingsarbeid).

Hiermee is het vraagstuk opgelost in een eenvoudigen vorm die niet meer van het coördinatenstelsel afhankelijk is.

Uit de formules kunnen wij de gevolgtrekking maken dat blijkbaar massa's in de buurt van het slingerpunt en van het ophangpunt op den slingertijd weinig effect hebben; de eerste omdat de overeenkomstige krachten K dan klein zijn, de tweede omdat de daardoor veroorzaakte vormveranderingsarbeid klein is.

Andere oplossingen van het vraagstuk kan men vinden in:

„Beiträge zur Theorie des Reversionspendels” van F. R. HELMERT en in:

„Absolute Schwerkraftsbestimmung zu Potsdam” van F. KÜHNEN en PH. FURTWÄNGLER.

Heeft men een reversieslinger, dan kan men de oplossing nog in anderen vorm brengen.

Men vindt voor de slingertijdsafwijking $T - \tau$ in den gereduceerden slingertijd met behulp van formule VII:

$$T - \tau = \frac{T}{mg (h_1 - h_2)} (A_1 - A_2)$$

waarin A_1 en A_2 de vormveranderingsarbeid voorstellen, veroorzaakt door de twee krachtenstelsels K_1 en K_2 , behorende bij de slingering om de twee ophangpunten.

$A_1 - A_2$ kan berekend worden zonder A_1 en A_2 afzonderlijk te berekenen. Dit is het eenvoudigste aan te toonen met behulp van vectoranalyse. Wij zullen daarbij de vectoren onderscheiden door een streep boven de letter.

Noem de eenheidsvectoren in de richting der coördinaatassen \bar{X} , \bar{Y} en \bar{Z} ; de voerstralen van een deeltje dm naar de beide ophangpunten $\bar{\rho}_1$ en $\bar{\rho}_2$; de elastische verplaatsingen, door de krachtenstelsels K_1 en K_2 veroorzaakt $\bar{\Delta}_1$ en $\bar{\Delta}_2$, dan is:

$$\bar{K}_1 = \frac{g dm}{l} \bar{\rho}_2 \times \bar{Z} \qquad \bar{K}_2 = \frac{g dm}{l} \bar{\rho}_1 \times \bar{Z}$$

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= \frac{1}{2} \int^m (\bar{K}_1 \cdot \bar{\Delta}_1 - \bar{K}_2 \cdot \bar{\Delta}_2) = \frac{1}{2} \int^m (K_1 + K_2) \cdot (\bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int^m (\bar{K}_1 \cdot \bar{\Delta}_2 - \bar{K}_2 \cdot \bar{\Delta}_1) \end{aligned}$$

De tweede integraal is nul volgens het reciprociteitsbeginsel, dus wij krijgen, als wij $\bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2$ voorstellen door $\bar{\Delta}$ en $\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2$ door $2\bar{r}$:

$$A_1 - A_2 = \frac{1}{2} \int^m (\bar{K}_1 + \bar{K}_2) \cdot \bar{\Delta} = \frac{g}{l} \int^m (\bar{r} \times \bar{Z}) \cdot \bar{\Delta} dm = \frac{g}{l} \int^m (\bar{r} \times \bar{\Delta}) dm$$

\bar{r} is volgens de definitie, de verbindingslijn van dm met het punt M dat midden tusschen de twee ophangpunten ligt.

$\bar{\Delta}$ is de elastische verplaatsing, die veroorzaakt wordt door

$$K_1 - K_2 = \frac{g dm}{l} (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1) \times \bar{Z} = g dm \bar{Y}$$

$\bar{\Delta}$ is dus de elastische verplaatsing door het eigen gewicht van den slinger, wanneer men zich den slinger zóó gedraaid denkt dat de Y as verticaal is, d. w. z. dat de slingeras horizontaal is. De reacties grijpen aan in de beide ophangpunten.

Noemt men $\bar{\Delta} dm$ de massaverplaatsing van het deeltje dm , dan stelt

$$\int \bar{r} \times \bar{\Delta} dm$$

voor het moment van de massaverplaatsing van het geheele slingerlichaam om het punt M .

Voor de voor de absolute zwaartekrachtmetingen gebruikte slingers is nog een verdere vereenvoudiging mogelijk. Deze zijn namelijk alle symmetrisch ten opzichte van het slingermiddelpunt M met uitzondering van een slingergewicht P dat aan een der uiteinden bevestigd is.

Noemt men

m_s de massa van het symmetrische deel van den slinger;

$\bar{\Delta}_s$ de door het gewicht van dat deel veroorzaakte elastische verplaatsing;

Δ_p de door P veroorzaakte elastische verplaatsing;

$\bar{\Delta}_{sp}$ en $\bar{\Delta}_{pp}$ de $\bar{\Delta}_s$ en $\bar{\Delta}_p$ voor het punt P ;

\bar{H} de afstand MP ;

dan is:

$$\int \bar{r} \times \bar{\Delta} dm = \int_0^{m_s} \bar{r} \times \bar{\Delta}_s dm + \int_0^{m_s} \bar{r} \times \Delta_p dm + \frac{P}{g} \bar{H} \times \bar{\Delta}_{sp} + \frac{P}{g} \bar{H} \times \bar{\Delta}_{pp}$$

De eerste integraal van het rechterlid is om redenen van symmetrie nul. De derde term kan met behulp van de stelling van MAXWELL geschreven worden in den vorm:

$$\int_0^{m_s} \bar{H} \times \bar{\Delta}_p dm$$

Men kan dan de laatste drie termen samenvoegen en vindt door invoering in de formule voor $T - \tau$:

$$T - \tau = \frac{T}{ml(h_1 - h_2)} \int_0^m (\bar{r} + \bar{H}) \times \bar{\Delta}_p dm$$

Bij deze integratie is de massa van het slingergewicht half in rekening te brengen. Met voorbehoud daarvan stelt de integraal voor het moment van de massaverplaatsing, door de kracht P veroorzaakt, om het punt aan het andere slingereinde, dat met P symmetrisch ligt.

De berekening van de integraal blijft wegens den ingewikkelden vorm van de gebruikte slingers nog vrij omslachtig. Het schijnt mij daarom aangewezen, dit grafisch te verrichten, waarvoor de vorenstaande oplossingsvorm zeer geschikt is. Men laat daartoe op het op de ophangpunten steunende slingerlichaam de kracht P aangrijpen loodrecht op de slingeras, construeert de elastische lijn; vermenigvuldigt elke doorbuigingsordinaat met den inhoud van de slingerdoorsnede op dat punt, waarbij de doorsnede van het slingergewicht half in rekening wordt gebracht; en construeert het moment van het zoo verkregen oppervlak om het punt dat symmetrisch met P aan het andere slingereinde ligt.

Men kan op deze wijze ook beter in rekening brengen, dat bij veranderingen in doorsnede van den slinger, het voor de buiging in rekening te brengen traagheidsmoment geleidelijk verandert. Men moet er verder ook acht op slaan, dat op sommige plaatsen een deel van de doorsnede geen weerstand biedt tegen buiging en dus voor de berekening van het traagheidsmoment buiten rekening blijft, zooals bijvoorbeeld bij de messen, waar de doorsnede loodrecht op het vlak van teekening plotseling veel breeder wordt.

3. Invloed der omringende lucht.

Deze is bij nadere beschouwing in drie deelen te splitsen:

- 1° De invloed van den opwaartschen druk.
- 2° De invloed van de luchtmassa die met den slinger mee in slingering geraakt.
- 3° De wrijving van de luchtdeeltjes onderling en tegen het slingeroppervlak.

De resultante van den opwaartschen druk grijpt aan in het zwaartepunt van het verdrongen luchtvolume en is gelijk aan het gewicht daarvan. Noemt men dit P dan is dus P evenredig aan de dichtheid van de lucht.

De term van S is

$$-\frac{P h_3 b}{I} = -\frac{P h_3}{I} a \sin \varphi$$

waarin $h_3 =$ afstand oorsprong - zwaartepunt luchtvolume.

De invloed op de amplitude is dus nul en die op den slinger-tijd (formule IV):

$$T - \tau = + \frac{P h_3}{2mg} \frac{h_3}{h} \int_0^{2T} \sin^2 \varphi dt = \frac{P h_3}{2mg} \frac{h_3}{h} T$$

De tweede invloed is lastiger na te gaan. Wij kunnen ons voorstellen, dat door den slinger een deel van de omringende gassen in beweging wordt gebracht en in slingering geraakt. Als ruwe benadering kan men aannemen, dat elk luchtdeeltje een slingering om den evenwichtsstand uitvoert, waarvan de amplitude evenredig met de amplitude van den slinger, en de fase dezelfde is. Wanneer wij afzien van de inwendige wrijving van de lucht en de wrijvingsverliezen aan het oppervlak van den slinger, welke wij bij den derden term zullen bespreken, dan zal het effect op de slingerbeweging hetzelfde zijn als een massavermeerdering van den slinger.

Aan de bewegingsvergelijking van den slinger wordt dan toegevoegd een term van den vorm

$$\frac{C_1}{I} g \delta + C_2 g'' = C_3 a \sin \varphi$$

waarin C_1 en C_2 twee constanten zijn, die samen kunnen worden gevoegd tot C_3 .

De toepassing van formule IV D en E geeft weer

$$a' = 0 \quad T - \tau = + \frac{C_3}{2n^2} T$$

De amplitudeverandering is dus nul en de slinger-tijdsverandering is onafhankelijk van de amplitude en hangt alleen samen met de van de luchtdichtheid en slinger-gedaante afhankelijke constante C_3 . Wij komen hierop later nog terug.

Bij onze benadering stelden wij ons voor, dat de slingering der luchtdeeltjes steeds in dezelfde fase verkeerde met den slinger. Zeer wel denkbaar is echter, dat door wrijvingsoorzaken de luchtdeeltjes in fase iets bij den slinger ten achter zijn, zoodat men den betreffenden term van S beter zou schrijven in den vorm:

$$C a \sin(\varphi + \alpha) = -C_4 a \sin \varphi + C_5 a \cos \varphi$$

Men krijgt er dan nog een term evenredig $\cos \varphi$ bij. Toepassing van IV D en E geeft:

$$a' = -\frac{C_5 a}{2\pi} T \quad T - \tau = +\frac{C_4}{2\mu^2} T$$

De amplitudeverandering is dus niet meer nul; zij is evenredig aan a en aan een van luchtdichtheid en slingervorm afhankelijke constante.

De derde invloed is al even moeilijk theoretisch te behandelen.

Het ligt voor de hand als benadering de veronderstelling te maken, dat alle wrijvingsinvloeden evenredig zijn aan de hoeksnelheid θ' . Immers als de uitwijking van elk luchtdeeltje uit den evenwichtsstand volgens de bovengemaakte veronderstelling evenredig is aan θ , dan is zijn snelheid evenredig aan θ' . De snelheidsverschillen van aan elkaar grenzende luchtlagen zijn dan eveneens evenredig aan θ' ; de inwendige wrijving dus ook.

Wij zouden den betreffenden term van S dus kunnen schrijven:

$$C_6 \theta' = C_6 a \cos Q$$

Hiervan is de invloed op den slingertijd nul en volgens IV E is

$$a' = -\frac{C_6 a}{2\pi} \times T$$

Deze amplitudevermindering is dus geheel gelijksoortig met de vorige: evenredig aan a en aan een van luchtdichtheid en slingerform afhankelijk constante.

Volgens deze onderstellingen is de amplitudeverandering dus logaritmisch, d. w. z.

| | | |
|--------|----------------------------------|-----------------------------|
| Stel | $k = (C_5 + C_6) \frac{T}{2\pi}$ | |
| dan is | $a' = -ka$ | |
| en | $a = a_0 e^{-kt}$ | (a_0 aanvangsamplitude). |

Zou men de wrijvingsinvloed onderstellen op andere wijze afhankelijk van de hoeksnelheid θ' te zijn, dan blijkt hierbij de slingertijdsafwijking toch nul te blijven volgens de opmerking N^o. 2, pag. 32. Echter verandert de formule voor de amplitudevermindering.

Stelt men bijv.

$$S = C_7 (\theta')^2 = C_7 a^2 \cos^2 \varphi$$

waarbij wij C_7 denken van teeken te verwisselen voor $\varphi = 90^\circ$ en 270° . De wrijvingsinvloed is namelijk steeds een tegenwerkend moment, zoodat de werking voor heen- en terugslingingering tegengesteld moet zijn; dit zou door evenredigheid aan $(\theta')^2$ niet tot uiting komen; C_6 moet dus van teeken omkeeren tegelijk met de hoeksnelheid. Dit heeft geen invloed op het nul zijn der slingertijdsafwijking zooals uit opmerking 2, biz. 32 onmiddellijk volgt.

Formule IV E geeft nu:

$$a' = - \frac{4}{3 \mu \pi} C_7 a^2$$

d. w. z. de amplitude afneming is evenredig aan het kwadraat van de amplitude.

Geïntegreerd geeft dit:

$$\frac{a_0 - a}{a a_0} = \frac{4}{3 \pi \mu} C_7 t$$

C_7 is weder van dichtheid, druk en slingervorm afhankelijk.

De waarneming der amplitudeverandering leert intusschen, dat de vorige formule beter met de feiten overeenstemt dan deze. De daarvoor gemaakte veronderstelling van de evenredigheid van de wrijvingsinvloeden met θ' , schijnt dus juister te zijn. De grootheid k noemt men de *dempingsconstante*.

De slingertijdsafwijking wordt door de keuze tusschen een der onderstellingen niet beïnvloed. Wij krijgen dus tenslotte als resultaat voor den invloed der omringende lucht:

1^o. Een constante slingertijdsafwijking c , onafhankelijk van de amplitude, doch verband houdende met de gedaante van den slinger, de dichtheid en den druk van de lucht.

- 2^o. Een constante dempingsconstante k , eveneens onafhankelijk van de amplitude, en verband houdend met slingergedaante, dichtheid en druk van de lucht.

Dit is in overeenstemming met de feiten.

Het verband van c en k met dichtheid en druk van de lucht en met de slingergedaante is proefondervindelijk onderzocht.

Een behoorlijke theoretische behandeling is, mede in verband met de ingewikkelde vormen der gebruikte slingers, zeer bezwaarlijk. Het bovenstaande bedoelt dan ook niet meer te zijn dan een schets van het verschijnsel. Wij zullen op de theoretische quaesties niet verder ingaan en alleen vermelden dat STOKES¹⁾ er in slaagde af te leiden, dat de constanten c en k in hoofdzaak uit twee termen bestaan, waarvan de eene evenredig is aan de dichtheid en de andere evenredig aan de wortel van den druk. De laatste term verdwijnt wanneer h en l weinig verschillen.

Bij de Stückerathslingers vallen zwaartepunt en slingerpunt vrijwel samen, zoodat hier de tweede term nagenoeg verdwijnt en dus de correctie ongeveer evenredig aan de dichtheid is. Het maakt een punt van discussie uit in hoeverre men beter doet de tweede constante geheel te verwaarloozen, of wel haar, zij het onnauwkeurig, in rekening te brengen. Een nadere behandeling van deze quaestie ligt niet binnen het bestek van deze verhandeling.

Bij reversieslingers is steeds een vrij groot verschil tusschen h en l , daar $l - h_1 = h_2$, terwijl h_1 en h_2 niet beneden een zekere waarde kunnen komen zonder den slinger voor de waarnemingen onbruikbaar te maken. Men heeft daarbij dus steeds een vrij grooten term evenredig aan den wortel van den druk.

Echter is het mogelijk bij reversieslingers den luchtinvloed op den slingertijd te elimineeren. Volgens Opmerking 4, blz. 34 is het daartoe noodig, dat het storend moment in beide posities van den slinger geheel gelijk is. Dit is hier te bereiken door het slingerlichaam uiterlijk geheel symmetrisch te maken ten opzichte van het vlak, dat den mesafstand loodrecht middendoor deelt. Een absolute symmetrie is in de praktijk natuurlijk niet

¹⁾ On the effect of the internal friction of fluids on the motion of Pendulums, by G. G. STOKES (Transactions of the Cambridge philosophical Society Vol. IX, part II).

bereikbaar. Zonder moeite kan men door berekening een indruk krijgen, beneden welke grens de afwijkingen moeten blijven, om geen merkbare storing in den gereduceerden slingertijd T te geven.

Bij de door DEFFORGES geconstrueerde slingers kan men trouwens eventueele afwijkingen nog elimineeren door het gewicht van het eene slingereinde naar het andere over te brengen. Daardoor verandert n.l. niet de uiterlijke vorm van den slinger, zoodat, zooals gemakkelijk is in te zien, de afwijking van de symmetrie op den gereduceerden slingertijd T van den slinger vóór de verplaatsing van het gewicht, den tegengestelden invloed uitoefent als op de T daarna.

De invloed van de lucht op de amplitude (de dempingsconstante) is veel minder nauwkeurig onderzocht dan de slingertijdsstoring. Ze is ook van minder belang, daar het beoogde eindresultaat is de slingertijdsbepaling; de amplitudeverandering kan ons daarbij tamelijk onverschillig zijn. Toch zou een diepgaand onderzoek betreffende het verband van dempingsconstante, dichtheid en druk van het gas, en slingergedaante waarde hebben om het inzicht in de optredende verschijnselen te verdiepen.

Bij relatieve metingen met den reversieslinger van DEFFORGES, is het niet wenschelijk de eliminatie van den luchtinvloed, door de berekening van den gereduceerden slingertijd T toe te passen. Bij onderzoek van de formule voor T blijkt namelijk, dat de middelbare fout in de bepaling van de slingertijden T_1 en T_2 een veel grooter middelbare fout in T tengevolge heeft, zoodat men door het eindresultaat voor de zwaartekracht op T te bazeeren, een deel der nauwkeurigheid inboet.

Bij de absolute metingen is men daartoe gedwongen, daar de vorming van de waarde T een reeks storingen elimineert, die men niet op andere wijze kan nagaan, zooals de afwijking van h_1 h_2 met I_0 (zie Inleiding), de vorm der messen enz. Daar deze er echter geen van alle bij de relatieve metingen op aan komen, omdat hun invloed op alle stations dezelfde is, geeft de berekening van T dan geen nut.

De eliminatie van den luchtinvloed is eveneens onnoodig, daar men zonder bezwaar voor een bepaalden slinger eens voor

al de betreffende constanten kan bepalen, door een reeks waarnemingen bij verschillenden druk. Men kan dan elke waarneming corrigeren voor den invloed van de lucht.¹⁾ Neemt men dan het gemiddelde der slingertijden T_1 en T_2 , dan vindt men een waarde, die veel nauwkeuriger is dan de gereduceerde slingertijd T .

Het verschil der gemiddelden op twee stations is dus een betrouwbaarder gegeven voor het zwaartekrachtsverschil, dan het verschil der gereduceerde slingertijden.

4. De invloed der messen.

Wij verstaan hieronder den invloed van het verschijnsel dat zich bij het ophangpunt voordoet.

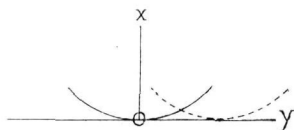
Hangt de slinger stil in den evenwichtsstand, dan zullen zoowel mes als ophangvlak een elastische vervorming ondergaan, waarvan men een indruk zou kunnen verkrijgen door daarop de hardheidstheorie van HERTZ toe te passen. Mes en ophangvlak raken elkaar volgens een smal cylindervlak, dat in vorm het midden houdt tusschen het stuk cylindervlak dat de onvervormde kant van het mes begrenst en het cylindervlak, dat het ophangvlak in onvervormden toestand, van boven begrenst. Dit laatste zal men bij eenigszins behoorlijke afwerking wel als een plat vlak mogen beschouwen. Intusschen doet zich de mogelijkheid voor, dat door het slingeren op den duur een kleine groef ontstaat; in Frankrijk heeft men dit meenen waar te nemen. Dit maakt het onderzoek van de zaak nog moeilijker. De vorm van den nok van het mes is trouwens eveneens geheel onbekend.

Beweegt de slinger zich, dan wordt het verschijnsel zoo ingewikkeld, dat een theoretische behandeling vrijwel onmogelijk wordt. Bij de statische krachten, die een statische elastische vervorming teweeg brengen, voegen zich traagheidskrachten, waarbij de traagheidskrachten, die door de elastische vormveranderingsversnellingen ontstaan, vermoedelijk niet verwaarloosd mogen worden. Bovendien zullen nog wrijvingsverschijnselen optreden.

¹⁾ Was het in de praktijk uitvoerbaar op alle stations bij precies denzelfden luchtdruk waar te nemen, dan zou het voor de relatieve waarnemingen niet noodig zijn haar in rekening te brengen; dit is echter zeer bezwaarlijk, zelfs al kan men de lucht uitpompen.

Men kan pogen door verschillende onderstellingen zich een beeld te vormen, van wat er gebeurt. Voor de hand ligt, om de beweging van het mes op te vatten als een rollen over het ophangvlak. Dit uit zich in de bewegingsvergelijking van den slinger op drie manieren:

- 1^o. Het aangrijpingspunt van de reactie R zal zich heen en weer verplaatsen, waardoor men een wisselend moment om den oorsprong krijgt.
- 2^o. De oorsprong zal in verticale en horizontale richting kleine bewegingen uitvoeren.



samen vallen.

Neemt men den afstand van den oorsprong tot het aanrakingspunt op elk oogenblik y , dan kan men zeggen dat de horizontale bewegingen van den oorsprong zijn van de orde a^2y en de verticale van de orde ay . De daardoor veroorzaakte storingstermen van S zijn dus beide van de orde a^2y , terwijl het onder 1^o genoemde moment een term geeft van de orde y . Wij kunnen dus zonder bezwaar den invloed van de oorsprongbeweging verwaarloozen.

- 3^o. In het aanrakingsvlak van mes en ophangvlak zal nog een wrijvingsmoment overgedragen worden, dat met rollende wrijving te vergelijken is.

Achtereenvolgens zullen wij den invloed van 1^o en 3^o nagaan.

- 1^o. Het moment van R is groot:

$$- R_x y = - mg y$$

Wij hebben hierbij de kleinere termen van R_x verwaarloosd (formule VI blz. 31) daar deze ten opzichte van den hoofdterm van de orde a^2 zijn.

Het moment van de horizontale reactie R_y zal tengevolge van de verticale oorsprongsbeweging niet steeds nul zijn, doch het mag verwaarloosd worden daar het van de orde $a^2 y$ is.

Toepassing van formule IV D geeft:

$$T - \tau = + \frac{1}{2n^3a} \int_0^{2\pi} \frac{mgy}{mhl} \sin \varphi d\varphi = + \frac{1}{2nah} \int_0^{2\pi} y \sin \varphi d\varphi$$

De amplitudeverandering is nul, zooals uit opmerking 2 blz. 32 blijkt.

Wij kunnen $T - \tau$ nog omvormen, als men in aanmerking neemt dat voor $\varphi = 0$ en voor $\varphi = \pi$, $y = 0$ is en verder de kromtestraal van het mes ρ noemt, zoodat $dy = -\rho d\theta = -\rho a \cos \varphi d\varphi$.

Dan is

$$T - \tau = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{y}{2nah} \cos \varphi + \frac{1}{2nah} \int_0^{2\pi} \cos \varphi dy \right) =$$

XIV A

$$= \frac{T}{2\pi h} \int_0^{2\pi} \rho \cos^2 \varphi d\varphi$$

Men kan ook de integraal uitdrukken in de coördinaten x en y van de kromme die de mesdoorsnede begrenst. We maken dan gebruik van:

$$\frac{dx}{dy} = -\theta = -a \sin \varphi$$

Wij vinden dan:

$$\text{XIV B} \quad T - \tau = \frac{T}{\pi a^2 h} \int_{-y_m}^{y_m} \sqrt{a^2 - \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

waarbij de integraal is uit te strekken van de grootste waarde die y naar de eene zijde bereikt $= -y_m$ tot de maximum waarde die y naar de andere zijde bereikt $= y_m$. Deze beide waarden zijn gegeven door respectievelijk

$$\frac{dx}{dy} = -a \quad \text{en} \quad \frac{dx}{dy} = +a$$

De verdere berekening van de integraal in een der gegeven vormen is alleen mogelijk wanneer men de begrenzingskromme van het mes kent.

Neemt men daarvoor een cylinderoppervlak met constanten straal ρ aan dan is (zie XIV A)

$$T - \tau = + \frac{\rho^2}{2h} T$$

Neemt men een horizontale afplatting van het mes aan, zoodat de begrenzing in doorsnede een horizontale lijn is, waarvan wij de breedte $2b$ noemen dan is:

Voor de eene slingering van $\varphi = 0$ tot $\varphi = \pi$, $y = -b$ en voor de tweede van $\varphi = \pi$ tot $\varphi = 2\pi$, $y = b$ zoodat voor beide slingeringen is:

$$T - \tau = + \frac{T}{2\pi ah} \int_0^{2\pi} y \sin \varphi d\varphi = + \frac{2b}{\pi ah} T$$

Wij vinden dus door de rolbeweging geen amplitudestoring en een slingertijdsstoring afhankelijk van den vorm van het mes en in 't algemeen niet onafhankelijk van de amplitude. Is het mes een cylinder met constante straal, dan heeft de amplitude geen invloed op de slingertijdsstoring; hoe meer de vorm daarvan afwijkt, des te sterker zal die invloed optreden. Op deze oorzaak is vermoedelijk terug te voeren het feit, dat men bij amplituden, grooter dan de gewoonlijk bij de waarnemingen gebruikte, een grootere slingertijdstoening gevonden heeft, dan overeenkomt met de in de eerste paragraaf behandelde amplitudecorrectie.

Wij moeten hier ten opzichte van den vorm van het mes nog de opmerking maken, dat, als de afwerking van het mes niet zeer zuiver is, het mes in het algemeen een verzameling van uitstekende punten zal vertoonen, die bij de beweging om de beurt met het ophangvlak in aanraking komen. Het effect zal dan hetzelfde zijn als een gefacetteerd mesoppervlak. In verband hiermee zou mogelijk zijn het optreden van krachten loodrecht op het slingervlak; deze kunnen echter geen invloed op de slingerbeweging uitoefenen.

Voor het geval dat facetten aanwezig zijn, zooals in het bovenbehandelde geval van horizontale afplatting, wijst T. R. HELMERT in „Beiträge zur Theorie des Reversionspendels” op het verlies in arbeidsvermogen door het schoksgewijs in contact komen van nieuwe mesdeelen met het ophangvlak. Dit zou

beteekenen dat R tijdelijk iets grooter was, omdat deze vermeerdering noodig zou zijn om de grootere elastische versnellingen van de op elkaar botsende deelen te veroorzaken. Men kan opmerken dat als deze discontinuïteiten dichtbij den oorsprong liggen, hun invloed klein zal zijn, daar dan het extra moment dat door de vermeerdering van R veroorzaakt wordt, gering is en bovendien de invloed daarvan op den slingertijd klein is (Opmerking 5 blz. 34) Bij het geval van horizontale afplatting zullen wij dientengevolge die afwijking niet behoeven te vreezen.

Treedt dit verschijnsel werkelijk op, dan zal de amplitudeverandering niet meer nul zijn. Het storend moment van R is dan immers bij heen en teruggaanden slinger voor dezelfde uitwijking niet meer gelijk, zoodat Opmerking 2, blz. 32 niet meer kan worden toegepast.

Het schijnt mij echter toe dat het optreden van dit arbeidsvermogenverlies niet waarschijnlijk is. In werkelijkheid immers heeft men geen rollende beweging van twee onvervormde lichamen over elkaar. Het beste zal men den toestand kunnen benaderen door als grenskromme van het mes op te vatten de omhullende aan de binnenzijde van de vervormde grenskrommen van het mes, en als ophangvlak de omhullende aan de onderzijde van de vervormde bovenbegrenzingsen van het oppervlak.

Uitstekende deelen of facetten in mes of ophangvlak, zullen zich in deze omhullenden zeer verzwakt toonen en niet als discontinuïteiten optreden.

Men zal de volgens bovenstaand begrip aangenomen begrenzingskromme van het ophangvlak vrijwel als een horizontale lijn mogen opvatten, daar de maximum indrukking op elk oogenblik in hoofdzaak van het gewicht afhankelijk zal zijn en de omhullende dus nagenoeg evenwijdig aan het onvervormde bovenvlak blijft.

Wij nemen den oorsprong in het snijpunt van de bovengedefinieerde mesbegrenzingskromme met de ophangpuntsreactie bij stilhangenden slinger. In dit geval mag het moment van de horizontale component van de reactie, zooals wij reeds zagen verwaarloosd worden.

Hadden wij den oorsprong genomen in het onvervormde mesoppervlak, dan zou zij beneden het aanrakingspunt van mes en

ophangvlak liggen, zoodat men tijdens de geheele slingerbeweging een moment om den oorsprong zou krijgen, en dientengevolge een slingerijdsstoring. De conclusie die wij hieruit trekken is deze, dat het juist is bij de bepaling der slingerlengte l deze te meten vanaf het ingedrukte mes, dan vanaf het onvervormde mes. Dit is in tegenspraak met de desbetreffende conclusie van F. R. HELMERT in „Beiträge zur Theorie des Reversionpendels” blz. 67. Voor zoover ik kan nagaan wordt dit veroorzaakt, doordat deze bij zijn formule niet het moment der horizontale reactie in rekening heeft gebracht.

Wij komen nu tot het door het ophangvlak op het mes overgedragen moment. Wij zouden het kunnen vergelijken met rollende wrijving. Volgens deze veronderstelling zou het voor te stellen zijn door de waarde

$$fmg$$

waarin f een wrijvingscoëfficiënt is, en wel $-fmg$ van den rechter uitslag tot den linker uitslag en $+fmg$ van den linker tot den rechter uitslag.

Wij vinden dan uit de formules IV D en E onmiddellijk:

$$T - \tau = 0$$

$$a' = - \frac{fmg}{n}$$

Deze amplitudeverandering zou dus van anderen vorm zijn als die door den luchtinvloed. Geïntegreerd geeft dit:

$$a = a_0 - \frac{fmg}{n} t$$

Een dergelijke term is nog niet met zekerheid geconstateerd.

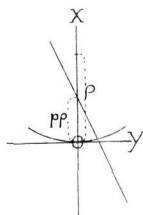
Wij hebben in het bovenstaande zonder twijfel geen juist beeld van wat er geschiedt. Men krijgt bijv. elastische verplaatsingen, die van dezelfde orde van grootte zijn als de straal van de rolbeweging, zoodat deze beweging daardoor geheel van karakter zal veranderen. Het is dan ook niet te verwonderen dat de werkelijkheid niet met het bovenstaande in overeenstemming is. Zoo heeft bijvoorbeeld reeds BESSEL een zekere glijding van het mes over het ophangvlak waargenomen, en de

quaestie nader bestudeerd. Door DEFFORGES zijn daarover eveneens uitgebreide onderzoekingen gedaan.

De aard dezer glijdbeweging is nog niet duidelijk verklaard. Een gewone verschuiving, ontstaande als de verhouding van horizontale en verticale ophangpuntsreactie den wrijvingscoëfficiënt overtreft, is uitgesloten, daar hiervoor de amplitude veel grooter zou moeten zijn, dan bij de waarnemingen wordt toegelaten.

DEFFORGES¹⁾ stelt zich voor, dat het mes in een uitholling van het ophangvlak gedeeltelijk zal heen en weer rollen, gedeeltelijk een glijdende beweging zal uitvoeren, op dezelfde wijze als een as in zijn pannen beweegt. De snelheid van glijding stelt hij, naar aanleiding van zijn waarnemingen, evenredig aan de hoeksnelheid θ' van den slinger.

Noem ρ de straal van het mes, dan stelt hij de snelheid, waarmede de mesoppervlakte over het ophangvlak glijdt gelijk aan $p \rho \theta'$ (hij gebruikt de letter m , die wij door p vervangen, daar m reeds de slingermassa voorstelt).



Het is gemakkelijk te bewijzen dat de combinatie van deze glijdbeweging met de rolbeweging, hierop neer komt, dat de as van den slinger steeds blijft gaan door een punt op de X-as op een afstand $p \rho$ van den oorsprong, welke weder is aangenomen in het snijpunt van de reactie bij stilhangenden slinger met het ophangvlak. In dezen vorm is de onderstelling gelijkkluidend

met een reeds door BESSEL opgeworpen hypothese.

De invloed van de glijding beteekent in de bewegingsvergelijking van den slinger een verplaatsing van den oorsprong; die volgens bovenstaande hypothese is:

$$y_0' = p \rho \theta' = p \rho a \mu \cos \varphi$$

dus de betreffende term van S is:

$$S = \frac{y_0''}{l} = -p \frac{\rho}{l} a \mu^2 \sin \varphi$$

¹⁾ Observations de Pendule (Memorial du Depôt général de la Guerre XV).

De l'influence du glissement dans la rotation du couteau sur la durée de l'oscillation du pendule réversible.

en door toepassing van IV D en E krijgt men: ¹⁾

$$\text{XV A} \quad a' = 0 \quad T - \tau = \frac{\rho^2}{2l} T$$

HELMERT beschouwt uitvoerig de verschillende mogelijkheden in zijn: „Beiträge zur Theorie des Reversionpendels”, blz. 76 e. v. en merkt op, dat men vermoedelijk een deel van deze schijnbare glijding kan verklaren uit zijdelingsche elastische verplaatsingen van het ophangvlak in de onmiddellijke nabijheid van de aanraking van mes en ophangvlak, tengevolge van de werking van de horizontale reactie. Hieronder wordt dus niet begrepen de elastische verplaatsing, die het geheele statief ondergaat tengevolge van R_y maar slechts de plaatselijke vervorming van het ophangvlak, vergelijkbaar met de plaatselijke indrukking door de verticale reactie veroorzaakt.

Een dergelijke beweging voldoet aan de door DEFFORGES en BESSEL gemaakte onderstelling, daar te allen tijde de uitwijking y_0 evenredig zal zijn met R_y d. w. z. dat y_0' weder evenredig is aan θ' . De betreffende term van S is van den vorm

$$\frac{y_0''}{l} = f_1 R''_y = f_1 \frac{hmg}{l^2} \mu^2 a \sin \varphi$$

waarin f_1 een constante is afhankelijk van den vorm van het mes en het gewicht van den slinger; uit IV D en E volgt dan:

$$\text{XV B} \quad a' = 0 \quad T - \tau = f_1 \frac{hmg}{2l^2} T$$

Hij merkt dan echter op dat uit de waarnemingen van BESSEL volgt, dat in allen gevalle ten deele de glijding niet evenredig is aan $\frac{h}{l}$ zoodat blijkbaar toch ook glijding tengevolge van een andere oorzaak als R_y optreedt. Hij oppert de mogelijkheid dat het mes tengevolge van de verticale reactie $R_x = mg$ afglijdt van de helling, die de elastische indrukking van het ophangvlak

¹⁾ DEFFORGES maakt bij de afleiding op blz. 15 „Observations de Pendule” een fout door het moment van de horizontale reactie te verwaarloozen. Hij vindt daardoor den invloed tweemaal te groot.

begrenst. Ook deze glijding stelt hij evenredig aan δ' ; men krijgt dan:

$$\text{XV C} \quad T - \tau = \frac{f_2}{l} T$$

waarin f_2 een nieuwe constante is, afhankelijk van den mesvorm en het gewicht van den slinger doch onafhankelijk van h en l . Nog blijken al deze onderstellingen niet voldoende om de waarnemingen te verklaren. Uit vergelijkende proeven van BESSEL met messen van agaats en messen van messing blijkt, dat de glijding bij gelijke amplitude voor messingmessen grooter dan voor agaatsmessen is, terwijl de resulterende slingertijdsafwijking voor agaatsmessen grooter is.

HELMERT concludeert dan ook, dat bij bovenstaande onderstellingen nog invloeden verwaarloosd moeten zijn en meent dan dat deze gezocht moeten worden in een door het ophangvlak op het mes overgedragen moment, dat niet aan de eenvoudige wetten van een moment van rollende wrijving beantwoordt. Hij onderstelt dat dit moment D ontwikkeld kan worden naar machten van δ en berekent dan van deze termen den invloed op den slingertijd.

Met behulp van IV D is dit op snelle wijze uit te voeren:

$$\text{Stel} \quad D = mg(D_0 + D_1 a \sin \varphi + D_2 a^2 \sin^2 \varphi + D_3 a^3 \sin^3 \varphi \dots)$$

Wij vinden dan:

$$T - \tau = -\frac{1}{2} \frac{D_1}{h} T - \frac{1 \times 3}{2 \times 4} a^2 \frac{D_2}{h} T - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} a^3 \frac{D_3}{h} T \dots$$

XV D

$$a' = 0$$

De amplitudestoring is niet nul als de grootheden D_0 , D_2 , D_4 enz. van teeken omkeeren met den omkeer van de snelheidsrichting, d. w. z. voor $\varphi = -90^\circ$ en 90° . In dat geval vindt men:

$$a' = -\frac{2}{1} \frac{D_0}{h T} - \frac{2}{3} \frac{D_2}{h T} a^2 - \frac{2}{5} \frac{D_4}{h T} a^4 \dots$$

Op grond van de formules voor R_x en R_y :

$$R_x = mg \quad R_y = -mg \frac{h}{l} \delta$$

onderstelt HELMERT verder dat de grootheden D bestaan uit twee gedeelten, waarvan het eene alleen afhankelijk is van het mes en van het slingergewicht, en het tweede bovendien evenredig is aan $\frac{h}{l}$. De slingertijdsafwijking tengevolge van het

eerste gedeelte is dan volgens formule XV D omgekeerd evenredig aan h , en van het tweede gedeelte omgekeerd evenredig aan l .

Wanneer men nu het resultaat volgens HELMERT opmaakt en daartoe alle termen van het geheele verschijnsel bij elkaar neemt (XIV + XV B + XV C + XV D) dan vindt men:

$$\text{XV E} \quad T - \tau = \left[\alpha \frac{h}{l^2} + \beta \frac{1}{l} + \gamma \frac{l}{h} \right] T$$

waarin α , β en γ constanten zijn, die afhankelijk zijn van den mesvorm, het gewicht van den slinger en min of meer ook van de amplitude, doch die niet afhankelijk zijn van de grootheden h en l . Ook DEFFORGES komt in „Observations de Pendule” tot een zelfde resultaat, doordat hij naast rolling en glijding, waarvoor hij storingstermen van denzelfden vorm als de tweelaatste termen van XV E vindt (XIV en XV A), tevens nog den invloed van het meeslingeren beschouwt, die van denzelfden vorm als de eerste term van XV E zal blijken te zijn.

Het blijkt nu mogelijk alle drie de termen te elimineeren, wat ook noodzakelijk is, daar het practisch zoowel als theoretisch onmogelijk zou zijn α , β en γ te berekenen. Wij komen hierop zoo dadelijk terug.

Wij hebben hier de kern van de verschillende beschouwingen, die over dit punt gehouden zijn met het daaruit volgend resultaat weergegeven. Het schijnt ons echter toe, dat dit resultaat op vrij zwakke gronden berust. De verschillende voorstellingen van de zaak, zooals rolling en glijding, zijn op zichzelf in den gegeven vorm onwaarschijnlijk, zoodat het geen verwondering behoeft te wekken, dat men, om zich aan de weinige waarnemingen die voorhanden zijn, aan te passen, een moment D moet invoeren waarvan men in het geheel niets afweet.

Men is dan ook met alle beschouwingen niet veel verder gekomen, dan dat men de moeilijkheid naar deze nieuwe onbekende D verplaatst heeft. Tenslotte doet men dan omtrent D de onderstelling

dat het verband daarvan met l en h gegeven is door

$$D = C_1 + C_2 \frac{h}{l}$$

De eenige reële grond hiervoor ligt in de formules voor R_x en R_y . Waar het echter waarschijnlijk moet geacht worden dat de elastische versnellingen een rol spelen, zal het voorkomen van termen met R_y^2 of met nog ingewikkelder verband met R_y niet a priori uitgesloten zijn. Dat trouwens de slingertijd (die alleen van l afhankelijk is) eveneens invloed op D zal hebben, is zeer plausibel.

Zoodra nu een andere functie van h en l , stel $\psi(h, l)$, in D zou optreden, wordt aan de slingertijdsafwijking $T - \tau$ een term evenredig aan:

$$\frac{1}{h} \psi(h, l)$$

toegevoegd, die bij het hierna te beschrijven schema van waarnemingen in 't algemeen niet geëlimineerd zal worden.

Om de invloedsberekening op beter grondslagen te vestigen, zou een theoretische behandeling noodig zijn, die zich beter aan de werkelijkheid aanpast, en uitgebreide waarnemingen om deze aan de praktijk te toetsen.

Ook amplitudewaarnemingen zullen inzicht kunnen verschaffen. Volgens de op blz. 34 gemaakte opmerking 5 treden hierbij andere termen op den voorgrond, dan voor de slingertijdsstoring. Bij de bestudeering van het vraagstuk vullen slingertijds- en amplitudewaarnemingen elkaar dus aan.

Men heeft bij de absolute zwaartekrachtsbepalingen de onzekerheid veel verminderd, door vele verschillende stellen van messen te gebruiken, die achtereenvolgens in den slinger werden bevestigd. Geheel opgeheven is zij daardoor echter niet.

Voor de relatieve zwaartekrachtsmetingen komt de mesinvloed er niet op aan, wanneer wij tenminste alle waarnemingen met een bepaalden slinger bij eenzelfde amplitude uitvoeren. Alle factoren, die het vraagstuk beheerschen, zijn dan op alle stations hetzelfde, zoodat de slingertijdsstoring overal dezelfde is en dus het verschil der gevonden slingertijden onaangetast blijft.

Om de drie storingstermen van formule XV E bij de absolute waarnemingen te kunnen elimineeren, moet men over twee reversie-slingers van hetzelfde gewicht, doch zooveel mogelijk verschillende lengte l beschikken, waarin dezelfde messen bevestigd kunnen worden. Tevens moeten deze messen bij elken slinger voor zich, onder en boven verwisseld kunnen worden of wel het zwaartepunt moet men symmetrisch kunnen omleggen, zooals dat bij de slingers van DEFFORGES mogelijk is.

Wij zullen de grootheden, betrekking hebbende op de slingering met gewicht onder, voorzien van de indices 1, en met gewicht boven van de indices 2. De tweede slinger wordt van den eersten onderscheiden door een accent. De twee messen noemen wij a en b . Deze worden dus in beide slingers ingezet. De constanten α β en γ zijn voor de twee messen niet gelijk, daar ze van den mesvorm afhankelijk zijn, wel echter voor de twee slingers slingerende om hetzelfde mes, want beide slingers zijn even zwaar en slingeren met gelijke amplitude.

Nu is voor den eersten slinger:

T_{1a} = slingertijd met gewicht onder om mes a :

$$T_{1a} = \tau_{1a} \left[1 + \alpha_a \frac{h_1}{l^2} + \beta_a \frac{1}{l} + \gamma_a \frac{1}{h_1} \right]$$

T_{2b} = slingertijd na het omhangen, dus met gewicht boven om mes b :

$$T_{2b} = \tau_{2b} \left[1 + \alpha_b \frac{h_2}{l^2} + \beta_b \frac{1}{l} + \gamma_b \frac{1}{h_2} \right]$$

Volgens formule VII is dan de gereduceerde slingertijd:

$$T_{ab} = \tau_{ab} \left[1 + \frac{h_1^2 \alpha_a - h_2^2 \alpha_b}{(h_1 - h_2) l^2} + \frac{h_1 \beta_a - h_2 \beta_b}{(h_1 - h_2) l} + \frac{(\gamma_a - \gamma_b)}{(h_1 - h_2)} \right]$$

Hierin is τ_{ba} de gereduceerde slingertijd voor het geval dat deze storende oorzaak niet aanwezig was. Verwisselt men nu de messen, dan vindt men weer twee slingertijden T_{1b} en T_{2a} ,

die samen een gereduceerden slingertijd T_{ba} geven:

$$T_{ba} = \tau_{ba} \left[1 + \frac{h_1^2 z_b - h_2^2 z_a}{(h_1 - h_2) l^2} + \frac{h_1 \beta_b - h_2 \beta_a}{(h_1 - h_2) l} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{(h_1 - h_2)} \right]$$

Noemt men tenslotte T het gemiddelde van T_{ab} en T_{ba} en τ dat van τ_{ab} en τ_{ba} dan is:

$$T = \tau \left[1 + \frac{\alpha_a + \alpha_b + \beta_a + \beta_b}{l} \right]$$

De constanten γ zijn verdwenen uit dit resultaat. Deze kan men dus reeds elimineeren door middel van één reversieslinger met verwisselbare messen.

Stel L de lengte van den secundeslinger berekend uit de waarde τ volgens de bekende formule:

$$L = \frac{l}{\tau^2}$$

en L , die, welke volgens dezelfde formule uit T volgt dan is dus met verwaarloozing van grootheden van hoogere orde:

$$L = L \left[1 - \frac{2(\alpha_a + \alpha_b + \beta_a + \beta_b)}{l} \right]$$

Uit de waarnemingen volgens hetzelfde schema met den tweeden slinger vindt men een tweede resultaat:

$$L' = L' \left[1 - \frac{2(\alpha_a + \alpha_b + \beta_a + \beta_b)}{l'} \right]$$

Tenslotte kan men zonder moeite nu een waarde L_ω vinden, die vrij is van de onbekende constanten α_a α_b β_a β_b :

$$L_\omega = \frac{lL - l'L'}{l - l'}$$

Bij deze eliminatie maakt men dus gebruik van de onder-

stelling dat de constanten β en α alleen van den mesvorm, het gewicht en de amplitude afhankelijk zijn, en dus bij beide slingers, om hetzelfde mes slingerende, gelijk zijn.

Om het resultaat zoo nauwkeurig mogelijk te krijgen, zal het lengteverschil ($l-l'$) vrij groot moeten zijn.

5. Statiefbewegingen.

Wij zullen nu behandelen de storing door de beweging van den oorsprong. Deze bestaat uit drie gedeelten.

- 1°. Kleine bewegingen ten opzichte van het statief, door het optreden van glijdbewegingen of andere eigenaardigheden bij het ophangpunt. Deze quaestie is reeds in de vorige paragraaf afgehandeld.
- 2°. Onregelmatige bewegingen van den bodem die overgedragen worden op het statief. Deze invloed zal in de volgende paragraaf behandeld worden.
- 3°. Statiefbewegingen veroorzaakt door op het statief werkende slingerreacties. Wij zullen ons in deze paragraaf hiertoe bepalen.

Daartoe zal eerst de invloed worden nagegaan van een geheel willekeurige veranderlijke kracht L van constante richting. De statiefbewegingen hierdoor veroorzaakt, zijn wegens den ingewikkelden vorm, dien de statieven meestal hebben, moeilijk te berekenen. Rust het statief op stelschroeven, dan dragen deze ook een zeer onzeker aandeel in de beweging bij, min of meer afhankelijk van de mate, waarin de klemmen zijn aangeschroefd. Daarbij komt dat ook de bodem of de pijler, waarop het statief is opgesteld, vervormingen zal ondergaan, die eveneens aan een theoretische behandeling ontsnappen. Zelfs zal men lang niet altijd zuiver elastische vervormingen kunnen aannemen.

In het algemeen heeft men op reisstations geen pijlers tot zijn beschikking en moet men zich behelpen door een meegenomen onderstel van metaal of een blok gehouwen steen op den vloer met gips te bevestigen. Het statief van het Defforgestoestel gipst men meestal direct op den grond vast. Al zal men steeds een vasten steenen vloer kiezen, toch kunnen zich hierdoor

gemakkelijk onelastische verschijnselen voordoen. Ten eerste door den vloer zelf: door een losliggende tegel, een gebrek aan de fundeering etc., ten tweede door de gipsbevestiging, wanneer het gips niet gelijkmatig verhardt of als er korrels in aanwezig zijn.

Ook wanneer men een pijler tot zijn beschikking heeft, kunnen in het metselwerk of de fundeering oorzaken van onelastische verschijnselen schuilen.

Een theoretisch strenge behandeling van het vraagstuk is dan ook uitgesloten; op de volgende wijze zullen wij trachten een benadering te krijgen, die bij goed verzorgde opstellingen niet te ver van de waarheid zal zijn.

In het volgende zullen wij onder statief kortweg verstaan het geheel van statief, pijler, vloer etc., voor zoover het aan de beschouwde beweging deelneemt. Wij nemen verder aan dat de kracht L aangrijpt in dat gedeelte van het statief, waar de ophangpunten van de slingers zijn.

De weerstand van het statief is van drieërlei aard:

- 1^o. Een weerstand tegen vervorming, zooals zou optreden wanneer L constant was.
- 2^o. Een weerstand door de inwendige wrijving van het statief, dien wij hier voorloopig niet zullen verwaarloozen.
- 3^o. Een weerstand, voortspruitende uit de toe te voegen traagheidskrachten van D'ALEMBERT.

Daar wij veronderstellen met stevige statieven te doen te hebben, die slechts geringe vervormingen vertoonen, is de eerste weerstand verreweg de grootste.

Wij nemen nu aan dat:

$$\text{XVI} \quad L = \gamma y_0 + K y_0' + M y_0''.$$

waarin y_0 weder voorstelt de horizontale verplaatsing van het ophangpunt van den beschouwdenslinger in de richting van het slingervlak.

De drie termen komen overeen met bovengenoemde drie weerstanden.

Den eersten weerstand hebben wij evenredig aan y_0 gesteld, d. w. z. dat wij aannemen dat het statief volkomen elastisch is.

Den tweeden weerstand hebben wij evenredig aan y_0' gesteld, omdat wij als ruwe benadering aannemen dat de uitwijking van elk statiefdeeltje uit den evenwichtsstand evenredig aan y_0 is, zoodat de snelheid evenredig aan y_0' is. De inwendige wrijving mogen wij dan ook daaraan evenredig stellen. De grootheid K heeft dus het karakter van een wrijvingscoëfficiënt.

De derde weerstand is, volgens dezelfde aanname omtrent de beweging van de statiefdeeltjes, evenredig aan y_0'' . De grootheid M heeft het karakter van een massagrootheid, en staat in verband met de in beweging gebrachte massa's.

Noemt men Δ_s de verplaatsing van een willekeurig statiefdeeltje dm_s dan is:

$$M = \int \frac{\Delta_s}{y_0} dm_s$$

waarbij de integratie over alle bewegende deelen is uit te strekken.

De aanname omtrent de evenredigheid van Δ_s met y_0 vloeit voort uit de onderstelling dat Δ_s weinig verschilt met de elastische uitwijking, die het deeltje zou ondergaan tengevolge van een constante kracht L .

Wij kunnen ons een indruk maken van de grootheden K en M , door op te merken dat als er op het statief geen kracht werkt, d. w. z. $L = 0$ is, statiefbewegingen mogelijk zijn, waarbij de y_0 van het ophangpunt voldoet aan:

$$\gamma y_0 + K y_0' + M y_0'' = 0$$

Dit zijn trillingen van het statief. Uit de oplossing blijkt de trillingstijd T_s en de dempingsconstante k_s . Hierbij verstaan wij onder de dempingsconstante weer de grootheid $\frac{a_s'}{a_s}$ zoodat men heeft:

$$a_s = a_s^0 e^{-k_s t}$$

waarin a_s^0 de trillingsamplitude van het ophangpunt ten tijde $t = 0$ is.

Men vindt:

$$T_s = \pi \sqrt{\frac{M}{\gamma}} \quad \text{en} \quad k_s = \frac{K}{2M}$$

Omgekeerd is

$$\text{XVII} \quad M = \frac{T_s'^2}{\pi^2} \gamma \quad \text{en} \quad K = 2 \frac{T_s'^2}{\pi^2} k_s \times \gamma$$

Hieruit volgt dat inderdaad de grootheden $\frac{M}{\gamma}$ en $\frac{K}{\gamma}$ zeer klein zijn, want bij de gebruikte stevige statieven is de eigen trillingstijd zeer klein.

De formule XVII geeft niet meer dan een indruk en mag niet beschouwd worden als een juist beeld der statieftrillingen. De onderstelling n.l. die geleid heeft tot de opstelling van formule XVI rust nu op veel lossere grond: de evenredigheid van y_0 met Δ_s is nu twijfelachtig. De grootheden k_s en T_s zullen echter wel van dezelfde grootteorde zijn als de statiefdempingsconstante en de statieftrillingstijd, zoodat bovenstaande opmerking betreffende $\frac{M}{\gamma}$ en $\frac{K}{\gamma}$ blijft doorgaan.

Men kan zich over de grootheid $\frac{M}{\gamma}$ ook een oordeel vormen door een schatting van de bewegende massa's. Men vindt dan dat $\frac{M}{\gamma}$ kleiner is dan 0.0001.

Wij zullen nu den invloed van L op de slingerbeweging bepalen en gebruiken daartoe de formules V A en B, omdat wij de af te leiden formules onder andere zullen hebben toe te passen op het geval dat de slinger bij den aanvang in rust is. Voor dat geval immers zouden de met behulp van IV C en D afgeleide formules hun geldigheid verliezen.

De beteekenis der linkerleden van de formules van deze paragraaf wordt daardoor iets minder overzichtelijk; men kan zich echter van deze beteekenis onmiddellijk rekenschap geven voor het geval dat de slingeramplitude niet klein is. Evenals dat op pag. 29 voor de formules V A en B geschiedde heeft men daartoe de integralen te nemen over een tijd $2T$; men kan dan de linkerleden vervangen:

$$\begin{aligned} - a \sin(\varphi - nt) & \quad \text{door: } 2na(T - \tau) \\ a \cos(\varphi - nt) - a_0 & \quad \text{door: } 2Ta' \end{aligned}$$

zoodat de uitdrukkingen voor $T - \tau$ en a' direct zijn op te schrijven.

Wij zullen verder voorloopig alleen den invloed der horizontale uitwijking y_0 berekenen. Later komen wij terug op den invloed van eventueele door L veroorzaakte verticale ophangpuntsbewegingen.

De betreffende term van S is: $\frac{y_0''}{l}$

Door partieele integratie van $V A$ vindt men:

$$\begin{aligned} \text{XVIII A} \quad & -a \sin(\varphi - nt) = -\frac{1}{nl} \int_0^t y_0'' \sin nt \, dt = \\ & = -\frac{1}{nl} \left| y_0' \sin nt + \frac{1}{l} \int_0^t y_0' \cos nt \, dt \right| = \frac{1}{l} \int_0^t y_0' \cos nt \, dt = \\ & = +\frac{1}{l} \left| y_0 \cos nt + \frac{n}{l} \int_0^t y_0 \sin nt \, dt \right| = +\frac{n}{l} \int_0^t y_0 \sin nt \, dt \end{aligned}$$

De eerste termen bij beide partieele integraties kunnen verwaarloosd worden, wanneer men tenminste een groot aantal slingeringen achter elkaar beschouwt. Wij veronderstellen namelijk met een stevig statief te doen te hebben, waarbij y_0 en y_0' niet boven een zekere grens y_m en y'_m komen. De storing in het geheele aantal slingeringen door de bedoelde termen kan dan niet grooter worden dan $\frac{2 y'_m}{nl}$ respectievelijk $\frac{2 y_m}{l}$. Door het aantal groot genoeg te nemen, kan men de gemiddelde storing per slingering dan zoo klein maken dat zij verwaarloosd kan worden.

Op dezelfde wijze vindt men:

$$\begin{aligned} \text{XVIII B} \quad & a \cos(\varphi - nt) - a_0 = -\frac{1}{nl} \int_0^t y_0'' \cos nt \, dt = \\ & = -\frac{1}{l} \int_0^t y_0' \sin nt \, dt = \\ & = +\frac{n}{l} \int_0^t y_0 \cos nt \, dt \end{aligned}$$

waarbij een soortgelijke verwaarloozing is gedaan. Met behulp van deze formules volgt uit XVI:

$$\frac{n}{l} \int_0^t L \sin nt \, dt = -(\gamma - Mn^2) a \sin(\varphi - nt) - Kn [a \cos(\varphi - nt) - a_0]$$

$$\frac{n}{l} \int_0^t L \cos nt \, dt = -Kn a \sin(\varphi - nt) + (\gamma - Mn^2) [a \cos(\varphi - nt) - a_0]$$

De grootheden $a \sin(\varphi - nt)$ en $a \cos(\varphi - nt) - a_0$ zijn hieruit op te lossen; ze zijn dan uitgedrukt in I.

Noemt men:

$$\lambda^2 = \frac{l}{(\gamma - Mn^2)^2 + n^2 K^2} \quad \text{en} \quad \text{tg } z = \frac{nK}{\gamma - Mn^2}$$

dan vindt men:

$$\text{XVIII C} \quad -a \sin(\varphi - nt) = \frac{\lambda n}{l} \int_0^t L \sin(nt + z) \, dt$$

$$a \cos(\varphi - nt) - a_0 = \frac{\lambda n}{l} \int_0^t L \cos(nt + z) \, dt$$

Wegens de kleinheid van $\frac{M}{\gamma}$ en $\frac{K}{\gamma}$ kan men de uitdrukking voor λ^2 en $\text{tg } z$ zonder bezwaar vereenvoudigen en schrijven:

$$\text{XVIII D} \quad \lambda = \frac{l}{\gamma - Mn^2} \quad z = \lambda n K$$

Hierin is λ een zeer kleine grootheid, bij benadering gelijk aan $\frac{l}{\gamma}$, d. w. z. dat λ bij benadering voorstelt de elastische verplaatsing van het ophangpunt in de richting van de y as, tengevolge van de krachtseenheid, aangrijpend in het aangrijpingspunt van L , en daarmee gelijk gericht. z is een kleine hoek evenredig aan de statiefdemping.

In formule XVIII D komt tot uiting, dat ingeval men zich het

theoretische geval indenkt, dat de trillingstijd T_s van het statief ongeveer even groot zou zijn als de slingertijd, de invloed op slingertijd en amplitude zeer groot kan worden. Immers de grootheid

$\gamma - Mn^2$ is gelijk aan $\gamma \left(1 - \frac{T_s^2}{T^2}\right)$; zij wordt dus klein.

Natuurlijk is hierbij in aanmerking te nemen, dat dan de opzet der statiefvergelijkingen, zooals wij die gaven, niet meer juist zal zijn. Voor een nauwkeurige behandeling van deze mogelijkheid zou men een diepergaande studie der statieftrillingsbewegingen moeten maken. Daar het geval echter zuiver hypothetisch is (het statief zou veel te slap zijn) zullen wij hierop niet verder ingaan.

Wij zullen nu den invloed van door L in het leven geroepen verticale oorsprongsbewegingen nagaan. Wij kunnen hierbij in aansluiting aan Opmerking 1, blz. 32 onmiddellijk zeggen dat wanneer de verticale ophangpuntsbewegingen van dezelfde orde zijn als de horizontale, hun invloed veel geringer is.

Voor de volledigheid zullen wij hier toch de invloedsformules, die op geheel analoge wijze afgeleid kunnen worden, doen volgen. Wij gaan daarbij uit van de onderstelling

$$L = \gamma_x x_0 + K_x x_0' + M_x x_0''$$

en vinden dan wanneer wij nt door φ vervangen, en dus het geval $a_0 = 0$ buiten beschouwing laten:

$$\begin{aligned} -a \sin(\varphi - nt) &= \frac{1}{2nl} \int_0^t a x_0'' \cos 2\varphi dt = \frac{1}{l} \int_0^t a x_0' \sin 2\varphi dt = \\ &= -\frac{2n}{l} \int_0^t a x_0 \cos 2\varphi dt = -\frac{2n\lambda_x a}{l} \int_0^t L \cos(2\varphi + z_x) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cos(\varphi - nt) - a_0 &= -\frac{1}{2nl} \int_0^t a z_0'' \sin 2\varphi dt = \frac{1}{l} \int_0^t a z_0' \cos 2\varphi dt = \\ &= \frac{2n}{l} \int_0^t a z_0 \sin 2\varphi dt = -\frac{2n\lambda_x a}{l} \int_0^t L \sin(2\varphi + z_x) dt \end{aligned}$$

$$\text{waarin } \lambda_x = \frac{1}{\gamma_x - 4n^2 M} \quad x_x = 2n \lambda_x K_x$$

Hiermee is de totale invloed van L op slingertijd en amplitude bepaald.

Stellen wij nu voor L in de plaats de reactie van een slinger, d. w. z. eerst de horizontale component en vervolgens de verticale, en gaan wij voor beide den invloed na op een tweeden slinger op hetzelfde statief.

Wij zullen alle grootheden betreffende den laatsten slinger de indice 1, die betreffende den eersten de indice 2 geven.

a) Invloed door de horizontale reactiecomponent.

$$L = + h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 \sin \varphi_2 \text{ (formule VI).}$$

Wij hebben nu te onderscheiden:

- 1^o. invloed door de horizontale beweging van het ophangpunt van slinger 1;
- 2^o. invloed door de verticale beweging van het ophangpunt van slinger 1.

Wij zullen de betreffende constanten noemen

$$\begin{aligned} \text{voor } 1^0: & \lambda_{21} \text{ en } x_{21} \\ \text{,, } 2^0: & \lambda_{21x} \text{ en } x_{21x} \end{aligned}$$

1^o. Wij krijgen dan voor de horizontale beweging:

$$\begin{aligned} - a_1 \sin (\varphi_1 - n_1 t) &= \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{l_1} \int_0^t \sin (n_1 t + x_{21}) \sin \varphi_2 dt = \\ &= \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{2 l_1} \int_0^t \left[\cos (\varphi_2 - n_1 t - x_{21}) - \cos (\varphi_2 + n_1 t + x_{21}) \right] dt \\ a_1 \cos (\varphi_1 - n_1 t) - a_{10} &= \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{2 l_1} \int_0^t \left[\sin (\varphi_2 - n_1 t - x_{21}) + \right. \\ &\quad \left. + \sin (\varphi_2 + n_1 t + x_{21}) \right] dt \end{aligned}$$

Beschouwen wij eerst het geval dat de slingertijden der twee slingers gelijk zijn of zeer weinig verschillen. Het faseverschil $\varphi_2 - \varphi_1$ der beide slingers verandert dan zoo langzaam dat wij $\cos(\varphi_2 - n_1 t - x_{21})$ gedurende den tijd t constant kunnen stellen.

De hoek $\varphi_2 + n_1 t + x_{21}$ verandert met ongeveer de dubbele fasesnelheid van den slinger. In een slingertijd wordt dus nage-
noeg 360° doorloopen, zoodat de integraal van $\cos(\varphi_2 + n_1 t + x_{21})$ over een geheel aantal slingeringen ten opzichte van den eersten term te verwaarloozen is.

Men krijgt dan:

$$\text{XIX A} \quad - a_1 \sin(\varphi_1 - n_1 t) = \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1 t}{2 l_1} \cos(\varphi_2 - n_1 t - x_{21})$$

$$a_1 \cos(\varphi_1 - n_1 t) - a_{10} = \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1 t}{2 l_1} \sin(\varphi_2 - n_1 t - x_{21})$$

Voor het geval dat de slingertijden T_2 en T_1 veel verschillen kan men de integralen integreeren door de factoren $(\mu_2 - n_1)$ respectievelijk $(\mu_2 + n_1)$ onder het integraalteeken te brengen. Dit is geoorloofd, wanneer de storingen in de fasesnelheden der beide slingers, d. w. z. de grootheden $(\mu_1 - n_1)$ en $(\mu_2 - n_2)$ kleiner zijn dan 0.0002 ($\mu_2 - n_1$) respectievelijk 0.0002 ($\mu_2 + n_1$). De eerste dezer voorwaarden is alleen vervuld bij groot slingertijdsverschil. Wij schakelen hierdoor tevens het geval uit dat a_1 zoo klein is dat de storing $(\mu_1 - n_1)$ daardoor grootere waarden kan aannemen. Wij kunnen dan integreeren over een tijdsduur $2 T$ en het linkerlid uitdrukken in $T - \tau$ respectievelijk a' zooals op pag. 72 werd aangegeven; wij vinden dan:

$$\begin{aligned} 2 a_1 n_1 (T_1 - t_1) = & \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{2 l_1} \left[\frac{I}{(\mu_2 - n_1)} \right]_0^{2 T_1} \sin(\varphi_2 - n_1 t - x_{21}) - \\ & - \frac{I}{(\mu_2 + n_1)} \left[\sin(\varphi_2 + n_1 t + x_{21}) \right]_0^{2 T_1} \end{aligned}$$

$${}_2 T_1 a_1' = \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{2 l_1} \left[-\frac{1}{(\mu_2 - n_1)} \cos(\varphi_2 - n_1 t - z_{21}) - \frac{1}{(\mu_2 + n_1)} \cos(\varphi_2 + n_1 t + z_{21}) \right]$$

Noemt men de grootheid $\varphi_2 - n_1 t$, die bij benadering gelijk is aan het faseverschil $\varphi_2 - \varphi_1 : \nu_0$, dan is:

$${}_2 a_1 n_1 (T_1 - \tau_1) = \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{2 l_1} \left[\frac{\sin(\nu_0 - z_{21})}{(\mu_2 - n_1)} - \frac{\sin(\nu_0 + z_{21})}{(\mu_2 + n_1)} \right]$$

XIX B

$${}_2 T_1 a_1' = -\frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{2 l_1} \left[\frac{\cos(\nu_0 - z_{21})}{(\mu_2 - n_1)} + \frac{\cos(\nu_0 + z_{21})}{(\mu_2 + n_1)} \right]$$

Het faseverschil ν_0 is periodiek met een periode $\frac{\mu_2 - \mu_1}{2\pi}$. Volgens de bovenstaande formule zijn de afwijkingen in slingertijd en amplitude dus ook periodiek. Hoe grooter het slingertijdsverschil is, hoe kleiner deze periode zal zijn en hoe minder men van een invloed van slinger 2 op slinger 1 zal merken, deze wisselt steeds van teeken, en is gemiddeld nul.

Wij komen hiermee dus tot de conclusie dat slingers met groot slingertijdsverschil geen systematischen invloed op elkaar uitoefenen. Deze gevolgtrekking blijft doorgaan wanneer T_2 in eenige bijzondere verhouding tot T_1 staat. Alleen wanneer T_1 en T_2 weinig verschillen beginnen de afwijkingen duidelijker op te treden.¹⁾

¹⁾ De integratie, zooals die is uitgevoerd, blijft toelaatbaar voor het geval dat T_2 en T_1 weinig verschillen, voor het tweede gedeelte nl. $\cos(\varphi_2 + n_1 t + z_{21})$ respectievelijk $\sin(\varphi_2 + n_1 t + z_{21})$. Wij krijgen daarvoor:

2°. Wij komen nu tot den invloed der verticale ophangpunts-beweging.

Wij kunnen hiervan a priori zeggen dat deze bij de gebruikte toestellen te verwaarloozen is. De verticale bewegingen zijn immers daarbij van kleinere orde dan de horizontale bewegingen, en buitendien is de invloed op den slingertijd van verticale bewegingen kleiner dan van horizontale. Daar de slingertijdsafwijking door de horizontale beweging niet grooter is dan $100 \cdot 10^{-7}$ secunde, kan veilig de invloed der verticale beweging verwaarloosd worden.

De berekening van dezen invloed levert overigens geen moeilijkheden op. Voor de volledigheid laten wij het resultaat volgen:

$$-a_1 \sin(\varphi_1 - n_1 t) = -\frac{h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 a_1 n_1 \lambda_{21x}}{l_1} t \sin(\varphi_2 - 2n_1 t - z_x)$$

$$a_1 \cos(\varphi_1 - n_1 t) - a_{10} = -\frac{h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 a_1 n_1 \lambda_{21x}}{l_1} t \cos(\varphi_2 - 2n_1 t - z_x)$$

Deze invloed treedt alleen op wanneer bij benadering $\mu_2 = 2n_1$ d. w. z. $T_2 = \frac{l}{2} T_1$ is.

Bij andere slingertijdsverhouding is deze invloed, volgens dezelfde redeneering als onder 1° gemiddeld nul.

b) Wij zullen nu den invloed der verticale reactie van slinger 2 op slinger 1 nagaan.

Daar het constante deel $m_2 g$ der verticale reactie geen statiefbewegingen veroorzaakt, komt hierbij alleen in aanmerking het met den tijd veranderlijke deel van R_x dat volgens formule VI is:

$$-L = m_2 h_2 \mu_2^2 a_2^2 (\cos^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_2) = m_2 h_2 \mu_2^2 a_2^2 \cos 2\varphi_2$$

$$-\frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{l_1} \frac{\cos(\nu_0 + z_{21})}{(\mu_2 + n_1)} \sin(\mu_2 - n_1) \frac{t}{2}$$

respectievelijk:

$$-\frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 a_2 n_1}{l_1} \frac{\sin(\nu_0 + z_{21})}{(\mu_2 + n_1)} \sin(\mu_2 - n_1) \frac{t}{2}$$

Men kan hieruit berekenen beneden welke grens $T_2 - T_1$ moet liggen opdat deze termen verwaarloosd kunnen worden, zooals dat voor de afleiding van de formules XX A geschiedde.

Ook den invloed van dezen term zal men bij de gebruikte statieven kunnen verwaarloozen, om de volgende redenen:

De hoofdwerking van deze kracht is een verticale beweging van het ophangpunt van slinger 2. Het is, gezien de constructie der gebruikelijke statieven, hoogst onwaarschijnlijk, dat bewegingen van ophangpunten van andere slingers zullen optreden, terwijl ook horizontale bewegingen van het ophangpunt van slinger 2 niet waarschijnlijk zijn.

Nu is ten eerste de invloed van verticale ophangpuntsbewegingen van de orde: $a \times$ de invloed van horizontale bewegingen, en ten tweede is het maximum en minimum, waartusschen zich L beweegt, van de orde $a \times$ het maximum en minimum, waartusschen zich de horizontale reactie beweegt. De hier beschouwde invloed op slinger 2 zelf is dus hoogstens van de orde $a^2 \times$ de invloed der door de horizontale reactie veroorzaakte horizontale bewegingen. Zij kan dus verwaarloosd worden. Door de berekening, die op geen moeilijkheden stuit, vindt men deze redeneering bevestigd.

Bij statieven van ongewonen vorm zal men intusschen moeten nagaan of de elastische eigenschappen van dien aard zijn, dat een der laatstbehandelde termen, die wij verwaarloosden, van zooveel belang kan worden, dat de verwaarloozing niet meer geoorloofd is.

Wij komen dus, resumeerende, tot de conclusie dat bij de gebruikte toestellen, de door de statiefbewegingen veroorzaakte invloed van slinger 2 op slinger 1, bij groot slingertijdsverschil, gemiddeld nul is en optreedt met een periode

$$\frac{2\pi}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{2 T_2 T_1}{T_1 - T_2}$$

Analoog hiermee volgt dat trillingen met kleinen trillingstijd geen merkbaren invloed uitoefenen op den slinger. De invloed van slinger 2 op slinger 1 bij klein slingertijdsverschil wordt gegeven door:

$$-a_1 \sin(\varphi_1 - n_1 t) = \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 n_1 t}{2 l_1} a_2 \cos(\varphi_2 - n_1 t - \kappa_{21})$$

$$a_1 \cos(\varphi_1 - n_1 t) - a_{10} = \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 n_1 t}{2 l_1} a_2 \sin(\varphi_2 - n_1 t - \kappa_{21})$$

waarin de tijdsduur t niet zoo groot mag zijn dat de hoek $(\varphi_2 - n_1 t - \alpha_{21})$ daarin merkbaar verandert. Wij kunnen deze vergelijkingen in eenvoudiger vorm brengen door beide naar t te differentieëren:

$$\begin{aligned} -a_1' \sin(\varphi_1 - n_1 t) - (\mu_1 - n_1) a_1 \cos(\varphi_1 - n_1 t) &= \\ &= \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 n_1}{2 l_1} a_2 \cos(\varphi_2 - n_1 t - \alpha_{21}) \\ a_1' \cos(\varphi_1 - n_1 t) - (\mu_1 - n_1) a_1 \sin(\varphi_1 - n_1 t) &= \\ &= \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 n_1}{2 l_1} a_2 \sin(\varphi_2 - n_1 t - \alpha_{21}) \end{aligned}$$

waarbij in het rechter lid grootheden van hoogere orde verwaarloosd zijn. Lost men hieruit $(\mu_1 - n_1)$ en a_1' op, dan vindt men:

$$\begin{aligned} (\mu_1 - n_1) a_1 &= -\frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 n_1}{2 l_1} a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21}) \\ \text{XX} \quad a_1' &= \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 n_1}{2 l_1} a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21}) \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn dus algemeen geldig.

Voor het geval dat a_1 niet nul of bij benadering nul is, volgt uit de eerste onmiddellijk:

$$\text{XXB} \quad T_1 - \tau_1 = \frac{\lambda_{21} h_2 m_2 \mu_2^2 T_1}{2 l_1} \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21})$$

Deze vergelijking met die voor a_1' zouden wij sneller gevonden hebben door van de formules IV D en E uit te gaan.

Om de algemeen geldige formules XX af te leiden was echter de gevolgde weg noodig.¹⁾

Uit de formules XX en XX B volgt onmiddellijk de invloed

¹⁾ Het schijnt wellicht een omweg toe, dat wij hiertoe eerst van de geïntegreerde formules V gebruik maakten en deze tenslotte weer differentieëren. Dit is echter noodig om eenige termen te kunnen verwaarloosen, waarvan de toelaatbaarheid niet zou blijken, wanneer wij van de differentiaalformules IV A en B waren uitgegaan.

van de eigen reactie op slingertijd en amplitude:

$$\text{XXI} \quad T_1 - \tau_1 = \frac{\lambda_{11} h_1 m_1 \mu_1^2 T_1}{2l_1}$$

$$a_1' = - \frac{\lambda_{11} h_1 m_1 \mu_1^3}{2l_1} z_{11} a_1$$

$T_1 - \tau_1$ is het reeds meergenoemde *meeslingeren*. De amplitude-afwijking is, wegens de kleinheid van z_{11} veel geringer dan de slingertijdsafwijking.

Uit proefnemingen, gebazeerd op de formules XX, met twee tegelijk slingerende slingers, is gebleken, dat de hoek z_{21} bij het Stückrathtoestel te verwaarloozen is. De statiefdemping is blijkbaar niet zoo groot, dat z_{21} een merkbare waarde bereikt. De amplitudeafwijking is hier dus nul.

Verder zijn bij het Stückrathtoestel de grootheden $\lambda_{11} \lambda_{21} \lambda_{12} \lambda_{22}$ behoorende bij twee in een vlak slingerende slingers gelijk te stellen. Dit is te concludeeren met behulp van de formule voor λ :

$$\lambda = \frac{l}{\gamma - M\mu^2}$$

De grootheid M , samenhangende met de in beweging gebrachte massa's is bij benadering even groot of de kracht in het eene of in het andere ophangpunt aangrijpt.

De elastische grootheden $\gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{21}$ en γ_{22} zijn eveneens bij benadering gelijk, daar de verbinding tusschen de twee ophangpunten zoo stevig is dat de elastische afstandsverandering te verwaarloozen is. Dientengevolge zijn de elastische verplaatsingen in de richting van die verbindingslijn voor beide ophangpunten even groot, waaruit de gelijkheid van $\gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{21}$ en γ_{22} volgt. De grootheden $\lambda_{11} \lambda_{12} \lambda_{21}$ en λ_{22} zijn dus ook gelijk te stellen.

Hieruit volgt dat het meeslingeren voor de twee in een vlak slingerende slingers gelijk is, als deze ongeveer gelijken slingertijd, gelijke massa en gelijken vorm hebben. In dat geval zijn n.l. alle grootheden in formule XXI voor beide slingers bij benadering gelijk. Dit blijkt bij het Stückrathtoestel ook inderdaad zoo te zijn, waardoor het bovenstaande bevestigd wordt.

Het meeslingeren zou uit XXI te berekenen zijn als de grootheid λ .

bekend was. Een theoretische berekening van λ stuit echter, wegens den ingewikkelden vorm der statieven en de onberekenbare werking van stelschroeven en opstellingsbodem, op onoverkomelijke bezwaren. Deze laatste invloed maakt bovendien dat λ op elk station een nieuwe waarde heeft, zoodat het meeslingeren niet overal even groot is.

Bij de relatieve waarnemingen moet het meeslingeren dus in rekening gebracht worden. Daar het op elk station opnieuw bepaald moet worden, en het aantal der relatieve waarnemingen groot is, is het van groot belang hiervoor een methode te vinden, die op reis gemakkelijk uit te voeren is en tevens betrouwbare resultaten geeft. Men kan daartoe verschillende wegen inslaan, die in het volgende hoofdstuk besproken en vergeleken zullen worden. Daarbij zullen wij dan, naar aanleiding der in Hoofdstuk I besproken moeilijkheden bij slappen bodem, enkele nieuwe methoden behandelen en daarvan de deugdelijkheid nagaan.

De formules XX zijn nog niet een volledige oplossing van het vraagstuk van twee op een statief slingerende slingers met bijna gelijken slingertijd.

Door het slingertijdsverschil, de slingertijdsafwijking en de amplitude verandering van beide slingers zullen de grootheden $\frac{a_2}{a_1}$ en $(\varphi_2 - \varphi_1)$ langzaam veranderen, en het verloop is uit de gegeven vergelijkingen niet zonder meer te voorspellen. Het is daartoe noodig de vergelijkingen XX te integreeren.

In Hoofdstuk V zal deze integratie uitgevoerd worden voor het algemeene geval van N tegelijk slingerende slingers. Hierbij gelden voor elken slinger de uit XX afgeleide formules:

Voor slinger 1:

$$\begin{aligned}
 (\nu_1 - n_1) a_1 &= - \frac{n_1}{2l_1} \sum_{k=1}^N \lambda_{k1} h_k m_k n^2_k a_k \cos(\varphi_k - \varphi_1 - z_{k1}) \\
 a_1' &= \frac{n_1}{2l_1} \sum_{k=1}^N \lambda_{k1} h_k m_k n^2_k a_k \sin(\varphi_k - \varphi_1 - z_{k1})
 \end{aligned}$$

6. Invloed der Grondbewegingen.

Wij komen nu tot het laatste deel der beweging van den oorsprong, voortvloeiende uit de bewegingen van den bodem.

Zoolang men op zand- of rotsbodem waarneemt, zijn geen storingen te vreezen; deze planten vermoedelijk wel trillingen voort, doch trillingen van korte periode zijn, zooals in de vorige paragraaf werd aangetoond, van geen belang, daar ze noch den slingertijd, noch de amplitude veranderen.

Het zijn de onregelmatige bewegingen, die in slappen bodem mogelijk zijn, welke hier de storingen teweegbrengen. Deze bewegingen zijn voor zoover ik weet, niet grondig onderzocht, doch wel dadelijk is te zeggen, dat een theoretische behandeling groote moeilijkheden zal opleveren.

Vermoedelijk zijn ze meestal van toevalligen aard, veroorzaakt door gebeurtenissen in de onmiddellijke nabijheid, zooals het voorbij rijden van karren, het varen van schepen door vaarten enz. De onderstelling is gewettigd dat ze in 't algemeen geen periode hebben die niet of weinig verschilt van die der slingers.

Het is denkbaar dat als uitzondering ook regelmatige periodieke bewegingen zullen kunnen optreden, wanneer eenige omstandigheid in de nabijheid daartoe aanleiding geeft. Wij herinneren hier aan het merkwaardige geval der trillende huizen in Scheveningen, veroorzaakt door de gebrekkige uitbalanceering van een zware stoommachine op vrij grooten afstand.

Deze quaestie is door Professor HOLST, Hoogleraar aan de Technische Hoogeschool aan het licht gebracht en onderzocht. De trillingsperiode was hier echter veel geringer dan de slingertijd van den slinger.

Het is natuurlijk niet a priori onmogelijk te verklaren, dat ook dergelijke periodieke bewegingen van veel grootere periode kunnen optreden. Waarschijnlijk is dit intusschen niet.

Wij zullen dan ook vermoedelijk nog het dichtst bij de waarheid zijn, wanneer wij de bewegingen in het algemeen als volkomen onregelmatig en van toevalligen aard beschouwen. Uitgaande daarvan, zullen wij ons een beeld trachten te vormen van het verschijnsel.

Het zou mogelijk zijn, dat, buiten de translatiebeweging, die het geheele stelsel met den oorsprong mede, tengevolge der bodembewegingen ondergaat, nog een andere invloed werd uitgeoefend, doordien de statiefbewegingen de beweging van het mes over de oplegplaat zou kunnen doen veranderen.

Doordien de aldaar optredende verschijnselen nog niet duidelijk verklaard zijn, is het moeilijk daarop onmiddellijk een antwoord te geven. Wel kan men zeggen dat wanneer de grondbewegingen niet met sterke schokken gepaard gaan, een verbreking van het verband tusschen mes en ophangvlak niet waarschijnlijk is. Wij zullen de juistheid dezer opvatting hieronder nog nader bewijzen door een reeks waarnemingsresultaten.

Een uitgebreide verhandeling over den invloed van bodembewegingen op den slingertijd komt voor in het werk van O. E. SCHIÖTZ: „Resultate der im Sommer 1893 in dem nördlichsten Teile Norwegens ausgeführten Pendelbeobachtungen nebst einer Untersuchung über den Einfluss von Bodenerschütterungen auf die Schwingungszeit eines Pendels.“

Hij heeft bij zijn waarnemingen gevonden dat de slingertijd verkleind werd. Na een tamelijk ingewikkelde berekening komt hij tot de slotsom, dat een ophangpuntsbeweging op zichzelf geen invloed uitoeft, en zoekt dan de oorzaak hierin, dat door bodembewegingen het verband verbroken wordt tusschen mes en ophangvlak. Hierdoor zal zijns inziens niet de volle horizontale reactie op het statief inwerken en dus de daardoor veroorzaakte statiefbeweging kleiner zijn dan normaal. Het gevolg hiervan is een vermindering van het meeslingeren en dus een verkleining van den waargenomen slingertijd.

De eerste conclusie is naar mijne meening ten deele, de tweede geheel onjuist. Zooals verderop nader uitgewerkt zal worden is, wanneer de waarnemingen over zeer langen tijd worden uitgestrekt, de gemiddelde slingertijdsstoring die door een onregelmatige beweging van het ophangpunt veroorzaakt kan worden, inderdaad gering. Bij waarnemingen van korteren duur kan deze oorzaak echter een zeer merkbare slingertijdsverandering ten gevolge hebben.

In Delft vond ik tenminste meermalen bij waarnemingen die een uur duurden, een slingertijdsstoring van $30 \cdot 10^{-7}$ seconden;

om later té noemen redenen is het niet twijfelachtig, dat deze aan ophangpuntsbewegingen moeten toegeschreven worden.

Intusschen zullen slingertijdsstoringen, die door ophangpuntsbewegingen veroorzaakt worden, niet steeds hetzelfde teeken hebben, zoodat een systematische slingertijdsverkleining hierdoor niet te verklaren zou zijn.

Bij mijne waarnemingen in Nederland is mij van een systematische slingertijdsverkleining niets gebleken; de storingen waren steeds onregelmatig en afwisselend positief en negatief. Het schijnt mij dan ook nog niet noodig toe, op grond van de enkele gevallen die SCHÖRTZ meedeelt, waarbij inderdaad de afwijkingen grooter waren dan ik ze vond, te concludeeren, dat een systematische storing plaats vindt. Het is uit de publicatie niet na te gaan of er mogelijk bijzondere omstandigheden waren, die op andere wijze de storingen kunnen verklaren.

De verklaring die SCHÖRTZ van het feit tenslotte geeft, schijnt mij niet steekhoudend. In het algemeen immers zal de horizontale reactie wel degelijk ten volle op het statief inwerken. Als dit niet zoo was, dan zou uit de bewegingsvergelijkingen van den slinger volgen dat deze een groote zijdelingsche versnelling krijgen zou, zoodat het mes groote sprongen over het oplegvlak zou moeten maken, van heel andere orde dan de kleine glijdbewegingen die wellicht optreden. Dat de statiefbeweging door de horizontale reactie veroorzaakt dus merkbaar kleiner zou zijn dan normaal, schijnt mij niet aannemelijk.

In allen gevalle meen ik door de feiten gerechtigd te zijn tot de onderstelling, dat bodembewegingen zooals die in Nederland optreden als eenige uitwerking hebben een onregelmatige beweging van het ophangpunt. Aan het eind van deze paragraaf zullen eenige der meest sprekende waarnemingen ter staving vermeld worden.

Wij zullen ons hier verder alleen bezig houden met den invloed der horizontale bewegingen, daar de invloed der verticale van kleiner orde is (Opmerking I blz. 32).

Als y_0 volkomen onregelmatig is, is y_0'' dat eveneens.

Wij onderstellen nu dat de grootheden:

$$\int_{t-\Delta}^t y_0'' dt, \quad \int_t^{t+\Delta} y_0'' dt \quad \text{enz.}$$

te beschouwen zijn als onafhankelijke grootheden, waarvan de waarschijnlijkheid van optreden wordt gegeven door de foutenwet.

Hieruit volgt dan, dat de middelbare waarde G van de grootheid

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_t^{t+\Delta} y_0'' dt$$

onafhankelijk is van de tijdsruimte Δ , waarover de integraal genomen wordt. Hierbij wordt natuurlijk verondersteld, dat Δ niet zoo klein gekozen wordt, dat de onafhankelijkheid der bovengenoemde opeenvolgende integralen niet meer aangenomen mag worden met het oog op de continuïteit der grootheid y_0'' , die vermoedelijk toch in eenige mate aanwezig is.

De grootheid G is te beschouwen als een maat voor de bodembewegingen.

Gaan wij nu de storingen na in slingertijd en amplitude, volgens de uit IV D en E volgende formule:

$$\delta T = T - \tau = -\frac{1}{2ag} \int_0^{.2T} y_0'' \sin \varphi dt$$

$$a' = -\frac{1}{2\pi l} \int_0^{.2T} y_0'' \cos \varphi dt$$

waarin wij de slingertijdsstoring door δT voorstellen.

De integralen zijn uit de gemaakte onderstellingen niet te berekenen. Wij kunnen echter aantoonen, dat het verband van hun bedrag met de waarschijnlijkheid van optreden daarvan, bij benadering door de foutenwet gegeven wordt.

Immers men kan bij benadering voor de integraal schrijven:

$$\int_0^{.2T} y_0'' \sin \varphi dt = \sum_{t=0}^{t=.2T} \left\{ \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} y_0'' dt \right\} \sqrt{\Delta} \sin \varphi$$

Wij onderstelden dat de grootheid tusschen de accolades door de foutenwet beheerscht wordt. Verder stelden wij voorop, dat y_0'' , en dus ook de grootheid tusschen de accolades, niet periodiek is, en dus volkomen onafhankelijk is van den factor $\sin \varphi$. In dat geval volgt ook de som de foutenwet.

Wij kunnen nu de middelbare waarde van de integraal berekenen.

Het kwadraat hiervan is de gemiddelde waarde van:

$$\left[\int_0^{.2 T} y_0'' \sin \varphi dt \right]^2$$

Deze is gelijk aan de gemiddelde waarde van:

$$\sum_{t=0}^{t=2T} \frac{1}{\Delta} \left[\int_t^{t+\Delta} y_0'' dt \right]^2 \Delta \sin^2 \varphi$$

Door invoering van G vindt men hiervoor:

$$G^2 \sum_{t=0}^{t=2T} \Delta \sin^2 \varphi = G^2 T$$

zoodat men voor de middelbare waarde van de integraal vindt $G \sqrt{T}$

Men vindt hetzelfde voor de middelbare waarde van de integraal

$$\int_0^{.2 T} y_0'' \cos \varphi dt$$

De storingen δT en a' zijn evenredig aan de integralen en worden dus ook door de foutenwet beheerscht.

Hieruit volgt, dat deze storingen geen systematisch verloop hebben, maar onregelmatig optreden. De storing in het gemiddelde van een oneindig groot aantal slingeren is nul.

Voor de middelbare waarde van δT en a' die wij door vierkante haakjes zullen onderscheiden van de grootheden zelf, vindt men:

$$\left[\delta T \right] = \frac{G}{2ag} \sqrt{T} \quad \left[a' \right] = \frac{G}{2\pi l} \sqrt{T}$$

Hierbij moet herinnerd worden, dat δT en a' de gemiddelde slingertijdsstoring en de gemiddelde amplitudeverandering zijn, berekend over een tijdvak $2T$.

Berekent men echter de gemiddelde slingertijdsstoring en de gemiddelde amplitudeverandering over een grooter tijdvak t , dan is de middelbare waarde van die grootheden niet gelijk aan de bovenstaande waarden. Uit de foutentheorie volgt, dat ze omgekeerd evenredig zijn aan den tijd t . Men vindt dan met behulp van bovenstaande formules:

$$\text{XXII} \quad \left[\delta T \right]_t = \frac{GT}{ag\sqrt{2t}} \quad \left[a' \right]_t = \frac{GT}{\pi l\sqrt{2t}}$$

waarin de index t aangeeft dat het de middelbare waarde betreft van een gemiddelde over een tijd t .

Uit de waarde van $[\delta T]_t$ is onmiddellijk af te leiden, de middelbare fout, die in het uit den slingertijd berekende resultaat voor g door de grondbewegingen wordt veroorzaakt:

$$mg = \frac{2G}{a\sqrt{2t}}$$

Hieruit volgt, dat deze middelbare fout onafhankelijk is van den slingertijd van den gebruikten slinger. De meening, dat het voordeelig zou zijn slingers met grooten slingertijd te gebruiken, schijnt mij dus onjuist toe.

Verder blijkt de middelbare fout omgekeerd evenredig aan den wortel uit den waarnemingstijd t , en omgekeerd evenredig aan de amplitude. Hoe grooter amplitude men gebruikt, hoe kleiner de storing is.

Naar aanleiding der formules XXII moet nog de aandacht gevestigd worden op het feit, dat de slingertijdsstoring omgekeerd evenredig is aan de amplitude, doch dat de amplitudestoring zelf niet van de amplitude afhankelijk is.

Aan de hand van bovenstaande resultaten is het mogelijk den invloed na te gaan van de grondbewegingen op twee tegelijk-slingerende slingers. Deze invloed is niet onafhankelijk van elkaar, zooals gemakkelijk is in te zien; dientengevolge is het kwadraat

der middelbare storing in de som of het verschil der slingertijden niet gelijk aan de som van de quadraten der middelbare storingen in de twee slingertijden afzonderlijk.

In verband met de verschillende waarnemingsmethoden, waarbij gebruik gemaakt wordt van twee tegelijkertijd in een vlak slingerende slingers, van ongeveer gelijken slingertijd, op eenzelfde statief, is het van belang de formule af te leiden voor de middelbare storing in de grootheden:

$$(T_2 + T_1) \quad (T_2 - T_1) \quad \frac{a_2}{a_1} \quad (a_2 + a_1) \text{ en } (a_2 - a_1)$$

Wij maken hierbij de onderstelling dat de twee op eene hoogte liggende ophangpunten rechtstreeks zoo stevig verbonden zijn, dat de oorsprongbewegingen in y richting voor beide slingers gelijk zijn. Deze voorwaarde is bij de gebruikte toestellen vervuld. Wij kunnen dus y_0'' voor beide slingers gelijk stellen.

Wij vinden dan:

$$\delta(T_2 + T_1) = - \frac{1}{2g} \int_0^{.2T} y_0'' \left(\frac{\sin \varphi_2}{a_2} + \frac{\sin \varphi_1}{a_1} \right) dt$$

Stel ten tijde $t = 0$: $\varphi_2 = c_2$ en $\varphi_1 = c_1$. Daar ongeveer $T_2 = T_1 = T$ is kan men stellen:

$$\varphi_2 = c_2 + \varphi \text{ en } \varphi_1 = c_1 + \varphi$$

dus:

$$\begin{aligned} \delta(T_2 + T_1) &= - \frac{1}{2g} \int_0^{.2T} y_0'' \left\{ \frac{\sin(\varphi + c_2)}{a_2} + \frac{\sin(\varphi + c_1)}{a_1} \right\} dt = \\ &= - \frac{1}{2g} \sqrt{\left(\frac{\cos c_2}{a_2} + \frac{\cos c_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{\sin c_2}{a_2} + \frac{\sin c_1}{a_1} \right)^2} \int_0^{.2T} y_0'' \sin(\varphi + c_3) dt \end{aligned}$$

waarin c_3 gegeven wordt door:

$$\operatorname{tg} c_3 = \frac{\frac{\sin c_2}{a_2} + \frac{\sin c_1}{a_1}}{\frac{\cos c_2}{a_2} + \frac{\cos c_1}{a_1}}$$

Vereenvoudigd geeft dit

$$\delta(T_2 + T_1) = - \frac{l}{2g a_1 a_2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_0^{.2T} y_0'' \sin(\varphi + c_3) dt$$

De middelbare waarde voor de integraal is weer $G \sqrt{T}$, dus de middelbare waarde van $\delta(T_2 + T_1)$ is:

$$\left[\delta(T_2 + T_1) \right] = \frac{G \sqrt{T}}{2g a_1 a_2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Dit is de middelbare waarde van het gemiddelde, berekend over een tijdsduur $2T$. De middelbare waarde van het gemiddelde, berekend over een grooter tijdvak t , is dus:

$$\text{XXIII A} \quad \left[\delta(T_2 + T_1) \right]_t = \frac{GT}{g a_1 a_2 \sqrt{2t}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Op dezelfde wijze vindt men:

$$\text{XXIII B} \quad \left[\delta(T_2 - T_1) \right]_t = \frac{GT}{g a_1 a_2 \sqrt{2t}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Verder heeft men:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{a_1}{a_2} \times \left(\frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_2'}{a_2} \right) = - \frac{a_1}{2\pi l a_2} \int_0^{.2T} y_0'' \left(\frac{\cos \varphi_1}{a_1} - \frac{\cos \varphi_2}{a_2} \right) dt$$

en dezelfde afleiding als boven volgende, vindt men voor de middelbare waarde.

$$\text{XXIII C} \quad \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \right]_t = \frac{GT}{\pi l a_2^2 \sqrt{2t}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Tenslotte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a_2 - a_1) &= \frac{1}{2\pi l} \int_0^{.2T} y_0'' (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) dt = \\ &= \frac{1}{\pi l} \sin \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \int_0^{.2T} y_0'' \sin(\varphi + c_4) dt \end{aligned}$$

waarin $c_3 = \frac{c_1 + c_2}{2}$, dus:

$$\text{XXIII D} \quad \left[\frac{d}{dt} (a_2 - a_1) \right]_t = \frac{2 GT}{\pi l \sqrt{2t}} \sin \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2}$$

en analoog hieraan:

$$\text{XXIII E} \quad \left[\frac{d}{dt} (a_2 + a_1) \right]_t = \frac{2 GT}{\pi l \sqrt{2t}} \cos \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2}$$

Voor het geval dat de slingertijden veel verschillen, zijn eveneens op dergelijke wijze formules af te leiden. Daar dit echter voor de praktijk geen waarde heeft, omdat het samenslingeren van zulke slingers geen voordeelen oplevert en dus niet toegepast wordt, zullen wij dit niet verder uitwerken.

Wij zullen in het volgende hoofdstuk van de formules XXII en XXIII gebruik maken, om de tweeslingermethoden ter bepaling van het meeslingeren te vergelijken en te onderzoeken, welke het minst door bodembewegingen gestoord wordt.

Uit de formule XXIII A is nog een zeer belangrijke gevolgtrekking te maken:

Laat men de twee slingers slingeren met gelijke amplitude en in tegengestelde fase, dan is de middelbare storing in de som der slingertijden, dus ook in het gemiddelde der slingertijden, nul.

Immers:

$$a_1 = a_2 \text{ en } \varphi_2 - \varphi_1 = \pi \text{ dus } \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)} = 0$$

Het heeft dus groote voordeelen de waarnemingen zoo in te richten, dat dit geval verwezenlijkt wordt.

Tweeslingermethode.

Het feit, dat het gemiddelde der slingertijden van twee slingers, met gelijke amplitude en in tegengestelde fase, op één statief, in hetzelfde slingervak slingerende, onafhankelijk is van den

grondbewegingsinvloed, is niet afhankelijk van de aannamen over de grondbewegingen, zooals wij die hierboven gemaakt hebben.

Volgens opmerking III blz. 33 wordt dit gemiddelde n.l. niet beïnvloed door storingen, die voor beide slingers in hun bewegingsvergelijkingen een gelijk storend moment geven.

Dientengevolge is voor de eliminatie der grondbewegingen alleen noodig:

- 1^o. Dat de invloed der grondbewegingen alleen bestaat in een beweging van het ophangpunt van den slinger.
- 2^o. Dat de twee ophangpunten der slingers ongeveer even hoog liggen en zoo stevig verbonden zijn dat y_0 voor beide slingers gelijk is.

De tweede voorwaarde is bij het Stückrath-toestel vervuld.

De eerste voorwaarde hebben wij reeds uitvoerig behandeld. Omgekeerd blijkt dat daaraan voldaan is als bij de waarnemingen werkelijk de slingertijdsafwijkingen van beide slingers steeds tegengesteld van teeken zijn, en het gemiddelde dus niet gestoord wordt. Wanneer de opvatting van SCHIÖTZ juist was, zouden de slingertijdsafwijkingen van beide slingers gelijk gericht moeten zijn, en zou het slingertijdsverschil constant moeten blijven, doch niet het slingertijdsgemiddelde.

Wij laten nu hieronder eenige te Delft uitgevoerde waarnemingsreeksen volgen, waaruit de juistheid der eerste opvatting volgt. Hierbij is in het oog te houden dat het in de praktijk niet uitvoerbaar is het faseverschil steeds precies $= \pi$ te maken en de amplituden nauwkeurig gelijk te doen zijn, zoodat in het gemiddelde nog kleine schommelingen te verwachten zijn.

Voor de vier slingers van het Nederlandsche Stückrath-toestel dragende de nummers 88, 89, 90 en 91, werden te Delft de hieronder volgende slingertijden gevonden. Daarbij slingerden de slingers 90—88 en de slingers 91—89 samen.

Na de eerste vier waarnemingen werden de slingers opnieuw ingehangen: dit geeft steeds aanleiding tot eenige slingertijdsverandering.

WAARNEMINGEN VAN 28 OCTOBER—31 OCTOBER 1914.

| N ^o . 91 | N ^o . 89 | GEMIDDELDE 91 EN 89 |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| ^s 0.5012570 | ^s 0.5012583 | ^s 0.5012577 |
| 2585 | 2570 | 2578 |
| 2583 | 2575 | 2579 |
| 2566 | 2592 | 2579 |
| 2613 | 2568 | 2590 |
| 2597 | 2582 | 2590 |
| 2585 | 2595 | 2590 |
| 2560 | 2621 | 2590 |
| N ^o . 90 | N ^o . 88 | GEMIDDELDE 90 EN 88 |
| ^s 0.5012793 | ^s 0.5012964 | ^s 0.5012878 |
| 2798 | 2965 | 2881 |
| 2796 | 2958 | 2877 |
| 2793 | 2959 | 2876 |
| 2758 | 2969 | 2864 |
| 2787 | 2941 | 2864 |
| 2773 | 2959 | 2866 |
| 2787 | 2955 | 2871 |

Nog duidelijker spreken de waarnemingen, als men de coincidentietijden van de slingers met den tijdmetter afzonderlijk beschouwt. Meestal werden 8 coincidenties bij den aanvang en 8 coincidenties aan het einde waargenomen. Wanneer men de 1^o aanvangscoincidentie van de 1^o eindcoincidentie aftrekt, de 2^o aanvangscoincidentie van de 2^o eindcoincidentie, de 3^o van de 3^o enz., dan moet men steeds een zelfde tijdsinterval vinden. De grondbewegingen veroorzaken schommelingen in dit interval: van twee tegelijkslingerende slingers moeten deze schommelingen tegengesteld zijn, als de onderstellingen juist waren. Dit was bij alle waarnemingen duidelijk te constateeren. Als voorbeeld laten wij hier twee reeksen volgen.

Hierbij moet opgemerkt worden, dat tengevolge van de wijze

van uitvoering van de coïncidentiewaarnemingen, het interval tusschen de oneven coïncidenties, niet hetzelfde is als tusschen de even coïncidenties. Bij de twee reeksen zijn dus de 1^o, 3^o, 5^o en 7^o waarde onderling met elkaar vergelijkbaar en de 2^o, 4^o, 6^o en 8^o.

WAARNEMING OP 30 OCTOBER 1914.

| COINCIDENTIE Nrs | INTERVAL 90 | INTERVAL 88 | GEMIDDELDE |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 19 ^o —1 ^o | 52 ^m 59.1 ^s | 52 ^m 13.6 ^s | 52 ^m 36.4 ^s |
| 20 ^o —2 ^o | 60.4 | 15.3 | 37.8 |
| 21 ^o —3 ^o | 56.8 | 13.6 | 35.2 |
| 22 ^o —4 ^o | 59.2 | 17.5 | 38.4 |
| 23 ^o —5 ^o | 56.7 | 14.9 | 35.8 |
| 24 ^o —6 ^o | 58.8 | 16.7 | 37.8 |
| 25 ^o —7 ^o | 54.9 | 15.9 | 35.4 |
| 26 ^o —8 ^o | 59.0 | 16.8 | 37.9 |

WAARNEMING OP 30 OCTOBER 1914.

| COINCIDENTIE Nrs | INTERVAL 91 | INTERVAL 89 | GEMIDDELDE |
|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 19 ^o —1 ^o | 53 ^m 37.4 ^s | 53 ^m 35.1 ^s | 53 ^m 36.2 ^s |
| 20 ^o —2 ^o | 41.2 | 39.5 | 40.4 |
| 21 ^o —3 ^o | 35.7 | 36.0 | 35.8 |
| 22 ^o —4 ^o | 40.9 | 37.6 | 39.8 |
| 23 ^o —5 ^o | 40.0 | 34.5 | 37.2 |
| 24 ^o —6 ^o | 39.5 | 39.5 | 39.5 |
| 25 ^o —7 ^o | 34.7 | 38.0 | 36.4 |
| 26 ^o —8 ^o | 38.9 | 40.4 | 39.6 |

Een volledige bewerking van het aanwezige waarnemingsmateriaal ligt buiten het bestek van deze verhandeling.

Men kan zich met deze waarnemingsmethode een indruk vormen over de grootte der grondbewegingen op een zeker station, bijvoorbeeld op de volgende wijze.

Het slingertijdsverschil der tegelijk slingerende slingers wordt zeer sterk beïnvloed door de grondbewegingen. Immers voor $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ en $a_2 = a_1 = a$ is de grootte

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

een maximum. Men vindt dan uit XXIII B:

$$\left[\delta(T_2 - T_1) \right]_t = \frac{2G}{ga\sqrt{2t}}$$

Het verschil der gemiddelde slingertijden van de twee slingerparen ¹⁾ is onafhankelijk van de bodembewegingen, daar elk gemiddelde daarvan onafhankelijk is. Neemt men nu alle waarnemingsreeksen op een station te zamen, dan zou de daaruit volgende middelbare fout in het laatstgenoemde verschil $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ maal zoo groot moeten zijn als de middelbare fout in het slingertijdsverschil der tegelijkslingerende slingers, als er geen grondbewegingsstoringen waren. Wanneer deze storingen wel optreden, kan men dus de daardoor veroorzaakte:

$$\left[\delta(T_2 - T_1) \right]_t$$

berekenen uit de afwijking in deze verhouding. Hieruit kan men dan G bepalen.

Het is hiervoor echter noodig dat er geen andere factoren zijn die een verandering in die verhouding veroorzaken. Wij zullen op deze quaestie hier niet verder ingaan en vermelden alleen, dat men voor dit doel zeker moet zijn, dat de gebruikte tijdmetr niet aan kortstondige gangschommelingen lijdt, en dat de temperatuursbepaling der slingers nauwkeurig genoeg is.

Er is nog een tweede voordeel aan deze waarnemingsmethode verbonden: De slingertijdsafwijking tengevolge van de, door de

¹⁾ Wij herinneren er aan dat het Stückrathtoestel vier slingers heeft, die twee aan twee in een vlak slingeren. Een volledige waarnemingsreeks volgens bovenstaande methode, bestaat uit de waarneming van het eene slingerpaar gevolgd door de waarneming van het tweede slingerpaar.

ophangreacties veroorzaakte, statiefbewegingen, wordt eveneens geëlimineerd.

Men behoeft dus geen aparte waarnemingen ter bepaling van het meeslingeren uit te voeren. Daar deze waarnemingen op slappen bodem wegens de groundbewegingen op moeilijkheden stuiten, is dit van belang. Op deze wijze wordt dus de tweede moeilijkheid op de stations met slappen ondergrond, eveneens vermeden.

Deze eliminatie vindt zijn oorzaak in twee omstandigheden:

1. De invloed op den gemiddelden slingertijd van alle ophangpuntsbewegingen is nul, dus ook van die, welke door de ophangpuntsreacties veroorzaakt worden.

2. Uit formule VI volgt, dat de horizontale reacties van twee even zware slingers, met gelijke amplitude in tegengestelde fase slingerende, evengroot en tegengesteld gericht zijn. Als dus, zooals wij veronderstelden, de ophangpunten stevig verbonden zijn, zoodat een elastische afstandsverandering verwaarloosd mag worden, zullen er geen ophangpuntsbewegingen optreden.

Het volgt eveneens uit de formule XX en XXI van de vorige paragraaf, die wij in iets eenvoudiger vorm zullen brengen. Wij hebben in het vorige hoofdstuk reeds opgemerkt dat bij het Stückrathtoestel, de grootheden z_{21} en z_{12} nul zijn en λ_{11} λ_{21} λ_{12} λ_{22} gelijk zijn. Verder kan men bij het kleine slingertijdsverschil dat bij de gebruikte slingers vooropgesteld wordt, stellen:

$$l_1 = l_2 = l$$

en

$$\mu_2 = \mu_1 = \mu$$

Noemen wij nu nog ter vereenvoudiging het meeslingeren van slinger 1 s , dan is dus volgens XXI:

$$s = h_1 m_1 \frac{\lambda \mu^2 T_1}{2l}$$

en het meeslingeren van slinger 2:

$$\frac{h_2 m_2}{h_1 m_1} s = \omega^2 s$$

waarin ω^2 de grootheid $\frac{h_2 m_2}{h_1 m_1}$ voorstelt.

Verder blijkt uit XX B de storing van den slingertijd van slinger 1 door slinger 2

$$T_1 - \tau_1 = \omega^2 s \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

en van den slingertijd van n^o. 2 door slinger 1.

$$T_2 - \tau_2 = s \frac{a_1}{a_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

De totale storing in de twee slingertijden door de statiefelasticiteit is dus:

$$\begin{aligned} \text{XXIV} \quad T_1 - \tau_1 &= \left[\omega^2 \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 1 \right] s \\ T_2 - \tau_2 &= \left[\frac{a_1}{a_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \omega^2 \right] s \end{aligned}$$

Hieruit volgt ook weer dat wanneer $a_2 = a_1$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ en $h_2 m_2 = h_1 m_1$ d. w. z. $\omega = 1$ de beide slingertijds afwijkingen nul zijn. Zijn de slingers niet even zwaar, dus ω niet gelijk aan 1, dan zijn de storingen gelijk en tegengesteld, d. w. z. in den gemiddelden slingertijd is geen storing. De grootheid ω kan men eens voor al bepalen; bij de Stückrathslingers is zij een.

Zooals wij reeds opmerkten, is het in de praktijk niet mogelijk, de voorwaarden $a_2 = a_1$ en $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ volkomen te verwezenlijken. Men mag bij de optredende afwijkingen dan ook de storingen door de statiefelasticiteit niet nul stellen, doch moet deze volgens de formule XXIV in rekening brengen. Het zou dus eigenlijk toch noodig blijken het meeslingeren s te bepalen. Men kan zich echter met een zeer ruwe bepaling van s tevreden stellen omdat de factoren tusschen de haakjes in XXIV steeds klein zullen zijn en in het bijzonder de storing in den gemiddelden slingertijd zeer klein is, zooals uit een nadere beschouwing blijkt.

De waarnemingsduur is bij deze methode niet onder alle omstandigheden onbepakt. De amplitudeverhouding $\frac{a_2}{a_1}$ en het faseverschil $\varphi_2 - \varphi_1$ zijn langzaam veranderende grootheden; en voor de eliminatie der grondbewegingen is noodig dat zij niet

te veel van t respectievelijk π verschillen. Hierdoor is dus de waarnemingsduur in het algemeen beperkt.

Wanneer echter

$$\omega = 1 \quad t_2 = t_1 \quad a_2 = a_1 \quad \text{en} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$$

dan blijven amplitudeverhouding en faseverschil constant. Dit volgt uit de formules XX en XXB, en zal nog nader behandeld worden in Hoofdstuk V.

Hoe grooter de afwijking van deze voorwaarden is, des te sneller veranderlijk zijn $\frac{a_2}{a_1}$ en $\varphi_2 - \varphi_1$, en des te kleiner is de toelaatbare waarnemingsduur.

Binnen dezen beperkten waarnemingsduur kan men steeds van de formules XXIV gebruik maken, daar men geen groote veranderingen in $\frac{a_2}{a_1}$ en $(\varphi_2 - \varphi_1)$ veronderstelt, en dus voor beide mag substitueeren het gemiddelde van de waarden bij het begin en bij het einde van den waarnemingstijd.

In allen gevalle kan men ze nog toepassen als men den geldigheidsduur der vergelijkingen XXIV uitbreidt door een correctie-term te berekenen die bij langeren waarnemingstijd¹⁾ moet toegevoegd worden. Dit is eenvoudiger dan dat men gebruik maakt van de omslachtige formules van Hoofdstuk V, die wel voor elk willekeurig tijdsverloop geldig, doch in de praktijk niet geschikt zijn.

Wij zullen den berekeningsgang van deze correctie hier in het kort aangeven.

Men moet uit de waarde van $\frac{a_1}{a_2}$ en $\varphi_2 - \varphi_1$ aan het begin, en aan het einde van den waarnemingstijd t , berekenen de waarde van de integralen:

$$\frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) dt \quad \text{en} \quad \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \frac{a_1}{a_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) dt$$

¹⁾ Onder waarnemingstijd verstaan wij den tijd tusschen de begin- en de eindwaarnemingen. Verondersteld wordt dat in dit tijdsverloop geen waarnemingen verricht worden.

zoodat men door substitutie hiervan in XXIV de gemiddelde slingertijdscorrectie over den waarnemingstijd t kan vinden.

Stel ter vereenvoudiging:

$$\frac{a_1}{\omega a_2} = p \qquad \frac{\pi s \omega}{\tau^2} = c \qquad \frac{\pi (\tau_2 - \tau_1)}{\tau^2} = d$$

$$p \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = f$$

Gegeven:

$$f_a = f \text{ bij den aanvang, ten tijde } -\frac{t}{2}$$

$$f_e = f \text{ aan het einde, ten tijde } +\frac{t}{2}$$

Gevraagd:

$$\frac{\omega}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} f dt \quad (\text{Dit is de tweede der gevraagde integralen.})$$

Oplossing:

Ontwikkel f naar t dan krijgt men:

$$f = f_0 + t f_0' + \frac{t^2}{2} f_0'' + \dots$$

$$f_m = \frac{1}{2} f_a + \frac{1}{2} f_e = f_0 + \frac{t^2}{8} f_0'' + \dots$$

$$\frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} f dt = f_0 + \frac{t^2}{24} f_0'' \dots = f_m - \frac{t^2}{12} f_0''$$

f'' is te berekenen door f tweemaal te differentieeren naar den tijd, waarbij gebruik te maken is van de uit XX af te leiden formules:

$$p' = c (p^2 + 1) \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\varphi_2' - \varphi_1' = -c \left(p - \frac{1}{p} \right) \cos (\varphi_2 - \varphi_1) - d$$

Hierbij is ondersteld dat de demping der beide slingers gelijk is, en dat het verschil der slingertijden $\tau_2 - \tau_1$ constant is, d.w.z. dat er geen andere storende invloeden optreden, die een veranderlijke slingertijdsafwijking geven. Men krijgt:

$$f'' = -2c^2 p^3 \cos^3(\varphi_2 - \varphi_1) - 3cd p^2 \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ + (2c^2 - d^2) p \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + cd$$

Wanneer $\omega = 1$ is, en verder p ongeveer $= 1$ en $\varphi_2 - \varphi_1$ ongeveer $= \pi$ is, krijgt men met eenige verwaarloozing:

$$f_0'' = d^2 - 2cd$$

Voert men dit in de formule voor de integraal in, en substitueert men deze in XXIV, dan krijgt men:

$$T_2 - \tau_2 = \left[\frac{a_1}{a_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 1 \right] s - 1.69 t^2 s (\tau_2 - \tau_1) (\tau_2 - \tau_1 - 2s)$$

en op dezelfde wijze vindt men:

$$T_1 - \tau_1 = \left[\frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 1 \right] s - 1.69 t^2 s (\tau_2 - \tau_1) (\tau_2 - \tau_1 + 2s)$$

In deze formules moet voor

$$\frac{a_1}{a_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \text{ en } \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

gesubstitueerd worden het gemiddelde van de waarden die deze grootheden bij den aanvang en het einde van den waarnemingsduur hebben. Verder is t uitgedrukt in uren, zijn de grootheden τ_1 , τ_2 en s van de correctietermen uitgedrukt in 10^{-5} seconde en is overigens de tijdseenheid 10^{-7} seconde.

De correctie is berekend voor een slingertijd $\tau_1 = \tau_2 = 0.5013$ seconde. Zij is omgekeerd evenredig aan τ^4 en is dus gemakkelijk voor een anderen slingertijd om te rekenen.

Wanneer ω niet gelijk 1 is, wordt de formule ingewikkelder. Wij zullen daarop niet verder ingaan.

De correctie is nul voor $\tau_1 = \tau_2$, dit stemt overeen met wat hierboven opgemerkt werd. De correctieterm is gemakkelijk voor een bepaald slingerpaar met bekende $\tau_2 - \tau_1$ te tabelleren.

HOOFDSTUK IV.

Bepaling van het meeslingeren.

Wij laten hier eerst een overzicht volgen van de verschillende methoden:

1^o. *Statische Methode*. Men laat op het statief, ter hoogte van het ophangpunt van den slinger, een bekende kracht aangrijpen, en meet de uitwijking die deze aan het ophangpunt geeft. Hier uit is dus γ bekend. Men verwaarloost de traagheidsinvloed van het statief en stelt dus (zie formule XVIII D):

$$\lambda = \frac{1}{\gamma}$$

Men vindt dan het meeslingeren uit XXI.

2^o. Men meet de amplitude a_s van de ophangpuntsbewegingen, die door den slinger veroorzaakt worden en berekent daaruit het meeslingeren met behulp van de formule XVIII A:

$$T - \tau = \frac{1}{2al} \int_0^{.2T} y_0 \sin \varphi dt = \frac{a_s}{2al} T$$

3^o. Men kan gebruik maken van een tweeslingermethode, wanneer het statief gelegenheid biedt tot het inhangen van een tweeden slinger in hetzelfde vlak, en van dusdanige constructie is dat men de bewegingen van beide ophangpunten in de y richting gelijk kan stellen ¹⁾, d. w. z. $\lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda$.

¹⁾ Wanneer het relatieve waarnemingen betreft, behoeft men deze laatste voorwaarde niet te stellen. Men bepaalt n.l. met deze methoden de grootheid

Men kan dan uit den invloed van den eenen slinger op den tweeden, λ afleiden.

Men bepaalt zich hierbij in 't algemeen tot het bijzondere geval, dat de tweede slinger bij den aanvang in rust is. Na eenigen tijd worden de amplituden der beide slingers afgelezen, waaruit het meeslingeren is af te leiden (formule XX en XXI).

4^o. *Stootmethode*. Men laat op het statief ter hoogte van het ophangpunt, een kracht aangrijpen, die periodiek van nul tot een zeker maximum wisselt. Het maximum leest men op een dynamometer af. De periode moet gelijk zijn aan den dubbelen slingtijd of daarvan weinig verschillen.

Bij den aanvang is de slinger in rust. Na eenigen tijd leest men de amplitude af. Uit een uit XVIII C af te leiden formule is dan het meeslingeren te berekenen.

1. Statische Methode.

De statische methode heeft het voordeel, dat zij niet gestoord wordt door grondbewegingen. Zij heeft echter in het algemeen drie nadeelen:

1^o. Om een voldoende uitwijking te krijgen, zoodat meting tot den vereischten graad van nauwkeurigheid mogelijk is, moet men vrij groote krachten aanwenden. DEFFORGES gebruikt bijvoorbeeld een kracht van 10 K.G.; dat is vijfhonderd maal zooveel, als de grootste zijdelingsche ophangpuntsreactie van den slinger bij de gebruikte amplituden kan bedragen. Nu is het zeer wel mogelijk, dat de uitwijkingen bij zulke groote verschillen niet meer evenredig aan de kracht zijn. Wij hebben, zooals op blz. 69 e.v. is opgemerkt, alle reden om te vreezen, dat de opstelling

$\lambda_{21} = \lambda_{12}$. Uit de definitie van λ (formule XVIII D) volgt verder, dat $\lambda_{21} - \lambda_{11}$ voorstelt de afstandsverandering der twee ophangpunten, die even hoog verondersteld worden, wanneer in deze punten twee krachteenheden aangrijpen in de richting van de verbindingslijn en tegengesteld gericht. $\lambda_{21} - \lambda_{11}$ is dus alleen van het statief afhankelijk en niet van de wijze van opstelling. Wanneer men dus in de formule XXI voor het meeslingeren, λ_{21} substitueert in plaats van λ_{11} , zal de daardoor gemaakte fout op alle waarnemingsstations even groot zijn.

niet volkomen elastisch zal zijn, of dat bij groote krachten de elasticiteitscoëfficiënt een andere zal zijn dan bij kleine. Men vindt dan door deze methode een onjuiste waarde voor het meeslingeren. In het algemeen kan men zeggen, dat, ingeval de in Hoofdstuk III gemaakte veronderstellingen over de statiefbewegingen niet aan de werkelijkheid beantwoorden, dit bij deze meeslingeringsbepaling een fout zal veroorzaken.

2°. Het meten van de elastische uitwijking is niet gemakkelijk. Welke methode men daar ook voor kiest, de waarneming komt steeds neer op het meten van de ohangpuntsverplaatsing ten opzichte van een opstelling in de nabijheid van het statief. Deze laatste mag dus geen invloed ondervinden van de op het statief werkende kracht.

Dit zal op reisstations nog al eens moeilijkheden geven, daar men meestal voor het statief niet over apart gefundeerde pijlers beschikken kan, en dus van de statiefopstelling door middel van gips een geheel maakt met den bodem. Men zal er dan in het algemeen niet zeker van zijn dat de bodem, bij het aanbrengen van de kracht, niet op de tweede opstelling bewegingen overdraagt.

3°. Men verwaarloost den traagheidsinvloed van het statief.

Deze fout zal bij de meeste in gebruik zijnde statieven onbetekenend zijn, daar naar schatting $\frac{M}{\gamma}$ daarbij hoogstens 0.0001 kan bedragen en dus de fout in het meeslingeren niet grooter dan 0.01 μ^2 procent is (formule XVIII D). Daar de voorkomende meeslingeringsconstanten niet grooter dan 100 10^{-7} seconde zijn, is dit van geen beteekenis.

De praktijk zal moeten leeren of de eerste twee bezwaren zich voordoen of dat hun invloed onmerkbaar is.

Professor L. HAASEMANN (Geodätisches Institut — Potsdam) die reeds vele jaren relatieve waarnemingen in Duitschland verricht, heeft op een van zijn reizen bij een geheele reeks van stations het meeslingeren door middel van de gewone tweeslingermethode en met de statische methode volgens NAGAOKA (zie hieronder) bepaald. Hij vond op èen uitzondering na, steeds dezelfde waarden.

Vroegere waarnemingen van PLANTAMOUR en PEIRCE geven echter een systematisch verschil dat door verdere waarnemingen van

DEFFORGES bevestigd werd. De elasticiteit van het statief werd langs statischen weg steeds grooter gevonden dan wat overeen zou komen met de resultaten van de meting der statiefbewegingen tengevolge van de slingerreactie.

In de „Observations de Pendules” pag 18 e. v., wordt daarvan de volgende verklaring gegeven, aansluitende aan de veronderstelling van DEFFORGES omtrent de glijding van het mes over het ophangvlak.

Het statief zal door de glijding niet de volle heen- en weergaande beweging van het slingermes uitvoeren, doch daarbij achterblijven. zoodat, als men de amplitude van de statiefbeweging tijdens het slingeren meet, deze kleiner zal zijn dan de amplitude, die ontstaan zou, wanneer bij het uitblijven van glijding de samenhang tusschen slinger en statief niet verbroken zou zijn. Deze laatste zou dan natuurlijk gelijk zijn aan de statische uitwijking veroorzaakt door een kracht gelijk aan de horizontale slingerreactie. Door de glijding zouden de werkelijk optredende statiefbewegingen dus kleiner zijn dan die statische uitwijking.

In aansluiting aan deze opvatting gebruikt DEFFORGES de elasticiteit, zooals die door de statische methode bepaald wordt, voor de berekening van het meeslingereren, daar de statische uitwijking naar zijne meening gelijk is aan de uitwijking van het mes van den slinger en dus maatgevend is voor de slingertijdsstoring. Hij beschouwt dan ook de resultaten der statische methoden als beter dan die van een der dynamische methoden.

Deze redeneering gaat m. i. van een foutieve basis uit. Al treedt glijding op, toch zal de horizontale reactie van den slinger wel degelijk ten volle op het statief overgebracht worden; zou er een eenigszins aanmerkelijk verschil zijn, groot genoeg om DEFFORGES' verklaring te doen opgaan, dan zou zich het slingermes over het oplegvlak bewegen met een dienovereenkomstige versnelling. Gemakkelijk is in te zien dat deze glijding van veel grooter orde zou zijn dan de uiterst kleine glijding die wellicht in de werkelijkheid optreedt. Bovendien is volgens DEFFORGES de glijding op het moment van grootste uitwijking van den slinger nul, zoodat in allen geval op dat oogenblik de volle reactie op het statief wordt overgedragen.

De optredende statiefuitwijkingen zijn dus, afgezien van den

kleinen traagheidsinvloed der bewegende statiefmassa, wel degelijk even groot, als die welke een statische kracht van dezelfde grootte als de horizontale ophangpuntsreactie teweegbrengt. Wij kunnen dan ook hierin geen verklaring vinden voor het verschijnsel.

Het ligt m. i. voor de hand deze te zoeken in een der beide reeds genoemde oorzaken, te weten:

1^o. een verschil tusschen den elasticiteitscoëfficiënt bij de kleine slingerreactie en die bij de vijfhonderd maal grootere statische belasting. De laatste zal wel meestal het grootste zijn, wat inderdaad een te groote waarde voor het meeslingeren geeft bij de toepassing der statische methode.

2^o. een niet volkomen vast staan van de tweede opstelling, die voor de meting van de uitwijking gebruikt wordt.

Daar deze laatste oorzaak in het algemeen eerder een te kleine waarde voor het meeslingeren zal geven, schijnt mij de eerste oorzaak het meest waarschijnlijk.

Het is echter niet mogelijk zich uit de gedane publicaties een vast oordeel dienomtrent te vormen.

Het schijnt mij om de bovenstaande redenen niet twijfelachtig toe, dat de voorkeur van DEFFORGES voor de statische methode ongegrond is, en dat men integendeel bij het optreden van een verschil in het resultaat voor het meeslingeren, dat der statische methode als minderwaardig moet beschouwen.

Wij herinneren er hier nogmaals aan, dat als er glijding optreedt, deze op alle stations even groot zal zijn en dat deze dus voor de relatieve waarnemingen niet bepaald behoeft te worden. Wij zullen deze dan ook in dit hoofdstuk verder buiten beschouwing laten.

Wij zullen nu nog in het kort nagaan op welke wijze men de uitwijking van het statief bij het gebruik van de statische methode meet.

DEFFORGES gebruikte, voorzoover ik kan nagaan, een mikroskoop, die daarvoor natuurlijk onbewegelijk opgesteld moet worden.

HECKER heeft het voorstel gedaan om de uitwijking te meten, door de hellingsverandering van een op het ophangvlak in de richting van het slingervlak rustend niveau te meten. In de praktijk heeft dit echter niet voldaan. Niveau's zijn dan ook

meetinstrumenten, die men wegens hun grilligheid liever niet dan wel gebruikt.

Een zeer practisch instrumentje is van NAGAOKA afkomstig. Hetzelfde idee is trouwens ook reeds door PLANTAMOUR toegepast.

Aan het statief wordt, ter hoogte van het ophangvlak een, om een verticale as draaibaar, verticaal spiegeltje aangebracht. Om het asje (1 à 2 mM. diameter) is een of tweemaal een zeer dun en buigzaam metaaldraadje geslagen. Het eene einde daarvan is aan een vast onbewegelijk punt buiten het statief bevestigd, zóó, dat deze draadverbinding horizontaal en evenwijdig aan het slingervlak is. Het andere einde is met tusschenschakeling van een veertje aan een willekeurig punt van het statief bevestigd. Het veertje laat bewegingen van dit draadeinde toe, doch houdt den draad onder constante spanning.

Bij het optreden van een statiefbeweging in de richting van het slingervlak, zal het asje langs de metaaldraad rollen en dus het spiegeltje wentelen. De wentelingshoek wordt op de gebruikelijke wijze bepaald door middel van een schaalverdeeling, waarvan het gereflecteerde beeld in een kijker wordt waargenomen.

Met dit toestelletje is een statiefverplaatsing van 0.1μ zonder moeite te meten. Door deze gevoeligheid is het mogelijk met tamelijk kleine krachten te werken, omdat dan de uitwijking nog tot op de vereischte nauwkeurigheid van ongeveer 1% te bepalen is. Zoo kreeg ik bij het gebruik van dit toestelletje voor het vrij zwaar gebouwde statief van het Nederlandsche DEFFORGES-toestel bij het aanbrengen van 1 en 2 K.G. reeds voldoende nauwkeurige resultaten. Het is daarenboven gemakkelijk op reis mee te nemen.

De moeilijkheid is ook nu weer om zich een vast punt naast het statief te verschaffen.

2. Meting van de amplitude van de statiefbewegingen door den slingerenden slinger veroorzaakt.

De amplitude dezer statiefbewegingen is zeer gering. Bij het Defforges-toestel bedraagt deze bijvoorbeeld slechts 0.09μ , wanneer de slinger met een amplitude van $40'$ slingert.

Om deze kleine grootheid met een nauwkeurigheid van 1 à 2 % te meten, moet men dus over zeer gevoelige instrumenten beschikken.

In Amerika heeft men daartoe gebruik gemaakt van lichtinterferentie. De beschrijving der gebruikte toestellen kan men vinden in: „Coast and Geodetic Survey Report 1910. The measurement of the flexure of pendulum supports with the interferometer by W. H. BURGER”.

Uit de gepubliceerde reeks van 4 waarnemingen schijnt mij de conclusie te trekken, dat de middelbare fout bij deze methode iets groter is dan bij de andere methoden (in het resultaat van 4 waarnemingen ongeveer $1.5 \cdot 10^{-7}$ seconde). Het materiaal is echter te gering om zich dienaangaande een vast oordeel te vormen.

Men heeft bij deze methode ook weer de moeilijkheid te overwinnen om het interferentietoestel een geheel vaste opstelling te verschaffen naast het slingerstatief, zoodat men ook nu weer daardoor eenige onzekerheid krijgt.

Bovendien vereischt deze methode de aanschaffing van gecompliceerde toestellen, die het reistransport aanzienlijk verzwaren.

Het is moeilijk zich een oordeel te vormen over den invloed der grondbewegingen op deze methode. Deze zullen zonder twijfel storend werken; in hoeverre dit hinderlijk zal zijn, is niet van te voren te zeggen. Voor zoover mij bekend is zijn hierover geen mededeelingen gepubliceerd.

3. Tweeslingermethoden.

Wij zullen veronderstellen, dat de slingertijden der twee samslingerende slingers zoo weinig verschillen, en de statiefelasticiteit zoo klein is, dat $(\varphi_2 - \varphi_1)$ gedurende de 45 minuten dat de waarnemingen op zijn hoogst duren slechts weinig verandert en wij dus de formules XX zullen kunnen toepassen.

Deze voorwaarde is bij het Stückrathtoestel vervuld, wanneer het slingertijdsverschil niet grooter is dan $400 \cdot 10^{-7}$ seconde.

De geldigheid van de formules XX is trouwens, zooals aan het eind van het vorige hoofdstuk is aangetoond, nog over langeren tijdsduur uit te strekken, wanneer men een correctieterm

berekent. Wanneer het slingertijdsverschil zoo groot zou zijn, dat men ook hiermee niet kan volstaan, zou men van de geïntegreerde formules van Hoofdstuk V moeten gebruik maken. Deze zijn echter ongeschikt voor snelle berekening. Wij zullen op dit geval niet verder ingaan.

Wij voeren in de formules XX en XX B ter vereenvoudiging in:

$$\omega^2 = \frac{h_2 m_2}{h_1 m_1}$$

$$s = \frac{\lambda h_1 m_1 \mu^2 \tau_1}{2 l_1}$$

en stellen verder voor zoover dat geoorloofd is:

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau$$

$$l_2 = l_1 = l \quad z_{21} = z_{12} = 0$$

Wij krijgen dan uit XX en XX B:

$$(z_1 - N_1) a_1 = -\frac{\mu}{\tau} \omega^2 s a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\text{XX C} \quad a'_1 = -k_1 a_1 + \frac{\mu}{\tau} \omega^2 s a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$T_1 - t_1 = \omega^2 s \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Hierbij hebben wij ook de andere storingen, die op den slinger werken, in aanmerking genomen, doordien wij aan a'_1 een dempingsterm $-k_1 a_1$ hebben toegevoegd, terwijl wij onder N_1 en t_1 niet de fasesnelheid en den slingertijd van den theoretischen slinger verstaan, maar de fasesnelheid en den slingertijd zooals deze zijn zouden, wanneer de slinger onder dezelfde omstandigheden alleen op het statief slingerde.

De laatste vergelijking geldt alleen, wanneer a_1 niet nul of bij benadering nul is.

Men heeft voor den tweeden slinger eenzelfde stel vergelijkingen, waarbij de indices 1 en 2 verwisseld zijn en $\omega = 1$ gesteld is.

Men zou nu de grootheid s kunnen afleiden door de slingertijds-afwijking, of de amplitude verandering te meten. In het algemeen doet men dit laatste en wel voor het bijzondere geval dat slinger 1 bij den aanvang in rust is.

Gewone Tweeslingermethode.¹⁾

Men hangt slinger 1 stil. en geeft slinger 2 een flinke amplitude. Na verloop van tien minuten leest men de amplituden van beide slingers af en herhaalt dit om de twee minuten, vier of vijfmaal. Uit de eerste van formule XX C volgt, dat $(\varphi_2 - \varphi_1)$ bij den aanvang 90° is, d.w.z. de eerste slinger is een halve slingering achter bij den tweeden.

XX C geeft dan:

$$a'_1 = -k_1 a_1 + \frac{\mu}{\tau} \omega^2 s a_2$$

$$a'_2 = -k_2 a_2 - \frac{\mu}{\tau} s a_1$$

Hieruit is de dempingsinvloed te elimineeren door invoering van de amplitudeverhouding $\frac{a_1}{a_2} = p$:

$$p' = \frac{\mu}{\tau} \omega^2 s + \frac{\mu}{\tau} s p^2 + (k_2 - k_1) p$$

p is een kleine grootheid, ten hoogste 0.1; als buitendien het verschil der dempingsconstanten niet te groot is (kleiner dan $0.1 \frac{\mu}{\tau} s = 1.33 s$) kan men de laatste twee termen verwaarloozen.

¹⁾ Deze methode werd het eerst aangegeven door R. SCHUMANN in:

Über die Verwendung zweier Pendel auf gemeinsamer Unterlage zur Bestimmung der Mitschwingung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 44. Jahrg. S. 102.

Zie ook:

G. LORENZONI. Relazione sulle esperienze istituite nel reale osservatorio astronomico di Padova etc. Roma 1888.

Men houdt dan over:

$$\text{XXV} \quad p' = \frac{\pi}{\tau^2} \omega^2 s \quad \text{of:} \quad \frac{p}{t} = \frac{\pi}{\tau^2} \omega^2 s$$

waaruit s direct volgt.

Bij het Stückerathtoestel zijn beide slingers gelijk van vorm en massa; het verschil der dempingsconstanten is dus zeker klein genoeg voor bovenstaande verwaarloozing, en ω is gelijk aan een.

De nauwkeurigheid van de meting hangt volgens formule XXV af van de nauwkeurigheid, waarmee p gemeten wordt, welke laatste natuurlijk in hoofdzaak bepaald wordt door de fout, die men in de meting van a_1 maakt.

Bij het Stückerathtoestel is de middelbare fout voor het resultaat s uit een waarnemingsreeks 1 à 2 10^{-7} secunde; de nauwkeurigheid is dus, wanneer men meerdere waarnemingen uitvoert, zeker voldoende te achten.

Men kan desgewenscht de geheele waarneming nauwkeuriger maken door a_1 grooter te doen worden zoodat de waarnemingsfout in a_1 minder invloed heeft. Dit kan door na een grooter tijdsinterval waar te nemen, doch men kan daarbij niet te ver gaan, daar anders de formules niet meer geldig blijven. Men kan echter hetzelfde ook bereiken, door in plaats van slinger 2 een zwaarderen slinger in te hangen, zoodat ω grooter dan een wordt. Men moet er zich dan natuurlijk van overtuigen, of het verschil der dempingsconstanten niet zoo groot is, dat men den betreffenden term in de formule moet behouden. Men maakt dezen zwaarderen slinger dan dikwijls met een verstelbaar gewicht, zoodat men den slingertijd kan aanpassen aan verschillende andere slingers en dus steeds de benoodigde slingertijdgelijkheid kan tot stand brengen.

De waarneming volgens deze methode verloopt snel, is zeer eenvoudig te berekenen, vereischt geen speciale hulptoestellen en heeft het groote voordeel onafhankelijk te zijn van de onderstellingen omtrent de statiefbewegingen, die in Hoofdstuk III gemaakt zijn. Dit laatste punt, dat eveneens voor de nog volgende andere tweeslingermethoden geldt, zullen wij later nader toelichten en bespreken.

Het is dus verklaarbaar, dat zij zeer algemeen in gebruik is.

Er is echter een bezwaar aan verbonden, n.l. de moeilijkheid den slinger stil te hangen. Is men er door proefnemingen zeker van, dat de aanwezigheid van den metalen mantel op het meeslingeren geen invloed heeft, dan kan men de bepaling zonder dien mantel uitvoeren en dus eveneens het stilhangen van den slinger. Bij het Nederlandsche Stückrathtoestel is dit echter wel het geval en men moet daarom dit laatste met opgezetten mantel uitvoeren.

Men dient dan zijn toevlucht te nemen tot het langzaam terugschroeven van den amplitudehefboom. Dit is in de praktijk niet gemakkelijk en wordt zeer bezwaarlijk als er sprake is van grondbewegingen. Men krijgt dan heftige botsingen tusschen slinger en hefboom, die het stilhangen vrijwel onmogelijk maken.

Om deze reden kan men de methode ook niet goed alleen uitvoeren. Men moet het stilhangen van den eersten slinger in den kijker controleeren op hetzelfde oogenblik, dat slinger 2 wordt losgelaten, om te kunnen nagaan of hij daardoor niet in beweging komt. Daarbij is dus een tweede persoon noodig.

Men kan, om dit bezwaar te ontgaan, de volgende methode toepassen.

Gewijzigde Amplitudemethode.

Men geeft beide slingers een amplitude en zorgt dat het faseverschil ongeveer $\frac{\pi}{2}$ is.

Men vangt aan met de meting van beide amplituden, bijvoorbeeld vijfmaal achtereen, met tusschenruimten van twee minuten. Vervolgens neemt men eenige coïncidenties met den tijdmetrator waar, waaruit het faseverschil te berekenen is.

Na afloop neemt men weer vijfmaal beide amplituden waar.

Uit XX C vindt men:

$$\frac{a_1'}{a_1} = -k_1 + \frac{\pi}{\tau^2} \omega^2 s \frac{a_2}{a_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{a_2'}{a_2} = -k_2 - \frac{\pi}{\tau^2} s \frac{a_1}{a_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Noemt men nu

$$\frac{a_1}{\omega a_2} = \operatorname{tg} \alpha$$

dan vindt men door aftrekking:

$$\text{XXVI} \quad \alpha' = \frac{\pi}{\tau^2} \omega s \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{(k_1 - k_2)}{2} \sin 2\alpha.$$

Zijn de dempingsconstanten gelijk dan houdt men over:

$$\alpha' = \frac{\pi}{\tau^2} \omega s \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

De berekening volgens deze formules is slechts weinig omslachtiger dan bij de vorige methode, de waarnemingen nemen echter iets meer tijd in beslag.

De grens boven welke $(k_2 - k_1)$ niet komen mag, opdat de verwaarloozing nog geoorloofd zij, is iets lager dan bij de vorige methode, omdat de factor, waarmee $(k_2 - k_1)$ vermenigvuldigd wordt, in formule XXVI iets grooter is dan in formule XXV. Echter zal hieronder aangetoond worden, dat het voor de nauwkeurigheid dezer methode voordeelig is, wanneer $\frac{a_1}{a_2}$ respectievelijk $\frac{a_2}{a_1}$ klein is, zoodat de bedoelde factor niet grooter wordt dan 0.2. Het onderscheid met de vorige methode is dus niet groot.

Bovendien heeft men nu de gelegenheid om een eventueel verschil van k_1 en k_2 te elimineeren. Men herhaalt daartoe de waarneming met ongeveer dezelfde amplituden, doch met een faseverschil $\frac{3\pi}{2}$. Door de nieuwe formule voor α' van de oude af te trekken, elimineert men $(k_2 - k_1)$.

Men zou natuurlijk ook, wanneer $k_2 - k_1$ niet nul is, deze grootheid eens voor al voor een bepaald slingerpaar kunnen bepalen, waarbij natuurlijk onderzocht moet worden in hoeverre zij veranderlijk is met den luchtdruk en met de amplituden.

Bij de Nederlandsche Stückerathslingers kan het verschil der dempingsconstanten verwaarloosd worden.

Het ligt niet op den weg van deze verhandeling om over de

practische uitvoeringswijze dezer methode nog verder in details te treden; wij zullen ons beperken tot de behandeling van twee punten die van belang zijn. Wij onderstellen hierbij dat de waarnemingen geschieden met een Stückerathtoestel; men kan trouwens de beschouwingen gemakkelijk toepasselijk maken voor een ander toestel.

Het is wenschelijk na te gaan bij welke amplituden van beide slingers men het meest nauwkeurige resultaat krijgt. Wij kunnen die immers binnen zekere grenzen nog willekeurig kiezen. Alleen is het bij eliminatie van een eventueel verschil der dempingsconstanten wenschelijk bij de tweede waarnemingsreeks voor elken slinger dezelfde amplitude te gebruiken als bij de eerste, omdat deze constante min of meer veranderlijk is met de amplitude.

Het faseverschil moet natuurlijk zoo weinig mogelijk van 90° verschillen; een fout in de bepaling daarvan geeft dan bijna geen verandering in $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ en bovendien zijn de factoren van s dan een maximum.

De amplitude is aan grenzen gebonden. Al te klein kan men ze niet maken, daar dan de coïncidentiewaarnemingen te onnauwkeurig worden. Men behoeft daarin niet dezelfde nauwkeurigheid te eischen als voor de gewone slingertijdswaarnemingen, daar een fout in $(\varphi_2 - \varphi_1)$ weinig invloed heeft; beneden $5'$ kan men echter niet gaan (bij de slingertijdswaarnemingen gebruikt men een amplitude van $15'$ à $20'$).

De bovenste grens wordt gegeven door de onmogelijkheid om amplituden grooter dan $40'$ met het gewone toestel behoorlijk waar te nemen; het schaalbeeld danst dan te snel op en neer, zoodat men de uitwijking moeilijk kan schatten.

Voor een verdere behandeling van deze quaestie zullen wij de middelbare fout moeten kennen van de amplitudewaarneming. Wij merkten reeds op, dat deze voor kleine amplituden kleiner is dan voor groote; wij kunnen dit als volgt in formule brengen:

$$m_a^2 = m^2 + c^2 a^2$$

Hierin beteekent m de middelbare fout in de aflezing van de stilstaande amplitudeschaal; ca is de middelbare fout in de

aflezing, die het gevolg is van de beweging van de schaal tijdens de aflezing; men kan deze evenredig stellen aan de snelheid der schaalbeweging, d. w. z. aan de amplitude.

Bij het Stückrathtoestel zijn m en c niet voor elken slinger even groot, daar ze afhankelijk zijn van de helderheid van het schaalbeeld en daardoor dus o. a. van het aan den slinger bevestigde spiegeltje.

Men vindt nu voor de middelbare fout in s , bij gebruik van het bovenbeschreven waarnemingsschema, en onderstellende dat $k_1 = k_2$ en de waarnemingsduur gelijk is aan t :

$$m_s^2 = \frac{T^4}{2t^2 \pi^2 \omega^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \sin^2 2\alpha \left[\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 + c_1^2 + c_2^2 \right]$$

Deze grootheid moet dus een minimum worden, waaruit voor $\varphi_2 - \varphi_1$ weer de waarde $\pm \frac{\pi}{2}$ volgt. Zoekt men door differentiatie naar de waarden van a_1 en a_2 , die m_s een minimum maken, dan vindt men, dat deze niet reëel zijn. Binnen de gestelde amplitudegrenzen liggen dus geen waarden van a_1 en a_2 , die m_s minimum maken. Om m_s zoo klein mogelijk te krijgen, moeten dus a_1 en a_2 grenswaarden hebben.

Bij het onderzoek der vier mogelijkheden blijkt, dat dan een der amplituden zoo groot mogelijk moet zijn, en de andere zoo klein mogelijk.

Met eenige verwaarloozingen krijgt men, dat wanneer

$$m_1^2 < \omega^4 m_2^2 + (\omega^4 - 1)(c_1^2 + c_2^2) a g^2$$

(ag is de laagste amplitude grens), a_1 klein en a_2 groot moet zijn. In het tegenovergestelde geval moet a_2 klein en a_1 groot zijn.

Voor $\omega = 1$ beteekent dit, dat de slinger die het helderste schaalbeeld geeft, de kleinste amplitude, en de andere de grootste amplitude moet krijgen.

Wanneer men de waarnemingen over een zoo langen tijdsduur wil uitstrekken, dat men de differentiaalformule XXVI niet zonder meer kan gebruiken, moet men gebruik maken van de formules van Hoofdstuk V, of wel men moet formule XXVI aanhouden en een correctieterm berekenen. Dit laatste is voor de practijk het meest geschikt.

Men kan hiertoe weer denzelfden weg inslaan als aan het eind van Hoofdstuk III, en vindt dan, uitgaande van de onderstelling dat $\varphi_2 - \varphi_1$ in het midden van den waarnemingsduur wordt gemeten:

$$\alpha' = \frac{\pi\omega}{T^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) s(1+f)$$

$$100f = [-0.06 w^2 s^2 v^2 + 1.26 w s v (t_2 - t_1) - 0.84 (t_2 - t_1)^2] t^2$$

Hierin is

$$v = \cotg 2\alpha \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

t = waarnemingsduur in uren

s en $t_2 - t_1$ = meeslingeren en slingertijdsverschil in 10^{-5} secunde

f is berekend voor $t_2 - t_1 = 0.5013$ secunde; zij is omgekeerd evenredig aan de vierde macht van den slingertijd en kan dus gemakkelijk voor andere slingers omgerekend worden.

Wanneer de waarnemingsduur niet grooter is dan een half uur, zooals dat in de praktijk meestal het geval zal zijn, dan kan de eerste term van f steeds verwaarloosd worden, de twee laatsten mogen alleen verwaarloosd worden, wanneer $(t_2 - t_1) < 2 \cdot 10^{-5}$ secunde is.

Het voordeel dezer gewijzigde amplituden-methode tegenover de vorige, is in hoofdzaak gelegen in de vermijding van de moeilijkheid van het stilhangen van den slinger en van de daaruit voortvloeiende onzekerheid. Is er quaestie van grondbewegingen, dan treedt dit voordeel nog sterker op den voorgrond.

Overigens is de storende invloed der grondbewegingen even groot als bij de vorige methode, zooals verderop zal aangetoond worden.

Als nadeel dezer methode tegenover de vorige moet genoemd worden, dat de waarnemingen langer duren en iets gecompliceerder zijn; men heeft n.l. naast de amplitudewaarnemingen ook coïncidentiewaarnemingen.

Nog op andere wijze is van de formules XX C gebruik te maken ter bepaling van het meeslingeren en wel door de slingertijdsverandering van den eersten slinger door den tweeden te meten.

Slingertijdsmethoden.

Men bepaalt eerst den slingertijd van beide slingers terwijl zij in dezelfde fase slingeren en vervolgens bij een faseverschil π . Men vindt dan achtereenvolgens de volgende slingertijden (formule XX C):

$$T_1 = t_1 + w^2 s \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad T_2 = t_2 + s \frac{a_1}{a_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

XXVII

$$T_1 = t_1 - w^2 s \frac{a_2}{a_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \pi) \quad T_2 = t_2 - s \frac{a_1}{a_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \pi)$$

waarin de cosinussen ongeveer 1 zijn.

Door aftrekking worden t_1 respectievelijk t_2 geelimineerd, en men houdt twee vergelijkingen voor s over.

In een verhandeling over tweeslingermethoden ter bepaling van het meeslingeren¹⁾, behandelt FURTWÄNGLER deze methode voor het geval, dat $t_1 = t_2$ en $k_1 = k_2$. Hij maakt dan $a_1 = w a_2$, en bereikt daardoor dat bij beide waarnemingen $T_1 = T_2$ is. Dientengevolge verandert dan $\varphi_2 - \varphi_1$ niet, en de amplitudeverhouding blijft zooals uit XX C volgt ook constant. De bovenstaande formules zijn dan voor een onbeprekten waarnemingstijd geldig.

Dit is voor het algemeene geval, dat k_2 en t_2 niet precies gelijk aan k_1 en t_1 zijn, echter eveneens zonder moeite te bereiken. Men moet daarvoor de amplitudeverhouding en het faseverschil zóó kiezen, dat achtereenvolgens de twee bijzondere gevallen, die in Hoofdstuk V bij de integratie nader uitgewerkt zijn, verwezenlijkt worden. Wij zullen hier echter niet verder op ingaan, daar het m. i. onnoodig is, dat $\frac{a_2}{a_1}$ en $\varphi_2 - \varphi_1$ tijdens de waarneming geheel constant blijven. Door een gemiddelde waarde in de formule in te voeren, kan men deze toch voor een vrij langen waarnemingsduur gebruiken.

1) Ueber die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage von Dr. PH. FURTWÄNGLER Akademie der Wiss. Berlin 1902 XII.

Voor zoover mij bekend, is deze methode in de praktijk niet veel toegepast. Alleen in Italië schijnt dit volgens een recente publicatie uitgevoerd te zijn en wel met twee slingers van gelijk gewicht en gelijken vorm, zoodat $\omega = 1$ is. Men gebruikte daar gelijke amplituden.¹⁾

Verder zijn onlangs in Denemarken als contrôle op de gewone amplitudenmethode eenige bepalingen uitgevoerd, door de slingers in tegengestelde fase met gelijke amplitude te laten slingeren en de verkregen slingertijden te vergelijken met de slingertijden t_1 en t_2 van de slingers alleen.²⁾

Wanneer men de methode zou willen toepassen, schijnt het mij wenschelijk toe om, evenals dit voor de amplitudenmethode werd uitgevoerd, de middelbare fout in het resultaat s na te gaan, en dan te bepalen voor welke amplituden a_2 en a_1 men de meest nauwkeurige resultaten verkrijgt. Men moet hiervoor de middelbare fout kennen, die men bij de slingertijdsbepaling maakt. Daarbij is in aanmerking te nemen, dat bij de directe waarnemingsfouten in de coincidentiebepaling, welke afhankelijk zijn van de amplitude, nog andere fouten komen.

Wij veronderstellen immers, dat t_1 respectievelijk t_2 bij de twee waarnemingen die achtereenvolgens verricht worden gelijk zijn; wij moeten dus beide waarnemingen reduceeren op dezelfde temperatuur, luchtdruk en gang van den tijdmetr. Een fout in een dezer drie reducties veroorzaakt een fout in het resultaat s .

De hieruit voortvloeiende middelbare fouten, vooral die welke voortkomt uit de onzekerheid in den gang van den tijdmetr,

1) Il supporto bipendolare Mioni. — G. LORENZONI e Dott. G. SILVA.

2) Den Danske Gradmaaling Hefte n^o. 11, Konstant bestemmelse ved relative Pendulmaaling. — V. H. O. MADSEN.

Het schijnt mij toe, dat bij die berekeningen ten onrechte gebruikt zijn de formules $T_1 = t_1 + s$ en $T_2 = t_2 + s$. Hiermede wordt immers, ingeval $\varphi_2 - \varphi_1$ niet precies π is of $a_2 = a_1$ een fout gemaakt, die door het gebruik van de volledige formule zonder bezwaar is te ontgaan. Het was uit bovenstaande publicatie niet na te gaan, of de afwijkingen zoo groot waren, dat dit van beteekenis zou zijn. Een tweede nadeel van deze waarnemingen is, dat de nauwkeurigheid kleiner is dan bij de boven aangegeven methode. omdat hierbij voor $\omega = 1$ en $a_2 = a_1$ uit het verschil van twee slingertijden de grootheid $2s$ volgt en bij de Deensche waarnemingen s .

zijn in het algemeen belangrijker dan de coïncidentiewaarnemingsfout. In verband hiermee komt het mij voor, dat bovengenoemde methode te verbeteren is, door enkele dezer foutenoorzaken te elimineeren, zelfs al wordt daardoor de verhouding van m_s tot de middelbare fout in de slingertijdsbepaling iets grooter. Men kan dit bereiken door af te leiden de formule voor $T_2 - T_1$ bij beide waarnemingen:

$$T_2 - T_1 = (t_2 - t_1) + \omega s \left[\frac{a_1}{\omega a_2} - \frac{\omega a_2}{a_1} \right] \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

XXVIII

$$T_2 - T_1 = (t_2 - t_1) - \omega s \left[\frac{a_1}{\omega a_2} - \frac{\omega a_2}{a_1} \right] \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \pi)$$

Van elkaar afgetrokken krijgt men een formule van s waaruit $(t_2 - t_1)$ geelimineerd is.

Het verschil der tegelijkertijd waargenomen slingertijden is onafhankelijk van den gang van den tijdmetr, van den luchtdruk, en in zooverre van de temperatuur, als alleen een ongelijkheid der temperatuur van de twee slingers invloed heeft.

Om nu met deze vergelijkingen de grootst mogelijke nauwkeurigheid te bereiken, is een onderzoek naar de meest geschikte waarde voor a_2 en a_1 noodig. Uit een oppervlakkige beschouwing van de formules volgt, dat wanneer $\omega > 1$ is, a_2 zoo groot mogelijk moet zijn en a_1 vrij klein.

Bij de uitvoering van een dezer slingertijdsmethoden blijkt, dat voor denzelfden waarnemingsduur de resultaten voor s meer uiteenloopen, dan bij het gebruik van een der beide amplitudenmethoden. Wij zullen over deze methoden dan ook niet verder in details treden.

Hiermede zijn de practisch meest geschikte tweeslingermethoden behandeld. Er zijn nog twee andere methoden vermeld in het aangehaalde artikel van FURTWÄNGLER en in: „Absolute Schwerkraftsbestimmung zu Potsdam” van FURTWÄNGLER en KÜHNEN. Deze berusten niet op de differentiaalformules, doch zijn beter met de formules van Hoofdstuk V te behandelen. Zij zijn echter geen van beiden zeer geschikt voor de practische uitvoering, zooals wij aldaar uiteen zullen zetten; zij kunnen dus bij dit overzicht gevoegelijk achterwege blijven.

Een voordeel van de bovenbeschreven tweeslingermethoden is, dat hun resultaat veel minder van de onderstellingen over de statiefeigenschappen afhankelijk is, dan de andere methoden. Om dit aan te toonen gaan wij tot den grond der zaak terug. Het meeslingeren is de invloed, dien de slingertijd ondervindt van de ophangpuntsbeweging, die door de reactie van den slinger zelf wordt veroorzaakt:

$$s = - \frac{1}{2 n^2 a_1 l} \int_0^{.2 T} y_0'' \sin \varphi_1 dt$$

De invloed van een slinger op de amplitude van een tweeden slinger, waarvan de fasehoek 90° voor is, is:

$$a'_2 = - \frac{1}{2 \pi l} \int_0^{.2 T} y_0'' \cos \varphi_2 dt = + \frac{1}{2 \pi l} \int_0^{.2 T} y_0'' \sin \varphi_1 dt$$

Wanneer nu voldaan is aan de voorwaarde, dat de y componenten der ophangpuntsbewegingen van beide slingers gelijk zijn, is de amplitudeverandering van den tweeden slinger evenredig aan dezelfde integraal

$$\int_0^{.2 T} y_0'' \sin \varphi_1 dt$$

als waaraan het meeslingeren van den eersten evenredig is. De grootte en de aard der ophangpuntbeweging komt er niet op aan.

Door middel van een der beide amplitudenmethoden bepaalt men dus het meeslingeren van den slinger, die met groote amplitude slingert, bij die amplitude. Voor het bewijs dat dit gelijk is aan het meeslingeren bij de iets kleinere amplitude, die men bij de gewone slingertijds waarnemingen gebruikt, is een nadere onderstelling omtrent de statiefbewegingen noodig. Het is intusschen duidelijk, dat hiervoor de statiefelasticiteit slechts binnen nauwe grenzen constant behoeft te zijn.

Voor de slingertijds methoden ter bepaling van het meeslingeren, gaat dezelfde redeneering op, daar hierbij het faseverschil 0 of π

is en dus de slingertijdsstorings eveneens aan de integraal

$$\int_0^{.2 T} y_0'' \sin \varphi_1 dt$$

evenredig zijn.

Wij zullen nu nog den invloed der grondbewegingen op de tweeslingermethoden nagaan:

1^o. Gewijzigde amplitudemethode en gewone amplitudemethode.

Voor de formule XXVI kunnen wij schrijven:

$$\frac{\cos^2 z}{\omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{\pi \omega}{T^2} s \sin (\varphi_2 - \varphi_1),$$

waarin $\frac{d}{dt} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)$ de gemiddelde verandering per tijdseenheid van

$\frac{a_1}{a_2}$ over een waarnemingsduur t voorstelt.

In deze formule zullen door de grondbewegingen de grootheden x , $\frac{d}{dt} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)$ en $(\varphi_1 - \varphi_2)$, een afwijking krijgen. Het is duidelijk, dat hierbij de verandering van $\frac{d}{dt} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)$ de hoofdzaak is. Voor de berekening van de middelbare afwijking in het meeslingeren m_s , zullen wij dan ook de afwijkingen van $\cos \alpha$ en $\sin (\varphi_1 - \varphi_2)$ verwaarloozen.

Formule XXIII C geeft de middelbare afwijking van $\frac{d}{dt} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)$ bij een waarnemingsduur t . Daaruit vinden wij, met invoering van $\sin (\varphi_2 - \varphi_1) = 1$. en $\cos^2 z = \frac{\omega^2 a_2^2}{a_1^2 + \omega^2 a_2^2}$

$$\left[m_s \right]_t = \frac{T^2 \cos^2 z}{\pi \omega^2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \right]_t = \frac{G T}{g V \sqrt{t}} \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{(a_1^2 + \omega^2 a_2^2)}$$

Bij een juiste uitvoering van de methode is een der amplituden bijvoorbeeld a_1 klein en de tweede groot; m_s wordt dan

ongeveer gelijk aan:

$$\left[m_s \right]_t = \frac{G T}{g V \sqrt{2t} \omega^2 a_2}$$

De gewone amplitudenmethode is een bijzonder geval van de gewijzigde methode; men heeft slechts te stellen $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ en $a_1 = 0$ om de formules voor de gewone methode te krijgen.

De formule voor m_s is dus dezelfde.

Het blijkt, dat, om deze storing zoo klein mogelijk te maken, de amplitude van den tweeden slinger zoo groot mogelijk moet zijn. Ook het gebruik van een zwaren tweeden slinger, waardoor ω groot wordt, is voordeelig.

2°. Slingertijdsmethoden.

Beschouwen wij eerst de formules XXVII en gaan wij na de middelbare storing m_s in het resultaat s , dat door slinger N^o. 1 geleverd wordt. De middelbare storing in het verschil van T_1 bij de eerste en bij de tweede waarneming is volgens formule XXII

$$\frac{G T}{a_1 g V t}$$

wanneer de duur van beide waarnemingen t was.

Wij krijgen dus voor $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ respectievelijk π :

$$\left[m_s \right]_{2t} = \frac{G T}{2g V t \omega^2 a_2}$$

Neemt men in aanmerking, dat de beide waarnemingen samen een tijd $2t$ in beslag namen, dan is de formule voor m_s dezelfde als bij de amplitudewaarnemingen.

De formule voor m_s zooals deze geldt voor het resultaat, dat uit de beide waarden van T_2 volgt, vindt men door verwisseling der indices 1 en 2 en de vervanging van ω door 1.

Uit de twee waarden m_s volgt echter niet op de gebruikelijke wijze m_s voor het gemiddelde der twee gevonden waarden s want de storingen in de slingertijden T_1 en T_2 zijn niet onafhankelijk.

Berekent men het eindresultaat s door $T_1 + T_2$ bij de tweede waarneming, af te trekken van $T_1 + T_2$ bij de eerste waarneming, en dit verschil te deelen door:

$$2\omega \left(\frac{a_1}{\omega a_2} + \frac{\omega a_2}{a_1} \right)$$

(zie formule XXVII; wij onderstellen voor de eenvoudigheid $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ respectievelijk π), dan kan men m_s berekenen uit XXIII A.

Men vindt:

$$\left[m_s \right]_{2t} = \frac{G T}{2g \sqrt{t}} \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{(\omega^2 a_2^2 + a_1^2)}$$

In aanmerking nemend den waarnemingsduur $2t$, is dit dezelfde formule als de volledige formule voor de gewijzigde amplitudenmethode. Tenslotte vindt men voor de gewijzigde slingertijds-methode, waarbij de formules XXVIII behooren, met behulp van formule XXIII B:

$$\left[m_s \right]_{2t} = \frac{G T}{2g \sqrt{t}} \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{(\omega^2 a_2^2 - a_1^2)}$$

Deze is dus iets grooter dan bij de eerste slingertijds-methode.

Het zal van de gebruikte amplituden afhangen, hoeveel het verschilt en eveneens hoe groot het verschil is met de storing bij de amplitudemethoden.

Van overwegend belang zijn die verschillen echter niet en wij komen dus tot de conclusie, dat de storing door de grondbewegingen bij alle tweeslingermethoden ongeveer even groot is.

Door vergelijking van de gevonden m_s met de storing, die door de grondbewegingen in de gewone slingertijdsbepaling ontstaat (formule XXII):

$$\left[m_s \right]_t = \frac{G T}{g \sqrt{2t} \omega^2 a_2} \quad \left[\delta T \right]_t = \frac{G T}{g \sqrt{2t} a}$$

blijkt dat deze van dezelfde orde zijn. Daar men bij de meeslingeringsbepalingen meestal iets grooter amplituden gebruikt, dan bij de slingertijds-meting is m_s , bij gelijken waarnemingsduur voor beiden, iets kleiner dan δT .

4. Stootmethode.

Door op het statief ter hoogte van het ophangpunt een horizontale kracht L te laten aangrijpen, die periodiek varieert tusschen nul en een zeker maximum, komt een stilhangende slinger, waarvan de slingertijd gelijk is aan de halve periode, in beweging.

Wij kunnen de uitwerking dezer stooten op den slinger uitdrukken door de formule XVIII C. Voert men daarin in $a_0 = 0$, dan heeft men:

$$a \sin (\varphi - nt) = -\frac{\lambda n}{l} \int_0^t L \sin (nt + z) dt$$

$$a \cos (\varphi - nt) = \frac{\lambda n}{l} \int_0^t L \cos (nt + z) dt$$

Uit de onderstelling, dat de kracht L periodiek is met een periode 2τ , volgt dat de integralen:

$$\int_{t_0}^{t_0 + 2\tau} L \sin (nt + z) dt \quad \text{en} \quad \int_{t_0}^{t_0 + 2\tau} L \cos (nt + z) dt$$

constant zijn, onafhankelijk van den tijd t_0 , den aanvangstijd der integratie.

Noemt men deze integralen c_1 en c_2 , dan kan men bovenstaande formules schrijven:

$$a \sin (\varphi - nt) = -\frac{n \lambda}{l} N c_1$$

$$a \cos (\varphi - nt) = \frac{n \lambda}{l} N c_2$$

waarin ondersteld is, dat $\frac{t}{2\tau} = N$ een heel getal is. Hieruit volgt, dat na N stooten de amplitude is:

$$a = \frac{n \lambda}{l} N \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

Verder volgt:

$$\varphi = nt - bg \operatorname{tg} \frac{c_1}{c_2}$$

$$\varphi' = n$$

De slingertijd is dus $\frac{\pi}{n} = \tau$; deze ondervindt blijkbaar geen storing.

De amplitude neemt toe evenredig aan het aantal stooten.

Wanneer nu:

1^o. de integralen c_1 en c_2 bekend zijn:

2^o. het aangrijpingspunt van L zoo gekozen is, dat $\lambda_{11} = \lambda$, of in allen geval $\frac{\lambda_{11}}{\lambda}$ bekend is,

dan kan men uit de amplitude na een zeker aantal stooten λ_{11} berekenen.

Uit formule XXI volgt dan het meeslingeren.

$$s = \frac{\lambda_{11}}{\lambda} \times \frac{\pi h_1 m_1}{2N \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \times a$$

Bij de wijze van uitvoering die men aan de methode geeft, zijn de integralen c_1 en c_2 niet te berekenen. Men brengt namelijk de stooten aan, door met een veerbalans tegen het statief te drukken, of met een dynamometer er aan te trekken, waarbij men de naald periodiek tusschen nul en een bepaald maximum doet heen en weer gaan. Men leest alleen dat maximum af, en heeft hiermee niet voldoende gegevens om de integralen te berekenen.

Als ruwe benadering kan men voor de krachtsfunctie aannemen een sinusfunctie. Men krijgt dan:

$$L = \frac{K}{2} \left[1 + \sin(n t + c) \right]$$

waarin K het afgelezen maximum is:

Dan is

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{K}{2} \tau$$

en

$$s = \frac{\lambda_{11}}{\lambda} \times \frac{\pi h_1 m_1}{N K \tau} \times a$$

Beter dan deze ruwe benadering is het, om de integralen te bepalen door op een punt waar men het meeslingeren langs anderen weg gemeten heeft, ook de stootmethode toe te passen.

Men kan dan de grootheid:

$$c_s = \frac{\lambda_{11}}{\lambda} \times \sqrt[2]{V \frac{\pi}{c_1^2 + c_2^2}}$$

bepalen uit:

$$\text{XXIX} \quad s = c_s h_1 m_1 \frac{a}{N}$$

Als men nu op alle stations met dezelfde maximum kracht stoot, en daarbij door oefening de stooten een dergelijke regelmaat hebben verkregen, dat het verloop van de krachtsfunctie en daarmee ook de integraal constant is, dan is c_s voor alle stations gelijk. Men heeft dan in XXIX een eenvoudige formule ter berekening van het meeslingeren.

Men kan de regelmaat der stooten eenigszins controleeren, door na te gaan of de amplitudetoeneming tijdens het stooten constant is. Daar deze immers voor elke stootperiode evenredig aan de krachtsintegraal is, moet dan ook deze constant zijn.

Dikwijls zal de stootperiode niet geheel overeenkomen met de slingerperiode. Men heeft n.l. om een vaste periode in de stooten te kunnen handhaven een rythmisch geluid noodig, dat men als sein voor elken stoot gebruiken kan. Het ligt voor de hand hiervoor te nemen de tikken van het uurwerk, dat voor de slingertijds waarnemingen dient. Ter wille van de coincidentiemethode, die daarvoor gebruikt wordt, is de periode van het uurwerk niet geheel dezelfde, als die van den slinger. Bij het Nederlandsche Defforgestoestel is dit verschil bijvoorbeeld ongeveer $\frac{1}{40}$, bij het Nederlandsche Stückerathstoestel $\frac{1}{30}$.

Noem de periode waarmee de stooten gegeven worden: $2\tau_s$

Noem $\frac{\pi}{\tau_s} = n_s$ en $n_s - n = 2f$.

Bekend is dan dat de integralen:

$$\int_{t_0 - \tau_s}^{t_0 + \tau_s} L \sin(n_s t + z) dt \quad \text{en} \quad \int_{t_0 - \tau_s}^{t_0 + \tau_s} L \cos(n_s t + z) dt$$

constant zijn, onafhankelijk van den tijd t_0 .

Noemt men ze c_1 en c_2 dan is, wanneer f klein is, bij benadering:

$$\int_{t_0 - \tau_s}^{t_0 + \tau_s} L \sin(nt + x) dt = c_1 \cos 2ft_0 - c_2 \sin 2ft_0$$

$$\int_{t_0 - \tau_s}^{t_0 + \tau_s} L \cos(nt + x) dt = c_1 \sin 2ft_0 + c_2 \cos 2ft_0$$

$$\text{en: } a \sin(\varphi - nt) = -\frac{\lambda n c_1}{2l\tau_s} \int_0^t \cos 2ft dt + \frac{\lambda n c_2}{2l\tau_s} \int_0^t \sin 2ft dt$$

$$= -\frac{\lambda n c_1}{4fl\tau_s} \sin 2ft + \frac{\lambda n c_2}{4fl\tau_s} (1 - \cos 2ft)$$

$$a \cos(\varphi - nt) = \frac{\lambda n c_1}{2l\tau_s} \int_0^t \sin 2ft dt + \frac{\lambda n c_2}{2l\tau_s} \int_0^t \cos 2ft dt$$

$$= \frac{\lambda n c_1}{4fl\tau_s} (1 - \cos 2ft) + \frac{\lambda n c_2}{4fl\tau_s} \sin 2ft$$

Lost men hieruit a en φ op dan krijgt men:

$$a = \frac{\lambda n \sin ft}{2fl\tau_s} \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{n\lambda}{l} \frac{\sin ft}{ft} N \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

waarin N weer het aantal stooten is, en

$$\varphi = (n + f)t - bg \operatorname{tg} \frac{c_1}{c_2}$$

$$\varphi' = (n + f)$$

De slingertijd is dus constant en bij benadering gelijk aan:

$$\frac{\tau + \tau_s}{2}$$

Uit de amplitudenformule blijkt, dat men het periodeverschil in rekening kan brengen door de gevonden amplitude te vermenigvuldigen met $\frac{ft}{\sin ft}$, waarna verder de gewone formules van pag. 124 e. v. toegepast kunnen worden.

Daar men meestal met vrij groote kracht stoot, (maximum bijv. 5 K.G.) ontstaan reeds vrij groote amplituden bij een betrekkelijk gering aantal stooten (bijvoorbeeld 10 à 30). De waarnemingsfout in de amplitudemeting heeft dan weinig invloed op het resultaat voor s , zoodat de daardoor ontstaande middelbare fout in s zeer gering is.

Men moet echter deze m. f. vermeerderen met een bedrag tengevolge van de onvolkomenheden in de uitvoering der methode. Men krijgt n.l. bij elken stoot een afwijking van de krachtsintegraal $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ van de middelwaarde, die men daarvoor met behulp eener andere methode gevonden heeft. Deze middelbare fout zal een sterk persoonlijk karakter dragen, en zal bij denzelfden persoon ook niet steeds gelijk zijn. Een gedeelte wordt veroorzaakt door de onmogelijkheid om met mathematische exactheid steeds tot hetzelfde maximum te gaan. Dit gedeelte zou wellicht door aflezing van den gebruikten dynamometer bepaald kunnen worden. Verder kan echter nog een fout ontstaan door de afwijking van het gemiddelde krachtsverloop tusschen maximum en minimum.

De gezamenlijke m. f. in s is alleen te vinden door s vele malen achtereen waar te nemen. Doordat de bepaling slechts enkele minuten duurt is dit gemakkelijk op elk station uit te voeren. Men kan zich dan een oordeel vormen over de bereikte nauwkeurigheid.

De methode werd in Nederland reeds veelvuldig bij het Defforgestoestel toegepast; hoewel de amplitude aflezing daarbij vrij gebrekkig was, waren de verkregen resultaten zeer bevredigend. De m. f. kwam zelden boven 2 %.

Een voordeel der methode is, dat zij in zeer korten tijd uitgevoerd kan worden, en dus gemakkelijk op elk station vele malen herhaald kan worden. Zij heeft echter twee nadeelen:

1°. Men kan niet controleeren of het krachtsverloop bij den stoot hetzelfde is als het bij de bepaling van de krachtsintegraal was. Zelfs al blijkt het uit de verschillende waarnemingen op eenzelfde station constant te zijn, dan is men er toch niet zeker van of niet, onder invloed van persoonlijke omstandigheden, een constante verandering is ingetreden.

Om deze onzekerheid zooveel mogelijk te verminderen, moet

men als eisch stellen, dat de bepaling van de krachtsintegraal d. w. z. van c_s van tijd tot tijd herhaald worde.

In het algemeen schuilt er een sterk persoonlijk element in de uitvoeringswijze dezer methode, zoodat de waarnemingen van verschillende personen niet hetzelfde vertrouwen verdienen.

2°. Men heeft hetzelfde bezwaar, dat reeds bij de statische methode onder 1° genoemd is: Doordat men groote krachten op het statief laat aangrijpen is men ervan afhankelijk of de elasticiteit van de opstelling bij ver uiteenlopende krachten even groot is.

De storing door grondbewegingen is klein. De slinger heeft na enkele minuten reeds een vrij groote amplitude; de storing die daarin door de grondbewegingen in dien korten tijd veroorzaakt wordt is in verhouding tot de amplitude gering. De resulterende invloed op s is dan ook te verwaarloozen.

Dit is ook in te zien, door op te merken dat men zich de stootmethode kan denken als een bijzonder geval van de gewone amplitude-tweeslingermethode, waarbij de tweede slinger een zoo enorme massa en amplitude heeft dat de horizontale reactie daarvan als periodieke stootkracht is te beschouwen. In de formule:

$$\left[m_s \right]_t = \frac{G T}{g \sqrt{2t} \omega^2 a_2} \quad \omega^2 a_2 = \frac{h_2 m_2}{h_1 m_1} a_2$$

is dan voor $\omega^2 a_2$ een zeer groot bedrag te substitueeren, zoodat m_s te verwaarloozen is.

Bij het Defforgestoestel heeft men geen gelegenheid tot het inhangen van een tweeden slinger, zoodat voor het bepalen van het meeslingeren een tweeslingermethode uitgesloten is. Daarom werd bij de waarnemingen in Nederland bij dit toestel gebruik gemaakt van de stootmethode. De constante c_s werd te Potsdam bepaald, waar gelegenheid was om het meeslingeren langs statischen weg te bepalen. Daarbij is de spiegelmethode van NAGAOKA gebruikt; er werd bijzondere zorg besteed aan de stabiliteit van het bevestigingspunt van het metaal draadje om het onder 2° genoemde bezwaar tegen de statische methode zooveel mogelijk te ontgaan. Hierbij bleek de krachtsintegraal $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ 1.13 maal zoo groot te zijn als de waarde die zij bij een sinus-oidaal krachtsverloop zou hebben.

HOOFDSTUK V.

Integratie der formules voor twee en meer slingers.

De formules XX geven geen inzicht in het verloop van het verschijnsel van tegelijkertijd op een statief slingerende slingers over langeren tijd. Bij grooter verschil der slingertijden en dempingsconstanten dan bij de Stückerathslingers voorkomt, kan de verandering van faseverschil en amplitudeverhouding zoo snel zijn, dat van een toepassing der formules XX zelfs in het geheel geen sprake meer is. Het is dus wenschelijk de formules te integreeren.

Wij zullen daarbij voorloopig het algemeene geval beschouwen van n tegelijkertijd slingerende slingers (de slingervlakken behoeven niet samen te vallen.)

Wanneer wij de fasesnelheden van de slingers zooals deze zijn zouden, als zij alleen op het statief slingerden, noemen:

$$N_1 N_2 N_3 \dots N_n$$

en de dempingsconstanten

$$k_1 k_2 k_3 \dots k_n$$

dan is volgens XX voor elken slinger een stel vergelijkingen op te stellen van den vorm:

$$a_1 \mu_1 = a_1 \varphi_1' = a_1 N_1 - \frac{N_1}{2l_1} \sum_2^n \lambda_{k_1} h_k m_k N^2_k a_k \cos(\varphi_k - \varphi_1 - z_{k_1})$$

$$a_1' = -k_1 a_1 + \frac{N_1}{2l_1} \sum_2^n \lambda_{k_1} h_k m_k N^2_k a_k \sin(\varphi_k - \varphi_1 - z_{k_1})$$

Men heeft dan $2n$ differentiaalvergelijkingen van de 1^o orde met als onbekenden de grootheden $a_1 a_2 \dots a_n$ en $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$. Wij kunnen het vraagstuk vereenvoudigen door a en φ van elken slinger, door middel van complexe grootheden, samen te voegen tot een onbekende ¹⁾.

Stel

$$a e^{i\varphi} = q$$

Wanneer wij de gebruikelijke voorstelling van complexe grootheden door vectoren aanhouden ²⁾, is de beteekenis van q_1 als volgt aan te geven: q is een vector, waarvan de radius gelijk is aan de slingeramplitude a en het argument aan de fasehoek φ van den slinger. Wij zullen dien vector voortaan *slingervector* noemen.

Verder volgt:

$$q' = (a' + ia\varphi') e^{i\varphi}$$

Noemt men verder nog:

$$\frac{N_1}{2l_1} \lambda_{k_1} h_k m_k N_k^2 e^{-i z_{k_1}} = d_{k_1}$$

dan gaan de differentiaalvergelijkingen over in:

$$q_1' = i(N_1 + ik_1) q_1 - i \sum_2^n d_{k_1} q_k$$

¹⁾ Deze oplossingsmethode werd o.a. reeds toegepast in:

Ueber die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage van Dr. Ph. FURTWÄGLER.

Hierin worden op elegante wijze de differentiaalvergelijkingen voor twee slingers met behulp van complexe grootheden afgeleid. De grootte der benoodigde verwaarloozingen is daarbij echter niet gemakkelijk na te speuren.

De integratie wordt in die verhandeling niet uitgevoerd.

²⁾ Het is eigenlijk juister complexe grootheden door versoren voor te stellen. Door vermenigvuldiging met een eenheidsvector kan men elken versor dan weer door een vector geometrisch voorstellen. Door deze opvatting komen de bewerkingen met complexe grootheden overeen met de bewerkingen in de vectoranalyse. Wij zullen dit hier niet verder uitwerken en de gebruikelijke benamingen aanhouden.

Elke slinger levert zoo'n vergelijking op.

Wij zullen voor de verdere oplossing onderstellen dat N en k voor elken slinger constant zijn. Dit is niet volkomen juist daar de fasesnelheid van den alleen slingerenden slinger eenigszins afhankelijk is van de amplitude (Hoofdstuk III 1° en 4°). Hoe kleiner de gebruikte amplitude, des te kleiner is de afwijking. Ook de dempingsconstante is meestal min of meer van de amplitude afhankelijk.

De oplossing van de vergelijkingen is nog wel uitvoerbaar, wanneer N en k langzaam veranderlijk zijn. Wij zullen dit geval echter niet behandelen, daar de berekening zeer omslachtig is, en het resultaat geen belangrijke gezichtspunten opent.

Wanneer N en k constant zijn is het vraagstuk teruggevoerd tot de oplossing van n differentiaalvergelijkingen van de 1° orde en den 1° graad. Stelt men:

$$N + ik = r$$

dan heeft men:

$$\begin{aligned} q_1' &= + i r_1 q_1 - i d_{21} q_2 - i d_{31} q_3 \dots \dots \dots - i d_{n1} q_n \\ \text{XXX } q_2' &= - i d_{12} q_1 + i r_2 q_2 - i d_{32} q_3 \dots \dots \dots - i d_{n2} q_n \\ &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ q_n &= - i d_{1n} q_1 - i d_{2n} q_2 - i d_{3n} q_3 \dots \dots \dots + i r_n q_n \end{aligned}$$

De grootheden r hebben de volgende beteekenis: slingert een slinger alleen op het statief dan is de slingervector q gegeven door:

$$q = q_0 e^{irt}$$

waarin q_0 de waarde van q voor $t = 0$ is.

De algemeene oplossing van de vergelijkingen XXX is te schrijven in den vorm:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 e^{ix_a t} + B_1 e^{ix_b t} + \dots \dots \dots N_1 e^{xi_n t} \\ \text{XXXIA } q_2 &= A_2 e^{ix_a t} + B_2 e^{ix_b t} + \dots \dots \dots N_2 e^{ix_n t} \\ &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ q_n &= A_n e^{ix_a t} + B_n e^{ix_b t} + \dots \dots \dots N_n e^{ix_n t} \end{aligned}$$

De machten zijn geschreven in den vorm ixt omdat daardoor de verdere behandeling overzichtelijker wordt.

De constanten $x_a, x_b, \dots, x_n; A_1, \dots, A_n; B_1, \dots, B_n; \dots; N_1, \dots, N_n, \dots$ moeten nu zoo gekozen worden dat aan de vergelijkingen XXX voldaan wordt. Dit geeft de volgende constantenvergelijkingen:

voor de grootheden $x_a; A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$\begin{aligned} & x_a - r_1) A_1 + d_{21} A_2 + d_{31} A_3 + \dots + d_{n1} A_n = 0 \\ \text{XXXI B} \quad & d_{12} A_1 + (x_a - r_2) A_2 + d_{32} A_3 + \dots + d_{n2} A_n = 0 \\ & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ & d_{1n} A_1 + d_{2n} A_2 + d_{3n} A_3 + \dots + (x_a - r_n) A_n = 0 \end{aligned}$$

Men vindt de vergelijkingen voor $x_b, B_1, B_2, \dots, B_n$ door verwisseling van x_a met x_b, A_1 met B_1, A_2 met B_2, \dots, A_n met B_n enz. voor C, D, \dots, N .

Men heeft dus n stellen constantenvergelijkingen van den vorm XXXI B. Van elk moet de coëfficiëntendeterminant nul zijn. Hieruit volgt, dat x_a, x_b, \dots, x_n de n wortels zijn van:

$$\text{XXXI C} \quad \begin{vmatrix} (x-r_1) & d_{21} & d_{31} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & (x-r_2) & d_{32} & \dots & d_{n2} \\ d_{13} & d_{23} & (x-r_3) & \dots & d_{n3} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ d_{1n} & d_{2n} & d_{3n} & \dots & (x-r_n) \end{vmatrix} = 0$$

Door substitutie van x in de vergelijkingen XXXI B zijn nu te bepalen de verhoudingen der coëfficiënten A onderling, der coëfficiënten B onderling, enz.

Voor de bepaling van de absolute waarde dezer constanten zijn dus nog n vergelijkingen noodig, die gegeven worden door de beginwaarden $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ van de n slingervectoren:

$$\begin{aligned} q_{10} &= A_1 + B_1 + \dots + N_1 \\ q_{20} &= A_2 + B_2 + \dots + N_2 \\ \text{---} & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ q_{n0} &= A_n + B_n + \dots + N_n \end{aligned}$$

XXXI D

De vergelijkingen XXXI A, B, C en D bepalen de algemeene

oplossing van het vraagstuk. Er kunnen bijzondere gevallen optreden, bijvoorbeeld door het gelijk zijn van twee of meer der wortels x . De vorm der vergelijkingen XXXI A wordt dan iets anders, doordien in elk twee of meer der termen kunnen samengevoegd worden tot een, waarbij dan echter de betreffende constanten te vermeerderen zijn met termen evenredig aan opklimmende machten van t , zóó, dat het aantal constanten in elke vergelijking n blijft. Wij zullen hierop niet verder ingaan.

Ook door een specialen begintoestand kunnen bijzonderheden optreden. Stel bijvoorbeeld dat $q_{10} q_{20} \dots q_{n0}$ zich verhouden als de uit XXXI B berekende verhoudingen van een der constantengroepen, bijvoorbeeld A . In dat geval volgt uit XXXI D:

$$\begin{aligned} A_1 &= q_{10} \\ A_2 &= q_{20} \\ &\dots \\ A_n &= q_{n0} \end{aligned}$$

terwijl alle andere constanten $B \dots N$ nul zijn. Wij hebben dan:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{10} e^{i x_a t} \\ q_2 &= q_{20} e^{i x_a t} \\ &\dots \\ q_n &= q_{n0} e^{i x_a t} \end{aligned}$$

Dit beteekent dat alle slingers gelijken en constanten slinger-tijd hebben, overeenkomend met een fasesnelheid gelijk aan het reële gedeelte van x_a en gelijke en constante amplitudedemping overeenkomend met het imaginaire gedeelte van x_a .

De faseverschillen en de amplitudeverhoudingen der slingers onderling zijn constant en zijn gelijk aan de argumenten en de radii van de verhoudingen der constanten A , zooals die uit de vergelijkingen XXXI B volgen.

Dergelijke bijzondere toestanden zijn er evenveel mogelijk als er constantengroepen zijn, d. w. z. n . De n daarbij behorende slingertijden en dempingsconstanten worden gegeven door de n wortels x . De amplitudeverhoudingen en faseverschillen zijn voor elk geval uit de vergelijkingen XXXI B te berekenen; in het algemeen zullen ze voor elk geval anders zijn.

De algemeene vergelijkingen zijn alleen voor $n < 5$ verder op te lossen. Als het aantal slingers grooter is, is de algemeene oplossing onmogelijk. Wellicht zal het uitvoerbaar zijn, voor een speciaal geval, waarbij de coëfficiënten in getallen zijn uitgedrukt, de wortels der vergelijkingen te vinden.

In het algemeen stuit men dan echter nog op de moeilijkheid, dat de coëfficiënten zoowel als de wortels complexe grootheden zijn.

Wij zullen het verschijnsel alleen verder nagaan voor $n = 2$.

Twee tegelijkertijd slingerende slingers.

Volgens XXXI is hiervan de oplossing:

$$q_1 = A_1 e^{ix_a t} + B_1 e^{ix_b t}$$

$$\text{XXXII A} \quad q_2 = A_2 e^{ix_a t} + B_2 e^{ix_b t}$$

x_a en x_b zijn de wortels van:

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 - d_{12} d_{21} = 0.$$

Noemt men: $r_2 + r_1 = 2r$

$$r_2 - r_1 = 2\Delta_r$$

$$\Delta_r^2 + d_{12} d_{21} = \Delta^2$$

dan is

$$x_a = r - \Delta$$

$$\text{XXXII B} \quad x_b = r + \Delta$$

Wanneer $\Delta = 0$ is, zijn de wortels x_a en x_b gelijk en krijgt men een oplossing van bijzonderen vorm. Wij zullen deze later nagaan.

Verder volgt uit XXXI B:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1 - x_a}{d_{21}} = \frac{(\Delta - \Delta_r)}{d_{21}}$$

XXXII C

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{r_1 - x_b}{d_{21}} = -\frac{(\Delta + \Delta_r)}{d_{21}}$$

XXXI D geeft nu :

$$A_1 + B_1 = q_{10}$$

$$\text{XXXII D} \quad (\Delta - \Delta_r) A_1 - (\Delta + \Delta_r) B_1 = d_{21} q_{20}$$

Hieruit zijn A_1 en B_1 op te lossen. Het vraagstuk is hiermee opgelost, doch de oplossing is nog zeer onoverzichtelijk.

Men zou nu de vergelijkingen in reële grootheden kunnen omzetten, doch als men dit uitvoert, krijgt men zulke enorme formules, dat hiermee het inzicht in het verschijnsel niet bevorderd wordt. Wij zullen daarom ter bestudeering van het verschijnsel gebruik maken van de vectorische voorstelling van complexe grootheden.

Wij hebben reeds opgemerkt, dat de radius van den slinger-vector q gelijk is aan de amplitude en het argument gelijk is aan den fasehoek van den slinger; hij draait dus rond en maakt een halve omwenteling in den slingertijd. Om nu het verloop van de amplitude en de fasesnelheid van beide slingers aanschouwelijk voor te stellen, zullen wij de twee slinger-vectoren vergelijken met den slinger-vector q_v van een gefingeerden slinger, waarvan slingertijd en dempingsconstante constant zijn en weinig verschillen met die van de slingers 1 en 2.

Voor deze vergelijking leent zich het beste de beschouwing van de verhoudingen $V_1 = \frac{q_1}{q_v}$ en $V_2 = \frac{q_2}{q_v}$.

Hiervan zijn de radii gelijk aan de verhoudingen van de amplituden a_1 en a_2 tot de regelmatig afnemende amplitude van den vergelijkingsslinger. De argumenten zijn gelijk aan de faseverschillen van de slingers 1 en 2 met den vergelijkingsslinger. Daar de slingertijden en amplitudeveranderingen der drie slingers weinig uiteenloopen zijn V_1 en V_2 langzaam veranderlijke vectoren.

Wij kunnen de amplitude en den slingertijd van den vergelijkingsslinger nog binnen zekere grenzen willekeurig kiezen, en nemen daarvoor aan:

$$q_v = A_1 e^{ixat}$$

Wij krijgen dan:

$$V_1 = 1 + \frac{B_1}{A_1} e^{2i\Delta t} \qquad V_2 = \frac{A_2}{A_1} + \frac{B_2}{A_1} e^{2i\Delta t}$$

Stel hierin :

$$R_a = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\Delta - \Delta_r}{d_{21}} \quad R_b = \frac{B_2}{B_1} = -\frac{(\Delta + \Delta_r)}{d_{21}}$$

$$C = -\frac{B_2}{A_1} = R_b \frac{R_a - \frac{q_{20}}{q_{10}}}{R_b - \frac{q_{20}}{q_{10}}}$$

Ingevoerd geeft dit :

$$R_b V_1 = R_b - C e^{2i \Delta t} \quad V_2 = R_a - C e^{2i \Delta t}$$

Uit de definities van R_a en R_b volgt nog :

$$R_a R_b = -\frac{d_{12}}{d_{21}}$$

De formules zijn nu geschikt voor de geometrische voorstelling.

In fig. 3a (bijlage I) is de grootheid $\frac{\Delta}{d_{21}}$ geconstrueerd. Daartoe is een eenheidsvector aangenomen, en is de grootheid $\frac{\Delta_r}{d_{21}}$ uitgezet, die volgens de definities gelijk is aan :

$$\frac{\Delta_r}{d_{21}} = \frac{l e^{i z_{21}}}{\lambda_{21} h_2 m_2 N^3} \left[(N_2 - N_1) + i(k_2 - k_1) \right]$$

De dimensie hiervan is die van een getal.

Vervolgens is geconstrueerd de grootheid $\left(\frac{\Delta_r}{d_{21}}\right)^2$ en is deze vermeerderd met een vector $\frac{d_{12}}{d_{21}}$, welke volgens de definitie gelijk is aan :

$$\frac{d_{12}}{d_{21}} = \frac{h_1 m_1}{h_2 m_2} e^{i(x_{21} - x_{12})} = \frac{1}{x^2} e^{i(x_{21} - x_{12})}$$

De wortel uit de som is de grootheid $\frac{\Delta}{d_{21}}$.

In fig. 3b zijn eerst de vectoren R_a en R_b geconstrueerd. Vervolgens is met behulp van den vector $p_0 = \frac{q_{20}}{q_{10}}$ de vector C gecon-

strueerd. (De vector p_0 heeft als argument het faseverschil der twee slingers 1 en 2 voor $t = 0$ en als radius de verhouding der amplituden voor $t = 0$).

De vectoren V_{20} en $R_b V_{10}$ voor $t = 0$ zijn dan bekend $= C_0 A$ en $C_0 B$.

Laat men nu het punt C bewegen, zóó, dat vector OC te allen tijde voorstelt:

$$C e^{2i \Delta t}$$

dan is steeds

$$V_2 = CA \text{ en } V_1 = \frac{CB}{R_b}$$

Denkt men zich bij de beschouwing van CB, R_b als eenheidsvector, dan is op die veranderde schaal:

$$V_1 = CB$$

Het punt C zal een logarithmische spiraal om O beschrijven, waarvan de gedaante van de grootheid Δ afhankelijk is. Om Δ in reële grootheden uit te drukken stellen wij

$$\Delta = \delta e^{i\varepsilon} = \delta \cos \varepsilon + i \delta \sin \varepsilon$$

Men kan δ en ε construeeren door de in fig. 3a gevonden grootheid $\frac{\Delta}{d_{21}}$ met d_{21} te vermenigvuldigen. Het is daarvoor noodig een snelheidsschaal aan te nemen (d_{21} heeft de dimensies van een snelheid); ε is daarvan natuurlijk onafhankelijk, maar de lengte δ niet.

De lengte van den voerstraal OC is met behulp hiervan in reële grootheden uit te drukken:

$$\overline{OC} = \overline{OC_0} e^{-2 \delta \sin \varepsilon t}$$

en de hoeksnelheid is constant $= 2 \delta \cos \varepsilon$.

Men kan zich nu een beeld vormen van het verschijnsel.

Bij de bestudeering zullen wij eerst het algemeene geval beschouwen, waarbij alle, het toestel en de slingers betreffende, constanten een willekeurige waarde hebben. Daarbij zullen wij

nagaan de bijzondere gevallen die men door een speciaal begin-toestand krijgen kan.

Vervolgens zullen wij voor enkele toestel- en slingerconstanten bijzondere waarden aannemen en onderzoeken in hoeverre daardoor het verschijnsel van karakter verandert.

Algemeen geval.

Bij beschouwing van fig. 3b blijkt het volgende: C beschrijft met constante hoeksnelheid omwentelingen om O . Het verschijnsel heeft dus een periode die gelijk is aan:

$$\frac{\pi}{\delta \cos \varepsilon}$$

Deze is voor hetzelfde slingerpaar op hetzelfde toestel constant, en is dus onafhankelijk van den begintoestand.

Bij een der twee slingerparen van het Nederlandsche Stück-rathoestel is deze bijvoorbeeld ongeveer 8 uren.

Uit fig. 3a blijkt, dat wanneer de hoeken α die uit de inwendige wrijving van het statief voortvloeien, klein zijn, wat bij de slingertoestellen in het algemeen zeker mag aangenomen worden, de grootte $\delta \sin \varepsilon$ kleiner is, naarmate $k_2 - k_1$ kleiner is, d.w.z.:

De snelheid, waarmee C het punt O nadert of bij negatieve $(k_2 - k_1)$ zich er van verwijderd is kleiner naarmate de absolute waarde van $(k_2 - k_1)$ kleiner is.

Verder wordt de omwentelingssnelheid $\delta \cos \varepsilon$ en daarmee de periode van het verschijnsel in de eerste plaats beïnvloed door het slingertijdsverschil der twee slingers en de elasticiteit van het statief.

Het verloop van het geheele verschijnsel hangt sterk van de beginwaarde van C af, d.w.z. van faseverschil en amplitudeverhouding van beide slingers bij den aanvang.

Men kan hierbij twee bijzondere gevallen opmerken: dit zijn de speciale gevallen, die wij bij de behandeling van het vraagstuk voor n slingers reeds ten getale van n ontmoetten.

1°. C ligt bij den aanvang in O . Dit is zoo wanneer:

$$\frac{q_{20}}{q_{10}} = R_a = \frac{\Delta - \Delta_r}{d_{21}}$$

C blijft dan in O ; de vectoren V_2 en V_1 zijn constant en men heeft, in overeenstemming met de voor het vraagstuk van n slingers gevonden bijzondere gevallen:

$$q_1 = q_{10} e^{ix_a t} \quad q_2 = q_{20} e^{ix_a t}$$

De slingers slingeren met gelijken slingertijd en gelijke demping. Hun faseverschil is gelijk aan het argument van R_a . De amplitudeverhouding van beide slingers is constant en is gelijk aan de radius van R_a .

2°. Het tweede bijzondere geval treedt op wanneer C in het oneindige ligt, d.w.z. wanneer

$$\frac{q_{20}}{q_{10}} = R_b = - \frac{(\Delta + \Delta_r)}{d_{21}}$$

Men krijgt nu:

$$q_1 = q_{10} e^{ix_b t} \quad q_2 = q_{20} e^{ix_b t}$$

De slingers slingeren weer met gelijken slingertijd en demping. Hun faseverschil is gelijk aan het argument van R_b . Hun amplitudeverhouding is constant en is gelijk aan de radius van R_b .

Uit het verband

$$R_a R_b = - \frac{1}{\omega^2} e^{i(x_{21} - x_{12})}$$

volgt, dat de faseverschillen bij de twee bijzondere toestanden samen $\pi + (x_{21} - x_{12})$ zijn en het product der amplitudeverhoudingen $\frac{1}{\omega^2}$ is.

De twee bijzondere gevallen zijn volgens de formules analoog; er is echter een belangrijk verschil tusschen.

Voor het algemeene geval n.l. dat ε niet gelijk nul is, zoodat C van een willekeurigen begintoestand uitgaande een spiraal beschrijft, zal C zich steeds van den eenen bijzonderen toestand verwijderen en tot den tweeden naderen. Is ε positief dan nadert C tot O , is ε negatief dan verwijdt C zich steeds meer en zal tot het oneindige naderen.

Van de twee bijzondere toestanden is dus de eene te kenschetsen

als labiel, de andere als stabiel, d.w.z. het verschijnsel zal, bij een kleine afwijking van den eenen toestand, zich daarvan steeds meer verwijderen, en bij een kleine afwijking van den anderen toestand, daartoe weder meer en meer naderen.

Hierbij is op te merken dat deze laatste toestand in het algemeen nooit bereikt zal worden: de nadering is asymptotisch, want de snelheid van C is evenredig aan de uitwijking CO . De snelheid van verwijdering uit den labielen toestand is eveneens evenredig aan de uitwijking.

De snelheid waarmee de toestand tot het stabiele geval nadert, is evenredig aan de grootte $\delta \sin \varepsilon$. Wanneer de hoeken ε klein zijn, is dus deze snelheid kleiner naarmate $(k_2 - k_1)$ kleiner is, d. w. z.:

Hoe meer de dempingsconstanten der slingers verschillen, des te sneller zal het verschijnsel tot den stabielen toestand naderen.

Voor de beoordeeling van het verschijnsel kan het nut hebben, het verloop na te gaan van den verhoudingsvector:

$$p = \frac{q_2}{q_1},$$

waarvan het argument gelijk is aan het faseverschil der twee slingers, en de radius gelijk is aan de amplitudeverhouding.

Uit de formules volgt:

$$p = \frac{V_2}{V_1}.$$

Men kan met behulp van de grafische voorstelling van fig. 4 onmiddellijk p construeeren door $\triangle BOP$ gelijkvormig te maken aan $\triangle BCA$. OP stelt dan p voor.

De baan van P is als volgt na te gaan:

$$\triangle BCO \sim \triangle BAP$$

$$\angle BPA = \angle BOC$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{OC}{R_b}.$$

Dit beteekent, dat $\angle BPA$ met constante hoeksnelheid $2\delta \cos \varepsilon$ toeneemt, terwijl de verhouding $\frac{AP}{BP}$ gelijk is aan $C e^{-2\delta \sin \varepsilon}$.

Maakt men van de uitdrukkingen der complexe grootheden gebruik, dan is dit in den vorm te schrijven:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{C}{R_b} e^{2i\Delta t}$$

Deze vergelijking is ook onmiddellijk door integratie uit de differentiaalvergelijkingen af te leiden.

In twee gevallen ontardt de baan van P in een cirkel.

$$1^0. \quad \delta \sin \varepsilon = 0.$$

In dat geval is $\frac{AP}{BP} = C$,

d. w. z. P beschrijft een cirkel, die de meetkundige plaats is van punten, wier afstanden tot A en B in een gegeven verhouding C staan. Daar C van den aanvangstoestand afhankelijk is, krijgt men voor verschillende aanvangstoestanden verschillende cirkels, die te zamen een bundel vormen.

$$2^0. \quad \delta \cos \varepsilon = 0.$$

In dat geval is $\angle APB$ constant, zoodat P een cirkel door A en B beschrijft. De cirkels gaande door A en B vormen een bundel, die de cirkels van den vorigen bundel loodrecht snijdt.

In fig. 5 zijn beide bundels geteekend.

Gemakkelijk is nu te bewijzen, dat in het algemeene geval de baan van P de cirkels van bundel 1 snijdt onder een hoek ε en dus die van bundel 2 onder een hoek $90^\circ - \varepsilon$. Een dier krommen is als voorbeeld geteekend.

Ook uit deze grafische voorstelling is duidelijk het bovengeschetste verloop van het verschijnsel te zien. Men krijgt de twee bijzondere toestanden wanneer P met A of met B samenvalt. De verhoudingsvector P blijft dan constant en gelijk aan R_a respectievelijk R_b . In het algemeene geval beschrijft P een baan, waarbij P zich van het eene punt verwijdert en het andere punt nadert.

De verdere conclusies, die wij uit de beide grafische voorstellingen kunnen trekken, zullen wij hier achterwege laten, daar ze voor de slingerwaarnemingen van weinig belang zijn.

Wanneer men de oplossing van het vraagstuk in reële grootheden wil uitdrukken, krijgt men zeer omslachtige formules, die het inzicht in het verschijnsel niet bevorderen.

Men komt nog tot het meest overzichtelijke resultaat door bij de afleiding uit te gaan van de grafische voorstelling en verschillende daarin optredende hoeken als hulpgrootheden in te voeren. Daar zich hierbij geen bijzonderheden voordoen en daaraan geen opmerkingen van principieel belang zijn vast te knopen, zullen wij het resultaat hier achterwege laten.

Wij zullen nu nog drie bijzondere gevallen nagaan, waarbij, door de bijzondere waarde die de statief- en slingerconstanten hebben, het verschijnsel min of meer van karakter verandert.

$$A^1) \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 \text{ en } k_2 = k_1$$

Dit geval doet zich voor bij het Stückrath-toestel; de slingers zijn nagenoeg gelijk van vorm, zoodat in het algemeen $k_2 = k_1$ is en de hoeken α zijn nul.

De grootheden d_{12} , d_{21} , Δr , Δ , R_a en R_b zijn nu alle reëel.

De formules zijn in vrij eenvoudigen vorm te brengen door de volgende benamingen in te voeren.

$$\text{Stel} \quad \frac{N_2 + N_1}{2} = N \quad \frac{N_2 - N_1}{2} = \Delta_n$$

$$d^2 = d_{12} d_{21} = \frac{N^6}{4l^2} \lambda_{21}^2 h_1 h_2 m_1 m_2$$

$$\omega^2 = \frac{h_2 m_2}{h_1 m_1}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{d}{\Delta_n}$$

1) Een behandeling van dit geval werd reeds gegeven door Dr. C. SCHOUTE ter beantwoording van een prijsvraag betreffende proeven van HUYGENS en ELLICOTT met twee elkander beïnvloedende uurwerken, uitgeschreven door de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen.

dan is:

$$\Delta_r = \Delta_n \quad r = N + ik$$

$$\Delta = \frac{\Delta_n}{\cos 2z} = \frac{d}{\sin 2z} \quad \varepsilon = 0$$

$$R_a = + \frac{tg z}{\omega} \quad R_b = - \frac{cotg z}{\omega}$$

$$x_a = r - \Delta = N - \frac{\Delta_n}{\cos 2z} + ik \quad x_b = r + \Delta = N + \frac{\Delta_n}{\cos 2z} + ik$$

Voor slingers van gelijk gewicht en gelijken vorm is $\omega = 1$.

In fig. 6 hebben wij dezen toestand grafisch voorgesteld, analoog aan de grafische voorstelling van fig. 3b. Aan de hand daarvan zullen wij weer het vraagstuk onderzoeken.

Daar $\varepsilon = 0$ is wordt de baan van C een cirkel, die met eenparige hoeksnelheid 2Δ doorloopen wordt ¹⁾. Het verschijnsel is nu zuiver periodiek geworden, d. w. z. dat na verloop van een periode de vectoren V_1 en V_2 weer tot hun beginwaarde zijn teruggekeerd, en in elke nieuwe periode weer dezelfde waarden doorloopen als tijdens de eerste periode. De duur der periode is:

$$\frac{\pi}{\Delta} = \frac{2t^2}{t_2 - t_1} \cos 2z$$

Is een der slingers bij den aanvang in rust, dan is hij na elke periode weer in rust.

De twee bijzondere toestanden bestaan evenals bij het algemeene geval. Uit de formules voor R_a en R_b volgt dat in het een geval de slingers in tegengestelde fase slingeren (faseverschil π) met een amplitudeverhouding $\frac{cotg z}{\omega}$, en in het tweede geval in dezelfde fase met een amplitudeverhouding $\frac{tg z}{\omega}$.

¹⁾ Om ε nul te maken is het niet noodig dat $k_2 - k_1 = 0$ en $z_{21} = z_{12} = 0$. Uit fig. 3a kan men het verband van die grootheden opmaken, waardoor ε nul wordt. De meeste der hieronder getrokken conclusies gaan ook voor dit algemeener geval op.

De twee gevallen zijn nu niet principieel verschillend, daar een algemeene begintoestand weer in zichzelf terugkeert, en niet tot een der beide gevallen nadert.

Wij kunnen nu drie mogelijkheden onderscheiden die van den begintoestand afhankelijk zijn:

1^o. De cirkel die C beschrijft ligt binnen A en B . De vectoren CB en CA schuiven tijdens een periode heen en weer, doch maken geen omwenteling en komen aan het eind weer in hun oorspronkelijke posities terug. De gemiddelde fasesnelheid van V_1 en V_2 tijdens een volle periode is dus nul, m. a. w. de gemiddelde fasesnelheid van beide slingers is gelijk aan die van den vergelijkingsslinger. De gemiddelde slingertijden van beide slingers zijn dus aan die van den vergelijkingsslinger gelijk en zijn dus beide gelijk aan

$$N - \frac{\pi}{\cos 2\alpha} \frac{\Delta_n}{\Delta_n}$$

Ter vergelijking diene dat de slingertijd van slinger 1 alleen slingerende gelijk is aan:

$$\frac{\pi}{N - \Delta_n}$$

2^o. De cirkel die C beschrijft ligt buiten A en B . De vectoren CB en CA maken dan in een periode een volle omwenteling. De gemiddelde fase-snelheid van V_1 en V_2 in dien tijd is dus:

$$2\Delta = 2 \frac{\Delta_n}{\cos 2\alpha}$$

Hieruit volgt dat de gemiddelde slingertijd van beide slingers weer gelijk is, en wel:

$$N + \frac{\pi}{\cos 2\alpha} \frac{\Delta_n}{\Delta_n}$$

Ter vergelijking diene dat de slingertijd van slinger 2 alleen slingerende gelijk is aan:

$$N + \frac{\pi}{\Delta_n}$$

3^o. De cirkel die C beschrijft ligt tusschen beide gebieden in. Dezelfde redeneering volgend, blijkt dan dat de gemiddelde slinger-tijd van N^0 . 1 gelijk is aan

$$N - \frac{\frac{\pi}{\Delta_n}}{\cos 2\alpha}$$

en van slinger 2:

$$N + \frac{\frac{\pi}{\Delta_n}}{\cos 2\alpha}$$

De grenzen tusschen de drie mogelijkheden worden gevormd door

1^o. het geval dat C door A gaat, d. w. z. dat slinger 1 in elke periode in rust komt. Men kan dan niet meer van een gemiddelden slingertijd van slinger 1 spreken, daar het aantal slingeringen tijdens een periode onbepaald is.

2^o. het geval dat C door B gaat, d. w. z. dat slinger 2 in elke periode in rust komt.

In fig. 6 zijn de bij de grensgevallen behorende cirkels gestippeld.

Met behulp van de grafische voorstelling van den verhoudingsvector p , waarover hieronder meer, is onmiddellijk af te leiden, dat het 1^o grensgeval optreedt wanneer ¹⁾

$$a_1 = -a_2 \omega \operatorname{tg} 2\alpha \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -a_2 \frac{\omega d}{\Delta_n} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

en het 2^o grensgeval wanneer ¹⁾

$$a_2 \omega = a_1 \operatorname{tg} 2\alpha \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = a_1 \frac{d}{\Delta_n} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Wij kunnen nu nagaan wanneer de drie boven besproken mogelijkheden optreden.

1^e geval als

$$a_1 < -a_2 \frac{\omega d}{\Delta_n} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$(\varphi_2 - \varphi_1)$ moet daarvoor in 't 2^e of 3^e quadrant liggen.

¹⁾ Deze betrekking blijft geldig voor den verderen duur van het verschijnsel.

3^e geval als

$$a_2 \omega < a_1 \frac{d}{\Delta_n} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$(\varphi_2 - \varphi_1)$ moet daarvoor in 't 1^e of 4^e quadrant liggen.

2^e geval als de toestand niet aan een van deze twee voorwaarden voldoet.

De grafische voorstelling van $p = \frac{q_2}{q_1}$ wordt nu vrij eenvoudig (zie fig. 7).

Het punt P beweegt langs een cirkel, die de meetkundige plaats is van de punten waarvan de afstanden tot A en B in een vaste verhouding tot elkaar staan.

De snelheid is zoodanig, dat $\angle APB = 2 \angle APE$ met constante hoeksnelheid verandert. Hieruit volgt dat P_1 zich met constante snelheid langs den cirkel beweegt; de hoeksnelheid van P_1M is:

$$\frac{\pi \cos 2\alpha}{\Delta_n}$$

Wanneer P in een der punten A of B valt is een der bijzondere toestanden verwezenlijkt.

Het is met deze grafische voorstelling ook gemakkelijk na te gaan hoe snel zich de toestand wijzigt, wanneer de tweeslinger-methode ter eliminatie van de grondbewegingen wordt toegepast. De vereischte aanvangstoestand is:

$$a_1 = a_2 \text{ en } \varphi_2 - \varphi_1 = \pi \text{ dus } p = -1$$

Men kan dan den door P beschreven cirkel teekenen. Hoe kleiner deze is, hoe minder de vector OP en dus ook p zal veranderen. Wanneer $\omega = 1$ en $t_2 = t_1$ dus $\alpha = 45^\circ$ en $OB = 1$ is, krimpt deze cirkel samen in het punt B . Men heeft dan te doen met een der bijzondere toestanden, waarbij $\frac{a_2}{a_1}$ en $(\varphi_2 - \varphi_1)$ constant blijven. Wij hebben deze mogelijkheid reeds in de laatste paragraaf van Hoofdstuk III vermeld.

De in reële grootheden uitgedrukte formules zijn veel eenvoudiger dan voor het algemeene geval. Men doet echter ook nu,

ter wille van de bruikbaarheid en overzichtelijkheid der formules, verstandig om de grafische voorstelling te hulp te nemen en enkele hulphoeken in te voeren. Daar deze formules bij de slingerwaarnemingen in uitzonderingsgevallen nog wel eens toegepast kunnen worden, hebben wij ze als bijlage achterin opgenomen. Men zal er bijvoorbeeld zijn toevlucht toe moeten nemen, als men voor de bepaling van het meeslingeren de waarnemingen over zoo langen tijd wil uitstrekken, dat de differentiaalformules XX niet meer bruikbaar zijn. Wij zullen niet verder uitweiden over de meest praktische methode om ze toe te passen; alleen willen wij wijzen op de mogelijkheid de berekening ten deele grafisch uit te voeren, door gebruik te maken van de grafische voorstelling, die van p gegeven is. Neemt men bij begin en einde de amplitudeverhouding en het faseverschil van de slingers waar, dan zijn van den door P beschreven cirkel twee punten en de as, waarop het middelpunt ligt, bekend. De cirkel is dan te teekenen, en hieruit is de hulphoek α en daardoor het meeslingeren af te leiden.

Er kunnen zich nog verschillende bijzondere gevallen voordoen, waarvan men zich door bestudeering der twee grafische voorstellingen zonder moeite een denkbeeld kan vormen.

Zoo kan men bijvoorbeeld hebben dat

$$t_2 = t_1 \text{ dus } \Delta_n = 0, \quad z = 45^\circ, \quad \Delta = d$$

$$R_a = + \frac{1}{x} \quad R_b = - \frac{1}{x} \quad x_a = x_b = N + ik$$

Van de drie bovengenoemde mogelijkheden is de tweede nu vervallen.

Wanneer een der cirkels bij den aanvang in rust is, dan is de tweede na een halve periode in rust, de eerste weer na een volle periode enz. Dit is het grensgeval tusschen de eerste en de derde mogelijkheid.

Wij zullen hier niet verder in bijzonderheden afdalen en beschouwen geval A hiermee als afgehandeld.

De verder nog te behandelen gevallen hebben voor de slingerwaarnemingen geen waarde, daar zij zich daarbij in het algemeen

niet zullen voordoen. Wij zullen ze dan ook niet uitvoerig behandelen. Voor een meer algemeene toepassing der vergelijkingen op andere quaesties, zooals bijv. geluids- en electriciteitsverschijnselen, zal wellicht een nadere bestudeering wenschelijk zijn. Deze ligt echter buiten het kader van deze verhandeling.

Voor de overzichtelijkheid stellen wij bij de hieronder te vermelden gevallen $x_{21} = x_{12} = 0$; men kan de beschouwingen zonder moeite uitbreiden voor het geval dat deze niet nul zijn.

$$B. \quad x_{12} = x_{21} = 0 \text{ en } t_2 - t_1 = 0.$$

$$\text{Noem } (k_2 - k_1) = 2 \Delta_k.$$

Men kan nu nog twee mogelijkheden onderscheiden, met een grensgeval; dat wij het laatste zullen behandelen.

$$I. \quad \Delta_k < d.$$

Voert men weer een hulphoek α in:

$$\frac{\Delta_k}{d} = \sin \alpha$$

dan is:

$$\Delta = d \cos \alpha = \Delta_k \cotg \alpha$$

$$R_a = + \frac{1}{\omega} e^{-i x} \qquad R_b = - \frac{1}{\omega} e^{i x}$$

De punten A , B en O zijn in fig. 8 geteekend. Daar Δ reëel is, beschrijft C weer een cirkel en het verschijnsel is dus evenals in het vorige geval zuiver periodiek. De periode is

$$\frac{\pi}{d \cos \alpha}$$

Er zijn weer twee bijzondere toestanden, waarbij $p = \frac{q_2}{q_1}$ constant is. Uit de waarden van R_a en R_b volgt, dat:

$$1^{\circ} \text{ toestand} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\omega} \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = -\alpha$$

$$2^{\circ} \text{ toestand} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\omega} \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \pi + \alpha$$

De onderscheiding labiel en stabiel vervalt weer, omdat het algemeene geval niet tot een van beide nadert.

Is een der slingers bij den aanvang in rust, dan passeert ook de tweede den ruststand, terwijl aan het eind van een volle periode de eerste weer in rust is. Deze tijdstippen liggen uiteen:

$$\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{d \cos \alpha} \quad \text{en} \quad \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{d \cos \alpha}$$

zooals uit hoek AOB onmiddellijk volgt.

Is $\alpha = 0$ d.w.z. $\Delta_k = 0$ dan is de toestand identiek met die welke bij geval A behandeld is voor $t_2 - t_1 = 0$. De tijdstippen liggen dan een halve periode uiteen.

$$\text{II} \quad \Delta_k > d$$

Voer een hulphoek α in:

$$\frac{d}{\Delta_k} = \sin 2\alpha$$

dan is:

$$\Delta = i \Delta_k \cos 2\alpha = i d \cotg 2\alpha$$

$$R_a = -\frac{i \tg \alpha}{\omega} \quad R_b = -\frac{i \cotg \alpha}{\omega}$$

In fig. 9 zijn A , B en O geteekend.

Daar Δ zuiver imaginair is, is nu de baan van C rechtlijnig naar O toe met een snelheid

$$2 \Delta_k \cos 2\alpha \times \overline{OC}$$

C zal O dus nooit bereiken.

Het verschijnsel is nu geheel van karakter veranderd; C beschrijft geen omwentelingen om O . Alle periodiciteit is verdwenen. De toestand nadert steeds meer tot een der twee bijzondere toestanden.

Voor de twee bijzondere toestanden geldt:

$$1^{\circ} \text{ toestand: } \frac{a_2}{a_1} = \frac{tg \alpha}{\omega} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$2^{\circ} \text{ toestand: } \frac{a_2}{a_1} = \frac{cotg \alpha}{\omega} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

Bij de grafische voorstelling van den verhoudingsvector p , beschrijft P een cirkel gaande door de punten A en B .

C. Grensgeval tusschen B I en B II

$$\Delta_k = d$$

Hierdoor wordt Δ nul, dus $x_a = x_b = r$.

Wij komen hiermee aan het bijzondere geval van twee gelijke wortels x . Dit geval behoort van den aanvang af apart behandeld te worden. De oplossing is nu van den vorm:

$$q_1 = (A_1 + F_1 t) e^{irt} \quad q_2 = (A_2 + F_2 t) e^{irt}$$

Wij stellen, ter wille van de algemeenheid der formules hierbij z_{21} en z_{12} niet nul.

Na substitutie in de differentiaalvergelijkingen XXX vindt men de volgende constantenvergelijkingen:

$$F_2 = -\frac{\Delta_r}{d_{21}} F_1 \quad A_2 = -\frac{\Delta_r}{d_{21}} A_1 + \frac{i}{d_{21}} F_1$$

Volgens de onderstellingen is

$$\Delta_r^2 = -d_{12} d_{21} \quad \text{dus} \quad \frac{\Delta_r}{d_{21}} = i \sqrt{\frac{d_{12}}{d_{21}}}$$

Wij zullen het verschijnsel weer grafisch voorstellen en kiezen voor den vergelijkingsslinger:

$$q_v = \frac{i}{\Delta_r} F_1 e^{irt}$$

Wij stellen verder

$$-i \Delta r \frac{A_1}{F_1} = V_{10}$$

dan is:

$$V_1 = \frac{q_1}{q_v} = V_{10} + V \sqrt{d_{12} d_{21}} t$$

$$V_2 = \frac{q_2}{q_v} = i \frac{V \sqrt{d_{12}}}{d_{21}} (1 - V_1)$$

In fig. 10 is dit grafisch voorgesteld.

De afstand AB is gelijk gemaakt aan de lengteeenheid. Punt E beweegt zich rechtlijnig voort met eenparige snelheid. Deze is gelijk aan de radius van $\sqrt{d_{12} d_{21}}$. De baan is horizontaal wanneer $x_{21} = x_{12} = 0$.

De beginwaarde V_{10} is te construeeren uit:

$$V_{10} = \frac{1}{1 - i \sqrt{\frac{d_{21} q_{20}}{d_{12} q_{10}}}}$$

Voor de berekening der reële formules is het weer wenschelijk enkele hulphoeken in te voeren, die hun beteekenis ontleenen aan de grafische voorstelling. Ook nu weer wordt het inzicht in het verschijnsel daarmee niet vermeerderd, zoodat wij het resultaat achterwege laten.

Uit het verloop van de vectoren V_1 en V_2 kan men weer den aard van het verschijnsel nagaan.

Er blijkt slechts een bijzondere toestand te zijn, die optreedt wanneer

$$\frac{q_{20}}{q_{10}} = -i \sqrt{\frac{d_{12}}{d_{21}}} \quad \text{dus } V_{10} = \infty$$

In dat geval is

$$q_1 = q_{10} e^{irt} \quad q_2 = q_{20} e^{irt}$$

en $\frac{q_2}{q_1}$ blijft constant.

Wanneer $x_{21} - x_{12} = 0$ is, krijgt men hiervoor:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\omega} \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

Het punt E ligt nu in het oneindige.

Elke willekeurige begintoestand zal tenslotte meer en meer tot dezen bijzonderen toestand naderen, daar E zich naar het oneindige toe beweegt. Ligt het punt E bij den aanvang ver weg aan de linkerzijde, dan zal op dat oogenblik de toestand weinig van den bijzonderen toestand verschillen. Echter, daar E zich met eenparige snelheid naar rechts beweegt, zal de toestand zich nu eerst van den bijzonderen toestand verwijderen en pas op den duur er weer meer en meer toe naderen.

Men kan den bijzonderen toestand kenschetsen als labiel bij afwijkingen in de eene richting en stabiel bij afwijkingen in de andere richting. De twee bijzondere toestanden van het algemeene verschijnsel zijn dus hier tot één overgangsgeval samengetrokken.

Wij zullen hiermee de behandeling van bijzondere gevallen besluiten.

In het algemeen kan men opmerken, dat de aard van het verschijnsel alleen bepaald wordt door de verhouding en de argumenten der twee grootheden

$$\Delta_r \text{ en } d_{21} \times d_{12}.$$

Van deze is de relatieve ligging der punten A , B en O afhankelijk.

De absolute waarde van deze grootheden heeft alleen invloed op de snelheid waarmede het verschijnsel verloopt.

Toepassingen.

Bij de slingerwaarnemingen zal de toepassing der geïntegreerde vergelijkingen weinig voorkomen. Men zal immers de tweeslinger-methode voor het bepalen van het meeslingeren zelden over een

zoo grooten tijdsduur uitstrekken, dat de differentiaal-formules XX en XX B niet meer te gebruiken zijn. Ook bij de, in de laatste paragraaf van Hoofdstuk III aangegeven, tweeslingermethode ter bepaling van den slingertijd met eliminatie van grondbewegingsstoringen en meeslingeren, heeft men ze niet noodig.

Van het bestaan der twee bijzondere toestanden, waarbij faseverschil en amplitudeverhouding constant zijn, is echter gebruik te maken om het meeslingeren te bepalen.

Het eerste is op deze mogelijkheid gewezen door C. VAN ORFF.¹⁾ De methode is ook vermeld in:

Ueber die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage. Dr. PH. FURTWÄNGLER en in:

Bestimmung der absoluten Grösze der Schwerkraft zu Potsdam. Prof. Dr. F. KÜHNEN und Prof. Dr. PH. FURTWÄNGLER.

De methode berust op het volgende:

Als men den bijzonderen toestand zoo goed mogelijk verwezenlijkt, wat men kan controleeren door waar te nemen of de amplitudeverhouding constant blijft, dan kan men d_{12} en d_{21} uit die amplitudeverhouding afleiden, mits Δ_r bekend is. Meestal is de ligging der ophangpunten van beide slingers wel zoo, dat men $\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{11} = \lambda_{22}$ kan stellen. Hieruit volgt dan $d_{11} = d_{12}$ en $d_{22} = d_{21}$, zoodat nu het meeslingeren van beide slingers te berekenen is uit:

$$s_1 = \frac{t_1^2}{\pi} d_{12} \text{ en } s_2 = \frac{t_2^2}{\pi} d_{21}$$

Het verband tusschen de amplitudeverhoudingen bij de twee bijzondere toestanden en de grootheden d_{12} en d_{21} volgt uit

$$R_a = \frac{q_2}{q_1} = \frac{\Delta - \Delta_r}{d_{21}} \text{ en } R_b = \frac{q_2}{q_1} = - \frac{(\Delta_r + \Delta)}{d_{21}}$$

De formule wordt eenvoudig wanneer Δ_r^2 groot is ten opzichte van $d_{12} d_{21}$, dus wanneer de radius van Δ_r^2 groot is ten opzichte van die van $d_{21} d_{21}$.

¹⁾ C. VON ORFF. Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen. München 1883.

Men krijgt dan met verwaarloozing van kleinere termen:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{d_{12} d_{21}}{2 \Delta_r} \text{ en}$$

$$R_a = + \frac{d_{12}}{2 \Delta_r} \quad R_b = - \frac{2 \Delta_r}{d_{21}}$$

Wanneer $z_{12} = z_{21} = 0$ is, geeft dit:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{d_{12}}{2 \sqrt{\Delta_n^2 + \Delta_k^2}} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{2 \sqrt{\Delta_n^2 + \Delta_k^2}}{d_{21}}$$

Het verwezenlijken van een der twee bijzondere toestanden in de praktijk is in het algemeen niet gemakkelijk uitvoerbaar. Men zal het nog het beste kunnen bereiken wanneer Δ_k groot is, zoodat, wanneer bij den aanvang, de toestand afwijkt van den stabielen bijzonderen toestand, deze afwijking vrij snel vermindert. Men wacht dan met de waarnemingen tot de amplitudeverhouding niet merkbaar meer verandert.

Deze methode is als controle toegepast bij de absolute zwaartekrachtsbepalingen te Potsdam. ¹⁾ Men had aan het statief een gelegenheid aangebracht om een hulpslinger in te hangen. Deze bestond uit een klein gewicht aan een draad; de demping was daardoor veel grooter dan van den zwaren hoofdslinger. Bovendien was de massa m_2 van den hulpslinger klein ten opzichte van m_1 , dus d_{21} was een zeer kleine grootheid. Men kon dus van de vereenvoudigde formule gebruik maken.

Men bracht den hulpslinger bij den aanvang in rust; door het vrij groote verschil der dempingsconstanten was na eenige uren de amplitudeverhouding vrijwel constant geworden en wel gelijk aan de eerste der bovenstaande twee formules; men kan dan daaruit d_{12} berekenen, zoodat dan het meeslingeren bekend is.

Het is dus een vrij langdurige methode.

Door het verschil der dempingsconstanten nog kunstmatig te vergrooten, zou men het verloop kunnen versnellen, doch al te ver kan men in die richting niet gaan. Uit bovenstaande formule

¹⁾ Abs. Schwerkraftsb. zu P.

voor de amplitudenverhouding blijkt immers, dat dan de amplitude van den hulpslinger klein wordt, en daardoor de meting van de amplitudeverhouding onnauwkeuriger zal zijn.

Uit de voorafgaande beschouwingen volgt, dat het stilhangen van den draadslinger niet met de uiterste zorgvuldigheid behoeft te geschieden; de bijzondere toestand zal na meer of minder tijd van uit elken aanvangstoestand ontstaan.

In „Absolute Schwerkraftsbestimmung zu Potsdam” volgt op de vermelding van deze methode nog een tweede, die minder tijd in beslag neemt.

Hiervoor is noodig, dat Δ_r weer vrij groot is; de periode van het verschijnsel is dan klein. Men vangt aan met het in rust brengen van den hulpslinger. Na eenigen tijd is de amplitude van dezen slinger een maximum geworden. Hieruit is dan weer d_{12} te berekenen.

De formule voor deze methode is als volgt af te leiden:

Uit de grafische voorstelling van p (fig. 5) kan men opmaken, dat, voor het geval dat Δ_r groot is ten opzichte van d_{12} en d_{21} , p een maximum bereikt na verloop van een halve periode. Deze conclusie kan men ook afleiden door den tijd t te berekenen, waarvoor

$$\frac{p'}{p}$$

zuiver imaginair wordt. p' staat dan loodrecht op p , m. a. w. p is een maximum of minimum.

Als Δ_r groot is t. o. v. d_{12} en d_{21} kan men voor de halve periode schrijven: $\frac{\pi}{2\Delta_r}$.

Wanneer men nu in de formule voor p :

$$p = \frac{q_2}{q_1} = + R_b \frac{C e^{2i\Delta t} - R_a}{C e^{2i\Delta t} - R_b}$$

invoert de voorwaarde, dat voor $t = 0$ $q_2 = 0$ dus $C = R_a$, en de vereenvoudigde formules voor R_a en R_b bij groote Δ_r , dan vindt men voor de maximumwaarde van p na een halve periode:

$$p = + \frac{d_{12}}{2\Delta_n} \left(1 + e^{-\pi \frac{\Delta_k}{\Delta_n}} \right)$$

dus:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{d_{12}}{2\sqrt{\Delta_n^2 + \Delta_k^2}} \left(1 + e^{-\pi \frac{\Delta_k}{\Delta_n}} \right)$$

Men kan dus d_{12} weer uit $\frac{a_2}{a_1}$ berekenen.

Als nadeel van deze methode tegenover de vorige, is te vermelden, dat hier het zuiver stilhangen van den hulpslinger wel van belang is. P beschrijft immers bij een anderen aanvangstoestand een andere kromme en zal dan een ander maximum doorloopen.

Het komt mij voor, dat het bij de toepassing van deze methode wenschelijk is om ook de amplitudeverhouding na een volle periode waar te nemen. De formule daarvoor is:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{d_{12}}{2\sqrt{\Delta_k^2 + \Delta_n^2}} \left(1 - e^{-2\pi \frac{\Delta_k}{\Delta_n}} \right)$$

Door de beide amplitudeverhoudingen op elkaar te deelen, kan men een waarde voor $\frac{\Delta_k}{\Delta_n}$ vinden. Dit zal van dienst zijn voor de bepaling van de grootte

$$\sqrt{\Delta_k^2 + \Delta_n^2}$$

daar men dan alleen een der grootheden Δ_k of Δ_n behoeft te meten.

Kiest men Δ_n zóó groot dat de periode klein is, bijvoorbeeld 40 minuten, zoodat de waarnemingen niet al te veel tijd in beslag nemen, dan is de waar te nemen maximum amplitudeverhouding reeds zeer klein. Stelt men het meeslingeren op 50 10^{-7} seconden dan is voor het gunstigste geval dat Δ_k nul is de amplitudeverhouding $\frac{1}{20}$. Men moet dus de amplitude a_2 van den

hulpslinger zeer nauwkeurig kunnen waarnemen om deze verhouding tot op 1% nauwkeurig te krijgen.

Het is mij niet bekend of deze twee methoden ooit op groote schaal zijn gebruikt. Hoewel ze in bijzondere omstandigheden wellicht diensten kunnen bewijzen, zal men in het algemeen aan de in Hoofdstuk IV behandelde tweeslingermethoden de voorkeur geven. Immers, de eerste methode neemt aanzienlijk meer tijd in beslag, terwijl de tweede methode vergeleken met de gewone amplitudemethode van Hoofdstuk IV geen voordeelen biedt, doch onnauwkeuriger is en langer duurt.

Bovendien heeft men voor beide methoden een hulpslinger noodig, die speciaal voor het doel geconstrueerd is, terwijl de gewone tweeslingermethoden bij het Stückrathtoestel met de slingers zelf uitgevoerd kunnen worden.

De formules zijn ook buiten het gebied der slingerwaarnemingen van toepassing.

Het meest verwant is het vraagstuk van den gang van twee slingeruurwerken, waarvan de kasten zoodanig verbonden zijn, dat de ophangpuntsreactie van den eenen slinger ook het ophangpunt van den tweeden in elastische beweging brengt. Op dit verschijnsel werd reeds door HUIJGENS de aandacht gevestigd.

Waren de slingers geheel vrij, dan zou het vraagstuk volkomen identiek zijn met het in dit hoofdstuk behandelde, en men zou de conclusies zonder meer kunnen overnemen.

De werking van het echappement op den slinger zal echter zonder twijfel het vraagstuk ingewikkelder maken. Een juiste behandeling van de daardoor ontstaande complicaties zal alleen mogelijk zijn na een nader onderzoek van den echappementsinvloed bij verschillende amplituden. De uitwerking zal tweeërlei zijn:

1°. Een invloed op de amplitude van den slinger. Wij hebben geen constante amplitudedemping, de amplitudeverandering zal een andere functie van de amplitude zijn. Wij kunnen daaromtrent *à priori* alleen zeggen, dat bij de normale amplitude de echappementsinvloed de demping door andere invloeden opheft, dat de gezamenlijke invloed van echappement en demping bij

kleinere amplitude een amplitudevermeerdering en dat zij bij grootere amplituden een amplitudevermindering tengevolge heeft. Men moet deze functie nader nagaan en kan daarna voor de oplossing van het vraagstuk nog twee wegen inslaan.

a. Men kan van het begin af aan den eersten term van a' in de differentiaal formules n.l. — ka vervangen door de juiste amplitude functie. De oplossingsmethode door middel van de imaginaire grootheden zal dan echter in 't algemeen in den steek laten.

b. Men kan een benaderingsoplossing toepassen, waarbij men de grootheid k aanhoudt. De oplossing loopt dan parallel aan de oude doch men moet in rekening brengen dat k nu niet constant is, doch langzaam veranderlijk, en dat k ook negatief kan worden. Dit is uitvoerbaar, doch de oplossing leidt tot vrij ingewikkelde formules.

2°. Een invloed op den slingertijd van den slinger.

Deze behoort bij een goed geconstrueerd echappement klein te zijn. Wij kunnen verder dezelfde redeneering als hierboven houden, en hebben de keuze of van den aanvang af het eerste lid aN van de differentiaalvergelijking voor $a\varphi'$ te vervangen door een andere functie van a , of den ouden oplossingsvorm te behouden en in rekening te brengen dat N niet meer constant is.

Verder is nog in aanmerking te nemen, dat bij het verschijnsel de amplitude der uurwerkslingers zoo klein kan worden dat het echappement niet meer normaal werkt. Vermoedelijk zal dan de invloed op de amplitude en den slingertijd een andere functie zijn van de amplitude. Tenslotte doet zich daarbij ook nog de eigenaardigheid voor dat het uurwerk dan stilstaat. De aanwijzingen van den wijzers komen dus niet overeen met het geheele aantal slingeringen, dat de slinger uitvoert, doch met dat gedeelte, waarvan de amplitude grooter dan een zeker grensbedrag is.

Voor eenige jaren heeft de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen een prijsvraag over deze quaestie uitgeschreven, waarbij de beantwoording van Dr. C. Schoute bekroond werd. Deze vestigde mijn aandacht ophet vraagstuk en deelde mij het een en ander omtrent zijn oplossing mede; voor zoover ik kan nagaan komt deze overeen met het onder A behandelde geval (blz. 143 e.v.)

Daar het vraagstuk buiten den eigenlijken inhoud van deze verhandeling ligt, zullen wij het hier bij deze korte opmerkingen laten.

Nog een reeks van andere verschijnselen zijn met behulp van de vergelijkingen van dit Hoofdstuk te behandelen. In het algemeen kan men zeggen dat deze van toepassing zijn op alle periodieke verschijnselen die invloed op elkander uitoefenen. Zoo zal men er bijvoorbeeld partij van kunnen trekken voor vraagstukken op het gebied van het geluid en van electriche wisselstromen. Wij stellen ons echter voor deze quaesties elders te behandelen, daar zij te ver buiten het kader van dit onderzoek vallen.

Bijlage bij Hoofdstuk V.

Formules voor het samenslingeren bij gelijke demping.

Deze formules behoren bij pag. 143 e.v. Gegeven is:

$$k_2 = k_1 \quad x_{12} = x_{21} = 0$$

Voor de beteekenis van N , ω , Δ , α zie pag. 143 e.v.

Noem het faseverschil voor $t = 0$: 2ν en voer de hulphoeken γ , μ , δ , θ_1 en θ_2 in, gegeven door:

$$\operatorname{tg} \gamma = \omega \frac{a_{20}}{a_{10}}$$

$$\operatorname{tg} (\mu + \delta) = - \frac{\sin (\alpha + \gamma)}{\sin (\alpha - \gamma)} \operatorname{tg} \nu$$

$$\operatorname{tg} (\mu - \delta) = - \frac{\cos (\alpha + \gamma)}{\cos (\alpha - \gamma)} \operatorname{tg} \nu$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = - \operatorname{tg} (\mu + \nu) \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} (\Delta t + \delta)$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = - \operatorname{tg} (\mu - \nu) \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} (\Delta t + \delta)$$

Men vindt dan voor de amplituden en de fasehoeken van de twee slingers:

$$a_1 = a_{10} e^{-kt} \frac{\cos (\mu + \nu) \cos (\Delta t + \delta)}{\cos \delta \cos \theta_1} \quad \varphi_1 = \theta_1 + Nt + \mu$$

$$a_2 = a_{20} e^{-kt} \frac{\cos (\mu - \nu) \cos (\Delta t + \delta)}{\cos \delta \cos \theta_2} \quad \varphi_2 = \theta_2 + Nt + \mu$$

De beteekenis van de hulphoeken in fig. 6 is de volgende:

$$\begin{aligned}\mu + \delta &= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle OAP - \frac{1}{2} \angle OPA \\ \mu - \delta &= \frac{1}{2} \angle OPB - \frac{1}{2} \angle OBP \\ \theta_1 &= \frac{1}{2} \angle OBC - \frac{1}{2} \angle OCB \\ \theta_2 &= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle OCA - \frac{1}{2} \angle OAC\end{aligned}$$

De bovenstaande betrekkingen zijn zonder moeite uit de figuur af te leiden.

Voor het geval dat het faseverschil bij den aanvang nul is, zijn de formules onbruikbaar. Wij kunnen dan vereenvoudigen en vinden:

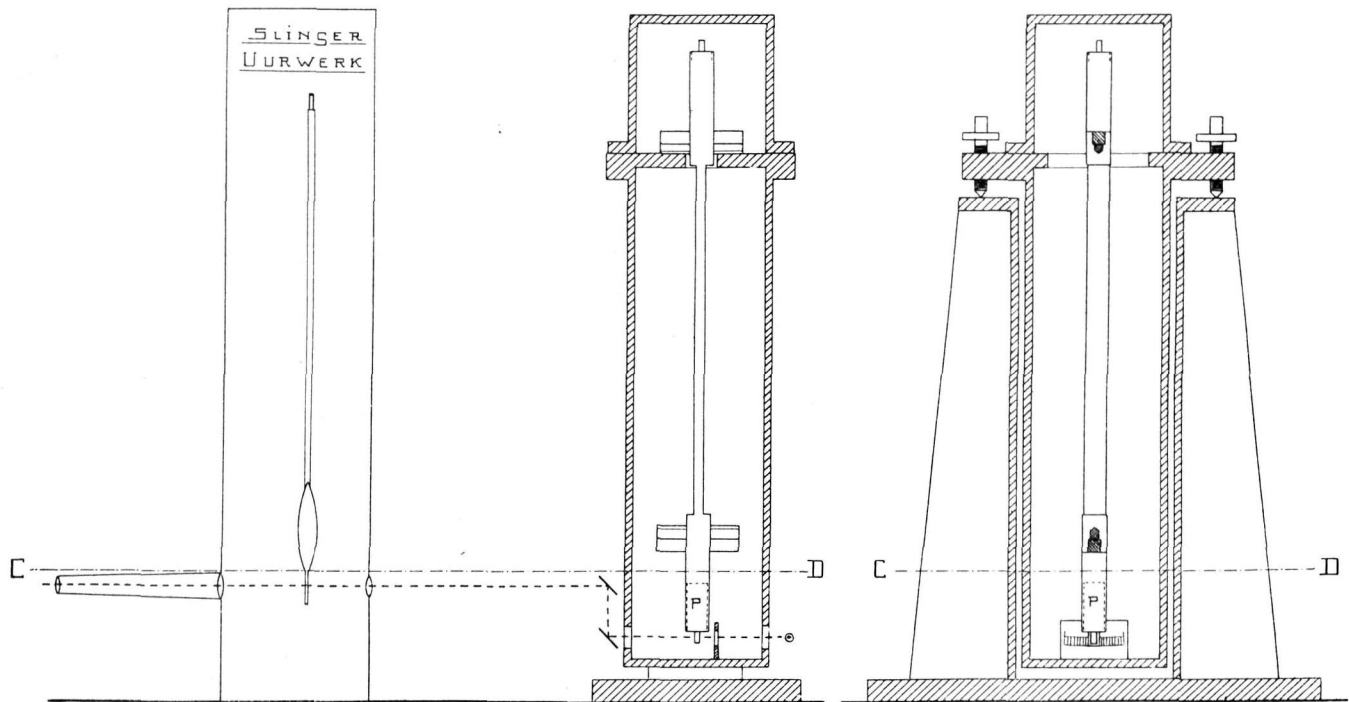
$$\begin{aligned}tg \theta_1 &= - \frac{\cos(2\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} tg \Delta t & tg \theta_2 &= - \frac{\sin(2\alpha - \gamma)}{\sin \gamma} tg \Delta t \\ a_1 &= a_{10} e^{-kt} \frac{\cos \Delta t}{\cos \theta_1} & \varphi_1 &= \theta_1 + Nt \\ a_2 &= a_{20} e^{-kt} \frac{\cos \Delta t}{\cos \theta_2} & \varphi_2 &= \theta_2 + Nt\end{aligned}$$

Deze formules kan men ook toepassen, wanneer het faseverschil bij den aanvang 180° is. Men voere daartoe voor een der slingers een negatieve amplitude in.

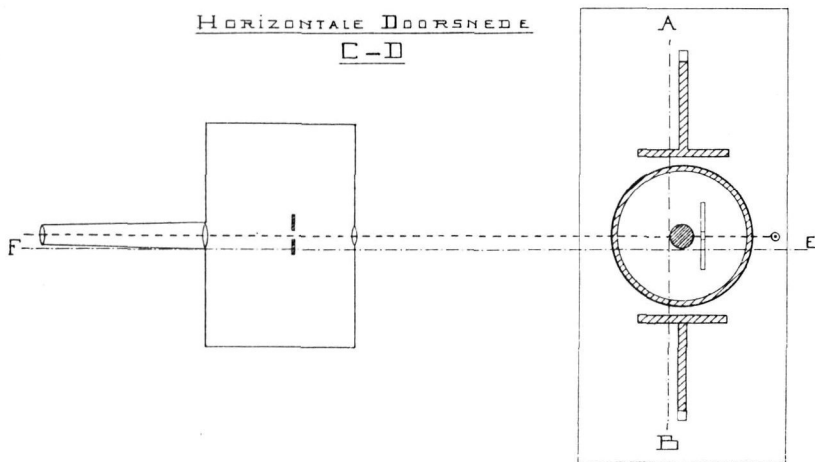
TOESTEL VAN DEFFORGES 1:100

VERTICALE DOORSNEDE E-F

DOORSNEDE A-B

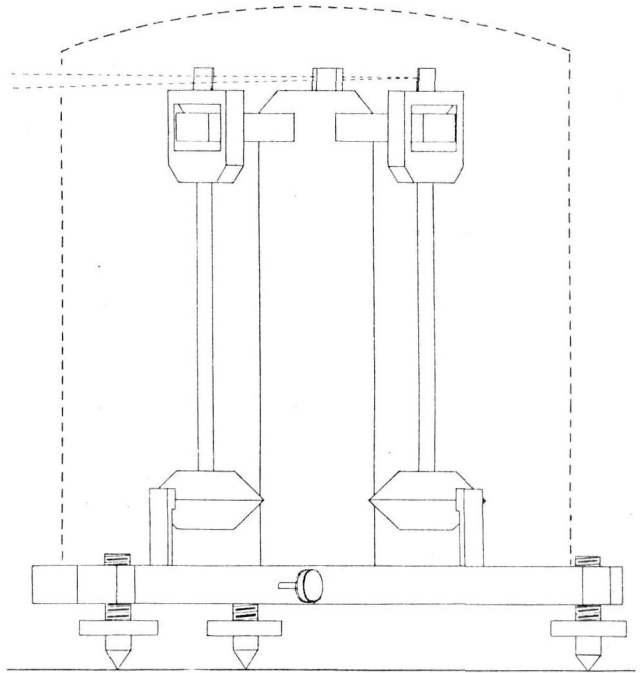
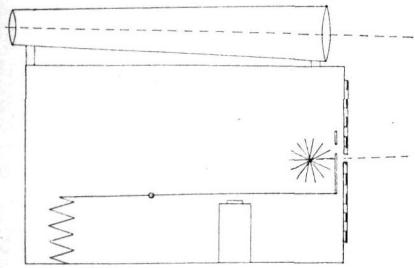


HORIZONTALE DOORSNEDE
C-D

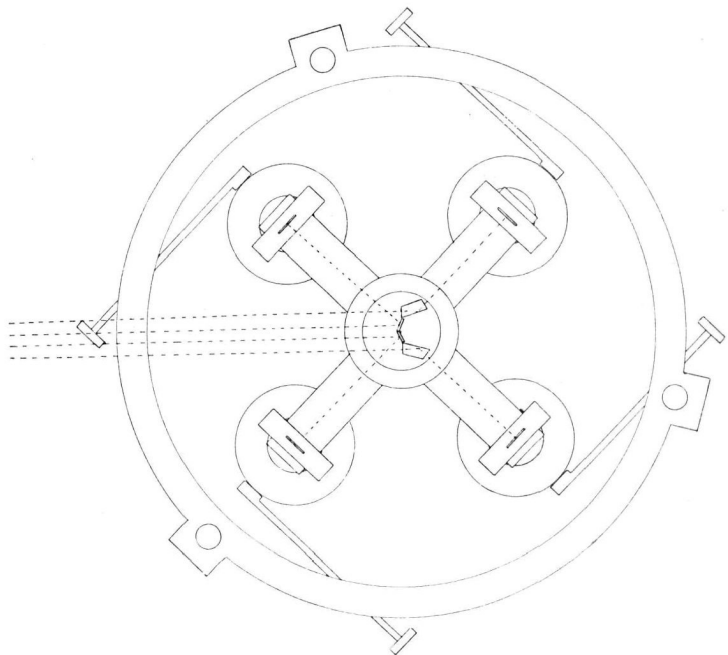
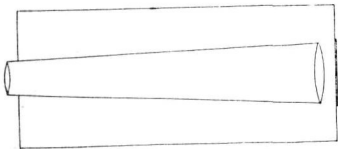


TOESTEL VAN VON STERNECK 1:50

VERTICAAL AANZICHT



HORIZONTALE PROJECTIE



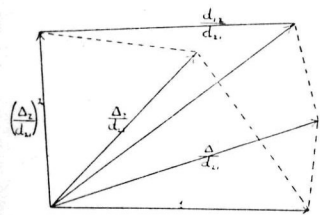


Fig. 3a

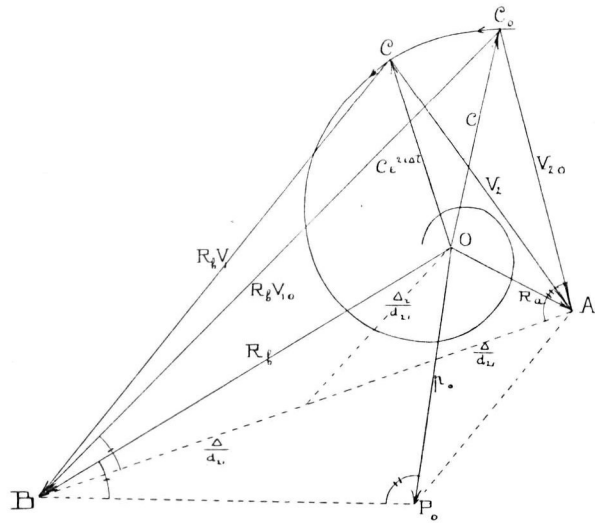


Fig. 3b

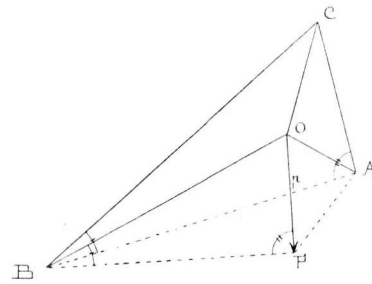


Fig. 4

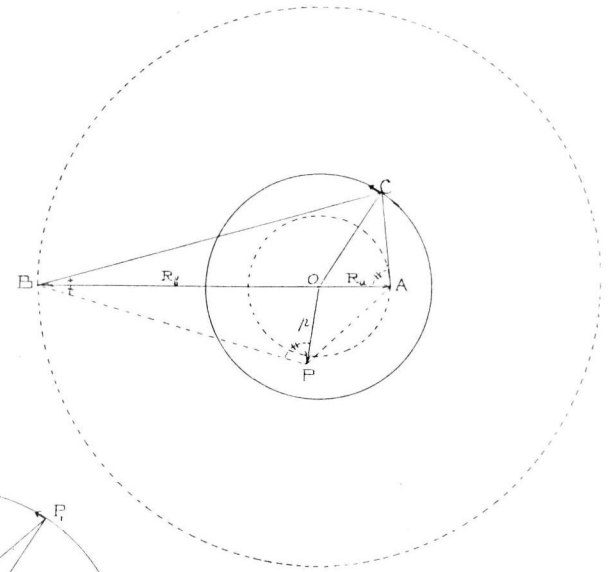


Fig. 5

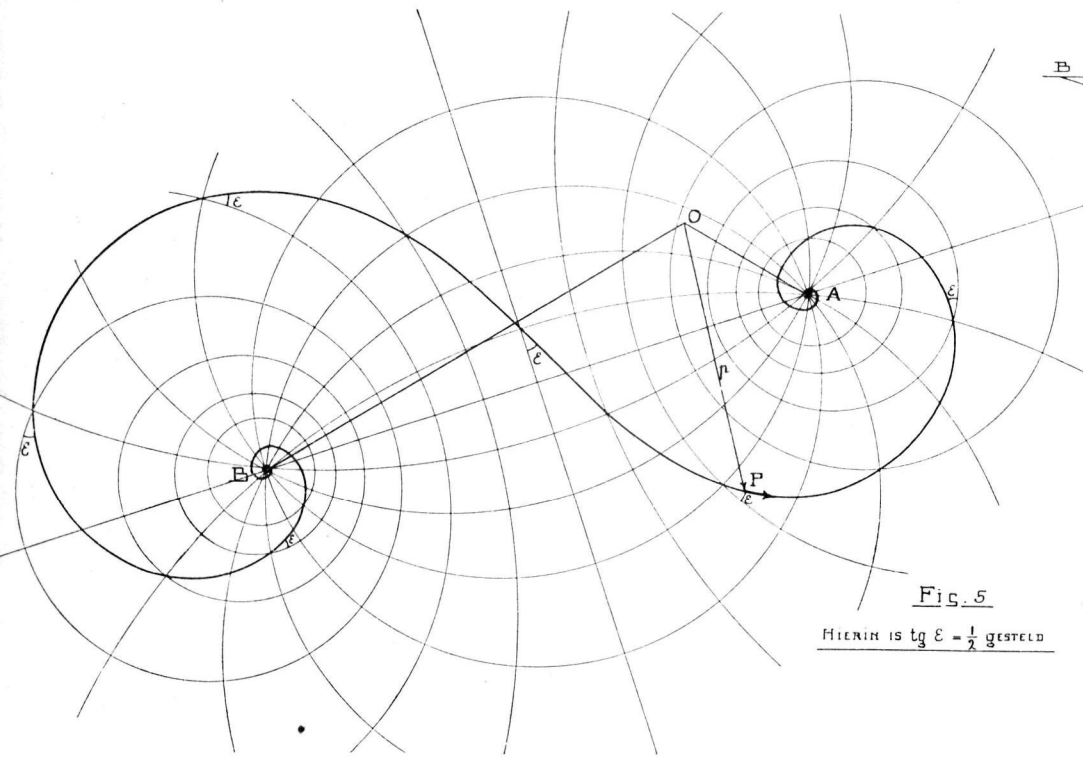


Fig. 6

HIERIN IS $\text{tg } \epsilon = \frac{1}{2}$ GESTELD

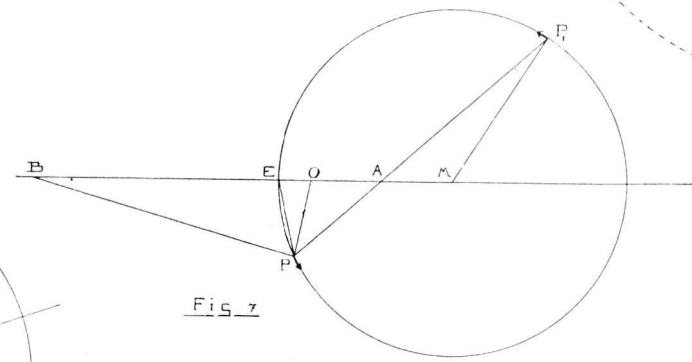


Fig. 7

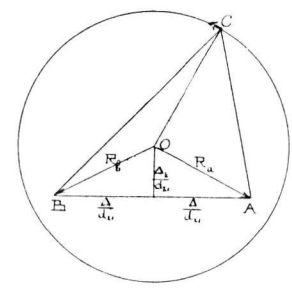


Fig. 8

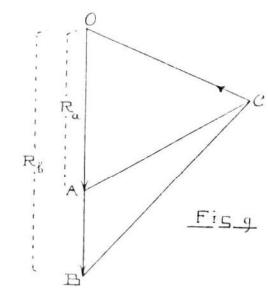


Fig. 9

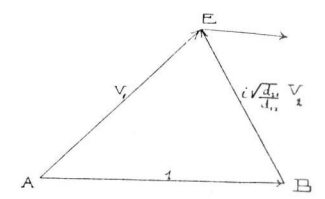


Fig. 10

STELLINGEN.

I.

De toepassing van den regel van Simpson voor de inhoudsbepaling van vlakke figuren, is af te keuren:

II.

Bij de behandeling van de vector-voorstelling van complexe grootheden, is het wenschelijk, als tusschenschakel, het begrip versor in te voeren, teneinde in overeenstemming te blijven met de vermenigvuldigingsregels van de vectoranalyse.

III.

De toepassing van de Affinoranalyse in zijn tegenwoordigen vorm op de theoretische spanningsleer biedt het voordeel, dat het de grondvergelijkingen in een helderen en overzichtelijken vorm brengt, doch voor de verdere ontwikkeling van de theoretische spanningsleer is daarvan weinig nut te verwachten.

IV.

De waarschijnlijkheid van verschillende waarden voor de middelbare fout, wanneer een beperkt aantal schijnbare fouten gegeven is, volgt niet de foutenwet.

V.

Bij een uitgestrekt driehoeksnet verdient de uitvoering van verscheidene minder nauwkeurige basismetingen in verschillende deelen van het net, de voorkeur boven de uitvoering van ééne basismeting met de uiterste nauwkeurigheid.

In verband hiermede is in het algemeen aan de invardraad-meettoestellen de voorkeur te geven boven de staaf-meettoestellen.

VI.

Het grootste voordeel van de methode der kleinste kwadraten is, dat men daarmede een uniforme foutenvereffeningsmethode heeft, die vrijwel onafhankelijk is van persoonlijke opvattingen. Dit is in vele gevallen van meer belang te achten, dan de waarschijnlijkheidsredenen, die voor haar gebruik pleiten.

VII.

Het gebruik van invar voor meetstaven en meetdraden is alleen dan te verdedigen, wanneer deze met niet al te lange tusschenpoozen, met standaardmaten vergeleken worden.

VIII.

Wanneer de nauwkeurigheid niet grooter behoef te zijn, dan 0.01 secunde, verdient telefonische tijdsoverbrenging de voorkeur boven telegrafische.

IX.

De methode voor de berekening der tijdsvergelijking bij het opnemen der wetenschappelijke tijdseinen van den Eiffeltoren, zooals die gegeven wordt in de desbetreffende publicatie van het Bureau des Longitudes (2^{de} Editie), geeft niet de grootst mogelijke nauwkeurigheid en is dus af te keuren.

X.

Bij de droogmaking van de Zuiderzee is het wenschelijk om, meer dan tot nog toe bij droogmakerijen geschiedde, bij de indeeling en verkaveling der ingedijkte landen, de aesthetische zijde in het oog te houden.

XI.

Het gieten van huizen is om schoonheidsredenen te veroordeelen.

XII.

Wanneer men de berekening van Professor DE VRIES BROEKMAN betreffende de knikvastheid van het spoor, wil toepassen op spoorstaven in bogen, is het wenschelijk

in rekening te brengen, dat de formule voor de lengteverandering van de staaf bij zijdelingsche uitbuiging voor een kromme staaf anders is dan voor een rechte.

XIII.

De theorie der knikvastheid van zuilen van gewapend beton kan alleen langs proefondervindelijken weg gegrondvest worden.

XIV.

Wanneer bij laschverbindingen in ijzerconstructies meer dan twee bouten in de krachtrichting achter elkaar geplaatst zijn, kan de door de uiterste bouten opgenomen kracht meer dan anderhalf maal de gemiddelde kracht per bout bedragen.

XV.

Wanneer men steunbouten aanbrengt in een gebogen ketelwand, wordt deze daardoor verzwakt als de afstand der bouten grooter is dan een vrij kleine grensafstand.

XVI.

Uit de evenwichtsvergelijkingen is voor elk lichaam, waarop bekende krachten werken, af te leiden de gemiddelde waarde van elk der zes spanningscomponenten.

Voldoet het lichaam aan de elasticiteitswetten, dan is hieruit o. a. verder nog de volume-verandering van het lichaam af te leiden.

XVII.

Wanneer voor een lichaam gegeven is een vlakke spanningstoestand (hieronder verstaan wij een toestand, waarbij de spanning op elk vlakke-elementje evenwijdig aan de Z-as, loodrecht op die as en onafhankelijk van Z is) dan is voor dat lichaam een reeks andere vlakke spanningstoestanden mogelijk, die met den eersten verwant zijn, doordat de Z-assen samenvallen, de hoofdspanningstrajectoriën in vlakken loodrecht op de Z-as, die van den eersten spanningstoestand overal onder denzelfden hoek snijden, en het verschil der bijbehorende hoofdspanningen in elk punt voor beide toestanden gelijk is.

XVIII.

Voor de relatieve slingerwaarnemingen moeten alle slingers met verstelbaar slingergewicht of andere verstelbare deelen afgekeurd worden.

XIX.

Ten onrechte geeft DEFFORGES de voorkeur aan de statische methode ter bepaling van het meeslingeren.

XX.

Ten onrechte meent HELMERT, dat het juister is voor de lengte van den reversieslinger den afstand der onvervormde messen in te voeren, dan den afstand der door de ophangpuntsreacties vervormde messen.

XXI.

De storing, die tengevolge van grondbewegingen in het resultaat voor g te verwachten is, is niet afhankelijk van het gewicht en van den slingertijd van den gebruikten slinger, doch wel van de amplitude en den duur der waarnemingen.
