

LANGE GOLVEN I

Handleiding college b73A

C. Verspuy
en
M. de Vries

Technische Hogeschool Delft
Afdeling der Civiele Techniek

uitgave
jan. 1978

203101

f 5,--

Inhoud deel I

1. Inleiding

1.1. Overzicht	1
1.2. Golfverschijnselen	3
1.3. Literatuur	7

2. Basisvergelijkingen

2.1. Inleiding	8
2.2. Continuïteitsvergelijkingen	
2.2.1. Algemeen	9
2.2.2. Continuïteitsvergelijking voor twee-dimensionale problemen	14
2.2.3. Continuïteitsvergelijking voor één-dimensionale problemen	19
2.3. Bewegingsvergelijkingen	
2.3.1. Navier-Stokes - vergelijkingen en Euler-vergelijkingen	26
2.3.2. Bewegingsvergelijkingen voor twee dimensies	32
2.3.3. Bewegingsvergelijkingen voor één-dimensionale lange-golf problemen	40
2.4. Vergelijkingen voor lange golven in open leidingen	47
2.5. Vergelijkingen voor drukgolven in gesloten leidingen	
2.5.1. Inleiding	48
2.5.2. Algemene differentiaalvergelijkingen	50
2.5.3. Toestandsvergelijkingen	54
2.5.4. Voortplanting van drukgolven in gesloten leidingen	59
2.5.5. Niet-stationaire stroming bij verwaarloosbare drukgolven	62

3. Analyse lange golven

3.1. Inleiding	66
3.2. Kombergingsbeschouwing	
3.2.1. Integratie continuïteitsvergelijking	66
3.2.2. Waterbeweging in een kort bekken	69
3.3. Kinematische golf	
3.3.1. Beginsel	73

3.3.2. Voortplantingssnelheid	76
3.3.3. Kinematische golf en dynamische golf	77
3.3.4. Uitbreiding	78
3.4. Diffusie analogie	
3.4.1. Inleiding	79
3.4.2. Voorbeeld	81
3.4.3. Uitbreiding	82
3.4.4. Discussie hoogwatergolven	84
3.5. Translatiegolven	
3.5.1. Inleiding	87
3.5.2. Beginsel translatiegolven	89
3.5.3. Invloed profielverandering	95
3.5.4. Voorbeelden	97
3.6. Dynamische golf	
3.6.1. Inleiding	101
3.6.2. Voortplantingssnelheid	101
3.6.3. Karakteristieke relaties	104
Lijst van belangrijke symbolen	109
Referenties	111

1. Inleiding

1.1. Overzicht

In de Civiele Techniek komen golfverschijnselen veelvuldig voor. Speciaal in de Waterbouwkunde zijn veel voorbeelden te geven waarin golven een rol spelen; het zijn gevallen van een niet-stationaire waterbeweging.

Kenmerkend is dus dat het tijdsafhankelijke vraagstukken betreft ("unsteady flow"). Er komen dus ook afgeleiden van de tijd in voor (b.v. $\partial h/\partial t$ en $\partial u/\partial t$). Het betreft hier vaak problemen waarbij een vrije waterspiegel aanwezig is. Ook bij gesloten leidingen kunnen tijdsafhankelijke problemen een rol spelen (slingeringen, waterslag). Deze worden hier mede beschouwd.

De verschillende mogelijke golven kunnen op diverse manieren worden geklassificeerd. Zo kunnen *periodieke* en *a-periodieke* worden onderscheiden.

Voor een periodieke golf geldt voor de waterstand (piëzometrisch niveau)

$$h(x,t) = h(x,t + \tau) \quad (1.1)$$

Dit houdt in dat op een gekozen plaats x na een *golfperiode* (τ) dezelfde waterstand terugkeert. Voor een *a-periodieke* golf geldt deze relatie niet.

Een belangrijke klassifikatie ontstaat aan de hand van het al dan niet aanwezig zijn van een *hydrostatische drukverdeling*. Een voorwaarde hiervoor is, dat de stroomlijnen in het vertikale vlak niet (of nauwelijks) gekromd zijn.

Golven waarbij op ieder tijdstip de drukverdeling hydrostatisch is, worden lange golven genoemd.

Dit type golven wordt in deze handleiding behandeld. Het vóórkomen van de hydrostatische drukverdeling is dus in het navolgende een essentiële aanname.

Welk voordeel geeft deze veronderstelling? Essentieel is dat het mogelijk is over de diepte of zelfs over het dwarsprofiel een middeling uit te voeren. Daarvoor is een aantrekkelijke vereenvoudiging mogelijk van een verschijnsel dat in beginsel van drie ruimte-dimensies (x,y,z) en de tijd afhangt.

- Bij getijstroom in zeeën (b.v. de Noordzee) kan door middeling over de vertikaal het probleem worden teruggebracht tot een vraagstuk met twee ruimte-dimensies (x,y) in het horizontale vlak en de tijd.
- Tijdsafhankelijke verschijnselen in rivieren en kanalen kunnen worden behandeld in een vraagstuk met één ruimte-dimensie (x) en de tijd.

De aantrekkelijke vereenvoudiging die kan worden gemaakt als de hydrostatische drukverdeling geldt, kan vaak worden gevolgd door nog sterkere vereenvoudigingen, afhankelijk van het beschouwde golfverschijnsel.

Voor de bestudering van een bepaald golfverschijnsel is het steeds nodig de vereenvoudigingen met zorg uit te voeren.

- te sterk vereenvoudigen maakt dat het onderhavige golfverschijnsel niet meer juist wordt weergegeven.
- te weinig vereenvoudigen kan onnodig gecompliceerd rekenwerk nodig maken.

Hierbij moet meteen worden opgemerkt dat in de praktijk te weinig vereenvoudigen de minste problemen geeft. Immers als een computerprogramma wordt gebruikt dat gecompliceerde golfverschijnselen kan behandelen, dan kan dit ook worden gebruikt voor het eenvoudiger golfverschijnsel; termen uit de vergelijkingen die verwaarloosbaar klein zijn, spelen dan automatisch geen rol.

In deze handleiding wordt de problematiek van de lange golven als volgt behandeld.

- In hoofdstuk 2 worden de basisvergelijkingen voor de vloeistofbeweging beschouwd. Daaruit worden door middeling over de diepte of het dwarsprofiel de *basisvergelijkingen voor lange golven afgeleid*.
- In hoofdstuk 3 worden deze basisvergelijkingen systematisch vereenvoudigd voor verschillende golftypen. Het is van belang om deze kwalitatieve analyse vooraf te doen gaan aan het behandelen van rekenmethoden.
- In hoofdstuk 4 worden de berekeningsmethoden behandeld. Analytische, grafische en numerieke integratie van de lange golfvergelijkingen krijgen de aandacht: elke methode heeft zijn eigen specifieke toepassingsgebied.
- De toepassing van de behandelde oplossings technieken wordt uiteindelijk in hoofdstuk 5 beschouwd.

1.2. Golfverschijnselen

Er zal hier vooral worden gesproken over die golfverschijnselen, waarvoor een benadering tot één ruimte-dimensie mogelijk is. Het gaat daarbij om open of gesloten leidingen. Inzicht in deze verschijnselen wordt verkregen door analytische of grafische representatie b.v. van het verloop van de waterstand $h(x,t)$.

Er zijn verschillende manieren mogelijk om inzicht te krijgen in het verloop van de waterstand $h(x,t)$.

- Bij een weergave $h(x_1,t)$ wordt op een vaste plaats (x_1) gekeken hoe de waterstand in de tijd verandert.
- Bij de weergave $h(x,t_1)$ wordt op een bepaald tijdstip (t_1) op verschillende plaatsen de waterspiegel gegeven.

In Fig. 1.1. is een dergelijke grafische presentatie voor het getij in de Westerschelde gegeven.

In de presentatie $h(x_1,t)$ kan het verloop voor verschillende plaatsen worden ingetekend.

Er blijkt duidelijk uit dat het hoogwater, beschouwd voor plaatsen van

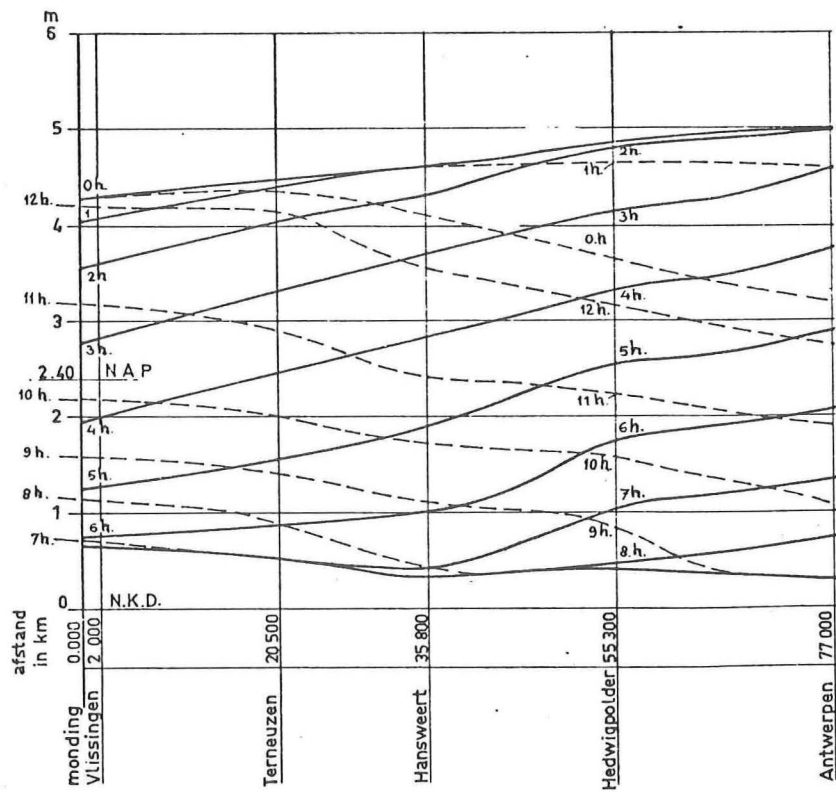
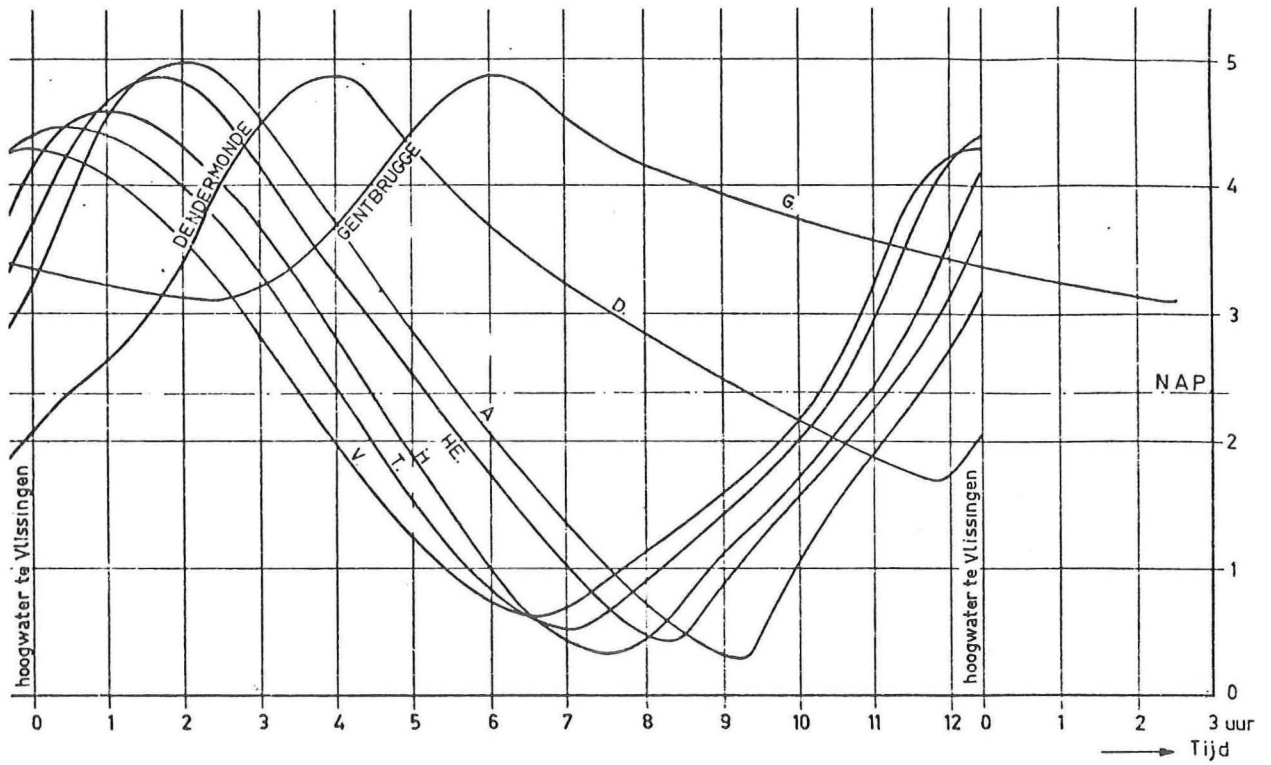


Fig. 1.1. Presentatie getijgolf Westerschelde (traject Vlissingen-Antwerpen)

Vlissingen af in de richting Antwerpen, steeds *later* optreedt. Hetzelfde geldt voor laag water. De vervorming van de getijgolf blijkt uit deze presentatie ook duidelijk.

De presentatie volgens $h(x, t_1)$ is tevens in Fig. 1.1. aangegeven. Nu wordt (op verschillende tijdstippen) het verloop van de waterstand met de plaats aangegeven. Er worden op deze manier de *momentane verhanglijnen* weergegeven.

In Fig. 1.1. is het golfkarakter duidelijk te zien; dit valt bij directe waarneming in de natuur niet meteen te zien. De reden daarvan is, dat een getijgolf een lange golfperiode en dus een grote golflengte heeft.

Dit is als volgt in te zien. De belangrijkste component van de getijbeweging (het zgn. M_2 -getij) heeft als periodieke golf een periode van 12h 25 min ($\cong 44,7$ ks).

Voor een periodieke golf is er een eenvoudige relatie tussen de golflengte (λ), de periode (τ) en de voortplantingssnelheid (c).

Voor de voortplantingssnelheid van een lange golf geldt in eerste benadering

$$c = \sqrt{ga} \tag{1.2}$$

Daardoor is er een direct verband tussen de golflengte en de waterdiepte te schatten met verg. (1.2) en de relatie $\lambda = c\tau$:

$$\lambda = \tau\sqrt{ga} \tag{1.3}$$

Voor enkele waterdiepten is voor het M_2 -getij in Tabel 1.1. een ruwe schatting van de golflengte gegeven, gebruikmakend van verg. (1.3).

Waterdiepte (m)	1	2	5	10	20	50	100
Golflengte (km)	140	198	313	443	626	990	1400

Tabel 1.1. Golflengte passend bij M_2 -getij.

De relatief grote golflengte die bij een getijgolf aanwezig is, maakt het al plausibel dat de momentane stroomlijnen in het verticale vlak niet gekromd zijn, en dat dus de aanname van de hydrostatische drukverdeling verantwoord is. Dit geldt niet meer voor de golven die op zee waarneembaar zijn; daar is sprake van *korte golven*. Voor korte golven ligt de periode in de orde van enige seconden.

Naast de *periodieke* golven die de verschillende componenten van het (astronomische) getij te zien geven, zullen de hier beschouwde golven veelal een *a-periodiek* karakter hebben. De volgende voorbeelden kunnen worden gegeven.

- Bij een stormvloed is er op het (periodieke) astronomische getij door *meteorologische* invloeden een tijdelijke waterstandverhoging of verlaging gesuperponeerd; het resulterende waterstandsverloop heeft dan een a-periodiek karakter.
- Een *hoogwatergolf* op een rivier is duidelijk a-periodiek, omdat de regenval geen periodiek verschijnsel is. Toch kunnen vooral in tropische gebieden de waterstandsvariaties over het jaar wel vrij regelmatig zijn. In Fig. 1.2. is een voorbeeld gegeven, waarbij waterstanden in meters zijn uitgezet tegen de tijd.

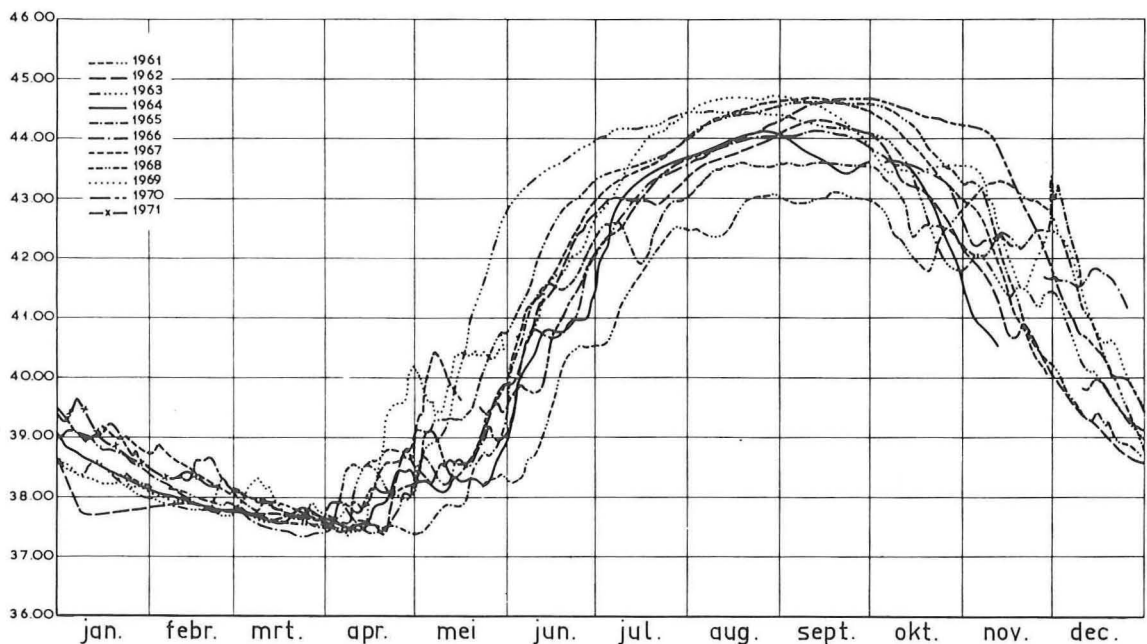


Fig. 1.2. Waterstandsverloop Rio Apure bij San Fernando de Apure (Venezuela).

1.3. Literatuur

Over de in deze handleiding behandelde onderwerpen is veel literatuur beschikbaar. In het boek van Stoker (1957) worden veel grondslagen behandeld. Voor open leidingen kan het boek van Ven te Chow (1959) of Yevjevich (1975) nog worden genoemd. Deelgebieden worden behandeld in Henderson (1966) en Jansen (1978) voorzover het hoogwatergolven in rivieren betreft. Voor getijberekeningen kan verwezen worden naar het boek van Dronkers (1964). Niet-stationaire problemen in gesloten leidingen worden beschouwd in het boek van Streeter en Wylie (1967). Verder kan worden verwezen naar Fox (1977).

2. Basisvergelijkingen

2.1. Inleiding

In de colleges b73A wordt de meeste aandacht besteed aan één-dimensionale lange-golfproblemen in *open* resp. *gesloten* leidingen.

Voortgebouwd wordt op de bredere informatie, die in de basisvakken b8 en b72 wordt behandeld. Slechts enkele delen van de daar behandelde stof worden herhaald en eventueel aangevuld t.b.v. het overzicht en ter illustratie van de samenhang.

In par. 2.2. en par. 2.3. wordt beschreven op welke wijze de continuïteits- en bewegingsvergelijkingen voor lange-golfproblemen kunnen worden afgeleid uit de wet van behoud van massa en de algemene vergelijkingen van Navier-Stokes. Hierbij wordt op enkele plaatsen naar literatuur verwezen teneinde aanknopingspunten te bieden voor een eventuele vervolgstudie betreffende onderwerpen, die buiten het kader van deze handleiding vallen. Niet alle afleidingen zijn hier in detail opgenomen.

Om het geheel overzichtelijk te houden zijn de afleidingen betreffende continuïteitsvergelijkingen resp. bewegingsvergelijkingen in twee paragrafen ondergebracht. Bij het bestuderen van de fysische verschijnselen dient men deze vergelijkingen uiteraard steeds in combinatie te beschouwen.

In par. 2.2. en par. 2.3. worden eerst vergelijkingen afgeleid voor *twee*-dimensionale lange-golfproblemen, waarbij sprake is van een *vrije waterspiegel*.

De belangrijkste vergelijkingen voor *één*-dimensionale lange-golfproblemen, waarbij sprake is van een *vrije waterspiegel* (lange golven in *open leidingen*) zijn verzameld in par. 2.4. In par. 2.5. worden vergelijkingen voor drukgolven in *gesloten* leidingen afgeleid. Daarbij wordt direkt een *één*-dimensionale beschouwing opgezet.

De vergelijkingen in par. 2.4. en par. 2.5. vormen de basis voor de beschouwingen in de hoofdstukken 3,4 en 5.

2.2. Continuïteitsvergelijkingen

2.2.1. Algemeen

Voor het afleiden van continuïteitsvergelijkingen is het uitgangspunt steeds het opzetten van een *massabalans*, b.v. voor een volume-elementje in de stromende vloeistof.

Beschouwt men de massa van een klein blokje (zie Fig. 2.1.)

op een tijdstip t : $\rho \, dx \, dy \, dz$,

en op een tijdstip $t + dt$: $(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt) \, dx \, dy \, dz$,

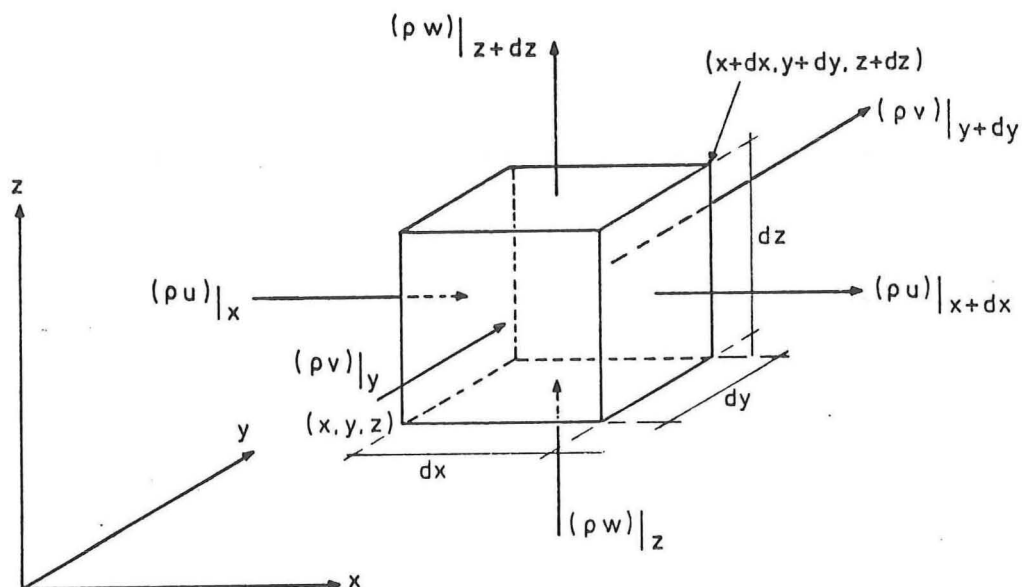


Fig. 2.1 Massabalans

dan is de *toename* van de massa in dt : $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \, dx \, dy \, dz$.

De snelheidscomponenten t.p.v. de zijvlakken zijn resp.

$$u, u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy, w \text{ en } w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Gedurende dt stroomt er de volgende massa resulterend *uit* het blokje:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \, dy \, dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy \, dx \, dz + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz \, dy \, dx \right] dt$$

Dit betekent een massa *afname* groot:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

Het afleiden van de massabalans voor een zich vast in de ruimte bevindend volume-element geeft na delen door $(dx dy dz)dt$ dus de vergelijking:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2-1)$$

of

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (2-1a)$$

Men kan schrijven $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}$ etc.

Als de termen met partiële afgeleiden van ρ bij elkaar worden gezet vindt men de continuïteitsvergelijking in de volgende gedaante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (2-2)$$

De eerste vier termen van verg. (2-2) vormen samen de totale (of meebewegende) afgeleide van ρ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{locale afgeleide}} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w}_{\text{convectieve termen}}$$

De convectieve termen geven de verandering aan, die een gevolg is van het bewegen van de vloeistofdeeltjes.

We kunnen verg. (2-2) ook als volgt schrijven:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\text{div } \vec{u}) = 0 \quad (2-2a)$$

De algemene continuïteitsvergelijking in de gedaante (2-1) of (2-2) geldt in ieder punt van het stromende medium (vloeistof of gas). De dichtheid ρ kan zowel variëren in de tijd als met de plaats.

Voor een homogene vloeistof is de dichtheid ρ constant, dan gaan de verg. (2-1) en (2-2) over in de vergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-3)$$

of

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (2-3a)$$

Bij lange-golf problemen is het in veel gevallen verantwoord om met verg. (2-3) te werken.

Bij de hierna beschouwde problemen is steeds sprake van een turbulente stroming. Door de relatief grote afmetingen en de relatief grote snelheden zal het getal van Reynolds steeds relatief groot zijn.

Voorbeeld getijgolf in benedenrivier:

gem. snelheid in de x-richting	:	$u = 0,5 \text{ ms}^{-1}$
hydraulische straal \approx gem. diepte	:	$R = 8 \text{ m}$
kinematische viscositeit water	:	$\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Getal van Reynolds	:	$Re = \frac{0,5 \times 8}{10^{-6}} = 4 \times 10^6 \gg 400 \text{ à } 800.$

Bij een turbulente stroming kan men de momentane waarde van de snelheid (U) van een waterdeeltje opvatten als een tijdsgemiddelde (u) met daarop gesuperponeerd een turbulente fluctuatie (u').

Vergelijking (2-3a) heeft dan de vorm $\text{div } \vec{U} = 0$.

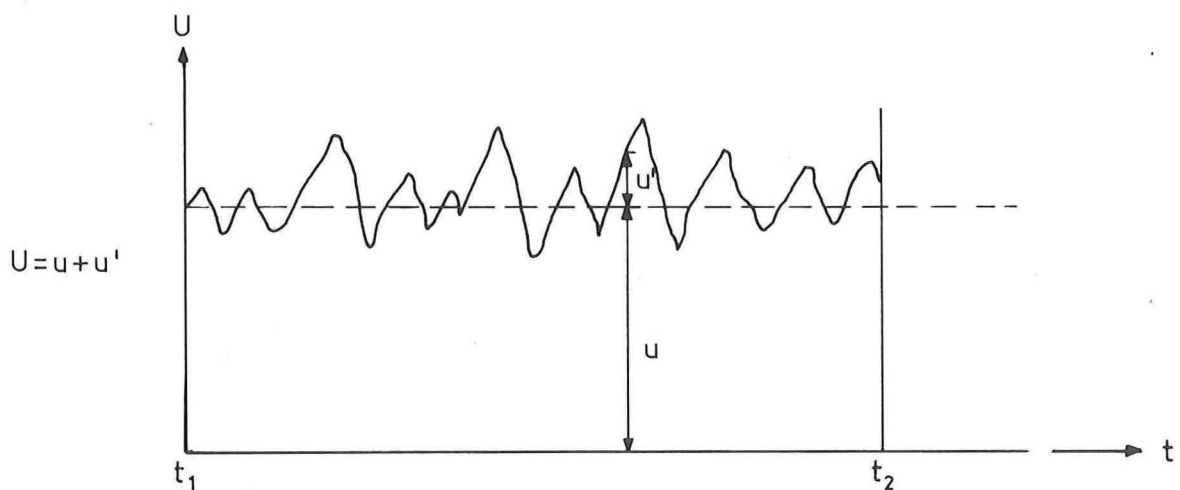


Fig. 2.2. Definitie u .

De gemiddelde snelheid u over een tijdsinterval tussen t_1 en t_2 (b.v. 60 s) wordt nu gedefiniëerd met:

$$\int_{t_1}^{t_2} U dt = \int_{t_1}^{t_2} (u + u') dt = u \times (t_2 - t_1)$$

De integraal, $\int_{t_1}^{t_2} u' dt = \overline{u'} \times (t_2 - t_1)$ is dus per definitie gelijk

aan nul.

Op de verg. (2-3) kan nu de volgende middelingsprocedure worden toegepast, door het substitueren van

$$U = u + u', \quad V = v + v' \quad \text{en} \quad W = w + w'$$

voor de momentane waarden van de snelheidscomponenten in resp. x, y en z richting.

Men vindt dan

$$\frac{\partial}{\partial x} (u + u') + \frac{\partial}{\partial y} (v + v') + \frac{\partial}{\partial z} (w + w') = 0 \quad (2-4)$$

Als wordt gemiddeld (over een bepaald tijdsinterval) dan zijn $\overline{u'}$, $\overline{v'}$ en $\overline{w'}$ per definitie nul, zodat men overhoudt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-5)$$

Opmerkingen:

- (i) In het algemeen is zowel u als $\overline{u'}$ voor niet-stationaire problemen een functie van de tijd. De tijdschaal, waarop de lange-golfverschijnselen zich afspelen, is evenwel zeer groot t.o.v. de tijdschaal behorende bij de turbulente fluctuaties. Het tijdsinterval, waarover de middeling plaatsvindt, kan daarom voldoende groot gekozen worden om te kunnen stellen $\overline{u'} = 0$ en tevens voldoende klein t.o.v. de golflengte.
- (ii) Omdat in de termen van de vergelijking (2-3) uitsluitend één afhankelijk variabele *lineair* voorkomt, vindt men een vergelijking (2-5) van dezelfde gedaante.

Berekeningsmethoden voor het oplossen van drie-dimensionale problemen zijn de laatste jaren sterk in ontwikkeling. Voor omvangrijke problemen vergen deze methoden waarvoor grote computers nodig zijn, zeer hoge kosten. Voor veel praktijkproblemen is een drie-dimensionale berekening niet noodzakelijk. In par. 2.2.2. en par. 2.2.3. wordt beschreven hoe de algemene verg. (2-5) wordt gebruikt voor lange-golf problemen.

2.2.2. Continuïteitsvergelijking voor twee-dimensionale problemen

Zoals reeds in de inleiding is gesteld wordt bij lange-golfproblemen verondersteld dat op ieder tijdstip sprake is van een hydrostatische drukverdeling.

Voor lange-golfproblemen in twee ruimte dimensies kan men b.v. denken aan getijgolven die zich voordoen in een ondiepe zee.

In Fig. 2.3. is een schets van de Noordzee gegeven. De horizontale afmetingen zijn zeer groot t.o.v. de diepte. Het bestuderen van het getij van de Noordzee (waterstanden - snelheden) kan daarom met een twee-dimensionale beschouwing worden uitgevoerd.

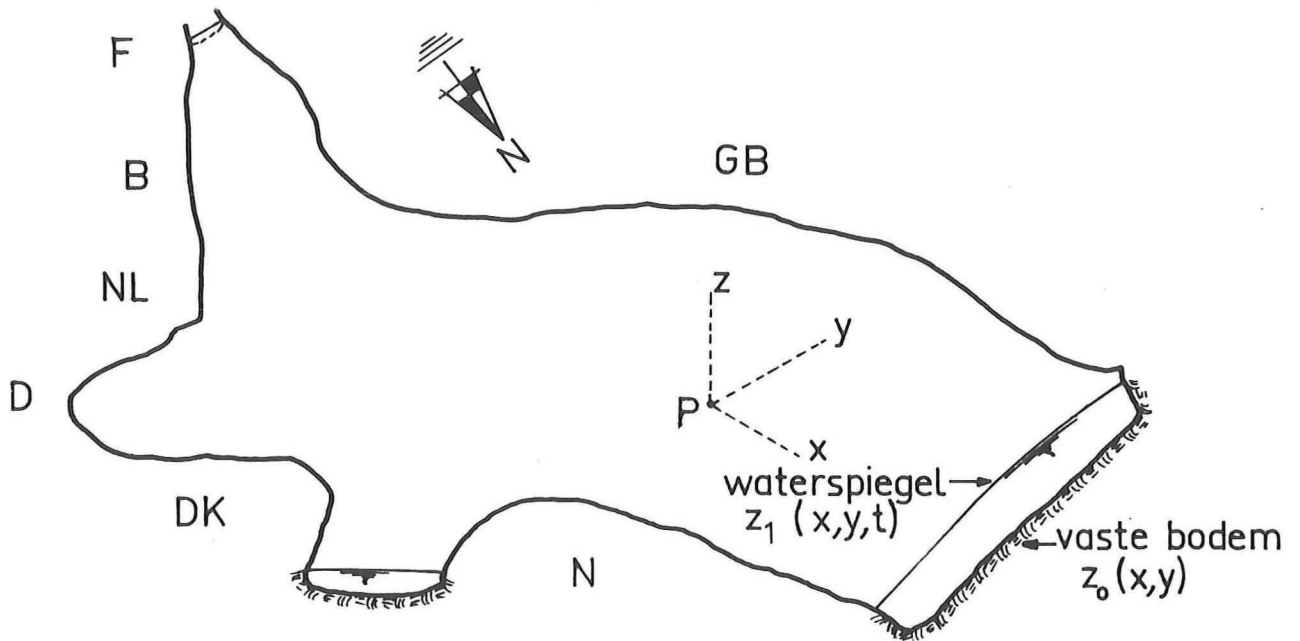


Fig. 2.3. Getijbeweging in de Noordzee (horizontaal sterk samengetrokken)

In de nabijheid van een willekeurig punt $P(x_1, y_1)$ wordt nu een relatief kleine waterkolom beschouwd (zie Fig. 2.4.)

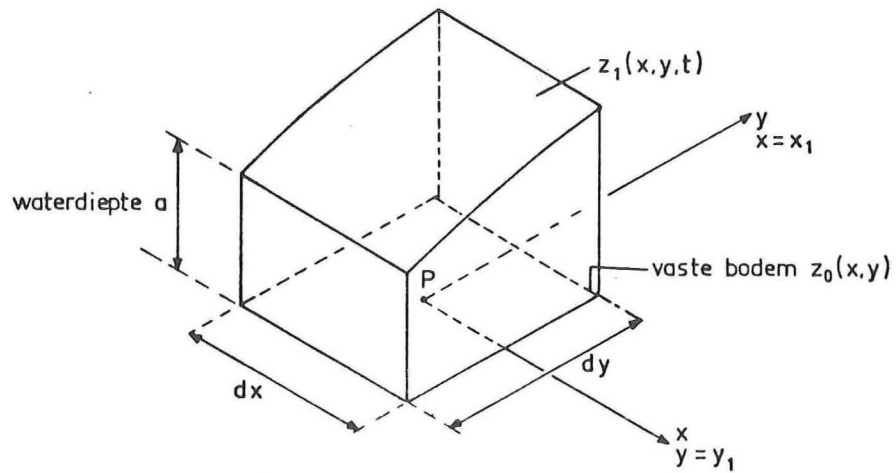


Fig. 2.4. Waterkolom.

De doorsnede met een horizontaal vlak is een rechthoek met zijden dx en dy .

De onderbegrenzing is een vaste bodem $z_0(x,y)$, terwijl de bovenbegrenzing gevormd wordt door de waterspiegel $z_1(x,y,t)$.

Een verticale doorsnede in P evenwijdig met de x -richting resp. de y -richting geeft de volgende figuren:

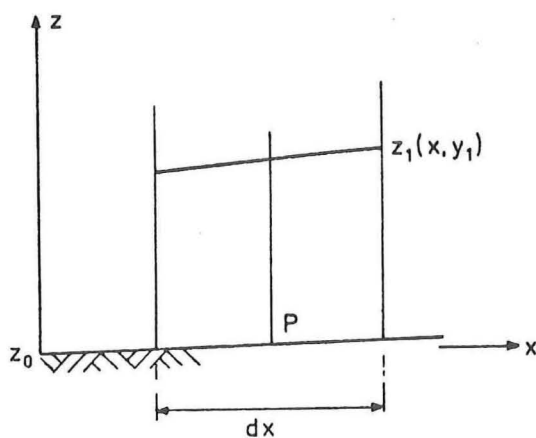


Fig. 2.5. Vertikale doorsnede // x -richting

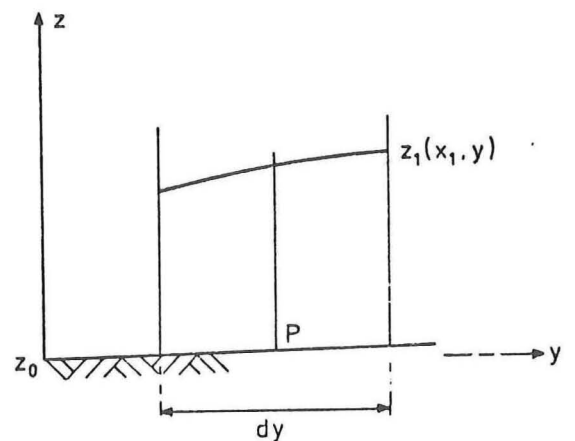


Fig. 2.6. Vertikale doorsnede // y -richting

In ieder punt van de vloeistof geldt de continuïteitsvergelijking (2-5).

Deze vergelijking kan nu naar z worden geïntegreerd tussen de grenzen $z = z_0$ en $z = z_1$.

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

of

$$\underbrace{\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial u}{\partial x} dz}_I + \underbrace{\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial v}{\partial y} dz}_{II} + \underbrace{\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial w}{\partial z} dz}_{III} = 0 \quad (2-6)$$

Opmerking

De functies u, v, w en ook z_1 variëren in de tijd. Ter wille van de overzichtelijkheid is de afhankelijkheid met de tijd hierna *niet* aangegeven en de afhankelijkheid van x, y en z alléén indien een bepaalde waarde van z resp. $z = z_0$ of $z = z_1$ moet worden vermeld.

In de z -richting gelden op de begrenzingsen $z = z_0$ en $z = z_1$ kinematische randvoorwaarden:

- Voor $z = z_0$ geldt dat de snelheidscomponent loodrecht op de vaste ondoorlatende bodem gelijk nul is:

$$u(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x} + v(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} - w(x, y, z_0) = 0 \quad (2-7)$$

- Voor $z = z_1$ geldt dat een deeltje op de waterspiegel in het vlak van de waterspiegel blijft, d.w.z. dat de "meebewegende afgeleide" gelijk nul is:

$$\frac{\partial z_1(x, y)}{\partial t} + u(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} + v(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} - w(x, y, z_1) = 0 \quad (2-8)$$

Eerst worden nu de termen I en II uit verg. (2-6) nader beschouwd. Men mag de volgorde van differentiëren en integreren omkeren echter dan moet men er rekening mee houden dat de integratiegrenzen zelf afhankelijk zijn van x en y : $z_0(x, y)$ en $z_1(x, y)$.

In het algemeen geldt voor een functie $f = f(x, z)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz = \int_a^b \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} dz + f(x, b) \frac{db}{dx} - f(x, a) \frac{da}{dx} \quad (2-9)$$

De juistheid van verg. (2-9) kan worden aangetoond door de definitie van de differentiaalrekening consequent toe te passen.

De termen I en II kunnen nu als volgt worden vervangen:

$$\text{term I} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} u dz - u(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} + u(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x} \quad (2-10)$$

$$\text{term II} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^{z_1} v dz - v(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} + v(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} \quad (2-11)$$

Uitwerken van de term III geeft:

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(x, y, z_1) - w(x, y, z_0) \quad (2-12)$$

Verg. (2-6) gaat met verg. (2-10, 2-11) en (2-12) over in

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^{z_1} v dz - \left[u(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} + v(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} - w(x, y, z_1) \right] \quad (a) \text{-----}$$

$$+ \left[u(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x} + v(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} - w(x, y, z_0) \right] = 0 \quad (2-13)$$

----- (b) -----

De termen tussen de grote haken, die met resp. (a) en (b) zijn aangegeven komen voor in resp. de randvoorwaarden (2-8) en (2-7).

Substitueren we deze kinematische voorwaarden in verg. (2-13) dan resulteert dat in de volgende vergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^{z_1} v dz + \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial t} = 0 \quad (2-14)$$

In de verticale richting worden tussen $z = z_0$ en $z = z_1$ gemiddelde snelheidscomponenten u en v gedefiniëerd met:

$$\bar{u} = \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} u \, dz \quad \text{en} \quad \bar{v} = \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} v \, dz$$

Als wordt gesteld $z_1 - z_0 = a$ gaat verg. (2-14) over in

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}a) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}a) + \frac{\partial z_1}{\partial t} = 0 \quad (2-15)$$

Verg. (2-15) kan ook eenvoudig direkt worden afgeleid door een massabalans op te zetten voor de kolom van Fig. 2.4 en daarbij rechtstreeks met de in de vertikaal gemiddelde snelheidscomponenten \bar{u} en \bar{v} te werken. Dat dit hetzelfde resultaat oplevert vindt zijn oorzaak in het feit, dat de continuïteitsvergelijking *lineair* is in de snelheid. Zoals later bij de bewegingsvergelijking zal blijken krijgt men bij het middelen van termen waarin b.v. u^2 of uv voorkomt te maken met distributiecoëfficiënten α .

2.2.3. Continuïteitsvergelijkingen voor één-dimensionale problemen

In de natuur doet zich een groot aantal verschijnselen voor, waarbij het verantwoord is zo sterk te schematiseren dat een één-dimensionaal probleem overblijft. De overheersende coördinaat wordt dan de x-richting genoemd en deze wordt gekozen in de richting van de *as* van de beschouwde leiding.

Voorbeelden zijn de voortplanting van getijgolven of van hoogwatergolven in rivieren.

Beschouwd wordt een dwarsprofiel dat is verkregen door loodrecht op de *as* van een rivier (de x-richting) de bodemligging te meten t.o.v. een referentie-vlak.

Meestal wordt een dergelijk dwarsprofiel sterk samengetrokken getekend, waardoor misverstanden kunnen ontstaan.

Indien men *slechts* samentrekt met een faktor 20 dan ontstaat reeds een minder getrouw beeld.

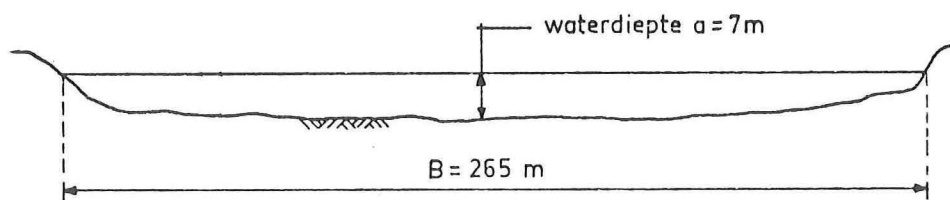


Fig. 2.7. Dwarsprofiel open leiding

Uit een dergelijk dwarsprofiel, waarvan de afmetingen in de y-richting *zeer geleidelijk veranderen*, wordt nu een strook van 1 m (gemeten in de y-richting) beschouwd.

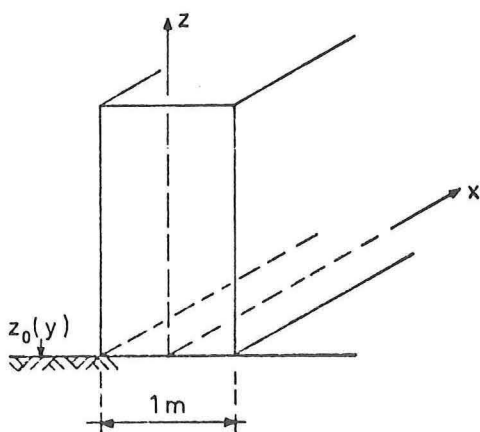


Fig. 2.8. Strook van 1 m
in de y-richting

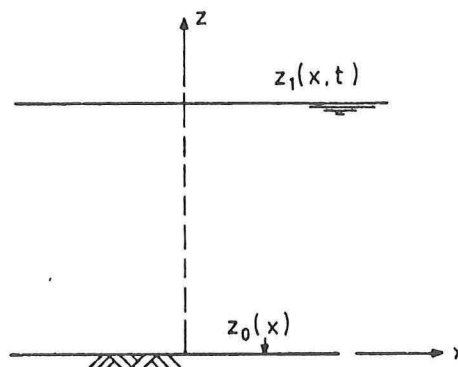


Fig. 2.9 Doorsnede in de
x-richting

Verondersteld mag worden dat over de beschouwde strook van het zeer geleidelijk verlopende dwarsprofiel alleen stroming in de x-richting (// as van de leiding) plaats vindt.

Dus in de continuïteitsvergelijking (2-5) kan worden gesubstitueerd:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{zodat resteert:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Deze vergelijking wordt geïntegreerd in de z-richting van $z = z_0(x) = z_0$ tot $z = z_1(x, t) = z_1$

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (2-16)$$

(I) (II)

Door het omkeren van de volgorde van differentiëren en integreren, waarbij er rekening mee dient te worden gehouden, dat de integratie-grenzen van x afhankelijk zijn, kan men de term (I) vervangen

$$(I) = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} u dz - u(x, z_1) \frac{\partial z_1(x)}{\partial x} + u(x, z_0) \frac{\partial z_0(x)}{\partial x} \quad (2-17)$$

(a) (b) (c)

Indien men de definitie van differentiaalrekening toepast op de term (a) dan blijkt dat

$$(a) = (I) + (b) - (c)$$

waarmee verg. (2-17) kan worden aangetoond.

De term (a) = $\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} u dz$ kan worden vervangen door in de vertikaal

tussen $z = z_0$ en $z = z_1$ een gemiddelde snelheid \bar{u} te definiëren als:

$$\bar{u} = \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} u dz$$

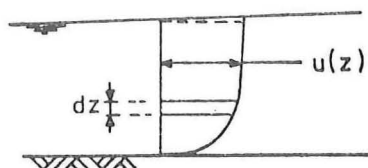


Fig. 2.10 Verloop $u(z)$

Dan is dus als de waterdiepte $(z_1 - z_0) = a$ wordt genoemd

$$\begin{aligned} \text{term (a)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(z_1 - z_0) \bar{u} \right] = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}a) = \frac{\partial q}{\partial x} \\ \text{term (II)} &= \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(x, z_1) - w(x, z_0) \end{aligned} \quad (2-18)$$

We vinden voor verg. (2-16) dus

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}a) + u(x, z_0) \frac{\partial z_0(x)}{\partial x} - w(x, z_0) - u(x, z_1) \frac{\partial z_1(x)}{\partial x} + w(x, z_1) = 0 \quad (2-19)$$

Voor $z = z_0$ en $z = z_1$ kunnen de kinematische voorwaarden, die op die grenzen gelden, worden verdisconteerd.

- $z = z_0$, vaste bodem, de snelheidscomponent \perp bodem is nul,

$$\text{dit geeft} \quad u(x, z_0) \frac{\partial z_0(x)}{\partial x} - w(x, z_0) = 0 \quad (2-20)$$

- $z = z_1$, waterspiegel, deeltje blijft aan oppervlak d.w.z. de meebewegende afgeleide is gelijk aan nul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1(x)}{\partial t} + u(x, z_1) \frac{\partial z_1(x)}{\partial x} - w(x, z_1) &= 0 \\ \text{dus} \quad u(x, z_1) \frac{\partial z_1(x)}{\partial x} - w(x, z_1) &= - \frac{\partial z_1(x)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2-21)$$

Met de kinematische voorwaarden (2-20) en (2-21) gaat verg. (2-19) over in

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}a) + \frac{\partial z_1}{\partial t} = 0 \quad (2-22)$$

of

$$\frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\partial z_1}{\partial t} \quad (2-23)$$

Verg. (2-23) is afgeleid voor een moot met een breedte van 1 m in de y-richting (d.w.z. loodrecht op de as van de leiding). Indien een rechthoekig dwarsprofiel wordt beschouwd met een breedte $y_2 - y_1 = B$ (zie Fig. 2.11) dan kan men verg. (2-23) eenvoudig in de y-richting integreren.

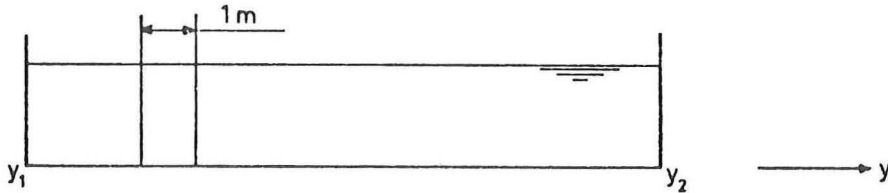


Fig. 2.11 Bakprofiel

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial q}{\partial x} dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial z_1}{\partial t} dy \quad (2-24)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial q}{\partial x} dy = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2-25)$$

hierin is Q het totale debiet in x-richting.

Bij een lange golf in een open leiding kan men stellen dat

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} = \text{constant in de y-richting.}$$

Het uitwerken van verg. (2-24) geeft dus met $y_2 - y_1 = B$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - B \frac{\partial a}{\partial t} \quad (2-26)$$

Deze eenvoudige vergelijking is van groot belang voor het inzicht in bepaalde lange golfverschijnselen. Daarom wordt nu eerst enige aandacht besteed aan het interpreteren ervan.

Uit verg. (2-26) blijkt dat de verandering van het debiet in de x-richting gelijk is aan de zgn. bergende breedte maal de verandering van de waterspiegel per tijdseenheid.

Een en ander wordt nog duidelijker als verg. (2-24) direkt wordt afgeleid. Beschouwd wordt daartoe een gedeelte van een open leiding met een lengte dx in de x-richting en een dwarsprofiel dat in de y-richting geleidelijk verloopt (samengetrokken schaal).

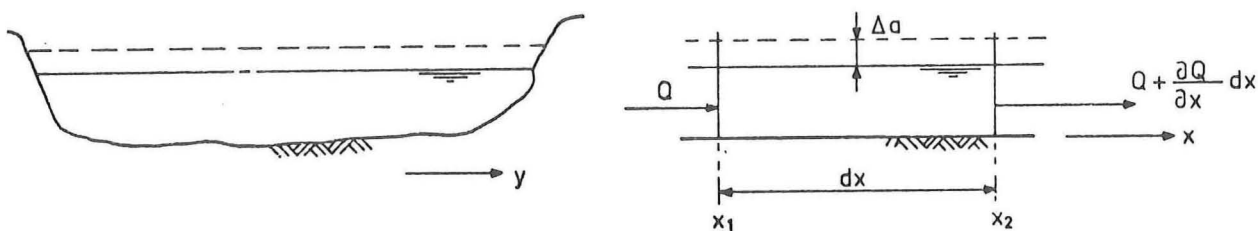


Fig. 2.12 Afleiding verg. (2-26)

Beschouwd wordt een ruimtelijk vast volume tussen de raaien $x = x_1$ en $x = x_2 = x_1 + dx$.

Over een tijdsinterval dt stroomt door het dwarsprofiel bij x_1 in de hoeveelheid $Q dt$, terwijl door het dwarsprofiel bij x_2 uitstroomt de hoeveelheid $(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx)dt$.

In het beschouwde ruimtelijke volume wordt water geborgen als gevolg van het variëren van de waterspiegel:

$$B dx \Delta a = B dx \frac{\partial a}{\partial t} dt$$

Opstellen van de balans: *in - uit = geborgen* levert:

$$- \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt = B \frac{\partial a}{\partial t} dt dx \quad (2-27)$$

waaruit direkt volgt:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - B \frac{\partial a}{\partial t} \quad (2-28)$$

Bij lange-golf problemen met een vrije waterspiegel is het dwarsprofiel uiteraard meestal niet rechthoekig.

Een belangrijk aspekt daarbij is dat in veel gevallen een onderscheid dient te worden gemaakt tussen

- het gedeelte van het dwarsprofiel dat *stroomvoerend* is en
- het gehele dwarsproefiel.

Als voorbeeld wordt een sterk geschematiseerde voorstelling van het dwarsprofiel van een *rivier met kribben* beschouwd.

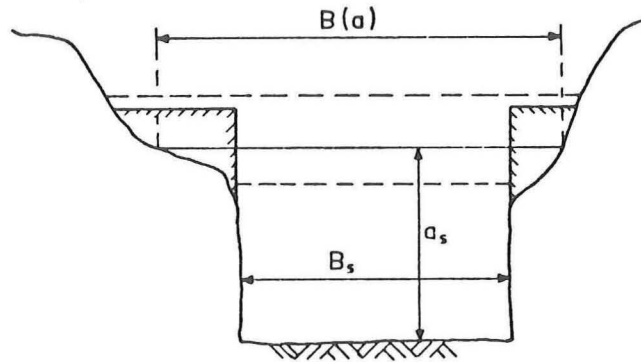


Fig. 2.13 Rivier met kribben (geschematiseerd, sterk samengetrokken)

Gedefiniëerd worden:

- de stroomvoerende breedte B_s
- de bergende breedte $B = B(a)$
- de oppervlakte van het stroomvoerende dwarsprofiel $A_s = a_s B_s$.

Aansluitend bij het voorgaande wordt opgemerkt dat voor de *berging* de momentane waarde van de bergende breedte van belang is. Men kan voor een gedeelte van een dergelijke rivier met een lengte dx gemeten in de richting van de geul-as een continuïteitsbeschouwing opzetten.

Het resultaat daarvan is de vergelijking:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - B \frac{\partial a}{\partial t} \quad (2-28)$$

Als men rekening houdt met $Q = B_s a_s u$ dan volgt uit verg. (2-28) ook

$$B_s \left\{ a_s \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial a_s}{\partial x} \right\} = - B \frac{\partial a}{\partial t} \quad (2-29)$$

Opmerkingen:

- (i) Bij het differentiëren naar x is er stilzwijgend van uitgegaan dat B_s constant is in de x -richting.

Zoals elders nog uitvoeriger ter sprake komt, rekent men in de praktijk over vakken met een beperkte lengte Δx .

Een rivier wordt dan b.v. zodanig in vakken verdeeld dat het verantwoord is om per vak met één representatief dwarsprofiel te werken.

In dat geval bestaan er tegen verg. (2-29) geen bezwaren, doch in andere gevallen kan men, indien het verloop van het stroomvoerend profiel in de x -richting exakt bekend is, met dit

verloop rekening houden bij het uitwerken van $\partial Q/\partial x$.

- (ii) Bij het werken met verg. (2-28) wordt ervan uitgegaan dat de waterspiegel over het dwarsprofiel van de leiding constant is (of wel dat men voor $\partial a/\partial t$ de gemiddelde waarde in rekening brengt). Bij veel problemen is dit voldoende nauwkeurig, al zijn er natuurlijk uitzonderingen (b.v. zeer brede rivieren met ondergelopen uiterwaarden e.d.) waar een andere aanpak gewenst is.

Men kan een onderscheid maken tussen de berging *in* het stroomvoerend dwarsprofiel $B_s \partial a/\partial t$ en de berging daarbuiten. Men spreekt dan wat het laatste betreft wel van de zijdelingse berging, die apart in rekening kan worden gebracht.

In het bovenstaande geval kan men bij een constante $\partial a/\partial t$ de zijdelingse berging uitdrukken als $(B - B_s) \partial a/\partial t$.

2.3. Bewegingsvergelijkingen

2.3.1. Navier-Stokes - vergelijkingen en Euler - vergelijkingen

Evenals bij de continuïteitsvergelijkingen kan men bij het opstellen van bewegingsvergelijkingen uitgaan van drie-dimensionale vergelijkingen voor een volume-elementje in een stromende vloeistof.

De Navier-Stokes - vergelijkingen, die zijn afgeleid door het opstellen van een impulsbalans voor een klein vloeistof-blokje luiden voor x, y resp. z richting:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] &= 0 \quad (2-30) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + g &= 0 \end{aligned}$$

In deze vergelijkingen is de invloed van de wrijving in de vloeistof verdisconteerd, waarbij verbanden tussen spanningen en vervormingen in de vloeistof in rekening worden gebracht (zie b.v. Rouse, 1938).

In de verg. (2-30) is met het turbulente karakter nog geen rekening gehouden. Voor een turbulente stroming moeten de *momentane* snelheden (U, V en W) en de *momentane* druk P worden genomen. Dit geeft:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(U^2)}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial(V^2)}{\partial y} + \frac{\partial(VW)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \nu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] &= 0 \quad (2-31) \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(UW)}{\partial x} + \frac{\partial(VW)}{\partial y} + \frac{\partial(W^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \nu \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] + g &= 0 \end{aligned}$$

De tijdschaal, waarop de turbulente fluctuaties (zie Fig. 2.2.) zich afspelen, is *zeer* klein ten opzichte van de tijdschaal, waarop de hier beschouwde lange-golfverschijnselen zich manifesteren. Beschouwd wordt nu een tijdsinterval (van b.v. één minuut) dat relatief groot is voor de turbulente fluctuaties doch relatief klein is t.o.v. een voor het lange-golfverschijnsel karakteristieke tijdsduur (b.v. een getijperiode).

De verg. (2-31) kan over dat tijdsinterval worden gemiddeld, zodanig dat

- $\overline{U(t)} = u(t)$ dus $\overline{u'} = 0$; de turbulente fluctuaties zijn uitgemiddeld, de gemiddelde snelheid u variëert nog wel in de tijd.

Deze middelingsprocedure kan voor elk van de termen van de verg. (2-31) worden uitgevoerd. Enkele voorbeelden:

- $\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u + u'}) = \frac{\partial}{\partial t} (u) + \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'}) = \frac{\partial u}{\partial t}$
- $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{p + p'}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, want $\overline{p'} = 0$
- $\nu \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + u') = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, want $\overline{u'} = 0$
- $\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{U^2}) = \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + 2 \overline{u u'} + \overline{u' u'}) = \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + \overline{u' u'})$,
want $\overline{u u'} = u \overline{u'} = 0$

We zien aan dit laatste voorbeeld dat, omdat de snelheid U in het kwadraat voorkomt, het middelen in de tijd behalve $\partial u^2 / \partial x$ een extra term $\partial \overline{(u')^2} / \partial x$ oplevert.

Als in een term slechts één afhankelijke variabele *lineair* voorkomt, levert het middelen geen extra term op.

De voorbeelden tonen aan, dat de vergelijkingen, die door de middelingsprocedure volgen uit de verg. (2-31), zullen verschillen van de verg. (2-30).

Men vindt als voorbeeld voor de vergelijking in de x-richting de volgende in de tijd gemiddelde vergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (2-32)$$

In deze vergelijking komen extra termen voor, die ontstaan zijn uit de middelingsprocedure voor de convectieve termen.

Door de zgn. Reynoldse schuifspanningen te definiëren:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\tau}_{xx} &= -\rho \overline{u'u'} \\ \overline{\tau}_{xy} &= -\rho \overline{u'v'} \\ \overline{\tau}_{xz} &= -\rho \overline{u'w'} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

kan voor verg. (2-32) worden geschreven:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{\tau}_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{\tau}_{xz})}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (2-34)$$

Bij de hier behandelde problemen zijn de viskeuze schuifspanningen verwaarloosbaar t.o.v. de turbulente schuifspanningen.

Als gevolg daarvan kunnen de termen met

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots \text{ etc. } \dots$$

uit bovenstaande vergelijkingen worden verwaarloosd.

De bewegingsvergelijking in de x-richting wordt dan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{\tau}_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{\tau}_{xz})}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2-35)$$

In deze paragraaf gaat het verder om bewegingsvergelijkingen voor lange-golf problemen in rivieren, estuaria en zeegebieden. Zoals hierna nog nader wordt beschreven is daarbij een essentiële vereenvoudiging dat in de z-richting een hydrostatische drukverdeling wordt verondersteld. We hebben dan te maken met wat wel genoemd wordt een *vlakke* stroming in x- en y-richting.

Men kan voor de tweede vergelijking in de y-richting van het stelsel (2-31) een beschouwing houden, die overeenkomt met de beschouwing voor de eerste vergelijking in de x-richting.

Het resultaat daarvan kan met (2-35) worden vergeleken:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{\tau}_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{\tau}_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{\tau}_{yz})}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2-36)$$

Opmerking.

De streepjes die een middeling over de tijd aangeven worden verder weggelaten.

Lange-golf benadering:

In de derde vergelijking van het stelsel (2-31) worden behalve de termen als gevolg van de viskeuze schuifspanningen ook alle versnellingstermen verwaarloosd ten opzichte van de versnelling t.g.v. het zwaartekrachtsveld g.

Het resultaat is dat deze vergelijking wordt gereduceerd tot de volgende in de tijd gemiddelde vergelijking.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho g \quad (2-37)$$

De vergelijking kan direkt worden geïntegreerd in de z-richting hetgeen de volgende uitdrukking oplevert:

$$p(z_1) - p(z) = - \rho g(z_1 - z) \quad (2-38)$$

Indien men voor de druk aan de vrije waterspiegel stelt $p(z_1) = 0$ dan volgt

$$p(z) = \rho g(z_1 - z) \quad (2-39)$$

Uit verg. (2-39) volgt dat de druk van $z = z_1$ af lineair toeneemt van 0 tot $\rho g z$ d.w.z. de *drukverdeling in de z-richting is hydrostatisch*.

Het feit dat we hier uitsluitend geïnteresseerd zijn in een vlakke stroming in x- en y-richting maakt het verantwoord om de vergelijkingen (2-34) en (2-35) nog verder te vereenvoudigen.

De verticale gradiënten van de Reynoldse schuifspanningen zijn veel groter dan de horizontale gradiënten:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad \text{en} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad \text{worden verwaarloosd t.o.v.} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad \text{resp.}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \quad \text{en} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad \text{worden verwaarloosd t.o.v.} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} .$$

Tenslotte kan in de vergelijking in de x-richting de term $\frac{\partial(uw)}{\partial z}$ en in de vergelijking in de y-richting de term $\frac{\partial(vw)}{\partial z}$ worden verwaarloosd, omdat de snelheidscomponent w verwaarloosbaar klein is.

Uit (2-39) volgt dat de druk in een bepaald punt van de vloeistof afhankelijk is van de verticale afstand tot de waterspiegel ($z_1 - z$). In de vergelijkingen (2-34) en (2-35) kan worden gesubstitueerd:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

en

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial z_1}{\partial y}$$

$\left. \begin{array}{l} \phantom{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial z_1}{\partial x}} \\ \phantom{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial z_1}{\partial y}} \end{array} \right\} (2-40)$

Resumerend gelden dus uitgaande van het stelsel (2-30) voor de hier beschouwde lange-golfproblemen de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= a'_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= a'_y \\ p &= \rho g(z_1 - z) \end{aligned} \right\} (2-41)$$

Hierin zijn met a'_x en a'_y alle (eventueel) werkzame *uitwendige* versnel-
lingen aangegeven.

In de literatuur wordt i.p.v. het stelsel (2-30) ook vaak uitgegaan van
de drie vergelijkingen in de volgende gedaante:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - v \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - v \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] &= -g \end{aligned} \right\} (2-42)$$

Als de dichtheid van de vloeistof constant wordt verondersteld geldt
(zie par. 2.2.1. verg. (2-3)):

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

In dat geval kan het stelsel (2-42) worden afgeleid van het stelsel
(2-30) door van de laatstgenoemde vergelijkingen resp. af te trekken:

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \text{ van de vergelijking in de x-richting}$$

$$v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \text{ van de vergelijking in de y-richting}$$

$$w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \text{ van de vergelijking in de z-richting.}$$

De beschouwingen over verg. (2-30) kunnen ook voor het stelsel (2-42)
worden gehouden.

Dit geeft - in plaats van (2-41) - het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= a'_x \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= a'_y \\
 p &= \rho g(z_1 - z)
 \end{aligned} \right\} (2-43)$$

Ook hierin zijn met a'_x en a'_y alle (eventueel) werkzame *uitwendige* versnellingen aangegeven.

2.3.2. Bewegingsvergelijkingen voor twee dimensies

In deze paragraaf worden uitgaande van de vergelijkingen (2-41) vergelijkingen afgeleid, waarin de over de vertikaal gemiddelde snelheidscomponenten \bar{u} en \bar{v} voorkomen.

De gemiddelde snelheidscomponenten worden gedefiniëerd door:

$$\bar{u} = \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} u \, dz \quad \text{en} \quad \bar{v} = \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} v \, dz \quad (2-44)$$

De beschouwingen worden hierna weer opgezet voor de vergelijking in de x-richting, waarna de op overeenkomstige wijze verkregen termen voor de vergelijking in de y-richting direkt worden gegeven.

De uitwendige versnellingen a'_x en a'_y worden nul verondersteld.

Beschouwd wordt dus de eerste vergelijking van het stelsel (2-41):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2-45)$$

De verg. (2-45) wordt nu geïntegreerd in de z-richting tussen de grenzen $z = z_0$ en $z = z_1$:

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (2-46)$$

(1) (2) (3) (4) (5)

Nu worden eerst de termen (1), (2) en (3) nader beschouwd.

Met gebruikmaken van de algemene uitdrukking voor verg. (2-9) kan achtereenvolgens worden geschreven:

● term (1):

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_1} u dz - u(x,y,z_1) \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial t} + u(x,y,z_0) \frac{\partial z_0(x,y)}{\partial t} \quad (2-47)$$

Bij een vaste bodem is $\partial z_0 / \partial t = 0$, terwijl met de definities (2-44) de uitdrukking (2-47) dan overgaat in:

$$(z_1 - z_0) \overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} [(z_1 - z_0) \bar{u}] - u(x,y,z_1) \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial t} \quad (2-48)$$

Als korthedshalve wordt gesteld $(z_1 - z_0) = a$ kan voor (2-48) worden geschreven:

$$a \overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} (a \bar{u}) - u(x,y,z_1) \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial t} \quad (2-49)$$

● term (2):

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} u^2 dz - u^2(x,y,z_1) \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} + \\ &+ u^2(x,y,z_0) \frac{\partial z_0(x,y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2-50)$$

Of met de definities als (2-44):

$$\begin{aligned} (z_1 - z_0) \overline{\frac{\partial(u^2)}{\partial x}} &= \frac{\partial}{\partial x} (z_1 - z_0) \bar{u^2} - u^2(x,y,z_1) \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} + \\ &+ u^2(x,y,z_0) \frac{\partial z_0(x,y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2-51)$$

Of met $(z_1 - z_0) = a$.

$$a \overline{\frac{\partial(u^2)}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} (a \bar{u^2}) - u^2(x,y,z_1) \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} + u^2(x,y,z_0) \frac{\partial z_0(x,y)}{\partial x} \quad (2-52)$$

● term (3):

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial(uv)}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^{z_1} uv dz - u(x,y,z_1)v(x,y,z_1) \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial y} + \\ &+ u(x,y,z_0)v(x,y,z_0) \frac{\partial z_0(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-53)$$

Of met de definities als (2-44):

$$\begin{aligned} (z_1 - z_0) \frac{\partial(\overline{uv})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(z_1 - z_0) \overline{(uv)} \right] - u(x, y, z_1) v(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} + \\ &+ u(x, y, z_0) v(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-54)$$

Of met $(z_1 - z_0) = a$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial(\overline{uv})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[a \overline{(uv)} \right] - u(x, y, z_1) v(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} + \\ &+ u(x, y, z_0) v(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-55)$$

Opmerking

- De vergn. (2-49), (2-52) en (2-55) geven de verschillen aan tussen de *gemiddelde waarden* van de afgeleiden van de functies in de vertikaal en
- de afgeleiden van de gemiddelde waarden van de functies in de vertikaal.

De resultaten voor de termen (1), (2) en (3) van verg. (2-46) worden nu eerst samengenomen, waarbij de termen van (2-49), (2-52) en (2-55) worden gegroepeerd als volgt:

$$\begin{aligned} a \left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{(u^2)}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(uv)}}{\partial y} \right] &= \frac{\partial(a\overline{u})}{\partial t} + \frac{\partial a \overline{(u^2)}}{\partial x} + \frac{\partial a \overline{(uv)}}{\partial y} + \\ &- u(x, y, z_1) \left[\frac{\partial z_1(x, y)}{\partial t} + u(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} + v(x, y, z_1) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} \right] + \\ &+ u(x, y, z_0) \left[u(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x} + v(x, y, z_0) \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2-56)$$

Opmerkingen

(i) Door de *lange-golfbenadering* is de term $\partial(uw)/\partial z$ uit de bewegingsvergelijking in de x-richting geschrapt.

Doen we dat niet, dan zou deze term bij het integreren in de z-richting opleveren:

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz = u(x, y, z_1) w(x, y, z_1) - u(x, y, z_0) w(x, y, z_0)$$

In verg. (2-56) zou dan aan de termen tussen de grote haken moeten worden toegevoegd:

$$- w(x, y, z_1) \text{ resp. } - w(x, y, z_0).$$

(ii) De verg. (2-56) kan aanzienlijk worden vereenvoudigd door rekening te houden met de *kinematische randvoorwaarden*, die op de begrenzingsen $z = z_0$ en $z = z_1$ gelden (zie verg. (2-7) en (2-8)).

Uit deze beide opmerkingen volgt dat verg. (2-56) het volgende resultaat oplevert:

$$a \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{(u^2)}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(uv)}}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (a \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \{a \overline{(u^2)}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{a \overline{(uv)}\} \quad (2-57)$$

Het (over de vertikaal) gemiddelde \overline{uv} is in het algemeen niet gelijk aan het produkt van de gemiddelde waarden $\bar{u} \cdot \bar{v}$.

Men kan nu stellen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{a \overline{(u^2)}\} &= \frac{\partial}{\partial x} \{ \alpha_1 a \bar{u}^2 \} \\ \frac{\partial}{\partial y} \{a \overline{(uv)}\} &= \frac{\partial}{\partial y} \{ \alpha_2 a \bar{u} \bar{v} \} \end{aligned} \right\} (2-58)$$

Daarbij is b.v.

$$\alpha_2 = \frac{1}{a \bar{u} \bar{v}} \int_{z_0}^{z_1} (uv) dz \quad (2-59)$$

De waarden voor de distributie-coëfficiënten α zijn afhankelijk van het verloop van het snelheidsprofiel. In veel gevallen blijken deze waarden slechts enkele procenten van de eenheid af te wijken.

Meestal wordt de waarde $\alpha = 1$ aangehouden, waardoor de coëfficiënten (zoals hierna ook het geval zal zijn) uit de vergelijkingen verdwijnen.

Het resultaat van het integreren van de termen (1), (2) en (3) uit verg. (2-46) wordt:

$$(1) + (2) + (3) = \frac{\partial}{\partial t} (a \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (a \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (a \bar{u} \bar{v}) \quad (2-60)$$

De te integreren functies $a \bar{u}$, $a \bar{u}^2$ en $a \bar{u} \bar{v}$ kan men opvatten als resp.

$$\bar{u} \times a, \bar{u} \times (a \bar{u}) \text{ en } \bar{u} \times (a \bar{v})$$

Als de termen van (2-60) dan worden uitgewerkt, volgt na groeperen:

$$\bar{u} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial(a \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(a \bar{v})}{\partial y} \right] + a \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + a \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + a \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2-61)$$

De termen tussen de twee grote haken kunnen worden vergeleken met de termen in de continuïteitsvergelijking (2-15):

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial(a \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(a \bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (2-62)$$

Omdat $\frac{\partial z_0}{\partial t} = 0$ is $\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial z_1}{\partial t}$.

Van de term (2-61) resteren er dus drie termen zodat het resultaat in plaats van door (2-60) ook kan worden weergegeven als:

$$(1) + (2) + (3) = a \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (2-63)$$

Opm. (i) In de literatuur wordt in bepaalde gevallen met (2-60) en in andere gevallen met (2-63) gewerkt.

(ii) Men zou voor het afleiden van de termen (2-63) ook in een eerder stadium kunnen uitgaan van een andere gedaante van de convectieve termen. Dit is analoog aan het verschil in de uitwerkingen van de stelsels (2-30) en (2-42).

Vervolgens worden de overige termen van verg. (2-46) beschouwd.

De term (4) uit verg. (2-46) is ontstaan uit de term $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ door een hydrostatische drukverdeling in de z-richting te veronderstellen.

Bij het integreren in de z-richting kan de term (4) als constante worden behandeld, zodat we vinden:

● term (4):

$$\int_{z_0}^{z_1} g \frac{\partial z_1}{\partial x} dz = g \frac{\partial z_1}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} dz = (z_1 - z_0) g \frac{\partial z_1}{\partial x} \quad (2-64)$$

De term (5) uit verg. (2-46) geïntegreerd van $z = z_0$ tot $z = z_1$ levert

● term (5):

$$- \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = - \frac{1}{\rho} \left[\tau_{xz}(z_1) - \tau_{xz}(z_0) \right] \quad (2-65)$$

Voor $z = z_0$ is een schuifspanning aanwezig door de wrijvingsweerstand, die het stromende water langs de bodem ondervindt.

Voor $z = z_1$ kan in het algemeen een schuifspanning aanwezig zijn als gevolg van wind.

Wrijvingsweerstand:

Met experimenten is door vele onderzoekers aangetoond, dat bij een turbulente stroming de schuifspanning langs de wanden van een leiding evenredig is met het kwadraat van de gemiddelde snelheid in de leiding. Voor uitvoerige beschouwingen over de wrijvingsweerstand bij een stationaire en uniforme stroming kan hier worden verwezen naar de collegehandleiding b72.

Bij een niet-stationaire stroming, waar men bij lange-golfverschijnselen mee wordt geconfronteerd, gaat men van dezelfde kwadratische weerstand uit.

In het hierbeschouwde geval van een lange-golfprobleem in twee dimensies x en y wordt gewerkt met de volgende relatie:

$$\tau_{xz}(z_0) = \frac{\rho g \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{c^2} \tag{2-66}$$

$$\tau_{yz}(z_0) = \frac{\rho g \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{c^2} \tag{2-67}$$

De gedaante van (2-66) en (2-67) wordt duidelijk met Fig. 2.14.

In een bepaald coördinatenstelsel x, y is een bepaalde snelheidsvector ontbonden in de componenten u en v in resp. de x - en y -richting.

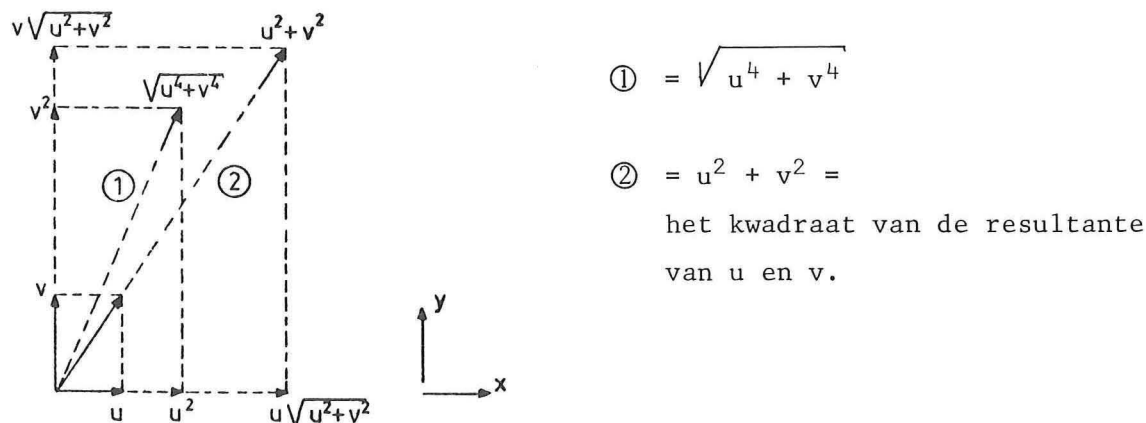


Fig. 2.14 Resultante van u^2 en v^2 ongelijk aan $u^2 + v^2$.

- Opm. (i) In plaats van de coëfficiënt C wordt ook vaak gewerkt met een dimensieloze weerstandscoefficiënt volgens Darcy-Weisbach $f = 8g/C^2$.
- (ii) Voor de coëfficiënt C worden verschillende relaties gebruikt waarop elders nader wordt ingegaan.

Windinvloed:

Bij bepaalde problemen is het van belang om de invloed van de wind in de berekeningen te verdisconteren.

Indien er gedurende langere tijd sprake is van een vrij sterke wind met een snelheid \vec{W} in een bepaalde richting, dan zal dit schuifspanningen in het water tot gevolg hebben. De schuifspanningen kunnen, indien verondersteld wordt $\vec{W} \gg \vec{u}$, evenredig gesteld worden met het kwadraat van de windsnelheid, waarbij natuurlijk de windrichting t.o.v. de coördinaatrichtingen x resp. y moet worden verdisconteerd (vergelijk met Fig. 2.14).

Gewerkt wordt met de volgende relaties:

$$\tau_{xz}(z_1) = \beta |W| W_x \quad (2-68)$$

$$\tau_{yz}(z_1) = \beta |W| W_y \quad (2-69)$$

waarin: W_x = de x -component van de windsnelheid;
 W_y = de y -component van de windsnelheid;
 $|W|$ = de absolute waarde van de windsnelheid.

Opm. De coëfficiënt β moet experimenteel worden vastgesteld. Bij een lang aanhoudende wind over een zee blijkt $\beta = 0,35 \times 10^{-6}$ (kg m^{-3}) te bedragen.

Na het hierboven gestelde wordt voor de term (5) uit verg. (2-46) dus in plaats van (2-65) het volgende gevonden:

● term (5):

$$\frac{1}{\rho} \beta |W| W_x = \frac{g \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{C^2} \quad (2-70)$$

Als alle resultaten tot zover verzameld worden, vindt men voor verg. (2-46):

$$(z_1 - z_0) \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] + \frac{g}{c^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} - \frac{1}{\rho} \beta |W| W_x = 0 \quad (2-71)$$

Als nu alle termen worden gedeeld door de waterdiepte $(z_1 - z_0) = a$ en de streepjes, die de gemiddelde snelheden aangeven, worden weggelaten dan wordt de volgende *vergelijking in de x-richting* gevonden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{g u \sqrt{u^2 + v^2}}{c^2 a} - \frac{\beta |W| W_x}{\rho a} = 0 \quad (2-72)$$

De overeenkomstige *vergelijking in de y-richting* is:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{g v \sqrt{u^2 + v^2}}{c^2 a} - \frac{\beta |W| W_y}{\rho a} = 0 \quad (2-73)$$

Tot dusverre is ervan uitgegaan dat gewerkt wordt in een vast coördinatenstelsel. Zoals bekend wordt de beweging van de lucht en het water op de aarde ook beïnvloed door de aardrotatie (Wet van Buys Ballot, 1857).

Een met de aarde verbonden coördinatenstelsel beweegt *door de rotatie van de aarde om zijn as* met een hoeksnelheid ω . Iedere massa m , die zich op de aarde beweegt ondervindt een zgn. geostrofische versnelling. De verticale component hiervan kan t.o.v. de versnelling van de zwaartekracht worden verwaarloosd. De horizontale component heeft vaak wel een merkbare invloed: op het noordelijk halfrond werkt in de richting van de stroming gezien een versnelling naar rechts en op het zuidelijk halfrond een versnelling naar links.

Bij grootschalige problemen zoals bij stromingen in de atmosfeer, maar ook bij de getijbeweging in b.v. de Noordzee speelt de geostrofische versnelling een dominerende rol.

Bij twee-dimensionale getijproblemen, waarbij men in x- en y-richting te maken heeft met afmetingen groter dan 1 km dient men de geostrofische versnelling in de beschouwingen te betrekken.

In de vergelijkingen (2-72) en (2-73) voor een willekeurig assenstelsel betekent dit dat in het linkerlid de volgende versnelling kunnen worden verdisconteerd (voor een plaats met breedtegraad θ):

$$- (a'_x)_\theta = - 2\omega(\sin \theta)v = - \Omega v \quad (2-74)$$

$$- (a'_y)_\theta = 2\omega(\sin \theta)u = \Omega u \quad (2-75)$$

Voor het uitvoeren van berekeningen in twee dimensies is dus het volgende stelsel vergelijkingen beschikbaar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v + g \frac{\partial z_1}{\partial x} + g \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 a} - \frac{\beta |W| W_x}{\rho a} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega u + g \frac{\partial z_1}{\partial y} + g \frac{v \sqrt{v^2 + u^2}}{C^2 a} - \frac{\beta |W| W_y}{\rho a} &= 0 \\ \frac{\partial (au)}{\partial x} + \frac{\partial (av)}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} (2-76)$$

2.3.3. Bewegingsvergelijkingen voor één-dimensionale lange-golfproblemen

Zoals ook reeds in par. 2.2.3. is gesteld kan men bij een groot aantal praktijk-problemen volstaan met een één-dimensionale benadering. De overheersende coördinaat wordt de x-richting genoemd, deze loopt evenwijdig met de as van de beschouwde leiding. Aansluitend bij de afleidingen in par. 2.3.2. kunnen de volgende verschillen worden genoemd.

Bij een één-dimensionale beschouwing:

- wordt verondersteld $\partial u / \partial y = 0$;
- kan de geostrofische versnelling geen rol spelen;
- gaat de term voor de wrijvingsweerstand over in $g u |u| / (C^2 a)$
- wordt de term voor de eventuele invloed van de wind $\beta |W| W_x / \rho a$ waarbij W_x de ontbondene van de windsnelheid in de richting van de beschouwde leiding is. De coëfficiënt β kan in dergelijke gevallen sterk variëren!

De algemene bewegingsvergelijking voor een één-dimensionaal lange-golf-probleem luidt dus per eenheid van breedte (vergelijk met de eerste vergelijking van het stelsel (2-76):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial z_1}{\partial x} + g \frac{u |u|}{C^2 a} - \frac{\beta |W| W_x}{\rho a} = a'_x \quad (2-77)$$

Voor het berekenen van de voortplanting van lange golven (getijgolven, hoogwatergolven, e.d.) bestaat er behoefte aan een bewegingsvergelijking voor het gehele dwarsprofiel van de leiding. Een dergelijke vergelijking kan worden gevonden door een *integratie in de y-richting* uit te voeren.

Het nu volgende sluit aan bij de beschouwingen in 2.2.3. betreffende de continuïteitsvergelijking. Ook nu zal eerst naar een rechthoekig dwarsprofiel en vervolgens naar meer gecompliceerde geometrie worden gekeken.

Beschouwd wordt een open leiding met een rechthoekig dwarsprofiel (zie Fig. 2.15).

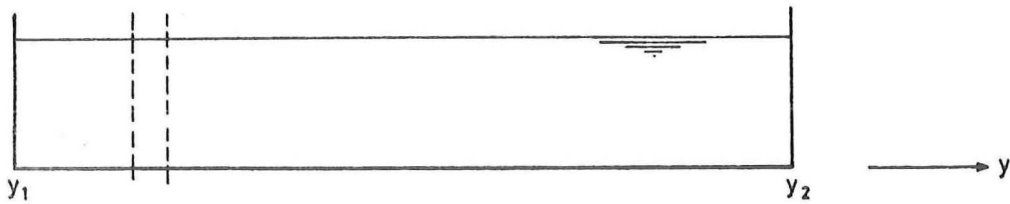


Fig. 2.15 Rechthoekig dwarsprofiel

Indien wordt uitgegaan van de eerste vergelijking van het stelsel (2-41) dan vindt men voor een één-dimensionaal probleem, zonder verwaarlozing van α_1 :

$$\frac{\partial(\alpha u)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 a u^2)}{\partial x} + g a \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{g|u|u}{c^2} - \frac{\beta|W|W_x}{\rho} = 0 \quad (2-78)$$

Men kan elk van de termen in de y-richting integreren van $y = y_1$ tot $y = y_2$. Dit geeft de volgende uitdrukking voor de eerste drie termen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} a u \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_1 a u^2 \, dy + g \int_{y_1}^{y_2} a \frac{\partial z_1}{\partial x} \, dy \quad (2-79)$$

- De eerste term is per definitie gelijk aan de partiële afgeleide naar de tijd van het debiet Q: namelijk $\partial Q / \partial t$.

- Voor de tweede term wordt een coëfficiënt α_4 geïntroduceerd:

$$\alpha_4 = \frac{A}{Q^2} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_1 a u^2 \, dy = \frac{A}{Q^2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_0}^{z_1} u^2 \, dy \, dz \quad (2-80)$$

We kunnen dan voor de tweede term schrijven:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_4 \frac{Q^2}{A} \right)$$

- Als voor de derde term wordt verondersteld dat z_1 over de breedte van de leiding bij benadering constant is, dan is het resultaat voor deze term $g A_s \partial z_1 / \partial x$.

De eerste drie termen geven dus

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_4 \frac{Q^2}{A_s} \right) + g A_s \frac{\partial z_1}{\partial x} \quad (2-81)$$

De weerstandsterm geeft de schuifspanning langs de bodem weer. Voor de gehele leiding betekent dit dat we de volledige wand-weerstand in rekening moeten brengen, in het algemeen de natte omtrek maal de schuifspanning. De natte omtrek is A_s/R , waarin R = de hydraulische straal.

De weerstandsterm voor de leiding wordt dus:

$$\frac{g A_s |u|u}{C^2 R} = \frac{g |Q|Q}{C^2 A_s R} \quad (2-82)$$

De invloed van de wind over het wateroppervlak kan worden verdisconteerd door met de stroomvoerende breedte B_s te vermenigvuldigen, als verondersteld wordt dat de invloed van de wind constant is en alleen over de breedte B_s effectief is. De windterm voor de leiding wordt dus:

$$\frac{B_s \beta |W|W_x}{\rho} \quad (2-83)$$

De uitdrukkingen (2-81), (2-82) en (2-83) samen geven de volgende vergelijking:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_4 \frac{Q^2}{A_s} \right) + g A_s \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{g |Q|Q}{C^2 A_s R} - \frac{B_s \beta |W|W_x}{\rho} = 0 \quad (2-84)$$

Vooraf bij samengestelde profielen kan de coëfficiënt α_4 beduidend van de eenheid afwijken. Er dient dan beslist met $\alpha_4 > 1$ te worden gewerkt, tenzij er in verhouding kleine Froude getallen aanwezig zijn. De term met α_4 is dan klein t.o.v. de andere termen.

Nu wordt het sterk geschematiseerde dwarsprofiel van een rivier met kribben beschouwd (zie Fig. 2.16)

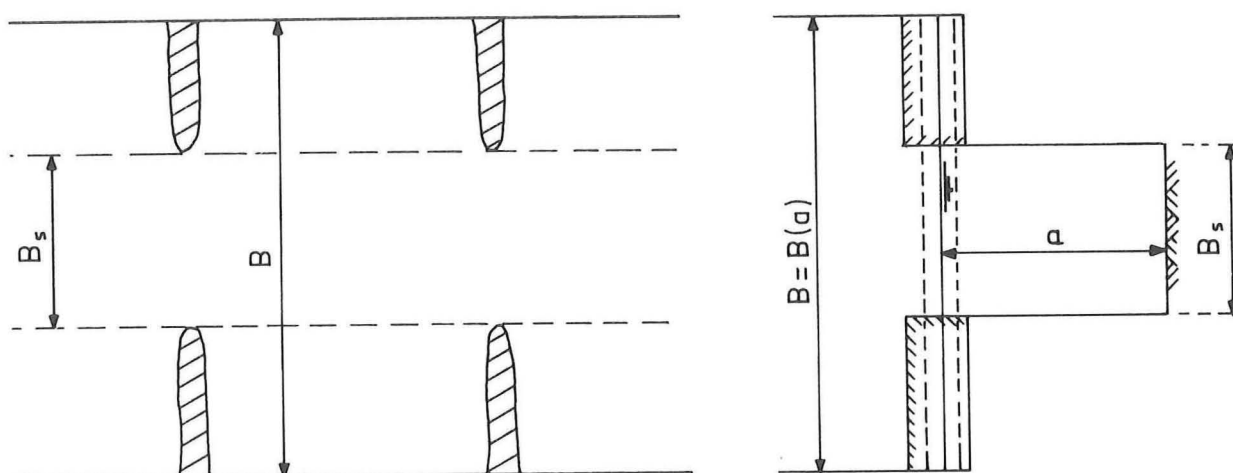


Fig. 2.16 Rivier met kribben (sterk geschematiseerd en samengetrokken)

Onderscheid wordt gemaakt tussen het stroomvoerend dwarsprofiel en het gehele dwarsprofiel. In het gedeelte van het dwarsprofiel dat *niet* tot het *stroomvoerend dwarsprofiel* wordt gerekend, stroomt het water veel langzamer dan *in* het stroomvoerend dwarsprofiel. Het gevolg is, dat bij de overgang naar de kribvakken (zie stippellijnen Fig. 2.16) door de hoofdstroom weerstand wordt ondervonden, die ongeveer even groot kan worden verondersteld als de weerstand langs een vaste wand. Deze veronderstelling maakt het mogelijk om voor het in het dwarsprofiel van Fig. 2.16 gearceerde gedeelte: $A_s = B_s a$ verg. (2-84) toe te passen. De natte omtrek heeft dan een wat andere definitie dan gebruikelijk is.

De in de weerstandsterm van vergelijking (2-84) voorkomende hydraulische straal kan dus worden berekend als

$$R = \frac{B_s a}{B_s + 2a} \quad (2-85)$$

Er dient onderscheid te worden gemaakt tussen de breedte van het stroomvoerend dwarsprofiel B_s en de bergende breedte B . Meestal geldt $B > B_s$, terwijl beide grootheden in het algemeen variëren met x en a en dus met x en t .

De oppervlakte van het stroomvoerend dwarsprofiel variëert in de x -richting, omdat het dwarsprofiel in de x -richting niet constant behoeft te zijn en omdat de waterstand in de x -richting zal variëren:

$$\frac{\partial A_s}{\partial x} = B_s \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial A_s}{\partial x} \Big|_{a = \text{constant}} \quad (2-86)$$

Opmerking

Indien het verloop van het stroomvoerend dwarsprofiel in de x-richting bekend is, dan kan dit bij het verdere gebruik van (2-86) netjes worden verdisconteerd. Men kan voor de tweede term in het rechterlid schrijven:

$$\frac{\partial A_s}{\partial x} \Big|_{a = \text{constant}} = a \frac{\partial (B_s)}{\partial x} \quad (2-87)$$

Zoals nog uitvoeriger wordt besproken, werkt men in de praktijk met een schematisatie van een leiding in vakken, waarbij voor elk vak een representatief dwarsprofiel wordt verondersteld. Daardoor zal per vak gelden

$$\frac{\partial (B_s)}{\partial x} = 0 \quad (2-88)$$

Er zijn dan echter bij de overgang tussen twee vakken discontinuïteiten in A_s (resp. B_s) mogelijk waarvan de invloed kan worden verdisconteerd door het invoeren van een vertragingverlies.

In het volgende wordt met de uitdrukking (2-87) verder gewerkt.

De tweede term uit (2-84) kan met de veronderstelling $\alpha_4 = 1$ en met

$$\frac{\partial A_s}{\partial x} = B_s \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial B_s}{\partial x} \quad (2-89)$$

als volgt worden uitgewerkt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A_s} \right) = 2 \frac{Q}{A_s} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A_s^2} \frac{\partial A_s}{\partial x} \quad (2-90)$$

Als met (2-89) en met de continuïteitsvergelijking (2-26) wordt rekening gehouden kan voor verg. (2-90) worden geschreven:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A_s} \right) = - \frac{2QB}{A_s} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{Q^2}{A_s^2} \left(B_s \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial B_s}{\partial x} \right) \quad (2-91)$$

Met de waterdiepte $a = z_1 - z_0$, kan de derde term van (2-84) als volgt worden geschreven:

$$g A_s \frac{\partial z_1}{\partial x} = g A_s \left[\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial z_o}{\partial x} \right] \quad (2-92)$$

Indien men bovenstaande uitdrukkingen in (2-84) substitueert, wordt gevonden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2 Q B}{A_s} \frac{\partial a}{\partial t} + g A_s \left[1 - \frac{Q^2 B_s}{g A_s^3} \right] \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{Q^2 a}{A_s^2} \frac{\partial B_s}{\partial x} + g A_s \frac{\partial z_o}{\partial x} + \\ + g \frac{Q|Q|}{C^2 A_s R} - \frac{B \beta |W| W_x}{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (2-93)$$

Verondersteld wordt nu dat geldt $\partial B_s / \partial x = 0$. Verder wordt de invloed van de wind hierna buiten beschouwing gelaten, omdat deze bij het analyseren van lange-golfverschijnselen slechts in bepaalde gevallen een rol speelt.

De algemene bewegingsvergelijking voor lange golven in open leidingen (één-dimensionaal) wordt dan i.p.v. verg. (2-93):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2 Q B}{A_s} \frac{\partial a}{\partial t} + g A_s \left(1 - \frac{Q^2 B_s}{g A_s^3} \right) \frac{\partial a}{\partial x} + g A_s \frac{\partial z_o}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{C^2 A_s R} = 0 \quad (2-94)$$

In de term met $\partial a / \partial x$ komt voor de term

$$\frac{Q^2 B_s}{g A_s^3} = \frac{u^2}{g a}$$

die t.o.v. de eenheid kan worden verwaarloosd als geldt

$$Fr^2 = \frac{u^2}{g a} \ll 1 \quad (2-95)$$

Dit is bij veel problemen het geval.

Voorbeeld: $u = 0,5$ m/s; $a = 6,4$ m; $c = 8$ m/s; $\frac{u^2}{g a} \approx 0,004 \ll 1$

Als met deze verwaarlozing alle termen van verg. (2-95) worden gedeeld door $g A_s$ gaat deze vergelijking over in

$$\frac{1}{g A_s} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2 Q B}{g A_s^2} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial z_o}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} = 0 \quad (2-96)$$

In verg. (2-96) geeft de term $\partial a / \partial x$ de verandering van de *waterdiepte* in de x-richting en de term $\partial z_o / \partial x$ de verandering van de *bodemhoogte* in de x-richting aan (zie Fig. 2.17).

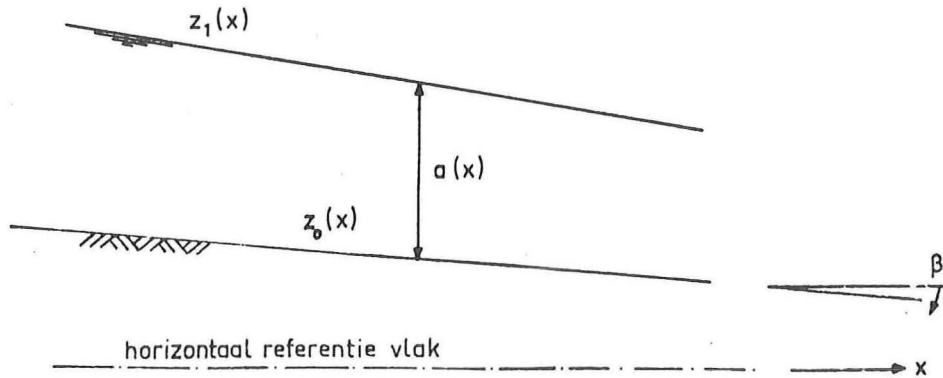


Fig. 2.17
$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial z_o}{\partial x}$$

De bodemhelling is in veel gevallen zeer klein, b.v. $\partial z_o / \partial x = \text{ca } 10^{-5}$ à 10^{-4} (1 tot 10 cm per kilometer).

Voor de hoek β (Fig. 2.17) geldt vaak bij zeer goede benadering:

$$\text{tg } \beta = \sin \beta = \beta = i_b \text{ en } \cos \beta = 1 \quad (2-97)$$

zodat voor de term $\partial z_o / \partial x$ kan worden geschreven $- i_b$.

(i) Bij bovenrivieren wordt de x-as in plaats van *horizontaal* ook wel *evenwijdig met de bodem* gekozen. Dan wordt, met inachtneming van verg. (2-97) gewerkt met de volgende bewegingsvergelijking:

$$\frac{1}{gA_s} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2QB}{gA_s^2} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} - i_b + \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} = 0 \quad (2-98)$$

De term i_b in deze vergelijking geeft de invloed van de zwaartekracht in de richting evenwijdig met de bodem aan.

(ii) Als men te maken heeft met open leidingen, waarvan de bodemhelling *veel groter is*, dan kan men de waarden van $\cos \beta$, $\sin \beta$ en $\text{tg } \beta$ nauwkeurig in de berekeningen opnemen (Voorbeeld bergbekken).

Omdat bij lange golven een hydrostatische drukverdeling in de vertikaal wordt verondersteld, komt $\partial z_1 / \partial x$ overeen met de verandering van het piëzometrisch niveau in de x-richting. In de literatuur zal men in plaats van de waterdiepte a dan ook vaak het piëzometrisch niveau h als afhankelijk variabele tegenkomen.

Omdat:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial z_0}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial z_1}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} \quad (2-99)$$

wordt dan gewerkt met de volgende bewegingsvergelijking:

$$\frac{1}{gA_s} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2QB}{gA_s^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} = 0 \quad (2-100)$$

2.4. Vergelijkingen voor lange golven in open leidingen

De voortplanting van een lange golf in een *open leiding* (vrije waterspiegel, één-dimensionaal) kan worden beschreven met een bewegingsvergelijking en een continuïteitsvergelijking.

In de literatuur kan men, afhankelijk van het onderwerp en de voorkeur van een bepaalde auteur, vergelijkingen in verschillende gedaanten tegenkomen.

Bij het analyseren van één-dimensionale lange-golfproblemen kan men b.v. uitgaan van vergelijkingen, waarin de afhankelijke variabelen zijn:

- de gemiddelde snelheid u,
- òf het debiet per eenheid van breedte q,
- òf het totale debiet in de leiding Q;

- het niveau van de waterspiegel (z_1), hetgeen bij lange golven in open leidingen overeenkomt met het piëzometrisch niveau h,
- òf de waterdiepte a.

Als de invloed van de wind en van andere eventueel werkzame *uitwendige* krachten buiten beschouwing kan worden gelaten, worden hier als voorbeeld een tweetal stelsels vergelijkingen gegeven.

Het combineren van verg. (2-22), verg. (2-77) en verg. (2-99) geeft het stelsel partiële differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2-101}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial a}{\partial x} - g i_b + g \frac{u|u|}{c^2 a} = 0$$

In de bewegingsvergelijking (2-78) is gesubstitueerd

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} - i_b \tag{2-102}$$

Het combineren van verg. (2-26) en (2-98) geeft het volgende stelsel:

$$\left. \begin{aligned} B \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{gA_s} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2B}{gA_s^2} Q \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} - i_b + \frac{Q|Q|}{c^2 A_s^2 R} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{2-103}$$

Voor de veronderstellingen, die bij het afleiden van deze vergelijkingen zijn gemaakt, wordt verwezen naar par. 2.2. en 2.3.

Voor het vinden van een oplossing voor een stelsel differentiaal-vergelijkingen (2-101) of (2-103) zijn, zoals bij het behandelen van de oplossingsmethoden zal blijken, in het algemeen *beginvoorwaarden en twee randvoorwaarden* noodzakelijk.

2.5. Vergelijkingen voor drukgolven in gesloten leidingen

2.5.1. Inleiding

In deze paragraaf 2.5. wordt de niet-stationaire stroming beschouwd in gesloten leidingen, d.w.z. leidingen die geheel gevuld zijn met vloeistof dan wel leidingen waardoor een gas stroomt.

Voor het berekenen van de stromingsweerstand bij een stationaire stroming van een vloeistof of gas door een leiding kan worden verwezen naar de college-handleiding b72.

Indien ergens in een leiding de (rand-)voorwaarden in de tijd veranderen, heeft dit een niet-stationaire stroming tot gevolg.

Men kan onderscheid maken tussen:

- a. niet-stationaire stroming, waarbij de samendrukbaarheid van het medium en/of de variatie van het stroomvoerend dwarsprofiel van de leiding een rol speelt;
- b. niet-stationaire stroming, waarbij het medium onsamendrukbaar en de leiding als onvervormbaar mag worden verondersteld.

ad a. Door verhoging (verlaging) van de druk wordt de dichtheid groter (kleiner) en wordt het stroomvoerend dwarsprofiel groter (kleiner). Als gevolg hiervan vindt er "berging" in de leiding plaats. *Drukgolven*, die in de leiding kunnen voorkomen, planten zich als gevolg van deze berging met een eindige voortplantingssnelheid voort. Hoe geringer de berging, des te groter de voortplantingssnelheid. Bij waterleidingen spreekt men van *waterslag* (Eng. waterhammer). Bij waterslag-berekeningen is men geïnteresseerd in het ontstaan en de voortplanting van drukgolven.

ad b. Er doen zich (bij vloeistofleidingen) ook problemen voor, waarbij de veranderingen van de druk zo geleidelijk plaatsvinden, dat de *drukgolven buiten beschouwing* kunnen blijven.

Men spreekt dan wel van een *starre kolom*-benadering (zie par. 2.5.5.).

In par. 2.5.2. worden voor een *leiding* de massabalans en de impulsbalans opgesteld.

In par. 2.5.3. worden de zgn. toestandsvergelijkingen voor een gesloten leiding opgesteld. Hierbij komt eerst het gedrag van de leiding zelf ter sprake. Daarna wordt aandacht besteed aan het feit, dat bij waterslag-berekeningen ook de samendrukbaarheid van de vloeistof een rol speelt. Tenslotte wordt enige aandacht besteed aan gasleidingen, waarbij de samendrukbaarheid van het medium uiteraard niet kan worden verwaarloosd.

Het combineren van de toestandsvergelijkingen met de algemene vergelijkingen van par. 2.5.2. geeft, zoals in par. 2.5.4. wordt besproken, de differentiaalvergelijkingen voor de voortplanting van drukgolven in gesloten leidingen.

Indien bij bepaalde niet-stationaire problemen de voortplanting van drukgolven een zeer ondergeschikte rol speelt, kan deze (in eerste benadering) geheel buiten beschouwing blijven. Deze veronderstelling

geeft aanleiding tot sterk vereenvoudigde vergelijkingen. Hier kan een verband worden gelegd met vergelijkingen voor lange golven in *open leidingen*. Daar immers wordt de event. beweging van de bodem en de samendrukbaarheid van de vloeistof verwaarloosd t.o.v. de berging als gevolg van het bewegen van de vrije waterspiegel.

Bij een gesloten leiding is de verhouding tussen de afmetingen van het dwarsprofiel van de leiding (b.v. de diameter van een buisleiding) en de lengte van de leiding meestal zeer klein (b.v. 10^{-3} à 10^{-4}).

Dit is een van de redenen om hier direkt een één-dimensionale beschouwing op te zetten en niet zoals in hoofdstuk 2, uitgaande van de drie-dimensionale vergelijkingen, door integratie over het dwarsprofiel één-dimensionale vergelijkingen af te leiden.

In par. 2.5.4. wordt er op gewezen, dat ook bij open leidingen differentiaal-vergelijkingen kunnen worden afgeleid door direkt een één-dimensionale beschouwing op te zetten.

Tenslotte kan nog een ander verband met de differentiaalvergelijkingen voor open leidingen worden gelegd. In een gesloten vloeistofleiding kan door verschillende oorzaken gas voorkomen. Indien een (gedeelte van een) leiding niet geheel met vloeistof is gevuld, dan zal het grensvlak tussen de vloeistof en het gas zich als een min of meer *vrije* vloeistofspiegel gedragen.

2.5.2. Algemene differentiaalvergelijkingen

Beschouwd wordt een gedeelte van een willekeurige gesloten leiding, waarvan de as onder een hoek β t.o.v. de horizontaal helt (zie Fig. 2.18)

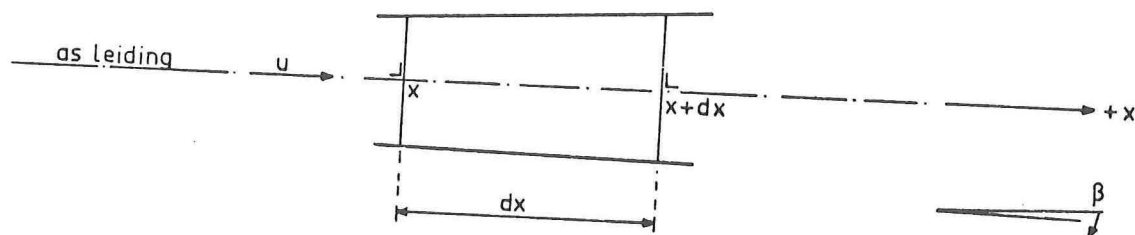


Fig. 2.18 Gedeelte van een gesloten leiding

De richting evenwijdig met de as van de leiding wordt de x-richting genoemd. Het (stroomvoerend) dwarsprofiel A_s van de leiding wordt gedefiniëerd d.m.v. een vlak (in een bepaald punt van de x-as en loodrecht op de x-as) dat de wand van de leiding snijdt.

Hier wordt een ruimtelijk vast volume tussen twee vlakken loodrecht op de x-as door de punten x en x + dx (zie Fig. 2.18).

Vervolgens wordt voor dit volume een *massabalans* in de x-richting opgesteld.

Door het vlak in punt x stroomt in een tijdsinterval dt *in* :

$$\rho u A_s dt \quad (2-104)$$

en door het vlak in punt x + dx *uit* :

$$\rho u A_s dt + \frac{\partial(\rho u A_s)}{\partial x} dx dt \quad (2-105)$$

De massa binnen het beschouwde ruimtelijk volume neemt in het tijdsinterval dt *toe* met:

$$\frac{\partial(\rho A_s)}{\partial t} dx dt \quad (2-106)$$

De massabalans geeft dus in het algemeen de vergelijking:

$$\frac{\partial(\rho A_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A_s)}{\partial x} = 0 \quad (2-107)$$

Uit deze vergelijking volgt:

$$A_s \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A_s}{\partial t} + \rho u \frac{\partial A_s}{\partial x} + \rho A_s \frac{\partial u}{\partial x} + u A_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2-108)$$

Met behulp van zgn. toestandsvergelijkingen (zie par. 2.5.3.) kunnen in verg. (2-108) de eigenschappen van de leiding en van het medium worden verdisconteerd. In par. 2.5.4. worden op die wijze continuïteitsvergelijkingen afgeleid.

Een bewegingsvergelijking voor een leiding kan worden afgeleid door het opstellen van een impulsbalans in de x-richting.

Zoals later nog uitvoeriger zal worden opgemerkt is de invloed van geringe variaties van het stroomvoerend profiel A_s in de x-richting

bij het afleiden van de bewegingsvergelijking niet van praktisch belang. Daarom wordt eenvoudigheidshalve een mootje beschouwd van een prismatische leiding (zie Fig. 2.19)

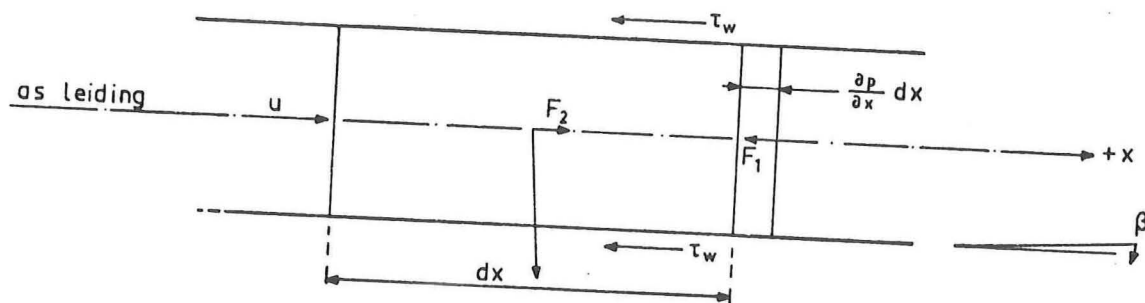


Fig. 2.19 Gedeelte van een prismatische leiding

Alle krachten die *in de x-richting* werkzaam zijn, kunnen als volgt worden aangegeven:

- Overall in de leiding is de drukverdeling hydrostatisch dus de resulterende drukkracht is:

$$F_1 = - A_s \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (2-109)$$

- De zwaartekracht werkt als een inwendig aangrijpende kracht. De component in de +x-richting is (bij een hoek β , zie Fig. 2.19):

$$F_2 = \rho g A_s dx \sin \beta \quad (2-110)$$

- De wrijving geeft een kracht die *tegen* de stromingsrichting in gericht is. Indien wordt verondersteld, dat ook bij niet-stationaire stroming de momentane schuifspanning langs de wand kan worden uitgedrukt als

$$\tau_w = - \rho g \frac{u|u|}{C^2} \quad (2-111)$$

dan is de kracht op het beschouwde mootje dus:

$$F_3 = - \rho g \frac{u|u|}{C^2 R} A_s dx \quad (2-112)$$

waarin $R = A_s/P$, terwijl P de natte omtrek is.

Per *tijdseenheid* stroomt door het grensvlak bij x een bepaalde massa in het beschouwde ruimtelijk volume, waarvan de impulsie gelijk is aan:

$$\rho u A_s (+u) = \rho u^2 A_s \quad (2-113)$$

terwijl van de door het grensvlak in $x + dx$ uitstromende massa de impulsie gelijk is aan:

$$\rho u^2 A_s + \frac{\partial(\rho u^2 A_s)}{\partial x} dx \quad (2-114)$$

Resultierend stroomt dus *uit* de impulsie:

$$\frac{\partial(\rho u^2 A_s)}{\partial x} dx \quad (2-115)$$

De *toename per tijdseenheid* binnen het beschouwde volume van de impulsie is:

$$\frac{\partial(\rho u A_s)}{\partial t} dx \quad (2-116)$$

De som van het resulterende impulsie-transport en de toename van impulsie, *in de +x-richting en per tijdseenheid* is dus

$$\left[\frac{\partial(\rho u A_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 A_s)}{\partial x} \right] dx \quad (2-117)$$

Nu kan men voor de termen (2-117) ook schrijven:

$$u \left[\frac{\partial(\rho A_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A_s)}{\partial x} \right] dx + \rho A_s \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx \quad (2-118)$$

Als men nu rekening houdt met de massabalans (2-107) dan resteren van de vier termen (2-118) slechts de volgende twee termen:

$$\rho A_s \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx \quad (2-119)$$

De algemene impulsbalans $d(\vec{m}u)/dt = \Sigma \vec{F}$ geeft dus in dit geval de volgende vergelijking

$$\rho A_s \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx = -A_s \frac{\partial p}{\partial x} dx + \rho g A_s dx \sin \beta - \rho g A_s dx \frac{u|u|}{C^2_R} \quad (2-120)$$

Indien alle termen worden gedeeld door $\rho A_s dx$ geeft dit de volgende bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \beta + g \frac{u|u|}{C R} = 0 \quad (2-121)$$

Opm. Men kan de afleiding van de bewegingsvergelijking ook opzetten voor een leiding waarvan het dwarsprofiel A_s variëert in de x-richting.

Een dergelijke meer algemene beschouwing is in deze handleiding niet opgenomen, omdat bij transportleidingen nagenoeg steeds sprake is van prismatische leidingen (of een netwerk van leiding-gedeelten).

2.5.3. Toestandsvergelijkingen

Zoals in par. 2.5.2. is beschreven wordt bij het afleiden van de algemene differentiaalvergelijkingen voor een *leiding* (d.w.z. de afmetingen van het dwarsprofiel zijn zeer klein verondersteld t.o.v. de lengte) gewerkt met *over het dwarsprofiel A_s gemiddelde waarden* voor de snelheid u , de druk p en de dichtheid ρ .

Deze grootheden variëren met de (sterk overheersende) x coördinaat en in de tijd.

In deze paragraaf worden nu verbanden gelegd tussen

- de druk p en het dwarsprofiel A_s ;
- de druk p en dichtheid ρ van het medium (vloeistof of gas);

De vergelijkingen die deze verbanden vastleggen worden *toestandsvergelijkingen* genoemd.

■ *Verband tussen de druk p en het stroomvoerend dwarsprofiel A_s*

Beschouwd wordt een *prismatische* leiding met een cirkelvormige doorsnede, een inwendige diameter D en een uniforme wanddikte δ .

Verondersteld wordt dat $\delta \ll D$ en dat trekspanningen in de buiswand relatief snel zullen variëren met variaties van de druk p in het medium.

Verondersteld wordt, dat een *drukverhoging* dp in het medium een verhoging van de *trekspanning* in de buiswand $-\sigma$ geeft.

Opm. (i) In Fig. 2.20 is de wanddikte overdreven groot aangegeven.

(ii) Drukspanningen zijn steeds positief aangegeven.

Uit een evenwichtsbeschouwing voor een buishelft van een meter lengte volgt (zie Fig. 2.20):

$$- 2 \delta d\sigma = dp D \quad (2-122)$$

of

$$d\sigma = - \frac{D}{2\delta} dp \quad (2-123)$$

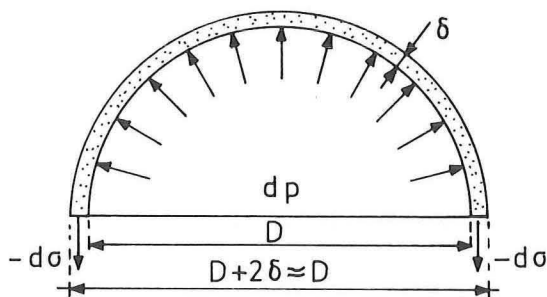


Fig. 2.20 Afleiding "ketelformule"

De trekspanningstoename $- d\sigma$ gaat gepaard met een toename van de omtrek van de buiswand ($P = \pi D$); met gebruik van de wet van Hooke:

$$dP = - \frac{\pi D}{E} d\sigma \quad (2-124)$$

Uit (2-123) en (2-124) volgt:

$$dP = \frac{\pi D^2}{2\delta E} dp = \pi D \frac{D}{2\delta E} dp \quad (2-125)$$

Na de drukverhoging dp is de diameter van de buis gelijk aan:

$$D \left(1 + \frac{D}{2\delta E} dp \right) \quad (2-126)$$

Het oppervlak van het stroomvoerend dwarsprofiel is evenredig met het kwadraat van de diameter, dus na de drukverhoging dp wordt A_s gelijk aan:

$$A_s \left(1 + \frac{D}{2\delta E} dp \right)^2 = A_s \left[1 + \frac{D}{\delta E} dp + \left(\frac{D}{2\delta E} dp \right)^2 \right] \quad (2-127)$$

Omdat ervan uitgegaan kan worden, dat de waarde van de dimensieloze grootheid $\frac{D}{2\delta E} dp$ zeer klein is t.o.v. de eenheid, kan de verandering van A_s worden uitgedrukt als:

$$dA_s = \frac{D}{\delta E} A_s dp \quad (2-128)$$

Omdat verondersteld wordt, dat voor de beschouwde buisleiding de relatie (2-128) voor elke waarde van x en op ieder tijdstip t bestaat, kan men deze relatie gebruiken om partiële afgeleiden van A_s te vervangen door afgeleiden van de druk p .

Omdat $A_s = A_s(p)$ geldt:

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} = \frac{dA_s}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{D}{\delta E} A_s \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2-129)$$

en

$$\frac{\partial A_s}{\partial x} = \frac{dA_s}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{D}{\delta E} A_s \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2-130)$$

■ Verband tussen de druk p en de dichtheid ρ voor vloeistoffen

De samendrukbaarheid van vloeistoffen is relatief klein. De "compressiemodulus" K wordt gedefiniëerd voor een volume V voor

$$\frac{dV}{V} = - \frac{dp}{K} \quad \text{of} \quad \frac{dV}{dp} = - \frac{V}{K} \quad (2-131)$$

waarbij drukspanningen positief zijn.

De compressiemodulus is voor vloeistoffen nagenoeg constant met de temperatuur; voor water kan onder normale omstandigheden worden gesteld $K = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2 = 2\text{GPa}$.

Als de druk in een bepaalde massa vloeistof verandert, zal de dichtheid en het volume veranderen. De totale massa blijft daarbij constant, dus:

$$\frac{d(\rho V)}{dp} = 0 \quad (2-132)$$

of

$$\rho \frac{dV}{dp} + V \frac{d\rho}{dp} = 0 \quad (2-133)$$

Als verg. (2-131) in verg. (2-133) wordt gesubstitueerd krijgt men:

$$-\frac{\rho V}{K} + V \frac{d\rho}{dp} = 0 \quad (2-134)$$

waaruit volgt:

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{K} \quad (2-135)$$

Zoals bij verg. (2-133) ook is verondersteld, zijn V en ρ functies van de druk p . Voor iedere waarde van x en voor ieder tijdstip t wordt voldaan aan verg. (2-135), zodat m.b.v. deze relatie partiële afgeleiden van ρ vervangen kunnen worden door partiële afgeleiden van p :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2-136)$$

en

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2-137)$$

Indien zich in de vloeistof een geringe hoeveelheid gas bevindt, dan wordt de compressibiliteit daardoor sterk vergroot. De compressiemodulus K kan voor een vloeistof met een gering percentage gas worden gevonden door het combineren van:

de compressiemodulus voor de vloeistof

$$K_v = - \frac{\Delta p}{\Delta V_v / V_v} \quad (2-138)$$

en de compressiemodulus voor het gas

$$K_g = - \frac{\Delta p}{\Delta V_g / V_g} \quad (2-139)$$

Door deze uitdrukkingen voor K_v en K_g te combineren met de definitie voor de compressiemodulus voor het mengsel

$$K = - \frac{\Delta p}{\Delta V / V}$$

kan voor K de volgende uitdrukking worden gevonden:

$$K = \frac{1}{1 + \frac{g}{V} \left[\frac{K_v}{K_g} - 1 \right]} K_v \quad (2-141)$$

Voor de dichtheid van het mengsel geldt:

$$\rho = \rho_v \frac{V}{V} + \rho_g \frac{V}{V} \quad (2-142)$$

Opm. Uit experimenten blijkt, dat een gering percentage gas in de vloeistof reeds een sterke verlaging geeft van de voortplantingssnelheid van drukgolven.

Bij de toepassingen zal op dit aspect nog nader worden ingegaan.

■ *Verband tussen druk en dichtheid voor gassen*

De samendrukbaarheid van gassen is relatief groot. Bij een stationaire stroming van gassen door een leiding kan men in bepaalde gevallen veronderstellen dat de dichtheid constant is. Daardoor wordt het mogelijk de theoriën voor de stationaire vloeistofstroming voor dergelijke problemen toe te passen.

In het bovenbedoelde geval wordt de stroming *isothermisch* verondersteld, d.w.z. dat er bij toestandsveranderingen volledige warmte-uitwisseling met de omgeving kan plaatsvinden zodat de temperatuur constant kan worden gesteld. Voorts wordt in bovenbedoelde gevallen verondersteld, dat de drukvariatiën en de bijbehorende variatiën van de dichtheid verwaarloosbaar klein zijn.

In het algemeen geldt de wet van Boyle-Gay Lussac:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (2-143)$$

waarin R de gasconstante is.

Bij *isothermische* processen geldt dus $p/\rho = \text{constant}$.

Bij het bestuderen van de (snelle) voortplanting van drukgolven in gasleidingen kan worden verondersteld, dat er geen warmte-uitwisseling plaatsvindt. Men spreekt dan van *adiabatische* toestandsveranderingen.

Voor adiabatische processen geldt $p \cdot \rho^{-\alpha} = \text{constant}$, waarin α een constante is, die afhangt van het beschouwde gas.

Voor lucht kan worden gesteld $\alpha = 1,4$.

Opm. Als $\alpha = 1$ krijgt men de voorwaarde voor isothermische toestandsveranderingen.

Uit de voorwaarde voor adiabatistische toestandsveranderingen volgt algemeen $d(p/\rho^\alpha) = 0$ of:

$$-p \alpha \rho^{-\alpha-1} d\rho + \rho^{-\alpha} dp = 0 \quad (2-144)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{\rho}{\alpha p} \quad (2-145)$$

Men kan nu i.p.v. verg. (2-135) de relatie (2-145) gebruiken voor het vervangen van de partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{\alpha p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2-146)$$

en

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho}{\alpha p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2-147)$$

2.5.4. Voortplanting van drukgolven in gesloten leidingen

- *De continuïteitsvergelijking voor gesloten vloeistofleidingen*

Uit de massabalans volgt de algemene vergelijking (2-108). Als in deze vergelijking de toestandsvergelijkingen (2-136), (2-129), (2-130) en (2-137) worden gesubstitueerd, dan ontstaat er na delen door A_s :

$$\frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{D}{\delta E} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho u \frac{D}{\delta E} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2-148)$$

Gesteld wordt nu

$$\frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{E\delta/D} = \frac{1}{c^2} \quad (2-149)$$

Opm. Zoals later bij het integreren m.b.v. karakteristieken zal blijken is c uit verg. (2-149) de voortplantingssnelheid van een drukgolf in een met vloeistof gevulde leiding. De beide termen in het linkerlid van verg. (2-149) geven de invloed van de vloeistof resp. de buiswand aan.

Met het onder (2-149) gestelde gaat verg. (2-148) over in

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-150)$$

- De continuïteitsvergelijking voor gesloten gasleidingen

In de algemene vergelijking (2-108) worden gesubstitueerd de toestandsvergelijkingen (2-146), (2-129), (2-130) en (2-147).

Dit geeft na delen door A_s :

$$\left[\frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{E\delta/D} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{E\delta/D} \right] u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-151)$$

In gevallen waarin de invloed van de buiswand kan worden verwaarloosd geldt $1/(\alpha p) \gg D/E\delta$, zodat verg. (2-151) kan worden vereenvoudigd tot

$$\frac{1}{\alpha p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\alpha p} u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-152)$$

- De bewegingsvergelijking voor gesloten leidingen

In par. 2.5.2. is de algemene bewegingsvergelijking voor een gesloten prismatische leiding afgeleid (zie verg. (2-121)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \beta + g \frac{u|u|}{c^2_R} = 0 \quad (2-153)$$

Deze vergelijking geldt onder de bij de afgeleiding gemaakte veronderstellingen voor zowel gas- als vloeistofleidingen.

In gesloten vloeistofleidingen wordt meestal gewerkt met het piëzometrisch niveau

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad (2-154)$$

als tweede afhankelijke variabele.

Uit verg. (2-154) volgt:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2 g} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2-155)$$

Voor een leiding die in de positieve x-richting daalt onder een hoek β (zie Fig. 2.19) is

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \sin \beta \quad (2-156)$$

Met verg. (2-137) en verg. (2-156) gaat verg. (2-155) over in:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\rho g} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \frac{\partial p}{\partial x} - \sin \beta \quad (2-157)$$

Voor de weinig samendrukbare vloeistoffen geldt $p/K \ll 1$, zodat dan in de bewegingsvergelijking (2-121) kan worden gesubstitueerd:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \beta = g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2-158)$$

Dit geeft de volgende bewegingsvergelijking in h en u

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{u|u|}{C^2 R} = 0 \quad (2-159)$$

Uit verg. (2-154) volgt ook

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2 g} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2-160)$$

Omdat $\partial z/\partial t = 0$ (buis beweegt niet) en met verg. (2-136) geeft verg. (2-160) als verondersteld wordt $p/K \ll 1$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2-161)$$

Substitueren van verg. (2-161) en verg. (2-158) in verg. (2-150) geeft na delen door ρ de volgende continuïteitsvergelijking in u en h:

$$\frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial x} + u \frac{g}{c^2} \sin \beta + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-162)$$

Opm. (i) De hoek β is de hoek tussen de horizontaal en de as van de leiding (de positieve x-as).

(ii) We zien dat door de overgang van de druk p op het piëzometrisch niveau h een term met $\sin \beta$ uit de bewegingsvergelijking verdwijnt, terwijl er in de continuïteitsvergelijking een bijkomt.

2.5.5. Niet-stationaire stroming bij verwaarloosbare drukgolven

Zoals in par. 2.5.2. ... 2.5.4. is opgemerkt wordt de voortplanting van drukgolven in gesloten leidingen bepaald door de compressiebiliteit van de vloeistof en de elasticiteit van de leiding.

Bij vloeistoffen is de samendrukbaarheid gering en omdat ook de stijfheid van een leiding in nagenoeg alle gevallen relatief groot is, is de voortplantingssnelheid van drukgolven relatief groot.

Er doet zich in de praktijk een groot aantal problemen voor, waarbij de voortplanting van drukgolven van ondergeschikte betekenis is.

Men kan zich hiervan een voorstelling maken, door een willekeurige horizontale leiding te beschouwen met een lengte L (zie Fig. 2.21).

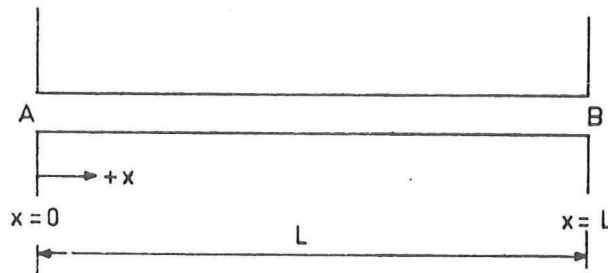


Fig. 2.21 Leiding tussen twee reservoirs

Een golfverschijnsel in een leiding is afhankelijk van de in de tijd veranderende randvoorwaarden. In het geval van Fig. 2.21 wordt verondersteld, dat in A en in B een randvoorwaarde $h(t)$ of $u(t)$ gegeven is.

Van deze functies wordt nu een karakteristieke tijd τ_k vastgesteld.

Opmerking

Voor een sinusvormige functie bijvoorbeeld zal men voor τ_k de periode τ kiezen.

Men kan nu stellen, dat de voortplanting van drukgolven buiten beschouwing kan blijven indien

$$2 \frac{L}{c} \ll \tau_k \tag{2-163}$$

waarin c volgens verg. (2-149) gelijk is aan

$$c = \left[\frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{E\delta/D} \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2-164}$$

Een geringe verandering van de randvoorwaarde bij A kan worden gezien als de oorzaak voor een verstoring (druk golf), die zich van A naar B en na reflectie bij B weer terug naar A (etc.) door de leiding zal voortplanten. Indien nu voldaan wordt aan de voorwaarde (2-163) dan zal de randvoorwaarde bij A in het tijdsinterval gelijk aan twee maal de looptijd slechts weinig veranderd zijn (zie Fig. 2.22).

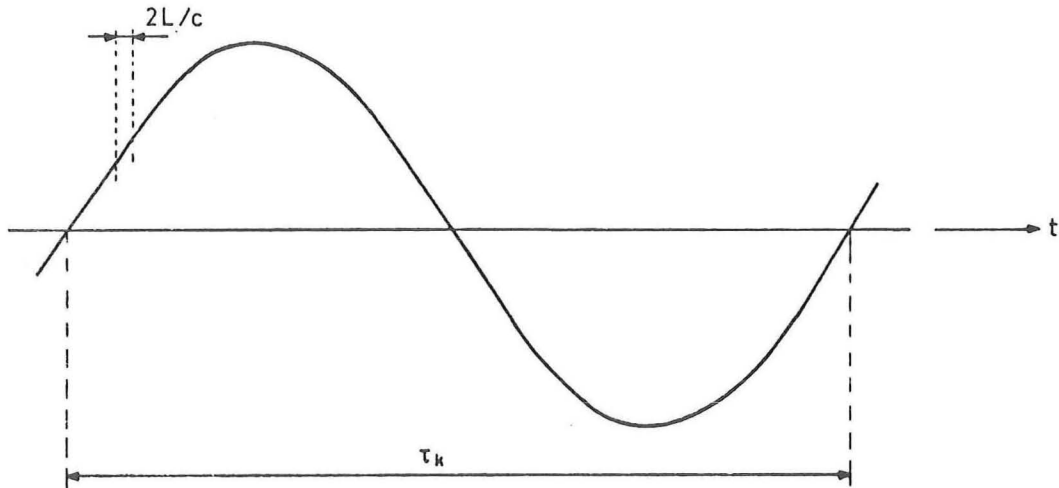


Fig. 2.22 Verhouding τ_k en $2 L/c$

Uit het bovenstaande volgt dat bij geleidelijk veranderende randvoorwaarden (waarbij aan de voorwaarde (2-163) wordt voldaan) met drukgolf-verschijnselen géén rekening behoeft te worden gehouden.

Opmerking:

Bij open leidingen is voor de geldigheid van de zgn. kombergingsbeschouwing gesteld: $L \ll \lambda$. Daar $\lambda = c\tau$ vormt deze voorwaarde (en de fysische interpretatie) een analogie met de voorwaarde (2-163).

Men maakt onderscheid tussen:

- a. een *waterslag berekening* , waarbij zich drukgolven voordoen
- b. een *starre kolom-benadering* , waarbij drukgolven buiten beschouwing kunnen blijven.

Hierna worden voor de onder b. genoemde benadering de basisvergelijkingen gegeven

De veronderstelling "starre kolom" komt erop neer, dat wordt verondersteld:

- de vloeistof is onsamendrukbaar,
 - de leiding is onvervormbaar,
- en als gevolg daarvan
- de voortplantingssnelheid c is oneindig groot.

Door deze veronderstelling gaat de continuïteitsvergelijking (2-162) over in:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-165)$$

Uit deze verg. (2-165) volgt dus dat de gemiddelde snelheid op ieder tijdstip constant is in de x -richting.

In de bewegingsvergelijking (2-159) voor een gesloten prismatische leiding verdwijnt de convectieve term als men verg. (2-165) erin substitueert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{u|u|}{C^2 R} = 0 \quad (2-166)$$

Uit de veronderstelling "starre kolom" kan men ook direkt concluderen dat het debiet Q in de leiding constant is in de x -richting. In plaats van verg. (2-165) geeft dit de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2-167)$$

Voor een prismatische gesloten leiding kan men eenvoudig *direct* een bewegingsvergelijking in h en Q afleiden. Het resultaat daarvan volgt ook uit verg. (2-166) als men $u = Q/A_s$ substitueert:

$$\frac{1}{A_s} \frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} = 0 \quad (2-168)$$

Beschouwt men de vergelijkingen (2-167) en (2-168) samen dan is nog de volgende bewerking mogelijk.

Uit verg. (2-167) volgt dat Q constant is over de gehele leiding. Omdat voor een prismatische leiding A_s constant is en in normale gevallen ook de coëfficiënt van Chézy in de x -richting constant kan worden gesteld, is verg. (2-168) eenvoudig naar x te integreren over de lengte van de leiding.

Als alle termen van verg. (2-168) na deling door g worden geïntegreerd van $x = 0$ tot $x = L$ (zie Fig. 2.21) vindt men achtereenvolgens:

$$\int_{x=0}^{x=L} \frac{\partial h}{\partial x} dx = - \int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{gA_s} \frac{\partial Q}{\partial t} dx - \int_{x=0}^{x=L} \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} dx \quad (2-169)$$

$$h_B - h_A = - \frac{1}{gA_s} \frac{\partial Q}{\partial t} L - \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} L \quad (2-170)$$

In deze bewegingsvergelijking zijn h_B , h_A en Q functies van de tijd, waarbij wordt voldaan aan voorwaarde (2-163). Aan verg. (2-170) moet op ieder tijdstip worden voldaan.

Voorbeelden waarbij m.b.v. verg. (2-170) en noodzakelijke rand- en beginvoorwaarden betrekkelijk gemakkelijk oplossingen kunnen worden verkregen zijn (zie ook par. 4.2.2.):

1. Het oscilleren van een vloeistof in een U-vormige buis
2. Een leiding met een zgn. bufferschacht bij een waterkrachtinstallatie.
3. Een leiding met peilkelder van een zgn. registrerende peilschaal.

3. Analyse lange golven

3.1. Inleiding

Bij de één-dimensionale lange-golfvergelijking is reeds een sterke vereenvoudiging ontstaan, ten opzichte van de oorspronkelijk beschouwde drie-dimensionale waterbeweging. Verdere vereenvoudigingen zijn mogelijk, afhankelijk van het beschouwde praktijkgeval.

Voor deze verdere vereenvoudigingen spelen mee:

- *de aard van de waterbeweging.* Zo kunnen termen van de vergelijkingen verwaarloosbaar klein zijn in een beschouwd praktijkgeval.
- *geometrische overwegingen.* Zo kan de waterbeging in een havenbekken aan een getijrivier worden berekend, door een sterke vereenvoudiging van de vergelijkingen omdat de lengte van het havenbekken meestal zeer veel kleiner is dan de lengte van de getijgolf.

Voordat er over wordt gegaan tot de behandeling van rekenmethoden, die gebaseerd zijn op een min of meer sterke vereenvoudiging van de lange-golfvergelijkingen, wordt in dit hoofdstuk een kwalitatieve analyse gegeven.

Verschillende benaderingswijzen worden hier systematisch gegeven. Voor het gebruik van een methode voor een praktijkgeval zal uiteraard steeds moeten worden nagegaan of de onderliggende benaderingen ook voor dat geval gelden!

3.2. Kombergingsbeschouwing

3.2.1. Integratie continuïteitsvergelijking

Alleen al door het beschouwen van de continuïteitsvergelijking wordt een aantrekkelijke methode mogelijk die in veel gevallen reeds goed toepasbaar is.

Beschouw een waterloop, daarvoor geldt

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3-1)$$

Het is nu mogelijk om tussen de punten $x = x_1$ en $x = x_2$ deze vergelijking naar x te integreren

$$\int_{x_1}^{x_2} B \frac{\partial h}{\partial t} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (3-2)$$

of

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x_1}^{x_2} B h dx \right] = - \left[Q_2 - Q_1 \right] = - \Delta Q \quad (3-3)$$

Aan de linkerkant van verg. (3-3) staat een tijdsafgeleide van een grootte, rechts staat het verschil in afvoer tussen de punten x_1 en x_2 . Als er dus voor het linkerlid een goede benadering wordt gevonden dan is de onbekende afvoer in een bepaald punt (b.v. het punt x_2) af te leiden uit de bekende afvoer in een ander punt (b.v. x_1).

Het ligt voor de hand om voor praktische problemen aan een differentie-benadering voor het linkerlid van verg. (3-3) te denken. Van eenvoudige naar ingewikkelde gevallen kunnen de volgende voorbeelden worden gegeven.

- (i) Voor een *brede prismatische waterloop* kan worden gesteld dat de bergende breedte (B) geen functie is van x en t . Een logische benadering van verg. (3-3) wordt dan:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = - B \Delta x \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{\text{gem}} \quad (3-4)$$

De middeling van $\partial h / \partial t$ vindt dan plaats over het traject $x_1 < x < x_2$. In feite is verg. (3-4) een overall-beschouwing van de continuïteitsvergelijking die in de limiet-overgang $\Delta x \rightarrow 0$ verg. (3-1) oplevert.

- (ii) Voor een *brede niet-prismatische waterloop* is de bergende breedte B van de plaats x afhankelijk. De benadering wordt dan:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = - \Delta F \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{\text{gem}} \quad (3-5)$$

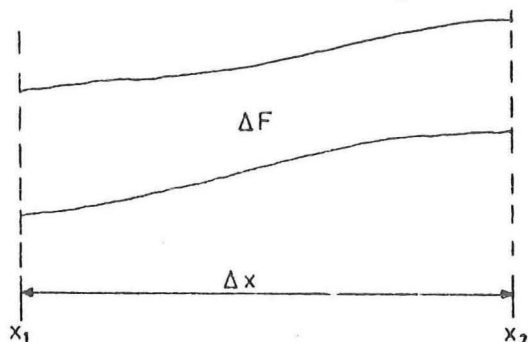


Fig. 3.1 Kombergingsoppervlak

Hierin is ΔF het kombergingsoppervlak. Het is de differentie-
benadering van

$$dF = B(x)dx$$

Ook verg. (3-5) is weer niet anders dan een representatie van de continuïteitsvergelijking die ook direct uit een *over-all* beschouwing is af te leiden. De nauwkeurigheid waarmee ΔQ kan worden benaderd hangt natuurlijk af van de stapgrootte Δx . Praktisch kunnen grotere afstanden Δx worden genomen dan op het eerste gezicht mogelijk lijkt. Dit heeft een aantal oorzaken:

- de grootheden B en dus ook F variëren niet zo sterk met de plaats
- de grootte Δx moet worden gekozen in relatie tot de aanwezige golflengte λ . Volgens Tabel 1.1. zijn deze voor getijgolven zeer groot ($\lambda \gg a$).

Om de gedachten te bepalen geldt er:

waterdiepte	$a = 0(10^1 \text{ m})$
golflengte	$\lambda = 0(10^5 \text{ m})$

Kiest men voor $\Delta x = 0(10^3 \text{ m})$ dan geldt nog steeds dat $\Delta x \ll \lambda$. Men kan zich dus voor Δx gemakkelijk een grootte van enkele kilometers denken. De beperking van Δx zal meestal eerder worden opgelegd door de variatie van B met x dan door de grootte van λ .

- (iii) Voor een *brede onregelmatige waterloop* zal met vakken moeten worden gewerkt omdat de breedte te sterk variëert. Vergelijking (3-5) kan dan per vak worden toegepast. Er is geen enkele reden om de vaklengten Δx_i onderling gelijk te kiezen. Als voorbeeld wordt gekozen een estuarium (Fig. 3.2) dat op $x = 0$ in open verbinding staat met de zee en op $x = L$ is afgesloten. Op een aantal plaatsen x_i is het *waterstandsverloop* $h(x_i, t)$ bekend. Hoe kan hieruit de afvoer in de monding: $Q(0, t)$ worden afgeleid?

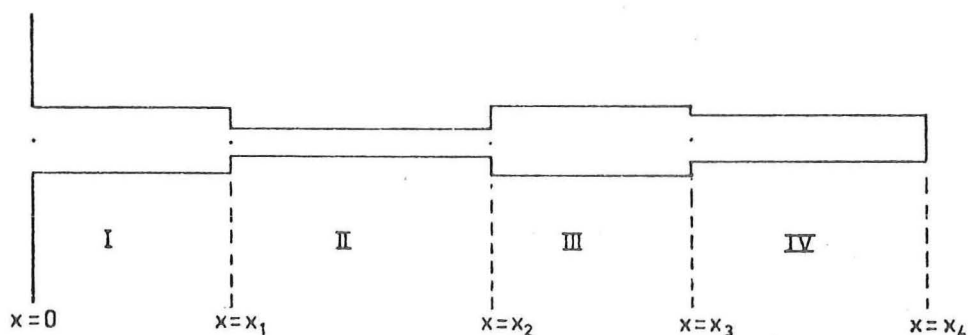


Fig. 3.2. Kombergingsbeschouwing voor een estuarium.

Opgemerkt moet worden dat voor $x = x_4$ geldt $Q(x_4, t) = 0$ omdat het een gesloten uiteinde betreft. Daaruit kan met een kombergingsbeschouwing over vak IV de grootte van $Q(x_3, t)$ worden bepaald. Doorgaande in zee-waartse richting worden daar achtereenvolgens de afvoeren in de begren-zingen van de verschillende vakken gevonden. Geven we voor de eenvoud $(\overline{\partial h / \partial t})$ aan met \dot{h} dan volgt er uit verg. (3-5)

$$Q(x_3, t) = - F_{IV} \dot{h}_{IV}$$

$$Q(x_2, t) - Q(x_3, t) = - F_{III} \dot{h}_{III}$$

Dus

$$Q(x_2, t) = - F_{IV} \dot{h}_{IV} - F_{III} \dot{h}_{III}$$

Voor dit geval wordt gevonden (bij vier vakken):

$$Q(0, t) = - F_{IV} \dot{h}_{IV} - F_{III} \dot{h}_{III} - F_{II} \dot{h}_{II} - F_I \dot{h}_I \quad (3-6)$$

Dit geval toont duidelijk aan hoe uit waterstanden, die betrekkelijk eenvoudig zijn te meten, de afvoer in de mond kan worden afgeleid. Afvoeren zijn veel moeilijker te meten dan waterstanden!

3.2.2. Waterbeweging in een kort bekken

Er wordt een bekken langs een getijrivier beschouwd dat *kort* is ten opzichte van de *golflengte* (Fig. 3.3)

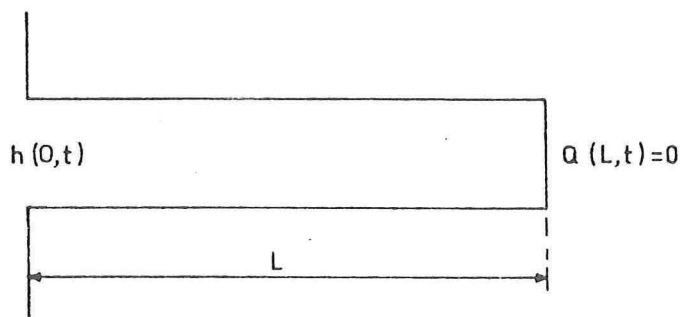


Fig. 3.3. Kort bekken

Het bekken wordt verondersteld een eenvoudige vorm te hebben (prisma-tisch, verticale wanden). Aan de mond is de waterstand $h(0, t)$ in de getijrivier bekend. Wat kan er worden gezegd over de waterbeweging in het bekken?

- (i) In de eerste plaats moet worden opgemerkt, dat $Q(L,t) = 0$ omdat op $x = L$ een vaste wand aanwezig is.
- (ii) Vervolgens kan worden opgemerkt, dat uit $L \ll \lambda$ volgt dat de *looptijd* (T) van de golf door het bekken klein is t.o.v. de golfperiode (τ).
Immers er geldt

$$\lambda = c \tau \quad (3-7)$$

Verder geldt

$$L = c T \quad (3-8)$$

Dus

$$L/\lambda = T/\tau \quad (3-9)$$

Uit beide opmerkingen volgt dat op $x = 0$ en $x = L$ het waterstandsverloop in de tijd vrijwel identiek is.

Dus

$$h(0,t) \approx h(L,t) \quad (3-10)$$

Uiteraard geldt dit in elk punt in het interval $0 < x < L$, zodat kan worden geconcludeerd dat de waterspiegel in het bekken steeds horizontaal is.

Een kombergingsbeschouwing wordt voor dit geval erg eenvoudig.

Uit

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = - B \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \quad (3-11)$$

volgt daar B noch h van x afhangen:

$$\int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x'} dx' = - B \frac{dh}{dt} \int_0^x dx' \quad (3-12)$$

Dus

$$Q(x,t) = - B \frac{dh}{dt} (L-x) \quad (3-13)$$

Als de breedte B van x afhangt, dan wordt uiteraard gevonden

$$Q(x,t) = - \frac{dh}{dt} \int_0^x B(x') dx' \quad (3-14)$$

Uit verg. (3-14) volgt, dat bij een bekende geometrie voor het bekken en een bekend verloop $h(0,t)$ de grootte van de afvoer naar tijd en plaats is af te leiden. Dit blijkt mogelijk omdat de bewegingsvergelijking in feite is gereduceerd tot $\partial h / \partial x = 0$, zoals hierna zal worden aangetoond.

De essentiële voorwaarde voor deze beschouwing is $L \ll \lambda$. Dit kan ook nog als volgt worden geïllustreerd.

Stel dat $h(0,t)$ een sinusvormig verloop heeft. In het bekken moet dan deze golf naar binnenlopen maar gelijktijdig moet er een (gereflecteerde) golf uitlopen. Anders kan nooit gelden $Q(L,t) = 0$. Er moet zich dus in het bekken een *staande golf* bevinden als som van de inlopende en de uitlopende golf. Figuur 3.4 geeft een illustratie van deze staande golf.

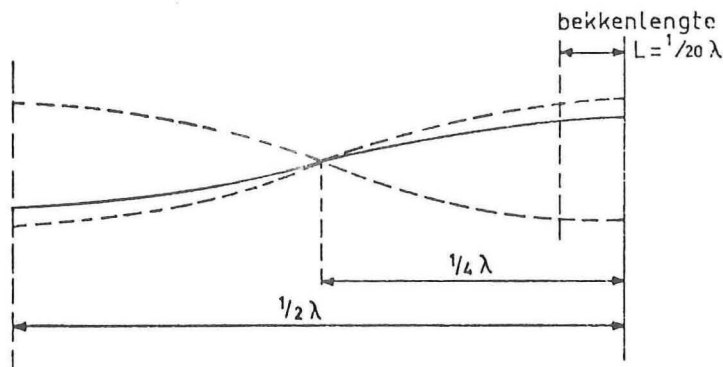


Fig. 3.4. Staande golf

Op $x = L$ bevindt zich een *buiik*. Is nu de bekkenlengte L klein t.o.v. de golflengte λ dan zal in het bekken de waterspiegel steeds horizontaal zijn. Om de gedachten te bepalen: deze beschouwing geldt als L slechts enkele procenten van λ groot is.

Opmerkingen

- (i) In de eerste plaats moet nu toch nog worden nagegaan wat er in dit geval met de bewegingsvergelijking aan de hand is. Er geldt

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2B}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} \quad (3-15)$$

Wordt $\partial h / \partial t$ geëlimineerd met behulp van de continuïteitsvergelijking, verg. (3-11), dan kan $\partial h / \partial x$ worden uitgedrukt in de afvoer Q en zijn afgeleiden.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2}{gA^2} Q \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} \quad (3-16)$$

Het rechterlid van verg. (3-16) moet verwaarloosbaar klein zijn wil $\partial h / \partial x = 0$. Bij een relatief kort bekken blijft de afvoer relatief klein. Elk van de termen van het rechterlid is dan relatief klein. De gehele bewegingsvergelijking wordt voor het hier beschouwde geval dus teruggebracht tot

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3-17)$$

- (ii) Om het bovenstaande te concretiseren wordt hier een eenvoudig voorbeeld gegeven.

Beschouw een bekken met de volgende kenmerken:

lengte	$L = 3 \text{ km}$
diepte	$a = 10 \text{ m}$
breedte	$B = 500 \text{ m}$
getij periode	$\tau = 12\text{h } 25 \text{ min} = 44,7 \text{ ks}$
getij amplitude	$\hat{h} = 1 \text{ m}$

Toepassing van verg. (3-13) geeft:

$$h = \hat{h} \sin \omega t = \hat{h} \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (3-18)$$

Dus

$$\dot{h} = \frac{2\pi\hat{h}}{\tau} \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \quad (3-19)$$

Dus

$$Q(x,t) = - 2\pi \hat{h} B \tau^{-1} (L-x) \cos \{2\pi t/\tau\} \quad (3-20)$$

$$Q(o,t) = - \frac{2\pi \times 500 \times 3000}{44,7 \times 10^3} \cos \{2\pi t/\tau\} \quad (3-21)$$

Of

$$Q(o,t) = -210 \cos \{2\pi t/\tau\} \text{ m}^3/\text{s} \quad (3-22)$$

De *maximale* afvoer in de mond van het bekken bedraagt dus rond 200 m³/s. Dit komt neer op een maximale gemiddelde snelheid in de mond van globaal 4 cm/s. De geldigheid van de benadering $\partial h/\partial x = 0$ kan worden gecontroleerd door in verg. (3-16) waarden van $Q(\frac{1}{2} L, t)$ te substitueren.

- (iii) Opgemerkt moet worden dat de kombergingsbeschouwing is gebaseerd op de beschouwing van het piëzometrisch niveau (h). De grootte van het bodemverhang i_b is daarbij niet relevant.

3.3 Kinematische golf

3.3.1 Beginsel

Hoogwatergolven in rivieren worden meestal gekenmerkt door de omstandigheid dat de snelheid (en dus de afvoer) slechts langzaam in de tijd variëert. De term met $\partial u/\partial t$ in de bewegingsvergelijking is dan verwaarloosbaar t.o.v. de andere termen. Ook de convectieve term $u \partial u/\partial x$ is vaak verwaarloosbaar. Samen betekent dit dat de *traagheid* verwaarloosbaar is t.o.v. de berging en de weerstand.

Verder geldt meestal dat $\partial a/\partial x \ll \partial z_0/\partial x$. Daardoor kan van verg. (2-96) een redelijke benadering worden verwacht als de eerste drie termen worden verwaarloosd t.o.v. de resterende termen van het linkerlid. Er kan dus worden uitgegaan van

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} = 0 \quad (3-23)$$

Deze benadering, die van de *kinematische golf*, is er dus op gebaseerd dat de waterbeweging als *stationair* en *uniform* kan worden beschouwd. Anders gezegd de kinematische golf beschouwing (Lighthill en Witham, 1955) is gebaseerd op een bewegingsvergelijking volgens Chézy.

De basis van de kinematische golf beschouwing wordt geleverd door de continuïteitsvergelijking. Voor de eenvoud zal hier eerst de eenheid van breedte worden beschouwd.

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3-24)$$

Samen met Chézy

$$u = C \sqrt{a i_b} \quad \text{of} \quad q = C a^{3/2} i_b^{1/2} \quad (3-25)$$

kan voor constante waarden van i_b en C worden ingezien dat in verg. (3-24) en (3-25) slechts a en q als afhankelijke variabelen aanwezig zijn. In deze schematisatie is er zelfs een direct verband tussen a en q .

Door differentiëren van verg. (3-25) naar x of naar t is het mogelijk om samen met verg. (3-24) een (eerste orde) differentiaalvergelijking in a of q over te houden.

Het resultaat is b.v. een differentiaalvergelijking in a :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \left\{ \frac{3}{2} C a^{1/2} i_b^{1/2} \right\} \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3-26)$$

of met verg. (3-25)

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{3}{2} u \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3-27)$$

Op eenzelfde manier kan ook een differentiaalvergelijking in q worden gevonden:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{3}{2} u \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3-28)$$

Hier moet een aantal opmerkingen worden gemaakt:

- (i) Vergelijking (3-27) is een speciaal geval van de eerste orde differentiaalvergelijking voor golfvoortplanting

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3-29)$$

Deze vergelijking is eenvoudig af te leiden, omdat uit $a = a(x,t)$ volgt:

$$da = \frac{\partial a}{\partial t} dt + \frac{\partial a}{\partial x} dx \quad (3-30)$$

Bewegen we met een bepaald punt van de golf mee dan geldt $da = 0$ of

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3-31)$$

- (ii) Voor een constante waarde van c beschrijft verg. (3-29) de voortplanting van een *niet vervormende* golf. Dit is als volgt in te zien.

We introduceren een meebewegend assenstelsel met als onafhankelijke variabele

$$y = x - ct \quad (3-32)$$

De bewering is dat

$$a = a(y) \quad (3-33)$$

een oplossing is van verg. (3-31). Dit is juist, immers uit verg. (3-32) volgt

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{da}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{da}{dy} \quad (3-34)$$

en

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{da}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{da}{dy} \cdot (-c) \quad (3-35)$$

Ingevuld in het linkerlid van verg. (3-31) geeft dit

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} = -c \frac{da}{dy} + c \frac{da}{dy} = 0 \quad (3-36)$$

3.3.2 Voortplantingssnelheid

Omdat q alleen een functie van a is verondersteld te zijn (zie verg. 3-25) kan voor de voortplantingssnelheid c ook nog een andere uitdrukking worden gevonden.

Uit

$$q = q(a)$$

volgt

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{dq}{da} \frac{\partial a}{\partial x} \quad (3-37)$$

Met $\partial a / \partial t + \partial q / \partial x = 0$ geeft dit eenvoudig

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{dq}{da} \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3-38)$$

Of met verg. (3-29)

$$c = \frac{dq}{da} \quad (3-39)$$

Dit laatste geeft ook meteen aan dat de relatie $c = 1,5 u$ die door combinatie van verg. (3-27) en (3-29) kan worden afgeleid, slechts voor de daar gebruikte benaderingen geldt. Dit waren: (i) beschouwing van de eenheid van breedte en (ii) voor een constante Chézy-waarde. Deze laatste beperking kan hier worden opgeheven door verg. (3-25) in combinatie met de formule van Strickler te nemen:

$$C = 25 \left(\frac{a}{k}\right)^{1/6} \quad (3-40)$$

Er volgt dan analoog

$$c = 5/3 u \quad (3-41)$$

Analoog wordt de verhouding c/u iets anders als niet meer de eenheid van breedte wordt beschouwd. Essentieel blijft dat c en u *in dezelfde orde van grootte* liggen.

3.3.3 Kinematische golf en dynamische golf

Hoe komt het nu dat bij de beschouwingwijze van de *kinematische golf* een voortplantingssnelheid wordt gevonden, die kennelijk afwijkt van de *twee* voortplantingssnelheden (zie verg. (3-140)):

$$c_{1,2} = u \pm \sqrt{ga} \quad (3-42)$$

die kunnen worden afgeleid voor een oneindig kleine storing in het wateroppervlak?

In de eerste plaats moet worden opgemerkt, dat de kinematische golf benadering leidt tot een *eerste orde differentiaal-vergelijking*, die slechts één voortplantingssnelheid heeft (benedenstrooms gericht). Het complete stelsel vergelijkingen voor de waterbeweging in een waterloop leidt echter tot een *tweede orde differentiaal-vergelijking*. Deze differentiaal vergelijking is van het *hyperbolische type*. Er zijn twee voortplantingssnelheden; verg. (3-42) geeft de eenvoudigste uitdrukking daarvoor. In deze volledige vergelijking is het dynamische karakter van de lange golven in open waterlopen tot uitdrukking gebracht: het is de *dynamische golf*.

De voortplantingssnelheden volgens verg. (3-41) en verg. (3-42) verschillen in orde van grootte. Dit blijkt uit het volgende getallenvoorbeeld.

- $u = 1 \text{ m/s}$; $a = 3 \text{ m}$; dit geeft repectievelijk:

$$c_1 = 1 + \sqrt{30} = 6,5 \text{ m/s} ; c_2 = 1 - \sqrt{30} = - 4,5 \text{ m/s} ; c = 1,5 u = 1,5 \text{ m/s}.$$

De beide golfverschijnselen, die hier naast elkaar zijn gesteld, zijn op een rivier in onderlinge samenhang aanwezig (Lighthill en Whitham, 1955). Verondersteld wordt dat op een rivier met een stationaire-uniforme stroming door toevoeging van een bepaald volume water een kleine verstoring in de afvoer (en dus in de waterstand) optreedt. Er ontstaat een kleine golf, die zich als een dynamische golf in benedenstroomse richting en in bovenstroomse richting gaat voortplanten. Tijdens het voortplanten worden deze golven (sterk) gedempt door turbulente wrijving. De faktor waarmee de hoogte van een golf als functie van de tijd verandert (de dempingsfaktor η) kan worden benaderd via een analytische oplossing voor de algemene differentiaal-vergelijkingen (dit is een uitbreiding van de in par. 4.2.

besproken harmonische methode). Hier wordt alleen het resultaat gebruikt:

$$\eta = \exp \{-g u t / (C^2 a)\}$$

Voor het geval $u = 1 \text{ m/s}$ en $a = 3 \text{ m}$ en met $C = 50 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ blijkt dat voor $t = 750 \text{ s}$ de golfhoogte met een faktor e is afgenomen. Er zal dus in dit geval binnen enkele uren niets van deze golven zijn overgebleven.

Het toegevoegde volume water kan niet verdwijnen (continuïteit); het vormt een golf, die zich in benedenstroomse richting voortplant met de snelheid $c = dq/da$.

Voor het geval de weerstand (en berging) sterk overheerst t.o.v. de traagheid geldt dus:

- het signaal van de verstoring loopt met $c_{1,2} = u \pm \sqrt{ga}$
- de verstoring zelf loopt met $c \approx 1,5 u$.

3.3.4 Uitbreiding

In het voorgaande is een beschouwing gehouden voor de eenheid van breedte. Het is vrij eenvoudig om deze beschouwing voor het algemene geval te houden.

Met

$$Q = C B_s a^{3/2} i_b^{1/2} \quad (3-44)$$

en

$$B \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3-45)$$

volgt

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left[3/2 C B_s a^{1/2} i_b^{1/2} + B_s a^{3/2} i_b^{1/2} \frac{dC}{da} \frac{\partial a}{\partial x} \right] \quad (3-46)$$

of

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left[3/2 u B_s + \frac{Q}{C} \frac{dC}{da} \right] \frac{\partial a}{\partial x} \quad (3-47)$$

Ingevuld in verg. (3-45) geeft dit

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3-48)$$

met

$$c = \frac{1}{B} \frac{dQ}{da} = 3/2 u \frac{B_s}{B} + \frac{Q}{BC} \frac{dC}{da} \quad (3-49)$$

De toepassing van de benadering van de kinematische golf is beperkt, omdat de demping niet in rekening is gebracht. Wordt dit wel gedaan, zoals bij de *diffusie analogie* in par. 3.4., dan wordt weer de voortplantingssnelheid volgens verg. (3-49) gevonden.

3.4 Diffusie analogie

3.4.1 Inleiding

Een geval van een lange golf waarin *weerstand* en *berging* overheersen wordt gevormd door een hoogwatergolf op een rivier.

In dat geval is de traagheid ondergeschikt.

Er geldt dus

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-50)$$

Er blijft dus van de bewegingsvergelijking over de differentiaalvergelijking voor de *stationaire, niet-uniforme stroming*. Deze vergelijking, gecombineerd met de uiteraard ook geldende continuïteitsvergelijking leidt tot een tweede orde differentiaalvergelijking van het parabolische type. Het is deze vergelijking die ook diffusieprocessen kan beschrijven.

Dit is de reden dat de hier gegeven beschouwing bekend staat als de *diffusie analogie voor hoogwatergolven*. Het verschil met de kinematische golf bestaat hierin, dat nu geldt $\partial a / \partial x \neq 0$ in de bewegingsvergelijking. De basisvergelijkingen voor de eenheid van breedte luiden dus:

Continuïteit

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3-51)$$

Beweging

$$\frac{\partial a}{\partial x} - i_b + \frac{q^2}{C^2 a^3} = 0 \quad (3-52)$$

Omdat bij hoogwatergolven het water steeds in één richting stroomt, geeft het stellen $q|q| = q^2$ hier geen moeilijkheden.

Uit verg. (3-51) volgt

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (3-53)$$

Uit verg. (3-52) volgt

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} = - \frac{2q}{C^2 a^3} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{3q^2}{C^2 a^4} \frac{\partial a}{\partial t} = - \frac{2q}{C^2 a^3} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{3q^2}{C^2 a^4} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (3-54)$$

De combinatie van verg. (3-53) en (3-54) geeft de gevraagde differentiaalvergelijking in q

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{C^2 a^3}{2q} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 3/2 u \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3-55)$$

Deze vergelijking heeft de gedaante

$$\frac{\partial q}{\partial t} - K \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3-56)$$

Hierin is c de voortplantingssnelheid, die immers in dit geval van de eenheid van breedte en voor constante C gelijk is aan 1,5 u. Verder geldt voor de "diffusie coëfficiënt" K

$$K = \frac{C^2 a^3}{2q} \quad \text{met} \quad [K] = [L^2 T^{-1}] \quad (3-57)$$

Op volkomen analoge manier kan de vergelijking ook in de waterdiepte a worden geschreven.

$$\frac{\partial a}{\partial t} - K \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + c \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3-58)$$

Opmerkingen:

- (i) Voor $K = 0$ wordt de differentiaalvergelijking voor de kinematische golf teruggevonden.
- (ii) Deze parabolische differentiaalvergelijking laat analytische oplossingen toe voor constante coëfficiënten K en c . Het

ligt voor de hand om deze waarden voor K en c passend bij de hoofdstroming te kiezen en daarbij relatief lage hoogwatergolven te veronderstellen.

(iii) Vergelijking (3-58) laat toe het optreden van *gedempte golven*.

Het is eenvoudig aan te tonen dat b.v. de oplossing

$$a = a_0 \exp \{-k^2 K t\} \times \sin \{k(x - ct)\} \quad (3-59)$$

voldoet aan verg. (3-58) onafhankelijk van een "golfgetal" k. Vergelijking (3-59) stelt voor een sinusvormige golf met voortplantingssnelheid c waarvoor de amplitude exponentieel in de tijd wordt gedempt. Deze demping verdwijnt voor $K = 0$; met andere woorden voor de kinematische-golfbenadering.

Opmerking:

Uit verg. (3-59) mag *niet* worden afgeleid dat de demping toeneemt als K toeneemt. Volgens verg. (3-57) zou dit immers betekenen dat de demping toeneemt naarmate C groter is (gladdere rivier). Dit kan natuurlijk niet waar zijn, zoals ook uit verg. (3-43) blijkt. De juiste conclusie uit verg. (3-59) moet zijn, dat voor een vaste t de demping toeneemt als $k^2 K$ toeneemt. Op de details daarvan wordt hier niet verder ingegaan.

De vergelijkingen (3-56) en (3-58) kunnen in een iets eenvoudiger vorm worden geschreven door gebruik te maken van een meebewegend assenstelsel volgens

$$y = x - ct \quad (3-60)$$

Er ontstaan dan de vormen

$$\frac{\partial q}{\partial t} - K \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0 \quad (3-61)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} - K \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0 \quad (3-62)$$

3.4.2 Voorbeeld

Om een inzicht te krijgen in het gedrag van de hoogwatergolven die uit verg. (3-62) kunnen volgen, wordt hier beschouwd het geval

waarbij op $x = 0$; $t = 0$ (en dus ook $y = 0$) een hoeveelheid water P instantaan wordt geloosd. Daarvoor moet verg. (3-62) worden opgelost.

Vergelijking (3-62) kan voor dit geval worden opgelost met behulp van *Fouriertransformatie* of *Laplacetransformatie*.

Als resultaat wordt gevonden (voor constante K):

$$a(y,t) = \frac{P}{2\sqrt{\pi Kt}} \exp \left[-\frac{y^2}{4Kt} \right] + a_0 \quad (3-63)$$

De structuur van deze oplossing zal blijken aan de hand van de volgende opmerkingen.

- (i) De eerste term van het rechterlid geeft de waterstandsverhoging t.o.v. de ongestoorde waterdiepte a_0 .
- (ii) De maximale verhoging voor vaste t treedt op voor $y = 0$. Het maximum treedt voor een vast assenkruis dus op bij $x = ct$.
- (iii) De waterstandsverhoging heeft de vorm van een gauss-kromme: de reductie van de maximale waarde wordt beheerst door de factor $\sqrt{4\pi Kt}$.
- (iv) De "inhoud" van de extra waterstandsverhoging blijft constant. Immers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp \left[-\frac{y^2}{4Kt} \right] dy = \frac{P}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = P \quad (3-64)$$

bij gebruik van de substitutie $y/\sqrt{4kt} = z$.

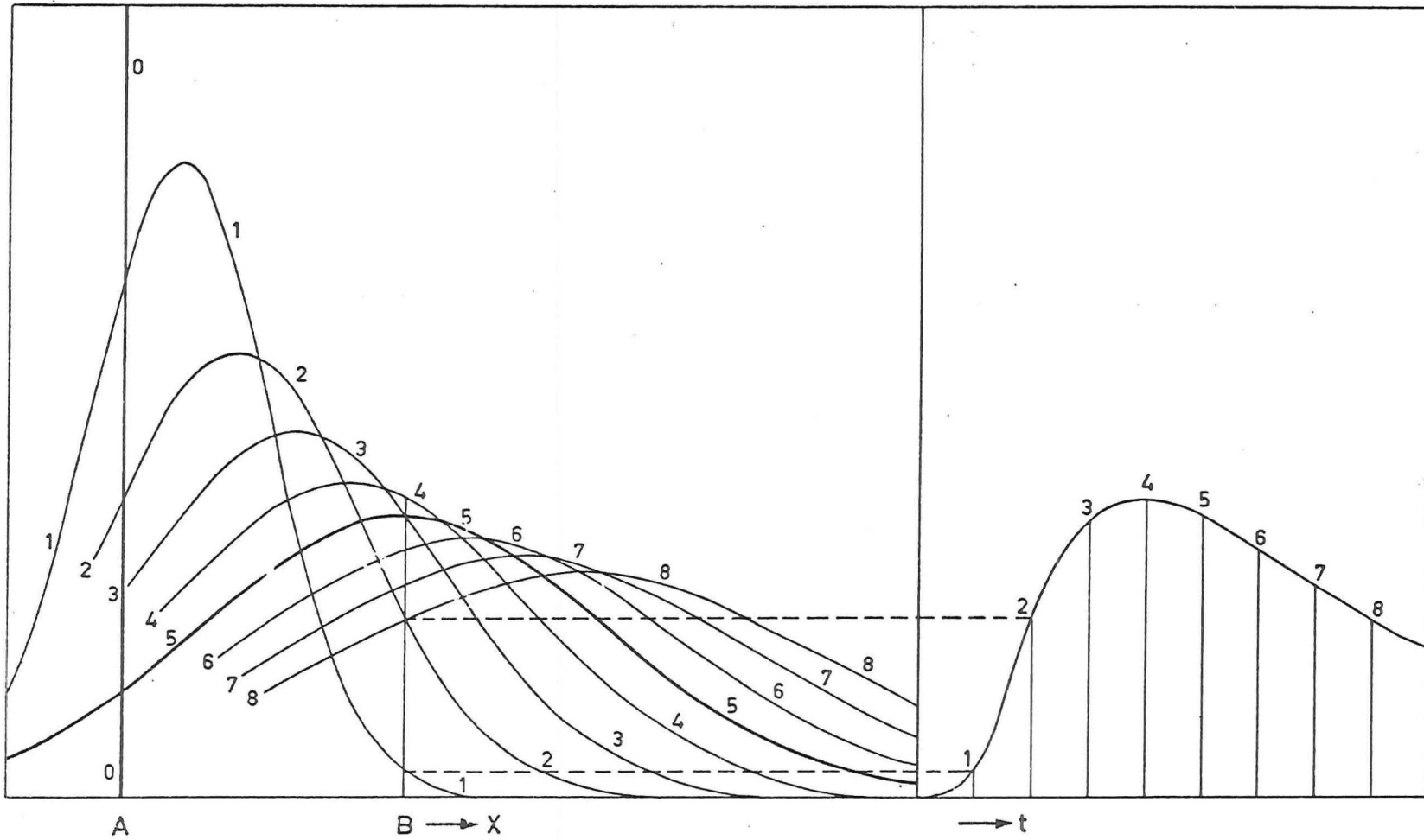
- (v) De kromme van verg. (3-63) is symmetrisch t.o.v. $y = 0$. Ten gevolge van de demping van de golf vertoont de *peilschaalkromme* op een bepaalde plaats evenwel een asymmetrisch karakter (Schönfeld, 1948). Figuur 3.5 geeft hiervan een illustratie.

3.4.3 Uitbreiding

De bovenstaande beschouwing is gegeven voor de eenheid van breedte, terwille van de overzichtelijkheid. De afleiding kan uiteraard analoog worden opgezet voor een willekeurig dwarsprofiel met afvoer Q en de breedten B_s en B .

Ook dan wordt weer gevonden:

Figuur 3.5 Asymmetrische peilschaalkromme



Het ontstaan van een asymmetrische peilschaalkromme door de verzwakking van een symmetrische golf.
 Links: de golf op een bepaald riviervak, op opeenvolgende tijdstippen, 0,1,2, enz.
 Rechts: Het verloop van de waterstand met de tijd (peilschaalkromme), ter plaatse B.

$$\frac{\partial a}{\partial t} - K \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + c \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3-65)$$

en nu

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - K \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3-66)$$

Nu geldt uiteraard:

$$c = \frac{1}{B} \frac{dQ}{da} \quad (3-67)$$

en verder

$$K = \frac{C^2 B_s^2 a^3}{2Q} \quad (3-68)$$

Hierbij is de breedte constant verondersteld. Is dit niet het geval, dan treedt daardoor extra vervorming van de hoogwatergolf op, die in het algemeen niet door analytische oplossingen is weer te geven.

3.4.4 Discussie hoogwatergolven

In Fig. 3.5 wordt duidelijk gedemonstreerd dat met de diffusie analogie uit-dempende hoogwatergolven op rivieren kunnen worden beschreven. Dit in tegenstelling tot het resultaat van de kinematische golf, die een sterkere schematisatie inhoudt.

Er is nog een verschil tussen de beide benaderingswijzen:

- *Kinematische golf*: eenduidig verband tussen Q en a

$$Q = B_s C a^{3/2} i_b^{1/2} = Q(a) \quad (3-69)$$

- *Diffusie analogie*: in beginsel geen eenduidig verband tussen Q en a . Uit verg. (3-52) volgt

$$Q = B_s C a^{3/2} \sqrt{i_b - \partial a / \partial x} \quad (3-70)$$

Dit meerwaardige verband kan worden gedemonstreerd door tijdens de passage van een hoogwatergolf in een rivier het debiet Q en de waterdiepte a te meten en de resultaten in een Q - a -diagram uit te zetten (Fig. 3.6).

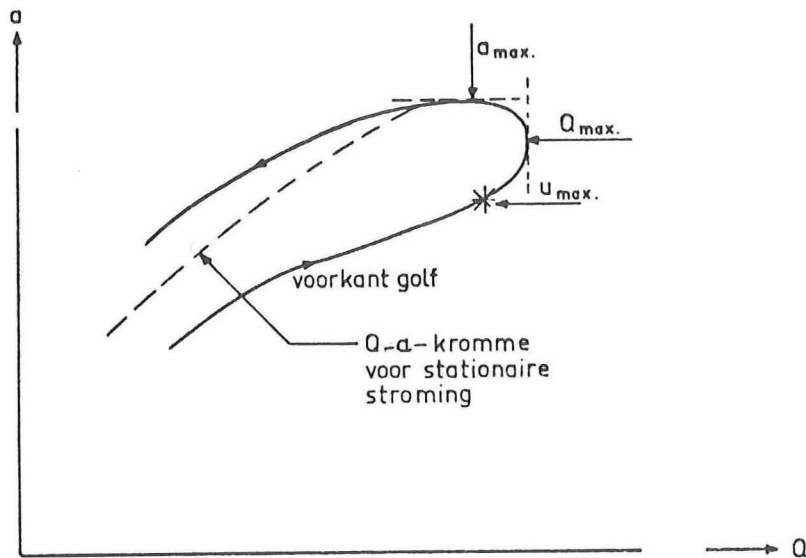


Fig. 3.6 Hysteresis bij hoogwatergolf

De vorm van de (hysteresis) figuur die ontstaat, is uit verg. (3-70) te verklaren.

- De *voorkant* van de golf wordt gekenmerkt door een *negatieve* waarde van $\partial a / \partial x$. Daar geldt dus $i_b - \partial a / \partial x > i_b$.
Als gevolg daarvan wordt voor eenzelfde a uit verg. (3-70) daar een grotere waarde van Q gevonden dan uit verg. (3-69).
- Aan de *achterkant* van de golf geldt het tegenovergestelde. Daar geldt $\partial a / \partial x > 0$ dus $i_b - \partial a / \partial x < i_b$.

Dit betekent dat er voor één waarde van de waterdiepte twee afvoeren kunnen optreden. Beide verschillen van de afvoer die optreedt bij dezelfde waterdiepte voor stationaire stroming.

Dit hysteresisverschijnsel betekent ook dat tijdens de passage van een hoogwatergolf eerst de afvoer maximaal wordt en pas daarna de waterdiepte.

Dit verschijnsel heeft nog een andere consequentie. Bij rivieren is het gebruikelijk om met *afvoerkrommen* (of $Q - h$ - krommen) te werken. Door meting van afvoeren en waterstanden wordt een experimenteel verband $Q = f(h)$ gevonden. Wil men bij een (eenvoudig te meten) waterstand later een afvoer schatten, dan kan dit experimentele verband daarvoor worden gebruikt. Dit heeft alleen zin als:

- er tijdens de meting van afvoeren geen duidelijke hoogwatergolven aanwezig zijn.
- de afvoerkromme alleen wordt gebruikt voor een stationaire stroming.

Uit verg. (3-70) blijkt duidelijk dat als $i_b \gg |\partial a / \partial x|$, er niet de in Fig. 3.6 geschetste hysteresis mag worden verwacht. Dit blijkt voor de Rijntakken in Nederland op te gaan. Omdat deze in de benedenloop van het stroomgebied van de Rijn zijn gelegen, is er slechts sprake van relatief kleine waarden van $\partial a / \partial x$.

Opmerking:

Het schatten van de afvoer tijdens een hoogwatergolf kan m.b.v. de afvoerkromme wel worden gedaan door gebruik te maken van verg. (3-70). Daarvoor moet $\partial a / \partial x$ bekend zijn. Deze factor is lastig te meten.

Handiger is het door gebruik te maken van de registratie van de waterstand $h(t)$ van het beschouwde meetstation. Daaruit kan $\partial h / \partial t = \partial a / \partial t$ worden afgeleid. Door *lokaal* de beschouwing van de *kinematische golf* te gebruiken kan verg. (3-70) worden omgewerkt tot

$$Q = B_s C a^{3/2} \sqrt{i_b + c^{-1} \partial h / \partial t} \quad (3-71)$$

Met andere woorden de afvoer Q wordt gevonden uit de afvoer Q_u die bij uniforme stroming zou gelden met

$$Q = Q_u \sqrt{1 + \frac{\partial h / \partial t}{i_b c}} \quad (3-72)$$

De verg. (3-72) staat bekend als de formule van Jones (zie b.v. Henderson, 1963).

Met behulp van de formule van Jones is nu ook numeriek aan te tonen dat het hysteresisverschijnsel op de Nederlandse Rijntakken gering is. De volgende schattingen kunnen worden gedaan voor de grootte-orde van de term $\{\partial h / \partial t\} / \{i_b c\}$.

$$i_b = 10^{-4}; u = 1 \text{ m/s} \quad \text{dus} \quad c = 1,5 \text{ m/s}; \partial h / \partial t = 0,5 \text{ m/d};$$

Dus

$$\frac{\partial h / \partial t}{i_b c} = \frac{0,5}{24 \times 3600} \times \frac{10^4}{1,5} \approx 0,04 \quad (3-73)$$

De term is dus klein t.o.v. de eenheid.

3.5. Translatiegolven

3.5.1. Inleiding

Bij de *kinematische golf* en de golven volgend uit de *diffusie analogie* is kenmerkend, dat de weerstand overheerst en de traagheidsterm van de bewegingsvergelijking een ondergeschikte rol speelt.

Nu wordt een klasse problemen bekeken waarbij de wrijving ondergeschikt is. Voorlopig wordt weer eerst naar de eenheid van breedte gekeken.

De bewegingsvergelijking wordt

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial a}{\partial x} = - g \frac{\partial z_0}{\partial x} \quad (3-74)$$

Voor kleine Froude getallen geldt $u \frac{\partial u}{\partial x} \ll g \frac{\partial a}{\partial x}$, immers:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} u^2 + ga \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} Fr^2 + 1 \right) ga \right] \approx g \frac{\partial a}{\partial x} \quad (3-75)$$

Uitgaande van het piëzometrisch niveau h volgt dan dus uit verg. (3-74):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3-76)$$

Voor de continuïteitsvergelijking geldt:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3-77)$$

Als voor de golfhoogte $\eta = a - a_0 = h - h_0$ geldt $\eta \ll a_0$, dan geldt $q \approx u a_0$. Het stelsel vergelijkingen wordt dan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

en (3-78)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Hieruit volgt eenvoudig door combineren:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3-79)$$

en

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g a_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (3-80)$$

Met $c = \pm \sqrt{g a_0}$ kunnen deze vergelijkingen ook worden geschreven als

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3-81)$$

en

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (3-82)$$

Deze vergelijkingen laten oplossingen toe van de gedaante

$$u = u_1\{x + ct\} + u_2\{x - ct\} \quad (3-83)$$

en

$$\eta = \eta_1\{x + ct\} + \eta_2\{x - ct\} \quad (3-84)$$

Dit kan eenvoudig door differentiëren en invullen in de differentiaalvergelijking worden aangetoond.

Er is dus steeds sprake van een oplossing, die bestaat uit een combinatie van een golf in de *positieve* en een golf in de *negatieve* x-richting. De aard van de functies $u_{1,2}$ en $\eta_{1,2}$ volgt uit de randvoorwaarden voor het beschouwde geval.

Opmerkingen:

- (i) De verg. (3-82) staat in de mechanica bekend als "de golfvergelijking". Met deze vergelijking kan b.v. ook de trilling van een snaar worden beschreven. Voor lange golven in open waterlopen kan verg. (3-82) bepaald niet als "de" golfvergelijking worden opgevat. Daarvoor liggen er aan de vergelijking te veel veronderstellingen ten grondslag zoals:
afwezigheid van weerstand, kleine golfhoogte. En natuurlijk is er nog steeds hydrostatische drukverdeling verondersteld.
- (ii) De uitgevoerde verwaarlozingen van de convectieve term $u \partial u / \partial x$ uit de bewegingsvergelijking en van de term $u \partial \eta / \partial x$ uit de continuïteitsvergelijking heeft tot gevolg dat er wordt gevonden $c_{1,2} = \pm \sqrt{ga}$ in plaats van de verwachte $c_{1,2} = u \pm \sqrt{ga}$. Dit is consistent met de aanname $Fr^2 \ll 1$ die in feite is gemaakt.

Dit blijkt uit de dimensieloze vorm:

$$\frac{c_{1,2}}{u} = \phi_{1,2} = 1 \pm Fr^{-1} = \frac{Fr \pm 1}{Fr} = \pm \frac{\sqrt{ga}}{u} \quad (3-85)$$

Als slechts één van beide genoemde termen wordt verwaarloosd, dan blijkt dit als resultaat $c_{1,2} = \frac{1}{2} u \pm \sqrt{ga}$ te geven.

3.5.2 Beginsel translatiegolven

Translatiegolven ontstaan in een waterloop als plotseling de afvoer wordt vergroot of verkleind. Een eenvoudig voorbeeld ontstaat voor een sluis in een scheepvaartkanaal. Bij lediging van de kolk op het beneden pand gaat er in dit pand een golf lopen. Veronderstellen we een constante afvoer ΔQ gedurende de ledigingstijd T dan ontstaat er het volgende beeld (Fig. 3.7):

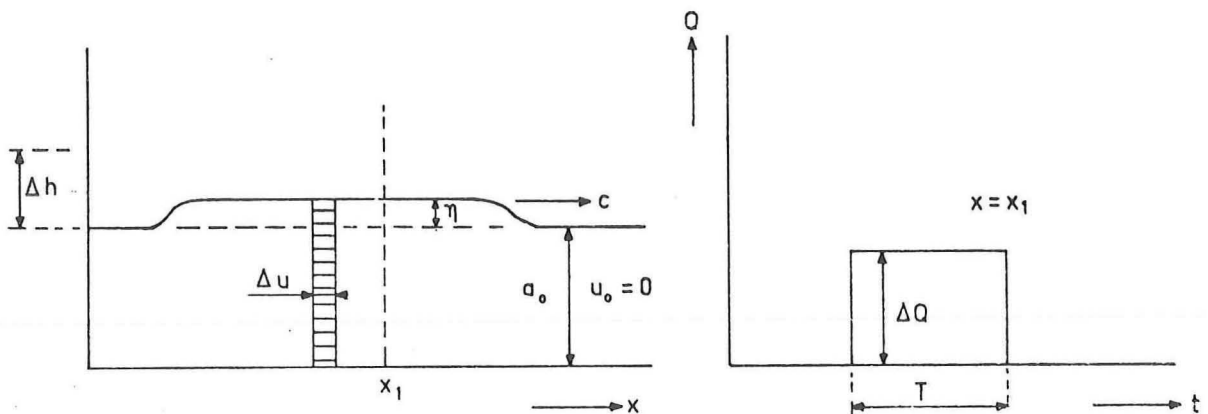


Fig. 3.7 Sluiskolk-lediging

Als we met de index o de ongestoorde toestand aangeven, dan kan als oorspronkelijk het water in het kanaal stil stond ($u_0 = 0$) de volgende beschouwing worden gegeven:

$$\Delta Q = B (a_0 + \eta) \Delta u = B c \eta \quad (3-86)$$

Deze continuïteitsvergelijking geeft dus een verband tussen de voortplantingssnelheid c en de golfhoogte η

$$\eta = \frac{\Delta Q}{Bc} \quad (3-87)$$

Voor de voortplantingssnelheid c wordt met de impulsvergelijking een uitdrukking gevonden als wordt verondersteld dat de golf zich onvervormd voortplant (Fig. 3-8)

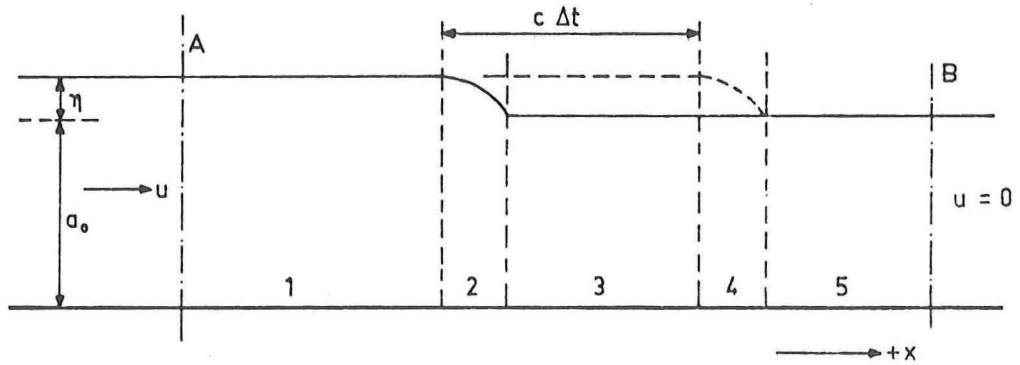


Fig. 3.8 Impulsbalans voor translatiegolf

Beschouwd wordt nu de impulsvergelijking voor het vaste controle-volume tussen de grenzen A en B; verdeeld in vijf deelgebieden. De eenheid van breedte wordt beschouwd (N.B. Hier is dus voor een Eulerse opzèt gekozen).

De impulsvergelijking bevat drie onderdelen..

- (i) De resulterende kracht in de x -richting.
- (ii) Het resulterend impulsietransport in de x -richting door de grenzen A en B (uitstromend positief).
- (iii) De verandering van impulsie van het controle-volume (toename in de tijd positief).

ad (i) De veronderstelling van een hydrostatische drukverdeling bij A en B en de verwaarlozing van de wrijving leiden tot de resulterende kracht

$$dF = \frac{1}{2} \rho g \left[(a_0 + \eta)^2 - a_0^2 \right] = \rho g (a \eta + \frac{1}{2} \eta^2) \quad (3-88)$$

ad (ii) In de tijd Δt vindt alleen door de grens A transport van impulsie plaats, en wel *instromend* (dus negatief) met een gemiddelde snelheid u in de $+x$ -richting over een hoogte $(a_0 + \eta)$:

$$- \{ \rho u (a_0 + \eta) (+u) \Delta t \} = - \rho u^2 (a_0 + \eta) dt \quad (3-89)$$

ad (iii) De verandering van impulsie van het controle-volume kan worden bepaald door te stellen:

$$\frac{\partial(\mu)}{\partial t} \Delta t = \sum_{i=1}^5 (m_i u_i)_{t+\Delta t} - \sum_{i=1}^5 (m_i u_i)_t$$

Hierbij geldt resp.: $(m_1 u_1)_t = (m_1 u_1)_{t+\Delta t}$; $(m_2 u_2)_t = (m_4 u_4)_{t+\Delta t}$
(onvervormde voortplanting); $(m_3 u_3)_t = 0$; $(m_4 u_4)_t = 0$; $(m_5 u_5)_t =$
 $= (m_5 u_5)_{t+\Delta t} = 0$.

Zodat wordt gevonden:

$$\frac{\partial(\mu)}{\partial t} \Delta t = (m_2 u_2)_{t+\Delta t} + (m_3 u_3)_{t+\Delta t} = \rho c \Delta t \{a_0 + \eta\} u \quad (3-90)$$

De impulsvergelijking

$$\vec{F} dt = d \{\vec{\mu}\}$$

geeft dus in dit geval door combinatie van verg. (3-88...90)

$$\rho g \{a_0 \eta + \frac{1}{2} \eta^2\} \Delta t = - \rho u^2 \{a_0 + \eta\} \Delta t + \rho c \Delta t \{a_0 + \eta\} u \quad (3-91)$$

Door de continuïteitsvergelijking, verg. (3-86), voor de eenheid van breedte te schrijven:

$$(a_0 + \eta)u = c\eta \quad (3-92)$$

kan de snelheid u uit verg. (3-91 en 92) worden geëlimineerd.

Dit geeft

$$c^2 = g a_0 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{a_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{a_0} \right)^2 \right] \quad (3-93)$$

Opmerkingen:

(i) De benadering $\eta^2 \ll a_0^2$ geeft

$$c^2 \approx g a_0 \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{a_0} \right\} \quad (3-94)$$

terwijl de sterkere benadering $\eta \ll a_0$ geeft:

$$c^2 \approx ga \quad \text{of} \quad c = \pm\sqrt{ga} \quad (3-95)$$

(ii) De afleiding van c kan analoog voor een willekeurig dwarsprofiel worden uitgevoerd. Dit geeft als resultaat:

$$c^2 = g \frac{B_s}{B} a \frac{1 + 3/2 \left(\frac{\eta}{a_0}\right) + 1/2 \left(\frac{\eta}{a_0}\right)^2}{1 + \{1 - B/B_s\} \frac{\eta}{a_0}} \quad (3-96)$$

voor het geval $\eta \ll a_0$ volgt er dan als benadering

$$c^2 = ga \frac{B_s}{B} \quad (3-97)$$

In dit geval is a_0 de gemiddelde diepte van het *stroomvoerende* dwarsprofiel (A_s). Er geldt dus

$$c = \pm \sqrt{gA_s/B} \quad (3-98)$$

(iii) De hiervoor veelvuldig gehanteerde uitdrukking $c = \pm \sqrt{ga_0}$ voor de voortplanting van een storing op het wateroppervlak is dus een benadering, geldig voor het geval $\eta \ll a_0$ en $B = B_s$.

(iv) Uit verg. (3-94) kan nog worden afgeleid

$$c = \pm\sqrt{ga_0} \left\{ 1 + 3/4 \frac{\eta}{a_0} \right\} \quad (3-99)$$

door $\left[1 + 3/2 \frac{\eta}{a_0} \right]^{1/2}$ in een reeks te ontwikkelen en door de tweede en hogere orde termen te verwaarlozen.

Tot nu toe is in de afleiding aangenomen dat de translatiegolf wordt geïntroduceerd in een kanaal met $u_0 = 0$. Deze beperking wordt nu losgelaten; er wordt weer de eenheid van breedte beschouwd. De uitdrukking voor de voortplantingssnelheid volgens de Saint Venant kan als volgt worden afgeleid.

Bij een zich onvervormd voortplantende golf geldt voor een zich meebewegende waarnemer

$$dh = 0 \quad (3-100)$$

Daardoor wordt de uitdrukking voor de totale differentiaal voor $h(x,t)$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial x} dx = 0 \quad (3-101)$$

Hieruit volgt

$$c = \frac{dx}{dt} = - \frac{\partial h / \partial t}{\partial h / \partial x} \quad (3-102)$$

Met behulp van de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-103)$$

geeft dit

$$c = u + a \frac{\partial u / \partial x}{\partial h / \partial x} \quad (3-104)$$

Verondersteld wordt nu dat $u = f(h)$ waardoor

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dh} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dh} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3-105)$$

Dit geeft

$$c = u + a \frac{du}{dh} \quad (3-106)$$

Bij afwezigheid van weerstand is de bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3-107)$$

Dus volgt er uit combinatie van verg. (3-105) en verg. (3-107)

$$\frac{du}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right] + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3-108)$$

Deling door $\partial h / \partial x$ geeft dan met verg. (3-102):

$$\frac{du}{dh} \{-c + u\} + g = 0 \quad (3-109)$$

Of, met verg. (3-106):

$$\frac{(c - u)}{a} \{-c + u\} + g = 0 \quad (3-110)$$

Dus

$$(c - u)^2 = ga \quad (3-111)$$

of

$$c = u \pm \sqrt{ga} \quad (3-112)$$

Voor het hierbeschouwde geval waarbij voor $t \leq 0$ in het kanaal geldt $a = a_0$ en $u = u_0$ volgt door combinatie van verg. (3-106) en (3-112):

$$du = \pm \sqrt{\frac{g}{a}} dh = \pm \sqrt{\frac{g}{a}} da \quad (3-113)$$

Dus

$$u = \pm 2 \sqrt{ga} + \text{constante} \quad (3-114)$$

of

$$u = \pm 2 \sqrt{ga} + u_0 \mp 2 \sqrt{ga_0} \quad (3-115)$$

Er ontstaat door combinatie van verg. (3-112) en (3-115):

$$c = u_0 \pm 3 \sqrt{ga} \mp 2 \sqrt{ga_0} \quad (3-116)$$

Voor $\eta \ll a_0$ geeft dit

$$c = u_0 \pm \sqrt{ga_0} \quad (3-117)$$

Met inachtneming van de term met η/a_0 en verwaarlozing van hogere orde termen volgt er uit verg. (3-116):

$$c = u_0 \pm \sqrt{ga_0} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{a_0} \right\} \quad (3-118)$$

3.5.3 Invloed profielverandering

Het gedrag van een translatiegolf wordt beheerst door de *voortplantingssnelheid* (c) en de *bergende breedte* (B). Het verband tussen de waterstandsverandering (η) en de verandering in de afvoer (ΔQ) wordt gevonden met de continuïteitsvergelijking

$$\Delta Q = (Bc)\eta \quad (3-119)$$

Bij een plotseling profielverandering wordt de golf gedeeltelijk teruggekaatst.

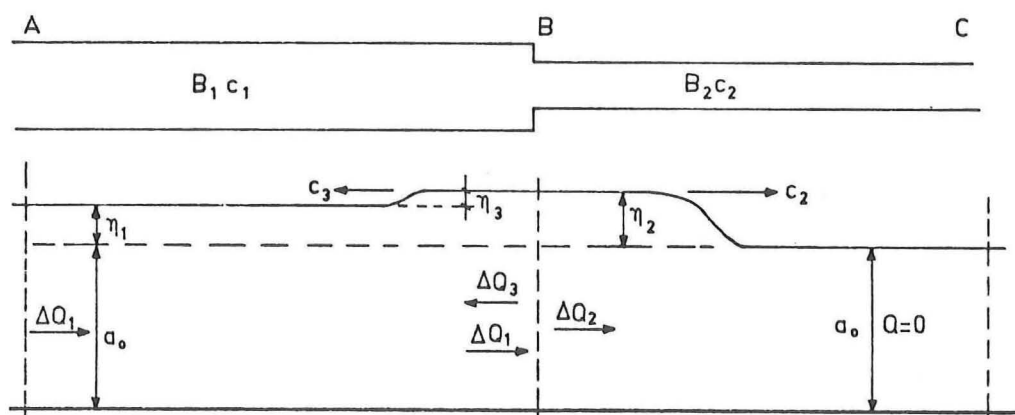


Fig. 3.9 Invloed profielverandering

De analyse van dit verschijnsel kan plaats vinden aan de hand van Fig. 3.9. In het punt B is het dwarsprofiel discontinu. Getekend is de toestand vlak *nadat* de van links aankomende golf (kenmerken η_1 , B_1 en c_1) het punt B heeft bereikt.

In B moet aan de volgende voorwaarden worden voldaan:

- o Na het passeren van de golf is er *slechts één waterstand*

$$\eta_1 + \eta_3 = \eta_2 \quad (3-120)$$

daarin is η_3 de hoogte van de teruggekaatste golf en η_2 die van de doorgaande golf.

- o Na het passeren van de golf is het debiet continu, dus de som van alle afvoeren is gelijk nul.

Of

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_3 = \Delta Q_2 \quad (3-121)$$

Met verg. (3-119) geeft dit:

$$(Bc\eta)_1 - (Bc\eta)_3 = (Bc\eta)_2 \quad (3-122)$$

Daar $B_3 = B_1$ en $c_3 = c_1$ (voor relatief lage golven) geldt er ook

$$B_1 c_1 (\eta_1 - \eta_3) = B_2 c_2 \eta_2 \quad (3-123)$$

Uit de verg. (3-120) en (3-123) kan door eliminatie van η_3 resp. η_2 een uitdrukking worden gevormd voor η_2 resp. η_3

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{2B_1 c_1}{B_1 c_1 + B_2 c_2} \quad (3-124)$$

en

$$\eta_3 = \eta_1 \frac{B_1 c_1 - B_2 c_2}{B_1 c_1 + B_2 c_2} \quad (3-125)$$

Zoals verg. (3-119) reeds suggereerde, wordt een waterloop door de factor Bc gekenmerkt m.b.t. de voortplanting van translatiegolven.

Opmerkingen

- (i) De plotselinge *vermindering* van de factor Bc maakt dat er een *positieve* golf (η_3) wordt teruggekaatst. Dit volgt direct uit verg. (3-125).
- (ii) De plotselinge *vergroting* van de factor Bc brengt een *negatieve* teruggekaatste golf met zich mee (zie verg. (3-125)).
- (iii) Als er bij B een vaste wand aanwezig is, dus $(Bc)_2 = 0$, dan vindt er totale *positieve* terugkaatsing plaats.
- (iv) Als er bij B een overgang is naar groot profiel ($B_2 c_2 \rightarrow \infty$), bijvoorbeeld een meer, dan treedt er totale *negatieve* terugkaatsing op.

3.5.4. Voorbeelden

Als eerste voorbeeld wordt genomen een oneindig lang kanaal dat overal het kenmerk Bc heeft, behalve voor de lengte L waar het kenmerk αBc bedraagt.

Wat gebeurt er met de golf die bij het traject L aankomt? (Fig. 3.10)

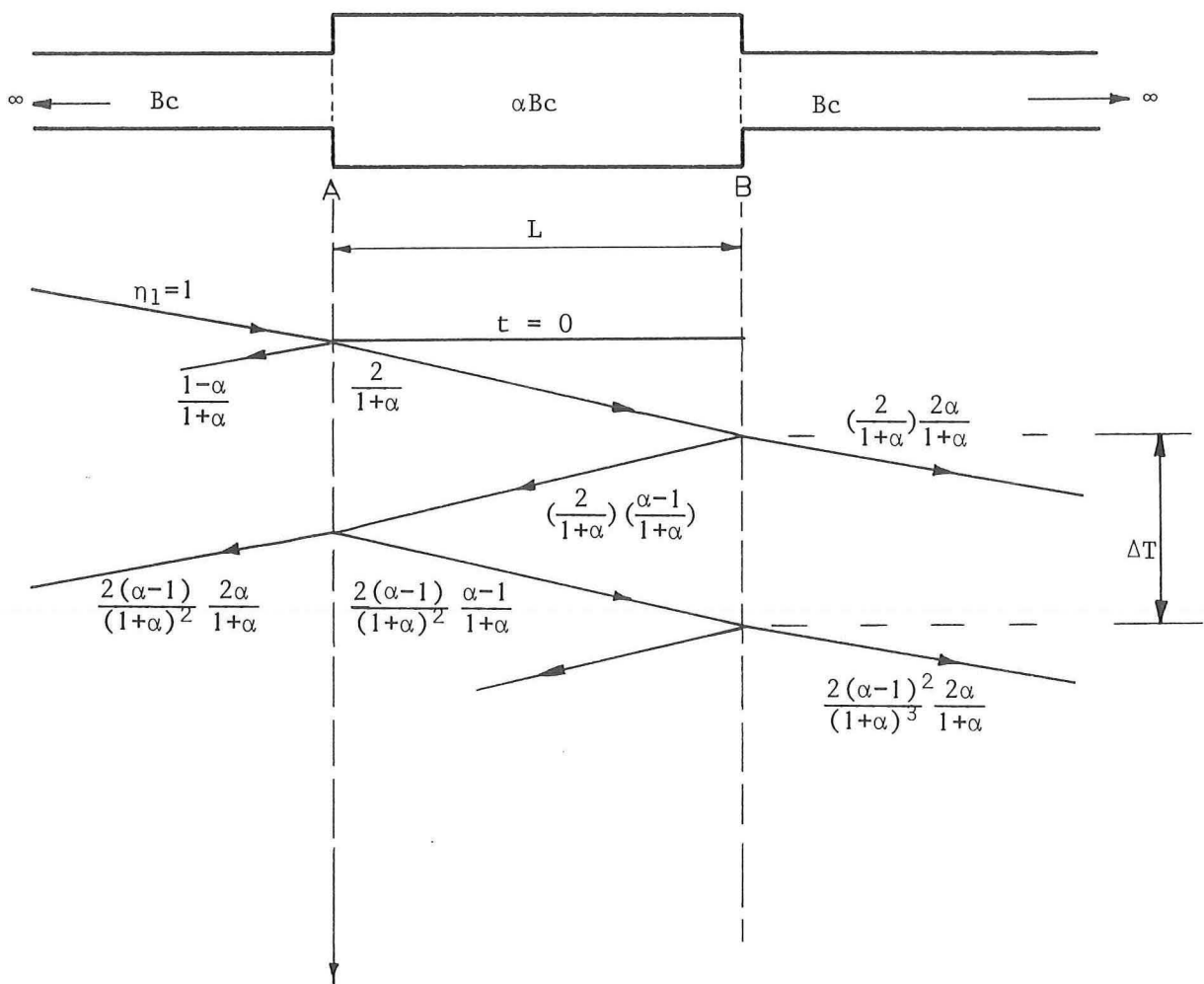


Fig. 3.10 Voorbeeld translatiegolf

(i) Op $t = 0$ aankomst van de golf bij A.

Er geldt met gebruik maken van verg. (3-124) en verg. (3-125):

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{2Bc}{Bc + \alpha Bc} = \eta_1 \frac{2}{1 + \alpha} \quad (3-126)$$

$$\eta_3 = \eta_1 \frac{Bc - \alpha Bc}{Bc + \alpha Bc} = \eta_1 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (3-127)$$

(ii) De doorgaande golf wordt bij B opnieuw gereflecteerd. Voor de golfhoogten geldt, omdat de golf nu loopt van een pand met αBc naar één met Bc ,

$$\text{passerende golf} = \eta_1 \frac{2}{1 + \alpha} \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \quad (3-128)$$

$$\text{teruggekaatste golf} = \eta_1 \frac{2}{1 + \alpha} \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha} \quad (3-129)$$

(iii) Consequent doorgeredeneerd passeren bij B achtereenvolgens golven met een relatieve golfhoogte η/η_1 van

$$\frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}, \quad \frac{4\alpha(\alpha - 1)^2}{(1 + \alpha)^4}, \quad \frac{4\alpha(\alpha - 1)^4}{(1 + \alpha)^6}, \quad \text{etc.} \quad (3-130)$$

Dit is een meetkundige reeks met de reden $r = \{(\alpha - 1)/(\alpha + 1)\}^2$; omdat $r < 1$ voor elke α , convergeert de som van deze reeks.

Voor de som geldt:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} \left\{ \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right\}^{2(i-1)} \right] = \frac{\frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}}{1 - \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right]^2} = 1 \quad (3-131)$$

In het totaal passeert dus de gehele oorspronkelijke golf het traject AB. De verschillende golven passeren op intervallen ΔT na elkaar het punt B waarin ΔT tweemaal de looptijd van een golf over de lengte L is.

Hieruit kan nog een belangrijke conclusie worden getrokken. Als L erg klein is, dan komen de verschillende golven van de reeks van verg. (3-131) zo snel na elkaar dat het is alsof de golf ongestoord het obstakel passeert. Zo zullen brugpeilers in een rivier geen invloed hebben op het gedrag van een translatiegolf.

Het tweede voorbeeld is ontleend aan de situatie bij de sluis bij Born (Fig. 3.11).

Ter toelichting op de figuur kan nog het volgende worden vermeld:

- (i) De beschouwde (oude) toestand bij de sluis Born gaf aanleiding tot *interferenties*. Doordat de looptijd van de golf over het traject AB gelijk is aan die over BC komen golven die A en C gelijktijdig verlaten, ook gelijktijdig in B aan.
- (ii) De schutgolf is driehoekig met $Q_{\max} = 80 \text{ m}^3/\text{s}$ en $\eta_{\max} = 0,32 \text{ m}$. Er geldt dus $Bc = 80/0,32 = 250 \text{ m}^2/\text{s}$.
- (iii) De maximale waarde van Q wordt bereikt na 3 minuten. De lijnen in het x-t-diagram geven de loop van het golffront aan. Omdat er is uitgegaan van onvervormde voortplanting, komt de golftop dus steeds 3-minuten later.

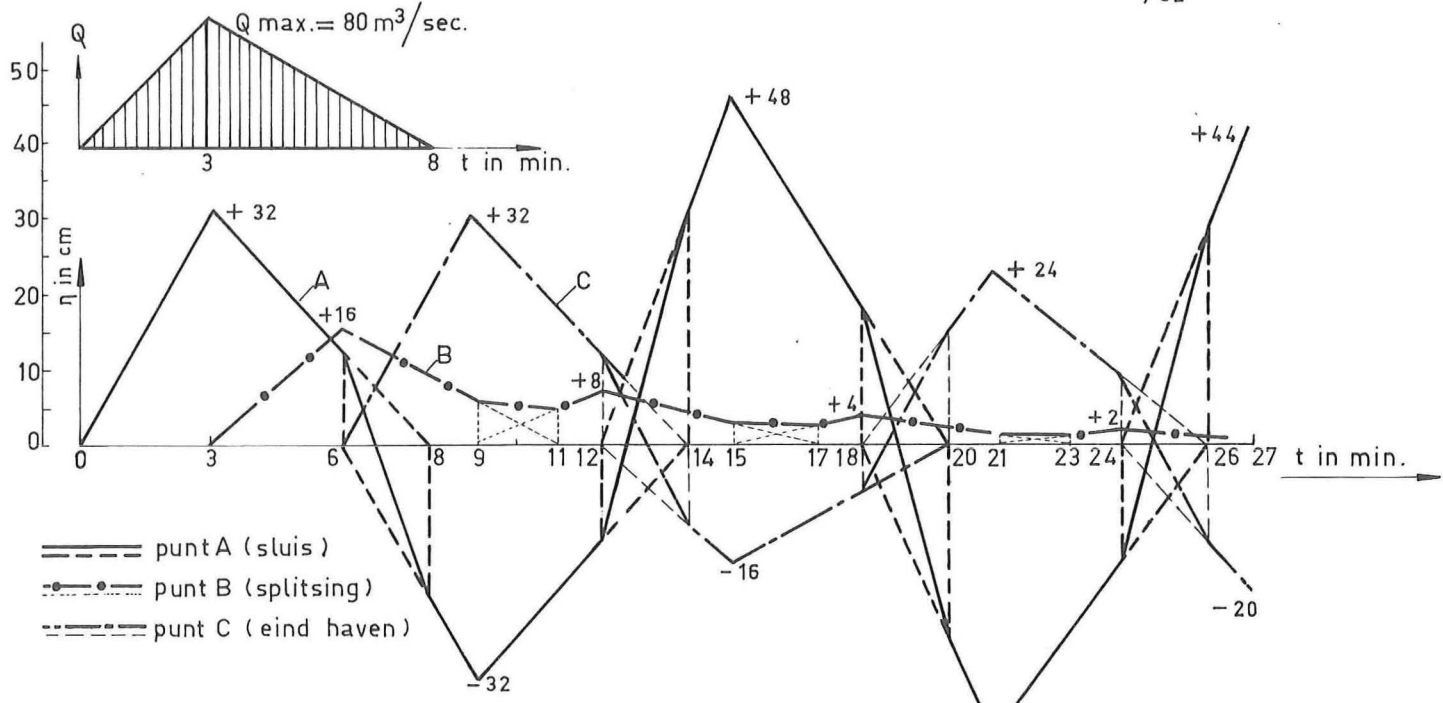
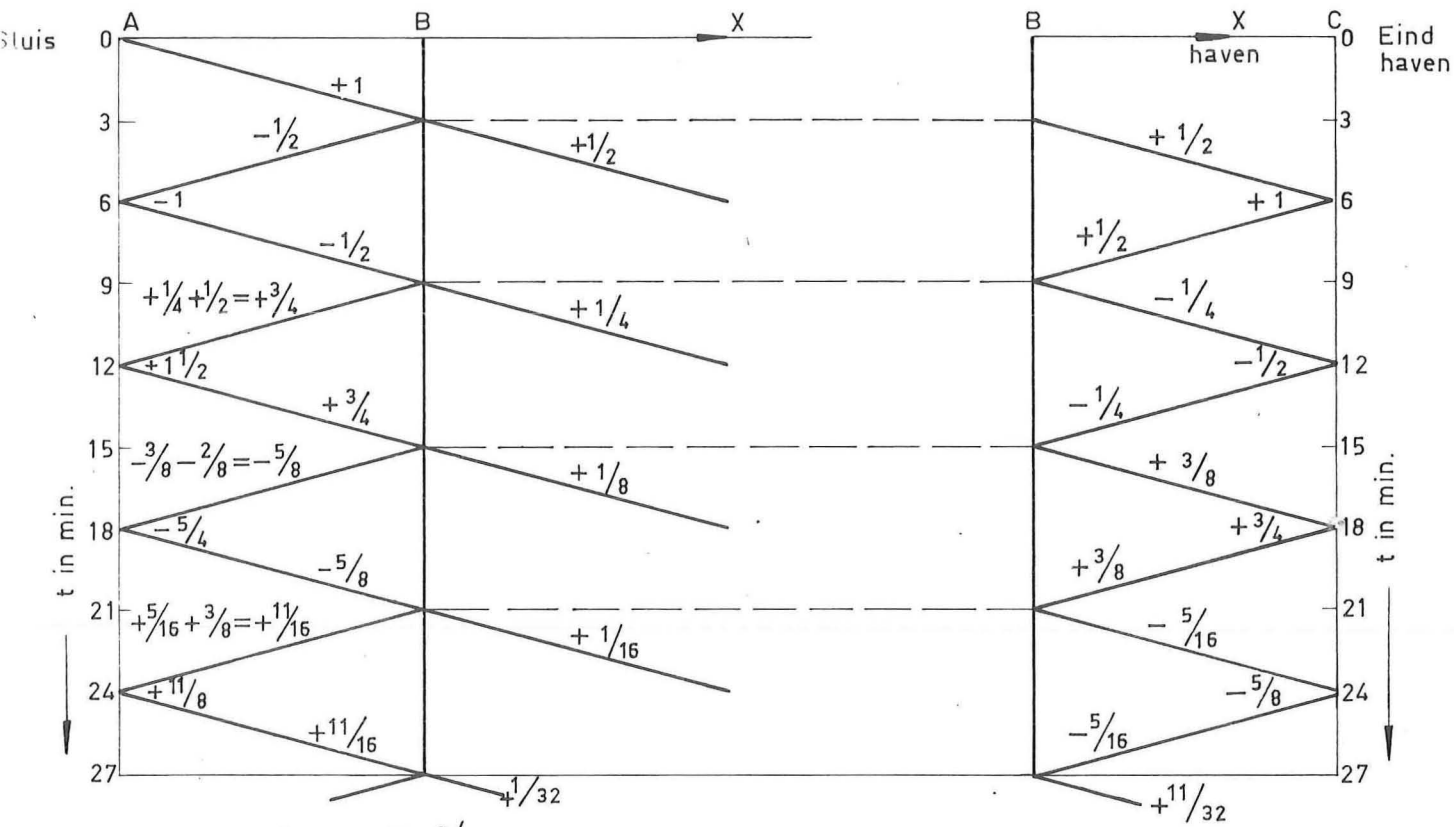
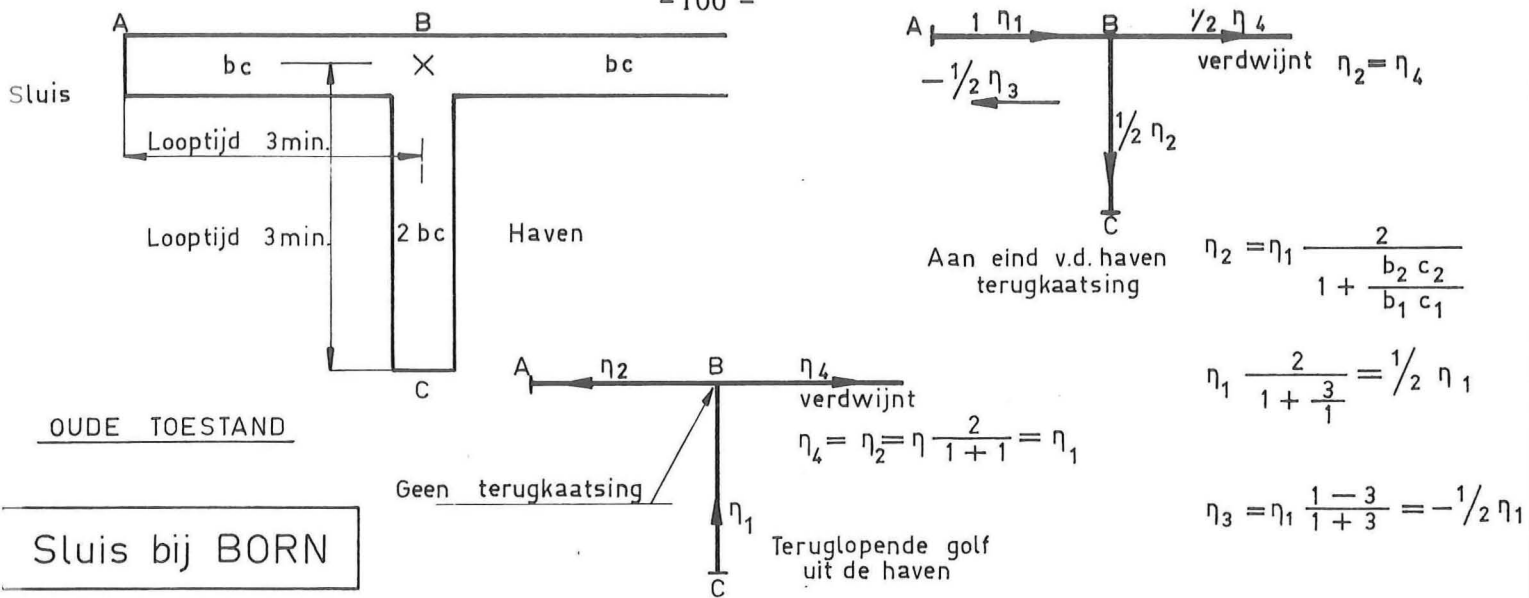


Fig. 2.11. Propagation of a discharge pulse in a lock system.

3.6. Dynamische golf

3.6.1. Inleiding

De voorgaande benaderingen van lange golven hebben betrekking op gevallen waarin de drie belangrijke factoren: *traagheid*, *berging* en *weerstand*, op de een of andere manier vereenvoudigingen toelaten.

Natuurlijk doen zich gevallen voor waarin deze vereenvoudigingen niet mogelijk zijn, zodat met de volledige differentiaalvergelijkingen voor lange golven moet worden gewerkt. Voor de eenheid van breedte geldt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial a}{\partial x} = + g i_b - g \frac{u|u|}{C^2 a} = W \quad (3-132)$$

en

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-133)$$

Dit zijn lineaire differentiaalvergelijkingen in de afgeleiden van de afhankelijke variabelen $u(x,t)$ en $a(u,t)$.

Voor de afhankelijke variabelen gelden uiteraard ook nog de uitdrukkingen voor de totale differentiaal

$$\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx = du \quad (3-134)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} dt + \frac{\partial a}{\partial x} dx = da \quad (3-135)$$

Er zijn dus *vier* lineaire vergelijkingen voor de partiële differentiaalquotienten $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$, $\partial a/\partial t$ en $\partial a/\partial x$. Dit stelsel zal worden gebruikt om de voortplantingssnelheden algemeen af te leiden (voor meer details wordt verwezen naar Bijlage III).

3.6.2. Voortplantingssnelheid

De vergelijkingen (3-132...135) vormen het volgende stelsel:

$$\begin{vmatrix} 1 & u & 0 & g \\ 0 & a & 1 & u \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} \partial u / \partial t \\ \partial u / \partial x \\ \partial a / \partial t \\ \partial a / \partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W \\ 0 \\ du \\ da \end{vmatrix} \quad (3-136)$$

Men kan zich nu afvragen hoe discontinuïteiten in de afgeleiden zich *kunnen* voortplanten. Het eenvoudigst is dit voor te stellen voor een discontinuïteit in $\partial a / \partial x$ (knik in de waterdiepte). Voor een dergelijke discontinuïteit geldt dat de afgeleide links en rechts een verschillende waarde heeft. Voor een lineair stelsel vergelijkingen kan dit alleen als de oplossingen onbepaald zijn. Uit de *regel van Cramer* volgt dan onder meer dat de hoofddeterminant van het stelsel in dit geval gelijk aan nul moet zijn.

Dit levert een uitdrukking voor de voortplantingssnelheden.

Uit

$$\begin{vmatrix} 1 & u & 0 & g \\ 0 & a & 1 & u \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix} = 0 \quad (3-137)$$

volgt

$$(dx)^2 - 2 u dxdt - (ga - u^2)(dt)^2 = 0 \quad (3-138)$$

en met de definitie $c = dx/dt$

$$c^2 - 2 u c - (ga - u^2) = 0 \quad (3-139)$$

Dus

$$c = u \pm \sqrt{ga} \quad (3-140)$$

In dimensieloze vorm met $\phi = c/u$ geeft dit als resultaat

$$\phi = 1 \pm Fr^{-1}$$

met $Fr = \text{Froudegetal} = u/\sqrt{ga}$

Opmerkingen:

- (i) Op de grootte van de voortplantingssnelheid van een oneindig kleine storing (een discontinuïteit in de afgeleide) heeft het rechterlid van het stelsel van verg. (3-136) geen invloed.
- (ii) De in vorige paragrafen gegeven benaderingen komen neer op het verwaarlozen van een of meer termen uit de verg. (3-136). De voortplantingssnelheden kunnen dan op analoge wijze worden afgeleid.
Zo zijn de vergelijkingen die tot de *snaarvergelijking* leiden (zie verg. (3-78)):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & g \\ 0 & a_0 & 1 & 0 \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \partial u / \partial t \\ \partial u / \partial x \\ \partial \eta / \partial t \\ \partial \eta / \partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ d\eta \end{vmatrix} \quad (3-142)$$

Het nul stellen van de coëfficiënten determinant levert voor dit geval

$$(dx)^2 - g a_0 (dt)^2 = 0 \quad (3-143)$$

of

$$c = dx/dt = \pm \sqrt{g a_0} \quad (3-144)$$

Dit is in overeenstemming met het resultaat in par. 3.5.1.

(iii) De differentiaalvergelijking

$$dx = c dt \quad (3-145)$$

levert bij integratie een lijn in het x-t diagram. Door variatie van de waarde van de integratieconstante is er sprake van een familie van lijnen (zgn. *karakteristieken*). Omdat er steeds sprake is van twee waarden van c zijn er ook twee families van karakteristieken.

Afhankelijk van de stroming geldt het volgende:

Subkritische stroming ($Fr < 1$) er is sprake van positieve en negatieve karakteristieken. Dit volgt uit

$$\phi_{1,2} = 1 \pm Fr^{-1}$$

Kritische stroming ($Fr = 1$) er is sprake van één serie positieve karakteristieken. Voor de andere serie geldt $dx = 0$.

Deze serie stelt voor lijnen $x = \text{constant}$, m.a.w. lijnen evenwijdig aan de t -as in het x - t diagram.

Superkritische stroming ($Fr > 1$) weer volgens $\phi_{1,2} = 1 \pm Fr^{-1}$ zijn er nu twee series positieve karakteristieken.

Door elk punt in het x - t diagram kunnen twee karakteristieken worden getrokken (zie Fig. 3-12).

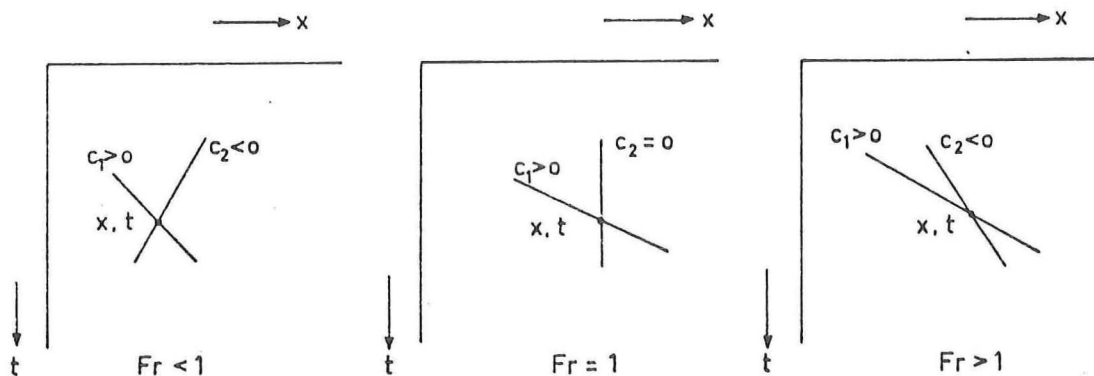


Fig. 3-12 Karakteristieken, afhankelijk van stromingstype.

(iv) Het verschil tussen verg. (3-140) en (3-144) ontstaat door het verschil tussen verg. (3-136) en (3-142). Het is eenvoudig mogelijk om uit de complete verg. (3-136) benaderingen voor de voortplantingssnelheden te vinden, die het gevolg zijn van het verwaarlozen van één of meer termen uit de vergelijking. Door de termen van verg. (3-136) een merkcoëfficiënt te geven (b.v. de term $u \partial u / \partial x$) komt deze coëfficiënt in verg. (3-138). Het nul of één stellen van deze coëfficiënt geeft dan eenvoudig de invloed van de betrokken benadering aan.

3.6.3. Karakteristieke relaties

In de vorige paragraaf is uit de *regel van Cramer* afgeleid, dat de coëfficiëntendeterminant van het stelsel gelijk nul moet zijn om te zorgen dat de oplossing van het lineaire stelsel vergelijkingen in de partiële afgeleiden onbepaald wordt. Dit is geen voldoende voorwaarde. Immers volgens de regel van Cramer worden de oplossingen gevormd door een quotiënt van twee determinanten. Voor het onbepaald zijn van de breuk moet dus niet alleen de noemer (gevormd door de coëfficiëntendeterminant) maar ook de teller gelijk nul zijn.

De determinant van de teller ontstaat door één van de kolommen van de coëfficiëntendeterminant te vervangen door de kolom van de rechterleden. Voor het goede begrip wordt dit eerst gedaan voor het eenvoudige geval van verg. (3-142).

Zo moet b.v. gelden

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & a_0 & 1 & 0 \\ du & dx & 0 & 0 \\ d\eta & 0 & dt & dx \end{vmatrix} = 0 \quad (3-146)$$

Dit geeft

$$a_0 du dt = - d\eta dx$$

of

$$du = - d\eta \frac{dx/dt}{a_0} \quad (3-147)$$

Aangezien ook verg. (3-144) moet gelden geeft dit

$$du = \mp d\eta \cdot \sqrt{\frac{g}{a_0}} \quad \text{voor} \quad \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{ga_0} \quad (3-148)$$

Als een andere kolom van de coëfficiëntendeterminant wordt vervangen dan geeft dit hetzelfde resultaat.

Dit levert dus het volgende beeld:

- in het x-t diagram lopen twee families van lijnen, nl. die volgen uit $c = \pm \sqrt{ga_0}$ (karakteristieke richtingen in het x,t-vlak).
- Langs deze lijnen geldt $du = \mp d\eta \sqrt{g/a_0}$ (karakteristieke relaties).

Anders gezegd

$$du = - d\eta \sqrt{g/a_0} \quad \text{voor} \quad dx/dt = + \sqrt{ga_0} \quad (3-149)$$

$$du = + d\eta \sqrt{g/a_0} \quad \text{voor} \quad dx/dt = - \sqrt{ga_0} \quad (3-150)$$

Er is hier dus een alternatieve benadering voor de snaarvergelijking gevonden.

- In par. 3.5.1. is er sprake van het oplossen van een *partiële* differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3-151)$$

of

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (3-152)$$

omdat de x en t coördinaten willekeurig worden gekozen.

- Als voor hetzelfde probleem de oplossing langs karakteristieken wordt gezocht dan behoeven slechts *gewone* differentiaalvergelijkingen te worden opgelost, nl. de vergn. (3-148).

Opmerking

Voor het hier beschouwde geval van verg. (3-146) blijkt dat dx/dt een constante waarde heeft als de waterdiepte a_0 constant is. Uit verg. (3-148) volgt dat dan de verhouding tussen du en $d\eta$ ook constant is.

De wijze waarop men m.b.v. de karakteristieke vergelijkingen een oplossing kan vinden kan als volgt globaal worden aangegeven.

Beschouwt men een $x-t$ diagram met daarin twee punten A en B (zie Fig. 3.13) dan is het mogelijk om de waarden van u en η voor A en B weer te geven in een $u-\eta$ diagram (zie de punten A' en B' in Fig. 3.14).

In het $x-t$ diagram bestaan zowel in A als in B twee karakteristieken:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{ga_0}$$

Uit Fig. 3.13 blijkt dat twee van deze karakteristieken elkaar snijden in een punt C op een *later* tijdstip.

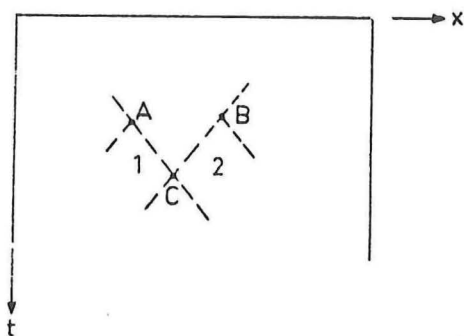


Fig. 3.13 $x-t$ diagram

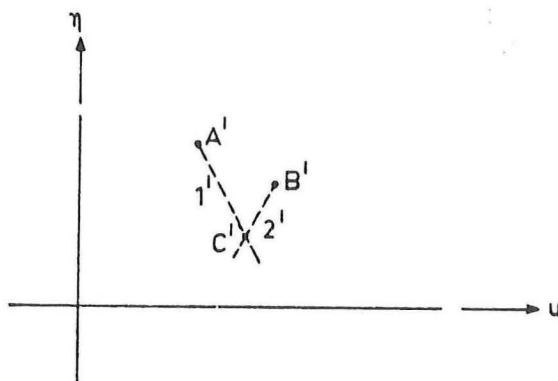


Fig. 3.14 $u-\eta$ diagram

Langs de karakteristiek (1) $\frac{dx}{dt} = + \sqrt{ga_0}$ geldt de relatie

$$(1') \frac{du}{d\eta} = - \sqrt{\frac{g}{a_0}}$$

Langs de karakteristiek (2) $\frac{dx}{dt} = - \sqrt{ga_0}$ geldt de relatie

$$(2') \frac{du}{d\eta} = + \sqrt{\frac{g}{a_0}}$$

De waarde voor u en η in punt C kan nu worden afgelezen in het punt C' (zie Fig. 3.14).

Deze wijze van rekenen vertoont overeenkomst met die bij het voorbeeld van de sluis bij Born (Fig. 3.11).

Beschouwt men nu het stelsel (3-136) dan worden de karakteristieke relaties uiteraard wat ingewikkelder.

Het nul stellen van de coëfficiëntendeterminant levert verg. (3-140)

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{ga} \tag{3-153}$$

Het nul stellen van de determinant in de teller van de regel van Cramer voor $\frac{\partial a}{\partial x}$ geeft:

$$\begin{vmatrix} 1 & u & 0 & W \\ 0 & a & 1 & 0 \\ \frac{dt}{dx} & dx & 0 & du \\ 0 & 0 & dt & da \end{vmatrix} = 0 \tag{3-154}$$

Uitwerken geeft:

$$a \, du + \left[\frac{dx}{dt} - u \right] da = a \, W \, dt \tag{3-155}$$

Substitueren van verg. (3-153) en delen door a geeft de karakteristieke relatie:

$$du \pm \sqrt{\frac{g}{a}} da = W \, dt \quad \text{geldig voor} \quad \frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{ga} \tag{3-156}$$

- Indien in verg. (3-156) $W = 0$ wordt gesteld vindt men (als a door η resp. a_0 wordt vervangen) verg. (3-148) terug.

- Omdat nu $\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{ga}$ zijn de karakteristieken in het x-t diagram niet konstant. Dit geeft aanleiding tot golfvervorming.
- De termen uit de bewegingsvergelijking $g i_b - g \frac{u|u|}{C_a^2} = W$ maken het rekenwerk ingewikkelder en geven eveneens aanleiding tot golfvervorming.

De theorie en de toepassing van de integratie m.b.v. karakteristieken worden later nog uitvoeriger behandeld. De karakteristieke relaties zijn van groot belang voor het verkrijgen van inzicht, dat onmisbaar is bij het analyseren van golfverschijnselen.

Lijst van belangrijkste symbolen

<i>Symbool</i>	<i>Omschrijving</i>	<i>Dimensie</i>
a	Waterdiepte	[L]
a'	Versnelling	[LT ⁻²]
A	Bergend oppervlak	[L ²]
A _s	Oppervlak van een stroomvoerend profiel	[L ²]
B	Bergende breedte	[L]
B _s	Stroomvoerende breedte	[L]
c	Voortplantingssnelheid	[LT ⁻¹]
C	Coëfficiënt van Chézy	[L ^{1/2} T ⁻¹]
D	Diameter	[L]
e	Grondtal natuurlijke logaritmen	[-]
F	Kracht	[MLT ⁻²]
ΔF	Kombergingsoppervlak	[L ²]
Fr	Getal van Froude (Fr = u/√ga)	[-]
g	Versnelling zwaartekracht	[LT ⁻²]
h	Waterstand	[L]
i _b	Bodemhelling	[-]
k	Constante factor in de weerstandsterm	[L ⁻³ T]
	Golfgetal	[-]
k ^x	Getal van Lorentz	[-]
K	Compressiemodulus	[ML ⁻¹ T ⁻²]
L	Lengte	[L]
L _v	Vakkonstante	[-]
M _v	Vakkonstante	[L ⁻² T]
N _v	Vakkonstante	[L ² T ⁻¹]
O _v	Vakkonstante	[-]
p	Dempingsfactor	[L ⁻¹]
P	Omtrek (natte omtrek)	[L]
q	Afvoer (debiet) per breedte-eenheid	[L ² T ⁻¹]
Q	Afvoer (debiet)	[L ³ T ⁻¹]
r	Voortplantingsconstante per lengte-eenheid	[L ⁻¹]
R	Hydraulische straal R = A _s /P	[L]
t	Tijd	[T]
u	(Tijdsgemiddelde van de) snelheid in x-richting	[LT ⁻¹]
u'	Turbulente snelheidsfluctuatie in x-richting	[LT ⁻¹]

\vec{u}	Snelheidsvector (richting en grootte)	$[LT^{-1}]$
U	Momentane snelheid in x-richting	$[LT^{-1}]$
v	(Tijds gemiddelde van de) snelheid in y-richting	$[LT^{-1}]$
v'	Turbulente snelheidsfluctuatie in y-richting	$[LT^{-1}]$
V	Momentane snelheid in y-richting	$[LT^{-1}]$
w'	Turbulente snelheidsfluctuatie in z-richting	$[LT^{-1}]$
w	(Tijds gemiddelde van de) snelheid in z-richting	$[LT^{-1}]$
W	Momentane snelheid in z-richting	$[LT^{-1}]$
x	Ordinaat (horizontaal)	[L]
y	Ordinaat (horizontaal)	[L]
z	Ordinaat (vertikaal)	[L]
β	Hellingshoek	[-]
μ	Afvoercoëfficiënt	[-]
ν	Kinematische viscositeit	$[L^2T^{-1}]$
ρ	Dichtheid (soortgelijke massa)	$[ML^{-3}]$
τ	Schuifspanning	$[ML^{-1}T^{-2}]$
σ	Spanning	$[ML^{-1}T^{-2}]$
τ	Periode	[T]
λ	Golflengte	[L]
η	Hoogte van een verstoring (waterspiegel)	[L]
	Dempingsfactor	[-]
κ	Fasehoek van $h(x,t)$	[-]
ϕ	Fasehoek van $Q(x,t)$	[-]

Referenties

- Chow, Ven te (1959) "Open Channel Hydraulics", Mc. Graw-Hill, New York.
- Dronkers, J.J. (1964) "Tidal computations in rivers and coastal waters", North-Holland Publ. Cie. Amsterdam.
- Eagleson, P.S. (1970) "Dynamic Hydrology", Mc. Graw-Hill, New York.
- Fox, J.A. (1977) "Hydraulic analysis of unsteady flow in pipe networks", McMillan, London.
- Henderson, F.M. (1970) "Open-channel flow", Mcmillan, New York.
- Jansen, P.Ph. (1978) "Principle of River Engineering", Pitman Publ. Ltd. London.
- Kranenburg, C. (1970) "Waterslagberekeningen voor leidingen met bufferschacht of luchtketel", De Ingenieur 11, pp. 153-162.
- Lax, P.D. (1954) "Weak solutions on non-linear hyperbolic equations and their numerical computations", Comp. P. Appl. Math., 7, pp. 159-163.
- Leendertse, J.J. (1967) "Aspects of a computational model for long-period water-wave-propagation". Proefschrift Delft.
- Le Méhauté, B. (1976) "An introduction to hydrodynamics and water waves", Springer-Verlag, New York.
- Lighthill, M.J. en (1955) "On kinematic waves" I. Flood movement in
Whitham, G.B. long rivers, Proc. Roy. Soc. (London) Vol. 229.
- Lorentz, H.A. (1926) "Verslag staatscommissie Zuiderzee, 1918-1926" Algemene Landsdrukkerij, Den Haag.
- Mazure, J.P. (1937) "De berekening van getijden en stormvloed op benedenrivieren", Proefschrift Delft.
- Richtmeijer, R.D. en (1967) "Difference methods for initial value pro-
Morton, K.W. blems", Interscience Publ. New York.
- Rouse, H. (1950) "Engineering hydraulics", Wiley & Sons, New York.
- Schönfeld, J.C. (1951) "Propagation of Tides and similar Waves" Proefschrift T.H. Delft, Staatsdrukkerij, Den Haag.
- Stoker, J.J. (1957) "Water waves", Interscience Publishers, New York.
- Streeter, V.L. en (1967) "Hydraulic Transients" , Mc. Graw-Hill, New
Wylie, E.B. York.

- Stroband, H.J. (1947) "Een bijdrage tot de kennis van de getijbeweging op de benedenrivieren en zeearmen", de Ingenieur, nr. 36.
- Vreugdenhil, C.B. (1973) "Computations methods for channel flow", Verslagen en Mededelingen Commissie Hydrologisch onderzoek TNO no. 18.
- Vreugdenhil, C.B. en Voogt, J. (1975) "Hydrological transport phenomena in estuaries and coastal waters", ASCE Symposium San Francisco.
- Yevjevich, V. en Mahmood, K. ed. (1975) "Unsteady Flow in Open Channels", Water Resources Publications Vol. I, II, III, Colorado U.S.A.