

818' 112

WRINGING VAN HOGE GEBOUWEN

Technische Universiteit Delft
Bibliotheek Faculteit der Civiele Techniek
(Bezoekadres Stevinweg 1)
Postbus 5048
2600 GA DELFT

afstudeerproject

TU Delft

Faculteit der Civiele Techniek
Vakgroep Mechanica en Constructies
Sectie Grondslagen Constructieer

in samenwerking met

Ingenieursbureau Grabowsky & Poort

Afst

M&C

92-01

afstudeerder: G.P.C. van Oosterhout

begeleiders: -Prof. dr. ir. J. Blaauwendraad
-Prof. dipl.-ing. J.N.J.A. Vambersky
-ing. H. van Koten
-ir. D.G. Mans

3810 068

VOORWOORD

Dit verslag is het resultaat van het werk, dat verricht is in het kader van het afstudeer-project "Wringing van hoge gebouwen". Ik heb er voor gekozen om het rapport in twee delen te splitsen, daar het afstuderen ook duidelijk in twee fasen was verdeeld. Het eerste deel, het literatuuronderzoek, is algemeen van aard en beschrijft vooral de diverse aspecten, die bij wringing komen kijken. Het tweede deel, de case-study, is daarentegen meer gericht op de consequenties, die wringing voor het gedrag van een hoog gebouw heeft.

De stage, die ik van februari tot en met juni 1992 bij ingenieursbureau Grabowsky&Poort heb gelopen, heeft het mogelijk gemaakt om aan een torsie-gevoelig gebouw te kunnen werken, namelijk de "taartpunt" van het Beatrixkwartier. Ik wil ir. F. Leatemia en ir. T. Lindhoud, die als constructeur bij het project zijn betrokken, bedanken voor de goede raad gedurende de stage. Daarnaast mag ik de andere constructeurs van de afdeling niet vergeten, die altijd behulpzaam waren bij het oplossen van problemen.

Het windtunnelonderzoek was niet mogelijk geweest zonder de medewerking van ir. Crommelin, die de tunnel van TNO-binnenmilieu beschikbaar stelde. Verder heeft ir. Speet mij geadviseerd bij het ontwerpen van de meetopstelling en geholpen bij het uitvoeren van de metingen. Beide heren zou ik bij deze hartelijk willen danken voor hun bijdragen.

Tenslotte wil ik mijn begeleiders, Prof. Blaauwendraad, Prof. Vambersky, ing. v. Koten en ir. Mans, bedanken voor hun hulp en inbreng tijdens het afstudeer-project.

Delft, 10 augustus 1992,

G.P.C. van Oosterhout

SAMENVATTING

Over wringing van hoge gebouwen is in de Nederlandse bouwwereld weinig bekend. Teneinde een beter begrip te krijgen van het belastingsgeval wringing in hoogbouw is een literatuuronderzoek gehouden.

Hieruit volgt, dat er drie categorieën aan te wijzen zijn, waarin de oorzaken liggen. Dit zijn: constructie, aardbeving en wind. De belangrijkste aspecten hieruit voor de Nederlandse praktijk zijn de asymmetrische stabiliteitsvoorziening en de ongelijkmatige winddrukverdeling.

Er is gezocht naar een geschikte kwantificering van torsie door wind, die rekening houdt met de gesignaleerde oorzaken van wringing. De gevonden waarden zijn vergeleken met de huidige norm NEN 6702. Het blijkt dan, dat de norm wringing onvoldoende beschrijft voor een aantal typen hoogbouw.

Tot slot van het literatuuronderzoek zijn de criteria verzameld waar wringing aan dient te voldoen. Het belang van wringing lijkt hierbij vooral te liggen bij de vergroting van de vervormingen en spanningen in de andere richtingen.

Vervolgens is het gedrag van een torsie-gevoelig gebouw onderzocht aan de hand van een case-study. Het betreft een gebouw met een driehoekige plattegrond (een taartpunt) met een kern als stabiliteitsvoorziening.

De wringstijfheid van de kern is onderzocht, waarbij op analytische wijze de verzwakkende aanwezigheid van gaten in de kern in rekening is gebracht. Numeriek zijn de resultaten gecontroleerd.

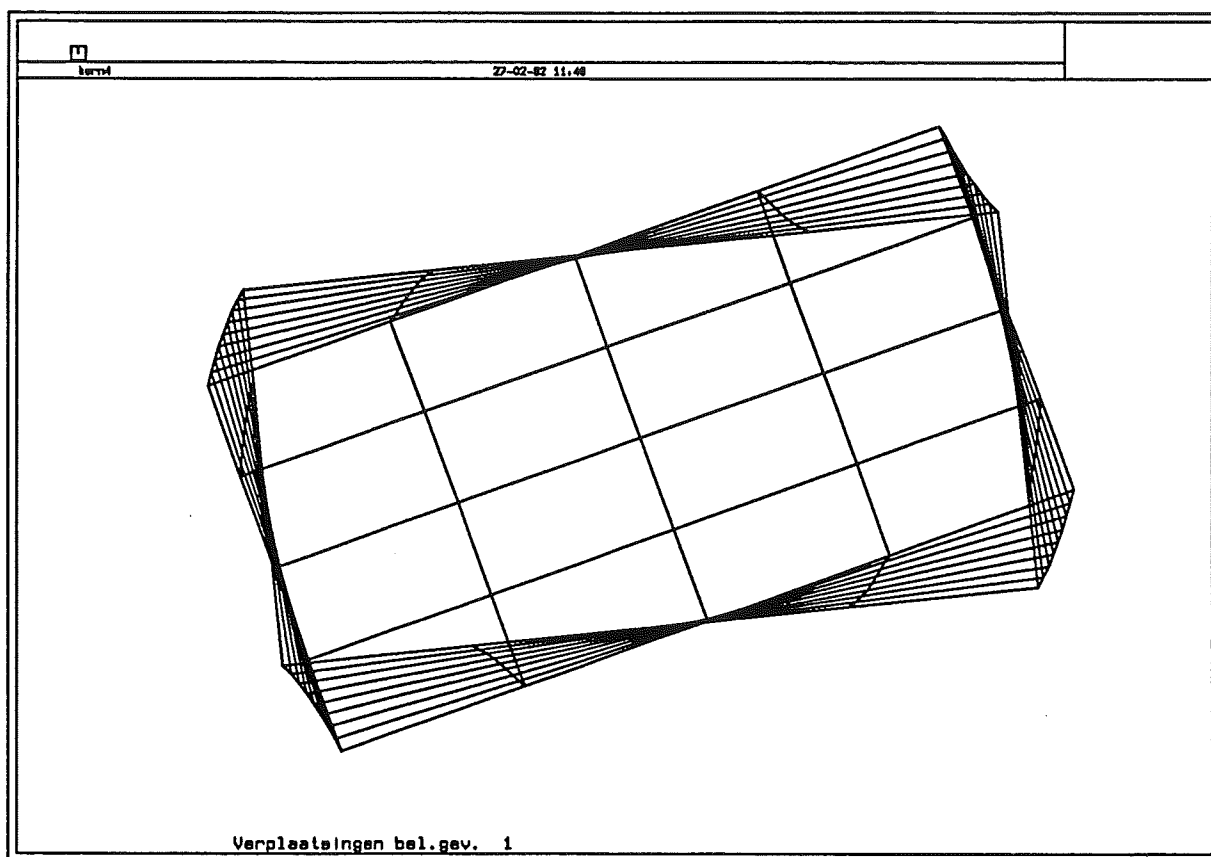
Aan de hand van een windtunnelonderzoek is de belasting op het gebouw bepaald, waarbij de aandacht vooral uitgegaan is naar de wringing. Uit dit onderzoek is gebleken, dat NEN 6702 voor dit type gebouw een onderschatting geeft van de torsie, waar op gerekend dient te worden.

Tenslotte zijn de stijfheid en stabiliteit gecontroleerd. Bij de stabiliteitsberekening is rekening gehouden met de interactie tussen buiging en wringing, die optreedt doordat de kern excentrisch is gesitueerd in de plattegrond. Uit de berekeningen blijkt, dat de kern alleen niet stijf genoeg is. Een geschikte verstijving van het gebouw wordt verkregen door een wand te plaatsen in het smalle deel van de taartpunt.

SYMBOLENLIJST

A	=doorsnede, oppervlakte	m^2
a	=overspanning van latei	m
b	=breedte (y)	m
C_p	=stuwdrukcoëfficiënt	-
C_t	=torsiecoëfficiënt	-
C_{tot}	=gesommeerde stuwdrukcoëfficiënt	-
C_x	=gemiddelde stuwdrukcoëfficiënt in x-richting	-
C_y	=gemiddelde stuwdrukcoëfficiënt in y-richting	-
c	=demping	kg/s
c_{krit}	=kritische demping	kg/s
D	=dwarskracht	N
d	=diepte (x)	m
E	=elasticiteitsmodulus	N/m^2
e_i	=excentriciteit in i-richting	m
F_i	=kracht in de i-richting	N
f	=frequentie	Hz
f_i	=eigenfrequentie in i-richting	Hz
G	=glijdingsmodulus	N/m^2
G_i	=gewicht van element i	N
g	=vlaagfactor	-
H	=overdrachtsfunctie	N/m
h	=hoogte (z)	m
I	=turbulentie	-
I_p	=polair traagheidsmoment	m^4
I_t	=wringtraagheidsmoment (om de z-as)	m^4
I_x	=buigtraagheidsmoment (om de x-as)	m^4
I_y	=buigtraagheidsmoment (om de y-as)	m^4
l	=lengte (x,y,z)	m
M_i	=(buigend) moment om de i-as	Nm
M_t	=wringend moment (om de z-as)	Nm
$M_{t,0}$	=wringend moment op de fundering	Nm
m_t	=verdeeld wringend moment	Nm/m
m	=massa	kg
n_i	=vergrotingsfactor bij druk+buiging in richting i	-
P	=drukkracht	N
P_x	=Eulerse knikkracht om de x-as	N
P_y	=Eulerse knikkracht om de y-as	N
P_θ	=Rekengrootheid voor torsie-knik	N
p	=overdruk bij membraan-analogie	N/m^2
p_w	=stuwdruk	N/m^2
q	=verdeelde belasting	N/m
q_i	=membraankrachten	N/m
r	=straal	m
S	=spankracht	N/m
S_D	=ijkfactor voor dwarskrachten	V/N

S_T	=ijkfactor voor torsie	V/Nm
S_x	=schuifkracht	N/m
T_m	=dynamische deel van het wringend moment	Nm
T_R	=maximaal wringend moment in R jaar	Nm
t	=dikte, afstandsmaat	m
t^*	=fictieve dikte	m
u	=verplaatsing in x-richting	m
V	=spanning(sverschil)	V
v	=verplaatsing in y-richting	m
$v(z)$	=windsnelheid	m/s
v_T	=gereduceerde snelheid, $v_T = V_h/fl$, hierbij is l een karakteristieke lengtemaat	-
w	=verplaatsing in z-richting	m
x	=horizontale as	m
y	=horizontale as	m
z	=verticale as	m
z_0	=ruwheidslengte	m
β	=vormfactor volgens Craig	m
γ	=afschuifhoek	rad
ζ	=verhouding c/c_{krit}	-
η	=vormfactor bij afschuiving	-
θ	=rotatie in x-y-vlak, wringhoek	rad
θ_1	=vergrotingsfactor volgens NEN 6702 art. 8.6	-
θ_2	=vergrotingsfactor volgens NEN 6702 art. 8.6	-
Φ	=spanningsfunctie bij membraanalogie	N/m
μ_i	=gemiddelde van de grootheid i	-
ν	=getal van Poisson	-
κ_z	=specifieke verwringing	rad/m
ρ	=dichtheid van de lucht	kg/m ³
ρ_i	=dichtheid van de stof i	kg/m ³
σ_i	=standaard-afwijking van de grootheid i	-
σ_i	=spanning in richting i	N/m ²
τ	=schuifspanning	N/m ²
ω	=hoekfrequentie	rad/s
ω	=sectoriële coördinaat	-



wringing van een kern in bovenaanzicht

INHOUD:

VOORWOORD	I
SAMENVATTING	II
SYMBOLENLIJST	III
INHOUD	VI

DEEL I

Hoofdstuk 1: Inleiding

1.1	Doel literatuuronderzoek	1
1.2	Plaats in het afstuderen	1
1.3	Opzet literatuuronderzoek	
1.4	Tekenafspraken	2

Hoofdstuk 2: Constructieve oorzaken

2.1	Stabiliteitsvoorziening asymmetrisch	3
2.2	Onregelmatige vorm van de doorsnede	5
2.3	Gekoppelde eigentrillingen	6
2.4	Niet-lineair gedrag	7
2.5	Praktijkvoorbeelden	10
2.5.1	San Diego Gas and Electric Company Building	10
2.5.2	Parsons World Headquarters	12

Hoofdstuk 3: Belasting uit de omgeving

3.1	Aardbevingen	14
3.1.1	Rotatie-component van groundbeweging	14
3.1.2	Laterale versnellingen	15
3.2	Grenslaagstroming	16
3.2.1	Randeffecten	16
3.2.2	Een onregelmatig oppervlak	18
3.2.3	Wind onder een hoek	19
3.3	Windvlagen	20
3.4	Wervel-geïnduceerde trillingen	20
3.5	Interferentie-effecten	22
3.5.1	Wervel-geïnduceerde interferentie	23
3.5.2	Gap flow switch	26
3.5.3	Jet-switch	27

Hoofdstuk 4: Kwantitatieve uitwerking van de wringbelasting

4.1	Inleiding	29
4.2	Algemene methode voor het bepalen van wringbelasting	29
4.3	Spectra	33
4.4	Overzicht oorzaken van wringing van hoogbouw	34

Hoofdstuk 5: Toetsing van de wringbelasting

5.1	Inleiding	35
5.2	Vergelijking NEN 6702 met literatuur	35
5.3	Stijfheidscriterium	38
5.4	Sterkte-criterium	39
5.4.1	Beton	39
5.4.2	Staal	40
5.5	Stabiliteitscriterium	41
5.5.1	Zuivere torsie-knik	41
5.5.2	Stabiliteit bij wringing én buiging	42

Hoofdstuk 6: Conclusies

44

Bijlagen deel I:

5.2	Vergelijking NEN 6702 en Lythe/Surry	46
5.5	Torsie-knik	50
5.5.1	Zuivere torsie-knik	50
5.5.2	Stabiliteit bij wringing én buiging	53

DEEL II

Hoofdstuk 1: Inleiding

1.1	Situatieschets	58
1.2	Opzet case-study	58
1.3	Software	59

Hoofdstuk 2: Bepalen van de wringstijfheid

2.1	Inleiding	61
2.2	Membraan-analogie	61
2.3	Membraan-analogie voor geperforeerde kernen	64
2.3.2	Bepalen fictieve dikte	64
2.3.3	Formule voor I_t van een rechthoekige kern met gat	66
2.3.4	Toetsing aan een concreet geval	68
2.4	Numerieke bepaling van de wringstijfheid	69
2.4.1	Plan van aanpak	69
2.4.2	Rechthoekige kern zonder gaten	69
2.4.3	Rechthoekige kern met gaten	71
2.4.4	Voorlopig ontwerp kern Beatrixkwartier zonder gaten	72
2.4.5	Voorlopig ontwerp kern Beatrixkwartier met gaten	73
2.5	Conclusies	75

Hoofdstuk 3: Windtunnelonderzoek

3.1	Inleiding	76
3.1.1	Doelstelling	76
3.1.2	Meetplan	76
3.2	Meetopstelling	77
3.3	IJking apparatuur	81
3.3.1	IJking gloeidraad	81
3.3.2	IJking nieuwe gloeidraad	82
3.3.3	IJking dwarskrachttafel	82
3.3.4	IJking Torsietafel	83
3.4	Meetresultaten	84
3.4.1	Windprofiel	84
3.4.2	Turbulentie	86
3.4.3	Spectra	87
3.4.4	Krachten	89
3.4.5	Momenten	92
3.5	Meetfouten	93
3.6	Vergelijking en Conclusies	95

Hoofdstuk 4: Statisch gedrag

4.1	Gevolgde werkwijze	96
4.2	Schematisering belasting en constructie	96
4.2.1	Belastingen	96
4.2.2	Schematisering constructie	97
4.3	Resultaten 2D-berekening	100
4.3.1	Basis-model	100
4.3.2	Variant 1: stijve eindkolom	101
4.3.3	Variant 2: vermindering van het aantal gaten in de kern	101
4.3.4	Variant 3: tussenwand	102
4.3.5	Variant 4: tussenwand en eindkolom	103
4.3.6	Nieuw belastingsgeval	104
4.4	3D modelleren	105
4.4.1	Schematisering constructie	105
4.4.2	Resultaten	107
4.5	Gedetailleerd gedrag	109

Hoofdstuk 5: Stabiliteit

5.1	Torsie-stabiliteit voor een kern met pendelkolommen	114
5.1.1	Afleiding van de differentiaalvergelijkingen	115
5.1.2	Bepalen van de kritische drukkracht	116
5.2	TORSSTAB	119
5.3	Gewichtsberekening	120
5.4	Controle stabiliteit van de taartpunt	123
5.4.1	Invoer voor TORSSTAB	123
5.4.2	Resultaten met TORSSTAB	125
5.4.3	2° orde berekening met RUSTAF	127

Hoofdstuk 6: Conclusies

LITERATUURLIJST	129
-----------------	-----

Bijlagen deel II:

2.2	Bewijs formule van Bredt	131
2.3.1	Bepalen fictieve dikte	132
2.3.2	Bepalen van I_t van een rechthoekige, geperforeerde kern	134
2.4.2	Wringstijfheid van een rechthoekige kern zonder gaten	135
2.4.4	Wringstijfheid driehoekige kern (dicht)	136
2.4.5	Wringstijfheid driehoekige kern (open)	137
3.2	Meetopstelling	139
3.3	IJking gloeidraad	142
3.4.1	Meetgevens windprofiel	143
3.4.3	Spectra	144
3.4.4	Krachten	150
3.4.5	Momenten	154
4.2.2	Staafeigenschappen van de kern	156
4.3.2	Staafeigenschappen hoekkolom	161
4.3.3	Staafeigenschappen gewijzigde low-rise kern	162
4.3.4	Staafeigenschappen tussenwand	163
4.4.1	Staafeigenschappen van de kolomstrook	164
5.1.1	Afleiding van de differentiaalvergelijkingen	165
5.1.2	Oplossen van het stelsel vergelijkingen	168
5.4	Resultaten TORSSTAB	173

Los bijgevoegd:

- A3 met situatieschets
- A3 met plattegrond taartpunt

DEEL I

literatuuronderzoek

HOOFDSTUK 1: INLEIDING

1.1 Doel literatuuronderzoek

Het doel, dat met dit literatuuronderzoek wordt beoogd, is het inzicht krijgen in de oorzaken van wringing van hoge gebouwen en de criteria, waaraan wringing dient te voldoen.

1.2 Plaats in het afstuderen

Het eerste deel van het afstudeerverslag is de schriftelijke rapportering van het literatuuronderzoek naar de factoren, die bepalen of torsie een probleem is in de hoogbouw.

Aan de hand van de in dit deel opgedane kennis wordt vervolgens het gedrag van een gebouw, dat op wringing wordt belast, onderzocht aan de hand van een bestaand hoogbouwontwerp van ingenieursbureau Grabowsky&Poort. De weerslag daarvan is in deel II te vinden. Het literatuuronderzoek moet dus gezien worden als voorbereiding op de case-study.

1.3 Opzet literatuuronderzoek

De opbouw van het onderzoek is erop gericht om eerst kwalitatieve informatie te verzamelen om inzicht in het belastingsgeval wringing te krijgen. Dit is noodzakelijk om de kwantitatieve informatie uit de literatuur te kunnen beoordelen. Verder is inzicht essentieel bij het interpreteren van resultaten van berekeningen, die tijdens de case-study zullen worden gemaakt.

In eerste instantie is dus naar de oorzaken van wringing gezocht. Dit levert een aantal op zichzelf staande zaken op. Teneinde hierin enige structuur aan te brengen, wordt een aantal groepen geformeerd.

Uiteindelijk zijn drie clusters onderscheiden. De groep 'constructie' wordt in hoofdstuk 2 behandeld en de clusters 'aardbeving' en 'wind' worden in hoofdstuk 3 beschreven.

Het voordeel van de scheiding in drie groepen is vooral, dat zo duidelijk is waar de problemen liggen. Hierdoor is het vinden van een oplossing ook veel eenvoudiger.

De stap naar meer kwantitatieve informatie wordt in hoofdstuk 4 gezet aan de hand van een Canadees onderzoek. Vervolgens worden in hoofdstuk 5 de criteria bepaald, waarmee hoogbouw kan worden getoetst op wringing. De criteria vormen de springplank naar de case-study.

1.4 Tekenaafspraken

Beschouw het gebouw in figuur 1. Het globaal assenstelsel wordt gedefinieerd door een x-y-vlak op het maaiveld aan te nemen en de z-as daar loodrecht en naar boven wijzend op te zetten. De oorsprong bevindt zich ter plekke van het normaalkrachtencentrum. Verder spreken we af, dat de x-as in de richting van de grootste buiging wijst. De rotatie θ , de wringing van de doorsnede, is positief als die tegen de klok in draait, zoals in de rechthoekige doorsnede in figuur 2 is weergegeven.

In figuur 3 tenslotte is aangegeven hoe de krachten en momenten werken in de positieve richting. Voor de duidelijkheid zijn de excentriciteiten e_x en e_y ook getekend als deze positief zijn.

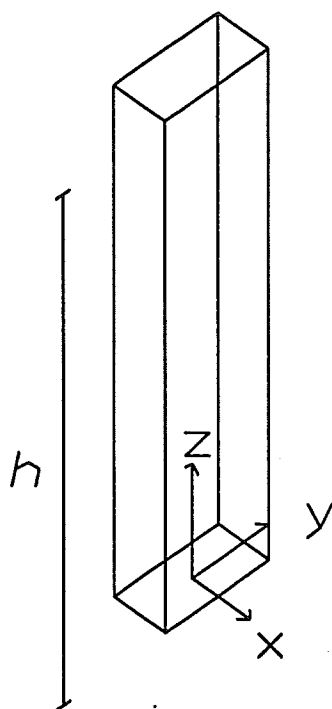


fig. 1 Globaal assenstelsel

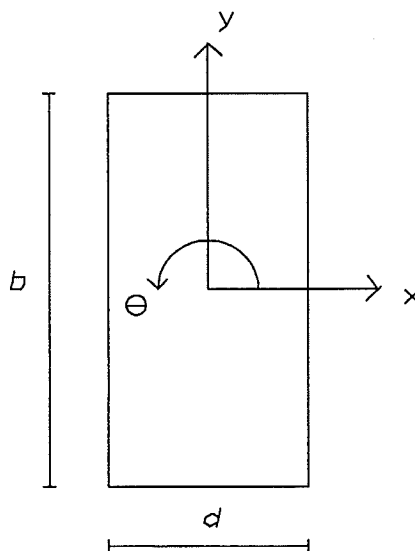


fig. 2 Assenstelsel in doorsnede

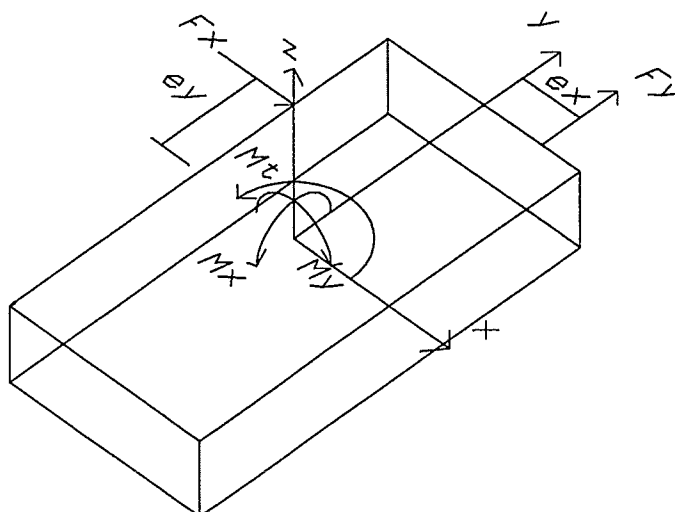


fig. 3 Definitie positieve richting krachten en momenten

2 CONSTRUCTIEVE OORZAKEN

2.1 Stabiliteitsvoorziening asymmetrisch

In de meeste normen en richtlijnen wordt aangenomen, dat de windbelasting gelijkmatig verdeeld is over de breedte van een gebouw (zie bv. [44]). Hieruit volgt dan, dat een gebouw, waarbij de kern in het midden van de plattegrond is gelegen, geen wringing door de windbelasting zal ondervinden.

Beschouw vervolgens de plattegrond, die in figuur 4 is gegeven, van een hoog gebouw met een excentrisch gelegen kern. In de tekening zijn drie zwaartepunten aangegeven, die van belang zijn als wringing optreedt. Deze punten zijn als volgt gedefinieerd:

–DC: het dwarskrachtencentrum, het zwaartepunt van de stijve elementen;

–NC: het normaalkrachtencentrum, het zwaartepunt van de massa van het gebouw;

–Z: plaats waar de resultante van de belastingen aangrijpt.

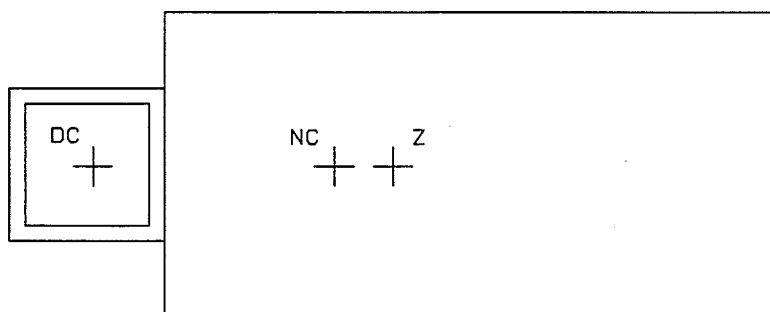


fig. 4 Excentrische kern

Uit de definitie van het dwarskrachtencentrum volgt, dat het DC in figuur 4 in het zwaartepunt van de kern, het enige stijve element, moet liggen. Het normaalkrachtencentrum zal links van het midden van de plattegrond liggen, door de geconcentreerde massa in de vorm van een kern.

In figuur 4 is aangenomen, dat de belasting op de halve breedte is gelegen, zoals bij gelijkmatig verdeelde belasting geldt. In hoofdstuk 3 zal aangetoond worden, dat een gelijkmatige drukverdeling in 't algemeen niet correct is. Over de invloed van de vorm op de te verwachten wringing wordt in de volgende paragraaf nader ingegaan.

Door de asymmetrische ligging van de kern vallen de zwaartepunten van stijfheid en belasting dus niet samen, hetgeen betekent dat de kern op torsie wordt belast. Het gebouw zal hierdoor torderen, waarbij het rotatie-centrum wordt gevormd door het DC.

Een tweede oorzaak van torsie in het gebouw in figuur 4 is de excentriciteit tussen NC en DC. Als het gebouw vervormt door bijvoorbeeld windbelasting zal het gewicht van het gebouw extra wringing veroorzaken. Hierop zal bij de behandeling van het stabiliteits-criterium in paragraaf 5.5 worden teruggekomen.

In figuur 5 is ander voorbeeld gegeven, waarbij op wringing dient te worden gerekend. Boven in het gebouw is er niets aan de hand: de belasting zal ongeveer aangrijpen bij het zwaartpunt van de kern. De torens zijn echter gekoppeld, zodat bij de aansluiting van de lage toren problemen zijn te verwachten. Het dwarskrachtencentrum maakt daar namelijk een sprong, door

de toevoeging van een tweede kern, terwijl het zwaartepunt van de belasting niet verandert. Het gevolg is wringing onderin het gebouw.

Tot op zekere hoogte heeft de ontwerper de excentriciteiten zelf in de hand. Kortom, torsie door asymmetrie van de stabiliteitsvoorziening is een min of meer bewuste keuze. Zeker bij hoogbouw kan het wringend moment op deze wijze behoorlijk groot worden, daar op elke verdieping de excentriciteit aanwezig is.

Bij aardbevingen is de asymmetrische stabiliteitsvoorziening erg ongunstig. Hierbij speelt het overwegend dynamische karakter van een aardstok een negatieve rol. Een excentrische kern bijvoorbeeld zal weinig weerstand bieden tegen het ontstaan van een torsietrilling, dat wil zeggen de vervormingen zullen relatief groot zijn (zie bijvoorbeeld paragraaf 2.5.2).

Het voorgaande houdt echter niet in, dat door het samenvallen van zwaartepunt van de belasting en de stijve elementen in het geheel geen wringing op zal treden. Zoals uit de volgende paragrafen zal blijken, spelen andere factoren ook een rol. Denk bijvoorbeeld aan een onregelmatige doorsnede, die ondanks het samenvallen van de twee zwaartepunten toch voor wringing zal zorgen.

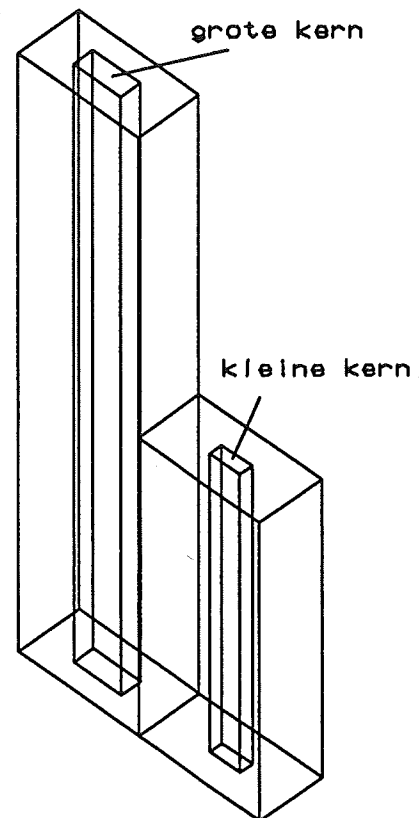


fig. 5 Gekoppelde torens

2.2 Onregelmatige vorm van de doorsnede

Als de doorsnede van een hoog gebouw wordt beschouwd, kunnen symmetrie-assen worden aangegeven. In het geval van twee of meer assen spreken we van een symmetrische doorsnede (type I). Een voorbeeld hiervan is een vierkant of een cilinder.

Er zijn ook doorsneden waarbij één symmetrie-as aanwezig is. Denk hierbij aan een gelijkbenige driehoek. Dit zijn de semi-symmetrische doorsneden (type II). Tenslotte zijn er vormen denkbaar, waarin geen enkele symmetrie is te vinden. Dit zijn de onregelmatige doorsneden (type III). De drie vormen zijn gevisualiseerd in figuur 6.

Deze indeling is van belang als we de wringbelasting als gevolg van wind willen bepalen voor een bepaald gebouw. Nemen we aan, dat de stuwdruk gelijkmatig verdeeld is, wat volgens de meeste normen toegestaan is, dan is de vorm bepalend voor de grootte van de wringing.

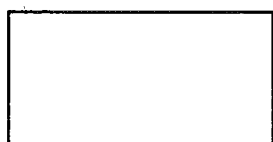
In het verleden hebben onderzoekers dan ook getracht voor diverse typen gebouwen een vormfactor aan te geven.

In Canada bijvoorbeeld heeft Greig een factor β gedefinieerd, die uit een aantal parameters kan worden berekend. Deze berekening is echter nogal omslachtig en voor de normale bouwpraktijk nauwelijks interessant.

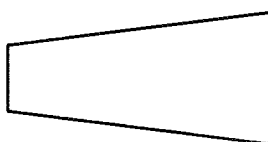
Collega's van Greig, namelijk Lythe en Surry, hebben een duidelijke verbetering ingevoerd [33]. Hun classificatie komt redelijk overeen met de hierboven beschreven indeling aan de hand van de mate van symmetrie.

Zij onderscheiden drie gebouwtypen (met tussen haakjes het overeenkomstige type als een indeling naar symmetrie wordt aangehouden):

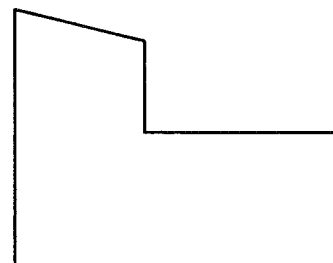
- eenvoudig (I)
- complex/symmetrisch (II)
- complex/a-symmetrisch (III).



type I:
symmetrisch



type II:
semi-symmetrisch



type III:
asymmetrisch

fig. 6 De drie hoofdvormen

Uit hun onderzoek volgde, dat de complexe vormen beduidend hogere torsiebelasting kregen te verwerken als gevolg van wind dan de eenvoudige. Dit was natuurlijk te verwachten, daar voor de symmetrische structuren vooral het dynamische deel van de windbelasting torsie veroorzaakt, terwijl voor de complexe vormen ook het gemiddelde (=statische) deel dient te worden meegeteld.

De berekeningsmethode, die Lythe en Surry nu voorstellen, is eenvoudig namelijk: kwalificeer het te berekenen gebouw als één van de drie types en bepaal daarmee de wringbelasting op het gebouw. In hoofdstuk 4 zal een en ander verder worden uitgewerkt.

2.3 Gekoppelde eigentrillingen

Bij hoge gebouwen mag het dynamische gedrag van de constructie niet worden verwaarloosd. Een bekend dynamisch verschijnsel is 'modal coupling', wat door diverse onderzoekers is aangetoond [4,24,26,27]. Een Nederlandse uitdrukking hiervoor is 'gekoppelde eigentrillingen'. Met behulp van een kunstmatige trilling (zie ook 2.5) kan vastgesteld worden of een gebouw gekoppelde eigentrillingen bezit. Als bijvoorbeeld een kunstmatige trilling in de x-richting een trilling in één van de twee andere (y of θ) richtingen veroorzaakt, is er sprake van modal coupling.

De oorzaak dient te worden gezocht in een excentriciteit tussen het massacentrum en het normaalkrachtcentrum. Bij een asymmetrische kern, zoals in 2.1 is besproken, is dit evident. Het belang van het onderkennen van modal coupling ligt vooral bij symmetrische structuren. Hier zullen namelijk altijd kleine excentriciteiten optreden, bijvoorbeeld door de uitvoering. Een andere oorzaak, die bij hoogbouw voorkomt is het beëindigen van de low-rise liften, waardoor de kern niet meer symmetrisch is.

Voor de statica mag zo'n kleine excentriciteit worden verwaarloosd, maar in de dynamische berekening moet hier rekening mee worden gehouden. Het laatste geldt met name als de eigenfrequenties in x- of y-richting en in de θ -richting ongeveer gelijk zijn. Hierdoor wordt het effect van de gekoppelde trillingen sterk vergroot.

Dit is eenvoudig in te zien. Beschouw bijvoorbeeld de doorsnede van figuur 2 en neem aan, dat de eigenfrequenties (f_e) in alle drie de richtingen exact hetzelfde zijn. Het gebouw wordt door een exciterende kracht met een frequentie $f=f_e$ in x-richting belast

$$(2.1) F_x(t) = \hat{F} \sin(\omega_e t), \text{ met } \omega_e = 2\pi f_e.$$

Deze zal een reactie van het gebouw geven in de vorm van een verplaatsing in de x-richting:

$$(2.2) x(t) = \hat{x} \sin(\omega_e t), \text{ met } \hat{x} = \frac{\hat{F}}{H(\omega_e)}.$$

Hierbij is H de overdrachtsfunctie, die bepaalt hoe groot het amplitude wordt als functie van de stijfheid k, de relatieve demping ζ en de hoekfrequentie ω_e .

Als er nu absoluut geen excentriciteit tussen normaal- en dwarskrachten centrum bestaat, zal het gebouw alleen in x-richting blijven trillen. In de praktijk zal dit nooit voorkomen, daar kleine excentriciteiten niet zijn te voorkomen. Dit houdt in, dat de trilling in x-richting het gebouw ook een rotatie geeft. Daar de eigenfrequenties voor de drie richtingen gelijk zijn, zal dit verschijnsel niet uitdempen en zal het gebouw ook in θ - en y-richting gaan trillen.

Normaal gesproken zullen de eigenfrequenties niet precies aan elkaar gelijk zijn. Als de waarden echter voldoende dicht bij elkaar liggen, zal modal coupling op kunnen treden. Een gebouw zonder uitwendige wringbelasting kan dus toch een torsietrilling ondervinden.

2.4 Niet-lineair gedrag

Behalve modal coupling kan niet-lineair materiaalgedrag een andere oorzaak van de inductie van trillingen zijn. De torsietrilling kan ontstaan door de niet-lineaire koppeling tussen de translatie- en rotatie-componenten van de beweging van het gebouw.

In de V.S. heeft Tso daar onderzoek naar gedaan om een verklaring te vinden voor het optreden van torsie in symmetrische gebouwen [35]. Beschouw hiertoe de rechthoekige doorsnede, die in figuur 7 is gegeven.

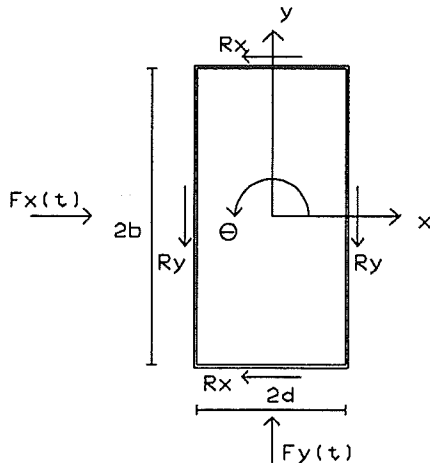


fig. 7 Geschematiseerde constructie

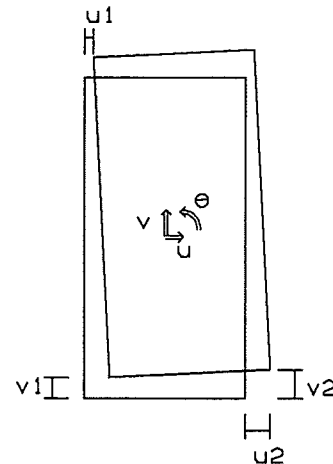


fig. 8 Verplaatsingen

De doorsnede wordt als vormvast beschouwd, hetgeen bij hoge gebouwen geoorloofd is door de vele vloeren, die in hun vlak zeer stijf zijn. De verplaatsing van een willekeurig punt van de doorsnede is dan met de drie verplaatsingsgrootheden u , v en θ van het zwaartepunt te beschrijven.

De constructiedelen, die weerstand bieden tegen een verplaatsing, worden verdeeld langs de omtrek gedacht. De weerstand ervan wordt R_x dan wel R_y genoemd afhankelijk van de richting waarin ze stijfheid bezitten en heeft de dimensie van kracht. De precieze betekenis hiervan wordt nog toegelicht. De tekenafspraken voor R_x en R_y is, dat ze positief zijn als een positieve verplaatsing tegengewerkt wordt. In figuur 7 zijn de juiste richtingen aangegeven.

Stel nu, dat op een gebouw met een doorsnede, die op de hiervoor geschetste wijze geschematiseerd kan worden, krachten $F_x(t)$ en $F_y(t)$ werken. Verwaarlozen we de demping dan geldt:

$$(2.3) \quad m\ddot{u} = -R_x(u_1) - R_x(u_2) + F_x(t)$$

$$(2.4) \quad m\ddot{v} = -R_y(v_1) - R_y(v_2) + F_y(t)$$

$$(2.5) \quad J\ddot{\theta} = b[R_x(u_1) - R_x(u_2)] + d[R_y(v_1) - R_y(v_2)]$$

In de formules (2.3) tot en met (2.5) is m de massa van het gebouw. De verplaatsingen u_1 , u_2 , v_1 en v_2 volgen uit figuur 8:

$$(2.6) \quad u_1 = u - b\theta \text{ en } u_2 = u + b\theta.$$

$$(2.7) \quad v_1 = v - d\theta \text{ en } v_2 = v + d\theta.$$

We zullen nu eerst R_x en R_y wat nader onderzoeken. Stel bijvoorbeeld, dat het verband tussen de kracht R_x en u verloopt zoals lijn 1 in figuur 9. Dit is een lineair verband tussen weerstand en verplaatsing. Stel, dat deze weerstand door afschuiving wordt geleverd, dan geldt in dit geval $R_x' = GA$ is constant.

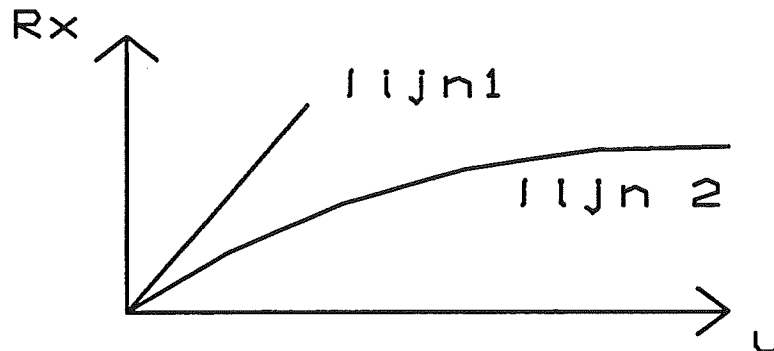


fig. 9 Verband tussen kracht en verplaatsing

Bij een niet-lineair verband kan bijvoorbeeld lijn 2 de relatie R_x - u aangeven. Nu is de afgeleide van R niet meer constant, oftewel de stijfheid varieert met de verplaatsing.

We kunnen dit verwerken in de bewegingsvergelijkingen door R_x en R_y te ontwikkelen in een Taylor reeks. Samen met (2.6) en (2.7) geeft dat:

$$(2.8) \quad m\ddot{u} + 2R'_x(0)u + \frac{1}{3}R'''_x(0)u(u^2 + 3(b\theta)^2) + \dots = F_x(t)$$

$$(2.9) \quad m\ddot{v} + 2R'_y(0)v + \frac{1}{3}R'''_y(0)v(v^2 + 3(d\theta)^2) + \dots = F_y(t)$$

$$(2.10) \quad J\ddot{\theta} + [2R'_x(0)\theta + \frac{1}{3}R'''_x(0)\theta((b\theta)^2 + 3u^2)] + d^2[2R'_y(0)\theta + \frac{1}{3}R'''_y(0)\theta((d\theta)^2 + 3v^2)] + \dots = 0$$

Het is duidelijk te zien aan deze vergelijkingen, dat bij lineair gedrag de bewegingen ongekoppeld zijn. Dan zijn namelijk alle hogere afgeleiden van R nul en is R' constant. Vergelijking (2.8) wordt dan:

$$(2.11) \quad m\ddot{u} + 2R'_x(0)u = F_x(t)$$

Uit (2.11) blijkt duidelijk, dat er geen verband tussen u en θ is. Uitwerking van (2.9) en (2.10) laten hetzelfde zien.

Bij een niet-lineair verband tussen spanning en rek worden de verplaatsingen gekoppeld. Nu zijn de hogere afgeleiden niet nul en zien we, dat in de vergelijkingen meerdere variabelen voorkomen. Hiermee is dus aangetoond, dat er een koppeling bestaat tussen de diverse componenten van de beweging van een gebouw.

Tso heeft een en ander verder uitgewerkt met een aantal aardige resultaten. Hij vindt onder andere, dat de frequenties voor laterale en torsietrillingen dicht bij elkaar moeten liggen, hetgeen bij modal coupling ook zo was, om daadwerkelijk een vibratie te krijgen, die niet uitdempt. Er zijn hiervoor formules gevonden, die niet eenvoudig zijn. Hier wordt alleen de grafische presentatie gegeven in figuur 10, die op de volgende pagina is afgebeeld.

Horizontaal is de verhouding van de hoekfrequentie ω en eigenhoekfrequentie ω_x in x-richting uitgezet. Op de verticale as wordt de verhouding tussen de eigenhoekfrequenties in θ - en x-richting uitgezet. Het gebied tussen de lijnen wordt de instabiele regio genoemd. Als de verhouding tussen de frequenties zodanig is, dat in dit gebied terecht wordt gekomen, zal een laterale beweging een torsietrilling tot gevolg hebben.

Een ander resultaat is in figuur 11 te zien. In de grafiek is gearceerd aangegeven waar (statische) torsieknik kan optreden. We zien, dat een deel van de instabiele regio en het torsieknik gebied samenvallen. In dat geval zal de torsietrilling door fysisch niet-lineair gedrag niet optreden, maar is geometrisch niet-lineair gedrag maatgevend. Een uitgebreide beschrijving van torsieknik is in paragraaf 5.5 te vinden.

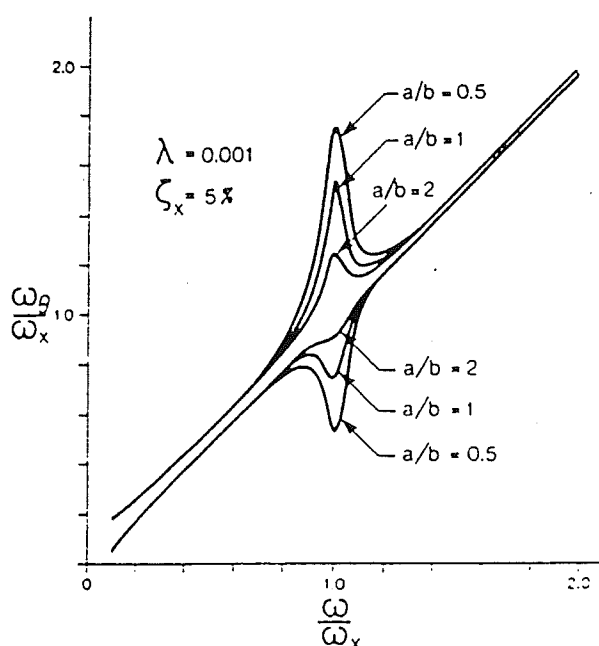


fig. 10 Instabiele regio's

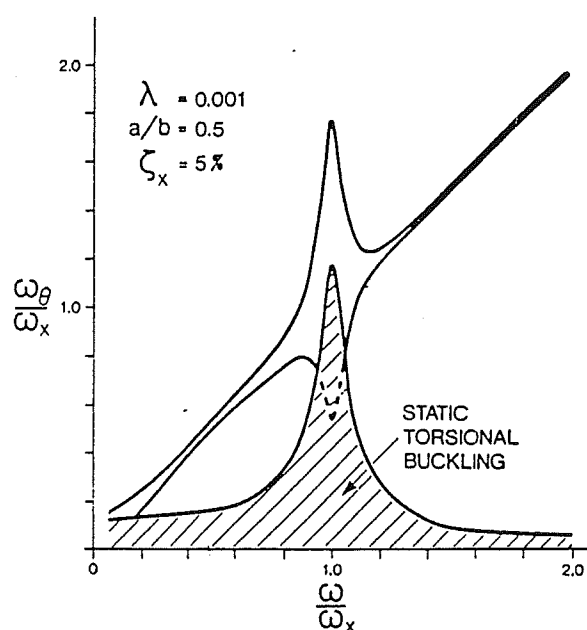


fig. 11 Combinatie met torsieknik

2.5 Praktijkvoorbeelden

De hoge gebouwen, die in het hierna volgende worden behandeld, zijn allen getest door middel van kunstmatige trillingen. Dit gebeurt door machines, die een, door de onderzoekers gecontroleerde periodieke kracht, uitoefenen op de constructie. De vibrator wordt meestal op het hoogste niveau gezet, wat de effectiviteit verhoogt.

Het voordeel van kunstmatige trillingen is, dat de metingen goed reproduceerbaar zijn. Bovendien kan zo eenvoudig modal coupling worden aangetoond. Immers, als een zuivere trilling van de vibrator in de x-richting ook reacties in de andere richtingen oplevert, is er sprake van gekoppelde trillingen.

2.5.1 San Diego Gas and Electric Company Building

Het San Diego Gas and Electric Company Building is in 1968 gebouwd en 87 meter hoog en bestaat uit 22 verdiepingen. Een aanzicht is in figuur 13 te zien. De laagbouw is gescheiden van de hoogbouw door dilatatievoegen. Hoerner, Jennings en Matthiesen hebben uitgebreide metingen aan het gebouw gedaan [27]. Er werden 18 trillingsvormen bepaald, in elke richting 6. Tevens werd bij elke vorm de eigenfrequentie bepaald.

De draagstructuur is een stalen raamwerk. Zoals uit figuur 14 blijkt, is de opbouw van de constructie in wezen symmetrisch. Een belangrijke torsiecomponent werd daarom niet verwacht door de constructeurs van het gebouw. Uit figuur 14 kan echter direct gezien worden, dat de massa niet gelijkmatig verdeeld is over de verdieping. Een kleine excentriciteit tussen het zwaartepunt van de etage en het dwarskrachtencentrum is zeer waarschijnlijk.

Uit het onderzoek bleek dan ook, dat de bijdrage van de wringing aan het totale belastingsbeeld significant was. Naast een kleine excentriciteit tussen normaal- en dwarskrachtencentrum heeft dit nog een oorzaak. De waarden voor de eerste drie trilvormen lagen erg dicht bij elkaar nl. $f_x=0.382$ Hz, $f_y=0.394$ Hz en $f_\theta=0.425$ Hz.

Dit is typisch een geval waarbij modal coupling de kop opsteekt. Dit is ook goed te zien aan het vervormingsbeeld voor de laagste eigenfrequentie (zie figuur 12). De afgebeelde doorsnede beweegt in alle drie de richtingen.

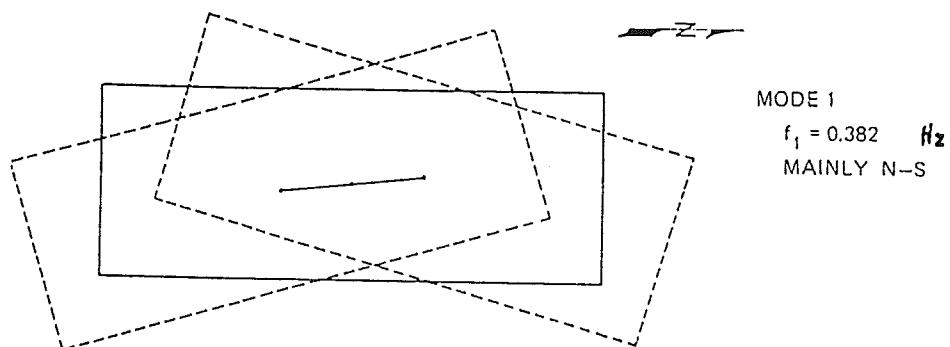


fig. 12 Verplaatsingen door de eerste eigentrilling

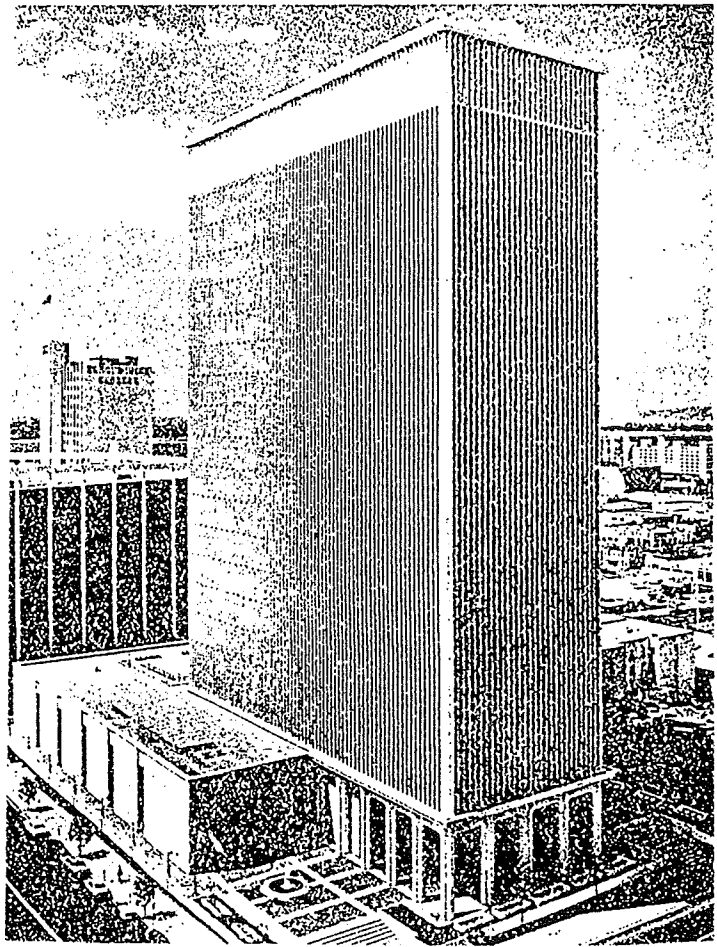


fig. 13 Aanzicht hoogbouw

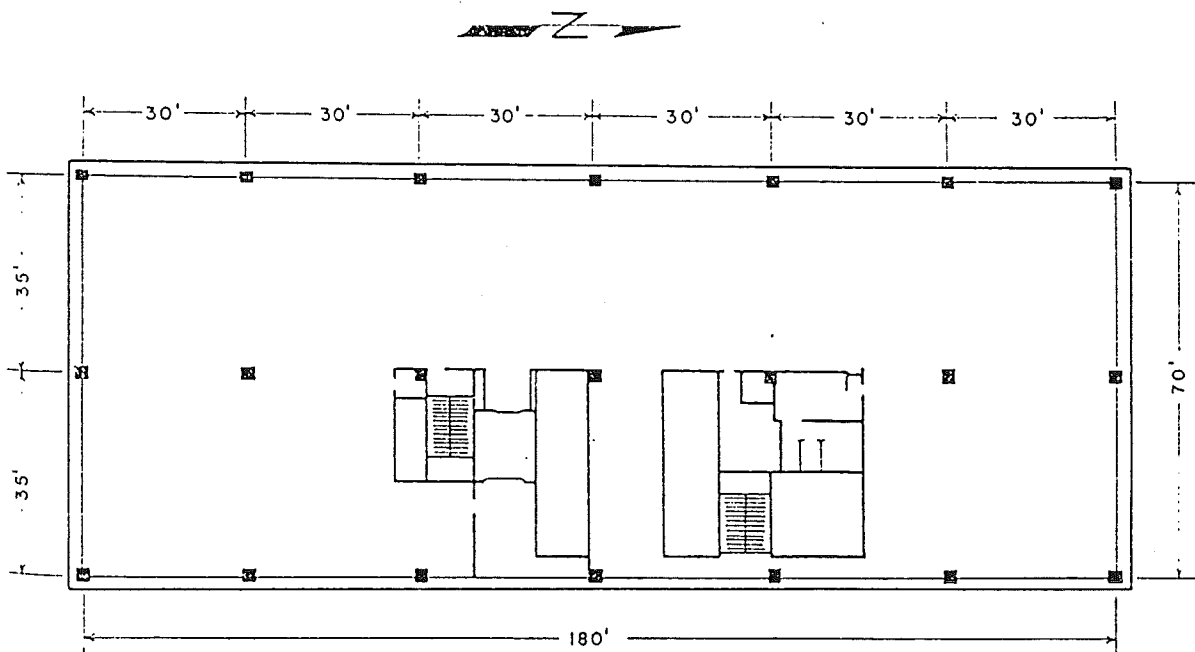


fig. 14 Doorsnede van verdieping

2.5.2 Parsons World Headquarters

Het gebouw, waarin het Parsons World Headquarters gevestigd is, is 12 verdiepingen hoog (55 meter). Dit is weliswaar niet zo hoog, maar de in hoofdstuk 2 besproken aspecten komen duidelijk naar voren. De draagstructuur wordt door stalen raamwerken in twee richtingen gevormd.

Uit figuur 15 volgt, dat de doorsnede van de toren (=gearceerde gedeelte) puntsymmetrisch is, dus is er geen as van symmetrie aan te wijzen. De dikke lijnen stellen de raamwerken voor. In de indeling van Lythe en Surry valt de toren in categorie II. (Zie hiervoor ook figuur 31)

De onderste vier verdiepingen zijn verbonden met een laagbouw. De doorsnede van de vierde etage is ook in figuur 15 te zien. Voor verdieping 1 tot en met 4 is er duidelijk een asymmetrische draagstructuur in oost-west richting. Voor belastingen in O-W richting is dus een significant wringend moment te verwachten. (Zie ook paragraaf 2.1). Door de puntsymmetrie zal ook belasting uit N-Z richting wringing kunnen veroorzaken, maar deze is relatief onbelangrijk.

In 1976 heeft Foutch uitgebreide metingen gedaan aan Parsons World Headquarters [24]. Hij is daarbij op dezelfde manier te werk gegaan als Hoerner e.a. Uiteindelijk zijn negen trillingsvormen bepaald, voor elke richting drie.

Zoals te verwachten waren de trillingen voor rotatie en O-W richting gekoppeld door de asymmetrie. In figuur 16 zijn de eerste drie eigentrillingen geplot. In trillingsvorm 2 laat zien, dat de beweging in y-richting (=O-W) ook een rotatie veroorzaakt. Uit het vervormingsbeeld van de vierde etage voor de tweede torsietrilling (zie figuur 17) is ook duidelijk te zien, dat het rotatiepunt bij het zwaartepunt van de stijve elementen komt te liggen. Hier is dat in het midden van de toren. Voor de elementen, waaruit de laagbouw bestaat, is dat erg ongunstig. Zo worden de verplaatsingen voor de zuidelijke kolommen versterkt. Hierdoor zullen de spanningen in deze kolommen significant toenemen.

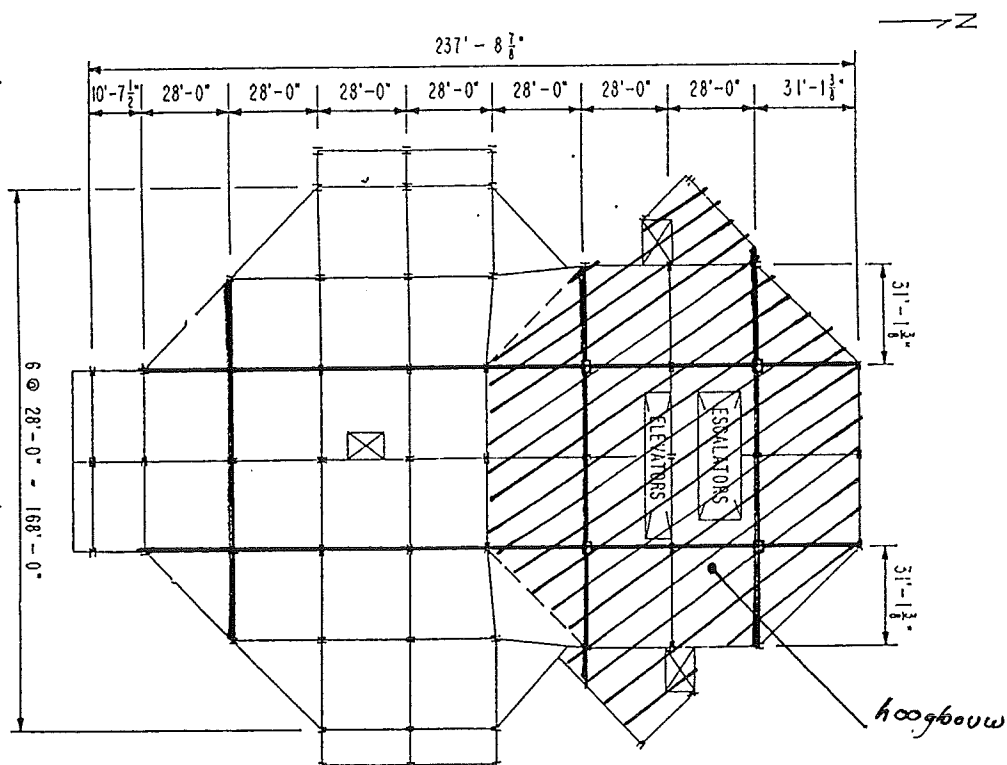


fig. 15 Opbouw draagstructuur

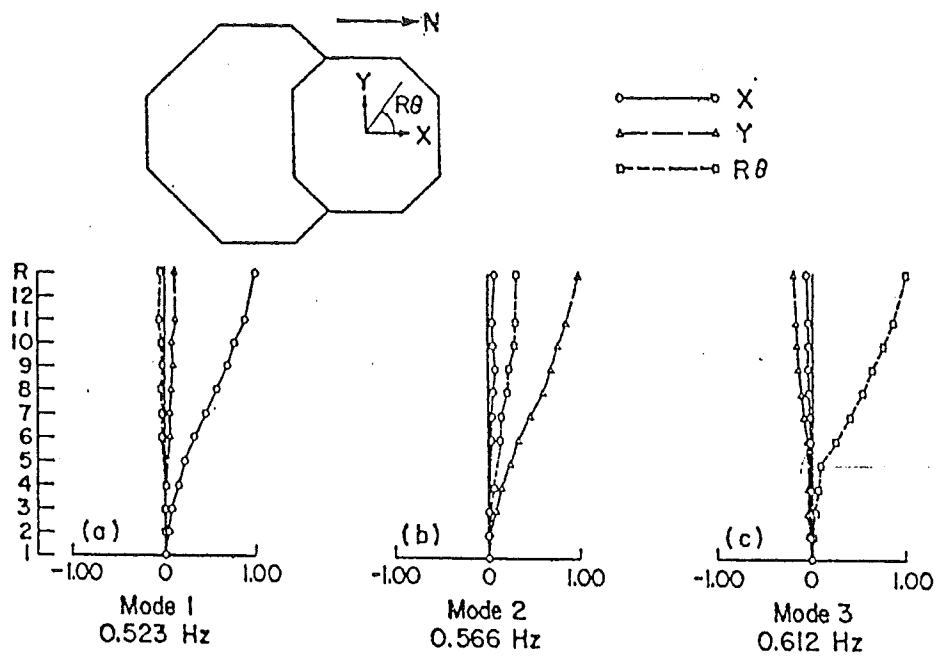


fig. 16 De eerste drie eigentrillingen

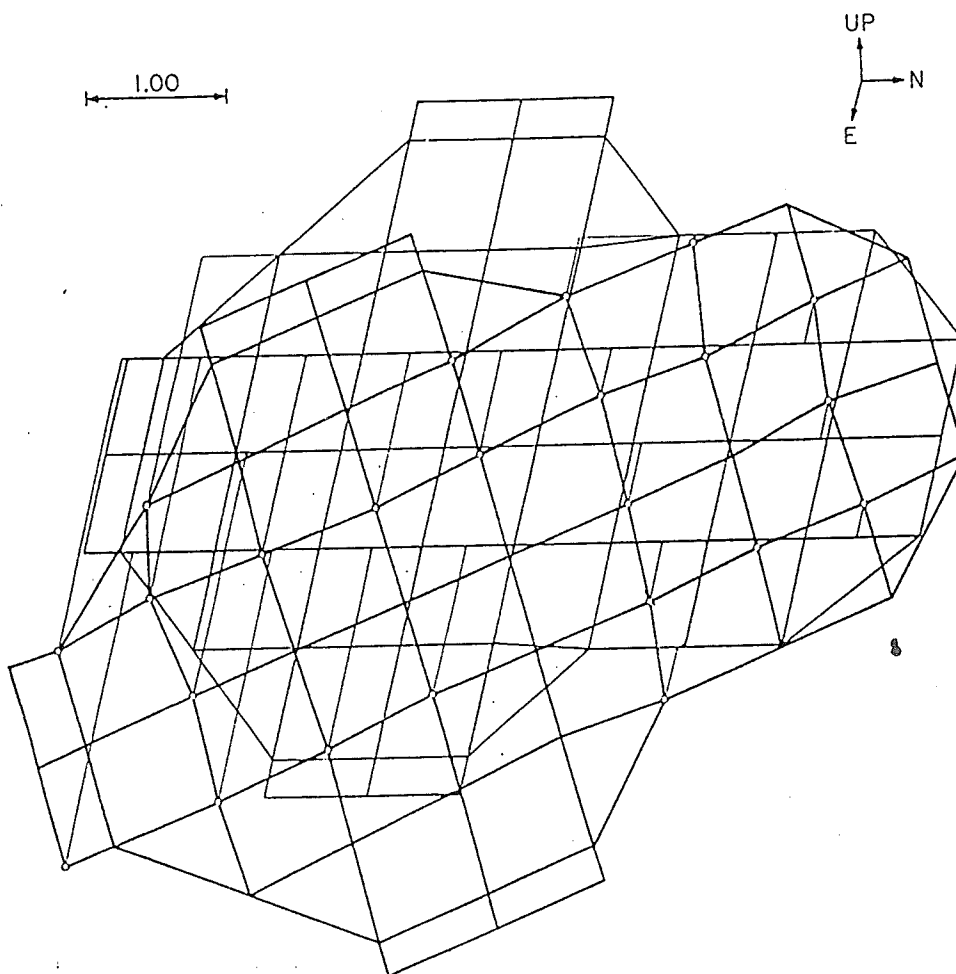


fig. 17 Vervorming van de vierde etage (trilling O-W)

3 BELASTING UIT DE OMGEVING

3.1 Aardbevingen

In Nederland is het natuurverschijnsel aardbeving niet zo intensief bestudeerd, gezien het tektonisch gedrag van onze ondergrond. Het seismisch meest actieve gebied van Nederland ligt in Zuid-Limburg. De zwaarst te verwachten aardbeving daar bedraagt circa 6 op de schaal van Richter, wat overeenkomt met grondversnellingen tot $0,3 \text{ m/s}^2$. De effecten ervan zijn een algemeen voelen van de trillingen en plaatselijk bezwijken van gebouwen. Sinds 13 april 1992 is de aardbeving met epicentrum bij Roermond recordhouder met een magnitude van 5.5.

In andere landen, zoals de V.S. en Japan, kunnen wel aardbevingen met destastreuze gevolgen optreden. Hierbij moet gedacht worden gedacht aan meer dan 8 op de schaal van Richter en grondversnellingen, die groter kunnen worden dan 1 m/s^2 . In deze gebieden is daarom wel veel onderzoek gedaan naar het gedrag van aardbevingen en de daaruit voortvloeiende belasting op gebouwen.

Grofweg gezien kunnen er twee zaken optreden, die wringing tot gevolg kunnen hebben:

- de rotatie component van de grondbeweging, die de fundering ook ondergaat
- een laterale versnelling van het gebouw als gevolg van de beweging van de grond.

3.1.1 Rotatie-component van grondbeweging

Gebouwen kunnen tijdens een aardbeving een rotatie ondervinden. Onder andere Hart, die bij diverse hoge gebouwen in Los Angeles metingen heeft gedaan, heeft dit aangetoond [26]. Hij vond een significante bijdrage aan de verplaatsingen in x-en y-richting bij 35 % van de wolkenkrabbers. In totaal zijn 20 gebouwen onderzocht, zowel in staal als beton geconstrueerd.

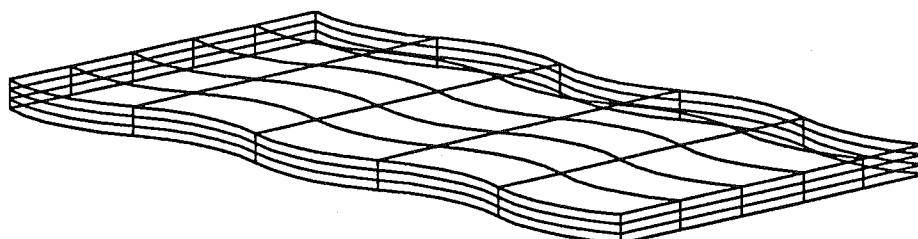


fig. 18 Schuifgolf

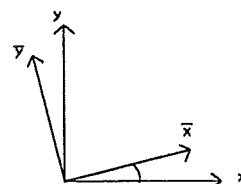


fig. 19
As-transformatie

Amerikaanse deskundigen hebben in het verleden gezocht naar de reden van het ontstaan van deze wringing. Hart e.a. alsmede Tso toonden aan, dat een oppervlaktegolf, die door een aardbeving wordt geïnduceerd, ook een rotatie van de ondergrond kan veroorzaken [26,28]. Figuur 18 laat een belangrijke oorzaak zien, namelijk de schuifgolf. Het plaatje stelt een stukje uit de bodem voor, dat door een aardbeving vervormt. Duidelijk is te zien, dat de oppervlakte een rotatie zal ondervinden.

Er zijn meer mechanismen, die een rotatie kunnen geven, maar aan de hand van de schuifgolf zal het principe toegelicht worden. Stel, dat een golf onder een bepaalde hoek met een referentie-assenstelsel aankomt in het te beschouwen punt. Zie figuur 19, als $\bar{x}$ de voorplantingsrichting van de golf is.

De grootte van de hoekverdraaiing van dat punt kan dan bepaald worden met de kinematische relatie (3.1), die bekend is uit de elasticiteitsleer.

$$(3.1) \theta = \frac{1}{2} \left[\frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} - \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right]$$

Uit (3.1) zien we, dat de keuze van het referentie-assenstelsel niet van belang is. Als er geen compressie van de ondergrond optreedt, is $\bar{u}$ nul en de afgeleide ervan ook. De rotatie wordt dan bepaald door de afgeleide naar $\bar{x}$ van $\bar{v}$. Deze is in 't algemeen niet nul, dus zal torsie optreden. De fundering van een gebouw volgt de beweging van de ondergrond waardoor een torsietrilling in het gebouw geïntroduceerd wordt.

Aan de hand van de meetgegevens van diverse onderzoekers, die tijdens zware aardbevingen zijn gedaan, hebben Hsu en Tso een aantal spectra gegenereerd [28].

Bij het beschouwen van deze spectra moet in de gaten worden gehouden, dat de grafieken uit metingen van een viertal aardbevingen zijn gegenereerd. Hsu en Tso stellen daarom zelf al, dat eigenlijk meer data beschikbaar zou moeten zijn. Het probleem daarbij is, dat een zware aardbeving relatief zelden optreedt en de beoordeling van de meetgegevens moeilijk is doordat er zeer veel parameters zijn, die het gedrag van de ondergrond tijdens een aardbeving bepalen. Vermoedelijk zijn de waarden nu wat aan de conservatieve kant.

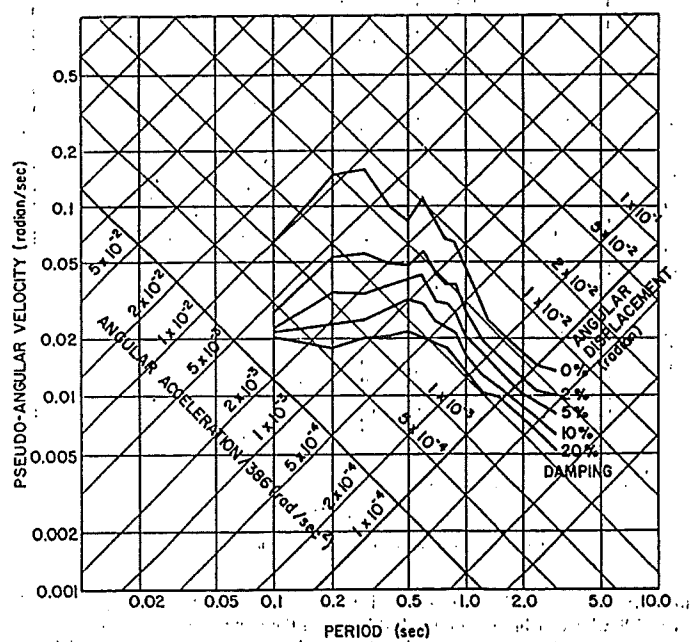
Zo'n spectrum kan vervolgens als input worden gebruikt voor een dynamische analyse, zoals een berekening gebaseerd op stochastische trillingen. In totaal zijn door Hsu en Tso vijf spectra berekend voor verschillende dempingsmaten [28], die in figuur 20 zijn afgebeeld. Het percentage in de afbeelding geeft de verhouding ten opzichte van de kritische demping aan. Figuur 20 geeft een indruk van de orde van grootte van de hoekverplaatsingen en -frequenties, die kunnen optreden.

Tenslotte is vermeldenswaard, dat het torsiespectrum niet rechtstreeks kon worden bepaald. In het verleden werd namelijk de rotatie-component niet gemeten door seismografen. De rotatie is daarom uit de andere verplaatsingen afgeleid met vergelijking (3.1) als basis. Hierdoor is een zekere onnauwkeurigheid niet te vermijden.

3.1.2 Laterale versnellingen

Een versnelling in de horizontale richting kan in combinatie met één van de effecten van hoofdstuk 2 wringing tot gevolg hebben. Dit betekent bijvoorbeeld, dat een aardbeving, die de fundering alleen een laterale verplaatsing geeft, door modal coupling en niet-lineair gedrag torsie in het gebouw kan veroorzaken.

Voor asymmetrische gebouwen geldt bovendien dat de equivalente kracht excentrisch aangrijpt met extra wringing als gevolg.



3.2 Grenslaagstroming

Naast aardbevingen is wind een belangrijke oorzaak van wringing bij hoogbouw. Diverse verschijnselen kunnen worden onderkend, zoals stroming om een obstakel en interferentie-effecten. Een aantal van deze zaken treden bij gebouwen op in de grenslaagstroming. De grenslaag is de luchtlagen, die tegen het oppervlak van de aarde aan ligt, en de dikte ervan is afhankelijk van de ruwheid van de oppervlakte. Voor hoogbouw is de ruwheid van de omgeving normaal gesproken hoog, wat een grenslaag veroorzaakt in de orde van grootte van 500 m.

De windsnelheidsverdeling in de grenslaag wordt ook in grote mate bepaald door de ruwheid. Deze verdeling is beter bekend als het windprofiel en wordt vaak benaderd door een logaritmische functie met z , de richting loodrecht op het aardoppervlak, als variabele. De winddruk op een hoog gebouw is evenredig met het kwadraat van de luchtsnelheid en kan dus uit het windprofiel worden berekend. Meer informatie hierover is in deel II te vinden bij de resultaten van het windtunnelonderzoek.

In het algemeen zal torsie optreden als de drukverdeling niet gelijkmatig verdeeld is over het gebouw. In de rest van deze paragraaf zal worden gekeken hoe luchtstroming om een obstakel (hier: wolkenkrabber) een ongelijkmatige verdeling van de drukken kan veroorzaken. De belangrijkste oorzaken zijn:

- loslaten en weer aanhechten van de wind nabij de hoeken
- onregelmatig oppervlak van de gevel
- wind onder een hoek

Daarna zal de invloed van windvlagen worden beschouwd. Tenslotte zal aandacht worden besteed aan vortex-shedding en interferentie. Overigens hoeft door de genoemde effecten niet altijd een wringend moment te ontstaan. Als de afwijkingen weer gelijk verdeeld zijn over de omtrek, dan is het totale effect nul.

3.2.1 Randeffecten

Rond een rand van een gebouw doen zich een aantal aërodynamische verschijnselen voor. Beschouwen we bijvoorbeeld een rechte hoek, dan zien we een karakteristiek stromingsbeeld. Kenmerkend is de sterke kromming van de stroomlijnen in de omgeving van de rand. Dit heeft als gevolg, dat bij de rand ook aan de loefzijde (=windwaarts) zuiging optreedt en C_p zelfs kleiner dan -1 wordt.

Direct na de hoek zal de stroom loslaten, wat resulteert in een grote onderdruk op de zijgevel. Stel nu, dat de luchtstroming uniform is, dan ontstaat het beeld van figuur 21. Laneville^b e.a., die aan rechthoekige gebouwdorsneden hebben gemeten, hebben het gedrag van zo'n stroming onderzocht. [16]. Zij vinden, dat de stroomlijnen weer naar de gevel gaan bewegen op ongeveer $y=0.7d$. Op dit punt is de absolute waarde van C_p maximaal. Hierna zal de onderdruk op de gevel geleidelijk afnemen. Als het gebouw diep genoeg is zal op $y=3b$ de stroom weer gaan aanliggen. De drukcoëfficiënt zal daarna redelijk constant blijven.

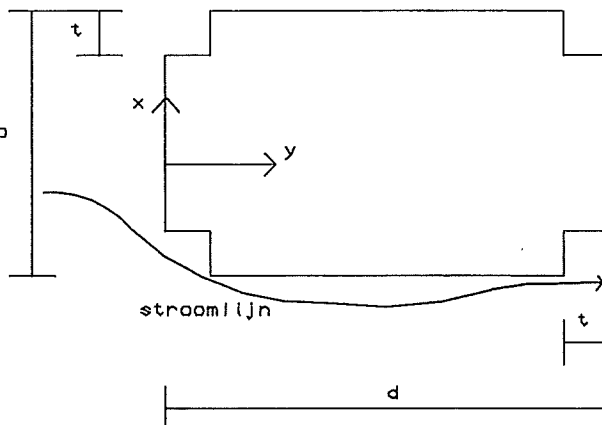


fig. 21 Stroming om een rand

Parkinson e.a. hebben onderzocht wat het effect van turbulentie op dit mechanisme is [21]. Het blijkt, dat in grote lijnen hetzelfde optreedt, maar de stroming gaat veel sneller aanliggen. Dit is het gevolg van de menging door de turbulentie van de vrijwel stilstaande luchtlaag achter de hoek (tegen de zijgevel) en de lucht, die om het gebouw heen stroomt. Hierdoor gaan de stroomlijnen sneller naar de gevel toe.

In figuur 22 is goed te zien, hoe de turbulentie en het randeffect de drukverdeling bepalen. Deze afbeelding komt uit een onderzoek van Roberson naar de invloed van de turbulentie-intensiteit (I) op de verdeling van de druk op een vierkante doorsnede [6]. De turbulentie is gedefinieerd als het quotiënt van de standaard-afwijking en het gemiddelde van de windsnelheid:

$$(3.2) I(z) = \frac{\sigma_v(z)}{\mu_v(z)}.$$

Voor $I=0.75\%$ zien we het beeld, dat bij de uniforme stroming behoort. De onderdruk neemt (absoluut) toe tot circa. $0.7d$, het punt waar de stroomlijnen weer naar de gevel gaan. Daarna neemt de onderdruk wat af.

Bij sterke turbulentie verschuift het aanlig-punt naar voren. Dat is goed te zien bij de drukverdeling voor $I=10\%$. Al op $0.3d$ is het maximum van de onderdruk bereikt. Vanaf dat moment neemt de onderdruk af. Voor hoogbouw is deze laatste verdeling van belang, daar de stedelijke omgeving een hoge turbulentie-intensiteit kent.

Het moge daarom duidelijk zijn, dat de aanname van een gelijkmatig verdeelde winddruk, zoals die vaak wordt gebruikt, niet correct is. Een betere benadering wordt verkregen met een trapeziumverdeling (vergeleijk figuur 22). Deze drukverdelingen kunnen dus aanleiding geven tot wringende momenten.

Tot nu toe is uitgegaan van rechte hoeken. Voor stompe hoeken is het

gedrag gunstiger. Ook een inspringende hoek kan gunstig werken. Onderzoek heeft uitgewezen, dat een verhouding $t/b=1/8$ het gunstigst is. Hierbij is b de breedte van de loefzijde en t de breedte van het inspringende deel (zie figuur 21). Een te grote terugval van de gevel heeft echter een negatief effect. Zie hiervoor de volgende pagina.

Uit spectrumberekeningen voor torsie blijkt het belang van de drukverdeling op de gevels loodrecht op de windrichting. Kareem stelt zelfs, dat het spectrum voor torsie voornamelijk afhangt van het asymmetrische gedrag van de wind op de zijgevels [30]. Dit onderbouwt hij met een berekening, waarbij de diverse bijdragen aan het spectrum afzonderlijk worden bepaald. Ook andere onderzoekers, met name Ellingwood e.a., hebben gevonden, dat de correla-

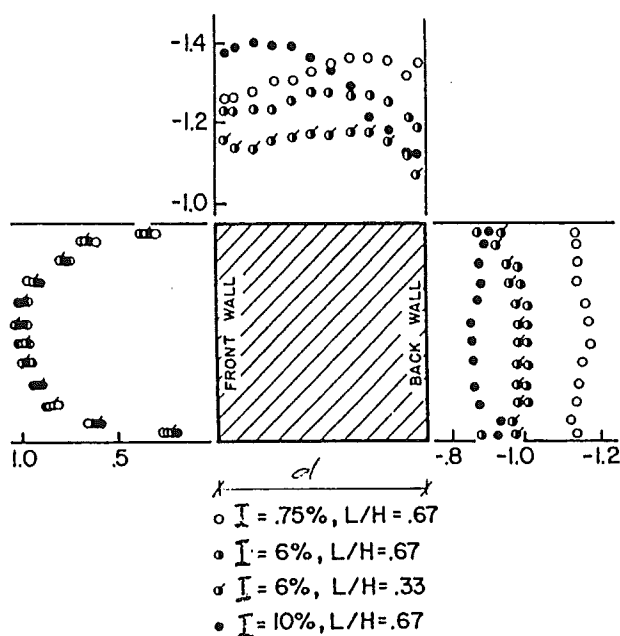


fig. 22 Drukverdeling op de gevels

tie tussen het moment in de y-richting en het wringend moment hoog is [13]. Zie hiervoor ook paragraaf 4.3.

Tenslotte dient opgemerkt te worden, dat de stroming om een rand niet op zichzelf staat. Het zal praktisch altijd in combinatie met een ander verschijnsel, zoals wind onder een bepaalde hoek, optreden.

3.2.2 Een onregelmatig oppervlak

Tegenwoordig bezitten veel hoge gebouwen een gladde gevel, zoals de bekende glazen gevel. Er zijn echter ook ontwerpen waarbij de stijlen geprononceerd worden door ze naar buiten te brengen. Hierdoor heeft de gevel in zoverre een onregelmatig oppervlak gekregen, dat van een vlakke gevel niet meer gesproken kan worden.

Leutheusser heeft onderzoek gedaan naar de drukverdelingen, die bij dit soort configuraties optreden [32]. Van één van de metingen is hier een afbeelding bijgevoegd (figuur 23). Daarbij vallen twee dingen op. Ten eerste wordt aan de loefzijde de drukafname nabij de hoek extra vergroot. Daar staat tegenover, dat de uitsteeksels een gunstige invloed hebben op het aanliggen van de stroming tegen de zijgevels. Hierdoor wordt hier een redelijk gelijkmatige drukverdeling bereikt.

Voor dergelijke ruwe oppervlakken blijkt de mogelijke torsie dus vooral af te hangen van de verdeling aan loefzijde. De correlatie met het moment in y-richting is hier minder significant.

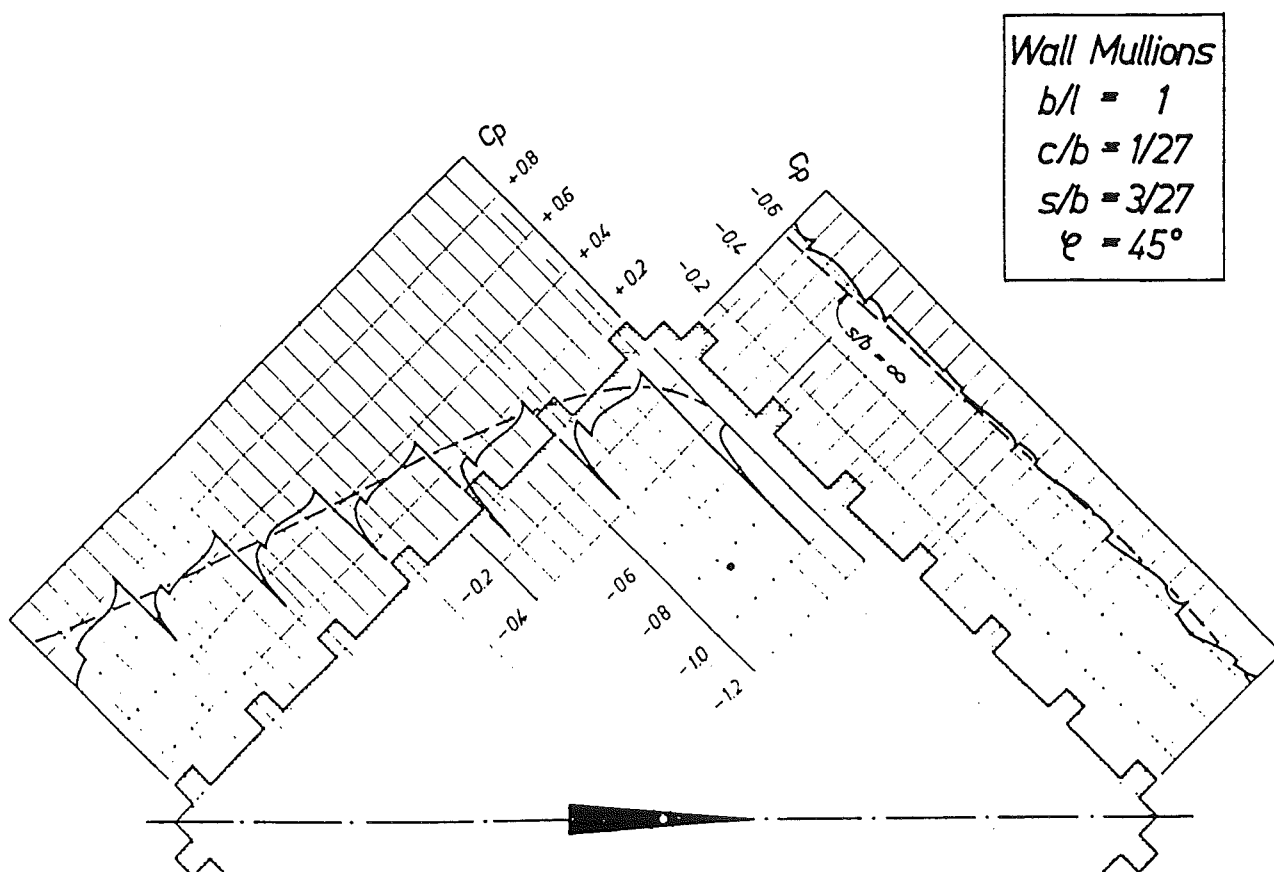


fig. 23 Winddrukverdeling op 'ruw' oppervlak

3.2.3 Wind onder een hoek

Als de wind niet loodrecht op één van de gevels staat, dan worden de twee effecten, die in het voorgaande zijn beschreven, versterkt. Door de hoek met de assen van het gebouw zal de ene gevel zwaarder worden belast als de ander. Meestal levert dit een wringend moment op.

In figuur 24 en 25 zijn nog wat resultaten van het onderzoek van Roberson weergegeven [6]. Duidelijk is te zien, dat de hoek waaruit de wind komt een grote invloed heeft op de verdeling op de windwaartse zijde. Als $\alpha=10^\circ$, varieert C_p zelfs tussen -1.0 en -2.0 ! In figuur 24 is de hoek vastgehouden en is de turbulentie gevarieerd. Net als bij loodrechte aanwaaiing zien we, dat de drukverdeling op de loefgevel ongelijkmatiger wordt naarmate de wind turbulentier is. Daarentegen wordt de drukverdeling op de lijzijde (=windafwaartse gevel) veel gelijkmatiger als de wind niet loodrecht op één van de assen staat. Het wringend moment zal hierdoor groter worden, zoals ook uit het werk van Roberson blijkt. Hij vindt, dat de factor C_T toeneemt als de hoek toeneemt van 0 tot 10 graden. Deze factor is een maat voor de grootte van het wringend moment. In hoofdstuk 4 zal er nog uitgebreid op terug worden gekomen.

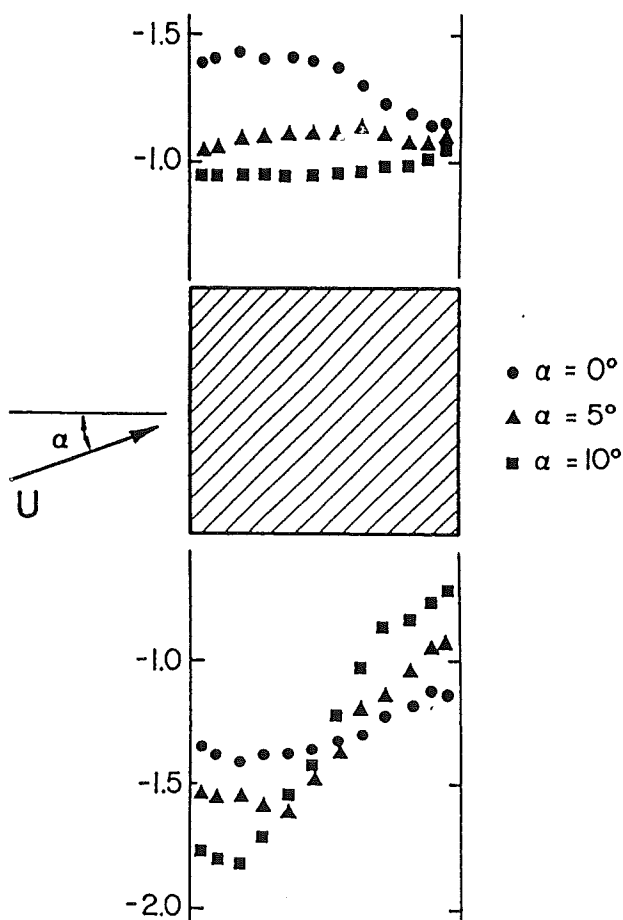


fig. 24 Invloed aanwaaihoek op de drukverdeling op zijgevel

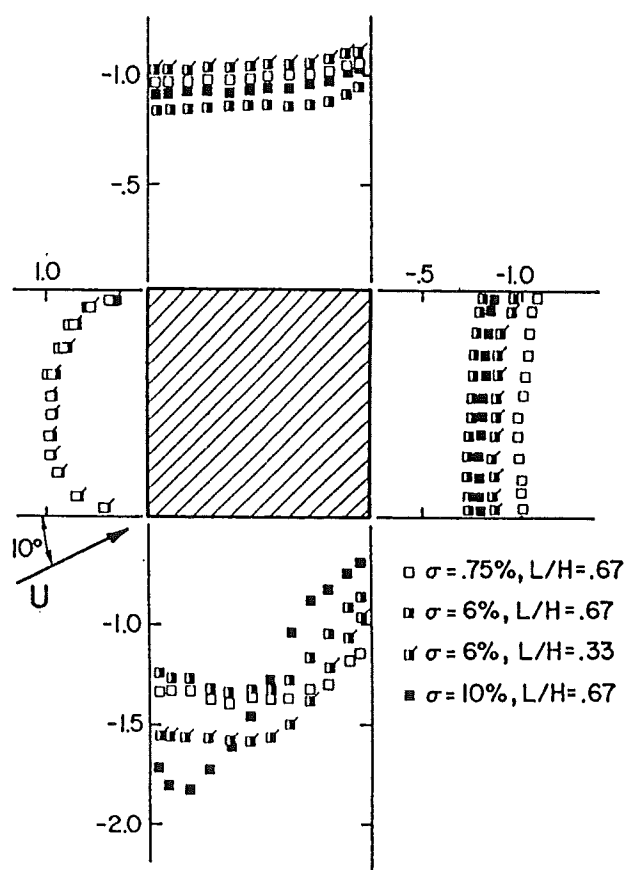


fig. 25 Invloed van turbulentie op drukverdeling

3.3 Windvlagen

Naast de turbulentie zal altijd een zekere ruimtelijke fluctuatie van de wind optreden. Dit wordt veroorzaakt door windvlagen. Deze zullen in het algemeen een wringend moment tot gevolg hebben. Dit is eenvoudig in te zien met het volgende voorbeeld. Stel, dat bij een gebouw met rechthoekige doorsnede de ene helft van de gevel wordt belast met een windvlaag, terwijl op de andere helft geen vlaag aankomt. De drukverdeling is dan zeker asymmetrisch ten opzichte van de vorm van het gebouw en torsie zal het gevolg ervan zijn.

Het is echter wel zo dat onder andere Van Koten gewezen heeft op het feit, dat de windbelasting op een groot oppervlak minder variatie vertoont [9,31]. Bij hoogbouw is altijd sprake van grote oppervlakken, zodat het totale wringend moment door vlagen niet significant groot zal zijn.

3.4 Wervel-geïnduceerde trillingen

In het algemeen bezit een object, dat zich in een stroming bevindt, een zog. Dit is een gebied waarin onderdruk heerst en zich wervels bevinden. Deze kunnen ontstaan vanaf het zogenaamde loslaatpunt, dit is het punt waar de stroomlijnen niet meer tegen de gevel liggen. De reden hiervan is, dat aan de rand van de zog de traag bewegende deeltjes uit de zog en de snelle deeltjes uit de grenslaagstroming elkaar ontmoeten. Hierdoor kunnen snelle luchtdeeltjes van de hoofdstroom loslaten, wat tot de vorming van wervels leidt. In figuur 26 is een schets gegeven van stroming van de wind om een hoog gebouw heen. De richting van de wervels is uit het rechterplaatje te halen. De afbeelding komt uit een onderzoek van SBR naar windhinder [40].

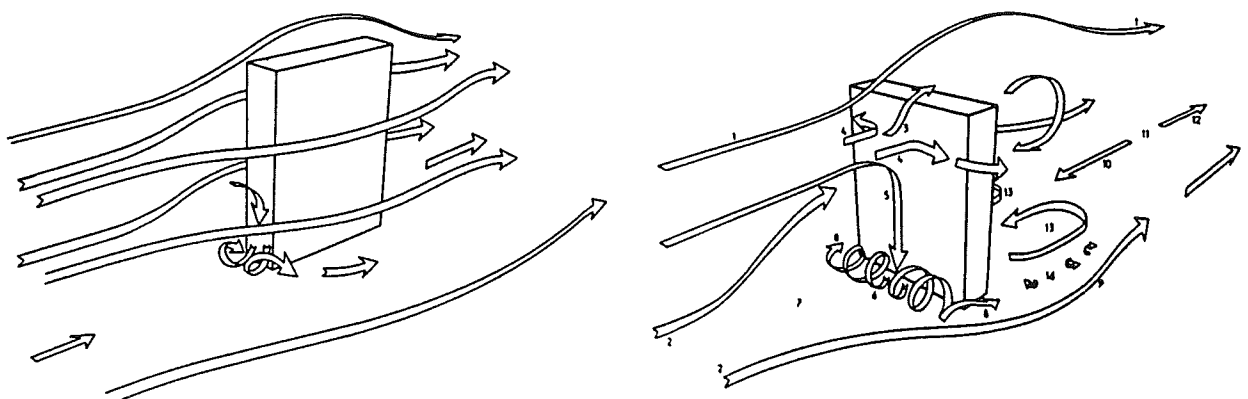


fig. 26 Luchtstroming om een hoog gebouw

Het loslaten van de wervels veroorzaakt krachten loodrecht op de windrichting. In het Engels wordt dit de lift-force genoemd. Meest opvallende daarbij is, dat het loslaten in tegenfase optreedt, zodat het gebouw in figuur 26 het ene moment een kracht naar links en even later een kracht naar rechts ondervindt. De lift-force kan dus een kan een trilling van het gebouw lood-

recht op de windrichting veroorzaken. Deze trilling treedt op, als de loslaatfrequentie gelijk is aan de eigenfrequentie van het gebouw, en wordt vaak aangeduid met vortex-shedding.

De dynamica van een wolkenkrabber is daarom belangrijk om te kunnen beoordelen of een oscillatie, die door wervels wordt geïnduceerd, significant is.

De grootte van de responsie wordt in grote mate bepaald door het getal van Scruton, dat als volgt is gedefinieerd:

$$(3.3) S_c = \frac{4\pi m \zeta}{\rho D^2}, \text{ met:}$$

-m=massa per lengte-eenheid van het gebouw,

-D=kenmerkende maat van de doorsnede van het gebouw.

Een hoog getal van Scruton ($S_c > 15$) betekent een laag amplitude bij vortex-shedding. Daarentegen treedt bij een laag Scruton-getal ($S_c < 5$) een sterke oscillatie van het gebouw op.

Voor vortex-shedding kan instabiliteit optreden als de lift-force groter wordt door de beweging van het gebouw. Hierdoor wordt de oscillatie versterkt, waardoor de kracht loodrecht op de windrichting toeneemt enzovoorts. Dit is mogelijk doordat de aërodynamische damping negatief wordt en structurele damping laag is.

Dit verschijnsel wordt ook wel galopperen genoemd en mogelijk optreden is afhankelijk van de vorm van de doorsnede. In het verleden is vooral onderzoek gedaan naar rechthoekige en ronde vormen, onder andere door Parkinson en Washizu [19,21]. In figuur 27 zijn een aantal resultaten gepresenteerd van een Japans onderzoek onder leiding van Washizu naar torsie-instabiliteit door vortex-shedding.

In figuur 27 zijn de gearceerde gebieden de instabiele zones. Hier kan torsie-knik optreden door vortex-shedding. Op de verticale as is een gereduceerde snelheid $V/b\omega_0$ uitgezet. Hierbij is ω_0 de eigen-hoekfrequentie van het gebouw. c/d op de horizontale as is de verhouding breedte (c) en diepte (d) van de plattegrond. Duidelijk is te zien dat de aanwaaiing vrijwel loodrecht moet zijn om een gevaarlijke trilling te krijgen. Als α groter is dan circa 13 graden zal geen instabiliteit optreden.

Als meerdere hoge gebouwen bij elkaar staan, kan ook nog interferentie optreden waardoor de mechanismes, die voor torsie bij hoogbouw kunnen zorgen, ingewikkelder worden. In de volgende paragraaf daarover meer.

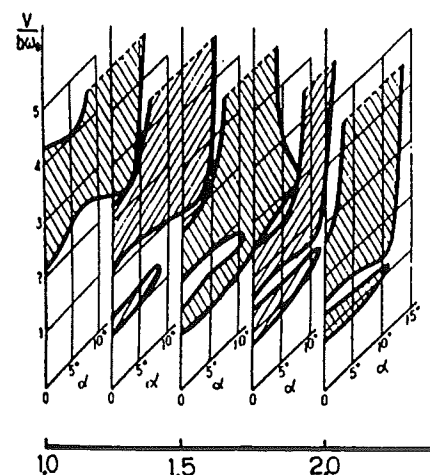


fig. 27 Instabiliteitsgebied voor torsie bij vortex-shedding

3.5 Interferentie-effecten

Een wolkenkrabber in een omgeving met veel andere hoge gebouwen zal invloed ondervinden van de luchtstroming om zijn burens. Zo is het mogelijk, dat gebouw B zich gedeeltelijk in de zog van gebouw A bevindt. Hierdoor zal de gevel van B bloot worden gesteld aan zeer turbulente stromingen door de wervels, die zich in de zog bevinden. Braziliaans onderzoek geeft aan, dat met name de wringing significant kan toenemen door de interactie-effecten tussen naburige hoge gebouwen [8].

Het turbulente karakter van de luchtstroming in een hoogbouwomgeving en onzekerheid omtrent de hoogte van nog te bouwen wolkenkrabbers in de naaste omgeving zorgen voor problemen. Stel, dat een gebouw moet worden ontworpen in het centrum van Rotterdam. Men vermoedt, dat één van de ontwerpen gevoelig is voor dynamische belasting. Door de genoemde redenen kan dan niet direct worden gezegd of de dynamica hier een probleem op gaat leveren. Vaak zal windtunnelonderzoek plus een redelijke aanname omtrent de nog te bouwen hoogbouw in de omgeving dan uitkomst moeten bieden.

In de literatuur is daarom het meest te vinden over interferentie-verschijnselen bij de zogenaamde twin towers. Dit zijn twee (vrijwel) identieke wolkenkrabbers, die op niet te grote afstand van elkaar liggen. Een bekend voorbeeld wordt gevormd door het WTC in New York. In het verleden zijn de verschijnselen, die in de volgende paragrafen worden beschreven, waargenomen bij zulke hoogbouw. Teneinde hiervoor een goede verklaring te kunnen geven is relatief veel onderzoek hieraan besteed. Japans onderzoek [29] geeft aan, dat de resultaten voor identieke torens ook in algemenere zin kunnen worden gebruikt als verklaring voor bepaalde effecten bij een concentratie van hoogbouw.

Tenslotte dient opgemerkt te worden, dat de windsnelheden bij de mechanismen, die in de paragrafen 3.5.1 t/m 3.5.3 worden behandeld, sterk gereduceerd zijn. In veel gevallen zal dit het effect van de ongunstige drukverdeling compenseren.

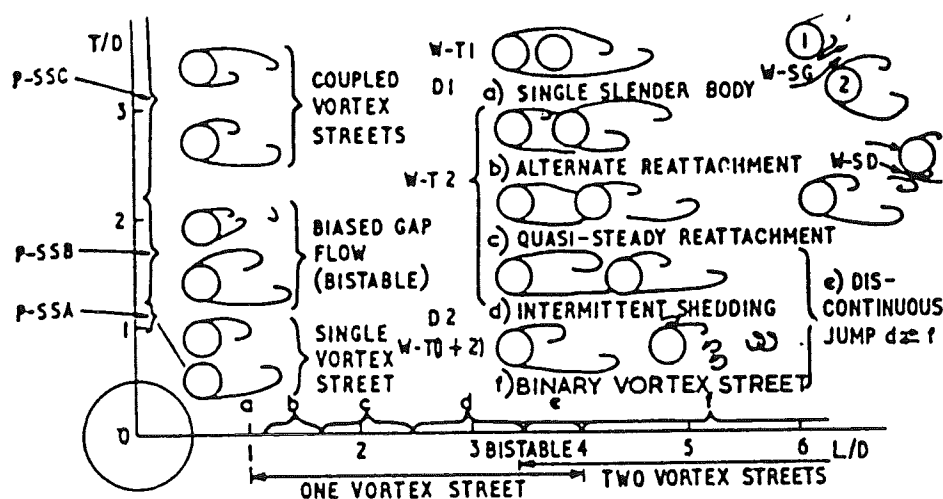


fig. 28 Wervelpatronen

3.5.1 Wervel-geïnduceerde interferentie

Naast het trillen van een alleenstaand gebouw loodrecht op de windrichting door het loslaten van wervels zijn er diverse interferentie-patternen bekend, waarbij de vorming van wervels achter gegroepeerde gebouwen gekoppeld is. Indien hierbij een trilling ontstaat loodrecht op de windrichting van zowel een stroomop- als afwaarts gebouw wordt gesproken over intermittent-shedding.

Essentieel daarbij is, dat het stroomafwaartse gebouw in de wervelstraat van een stroomopwaarts gebouw komt te liggen. De wervelstraat is de zone in de zog waar zich de meeste wervels bevinden. Als de gebouwen dicht genoeg bij elkaar liggen zal de eerste wervelstraat gekoppeld worden met de tweede. Hierdoor zijn de twee zones met wervels niet meer onafhankelijk.

Er kunnen nu diverse dingen gebeuren. Ten eerste kunnen de wervels uit de eerste zone de vorming van wervels achter het tweede gebouw gaan controleren. Dit is een belangrijk effect, want op deze manier gaan de gebouwen in dezelfde frequentie trillen. De loslaatfrequentie van de stroomafwaartse gebouw is immers gesynchroniseerd met de eigenfrequentie van dat gebouw. Door het controle-effect zal de loslaatfrequentie van het stroomaf- en opwaartse gebouw gelijk worden, waardoor de gebouwen op dezelfde manier gaan trillen. Zoals in 3.4 reeds is aangetoond kan dan een torsietrilling ontstaan.

Een tweede verschijnsel is het beschut liggen achter het stroomopwaartse gebouw. Dit treedt op als twee gebouwen zeer dicht tegen elkaar aan zijn gezet. Dit geval is niet zo interessant, want het beschutte gebouw zal nauwelijks belast worden. Het volgende verschijnsel is wel interessant: het gebeurt soms, dat de stroomlijnen aan de ene zijde van het stroomafwaartse gebouw wel gaan aanliggen en de andere kant niet. Dit wordt veroorzaakt door de versturende werking van de wervels, afkomstig van het stroomopwaartse gebouw. In paragraaf 3.2 is aangetoond, dat de onderdruk sterk afneemt door het aanliggen. Door de gedeeltelijke aanhechting zal daarom een asymmetrische drukverdeling ontstaan met wringing als gevolg.

Zdravkovich heeft onderzoek gedaan naar dit soort interferentieverschijnselen[38]. Hij deed dit voor cilinders, maar het lijkt aannemelijk, dat voor andere vormen van hoogbouw dezelfde patronen kunnen optreden. In figuur 28 zijn de wervelpatronen getoond, die hij heeft gevonden. Welke variant zal optreden hangt diverse parameters af, zoals de oriëntatie ten opzichte van elkaar (hier t/d en l/d).

Ook de verhouding van de breedtes van de gebouwen is van belang. Hiernaar is ook onderzoek gedaan en wel door Inaoka en Taniike, beiden uit Japan [29]. Zij hebben een vervormingsfactor BF (=Buffeting Factor) gedefinieerd:

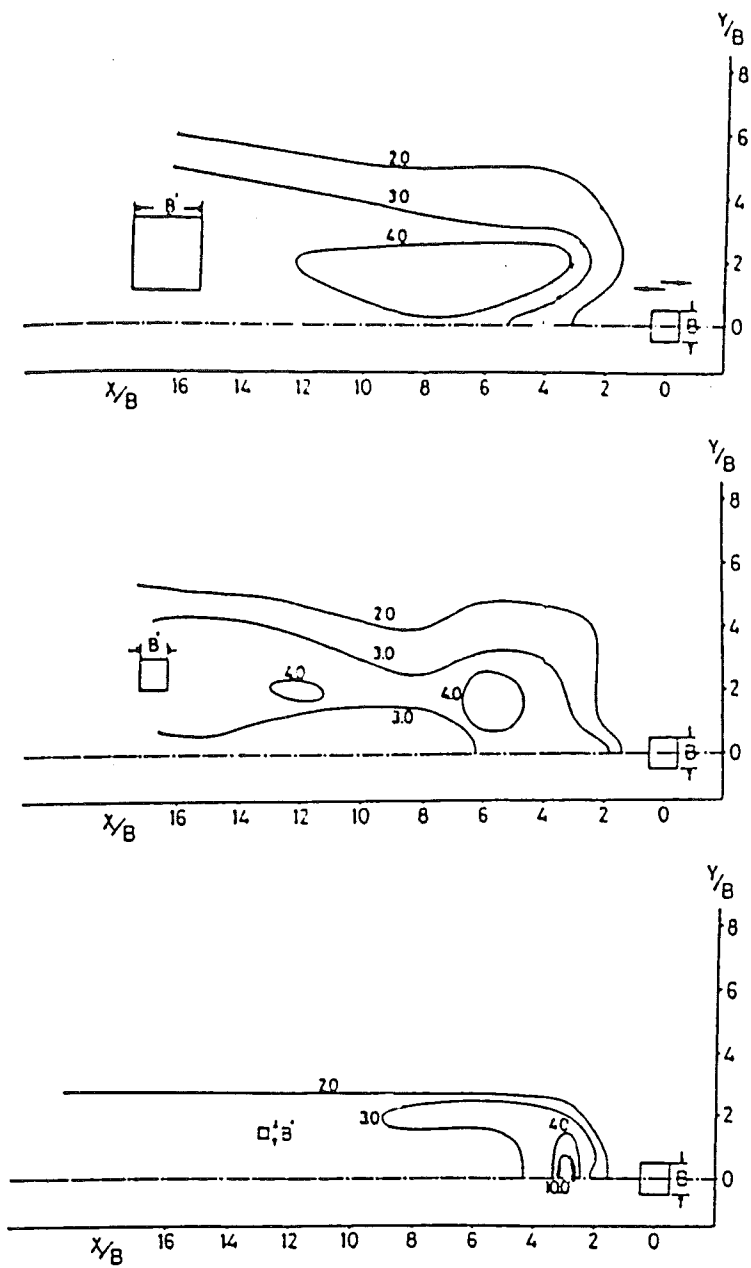
$$(3.4) BF = \frac{u_{h,interferentie}}{u_{h,geïsoleerd}}.$$

In (3.4) is u_h de verplaatsing van de top. BF is dus een maat voor de vergroting van de vervormingen door de aanwezigheid van andere hoge gebouwen in de directe omgeving. In figuur 29 zijn drie grafieken met BF -contourlijnen te zien voor drie verschillende afmetingen van het stroomopwaartse gebouw.

Een contourlijn verbindt de punten, waarop het centrum van het stroomopwaartse gebouw ligt, met een gelijke Buffeting Factor. De lijn met $BF=3.0$ bijvoorbeeld geeft aan hoe de twee gebouwen ten opzichte van elkaar moeten liggen om een drie maal zo grote verplaatsing te krijgen dan de alleenstaande wolkenkrabber zou ondervinden. Het stroomafwaartse gebouw ligt hierbij op de oorsprong en heeft een breedte b .

Uit figuur 29 blijkt, dat in 't algemeen de aanwezigheid van een ander hoog gebouw de verplaatsingen vergroot. Het is dan ook te verwachten, dat de krachten op de constructie zullen toenemen. Onderzoek van Saunders en Melbourne bevestigt dit [34]. Zij vinden, dat de dynamische belastingen tot 75% groter worden. Blessmann en Riera hebben voor de combinatie van twee wolkenkrabbers met vierkante doorsnede de factor C_t bepaald voor diverse configuraties [8]. Hierbij is C_t gedefinieerd volgens formule (4.2). Zij vinden, dat het wringend moment op de fundering tot driemaal hoger kan worden door interferentie-effecten.

Naast de oriëntatie en de verhouding van de onderlinge afmetingen zijn er nog diverse parameters, die bepalen welk patroon uit figuur 28 zal optreden. In figuur 29 is bijvoorbeeld de gereduceerde snelheid $V_r = V/fd = 5$ vastgehouden. Voor hoogbouw is ook nog sprake van een grote spreiding in de hoogte. Zoals uit het plaatje van Zdravkovich (fig. 28) volgt, liggen de diverse mechanismen dicht bij elkaar. Het is daarom moeilijk om aan te geven hoe hoogbouw interfereert en op welke belastingen dient te worden gerekend. Voorlopig zal windtunnelonderzoek in dit soort gevallen noodzakelijk blijven.



Along-wind $V_r=5$

fig. 29 BF-contourlijnen voor 3 configuraties

3.5.2 Gap flow switch

Onder bepaalde omstandigheden kan een aërodynamisch verschijnsel optreden bij twee achter elkaar gelegen gebouwen, dat in het Engels gap flow switching wordt genoemd. Bij een bepaalde configuratie stroomt de lucht steeds op een andere manier om het stroomafwaartse gebouw heen.

Voor de configuratie van figuur 30 bijvoorbeeld treedt dit op, als het kleine gebouw zich op een afstand van $3b$ bevindt, als b de breedte van het stroomafwaartse gebouw is [29]. Beschouw vervolgens de onderste grafiek van figuur 29 met BF-contouren en zoek het punt $(3b,0)$ op. Dan blijkt, dat dit mechanisme significant grotere verplaatsingen ($BF > 10$) veroorzaakt als de intermittent-shedding. Tevens is uit de andere twee grafieken van dit plaatje te zien, dat de andere twee configuraties geen echte piek in de BF-waarden kennen. Bij deze verhoudingen van de breedtes is dan ook geen gap flow switch waargenomen.

De drukverdeling kan bij dit mechanisme niet meer gelijkmatig worden aangenomen. De gap flow switch is namelijk een bi-stabiele stroming, wat inhoudt, dat de hoofdstroom zowel links als rechts van het stroomafwaartse gebouw kan lopen. Dit is ook te zien in figuur 30, waar beide stroompatronen zijn getekend.

Het wisselen van richting zal een torsietrilling met de daarbij behorende krachten kunnen veroorzaken. Als bovendien de wisselfrequentie een veelvoud is van de eigenfrequentie voor torsie is, dan kan de vervorming substantieel groot worden.

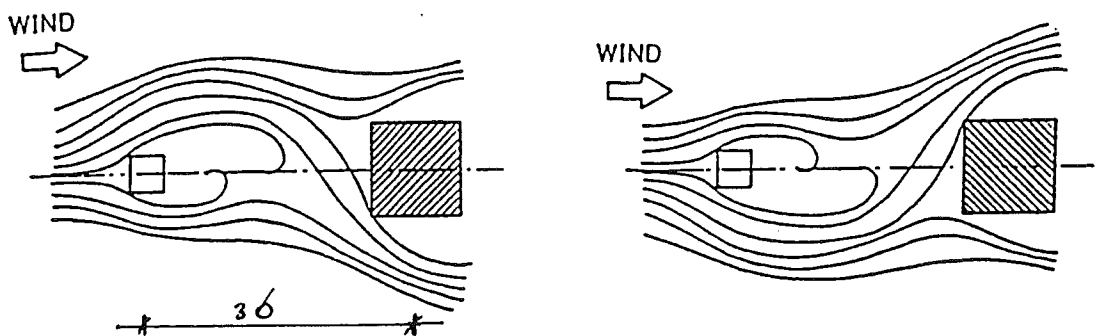


fig. 30 Stroomlijnen bij gap flow switch

3.5.3 Jet-switch

Een ander interferentieverschijnsel is het zogenaamde jet-switch mechanisme. Dit is verwant aan de gap flow switch, daar het ook een bi-stabiel stromingsverschijnsel is. Het kan optreden als de windrichting onder een hoek met de verbindingssas van twee gebouwen staat. De wind wringt zich tussen de gebouwen door, waarbij het ene gebouw een hoge en het andere een lage winddruk ondervindt. Bij bepaalde configuraties ontstaat de situatie, dat de hoge en lage druk periodiek wisselen, waardoor torsie geïntroduceerd kan worden.

Een voorbeeld is figuur 31, dat uit het onderzoek van Blessmann en Reira komt [8]. In de afbeelding is de variatie van de drukcoëfficiënt C_x en C_y met de windrichting weergegeven. Rond $\alpha=90^\circ$ en 270° blijkt C_x plots met de tijd te variëren. Met tussenpozen van vier seconden wisselt de drukcoëfficiënt van praktisch nul tot circa -0.4. Interessant is, dat de factor C_i in deze situatie veel hoger is dan voor de andere windrichtingen.

Verder geldt voor jet-switch, dat de verplaatsingen veel groter zijn dan bij intermittent-shedding. Een en ander uiteraard weer afhankelijk van de wisselfrequentie.

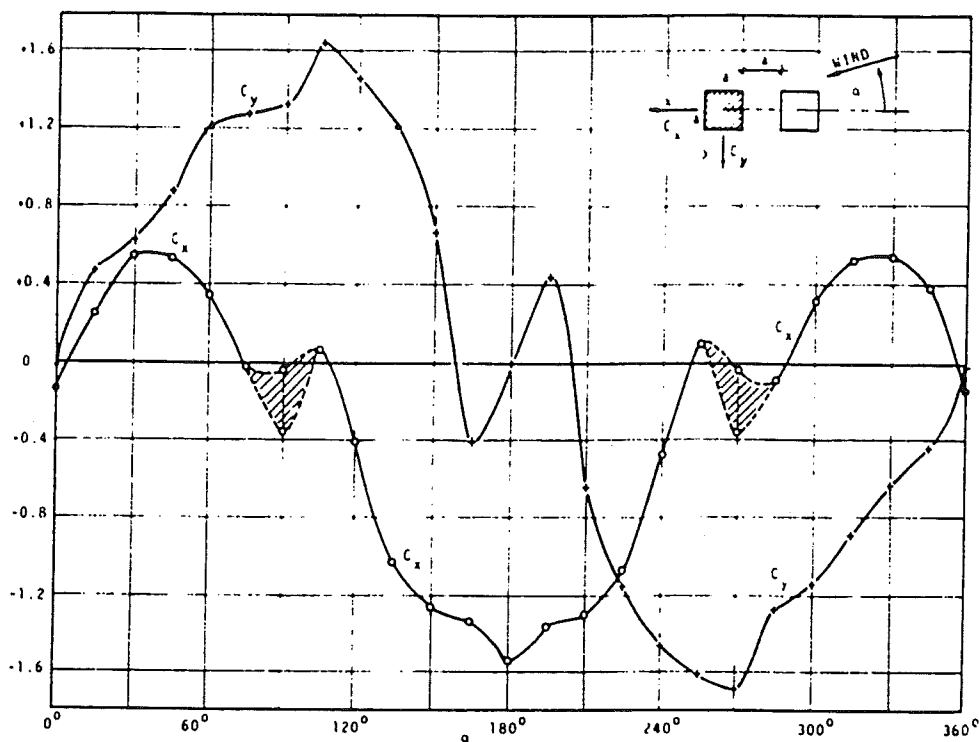
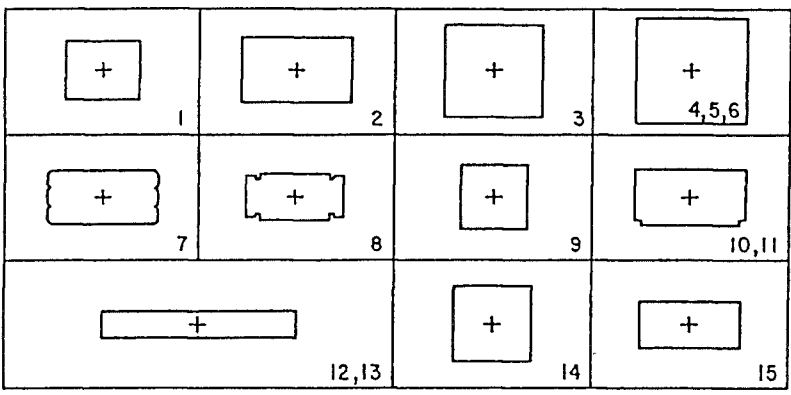
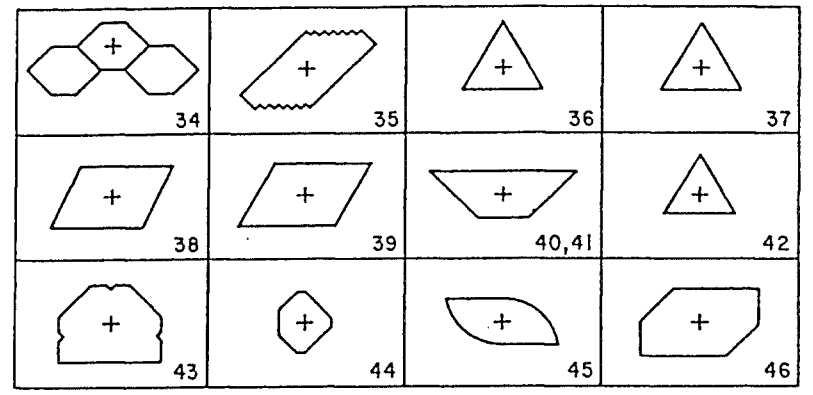


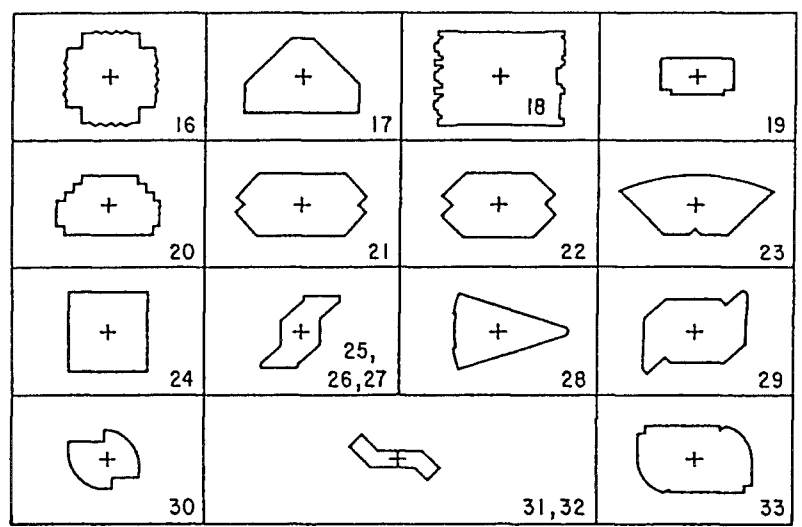
fig. 31 Variatie van drukcoëfficiënten bij 'twin towers'



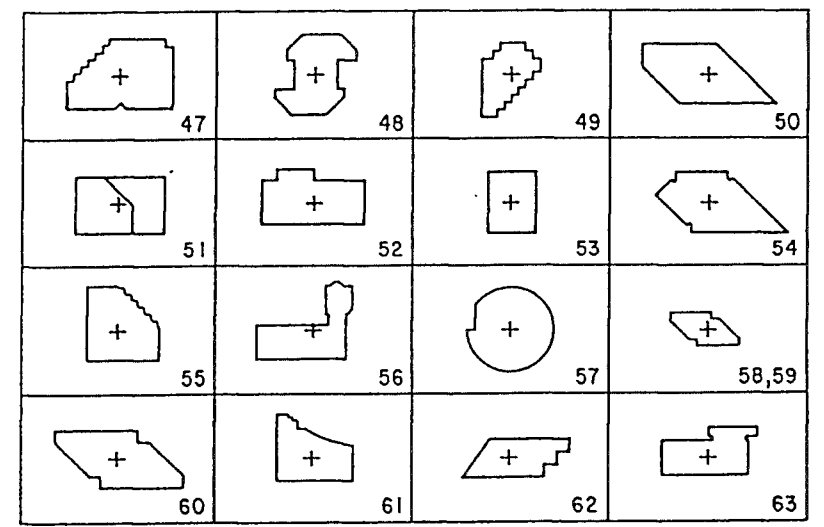
Simple Shapes



Complex/Symmetrical Shapes (continued)



Complex/Symmetrical Shapes



Complex/Non-Symmetrical Shapes

fig. 32 Voorbeelden van de drie gebouwtypen

HOOFDSTUK 4: KWANTITATIEVE UITWERKING VAN WRINGBELASTING

4.1 Inleiding

In het voorgaande is wringing voornamelijk kwalitatief behandeld. De mechanismen, die tot torsie in een hoog gebouw kunnen leiden, zijn aangegeven. Slechts een aantal maal is numerieke informatie aanwezig. Dit is ook wel begrijpelijk, daar vele verschijnselen, die wringing veroorzaken, een uitgesproken stochastisch karakter hebben.

Een nadeel van een kwalitatieve presentatie is, dat het voor een ontwerper weinig praktisch is. Al de mogelijke mechanismen beoordelen op significantie is niet eenvoudig en vaak zal dan toch windtunnelonderzoek nodig zijn. Verder wil een architect of constructeur al in de prille fase van zijn ontwerp inzicht krijgen in de consequenties van een bepaalde oplossing voor het maatgevend wringend moment.

Er is dus behoefte aan een systeem, waarbij snel betrouwbare waarden kunnen worden bepaald voor het wringend moment. In dit literatuuronderzoek is hiernaar gezocht voor het geval dat windbelasting de externe oorzaak van de torsie is. Kwantitatieve informatie over aardbeving-gebonden oorzaken leek voor de Nederlandse situatie minder relevant. Een indruk van de mogelijke waarden geven eventueel de spectra in paragraaf 3.1.

In de volgende paragraaf zal het werk van Lythe en Surry worden behandeld. Bij de schrijver dezès bestaat de indruk, dat hun onderzoek voldoet aan de eisen die hiervoor zijn genoemd.

Voor dynamische berekeningen is vervolgens een aantal spectra verzameld, die als invoer van het belastingenspectrum kunnen worden gebruikt.

4.2 Algemene methode voor het bepalen van wringbelasting

In Canada wordt al een tiental jaren onderzoek gedaan naar torsiebelasting op hoge gebouwen. Vooral the University of Western Ontario, London, Ontario met het bekende Boundary Layer Wind Tunnel Laboratory heeft veel baanbrekend werk in die richting verricht. Canada is ook één van de weinige landen met expliciete eisen ten aanzien van torsie in de normen voor bouwwereld.

Om deze voorschriften te toetsen zijn Lythe en Surry begonnen aan een uitgebreid onderzoek [31]. Zo'n zestig gebouwvormen werden onderzocht in de windtunnel, waarbij de windbelastingen werden gemeten. De wind werd over 360 graden gevarieerd in 36 stappen. Uit deze gegevens werd een factor C_t bepaald. Deze is als volgt gedefinieerd:

$$(4.1) C_t = \frac{M_{t,0}}{p_w b d h}$$

In (4.1) is $M_{t,0}$ het wringend moment op de fundering, zoals dat gemeten wordt om een as op de halve breedte van het beschouwde gebouw.

De definitie van b , d en h volgt uit figuur 2 en p_w is de stuwdruk van de wind op de gradiënthoogte. Dit is de hoogte boven het aardoppervlak waar de grenslaag eindigt.

Vervolgens werden de gebouwen in drie groepen verdeeld met als criterium de vorm. Hierbij worden de volgende typen onderscheiden (zie fig. 32):

- eenvoudig (I)
- complex/symmetrisch (II)
- complex/asymmetrisch (III)

Deze indeling is niet helemaal zuiver. De onderzoekers geven zelf aan, dat hier en daar een arbitraire keuze is gemaakt bij de indeling van de onderzochte gebouwen. Zo zijn de meeste puntsymmetrische doorsnedes bij groep II geplaatst, wat discutabel is. Immers, in hoofdstuk 2 is er vanuit gegaan, dat de vormen van type II semi-symmetrisch zijn. Een puntsymmetrisch gebouw echter hoeft niet persé een symmetrie-as te bezitten. Een splitsing in groep IIa (as) en IIb (punt) zou daarom misschien zinnig zijn.

In tabel I zijn in de eerste rij de resultaten voor het totale onderzoek verzameld. Als C_t volgens (4.1) wordt berekend, blijkt dat de gemiddelde torsie-coëfficiënt 0.1226 bedraagt. In de laatste kolom is echter te zien, dat de variantie erg groot is. Om deze te reduceren zijn drie voorstellen voor C_t gedaan :

$$(4.2) C_t = \frac{M_{t,0}}{p_w b^2 h} \text{ of } (4.3) C_t = \frac{M_{t,0}}{p_w b \beta h} \text{ of } (4.4) C_t = \frac{M_{t,0}}{p_w \beta^2 h}.$$

Hierbij is β een vormfactor, die ontwikkeld is door Greig (eenheid is: meters). Uit tabel I zien we, dat C_t volgens (4.2) en (4.3) de laagste variantie oplevert. Als we verder weten, dat de berekening van β ingewikkeld is, dan is de keuze voor (4.2) voor de hand liggend.

Tabel I: Variatie van de diverse torsie-coëfficiënten

type	aantal geb.	torsie coëff.	gemidelde μ	stand. afw. σ	σ_μ
totaal (I+II+III)	62	(4.1)	0.1226	0.1127	0.92
		(4.2)	0.0578	0.0302	0.52
		(4.3)	0.0618	0.0323	0.52
		(4.4)	0.0697	0.0454	0.65

In tabel II is C_t volgens (4.2) uitgesplitst naar de drie gebouw-typen. De stuwdruk, waarmee (4.2) genormaliseerd wordt, is aangepast. In plaats van p_w op de gradiënthoogte is voor tabel II de stuwdruk ter hoogte van het dak gebruikt. Dit is veel praktischer.

Tabel II: C_t voor de verschillende gebouw-typen

type	gemiddelde μ	stand. afw. σ	σ_μ
I+II+III	0.0845	0.0444	0.53
I	0.0539	0.0159	0.30
II	0.0937	0.0481	0.51
III	0.0954	0.0440	0.46

De bepaling van het maatgevende wringend moment voor een willekeurig gebouw is nu heel eenvoudig:

- bepaal het type gebouw aan de hand vorm van de doorsnede
- bepaal van C_t het gemiddelde en de standaard-afwijking m.b.v. tabel II
- bepaal de ontwerp waarde van C_t , afhankelijk van de veiligheidsfilosofie die in de berekening wordt toegepast
- bepaal de gemiddelde stuwdruk ($=p_w$ uit NEN 6702) ter hoogte van het dak
- bepaal het wringend moment $M_{t,0}$ op de fundering m.b.v. (4.2).

Overigens dient opgemerkt te worden, dat in de proeven geen extra wringing door interferentie-effecten is verwerkt. De modellen zijn zodanig omringd met andere modellen, dat een ge-

trouw beeld van een gemiddelde stadsbebouwing in de testen wordt bereikt. Typische interferentie-effecten, zoals met twin-towers, vallen zo echter buiten de metingen.

Ook voor het bepalen van de piekbelasting bij dynamische berekeningen hebben Lythe en Surry voorstellen gedaan. Zij sluiten daarbij aan op het werk van Greig, die stelt:

$$(4.5) T_R = \phi_P \phi_R (T_0 + g T_m)$$

Deze formulering sluit redelijk aan bij de methode, die in Nederland gebruikelijk is. Ook hier wordt gebruik gemaakt van Davenports piekfactor g . De termen stellen het volgende voor:

- T_R =het maximum wringend moment in R jaar
- T_0 = het gemiddelde (statische) deel van de torsie, is gelijk aan $M_{k,0}$
- T_m = het dynamische deel van de torsie.
- ϕ_P, ϕ_R =tweetal reductie-factoren.

T_m is de standaard-afwijking van de wringing. Deze is uit het spectrum voor torsie te berekenen. Eenvoudige uitdrukkingen zijn hier vooralsnog niet voor te geven, daar T_m met name van de vorm van het gebouw afhangt. In de literatuur zijn geen getallen gevonden, die per vorm de waarde van de standaard-afwijking geven.

Als bij windtunnelonderzoek het spectrum voor wringing, zoals die bijvoorbeeld in de volgende paragraaf is gegeven, wordt bepaald, biedt dit echter in principe de mogelijkheid T_m te berekenen. Een data-base met waarden voor diverse vormen zou in de ontwerpfase erg goed van pas komen, maar is (nog) niet beschikbaar.

De factoren ϕ_P, ϕ_R drukken de onwaarschijnlijkheid uit van het gelijktijdig optreden van de ergste dynamische effecten en de meest ongunstige windrichting. Uit statistisch onderzoek volgt, dat:

$$(4.6) \phi_P \cdot \phi_R = 0,92 \cdot 0,78 = 0,72 .$$

Tot slot van deze paragraaf zal nog een voorbeeldje worden gegeven van de toepassing van formule (4.2). We beschouwen een gebouw met een hoogte $h=150$ m en een plattegrond zoals in figuur 33 is aangegeven. Aan de hand van figuur 32 (vergelijk met nummer 38 en 39) zien we, dat dit een vorm van het type II is.

De volgende stap is het bepalen van het gemiddelde en de standaard-afwijking uit tabel II voor vormtype II: $\mu = 0.0937$ en $\sigma = 0.0481$.

Stel vervolgens, dat het gebouw wordt gedimensioneerd op een belasting met 5% overschrijdingskans. Deze keuze is in principe afhankelijk van de veiligheidsfilosofie, die in het ontwerpproces wordt gebruikt. Hier is voor een semi-probabilistische aanpak gekozen. De rekenwaarde van C_t wordt daarom:

$$(4.7) C_t = \mu + 1.65 \sigma = 0.173 .$$

De factor 1.65 volgt uit de 5%-eis voor een normale verdeling en kan uit statistische tabellen worden gehaald. Zo komt een 1%-eis overeen met een factor 2.33 .

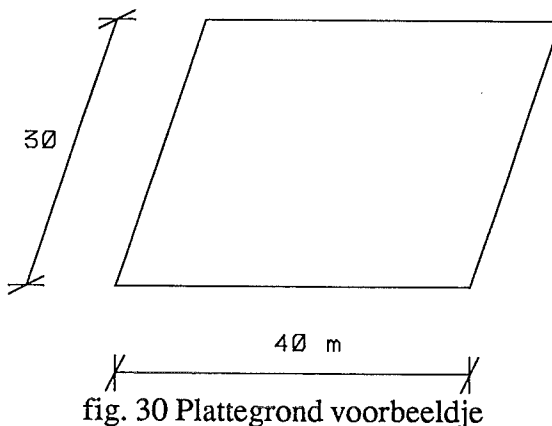


fig. 30 Plattegrond voorbeeldje

De volgende stap is het bepalen van p_w uit tabel 10 uit NEN 6702 (bijlage A1). We vinden dan, dat $p_w=1,86 \text{ kN/m}^2$, daar het gebouw in Zuid-Holland zal worden gebouwd. Dit ligt in gebied II volgens NEN 6702 en geeft een stuwdruk van $1,86 \text{ kN/m}^2$ op 150 meter hoogte. Om het wringend moment te kunnen berekenen moeten we alleen nog bepalen wat de grootste breedte is. Hier is dat $b=40 \text{ m}$. Nu is alles bekend en kan met behulp van (4.2) het wringend moment op de fundering worden berekend:

$$(4.8) M_{i,0}=C_i p_w b^2 h$$

$$(4.9) M_{i,0}=0,173 \cdot 1,86 \cdot 40^2 \cdot 150=77227 \text{ kNm}.$$

Zoals reeds gezegd, is de bepaling van T_R (zie formule 4.5) niet eenvoudig. In veel gevallen zal voor het ontwerpstadium de statische belasting, zoals die met (4.7) kan worden berekend, voldoende zijn. In dit voorbeeld beperken we ons daarom hiertoe.

4.3 Spectra

Voor de windsnelheid wordt al enige tijd het spectrum volgens Davenport gebruikt [31]. Een aantal onderzoekers, waaronder Kareem en de groep rond Ellingwood, hebben een stap verder gezet en de spectra voor momenten in diverse richtingen berekend [13,30]. In figuur 34 en 35 zijn twee gereduceerde spectra, zoals Ellingwood ze vond, afgebeeld. Ze komen goed overeen met spectra, die Kareem heeft berekend.

In figuur 34, het gereduceerd spectrum voor torsie, is horizontaal de dimensieloze frequentie $f l / v$ uitgezet. De grootte l is de kenmerkende breedte van het beschouwde hoge gebouw, bijvoorbeeld de diameter voor een cilinder. Op de verticale as staat het gereduceerde spectrum, dat als volgt is gedefinieerd:

$$(4.10a) F_F(f) = \frac{f S_F(f)}{\sigma_F^2} \text{ of } (4.10b) F_F(f) = \frac{v S_F(f)}{l \sigma_F^2}$$

$S_F(f)$ is in (4.10) het spectrum voor de kracht, die wringing veroorzaakt, en σ_F de standaardafwijking van de kracht. In figuur 35 is het gereduceerd kruisspectrum voor wringing (torque) en de kracht in y-richting (lift) weergegeven.

Cermak en anderen hebben de correlatie van de drie componenten van het moment op een hoog gebouw onderzocht [11]. Zij vinden een grote correlatie tussen het moment in y- en θ -richting. Dat is ook wel te verklaren, omdat wringing wordt veroorzaakt door de excentriciteit van de krachten, die de momenten in de andere twee richtingen veroorzaken.

Verder stellen zij vast, dat de vorm van de plattegrond een grote invloed op de correlatie heeft. Dit bevestigt, dat de vorm een belangrijke parameter is bij wringing, zoals in paragraaf 2.2 reeds was gesteld.

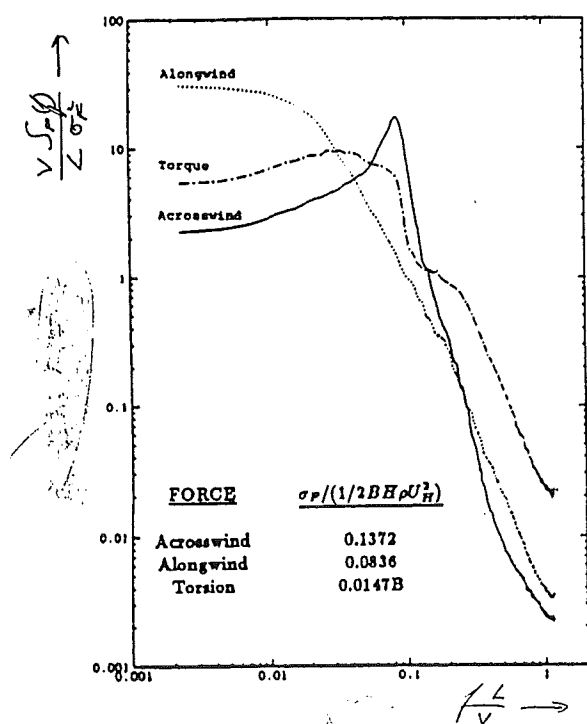


fig. 34 Spectrum voor torsie

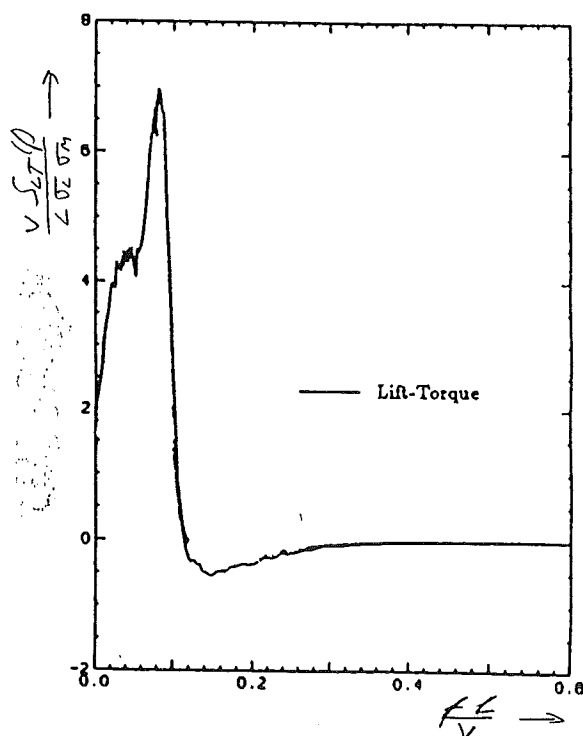


fig. 35 Co-spectrum M_y en M_t

4.4 overzicht oorzaken van wringing van hoogbouw

In deze paragraaf zal een overzicht worden gegeven van de oorzaken, die in de afgelopen hoofdstukken zijn behandeld. Hierbij is een verdeling in drie groepen toegepast. De eerste groep (A) bestaat uit de constructie gebonden oorzaken zoals een excentrische kern. Dit zijn de zaken waarop de constructeur invloed kan uitoefenen. Deze oorzaken zijn in hoofdstuk 2 behandeld.

De tweede en derde groep bestaat uit belastingen als gevolg van de directe omgeving, waarin het gebouw zich bevindt. Hierbij is weer een onderscheid gemaakt naar aardbevingen (B) respectievelijk wind (C). Voorbeelden zijn rotatie van de fundering door aardbevingen of ongelijke drukverdeling op een gevel. In hoofdstuk 3 zijn deze zaken behandeld.

De volgende tabel vat een en ander nog eens samen.

Tabel III Overzicht van de oorzaken van wringing

	oorzaak	1	2	3	4
A	asymmetrische stijfheidsvoorziening	x		x	x
	onregelmatige vorm van de gebouwddoorsnede	x		x	x
	modal coupling		x		x
	niet-lineair gedrag		x		x
B	rotatie van ondergrond		x		
	laterale versnelling				
C	randeffecten	x			x
	onregelmatig oppervlak van de gevel	x		x	x
	wind onder hoek	x	x		x
	windvlagen		x		x
	wervel-geïnduceerde trillingen		x	x	x
	wervel-geïnduceerde interferentie		x		(x)
	gap flow switch	x	x		(x)
	jet-switch	x	x		(x)

Toelichting:

Kolom 1 geeft aan of het verschijnsel ook de statische berekening beïnvloed.

Kolom 2 geeft aan of er in symmetrische constructies wringing door ontstaat.

Kolom 3 geeft aan of het aspect eenvoudig door de ontwerper is beheersen.

Kolom 4 geeft aan of de oorzaak in Nederland van belang is.

In de laatste kolom staat bij de interferentie-effecten (x), waarmee bedoeld wordt, dat het nu nog niet zo relevant is, maar in de toekomst misschien wel, als in Nederlandse steden slanke torens in elkaars omgeving worden gebouwd.

HOOFDSTUK 5: TOETSING VAN DE WRINGBELASTING

5.1 Inleiding

In hoofdstuk 4 is een methode aangereikt om het wringend moment, dat een gebouw werkt als gevolg van wind, te bepalen. Het is nu interessant om te kijken of de TGB 1990 (NEN 6702) tot dezelfde resultaten leidt. In de volgende paragraaf wordt daarom een vergelijking getrokken tussen de twee rekenmethodes.

Als de wringbelasting kwantitatief vaststaat, kan vervolgens het gebouw worden getoetst aan de hand van een drietal criteria. Dit is bekende rijtje van de drie s-en:

- stijfheid
- sterkte
- stabiliteit.

Een vierde s zou hier aan toegevoegd kunnen worden namelijk 'service-ability' oftewel bruikbaarheid. Dit houdt in, dat de functies, die in het gebouw worden vervuld, nog kunnen worden uitgeoefend tijdens een bepaalde belasting van het gebouw (hier bijvoorbeeld storm). In het vervolg zal dit met grensbruikbaarheid worden aangeduid. Het is gebruikelijk om dit met behulp van de stijfheidseis te ondervangen, hetgeen hier ook is gedaan. Dit wordt in paragraaf 5.3 uitgewerkt.

Daar zal tevens worden aangetoond, dat een eenduidige stijfheidseis, met name voor hoogbouw, niet makkelijk te formuleren is. Dit komt vooral doordat iedereen een ander idee heeft van de grensbruikbaarheid. Met andere woorden: de drempelwaarde is subjectief bepaald en daarom moeilijk vast te stellen.

De andere criteria, namelijk sterkte en stabiliteit, zijn veel eenduidiger. In de paragrafen 5.4 en 5.5 zal aangegeven worden welke eisen aan de optredende krachten dienen te worden gesteld teneinde de grenstoestand niet te overschrijden.

5.2 Vergelijking NEN 6702 met literatuur

In paragraaf 4.2 is een methode gegeven om kwantitatieve informatie omtrent de wringing van hoogbouw te bemachtigen. Dit is gebaseerd op onderzoek van Lythe en Surry. Voor zover bekend bij schrijver dezes zijn zij de enigen, die gegevens hebben gepubliceerd, die met normen kunnen worden vergeleken. Weliswaar hebben anderen ook cijfers gepubliceerd, maar dit betrof steeds een beperkte klasse hoogbouw. De methode uit paragraaf 4.2 dient daarom als basis voor de kritische aanschouwing van NEN 6702.

In Nederland kan informatie over de windbelasting op bouwwerken worden gehaald uit de TGB 1990. Een deel hiervan is NEN 6702 [44], waar in artikel 8.6 de bepalingen omtrent wind op gebouwen staan. Verder worden in artikel 10.5 nog eisen gesteld ten aanzien van trillingen door wind. In deze paragraaf zal artikel 8.6 puntsgewijs worden behandeld en vergeleken met de resultaten van het literatuuronderzoek, die in de voorgaande hoofdstukken zijn gepresenteerd. Artikel 10.5 komt in paragraaf 5.3 ter sprake.

1. Het eerste wat opvalt is artikel 8.6.1.3, waar gesteld wordt, dat 'bouwwerken moeten zijn berekend op een verdeelde windbelasting'. De belasting moet worden bepaald volgens

$$(5.1) p_{rep} = C_{dim} C_{index} C_{eq} \Phi_1 p_w$$

De factoren C_{dim} , C_{index} en C_{eq} en Φ_1 zijn constant, zodat (5.1) erop neer komt, dat op een gelijkmatig verdeelde belasting moet worden gerekend. In hoofdstuk 3 is echter aangetoond, dat in het algemeen de verdeling niet gelijkmatig is.

Met name bij de hoeken is de verdeling eerder trapeziumvormig. Hierin wordt in de norm wel voorzien in artikel 8.6.4.3, waar lokale windvormfactoren worden gedefinieerd voor randen, hoeken etc.. In dit artikel wordt echter ook gesteld, dat de hoofddraagconstructie hierop niet behoeft te worden berekend. Wringing door dit effect mag dus worden verwaarloosd volgens NEN 6702. Het is duidelijk, dat de norm hier een vereenvoudiging toepast, die wat wringing betreft niet juist is.

2. Het volgende punt is het vervolg van artikel 8.6.1.3, waarin impliciet naar wringing wordt verwezen. De ongunstigste combinatie van gelijktijdig optredende windbelasting dient in rekening te worden gebracht. In artikel 8.6.2.5 worden een drietal combinaties aangegeven, die in ieder geval dienen te worden onderzocht. In figuur 36 is voor wringing de belangrijkste verdeling weergegeven.

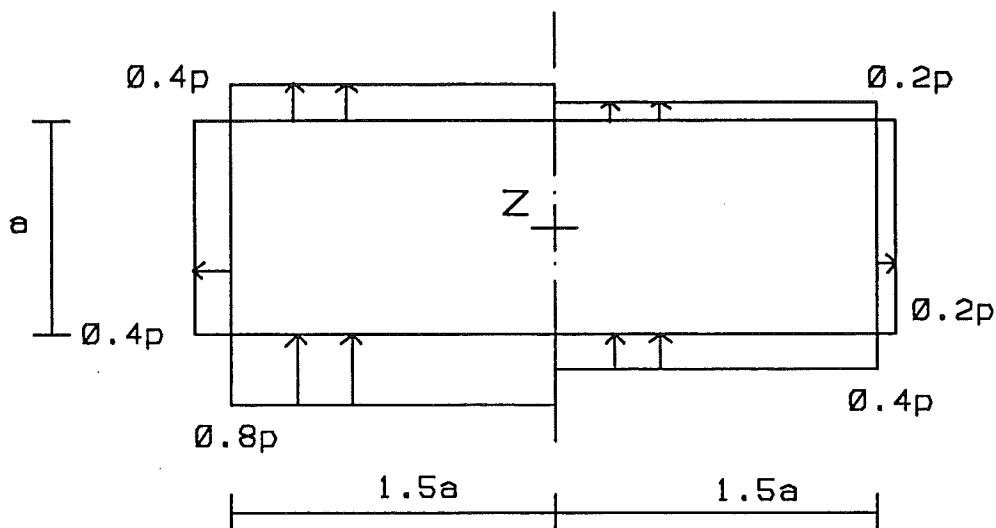


fig. 36 Drukverdeling volgens NEN 6702 art 8.6.2.5

De plattegrond in figuur 36 behoort tot het type I. De stuwdruk werkt op de linkerhelft van het gebouw voor 100%, op de rechterhelft voor 50%. De maten zijn willekeurig en zijn ook niet van belang, daar de dimensieloze coëfficiënt C_t volgens formule (4.2) kan worden bepaald, zodat een objectieve vergelijking mogelijk is.

In bijlage 5.2 is voor de drie gebouw-typen uit hoofdstuk 4 NEN 6702 met de methode van Lythe en Surry vergeleken. Hieruit blijkt, dat alleen voor gebouwen van het type I C_t volgens NEN 6702 goed overeenkomt met de resultaten van de Canadezen. Voor de andere types geeft het bepalen van de wringbelasting met behulp van de TGB bij een aantal vormen van het gebouw een te lage waarde.

3. In artikel 8.6.1.3 en 8.6.6.2 is sprake van een dynamische vergrotingsfactor Φ_1 , die de statische winddruk vergroot. De waarden volgen uit bijlage A.4 van NEN 6702 als de eigenfrequentie en demping bekend zijn. Deze factor dient om de invloed van diverse dynamische effecten op de spanningen en vervormingen in rekening te brengen.

Voor hoogbouw is Φ_1 minder geschikt, wat al blijkt uit het feit, dat boven de 150 meter geen waarden worden gegeven. De figuren in bijlage A.4 suggereren echter, dat de vergroting voor grote gebouwhoogtes erg meevalt. Voor 100 meter bijvoorbeeld is Φ_1 maximaal 1.6 en voor 150 meter 1.4. De verleiding is dan groot om dit te extrapoleren. Dit is natuurlijk onzin, want dan kan de vergrotingsfactor zelfs kleiner dan 1 worden.

Klakkeloos toepassen van deze factor dient bij hoogbouw daarom afgeraden te worden. Beter is het om zelf een indruk te krijgen van de vergroting van spanningen en vervormingen door middel van een eenvoudig dynamisch model. Hierbij kan aan een één-massa-veer- of computermodel worden gedacht.

4. In artikel 8.6.6.1 wordt gesteld, dat dynamische effecten parallel en loodrecht op de windrichting niet gelijktijdig optreden. In hoofdstuk 2 is echter aangetoond, dat dit wel het geval is bijvoorbeeld door modal coupling. Met name voor symmetrische gebouwen is dit belangrijk als bron voor torsie. De norm houdt hier dus geen rekening mee.

5. Het laatste punt vormt de begrenzing van de norm in artikel 8.6.6.3. Hierin wordt aangegeven, dat voor effecten loodrecht op de windrichting de norm niet geldt voor (onder andere) gebouwen hoger dan 100 meter.

In hetzelfde artikel wordt ook gesteld, dat voor gebouwen met een rechthoekige doorsnede deze invloed van de wind op dynamische effecten loodrecht op de windrichting verwaarloosd mag worden. Dit is opmerkelijk, daar juist in hoofdstuk 3 is aangetoond, dat de windbelasting op de zijgevels in belangrijke mate bijdragen aan de torsie op hoogbouw.

Voor rechthoekige doorsnedes is dus in feite de norm begrensd tot 100 m hoogte. Bij een rechthoekige doorsnede kan de NEN 6702 worden gebruikt tot 150 m, daar de grafieken voor de vergrotingsfactoren niet verder gaan. De wringbelasting op hoge gebouwen is volgens NEN 6702 te laag in vergelijking met de onderzoeksresultaten van Lythe en Surry. Daarnaast worden een aantal oorzaken van wringing, zoals effecten loodrecht op de windrichting, voor sommige gebouwwormen direct verwaarloosd.

Concluderend kan gesteld worden, dat NEN 6702 de wringbelasting door wind op hoge gebouwen onvoldoende beschrijft.

5.3 Stijfheidscriterium

Een stijfheidscriterium voor wringing is niet zo makkelijk te formuleren als bij buiging. In dat geval wordt een eis gesteld aan de maximale doorbuiging van een constructie. In analogie zou een beperking aan de rotatie om de verticale as kunnen worden gesteld, maar die zal zelden maatgevend zijn.

Het belang van torsie als belastingsgeval zit 'm juist in het versterken van effecten in de x- en y-richting. Hierbij kan bijvoorbeeld worden gedacht aan de verplaatsing van de top. In NEN 6702 wordt hieraan een maximum gesteld. Bij berekening zal dan het gebouw worden geschematiseerd tot een verend ingeklemde ligger. Hiermee wordt dus de verplaatsing van het normaalkrachtencentrum bepaald. Door torsie zal de verplaatsing langs de gevel groter worden. Zie hiervoor bijvoorbeeld paragraaf 2.5.2.

Stijfheidseisen voor wringing zijn dus eigenlijk alleen impliciet te geven. Een voorbeeld, waarbij de huidige norm daarvoor weinig ruimte laat, is de controle-formule voor toelaatbare versnellingen (art. 10.5.3). Deze luidt:

$$(5.2) \quad 1.6 \frac{\Phi_2 p_{w,1} C_{tot} b}{\rho_1} < a$$

Deze formule is gebaseerd op een trilling in x-richting. De bijdrage $y\ddot{\theta}$, met y ten opzichte van het dwarskrachtencentrum, is er niet in verwerkt. De totale versnelling wordt, als beide trillingen in fase zijn:

$$(5.3) \quad a_{tot} = \ddot{x} + y\ddot{\theta}$$

Formule (5.2) lijkt daarom niet geschikt om torsiegevoelige hoogbouw te controleren. Een echte dynamische berekening zal dan nodig zijn.

De eisen, die hier boven zijn genoemd, dienen ook om de bruikbaarheid van een gebouw te garanderen. Met name bij hoogbouw is dit weleens een probleem. Uit de Verenigde Staten zijn voorbeelden bekend, waarbij tijdens storm de bovenste etages van een wolkenkrabber niet worden gebruikt, omdat de werknemers zich niet veilig voelen of ziek worden.

Diverse Amerikaanse onderzoekers hebben dit bestudeerd [12,25]. De nadruk lag hierbij op perceptie-drempels voor bepaalde verschijnselen. De resultaten verschillen onderling nogal, zodat het hiernavolgende vooral als indicatie van de problematiek dient te worden gezien.

In 1973 hebben Hansen e.a. onderzoek gedaan in twee wolkenkrabbers van 167 meter hoog [25]. Na een storm, die een gemiddelde versnelling van 0.02 m/s^2 veroorzaakte, werden de gebruikers van beide gebouwen geïnterviewd. Er werd gevraagd of men beweging had bespeurd en zo ja hoe men dat gemerkt. Tenslotte werd gevraagd of men een en ander als onprettig ervaarde.

Belangrijk resultaat was, dat een groot percentage (65%) van de gebruikers de beweging had gevoeld (in beide gebouwen), terwijl de gemiddelde versnelling slechts 0.02 m/s^2 bedroeg.

Verder bleek, dat de gebruikers van gebouw A, een torsie-slappe constructie, in grote getale (63%) een bewegende horizon als indicatie van de verplaatsing van het gebouw opgaf. Dit is alleen mogelijk bij rotatie om de verticale as. Torsie dus. Blijkbaar is wringing voor de stijfheid een zeer significante bron van vervormingen.

Tenslotte was een opvallend resultaat, dat 92% van de gebruikers aangaf van eerdere stormen geleerd te hebben. Hierdoor gaf een duidelijk bewegen van het gebouw geen reden tot paniek.

Blijkbaar kan door dit leer-proces de perceptie-drempel verhoogd worden. Met de perceptie-drempel wordt hier de waarde van de versnelling bedoeld, die nog net geaccepteerd wordt door de gebruikers van het gebouw.

Hansen besluit het artikel met de opmerking, dat meer data beschikbaar moet zijn om een statistisch betrouwbaar criterium te kunnen formuleren. Door het subjectieve karakter van de perceptie-drempel, die voor elk persoon anders is, is de spreiding namelijk enorm groot.

5.4 Sterkte-criterium

De beperkingen ten aanzien van de sterkte volgen uit de eigenschappen van het bouw materiaal. Voor hoogbouw zijn de volgende twee materialen van belang:

-beton

-staal.

Hierbij ligt in Nederland de nadruk op beton als stabiliteitsvoorziening. Dit is echter niet voor de hand liggend, daar in andere landen juist het merendeel van de stabiliteit wordt verzorgd door stalen raamwerken ed.

We zullen in het hierna volgende beide materialen in hun meest gebruikte toepassing beschouwen.

5.4.1 Beton

Beton als stabiliteitsvoorziening wordt meestal in de vorm van een kern of een stijve wand gegoten. De VBC'90 [43] geeft in deze gevallen een eis voor de schuifspanning als gevolg van wringing. Dit staat uitgewerkt in art. 8.4.1:

$$(5.4) \tau_d \leq \tau_u$$

$$(5.5) \tau_u = \tau_2, \text{ mits schuifwapening wordt toegepast.}$$

Hierbij is τ_d de schuifspanning als gevolg van de optredende wringende momenten. Voor kernen wordt τ_s bepaald in art. 8.2.6 uit de kleinste waarde van de onderstaande formules:

$$(5.6) \tau_s = \frac{A_{sx}f_s - b\sigma_{xd}}{bcot\theta}$$

$$(5.7) \tau_s = \frac{A_{sy}f_s - b\sigma_{yd}}{btg\theta}$$

met:

σ_{xd} = rekenwaarde van de normaalspanning in x-richting

σ_{yd} = rekenwaarde van de normaalspanning in y-richting

A_{sx} = wapening in x-richting per lengte-eenheid [mm^2/m]

A_{sy} = idem in y-richting

θ = hoek drukdiagonaal, vrij te kiezen tussen 30 en 60 graden.

Met deze formules kan de kern snel gecontroleerd worden.

5.4.2 Staal

Bij stalen gebouwen wordt de weerstand tegen wringing meestal door een raamwerk geleverd. Een wringend moment wordt door dwarskrachten in het raamwerk opgenomen. Hierdoor zullen in de stijlen en regels buigende momenten ontstaan. Deze zullen de al bestaande momenten vergroten.

De TGB-Staal '72 [30] stelt hiervoor (art 2.5.8):

$$(5.8) \omega_{\max} \frac{F}{A} + 0.85 \theta \left\{ \frac{n_x}{n_x - 1} \frac{M_x}{W_x} + 0.85 \left\{ \frac{n_y}{n_y - 1} \frac{M_y}{W_y} \right\} \right\} \leq \sigma_e$$

met:

M_x =totale moment om de x-as

M_y =idem om de y-as.

In het algemeen zal een raamwerkberekening de maximale momenten en krachten snel en betrouwbaar kunnen bepalen, waarna de constructie kan worden gecontroleerd.

Overigens is in de nieuwe norm NEN 6770 [42] een complexere situatie ontstaan door een vergaande verdeling in belastingsgevallen. Daarnaast worden diverse doorsnedeklassen onderscheiden. Vergelijking (5.8) geeft echter het concept achter de spanningscontrole nog steeds aan.

5.5 Stabiliteitscriterium

De stabiliteit van een gebouw, dat op torsie wordt belast, is vrij lastig te bepalen door de interactie met buig-knik. In deze paragraaf zal aangegeven worden hoe de kniklast kan worden bepaald als torsie-knik maatgevend kan zijn. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een stervormig gebouw, dat zijn stijfheid ontleent aan een centraal gelegen kern. In bijlage 5.5 is de afleiding van de kniklast helemaal uitgewerkt. In deze paragraaf worden alleen de belangrijkste resultaten weergegeven. De gebruikte aannames zijn (zie ook figuur 37) :

- de stabiliteitsvoorziening is te schematiseren tot een prismatische staaf,
- de staaf is onderaan ingeklemd en heeft boven een vrij uiteinde,
- de doorsnede van de staaf is een dunwandig profiel,
- de doorsnede is vormvast,
- de drukkracht P en het wringend moment M_t grijpen boven aan,
- de lengte van de staaf is l , de doorsnede A en de buigstijfheid EI .

De gebruikte literatuur is het werk van Den Hartog en Timoshenko [22,23].

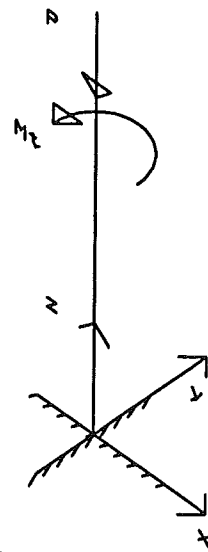


fig. 37 Staaf-model

5.5.1 Zuivere torsie-knik

Zuiver torsie-knik treedt op als het zwaartepunt van de stijfheid en de verticale belasting samenvallen (NC=DC). Voor het bepalen van de kniklast wordt uitgegaan van de uitgebreide differentiaalvergelijking voor wringing:

$$(5.9) \quad EC_w \theta'''' - GI_t \theta'' = -m_t$$

met:

$$C_w = \text{de welvingsconstante, } C_w = \int_A x^2 y^2 dA$$

E = elasticiteitsmodulus

GI_t = wringstijfheid

m_t = verdeeld wringend moment.

Bij zuivere torsie-knik is het verdeeld wringend moment alleen afhankelijk van de rotatie van de doorsnede:

$$(5.10) \quad m_t = -\frac{I_p P \theta''}{A}$$

In (5.10) is I_p het polaire traagheidsmoment. Uitwerken van (5.9) met behulp van (5.10) geeft de volgende uitdrukking:

$$(5.11) \quad \theta'''' + \alpha^2 \theta'' = 0; \quad \alpha^2 = \frac{-GI + PI_p/A}{EC_w}$$

Voor de ingeklemde ligter is $\theta = C [1 - \cos(\alpha z)]$ een oplossing, die aan de differentiaalvergelijking (5.11) en de randvoorwaarden op $z=0$ voldoet. De kritische belasting kan bepaald worden uit de randvoorwaarde, dat de doorsnede op $z=l$ vrij kan welven. Dit kan omgewerkt worden tot de eis

$$(5.12) \theta''(l) = 0.$$

Uitwerken van (5.11) geeft $\alpha l = \frac{1}{2}\pi$. Dit betekent, dat de knikkracht P_{krit} de waarde heeft van:

$$(5.13) P_{krit} = \frac{A}{I_p} \left[GI + \frac{\pi^2 EC_w}{4l^2} \right]$$

Voor zuivere torsie-knik is dus direct een oplossing te geven voor P_{krit} .

5.5.2 Stabiliteit bij wringing én buiging

Beschouw de doorsnede van een dunwandige, prismatische staaf, die in figuur 38 is afgebeeld. Het normaal- en dwarskrachtencentrum vallen nu niet meer samen. Als de oorsprong van het x-y-assenstelsel in het DC wordt gelegd zijn de coördinaten van het NC (x_0, y_0) .

De doorsnede is vormvast, dus kan de verplaatsing van elk punt van het profiel worden beschreven met de grootheden u, v en θ . Dit zijn de verplaatsingscomponenten van het DC. De verplaatsingen van het NC kunnen hierin uitgedrukt worden:

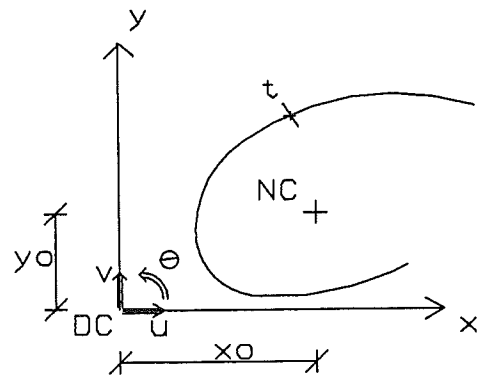


fig. 38 Definitie assenstelsel

$$(5.14) u_0 = u - y_0\theta$$

$$(5.15) v_0 = v + x_0\theta.$$

Door deze verplaatsing zal de drukkracht P buigende momenten M_x en M_y in de staaf veroorzaken. Door het opstellen van de evenwichts-, constitutieve en kinematische vergelijkingen worden de differentiaalvergelijkingen voor buiging om de x- respectievelijk y-as gevonden. Dit is in de bijlage uitgewerkt, hier alleen het resultaat:

$$(5.16) -EI_x v'' + P(v + x_0\theta) - M_{x,0} = 0$$

$$(5.17) +EI_y u'' + P(u - y_0\theta) - M_{y,0} = 0$$

Bij het opstellen van de differentiaalvergelijking wordt C_w op nul gesteld. Dit is bij hoogbouw een realistische aanname, daar alleen de onderste paar verdiepingen iets merken van de in-klemming op de begane grond. De verstijvende werking door de verhinderde welving wordt dus verwaarloosd.

Hierdoor wordt ook de differentiaalvergelijking voor wringing een tweedegraads uitdrukking:

$$(5.18) -Py_0 u'' + Px_0 v'' + (-GI + \frac{I_p}{A} P) \theta'' = 0.$$

Het stelsel vergelijkingen (5.16), (5.17) en (5.18) is gekoppeld. Door substitutie van de uitbuigingsvorm, die in de vorige paragraaf is gebruikt, worden de vergelijkingen ontkoppeld. Door te stellen, dat

$$(5.19a) u = A_1 [1 - \cos(\alpha z)],$$

$$(5.19b) v = A_2 [1 - \cos(\alpha z)],$$

$$(5.19c) \theta = A_3 [1 - \cos(\alpha z)];$$

kan na enige uitwerking een uitdrukking worden gevonden, waaruit de kritische knikkracht kan worden bepaald.

$$(5.20) P^3 [1 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{r^2}] + P^2 [\frac{P_x y_0^2 + P_y x_0^2}{r^2} - P_x - P_y - P_\theta] + P [P_x P_y + P_x P_\theta + P_y P_\theta] - P_x P_y P_\theta = 0,$$

met:

$$(5.21) P_x = \frac{\pi^2 E I_x}{4l^2}$$

$$(5.22) P_y = \frac{\pi^2 E I_y}{4l^2}$$

$$(5.23) P_\theta = \frac{G I_t}{r^2}; r^2 = \frac{I_p}{A}.$$

Door de derdegraadsvergelijking in P (5.20) op te lossen wordt de knikkracht gevonden, daar de laagste waarde van P gelijk is aan P_{krit} .

HOOFDSTUK 6: CONCLUSIES

1. Er zijn drie groepen te onderscheiden waarin de oorzaken van wringing vallen:
 - constructie
 - wind
 - aardbeving
2. Voor de Nederlandse praktijk zijn de volgende zaken de belangrijkste oorzaak van torsie:
 - ongelijkmatige verdeling van de winddruk
 - asymmetrische stabiliteitsvoorziening
3. De trend om in de centra van de Nederlandse steden hoger en slanker te bouwen houdt in, dat ook andere verschijnselen dan onder 2 genoemd, een rol kunnen gaan spelen, zoals interferentie.
4. De huidige Nederlandse norm (NEN 6702) is niet voldoende toegesneden op hoge gebouwen. Voor wolkenkrabbers hoger dan 150 meter is de norm niet geldig.
5. Wringing wordt in NEN 6702 niet voldoende beschreven. De gelijkmatige winddrukverdeling, die wordt aangenomen in de norm, geeft in veel gevallen een te lage wringbelasting op het te beschouwen gebouw. Verder is de bijdrage van torsie aan de vervormingen niet uitgewerkt.
6. Het onderzoek van Lythe en Surry reikt een handzame methode aan voor het afschatten van de maximale wringbelasting voor een hoog gebouw in de ontwerpfase. Voor een definitieve bepaling van de torsiebelasting zal windtunnelonderzoek vaak nodig blijven.

Bijlagen Deel I

Bijlage 5.2 Bepalen van de wringbelasting volgens NEN 6702

Type I

Als voorbeeld nemen we een gebouw met een rechthoekige doorsnede van $b \times d = 3a \times a$. Een drukverdeling, die volgens NEN 6702 moet worden onderzocht (artikel 8.6.2.5), is in figuur B1 weergegeven.

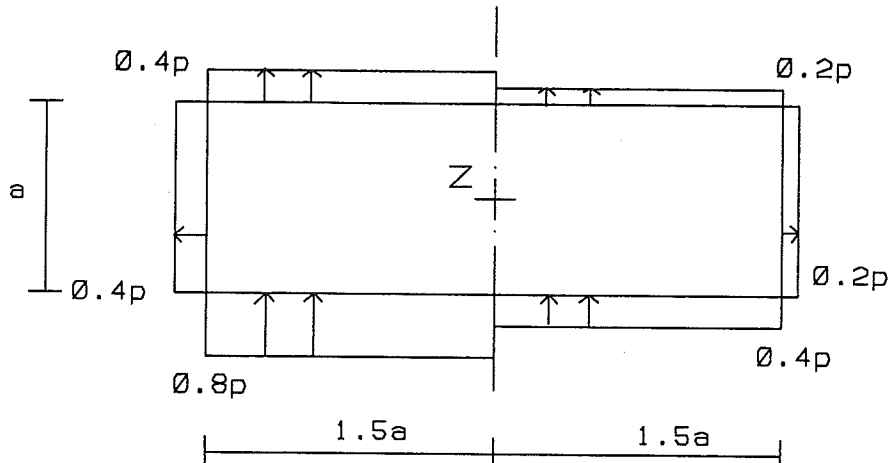


fig. B1 Drukverdeling volgens NEN 6702 art. 8.6.2.5

In artikel 8.6.2.5 wordt gesteld, dat op de ene helft van het gebouw de volle belasting dient te worden aangenomen en op de andere helft 50% ervan. Bij een totale winddruk-coëfficiënt van 1.2 geeft dat de bovenstaande verdeling.

De wringbelasting om een punt op de halve breedte van de doorsnede (Z) wordt nu:

$$(1) m_t = 0,6p_w \cdot 1,5a \cdot 0,75a = 0,675p_w a^2$$

De drukverdeling verloopt, indien het gebouw 70 meter hoog is, zoals hiernaast is getekend (stuwdrukken uit tabel 10 NEN 6702, gebied II bebouwd). Hierdoor is de gemiddelde stuwdruk op het gebouw $\bar{p}_w = 1,11 \text{ kN/m}^2$, zodat het wringend moment op de fundering wordt:

$$(2) M_{t,0} = 1,11 \cdot 0,675a^2 h = 0,743a^2 h.$$

Nu kan de torsiecoëfficiënt C_t worden berekend volgens formule (4.2). De stuwdruk in (4.2) geldt ter plaatse van het dak, hier geldt dus $p_w = 1,54 \text{ kN/m}^2$, en de grootste breedte b is $3a$ dus

$$(3) C_t = \frac{0,743a^2 h}{1,54(3a)^2 h} = 0,054.$$

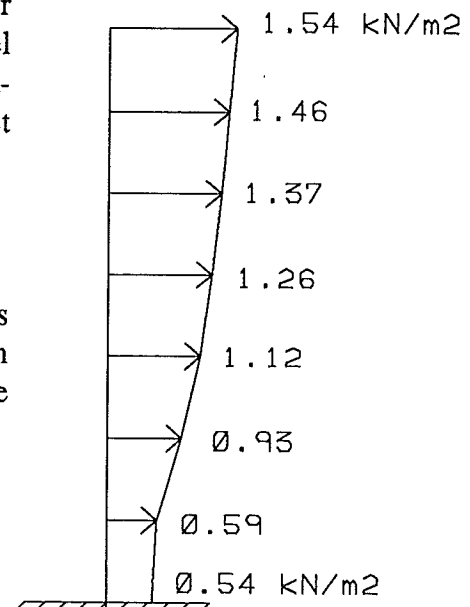


fig. B2 Drukverdeling over de hoogte

Vervolgens gaan we kijken wat de methode van Lythe en Surry (L/S) oplevert. Gemiddeld is C_t voor gebouwen van type I (zie tabel II paragraaf 4.2) $\mu_{C_t}=0.0539$.

Dit komt goed overeen met de waarde, die in (3) is berekend. Uit het feit, dat de waarde 0,0539 slechts de gemiddelde waarde van de torsie voor gebouw-type I is, kan echter worden opgemaakt, dat voor sommige vormen in deze groep een hogere torsiecoëfficiënt zal gelden. Voor het gebouw in figuur B1 is, op de zojuist geschetste wijze, C_t ook bepaald volgens NEN 6702 voor een gebouwhoogte van 100 en 150 meter. Dit geeft de volgende resultaten:

$h=100$ m: $p_w=1,70$ kN/m²; $C_t=0,056$

$h=150$ m: $p_w=1,86$ kN/m²; $C_t=0,057$.

De hoogte blijkt dus weinig invloed te hebben op de torsiecoëfficiënt volgens de norm. Dat geeft aan, dat de normering in (4.2) met behulp van (onder andere) de hoogte zinvol is.

Conclusie 1:

Voor gebouwen van het type I is de verdeling van de stuwdruk volgens artikel 8.6.2.5 van NEN 6702 een goede benadering van de gemiddelde wringing op zo'n gebouw.

Type II

De verzameling van gebouwen, die tot de semi-symmetrische groep behoren, is groot. Een eenvoudige conclusie, die voor alle gebouwen van type II zal gelden, zal daarom niet te trekken zijn. Wij beperken ons hier tot de vorm van de hoogbouw van het Beatrixkwartier, de case-study, die in deel II van dit verslag zal worden behandeld. In onderstaande figuur is een schetsje van de vorm met de belangrijkste maten gegeven.

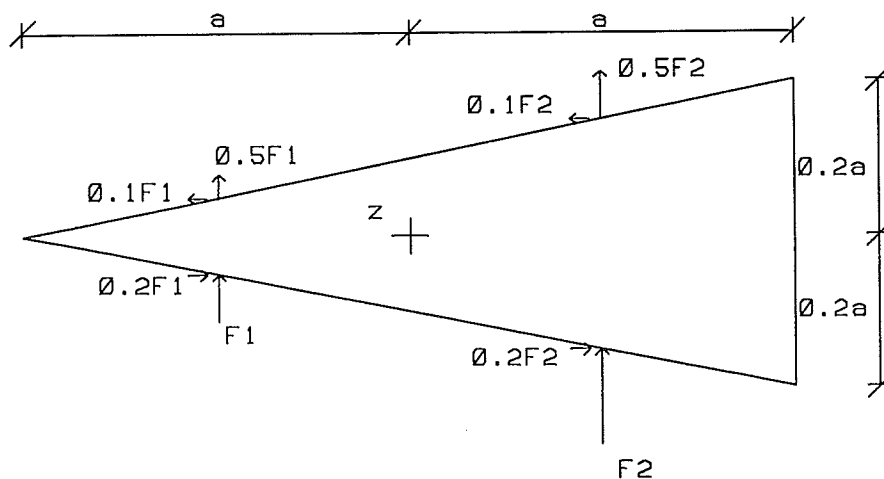


fig. B3 Maatgevende winddrukverdeling voor torsie

We gaan weer uit van de verdeling, zoals die in artikel 8.6.2.5 is beschreven. In figuur B3 staan de resulterende krachten getekend, waarbij de windbelasting reeds ontbonden is in een component in x-en in y-richting.

Voor de krachten F_1 en F_2 geldt:

$$(4) F_1 = 0,4p_wah$$

$$(5) F_2 = 0,8p_wah,$$

zodat voor het wringend moment om het midden van de doorsnede (Z) geldt:

$$(6) M_{t,0} = 0,5a(1,0+0,5)F_2 + 0,3a(0,1+0,2)F_2 - 0,5a(1,0+0,5)F_1 + 0,15a(0,1+0,2)F_1$$
$$M_{t,0} = 0,39p_wa^2h.$$

De taartpunt wordt 70 meter hoog, zodat $\bar{p}_w$ wederom $1,11 \text{ kN/m}^2$ bedraagt. De berekening van de torsiecoëfficiënt levert de volgende waarde op:

$$(7) C_t = \frac{0,552 \cdot 1,11a^2h}{1,54(2a)^2h} = 0,070.$$

Vervolgens weer de bepaling met behulp van L/S. Voor type II geldt $\mu_{C_t} = 0,0937$ en $\sigma_{C_t} = 0,0481$.

Het blijkt, dat de methode van Lythe en Surry nu een significant hogere wringing geeft dan NEN 6702. In hoeverre dit voor alle gebouwen in groep II geldt, is moeilijk na te gaan. Onderzoek hierna valt echter buiten het doel van deze vergelijking, namelijk een indruk krijgen van de verschillen tussen de Nederlandse norm en het Canadeze onderzoek.

Conclusie 2:

Voor gebouwen met een driehoekige vorm geeft de TGB 1990 een behoorlijk lagere wringbelasting dan met de methode van Lythe en Surry wordt gevonden. Een eenvoudige conclusie voor type II is niet te geven, daar vorm bij dit type de grootte van de torsie beïnvloed.

Type III

Als voorbeeld van een asymmetrisch gebouw nemen we een L-vorm, die in figuur B4 is weer-
gegeven. De drukverdeling is wederom conform artikel 8.6.2.5 van NEN 6702. De maten in
figuur B4 zijn zelf gekozen.

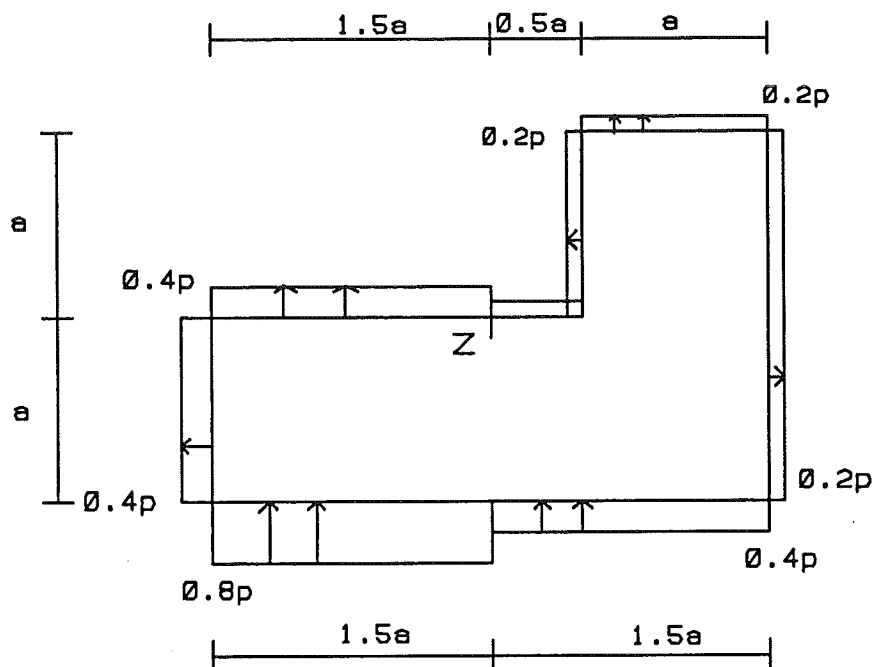


fig. B4 Drukverdeling op L-vorm volgens art. 8.6.2.5

Het 'midden' van de doorsnede is met Z aangegeven. Het wringend moment om dit punt is:

$$(8) M_{i,0} = [0,75a(0,8+0,4)1,5a + 0,5a \cdot 0,4 \cdot a]p_w h \\ - [0,25a \cdot 0,2 \cdot 0,5a + 0,5a \cdot 0,2 \cdot a + a \cdot 0,2 \cdot a + 0,75a \cdot 0,4 \cdot 1,5a]p_w h = 0,775p_w a^2 h$$

Stel wederom, dat het gebouw 70 m hoog is, zodat

$$(9) C_t = \frac{0,775 \cdot 1,11a^2 h}{1,54(3a)^2 h} = 0,062.$$

Volgens Lythe en Surry geldt voor type III $\mu_{C_t} = 0,0954$ en $\sigma_{C_t} = 0,044$,
hetgeen dus net, zoals bij type II, hogere wringende momenten op de fundering geeft dan met
NEN 6702.

Conclusie 3:

De waarden voor het wringend moment, zoals die met behulp van artikel 8.6.2.5 van NEN
6702 worden gevonden, zijn voor complex gevormde doorsnedes in een aantal gevallen lager
dan de waarden, die met de methode van Lythe en Surry worden gevonden. Voor eenvoudige
doorsnedes is de benadering vrij goed.

Bijlage 5.5 Stabiliteitscriterium

De gebruikte aannames zijn:

- de stabiliteitsvoorziening is te schematiseren tot een prismatische staaf
- de staaf is onderaan ingeklemd en heeft boven een vrij uiteinde
- de doorsnede van de staaf is een dunwandig profiel
- de doorsnede is vormvast
- de drukkracht P en het wringend moment M_t grijpen boven aan.

Enkele relevante symbolen:

EI_x = buigstijfheid om de x-as

EI_y = buigstijfheid om de y-as

GI_t = wringstijfheid om de z-as

I_p = polaire traagheidsmoment om het DC

s = lokale as langs de systeemlijn van een profiel

w = verplaatsing in z-richting, welvingsfunctie

σ_z = normaalspanning in z-richting

τ = schuifspanning

bijlage 5.5.1 Zuivere torsie-knik

1. Bepalen van de uitgebreide differentiaalvergelijking

Bij een ingeklemde ligger wordt ter plaatse van de fundering de welving van de doorsnede verhinderd. Normaal gesproken zal een staaf, die op wringing wordt belast, ook willen welven, maar ter plaatse van de inklemming is dat niet mogelijk. Dit heeft als gevolg, dat bij belastingen de wringstijfheid hoger lijkt te zijn. Een gedeelte van de torsie zal namelijk worden opgenomen door de verhinderde welving. We kunnen dan zeggen:

$$(1) M_t = M_{t1} + M_{t2},$$

met:

- M_{t1} = St. Venantse wringing

- M_{t2} = nog te bepalen.

Voor de bepaling van M_{t2} worden sectoriële coördinaten gebruikt. Om deze te kunnen afleiden, moeten we overgaan op een ander aseenstelsel. In figuur B5, die op de volgende pagina staat, is de richting s gedefinieerd, die de geometrie van het profiel volgt.

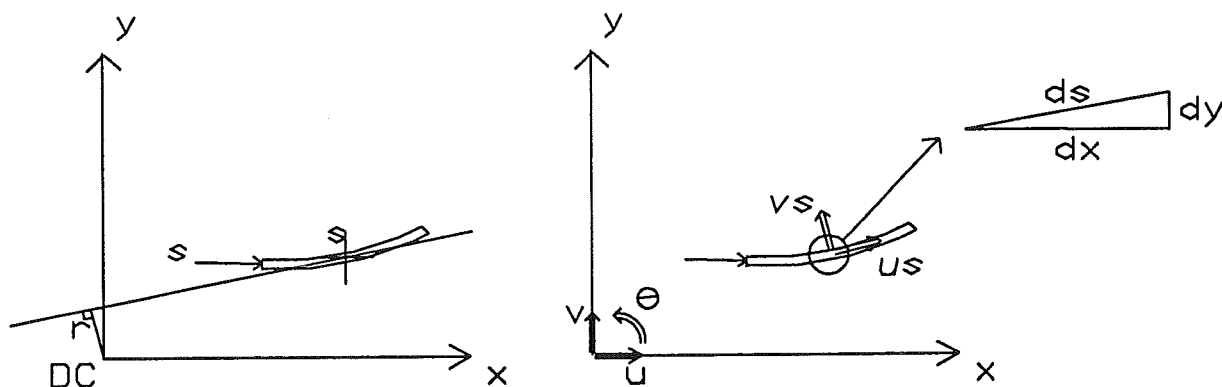


fig. B5 De richting s en de verplaatsing u_s

Beschouw de het stukje staafdoorsnede in figuur B5 met een lengte ds en een dikte t . Wringing zal de wanden van het profiel doen afschuiven, dus gaat de interesse uit naar de verplaatsing in de richting s . De verplaatsing u_s kan uitgedrukt worden in de verplaatsingscomponenten u, v , en θ van het dwarskrachtencentrum. Uit figuur B5 kan worden afgeleid:

$$(2) u_s = u \frac{\partial x}{\partial s} + v \frac{\partial y}{\partial s} + r(s)\theta .$$

Hierbij is $r(s)$ de loodlijn van het punt s naar het DC. Toepassing van Vlasov's veronderstelling, dat de schuifvervorming verwaarloosbaar is, geeft

$$(3) \gamma = \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0.$$

Differentiëren van (2) naar z en combineren met (3) geeft een uitdrukking voor w , de verplaatsing in z -richting.

$$(4) -\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial s} + r(s) \frac{\partial \theta}{\partial z} .$$

In geval van zuivere torsie is alleen $\frac{\partial \theta}{\partial z} \neq 0$ en kan (4) direct geïntegreerd worden:

$$(5) w = w_0 - \frac{\partial \theta}{\partial z} \int r(s) ds .$$

Stel nu, dat dat $d\omega = r(s)ds$ en noem ω de sectoriële coördinaat. De welving w is dan bekend als functie van de rotatie, zodat M_{t2} bepaald kan worden.

$$(6) w = w_0 - \theta' \omega .$$

Het rechterlid van vergelijking (6) kan helemaal in ω worden uitgedrukt door de definitie van

$$(7) \bar{\omega} = \frac{1}{s_{tot}} \int_0^{s_{tot}} \omega ds .$$

Daar w_0 arbitrair gekozen kan worden, mag deze gelijkgesteld worden aan de gemiddelde welving, die het produkt is van (7) en de afgeleide van de rotatie. Hiermee wordt (6)

$$(8) w = \theta'(\bar{\omega} - \omega) .$$

De welving is nu een functie van de rotatie geworden. Dit betekent, dat de axiale spanningen ook uitgedrukt kunnen worden in θ . Voor σ_z geldt namelijk:

$$(9) \sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{dw}{dz} = E\theta''(\bar{\omega} - \omega) .$$

Toelichting: De staaf is prismatisch dus is ω onafhankelijk van z . Beschouw vervolgens een elementair blokje met dikte t , waarmee de schuifspanningen kunnen worden bepaald:

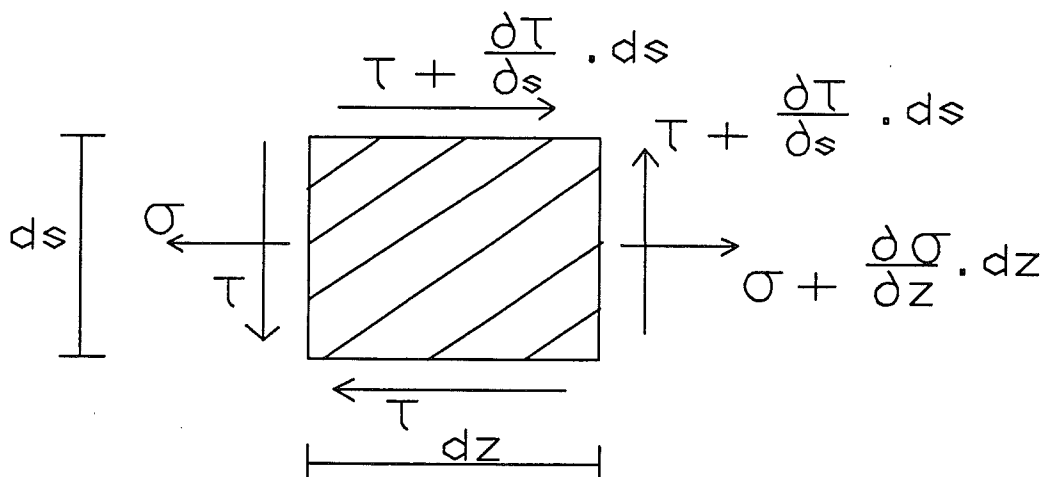


fig. B6 Evenwicht van een elementair blokje

Uit het evenwicht in de z -richting volgt:

$$(10) \frac{\partial \tau t}{\partial s} = -t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} .$$

Combineren van (9) en (10) en tegelijkertijd integreren geeft:

$$(11) \tau t = -E\theta'' \int_0^s (\bar{\omega} - \omega) t ds .$$

Nu is de schuifkracht per lengte τt bekend en kan M_{t2} berekend worden uit de bijdrage van deze kracht aan het wringend moment om het dwarskrachtencentrum.

$$(12) M_{t2} = \int_0^{s_{tot}} \tau t r ds = -E\theta'''' \int_0^{s_{tot}} \int_0^s (\bar{\omega} - \omega) t ds r ds.$$

Na lange uitwerking, die hier achterwege wordt gelaten, wordt gevonden dat

$$(13) M_{t2} = -EC_w \theta'''' , \text{ met}$$

$$(14) C_w = \int (\bar{\omega} - \omega)^2 t ds = \int_A x^2 y^2 dA.$$

C_w is de welvingsconstante. Door (13) en $M_{t1} = GI\theta'$ in (1) in te vullen, krijgen we de differentiaalvergelijking voor een wringstaaf met verhinderde welving:

$$(15) M_t = GI\theta' - EC_w \theta''''.$$

Omwerken hiervan door middel van $M_t' = -m_t$ geeft de gezochte differentiaalvergelijking:

$$(16) GI\theta'' - EC_w \theta'''' = -m_t.$$

2. Torsie-knik

Belangrijkste kenmerk van zuivere torsie-knik is, dat het normaal- en dwarskrachtencentrum (NC=DC) samenvallen. Het profiel zal dan roteren om het dwarskrachtencentrum, wat zelf niet verplaatst. Als de drukkracht P , die boven aangrijpt, gelijkmatig verdeeld is over de doorsnede van de staaf, dan kan worden afgeleid (zie bv. [23]), dat:

$$(17) m_t = -\frac{I_p P \theta''}{A}.$$

Combinatie van (16) en (17) geeft:

$$(18) \theta'''' + \alpha^2 \theta'' = 0; \quad \alpha^2 = \frac{-GI + PI_p/A}{EC_w}.$$

Deze differentiaalvergelijking heeft een bekende structuur. Uit ervaring weten we, dat $\theta = C [1 - \cos(\alpha z)]$ een oplossing is, die aan de differentiaalvergelijking (18) en de randvoorwaarden op $z=0$ voldoet. Dit kan gecontroleerd worden door in te vullen:

$$\theta(0) = C [1 - \cos(\alpha 0)] = 1 - 1 = 0$$

$$\theta'(0) = C \alpha \sin(\alpha 0) = 0.$$

Aan beide randvoorwaarden wordt voldaan. De lezer kan zelf nagaan, dat invullen in de differentiaalvergelijking nul is nul oplevert.

De kritische belasting kan bepaald worden uit de randvoorwaarden op $z=1$. Ten eerste is het wringend moment daar nul. Verder geldt bij hoge gebouwen, dat de welving boven vrij kan

optreden. Oftewel de rek $\varepsilon_z=0$. Met behulp van vergelijking (7) kan dit omgewerkt worden tot $E\theta''(\bar{\omega}-\omega)=0$. Dus op $z=l$ gelden de volgende twee randvoorwaarden:

$$(19) GI\theta'(l)-EC_w\theta'''(l)=0.$$

$$(20) \theta''(l)=0.$$

Uitwerken van zowel (19) als (20) geeft $\alpha l = \frac{1}{2}\pi$. Dit betekent, dat de knikkracht P_{krit} de waarde heeft van:

$$(21) P_{krit} = \frac{A}{I_p} \left[GI + \frac{\pi^2 EC_w}{4l^2} \right].$$

Bijlage 5.5.2 Stabiliteit bij wringing én buiging

Neem voor de berekening van de combinatie van torsie- en buig-knik het volgende aan (zie ook figuur 38 in paragraaf 5.5.2):

-De oorsprong van het x-y-assenstelsel ligt in het DC

-Het NC ligt op de coördinaten (x_0, y_0) .

-De doorsnede is vormvast, dus kan de verplaatsing van elk punt worden beschreven met de grootheden u, v en θ

-De verstijvende werking door verhinderde welving wordt verwaarloosd: $C_w=0$.

Bij de hiernavolgende afleiding wordt gebruik gemaakt van de resultaten, die in paragraaf 5.1 van deel II zijn gevonden. De formules, die daar worden afgeleid, kunnen hier ook gebruikt worden.

Buigend moment om de x- en y-as

De verplaatsingen van de oorsprong, als de constructie zich in uitgebogen toestand bevindt, zijn u , v en θ . De verplaatsingen van het NC kunnen hierin uitgedrukt worden:

$$(22) u_0 = u - y_0\theta$$

$$(23) v_0 = v + x_0\theta.$$

Voor het staafdeel tussen $z=0$ en $z=z$ kan nu het momentenevenwicht worden opgesteld. Als de tekenafspraken uit paragraaf 1.3 worden aangehouden, wordt gevonden:

$$(24) M_{y,z} + Pu_0 - M_{y,0} = 0$$

$$(25) M_{x,z} - Pv_0 - M_{x,0} = 0.$$

De kinematische relaties in combinatie met de bekende constitutieve relatie tussen moment en hoekverdraaiing geven de het moment als functie van de verplaatsingsgrootheden:

$$(26) M_x = EI_x\phi_x' = -EI_xv''$$

$$(27) M_y = EI_y\phi_y' = +EI_yu''.$$

Combinatie van (22), (24) en (27) alsmede (23), (25) en (26) geeft:

$$(28) EI_y u'' + P(u - y_0 \theta) - M_{y,0} = 0$$

$$(29) -EI_x v'' + P(v + x_0 \theta) - M_{x,0} = 0.$$

De differentiaalvergelijkingen voor buiging (28) en (29) zijn gekoppeld: drie onbekenden en twee vergelijkingen. Er is dus tenminste nog één D.V. nodig. Deze zal in het volgende blokje worden bepaald.

Wringing om het DC

In bijlage 5.1.1 van deel II wordt het wringend moment bepaald als n kolommen een drukkracht dragen. In deze bijlage wordt een dunwandig profiel belast door een drukkracht. De berekening van de torsie, die dit tot gevolg heeft, kan analoog aan de n kolommen geschieden. Hiervoor wordt aangenomen, dat de drukkracht gelijkmatig verdeeld is over de doorsnede van het profiel. Vervolgens wordt de staaf verdeeld in n elementaire kolommetjes met coördinaten (x,y) en een doorsnede dA. De kracht op één elementaire kolom is ΔP . In bijlage 5.1.1 deel II wordt aangetoond, dat door scheefstand van het profiel krachten in het horizontale vlak ontstaan, die het volgende wringende moment om het DC veroorzaken:

$$(30) M_t = -P_i y_i u' + P_i y_i^2 \theta' + P_i x_i v' + P_i x_i^2 \theta'$$

De kracht P_i heeft de waarde ΔP voor het kolommetje met een doorsnede dA. De coördinaten (x_i, y_i) worden door (x, y) vervangen.

Het totale wringende moment om het dwarskrachtencentrum wordt gevonden door de bijdragen van alle kolommetjes te sommeren oftewel:

$$(31) M_t = \int_A -\Delta P y u' + \Delta P y^2 \theta' + \Delta P x v' + \Delta P x^2 \theta' dA \rightarrow$$

$$(32) M_t = \Delta P \left(-\int_A y dA u' + \int_A x dA v' + \int_A (x^2 + y^2) dA \theta' \right).$$

De drie integralen in (32) stellen respectievelijk het statisch moment om de y-as (S_y), het statisch moment om de x-as (S_x) en het polair traagheidsmoment (I_p) voor. Voor ΔP vullen we in P/A . De differentiaalvergelijking voor wringing is bekend ($m_t = -GI_t \theta''$). De laatste vergelijking (32) moet dus eenmaal worden gedifferentieerd, hetgeen de volgende uitdrukking oplevert:

$$(33) m_t = P \left(-\frac{S_y}{A} u'' + \frac{S_x}{A} v'' + \frac{I_p}{A} \theta'' \right).$$

De termen S_x/A en S_y/A zijn niets anders dan de coördinaten van het normaalkrachtencentrum (x_0, y_0) . De gezochte D.V. wordt dus:

$$(34) -P y_0 u'' + P x_0 v'' + (-GI + \frac{I_p}{A} P) \theta'' = 0.$$

Nu zijn er drie vergelijkingen met drie onbekenden. In principe moet dit op te lossen zijn.

Oplossing van het stelsel vergelijkingen

In het stelsel, dat door de formules (28), (29) en (34) wordt gevormd, wordt de uitbuigingsvorm gesubstitueerd.

$$(35a) u = A_1 [1 - \cos(\alpha z)],$$

$$(35b) v = A_2 [1 - \cos(\alpha z)],$$

$$(35c) \theta = A_3 [1 - \cos(\alpha z)].$$

Substitutie van (35) geeft nu

$$(36) EI_y \alpha^2 A_1 \cos \alpha z + P A_1 (1 - \cos \alpha z) - P y_0 A_3 (1 - \cos \alpha z) - M_{y,0} = 0$$

$$(37) EI_x \alpha^2 A_2 \cos \alpha z + P A_2 (1 - \cos \alpha z) + P x_0 A_3 (1 - \cos \alpha z) + M_{x,0} = 0$$

$$(38) P y_0 \alpha^2 A_1 \cos \alpha z - P x_0 \alpha^2 A_2 \cos \alpha z + \left[GI - \frac{I_p}{A} P \right] \alpha^2 A_3 \cos \alpha z = 0.$$

In bijlage 5.1.2 van deel II wordt aangetoond, dat de constante term in (36) en (37) nul is, zodat alleen de cosinussen overblijven. Daar het rechterlid nul is, kan $\cos \alpha z$ weg worden gestreept.

Er blijft een stelsel over met de constanten A_1 tot en met A_3 . In matrixvorm opgeschreven

$$(39) \begin{bmatrix} (EI_y \alpha^2 - P) & 0 & P y_0 \\ 0 & (EI_x \alpha^2 - P) & -P x_0 \\ (P y_0 & -P x_0) & (GI - P I_p / A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dit stelsel heeft een niet-triviale oplossing als de determinant van de coëfficiënten-matrix in het linkerlid nul is. Teneinde de berekening hiervan te vereenvoudigen, worden een aantal grootheden gedefinieerd. De lezer zal in P_x en P_y de Eulerse knikkracht kunnen herkennen.

$$(40) P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2}$$

$$(41) P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{4l^2}$$

$$(42) P_\theta = \left[\frac{GI}{r^2} \right]; r^2 = \frac{I_p}{A}.$$

$$(43) \begin{vmatrix} (P_y - P) & 0 & P y_0 \\ 0 & (P_x - P) & -P x_0 \\ (P y_0 & -P x_0) & r^2 (P_\theta - P) \end{vmatrix} = 0$$

De uitwerking van (43) wordt hier achterwege gelaten. Uiteindelijk wordt de volgende derdegraads vergelijking gevonden, waaruit P_{krit} kan worden bepaald door de laagste P te bepalen, die aan de vergelijking voldoet.

$$(44) P^3[1-\frac{x_0^2+y_0^2}{r^2}] + P^2[\frac{P_x y_0^2 + P_y x_0^2}{r^2} - P_x - P_y - P_\theta] + P[P_x P_y + P_x P_\theta + P_y P_\theta] - P_x P_y P_\theta = 0.$$

DEEL II

case-study

HOOFDSTUK 1: INLEIDING

1.1 Situatieschets

De schrijver dezes heeft bij ingenieursbureau Grabowsky & Poort een stage gelopen teneinde de in deel I verzamelde kennis toe te passen in een case-study. In overleg met ir. D.G. Mans is gekozen voor een kantoor-toren met een driehoekige plattegrond, die een deel gaat vormen van het Beatrixkwartier.

Het Beatrixkwartier is een project van Juno Properties B.V. en wordt in Den Haag gerealiseerd. De architect is Pei, Cobb, Freed & Partners en de constructeur is Grabowsky & Poort. Bij dit rapport is een A3-vel gevoegd met een situatieschets van het plan. Het Beatrixkwartier is genoemd naar de belangrijkste weg waar het aan gelegen is, namelijk de Prinses Beatrixlaan. Deze laan loopt parallel aan de Utrechtsebaan, een belangrijke uitvalsweg in Den Haag en deel van de A12. In het inzetje is de ligging van het Beatrixkwartier in Den Haag aangegeven.

In het plan is een viertal torens te onderscheiden, die 66 meter hoog zullen worden. Toren 1, de taartpunt, is het gebouw waar dit deel van het verslag over gaat. Dit slanke gebouw maakt deel uit van bouwfase 1. In de tekening is deze fase gearceerd aangegeven. Een gedetailleerde plattegrond van de taartpunt is los bijgevoegd op een A3-vel.

Bouwfases 2 en 3 zullen later worden gerealiseerd. Onder de tweede fase vallen de torens 2 en 3 alsmede de atria 1 en 2. Tenslotte zal het plan voltooid zijn als ook toren 4, atrium 3 en belendende gebouwen zijn opgetrokken. Er zal dan zo'n 100.000 m² kantooroppervlak beschikbaar zijn in het Beatrixkwartier. Onder het gehele perceel komt een parkeergarage met 2 lagen met een capaciteit van 1200 auto's.

1.2 Opzet case-study

De taartpunt is een typisch voorbeeld van een gebouw, dat gevoelig is voor wringing, omdat de kern excentrisch gelegen is. Een belangrijke parameter in de beoordeling van een gebouw op torsie is de wringstijfheid GI_t van de kern.

Dit deel begint daarom met een hoofdstuk, waarin een methode wordt behandeld om analytisch de torsie-stijfheid van een kern met gaten te berekenen. In het kort wordt aangegeven hoe voor een dichte koker (lees:kern) met behulp van de zogenaamde membraan-analogie de wringstijfheid kan worden bepaald.

Vervolgens wordt een aanpassing van de membraan-analogie voorgesteld, die het mogelijk maakt om de aanwezigheid van gaten in een kern in de berekening mee te nemen. Met behulp van een aantal numerieke berekeningen wordt deze aanpassing getoetst op juistheid.

In deel I is geconcludeerd, dat wringing van een gebouw onder andere wordt veroorzaakt door een ongelijkmatige winddrukverdeling. De aanwezigheid van andere hoge gebouwen kan daarbij erg ongunstig zijn. Gezien de nabijheid van toren 2 zijn interferentie-effecten, zoals in deel I zijn beschreven, mogelijk.

Teneinde enig inzicht te krijgen in de gevolgen van de configuratie van het Beatrixkwartier voor de torsie op de taartpunt is daarom een windtunnelonderzoek gehouden. In hoofdstuk 3 staat het verslag hiervan.

Vervolgens is het gedrag van het gebouw onder windbelasting onderzocht. Er zijn een aantal mogelijke draagconstructies doorgerekend. Daarbij ligt de nadruk op de manier waarop de draagstructuur de wringing opneemt en er door vervormt.

De belasting is gebaseerd op NEN 6702, hoewel het bedoeling was de resultaten van het windtunnelonderzoek te gebruiken. Door een aantal vertragingen bij het opbouwen van de meetopstelling waren deze resultaten later beschikbaar dan verwacht was bij de aanvang van de case-study. Om binnen de beperkte tijdsduur van het afstudeerproject toch aan het gedrag van de taartpunt te kunnen rekenen is daarom de belasting volgens de norm gebruikt. Dit heeft tot een onderschatting van de torsie op het gebouw in deze sommetjes geleid.

Tenslotte is de stabiliteit van de taartpunt gecontroleerd. Daarbij wordt voortgeborduurd op de theorie, die in paragraaf 5.5 deel I is behandeld. Om toepassing daarvan te vereenvoudigen is een spread-sheet ontworpen. Numeriek zijn de resultaten gecontroleerd aan de hand van een 2^e-orde berekening.

1.3 Software

De numerieke berekeningen voor dit verslag zijn met behulp van RUSTAF gedaan. Dit is een finit-element pakket van Witteveen & Bos-Software. RUSTAF is een programma voor het berekenen van ruimtelijke staafconstructies met een uitbreiding voor schijf- en plaat-elementen. Het programma is gebaseerd op de verplaatsingsmethode volgens Livesley.

RUSTAF kent een globaal en lokaal assenstelsel. De oorsprong van het globale assenstelsel wordt door de constructeur zelf gekozen. Het lokale assenstelsel is per staaf verschillend en afhankelijk van de geometrie. In figuur 1 is een staaf-element getekend met de richtingen van het lokale assenstelsel. De x-as volgt de staaf-as en loopt van knoop *i* naar *j*. De richtingen *y* en *z* staan daar loodrecht op. De oriëntatie van de *y*-as wordt door de gebruiker gedefinieerd, waarna de *z*-richting vastligt. Bij de berekeningen in hoofdstuk 4 zal worden aangegeven hoe de lokale *y*- en *z*-as zijn gekozen.

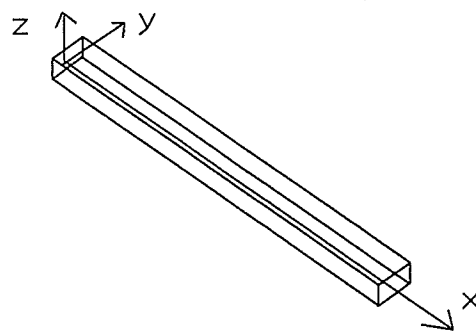


fig. 1 Definitie lokaal assenstelsel

Het belang van het lokale assenstelsel is, dat de stijfheid van een staaf in dit assenstelsel wordt opgeslagen. Het torsietraagheidsmoment wordt I_x genoemd: de traagheid om de lokale x-as. Analoot stellen I_y respectievelijk I_z de buigtraagheidsmomenten om de lokale *y*- en *z*-as voor. en bezitten een stijfheid in drie richtingen.

De belastingen kunnen in het lokale en globale assenstelsel worden aangegeven. In dit verslag is er voor gekozen om de krachten consequent in het globale assenstelsel uit te drukken. Op de staven kunnen puntlasten, gelijkmatig verdeelde of trapezium belastingen en momenten worden geplaatst. Op de schijven kunnen vlakbelastingen of krachten op de knopen worden geplaatst. Het is ook mogelijk een 'temperatuur-belasting' op te geven.

Het is niet mogelijk om opgelegde verplaatsingen op te geven. Dit is vooral een nadeel bij het numeriek bepalen van de wringstijfheid, zoals in hoofdstuk 2 gebeurt. Het verplaatsingsbeeld bij wringing is namelijk van te voren bekend, maar de verdeling van de spanningen in de constructie niet. RUSTAF is daarom niet echt geschikt om snel de wringstijfheid van een kern te bepalen, te meer daar de rekensnelheid van RUSTAF drastisch afneemt, zodra met schijf-elementen wordt gerekend. De numerieke modellen zijn daarom in hoofdstuk 2 als controle-middel van de analytische berekeningen gebruikt.

De uitvoer van RUSTAF bestaat uit een file met daarin de verplaatsingen van alle knopen en de krachten en momenten in alle staven en schijven. Daarnaast worden de oplegreacties vergeleken met de totale krachten en momenten op de constructie. In hoofdstuk 2 en 4 zullen de belangrijkste resultaten uit de diverse berekeningen worden gepresenteerd. Er zijn geen uitvoer-files in het rapport bijgevoegd, daar de veel uitvoer-gegevens niet relevant zijn.

RUSTAF kent tenslotte de mogelijkheid om de verplaatsingen, die in de uitvoer-file zijn opgeslagen, te visualiseren via een plot-programma. In figuur 2 is een drie-dimensionaal (isometrisch) plotje te zien van een kern, die op wringing wordt belast, met op de bovenkant een ruitennet, dat de vorm van de kern fixeert. De vervormingen zijn duizendmaal vergroot om de welving van de doorsnede goed zichtbaar te maken.

Ook het plaatje op de voorkant van het rapport is aan de hand van de verplaatsingen volgens RUSTAF geplot. Het betreft hier het model, dat in hoofdstuk 4 zal worden gebruikt om het gedrag van de taartpunt onder wringing te bestuderen, in vervormde toestand. In dit geval zijn de verplaatsingen 200 maal vergroot.

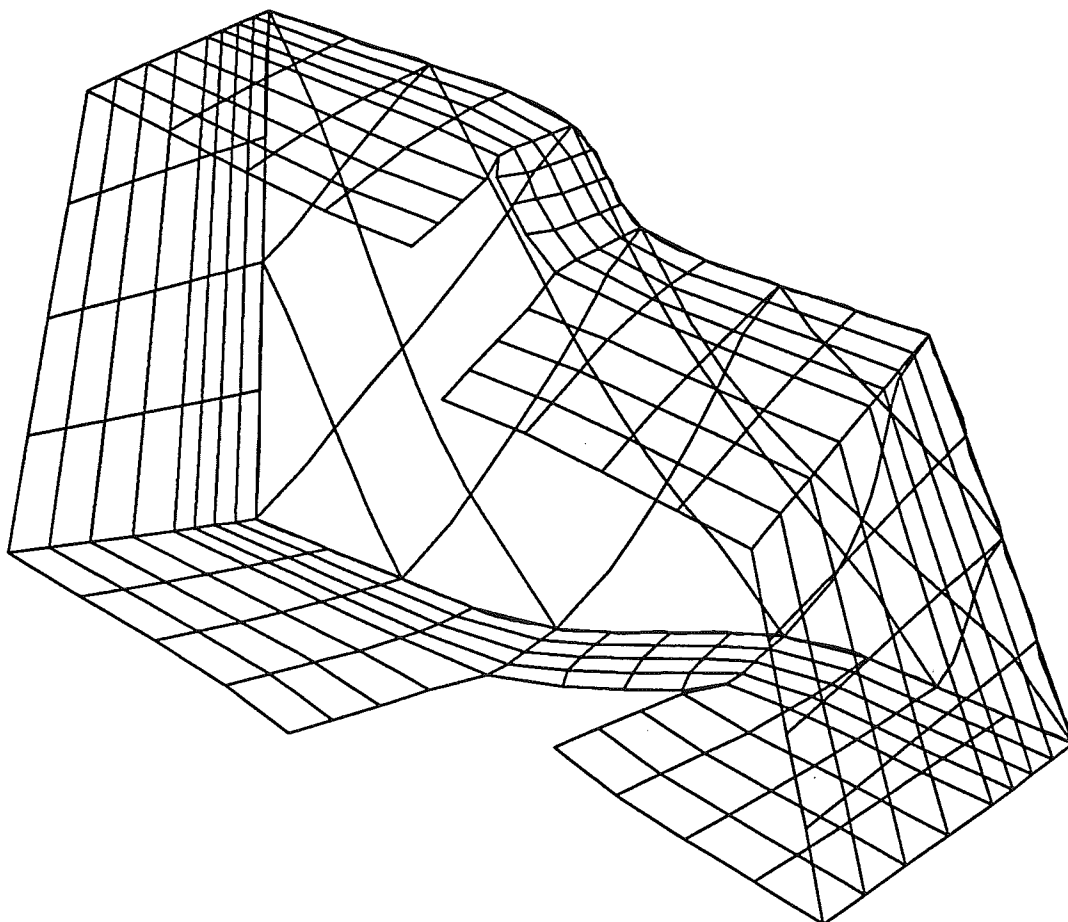


fig. 2 Kern in vervormde toestand

HOOFDSTUK 2: BEPALEN VAN DE WRINGSTIJFHEID

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal behandeld worden hoe de wringstijfheid van een stabiliteitsvoorziening kan worden berekend. Dit wordt op twee verschillende manieren gedaan, namelijk analytisch en numeriek. Daar de taartpunt in het Beatrixkwartier zijn torsiestijfheid ontleent aan een kern zal de nadruk liggen op het berekenen van de wringstijfheid van geperforeerde kokers.

De analytische berekeningen zijn gebaseerd op de membraan-analogie. Voor de geperforeerde kern is de theorie hiervan aangevuld, zodat het verslappende effect van de gaten in de berekening kan worden verwerkt.

De numerieke berekeningen zijn met behulp van het programma RUSTAF van Witteveen en Bos Software gedaan. Met de resultaten hiervan is de juistheid van de aanpassing van de membraan-analogie gecontroleerd.

In de hiernavolgende paragrafen zal eerst in het kort de membraan-analogie worden behandeld. Daarna zal aangetoond worden hoe de verzwakkende werking van de lateien in de berekening kan worden meegenomen. Met een aantal numerieke modellen worden de analytische resultaten gecontroleerd, waarbij geleidelijk naar de driehoekige kern, zoals die in de taartpunt voorkomt, wordt toegewerkt.

2.2 Membraan-analogie

In deze paragraaf wordt globaal aangegeven hoe de membraan-analogie afgeleid kan worden uit de theorie voor wringing, zoals die door St. Venant is opgesteld. Een complete afleiding is in diverse leerboeken over de mechanica te vinden. De hier gepresenteerde stof is gebaseerd op werk van Timoshenko en Blaauwendraad [7,22].

De berekening van de wringstijfheid van een constructie is in principe eenvoudig. Voor de staaf in figuur 3 geldt het volgende recept:

- vind de spanningsverdeling bij gegeven specifieke verwringing,
- de wringstijfheid volgt uit de sommatie van de schuifspanning τ maal de arm r ten opzichte van het dwarskrachtencentrum:

$$(2.1) \quad GI_t = \frac{1}{\kappa_z} \int_A r \tau dA .$$

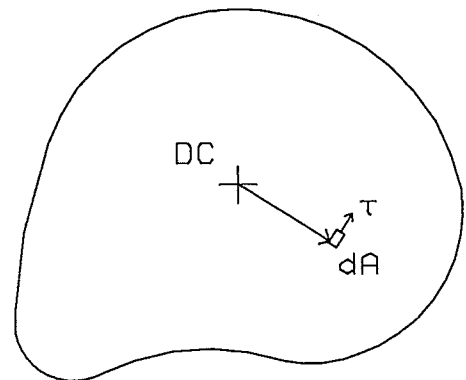


fig. 3 Staafdoorsnede

Hierbij is $\kappa_z = d\theta/dz$ de specifieke verwringing.

Echter, op voorhand is de verdeling van schuifspanningen helaas niet bekend. Hierdoor is in praktijk de berekening van de wringstijfheid vaak problematisch gebleken. Onder bepaalde voorwaarden kan toch relatief eenvoudig analytisch de wringstijfheid worden bepaald.

St. Venant heeft in 1855 de theorie voor wringing opgesteld. Er zijn twee voorwaarden voor het gebruik van zijn werk:

- de doorsnede moet vrij kunnen welven.
- de schuifspanningen moeten een bepaalde verdeling bezitten.

St. Venant heeft zelf een oplossing gevonden, die aan deze eisen en aan het evenwicht voldoet. Hij veronderstelt hierbij, dat de vorm van de doorsnede niet verandert, zodat de verplaatsingen met de rotatie θ kunnen worden beschreven. De oplossing kan op twee manieren worden gevonden:

- de verplaatsingenmethode
- de krachtenmethode.

Voor het rekenen aan kokers is de krachtenmethode het meest geschikt. Er wordt gebruik gemaakt van een spanningsfunctie Φ , die de volgende relatie met de schuifspanningen heeft:

$$(2.2) \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Door deze definitie is het mogelijk om een tweedegraads differentiaalvergelijking te krijgen, uitgedrukt in Φ . Uitwerking van de evenwichts-, constitutieve en kinematische vergelijkingen levert namelijk op:

$$(2.3) \frac{-1}{G} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] = 2\kappa_z.$$

De spanningsfunctie kan uit (2.3) worden berekend. Als vervolgens de functiewaarden loodrecht op de doorsnede worden uitgezet, ontstaat de zogenaamde Φ -heuvel. Deze heuvel kan worden gebruikt bij het bepalen van de wringstijfheid, daar uit (2.1) afgeleid kan worden, dat

$$(2.4) GI_t = \frac{1}{\kappa_z} \int_A 2\Phi dA.$$

Formule (2.4) in woorden luidt: de wringstijfheid is tweemaal de inhoud van de Φ -heuvel gedeeld door de specifieke verwringing. Deze relatie zal in het vervolg nog veel toegepast worden.

Prandtl zag als eerste dat vergelijking (2.3) analoog aan de differentiaalvergelijking voor een gespannen membraan is opgebouwd. Hiervoor kan geschreven worden:

$$(2.5) -S \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = p.$$

In (2.5) is w de verplaatsing loodrecht op het membraan. S is de spankracht per eenheid van breedte en p tenslotte is de overdruk, die het doek doet opbollen. Door substitutie van $p = 2\kappa_z$, $S = 1/G$ en $w = \Phi$ gaat (2.5) over in (2.3). Het belang van deze analogie was vroeger vooral het visualiseren van het verloop van de spanning in een doorsnede. Beschouwen van formule (2.2) met $\Phi = w$ laat zien, dat de helling van het membraan evenredig met de schuifspanning is.

Om inzicht in het gedrag van ingewikkelde constructies in geval van wringing te krijgen werden daarom vroeger veel zeepvlies-modellen gebruikt. Door de helling van het zeepvlies op diverse plaatsen te meten, vond men de spanningsverdeling in de doorsnede. Vandaar dat ook wel gesproken wordt over de zeepbel-analogie.

In een aantal gevallen kan met behulp van deze analogie op eenvoudige wijze de wringstijfheid worden bepaald. Bekend is bijvoorbeeld de formule voor de stripvormige doorsnede.

Hiervoor wordt aangenomen, dat de lengte l de overheersende dimensie is. Dit houdt in, dat de uitwijking van het membraan cilindervormig is en (2.5) vereenvoudigt tot:

$$(2.6) -S\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = p.$$

Vergelijking (2.6) kan direct geïntegreerd worden met als resultaat voor het wringtraagheidsmoment (als de dikte t is):

$$(2.7) I_t = \frac{1}{3} l t^3$$

Voor een dunwandige koker, zoals in figuur 4 is afgebeeld, kan met de membraan-analogie de formule van Bredt voor de wringstijfheid worden afgeleid. Daar de koker dunwandig is, is het membraan smal en wordt de verplaatsing lineair verondersteld van 0 (buitenkant koker) naar w (binnenkant koker) over de dikte $t(s)$. De dikte is een functie van s , Deze richting volgt de geometrie van het profiel, zoals in figuur 4 te zien is.

Het gat, dat omsloten wordt door het profiel, wordt bedekt gedacht door een gewichtloze plaat. Deze plaat verplaatst zich over de afstand w en wordt in evenwicht gehouden door de membraankrachten q (kracht/lengte), die op de rand van de schijf aangrijpen. Uit dit evenwicht kan Φ worden bepaald. In bijlage 2.2 is aangegeven hoe op deze wijze gevonden wordt:

$$(2.8) I_t = \frac{4A_{gat}^2}{\int ds/t}.$$

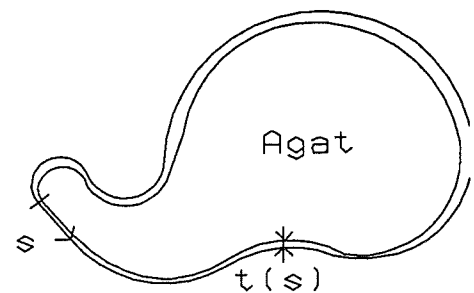


fig. 4 Willekeurig gevormde koker

Met behulp van de gewichtloze plaat kunnen ook meercellige kokers worden berekend. Hiertoe wordt boven elk gat een plaat gedacht, waarvan het evenwicht kan worden beschouwd. Op deze wijze kan ook de torsiestijfheid van een kern worden bepaald, mits er geen gaten in zitten.

In de praktijk zullen de wanden van een kern vrijwel altijd geperforeerd zijn. Dit geldt met name bij hoogbouw, waar de kern vaak ook het verticaal transport van personen en goederen herbergt. In dat geval moet gerekend worden zoals in de volgende paragraaf aangegeven wordt.

2.3 Membraan-analogie voor kernen met gaten

Een kern, uitgevoerd in beton, kan beschouwd worden als een dunwandig geperforeerd profiel. De perforaties kunnen het gevolg zijn van deuren naar de liften en trappenhuizen of doorvoer van leidingen. Door de gaten ontstaan er lateien, die de twee wanden aan weerszijden van een gat verbinden. Mits de lateien een zekere hoogte bezitten, kan er vanuit gegaan worden dat de schuifstroom rond loopt als de kern wordt belast op wringing. De benodigde hoogte is afhankelijk van de grootte van de schuifkrachten, die door de wringing in de wanden ontstaan. De latei moet de krachten en momenten, die hierdoor worden veroorzaakt, kunnen opnemen met de wapening. In verband met het maximum wapeningspercentage is dus een bepaalde hoogte van de latei vereist.

Als de schuifstroom rond kan lopen, gedraagt de kern zich als een gesloten profiel. De benadering met gewichtloze platen en lineair verlopende verplaatsingen van het doek, zoals bij de afleiding van de formule van Bredt is gebruikt, kan dan toegepast worden. Om de verminderde stijfheid door de gaten in rekening te brengen, wordt een fictieve dikte van de kernwand ter plaatse van de latei bepaald. Deze waarde kan dan in de berekening volgens de membraan-analogie meegenomen worden.

2.3.1 Bepalen fictieve dikte

De fictieve dikte kan worden bepaald door het gedrag van de latei te beschouwen als de kern gaat wringen. In figuur 5 is een deel van een kernwand met één latei getekend, terwijl het geheel op afschuiving wordt belast. Immers, de wringing manifesteert zich in de afzonderlijke wanden als schuifbelasting.

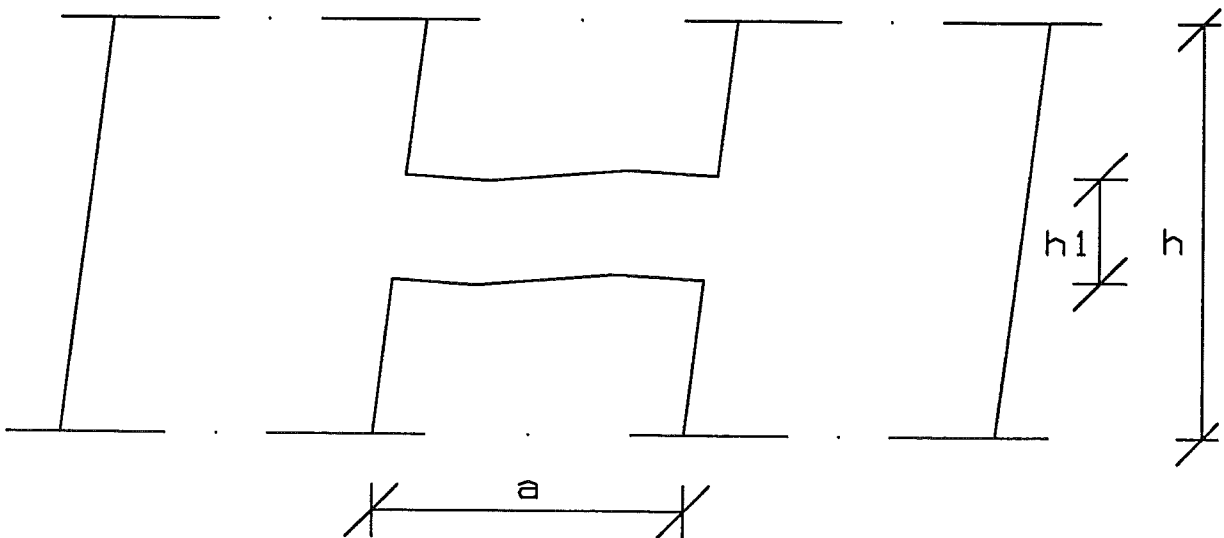


fig. 5 Afschuiving van kernwand

Als de vervorming van de staaf-as van de latei nader wordt beschouwd, wordt figuur 6 gevonden. In de inleiding is al gesteld, dat de latei de schuifkrachten, die op de wanden werken, over moet brengen. In de latei ontstaat hierdoor een dwarskracht D . De relatie tussen de dwarskracht en de hoek γ kan worden gevonden met behulp van figuur 7. De latei is geschematiseerd tot een ingeklemde ligger met een lengte van de halve overspanning. Er kan volstaan worden met één helft van de latei vanwege het buigpunt op $1/2a$ in figuur 6. Dat betekent, dat daar het moment nul is en er alleen een dwarskracht zal werken. In figuur 7 is het statisch schema afgebeeld. De verplaatsing w volgt uit het verplaatsingsbeeld van figuur 6: $w = 1/2\gamma a$.

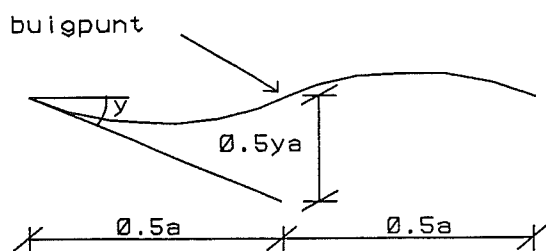


fig.6 Vervorming staaf-as van latei

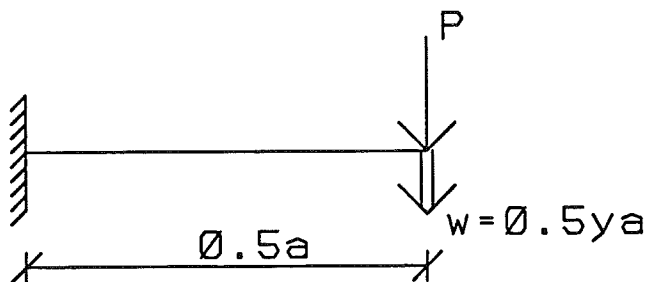


fig.7 Schematisering latei

Voor de ingeklemde ligger is de verplaatsing als functie van de puntlast P en de lengte l bekend:

$$(2.9) \quad w = \frac{Pl}{GA_1} + \frac{Pl^3}{3EI_1}$$

Uitwerking van dit vergeet-me-nietje geeft de vervangende afschuifstijfheid ter plekke van de latei. In bijlage 2.3.1 is dit uitgewerkt. Het resultaat is:

$$(2.10) \quad GA^* = \frac{Gth_1}{\eta + G/E(q/h_1)^2},$$

De fictieve dikte kan worden berekend uit (2.10), daar $A^* = t^*h$ voor een homogene wand. Uitwerking van dit gegeven levert de volgende formule op:

$$(2.11) \quad t^* = t \cdot \frac{h_1}{h} \frac{1}{\eta + G/E(q/h_1)^2}$$

De interpretatie van (2.11) wordt aan de hand van een voorbeeld in de volgende paragraaf ter hand genomen.

2.3.2 Formule voor I_t van een rechthoekige kern met gat.

Met de hiervoor behandelde theorie kan op eenvoudige wijze het wringtraagheidsmoment van een kern met een gat erin worden berekend. In figuur 8 is een koker gegeven, die de stabiliteit van een hoog gebouw verzorgt. Op elke verdieping bevinden zich twee gaten in de kern en wel op de lange zijden. De maten staan in de figuur.

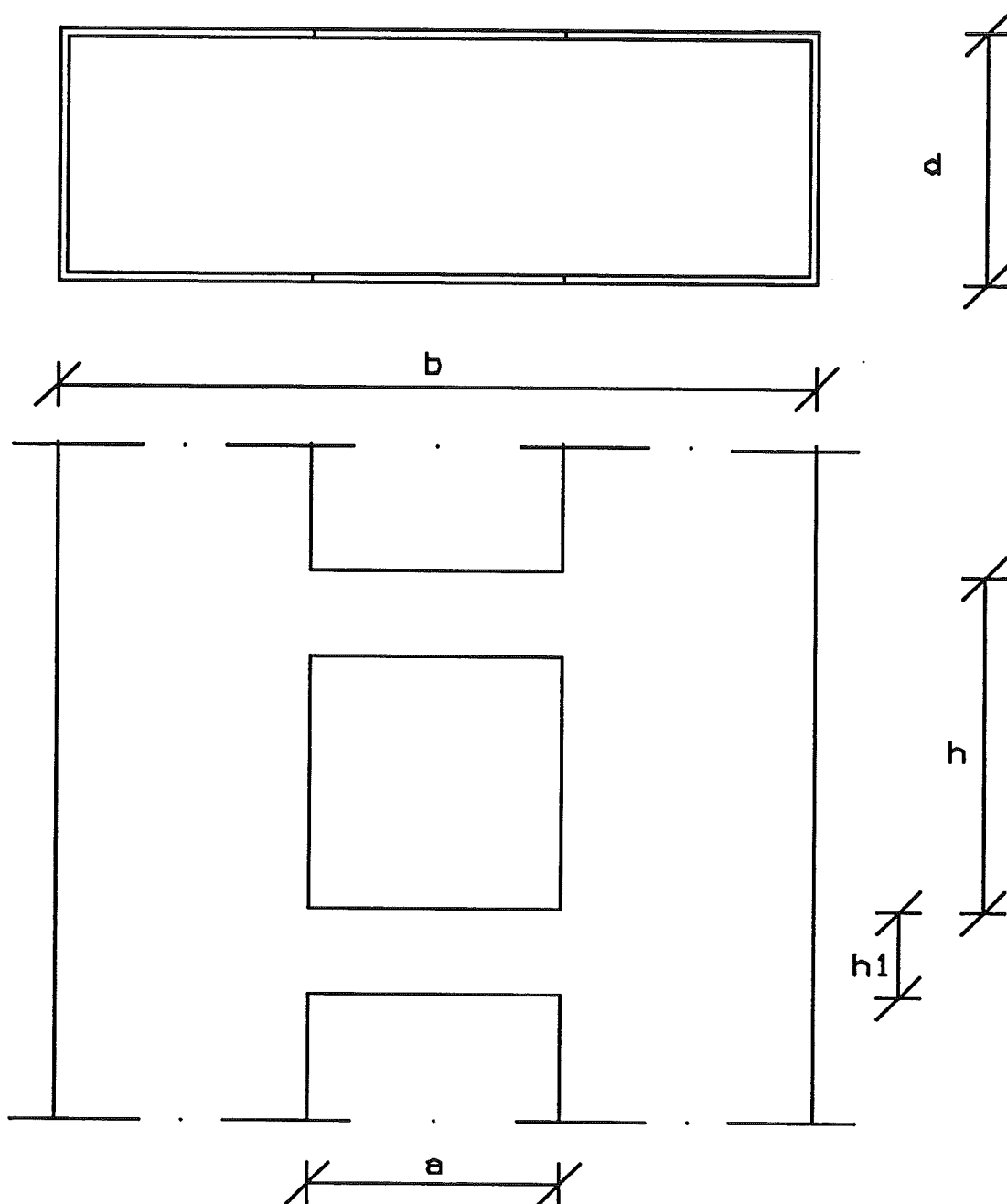


fig. 8 Rechthoekige kern; 2 gaten per etage

We gebruiken de zeepbel-analogie om de wringstijfheid te bepalen. De kerndoorsnede wordt als een membraan voorgesteld, dat een gewichtloze rechthoekige plaat met een oppervlakte $b \times d \text{ m}^2$ draagt.

De dwarskrachten op de randen van de plaat zijn afhankelijk van de verplaatsing van de plaat. In bijlage 2.2 is afgeleid, dat voor een dunwandig profiel een lineair verband geldt:

$$(2.12) \quad q_1 = \frac{w_1}{t} S ; q_2 = \frac{w_1}{t^*} S$$

De dwarskracht q_1 werkt ter plaatse van de volle wand en q_2 bij de latei. Het verticaal evenwicht van de plaat kan geformuleerd worden

$$(2.13) \quad (2d + 2(b-a))q_1 + 2aq_2 = bdp .$$

In (2.13) kan (2.12) worden gesubstitueerd. Dit levert een uitdrukking voor w_1 op. Hieruit kan Φ_1 worden bepaald, hetgeen in bijlage 2.3.2 is uitgewerkt. Daarna kan met behulp van vergelijking (2.4) (GI volgt uit de inhoud van de Φ -heuvel) het wringtraagheidsmoment als functie van de afmetingen van de kern (b, d en t) en de latei (a en t^*) worden bepaald:

$$(2.14) \quad I_t = \frac{2b^2 d^2 t}{a(t^*/t - 1) + b + d} .$$

Aan de hand van een voorbeeld zal nu de invloed van de lateien op de stijfheid van de kern onderzocht worden. Daarvoor worden de volgende dimensieloze grootheden gedefinieerd:

$$x = b/a ; y = h/h_1 .$$

De grootheid x is te beschouwen als een relatieve lengte van de latei. De slankheid van de latei wordt met y uitgedrukt. Stel vervolgens, dat $d=0,5b$ en $h=0,3b$. Uit vergelijking (2.14) kan dan de volgende functie worden afgeleid (zie bijlage 2.3.2):

$$(2.15) \quad z(x,y) = \frac{2}{1 + y/x(1.2 + 0.42(10y/3x)^2 - 1/x + 0.5)} , \text{ met}$$

$$(2.16) \quad z(x,y) = \frac{I_t}{bd^2 t}$$

Met behulp van een rekenprogramma is een contour-plot gemaakt van de functie $z(x,y)$. Deze staat op de volgende pagina in figuur 9. Duidelijk is het verzwakkende effect van de lateien te zien. Stel bijvoorbeeld, dat de overspanning van de latei een tiende van de breedte is ($x=10$). Halvering van de hoogte van de latei zodat y bijvoorbeeld van 3 naar 6 gaat, veroorzaakt een afname van z van 1.05 tot 0.65.

Vergroten van de relatieve lengte van de latei geeft een snellere afname van de wringstijfheid bij vergroting van de slankheid te zien. Neem bijvoorbeeld $x=4$. Verdubbeling van y van 3 naar 6 betekent dan een afname van z van 0,49 tot 0,11.

Grote gaten in de kern hebben dus tot gevolg, dat de wringstijfheid van de kern dramatisch afneemt ! Overigens heeft de met (2.15) berekende wringstijfheid bij echt grote gaten weinig betekenis meer. Als voorwaarde voor het berekenen van de wringstijfheid met de fictieve dikte is gesteld, dat de latei de schuifkrachten over kan brengen. Dit betekent, dat met name de verhouding h/h_1 niet te groot mag zijn. Verder zijn zeer lange lateien ($x=b/a$ klein) erg slap en niet in staat om de krachten over te brengen, die door de wringing van de kern worden veroorzaakt. In dat geval heeft het rekenen met een fictieve dikte natuurlijk geen enkele zin.

In zekere zin komt dit ook tot uiting in het verloop van z . Als de latei lang is, geeft een kleine verandering van de hoogte h_1 een groot verschil in z . Verder zijn de waarden van z , als y groot is, praktisch nul.

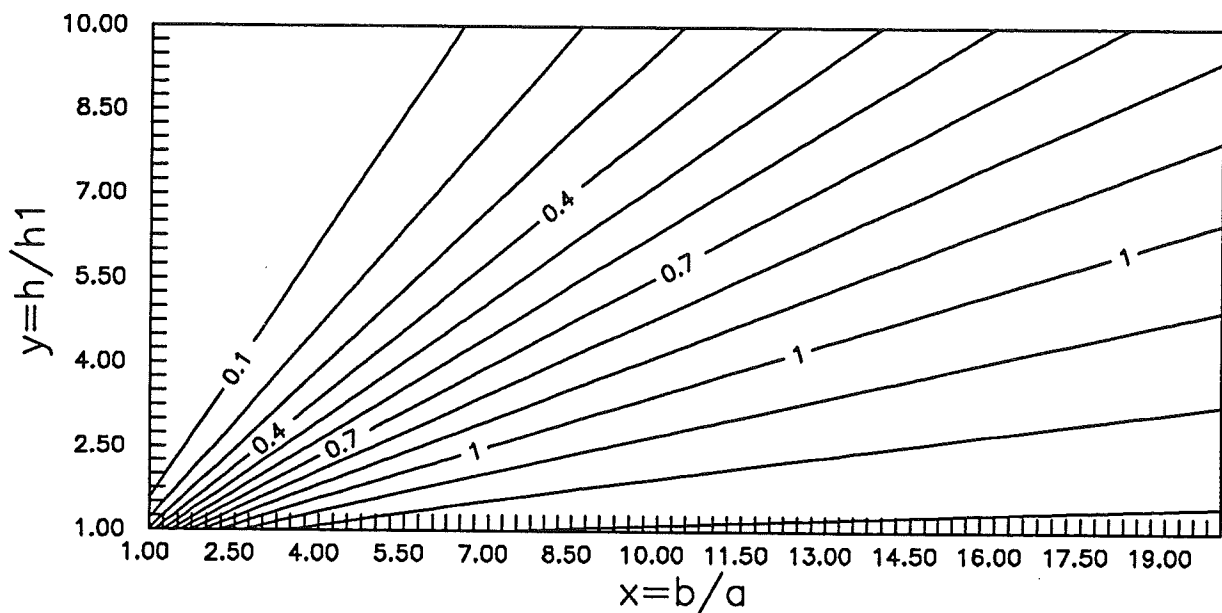


fig. 9 Contour-plot van de functie $z(x,y)$

2.3.3 Toetsing aan een concreet geval

Numeriek is met RUSTAF de rechthoekige kern berekend, die in figuur 2 in vervormde toestand is afgebeeld, met de volgende afmetingen (2 gaten per etage):

$b=10$ m; $d=5$ m; $a=2$ m; $h=3$ m; $h_1=1$ m; $t=0.25$ m.

Daar $b/d=2$ en $b/h=10/3$ kan gebruikt gemaakt worden van de formule (2.15), met $x=5$ en $y=3$. Invullen van (2.15) geeft $z(5,3)=0,661$. Het traagheidsmoment voor torsie is dus:

$$I_t = 0,661 \cdot b \cdot d^2 \cdot t = 41,28 \text{ m}^4.$$

De E-modulus in de numerieke berekening is aangenomen op $11,76 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$. De wrings-tijfheid wordt dus

$$GI_t = 11,76 \cdot 10^6 \cdot 41,28 = 485 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2.$$

Numeriek wordt $480 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$ gevonden, een verschil derhalve van slechts 1%. Bij de behandeling van de numerieke berekeningen zal op de verschillen nader worden ingegaan, maar nu reeds kan gesteld worden, dat werken met een fictieve dikte een goed beeld van de wrings-tijfheid van een geperforeerde kern geeft.

2.4 Numerieke bepaling van de wringstijfheid

2.4.1 Plan van aanpak

Om de (on)mogelijkheden van RUSTAF te onderzoeken wordt begonnen met een eenvoudig numeriek model, namelijk één verdieping van een rechthoekige kern zonder gaten. Hiervan is de analytische oplossing bekend uit de literatuur en is tevens zeer snel te bepalen met behulp van de zeepbel-analogie.

Met de rechthoekige kern kan bijvoorbeeld worden bekeken hoe de randvoorwaarden dienen te worden gekozen en hoe de krachten op de kern dienen te worden aangebracht, om zuivere wringing te krijgen.

De volgende stap is het aanbrengen van gaten in een rechthoekige kern. In paragraaf 2.3.2 is voor het wringtraagheidsmoment hiervan een formule afgeleid met behulp van de fictieve dikte. Met behulp van de computer kan gecontroleerd worden of dit betrouwbare resultaten geeft. Andersom geeft de analytische oplossing een indicatie van de juistheid van het model, dat in de finit-element berekening wordt gebruikt.

Tenslotte wordt de stap naar een driehoekige kern genomen. Hiervoor is de kern uit het voorontwerp van de taartpunt in RUSTAF gemodelleerd, hoewel de doorsnede van de kern geen echte driehoek is, daar de punt afgesneden is. De berekening is tweemaal uitgevoerd, namelijk exclusief en inclusief de gaten in de wand.

2.4.2 Rechthoekige kern zonder gaten

Om de mogelijkheden van het programma RUSTAF te leren kennen is een rechthoekige kern met afmetingen $b \times d \times h = 4 \times 2 \times 4 \text{ m}^3$ gemodelleerd. Het nevenstaande plaatje (fig. 10) geeft aan hoe de elementen verdeeld zijn. Het aantal elementen is beperkt, maar de resultaten bleken toch nauwkeurig genoeg te zijn.

In eerste instantie is de kern alleen vastgehouden op de hoeken, waarbij de drie translaties (u,v,w) verhinderd werden. Later zijn onder elke knoop in het vlak $z=0$ scharnieren geplaatst. Dit gaf nauwkeurigere resultaten.

In de analytische berekeningen wordt aangenomen, dat de vorm van de doorsnede tijdens wringing niet verandert. De vorm dient dus gefixeerd te worden, hetgeen gerealiseerd wordt door een plaat in het vlak $z=h$ (=verdiepingshoogte) op de kern te leggen. Later is gebruik gemaakt van een vakwerk, daar dit de rekentijd vermindert.

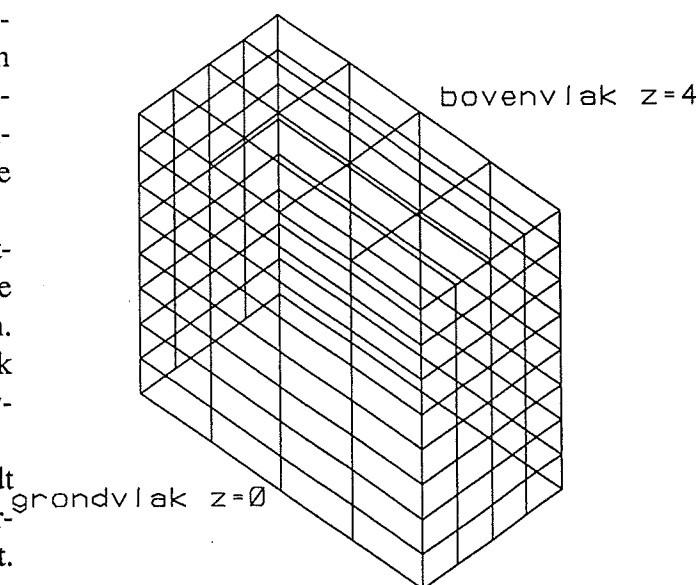


fig. 10 Geometrie numeriek model

Met de belasting, die het wringend moment in de kern veroorzaakt, is veel geëxperimenteerd. Uiteindelijk gaven knoopkrachten in het vlak $z=h$ het meest bevredigende resultaat. Er wordt met deze belasting namelijk een constant wringend moment in de kern veroorzaakt. Dit maakt de berekening van de wringstijfheid erg eenvoudig, daar $\kappa_z = \partial\theta/\partial x$ nu constant is. De wringstijfheid kan dan gevonden worden door te stellen:

$$(2.17) \quad GI_t = \frac{M_t}{\theta(h)} \cdot h$$

De knoopkrachten volgen, indien mogelijk, uit een analytische berekening of worden oordeelkundig geschat. Het is niet erg als de verdeling van de krachten niet overeenkomt met de spanningstoestand voor torsie, zoals die boven op $z=h$ geldt. De stijve plaat of het vakwerk zorgt voor een herverdeling van de krachten.

Voor de kern in figuur 10 geldt

$$-M_t = 4800 \text{ kNm},$$

$$-\theta(h) = 0,37 \text{ mrad},$$

zodat berekening volgens (2.17) $GI_t = 52,2 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$ oplevert.

De welving van de doorsnede (verplaatsing in de z -richting) is op $z=0$ verhinderd. Bouma heeft voor rechthoekige doorsneden een analytische oplossing gevonden voor de wringstijfheid bij verhinderde welving. Deze luidt:

$$(2.18) \quad GI_t = \frac{1}{2}(GA_1 a_2^2 + GA_2 a_1^2), \text{ met}$$

$$-a_1 = 2 \text{ m}$$

$$-a_2 = 4 \text{ m}$$

$$-A_1 = a_1 t$$

$$-A_2 = a_2 t$$

$$-G = 1,17 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2.$$

Invullen geeft $GI = 56,5 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$. Het verschil is 7.6%. Gezien het beperkt aantal elementen, namelijk 120, geen slecht resultaat.

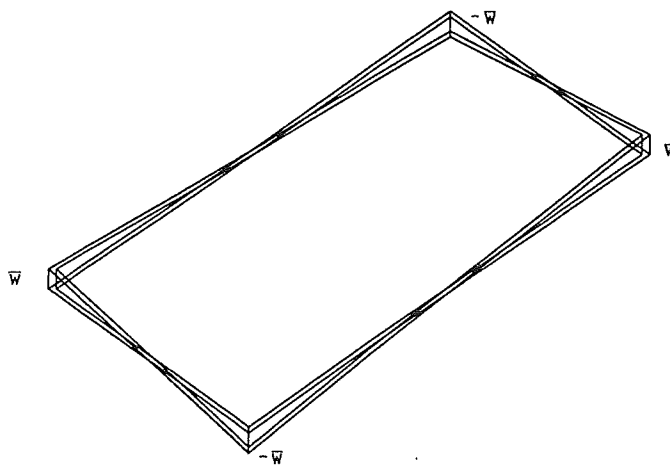


fig. 11 Welving van de doorsnede

Vrije welving

Bij hoogbouw wordt er vanuit gegaan, dat de kern vrij welft. Alleen de eerste verdiepingen merken iets van de inklemming. Praktisch gezien betekent dat, het model van de kern op $z=0$ in de z -richting moet kunnen verplaatsen. Om het rekenproces numeriek stabiel te houden, dienen er minimaal drie punten, die niet op één lijn liggen, te worden gefixeerd in z -richting.

Bij de rechthoekige doorsnede kunnen direct vier punten worden aangewezen, waar van nature de welving nul is. Dit zijn de punten in het midden van de zijden, zie figuur 11.

Meer in 't algemeen geldt, dat voor volle doorsneden de welving nul is op de snijpunten van symmetrie-as en systeemlijn.

De verdeling van de krachten op het vrije uiteinde kan nu worden berekend uit de schuifstroom, die met de membraan-analogie kan worden bepaald. Eén van de aannames bij de opstelling van differentiaalvergelijking voor wringing volgens St. Venant is namelijk een vrije welving van de doorsnede.

Voor de kern van figuur 10 kan met de zeepbel-analogie worden bepaald (bijlage 2.4.2), dat $GI_t = 50,2 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$. Numeriek wordt met de nieuwe randvoorwaarden $48 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$ gevonden. De stijfheid neemt af, wat ook te verwachten valt, daar door verhinderde welving ook een deel van de belasting wordt opgenomen. Het verschil tussen numerieke en analytische waarde neemt af tot 4.3 %.

2.4.3 Rechthoekige kern met gaten

Het model, dat in hoofdstuk 1 in vervormde toestand is afgebeeld (figuur 2), is gebruikt om de analytische berekening in paragraaf 2.3.3 te controleren. De maten zijn $b \times d \times h = 10 \times 5 \times 3 \text{ m}^3$. Aan de hand van de schuifstroom, die analytisch berekend is met behulp van de membraan-analogie, zijn de knooppunten bepaald. De punten, waar de welving nul is, bevinden zich wederom op de helft van de zijden. Het aantal elementen bedraagt 352, zodat ten opzichte van de vorige berekening een nauwkeuriger resultaat kan worden verwacht. De dimensies volgen uit paragraaf 2.3.3 en hebben als resultaat, dat $GI_t = 480 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$. Analytisch was gevonden $485 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$, dus inderdaad nauwkeuriger.

De resultaten met de rechthoekige kern geven vertrouwen in het gebruik van RUSTAF voor het bepalen van de wringstijfheid.

2.4.4 Driehoekige kern zonder gaten

Uit het voorontwerp van de taartpunt is de kern overgenomen en op twee manieren berekend. Eerst is analytisch de schuifstroom en de wringstijfheid bepaald, waarna de berekende waarden numeriek gecontroleerd zijn.

Er is aangenomen, dat de kern een dichte koker is. In werkelijkheid zitten er gaten in om vanuit de vloeren naar de lift en trap te kunnen komen. Dit komt in de volgende paragraaf aan de orde.

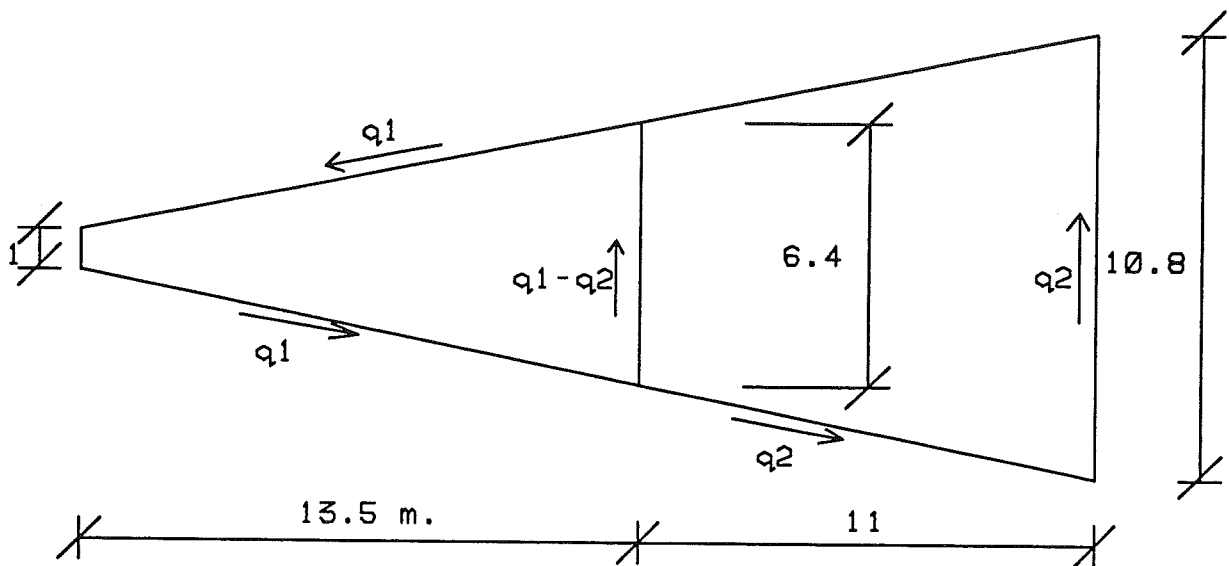


fig. 12 Dwarskrachten op de platen

Analytische berekening

De doorsnede van de kern bestaat uit een tweecellige koker. Zie figuur 12. De twee gaten worden geschematiseerd tot twee gewichtloze platen, die in evenwicht worden gehouden door de membraankrachten (q_1 en q_2). Deze zijn ook in figuur 12 getekend. De pijlen stellen de richtingen van de schuifkrachten voor, die door de analogie evenredig met de membraankrachten zijn.

In bijlage 2.4.4 staat de berekening van de wringstijfheid. Hier worden alleen de resultaten weergegeven. Voor de Φ 's wordt gevonden:

$$(2.19a) \Phi_1 = 1,000 G \kappa_z$$

$$(2.19b) \Phi_2 = 1,608 G \kappa_z$$

Hiermee kan de torsiestijfheid worden berekend, hetgeen $GI_t = 4,75 \cdot 10^9 \text{ kNm}^2$ oplevert. De schuifstroom kan berekend worden uit Φ en wordt gebruikt om de krachten, die op het numerieke model worden geplaatst, te laten overeenkomen met de spanningstoestand, die bij wringing hoort.

De schuifkrachten hebben de volgende waarden:

$$(2.20a) S_{x,1} = 1,000 \frac{M_t}{I_t},$$

$$(2.20b) S_{x,2} = 1,608 \frac{M_t}{I_t}.$$

De richting, waarin de krachten werken, volgt uit figuur 12.

Numerieke berekening

In het numerieke model is één etage van de kern gemodelleerd met een hoogte van 3,5 m. Elk deel van de wand is verdeeld in 16 schijfjes. Dit bleek voor dit doel, namelijk bepalen van de wringstijfheid, een voldoende nauwkeurig verplaatsingsbeeld te geven.

De bepaling van de randvoorwaarden en de plaatsing van de krachten geschiedt op de wijze, die bij de rechthoekige kern is beschreven. Het totale wringend moment op de kern, als gevolg van de krachten op het vrije uiteinde van het model, bedraagt 735595 kNm. Het model is met RUSTAF berekend met als resultaat een gemiddelde rotatie op $z=3.5$ meter van 0,52 mrad, dus kan de wringstijfheid bepaald worden uit:

$$(2.21) GI_t = \frac{735595}{0,5210^{-3}} \cdot 3,5 = 4,95 \cdot 10^9 \text{ kNm}^2.$$

Analytisch was berekend $4.75 \cdot 10^9 \text{ kNm}^2$, het verschil is dus 4,2 %. De computerberekening reageert iets te stijf, maar dat is ook wel te verwachten door het grove raster dat gebruikt is om de kern in schijfjes te verdelen.

2.4.5 Driehoekige kern met gaten

Analytische berekening

Na het academische geval van een kern zonder gaten zal nu wel rekening worden gehouden met de aanwezigheid van gaten in de kern. Bij de taartpunt zijn er twee belangrijk: de toegang naar de trappenhal, die in de eerste koker is gelegen, en de liftlobby, die de tweede koker perforiert. In het voorontwerp hebben beide dezelfde afmetingen namelijk een breedte en hoogte van 2,4 meter. Als de verdiepingshoogte vervolgens op 3,6 meter wordt gesteld, zal de lateihoogte 1,2 meter bedragen.

De fictieve dikte van de kernwand ter plaatse van de latei met deze gegevens berekend worden. Er wordt dan gevonden (zie bijlage 2.4.5), dat t^* zo'n 11% van de wanddikte is. In bijlage 2.4.5 wordt de analytische berekening verder uitgewerkt. De gevonden wringstijfheid is $GI_t = 2,292 \cdot 10^9 \text{ kNm}^2$.

Numerieke berekening

De kern is gemodelleerd zoals in figuur 13 is aangegeven. In het plaatje is ok het vakwerk te zien dat de vorm van de bovenrand fixeert. Er is slechts één helft gebruikt om berekening met RUSTAF mogelijk te maken. RUSTAF bleek namelijk vast te lopen als de hele kern ingevoerd werd door beperkingen in de rekene en geheugencapaciteit. Dankzij de symmetrie van belasting en constructie is het beschouwen van één helft toegestaan.

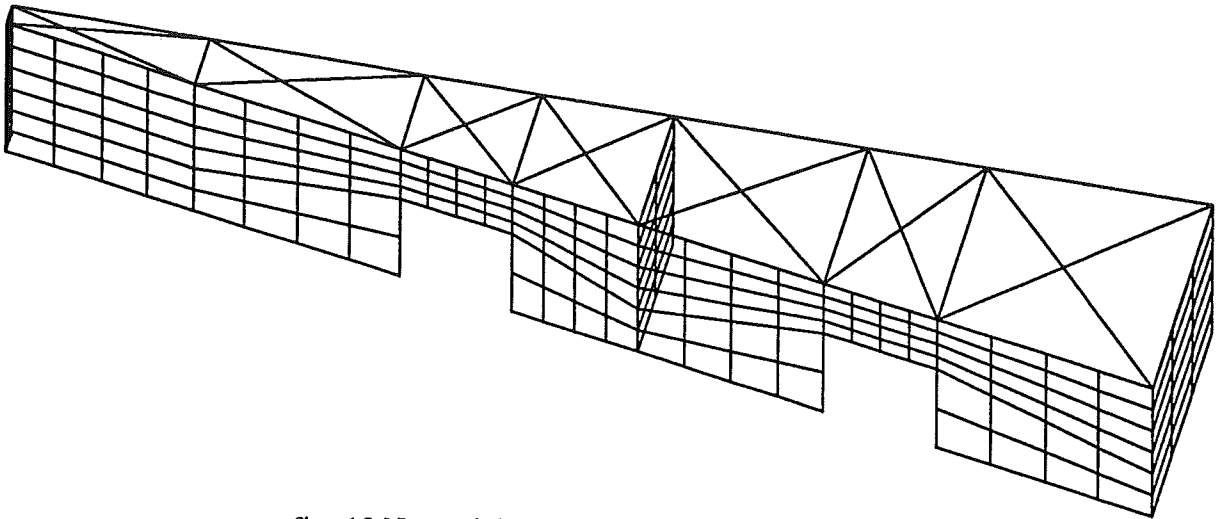


fig. 13 Numeriek model van de driehoekige kern

De krachten, die uit de schuifstroom volgen, geven in totaal een wringend moment van 97418 kNm. Na berekening blijkt de kern hierdoor op $z=3,6$ m 0,30 mrad te verdraaien. De wringstijfheid is dus

$$(2.23) \quad GI_t = \frac{2.97418}{0,30 \cdot 10^{-3}} \cdot 3,6 = 2,338 \cdot 10^9 \text{ kNm}^2.$$

De factor 2 volgt uit het feit, dat slechts de halve kern is beschouwd. De totale wringstijfheid is dus tweemaal de torsiestijfheid, die uit de uitdraai van RUSTAF wordt bepaald.

Vergelijking met de analytische oplossing laat een verschil van 2% zien. Net zoals in de vorige paragraaf werd gevonden, reageert de eindige elementen berekening iets te stijf. Dit is vermoedelijk het gevolg van het kleine aantal elementen waar de latei mee geschematiseerd is en de zogenaamde shear-locking, waardoor het model te stijf is.

2.5 Conclusies

Uit paragraaf 2.4 blijkt een grote overeenkomst tussen de analytisch bepaalde wringstijfheid en de numerieke resultaten. Het werken met de fictieve dikte geeft dus een goed beeld van de torsiestijfheid van een geperforeerde kern.

Met nadruk wordt gesteld, dat de analytische berekening geen uitsluitsel geeft over het detailgedrag van de kern. Hierbij dient men vooral te denken aan krachtsoverdracht tussen latei en wand. Bij deze aansluiting zal het beton naar alle waarschijnlijkheid scheuren. In de analytische berekening wordt hier geen rekening mee gehouden. Immers, de elasticiteitsmodulus is constant aangenomen over de hele doorsnede, terwijl door het scheuren de E-modulus van de latei sterk zal afnemen. Als de latei zal scheuren, treedt een zeer complexe krachtsverdeling op door het niet-lineaire materiaalgedrag van het beton in de latei.

Indien er twijfel bestaat of de latei de schuifkrachten kan overbrengen, kan een rekenpakket, dat niet-lineair materiaalgedrag in rekening kan brengen, zoals DIANA, uitkomst bieden.

HOOFDSTUK 3: WINDTUNNELONDERZOEK

3.1 Inleiding

3.1.1 Doelstelling

Het doel van het windtunnelonderzoek in het kader van het afstudeerproject 'Wringing van hoge gebouwen' is het experimenteel bepalen van de torsie op de taartpunt van het Beatrixkwartier als gevolg van de wind.

3.1.2 Meetplan

Het windtunnelonderzoek is primair gericht op de wringing, die de taartpunt ondervindt. De eerste vraag is dan: wat moet je allemaal meten om torsie als belastingsgeval te kunnen beoordelen? Naast (uiteraard) de torsie is het verstandig om de resulterende horizontale krachten in twee onderling loodrechte richtingen te bepalen. Het wringend moment wordt namelijk om een bepaald punt gemeten, zoals het massazwaartepunt. Als dit omgerekend moet worden naar torsie om een ander punt, zoals het dwarskrachtencentrum, dan zijn de twee componenten van de horizontale kracht op het gebouw nodig om dit te kunnen berekenen. Vervolgens kan men zich afvragen waar deze drie grootheden bepaald moeten worden. In principe zijn voor toepassing in een ontwerpberekening alleen de maxima van belang. In dit geval houdt dat dus in, dat ter hoogte van de fundering moet worden gemeten. Daar worden immers de grootste krachten en momenten verwacht.

Een volgend punt is het aantal windrichtingen, waarbij metingen zullen worden verricht. Hier is gekozen voor 12 richtingen tussen 0 en 360°. Dit is vaak gebruikelijk bij windtunnelonderzoek.

Tenslotte moet worden nagegaan wat nodig is om het onderzoek betrouwbaar en reproduceerbaar te maken. Ten eerste dient de apparatuur voor de metingen geijkt te worden. Verder is het wenselijk om het windklimaat van de tunnel te leren kennen. Daartoe dient het verloop van de windsnelheid (gemiddeld), de turbulentie-intensiteit en het windsnelheids-spectrum over de hoogte te worden bepaald.

Samenvattend zijn de volgende zaken van belang voor het windtunnelonderzoek aan de taartpunt:

- ijking apparatuur,
- meten windsnelheid op een aantal hoogten,
- meten turbulentie-intensiteit op een aantal hoogten,
- meten spectrum van de windsnelheid op een aantal hoogten,
- 12 metingen van de torsie op de fundering, om de 30°,
- 12 metingen van de kracht F_x op de fundering, om de 30°,
- 12 metingen van de kracht F_y op de fundering, om de 30°.

De richtingen x en y worden in de volgende paragraaf gedefinieerd. Hoe een en ander wordt uitgevoerd, komt daar ook aan de orde.

3.2 Meetopstelling

De metingen zijn verricht bij TNO. Er kon gebruik worden gemaakt van de tunnel van de afdeling Binnenmilieu. Deze tunnel is gebouwd in 1929 en uit hout vervaardigd. Het is een tunnel met een open circulatie. Dit houdt in, dat de lucht wordt aangezogen uit de buitenlucht en daar ook weer aan afgegeven wordt. Dit in tegenstelling tot tunnels met gesloten circulatie, waar de luchtstroom rondgaat. Een ventilator zorgt voor de opwekking van een luchtstroming in de tunnel.

De netto doorsnede is $1.09 \times 1.09 = 1.18 \text{ m}^2$. De meetsectie bevat een cirkelvormige plaat met een diameter van 1,00 m, die in de bodem van de tunnel is verzonken. De schijf kan draaien over een drietal rollen. Hierop wordt een maquette 1:350 met de omgeving van de taartpunt geplaatst.

In figuur 14 is een plattegrond van de meetsectie afgebeeld. De de taartpunt en de begrenzing van de schijf zijn duidelijk herkenbaar. De taartpunt is op het middelpunt van de cirkel gesitueerd. De overige gebouwen van de maquette zijn ook getekend. Als in figuur 14 geen aanduiding over de gebouwhoogte wordt gegeven, is het gebouw laag. De twee lijnen, die de tekening boven en onder begrenzen, stellen de tunnelwand voor.

Verder zijn in figuur 14 de 'windrichtingen' gedefinieerd. Een pijl geeft aan waar de wind vandaan komt. In de getekende situatie is de windrichting 0° . Een andere windrichting wordt verkregen door de schijf een aantal graden te draaien. De positieve richting is tegen de klok in. De vier belangrijkste richtingen zijn aangegeven.

De taartpunt komt op een aparte schijf te staan, waar de meetapparatuur aan bevestigd kan worden. Dit wordt straks nog toegelicht. In figuur 14 is deze schijf gedeeltelijk te zien.

In figuur 15 een plattegrond van de gehele tunnel te zien. De schijf, waar de maquette op staat, en het middelpunt ervan zijn aangegeven. Voor de meetsectie ligt een voorland bestaande uit latjes van 50 mm hoog volgens de methode Jensen. De latjes worden zig-zag op de tunnelbodem geplaatst, met de uiteinden tegen elkaar. In figuur 15 is de lay-out in de tunnel weergegeven. Het voorland is 6 meter lang en bevat 20 latten. De plankjes worden geacht realistische turbulentie op te wekken. Dit zal gecontroleerd worden in paragraaf 3.4.2.

Om het windprofiel te kunnen meten, is gebruik gemaakt van een gloeidraad-anemometer. Deze wordt tussen het laatste latje en de meetsectie in geplaatst door middel van een statief. In figuur 15 is de locatie aangegeven. Met de gloeidraad kan zeer nauwkeurig de variatie in de windsnelheid worden gemeten, hetgeen voor het berekenen van de turbulentie en het bepalen van de spectra belangrijk is. De werking ervan berust op het feit, dat de weerstand van het draadje verandert als de temperatuur afneemt. De langsstromende lucht laat de anemometer afkoelen, waardoor het spanningsverschil over de draad verandert als er een elektrische stroom doorheen loopt.

De ijking van de draad is hierop gebaseerd. Bij een aantal windsnelheden wordt het spanningsverschil gemeten, waarna een verband tussen de twee grootheden kan worden bepaald. De ijknelheid wordt bepaald met een pitot-buis.

Met behulp van een zogenaamd Data Acquisitie Systeem (DAS) wordt het analoge signaal van de gloeidraad digitaal gemaakt. Een meetprogramma, dat door ir. Crommelin, medewerker van de afdeling Binnenmilieu van TNO, is geschreven, bewerkt dit signaal verder. Dit programma berekent uit een serie metingen het gemiddelde, de standaard-afwijking en desgewenst het histogram.

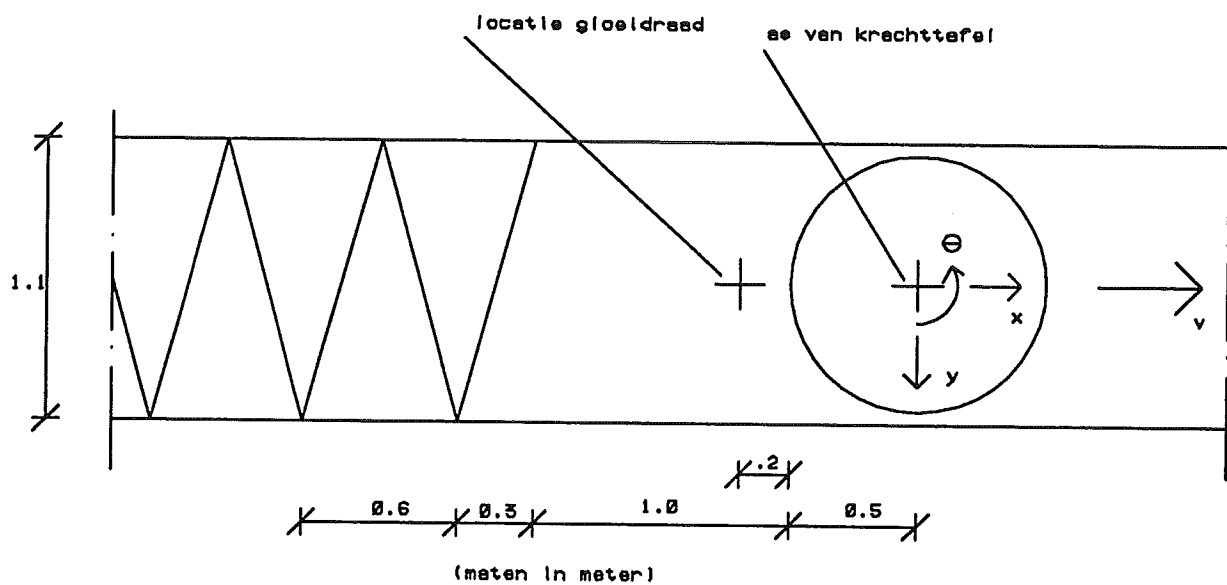


fig.14 Plattegrond van de tunnel

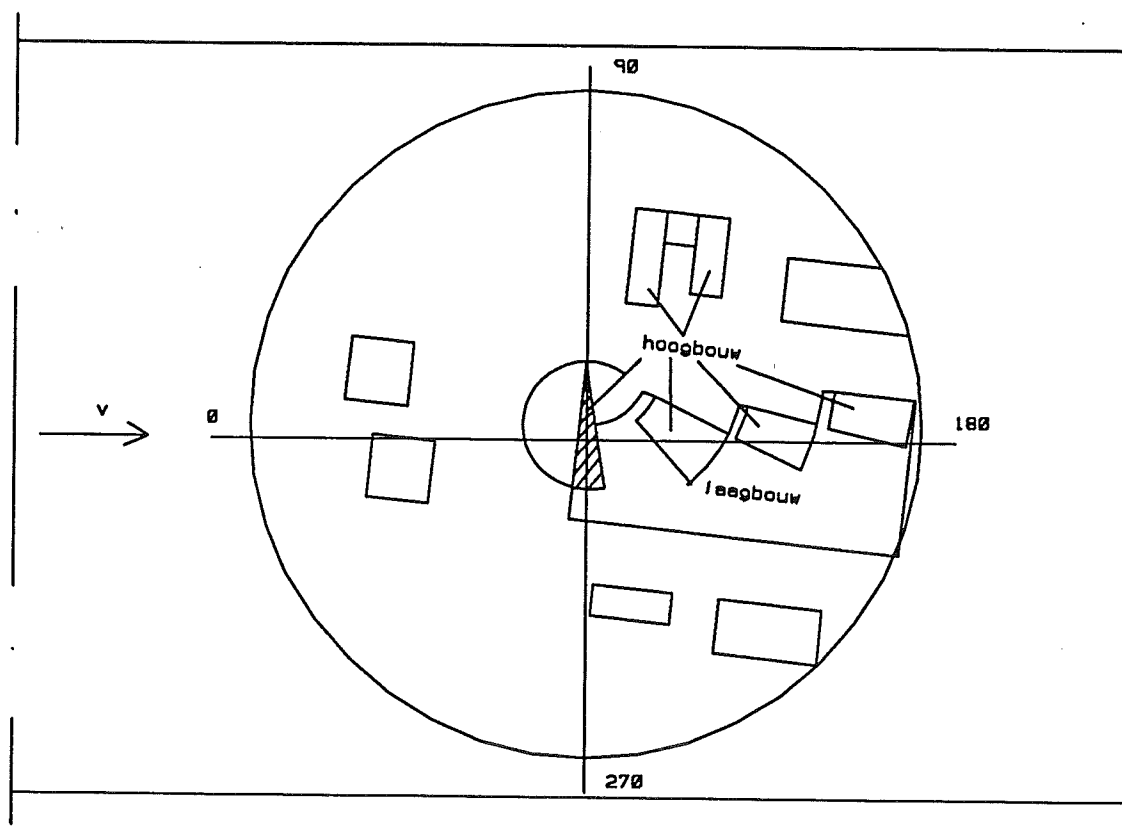


fig.15 Plattegrond van maquette en windrichtingen

Dankzij dit programma kan ook de turbulentie-intensiteit worden berekend, want deze volgt uit

$$(3.1) I(z) = \frac{\sigma_v(z)}{\mu_v(z)}.$$

Het spectrum van de windsnelheid kan echter niet met behulp van het DAS en de daarvan afhankelijke software worden bepaald. Daarvoor wordt een ander stukje electronica gebruikt, namelijk de Structural Dynamics Analyzer (SDA). Dit apparaat is in staat om uit het analoge signaal van de gloeidraad het spanningsspectrum te bepalen. Bij relatief kleine turbulentie mag de ijkcurve als lineair rondom de gemiddelde snelheid worden beschouwd. Dit houdt in, dat de relatie tussen spanning en snelheid in dit gebiedje ook lineair is. Het windsnelheidsspectrum kan daarom direct uit het spanningsspectrum bepaald worden.

Voor het bepalen van de krachten en de torsie op het gebouw worden meettafels gebruikt. Deze tafeltjes bestaan uit twee stijve plaatjes ($d=10$ mm) met daartussen dunne strippen ($d=1$ mm) met rekstrookjes. De rekstrookjes worden in een brug van Wheatstone geplaatst.

Een versterker vormt de stroombron voor de brug van Wheatstone van de beide meettafeltjes en geeft een bronspanning van 6 V. Hij vergroot het spanningsverschil over de brug duizendmaal. Dit is nodig, daar met name de torsie-tafel een brugspanning in de orde van microvolts heeft. Dit is kleiner dan het DAS nauwkeurig kan meten. Die grens ligt bij circa 10^{-5} V. Het versterkte signaal wordt weer op dezelfde wijze verwerkt als bij de gloeidraad.

Afhankelijk van de plaatsing van de strookjes in de brug kan er een moment of een kracht mee worden gemeten. In dit onderzoek is er de beschikking over twee tafeltjes, één voor moment en één voor kracht. Hiermee kunnen alle krachten en momenten, die in het meetplan (par. 3.1.2) zijn genoemd, worden gemeten. De krachten moeten in twee meetsessies worden bepaald. Door de dwarskrachtentafel 90 graden te draaien, wordt in een andere richting gemeten.

Om iets te kunnen meten, moeten op een of andere manier de meettafels aan de aarde worden bevestigd. In bijlage 3.2 zijn een aantal tekeningen afgedrukt, waarin te zien is hoe dit is opgelost. Een houten balk $b \times h = 67 \times 90$ mm² is loodrecht op de windrichting onder de tunnelvloer geplaatst. Door middel van een tandoplegging is de balk verbonden aan de regels, die de tunnelvloer dragen. De torsietafel is aan de balk bevestigd door middel van 4 houtschroeven. Om de verbinding tussen de twee tafels te realiseren is een hulpprofiel ontwikkeld in de vorm van een L. Hierop rust de krachttafel.

Op de dwarskracht-tafel is een schijf met een diameter van 200 mm bevestigd. Zie ook het aanzicht 1:1 in bijlage 3.2. Daar boven komt een identieke schijf, die om de onderste draait. Op deze wijze kan de taartpunt met de rest van de maquette mee draaien. Het gebouw is zodanig op de schijf gezet, dat de as van de D-tafel op de halve breedte van de taartpunt ligt. Dit is voor berekeningen het aangrijpingspunt van de gemeten kracht. In figuur 2 is dit punt herkenbaar als het middelpunt van de grote schijf.

Op de tekening schaal 1:1 is te zien dat er wat speling tussen de grote en kleine cirkel zit. Die zorgt ervoor, dat alleen de belasting op de taartpunt wordt gemeten. Als er geen tussenruimte zou zijn, zou de totale belasting op de grote schijf worden gemeten.

In figuur 16 zijn grafisch de relaties tussen de hiervoor genoemde apparaten weergegeven. In het schema zijn vier nivo's te onderscheiden. De bovenste laag bevat de meetapparatuur. Direct daaronder bevindt zich een aantal hulpmiddelen, zoals de versterker.

In de derde laag staan een drietal apparaten, die een controlerende functie hebben. De schakelaar bepaalt welke grootte er gemeten wordt: snelheid, kracht of moment. De W-regelaar

controleert de stroomsterkte naar de motor met een groot wiel. Hiermee kan dus het vermogen van de propeller geregeld worden. Dit is weer afhankelijk van de gewenste snelheid in de tunnel. De windsnelheid wordt in de gaten gehouden via een drukmeter, die gekoppeld is aan de pitot- buis.

Tenslotte staan in de onderste laag de apparaten, waarmee de gegevens worden bewerkt.

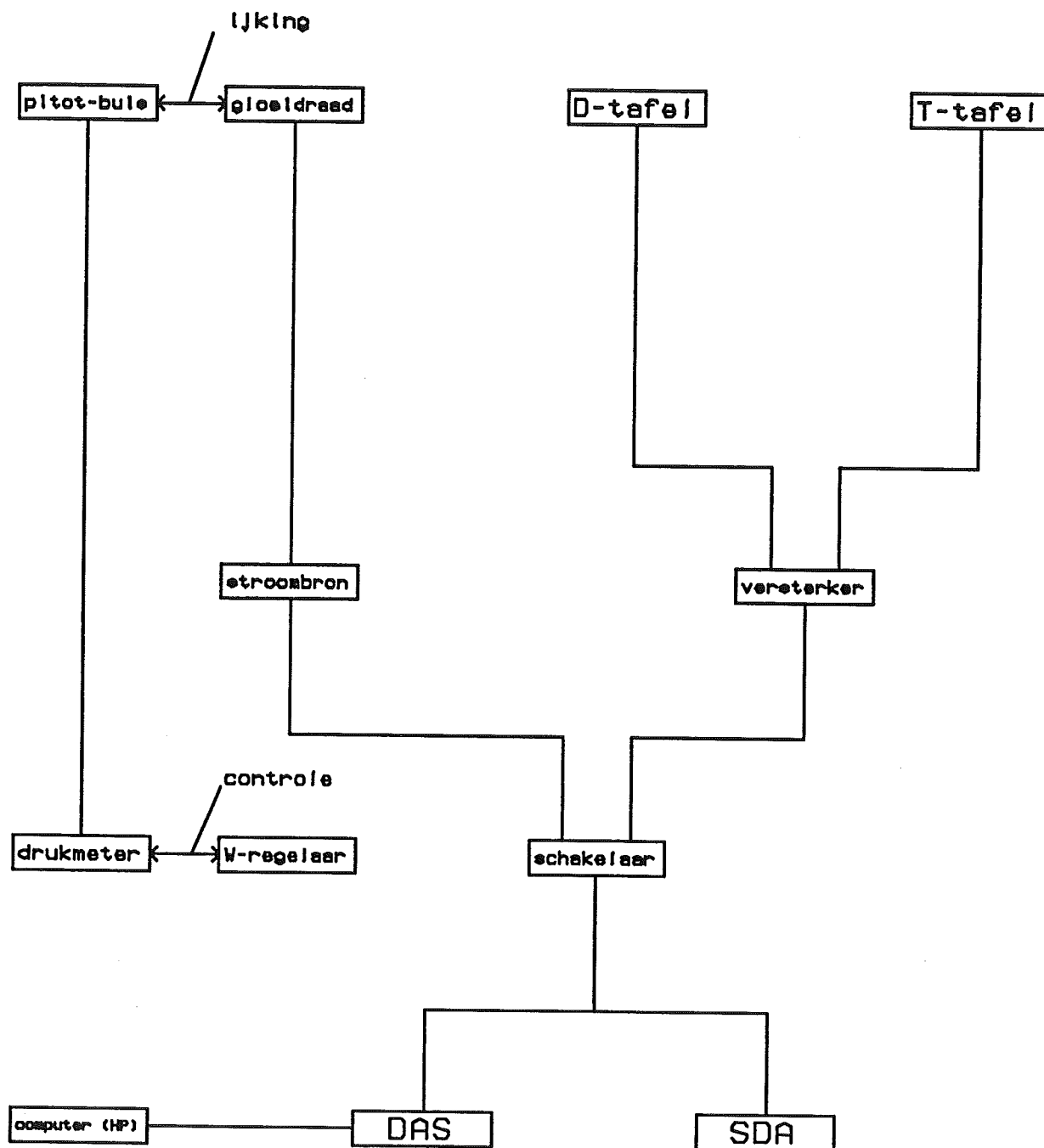


fig. 16 Relaties tussen de meetapparatuur

3.3 IJking apparatuur

3.3.1 IJking gloeidraad

Om de gloeidraad te kunnen ijken, zijn een aantal metingen gedaan tussen 5 en 13 m/s. Als de windsnelheid in het voorland 10 m/s bedraagt, zullen de snelheden ter plaatse van de meetsectie zich in dit interval bevinden. De gloeidraad is in de directe omgeving van de opening van de pitotbuis geplaatst. Aan de hand van het drukverschil, dat met de drukmeter wordt afgelezen, kan vrij nauwkeurig de windsnelheid worden bepaald. Tevens wordt de spanning over de gloeidraad bepaald.

Op deze wijze wordt een aantal paren getallen gevonden, die in bijlage 3.3 in tabelvorm zijn verzameld. De snelheid varieert van 5,3 tot 12,9 m/s en de spanning van 1,55 tot 2,83 V. De windsnelheid is bepaald uit het drukverschil volgens:

$$(3.2) v = \sqrt{2 p/\rho} .$$

In de laatste kolom van de bijlage is het spanningsverschil uitgezet. Dit is als volgt gedefinieerd:

$$(3.3) \Delta V = V - V_0 .$$

V_0 in formule (3.3) stelt de spanning over de gloeidraad voor als de windsnelheid nul is. Vervolgens moet een relatie worden gevonden tussen v en ΔV , de zogenaamde ijkcurve . Er wordt gebruik gemaakt van ΔV , daar dit betrouwbaardere resultaten geeft. Systematische variaties in de spanning worden op deze wijze weggewerkt.

Om de relatie te vinden zijn de data uit de tabel uitgezet in een grafiek (zie figuur 17). Zo op het eerste gezicht vormden de meetpunten een tweedegraads polynoom. Uit de documentatie van de fabrikant van de gloeidraad bleek, dat voor het gebied rond 10 m/s inderdaad een tweedegraads-functie kon worden verwacht. Met behulp van een iteratief rekenprogramma zijn de coëfficiënten van deze polynoom bepaald. Het resultaat is de volgende vergelijking:

$$(3.4) v = 21,397(\Delta V)^2 - 27,067\Delta V + 12,641 [m/s] .$$

Op de volgende pagina is de ijkgrafiek in figuur 17 afgebeeld met de meetpunten als punten en een lijn volgens (3.4). De ijkcurve is vervolgens gebruikt in het meetprogramma om de gemiddelde snelheid en de standaard-afwijking te berekenen.

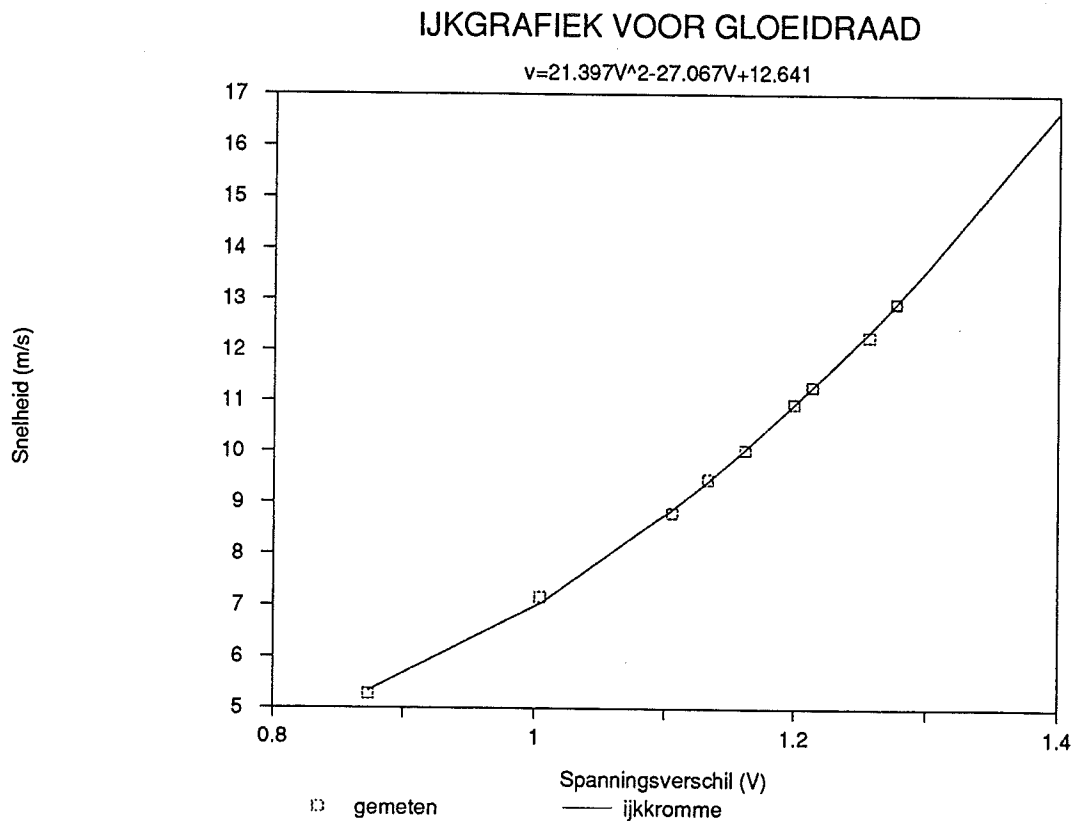
Het grootste verschil tussen gemeten en berekende waarde van de snelheid is 0,1 m/s bij $\Delta V = 1,006$ V. De fout bedraagt dan:

$$(3.5) \Delta v = \frac{7,165 - 7,066}{7,165} \cdot 100\% = 1,4\% .$$

Dit is nauwkeurig genoeg.

3.3.2 IJking nieuwe gloeidraad

Oorspronkelijk werd gebruik gemaakt van een gloeidraad met een dikte van 10 μm . Na enige tijd werd overgegaan op een draadje van 5 μm . Het vermoeden bestond, dat de oude ijkkromme nog steeds kon worden gebruikt, als het spanningverschil over de nieuwe draad met twee werd vermenigvuldigd. Door een aantal metingen over te doen, werd al snel duidelijk, dat dit vermoeden juist was. Zie de tabel in bijlage 3.3. Hierin is de oude en nieuwe spanning over de draad uitgezet. In de laatste kolom staat de verhouding van de twee waarden. Uit de gemiddelde verhouding is de vermenigvuldingsfactor bepaald op 2.094 bij een $V_0=0,739$ V.



3.3.3 IJking dwarskrachttafel

De dwarskrachttafel is geijkt met behulp van een gewicht, dat een kracht van 10,0 N op de tafel geeft. De tafel is aan één kant ingeklemd in een bankschroef. Onbelast is er een spanningverschil van -0,092 mV over de brug van Wheatstone bij een bronspanning van 5 Volt. Door de ijkkraft loopt dit op tot -1,267 mV. De ijfactor is dus:

$$(3.6) s_D = \frac{|\Delta V|}{D} = \frac{|-1,267 + 0,092|}{10,0} = 0,117 \text{ mV/N.}$$

Indien een versterker voor het signaal wordt gebruikt moet s_D aangepast worden. De ijking is opnieuw uitgevoerd en geeft in dat geval

$$(3.7) s_D = \frac{\Delta V}{D} = \frac{|-0,932+0,0036|}{10,0} = 0,0928 \text{ V/N.}$$

3.3.4 IJking torsietafel

De torsietafel wordt ook met behulp van een gewicht geijkt. De tafel wordt weer aan één kant gefixeerd in een bankschroef. De arm van de kracht $F=10,0 \text{ N}$ ten opzichte van het hart van de torsietafel is 79 mm . In onbelaste toestand wordt een spanningsverschil (na versterking) van $0,0455 \text{ V}$ gevonden. Na belasten geeft de torsietafel $-0,0293 \text{ V}$, dus de ijfactor wordt

$$(3.8) s_T = \frac{\Delta V}{M} = \frac{|-0,0293-0,0455|}{10,0 \cdot 0,079} = 0,0947 \text{ V/Nm.}$$

De torsie-tafel wordt altijd met versterker gebruikt, daar het oorspronkelijke signaal te zwak was. Met de versterker kan de signaal-ruis verhouding sterk verbeterd worden.

3.4 Resultaten

3.4.1 Bepalen van windsnelheidsprofiel

De metingen voor het profiel zijn gedaan in het midden van de tunnel. De apparatuur is ongeveer een halve meter voor de bebouwing op de cirkel opgesteld. Zie ook figuur 2. Met behulp van de gloeidraad zijn op dit punt op diverse hoogtes de gemiddelde snelheid en de standaardafwijking daarvan bepaald.

Eerst is vastgesteld hoeveel metingen nodig zijn om een nauwkeurige waarde af te lezen. Hiertoe werd de gloeidraad gefixeerd op 300 mm. Begonnen werd met $n=100$ metingen. Het gemiddelde bleek dan te fluctueren. De hoeveelheid werd opgevoerd tot bij $n=2000$ metingen bleek, dat het gemiddelde nagenoeg constant bleef. Dit is verder aangehouden. De sample-frequentie bedraagt bij het D.A.S. ongeveer 19 Hz, dus één meting duurt 105 seconden. In bijlage 3.4.1 staat het resultaat van de metingen. Van 0 tot 250 mm is om de 25 mm gemeten vanwege de grote variatie in de snelheid. Daarboven is de wind vrij constant en is om de 100 mm gemeten.

De druk bij de pitot-buis is constant gehouden op 60 Pa. De meetgegevens zijn in figuur 18 geplot (blokjes). Bestudering van het plaatje leert, dat drie gebieden te onderscheiden zijn:

1. 0-75 mm chaotisch
2. 75-300 mm grenslaag
3. 300-600 mm vrije stroming

Het eerste gebied, tot 75 mm, is chaotisch. Hier is geen enkel verband te ontdekken tussen hoogte en luchtsnelheid. Dat is ook niet zo verwonderlijk, want de latjes, die de turbulentie veroorzaken zijn 50 mm hoog. De laatste plank was ongeveer een meter van de meetopstelling verwijderd. Blijkbaar is de verstoring ter plaatse van de gloeidraad nog zo groot, dat de meetresultaten zo laag bij de grond niet erg relevant zijn.

Het tweede gebied daarentegen is wel relevant. Aan het snelheidsverloop te zien betreft dit de nagebootste grenslaag in de atmosfeer. Uit de literatuur (dictaat b15) is bekend, dat deze grenslaag door zowel een logaritme als een machtsfunctie kan worden beschreven. Voor het logaritme wordt voorgesteld:

$$(3.9) \quad v(z) = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right), \text{ met}$$

- d = gemiddelde hoogte van de bebouwing,
- u^* = schuifspanningsnelheid,
- z = hoogte,
- z_0 = ruwheidslengte,
- κ = von Karman constante met de waarde 0,4.

De gemiddelde gebouwhoogte is ongeveer 75 mm. u^* en z_0 moeten zodanig worden bepaald, dat de gevonden functie goed aansluit bij de gevonden waarden. u^* is eenvoudig te bepalen, door de meetwaarden enkel-logaritmisch uit te zetten. Door de meetpunten wordt vervolgens een lijn getrokken, die zo goed mogelijk aansluit bij de metingen. Uit de helling ervan volgt dan u^* . In dit geval kan worden bepaald:

$$(3.10) \quad u^* = 0,4 \frac{10,2-6,0}{\ln(300-75)-\ln(100-75)} = 0,76.$$

Vervolgens wordt z_0 gevonden door invullen. De ruwheidslengte blijkt dan 1 mm te zijn. Voor de grenslaag geldt dus:

$$(3.11) v(z) = 1,9 \ln(z-75) .$$

Het is gebruikelijk om het machtsprofiel als volgt te formuleren:

$$(3.12) v(z) = v_{10} \left(\frac{z-d}{h_0} \right)^\alpha , \text{ met}$$

$h_0 = 10$ meter, oftewel $10000/350 = 28.57$ mm;

v_{10} = snelheid op 10 meter.

$$(3.13) \alpha = \frac{1}{3,3 - 0,9 \ln z_0} = \frac{1}{3,3 - 0,9 \ln 0,35} = 0,235.$$

De formule (3.13) (uit [31]) is empirisch bepaald en geeft de relatie tussen de macht α en de ruwheidslengte z_0 , waarbij voor de ruwheidslengte 0,35 m moet worden ingevuld.

De snelheid op 10 meter kan nu ook bepaald worden door enkele waarden in te vullen. V_{10} blijkt dan 6,28 m/s te zijn. Het machtsprofiel sluit echter minder goed aan bij de meetwaarden. Daarom gaat de voorkeur uit naar (3.11). Het windprofiel dat gevonden is, komt overeen met de snelheidsverdeling voor een gemiddelde bebouwing. [31]. Dit is een bevredigend resultaat. Blijkbaar is de verdeling van de windsnelheid goed gemodelleerd.

Het laatste gebied ligt bovenin de tunnel vanaf circa 300 mm. De snelheid van de lucht stabiliseert zich, de turbulentie neemt af tot minder dan 1% . Hiervoor is een rechte lijn aangenomen volgens:

$$(3.14) v = 9,81 + 0,0016z ; z > 300 \text{ mm}.$$

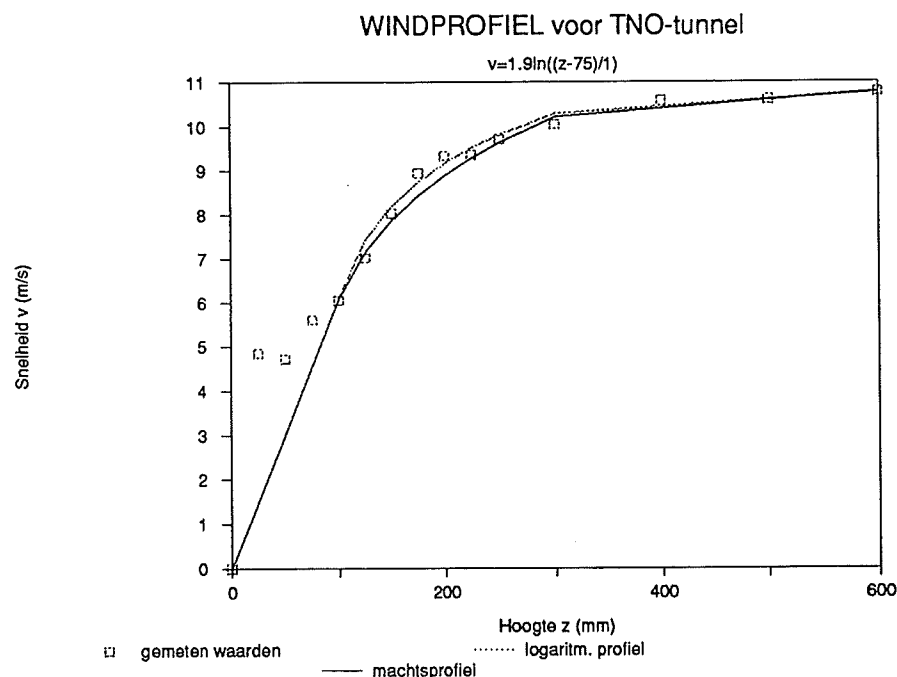


fig.19 Windprofiel voor TNO-tunnel

3.4.2 Turbulentie

Tegelijkertijd met de meting van de gemiddelde snelheid is ook de standaard-afwijking met behulp van het DAS berekend. Het quotiënt van deze twee waarden wordt de turbulentie-intensiteit genoemd:

$$(3.15) I(z) = \frac{\sigma_v(z)}{\mu_v(z)}.$$

In figuur 19 zijn de meetpunten uitgezet. Uit het plotje blijkt, dat de turbulentie tot 100 mm sterk fluctueert. Dit komt overeen met het chaotische gebied dat bij het snelheidsprofiel naar voren kwam. Boven de 100 mm neemt de turbulentie zeer snel af. Wederom is naar een functie gezocht, die zo goed mogelijk bij de meetpunten aansluit. Alleen een machtsfunctie bleek te voldoen, wat de volgende turbulentie-intensiteit geeft:

$$(3.16) I = 2.697 \left(\frac{z}{28.57} \right)^{-2}; z \geq 100 \text{ mm}.$$

De waarden zijn bepaald op de wijze, die in paragraaf 3.4.1 is beschreven. Vergelijking met literatuur was nu niet goed mogelijk, daar de turbulentie te snel afnam. Normaal gesproken zou de macht in de orde van -0.2 moeten liggen [31]. Voor de duidelijkheid is dit machtsprofiel volgens de literatuur afgebeeld in figuur 19. Het verschil is groot, met name wat hoger in de tunnel.

De turbulentie is dus niet goed gemodelleerd. Voor de krachten, die gemeten worden, is dit niet zo belangrijk, daar deze vooral door de gemiddelde component van de windsnelheid worden bepaald. De wringing daarentegen is sterker afhankelijk van de turbulentie. Het verschil over de hoogte van de taartpunt ($0 < z < 200$ mm) tussen gemeten turbulentie en de waarden volgens de literatuur is gemiddeld 41 %.

Het is niet helemaal duidelijk wat de fout door de te lage turbulentie in de berekende waarden voor C_t is. Volgens Blessmann en Riera heeft de turbulentie bij gegroepeerde hoogbouw weinig invloed op de hoogte van de torsiecoëfficiënt [8]. Zij stellen, dat de invloed van het nabij gelegen hoge gebouw op de stroming van de lucht om de beschouwde toren zo groot is, dat de turbulentie weinig invloed meer heeft. Of dit echter ook voor dit onderzoek geldt, is niet met zekerheid te zeggen.

Er wordt daarom alleen vastgesteld, dat de turbulentie niet goed is gemodelleerd. Een schatting van de fout in C_t wordt achterwege gelaten.

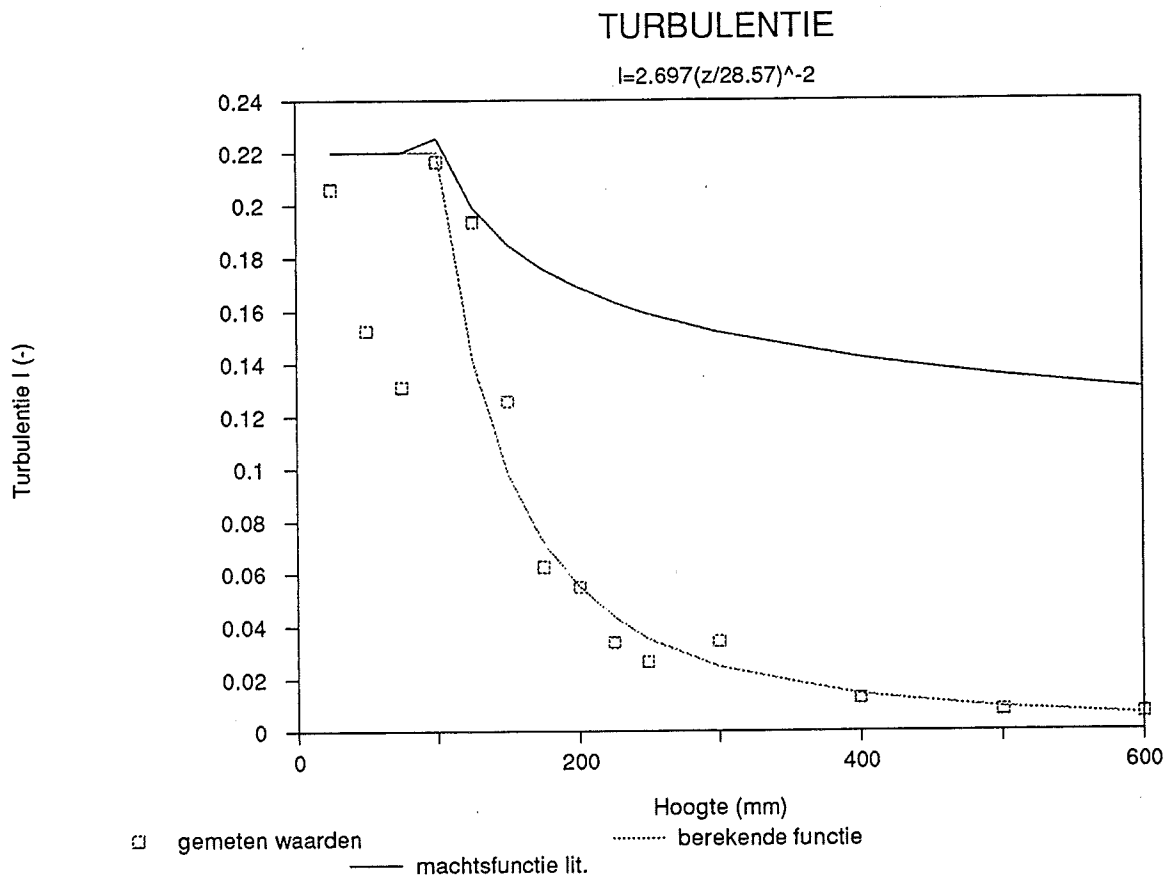


fig. 19 Turbulentie in TNO-tunnel

3.4.3 Spectra

Met behulp van de gloeidraad en de Structural Dynamics Analyzer (SDA) kunnen spectra worden gegenereerd, die uitgedrukt zijn in het spanningsverschil. In paragraaf 3.2 is uitgelegd, dat door de relatief kleine turbulentie uit het spanningspectrum met een lineaire transformatie het spectrum van de windsnelheid kan worden bepaald. De metingen zijn verricht op de plaats, waar het profiel van de snelheid en de turbulentie zijn bepaald. Het frequentie-bereik was 0-1600 Hz. De dunne gloeidraad is gebruikt met een spanning bij windstilte, die 0,884 V bedraagt. In bijlage 3.4.3 is in een plotje te zien hoe de snelheid in de tijd verloopt, zoals dit op een hoogte van 300 mm is gemeten. Uit dit zogenaamde time-record kan de SDA een spectrum berekenen. Als we het plotje nader beschouwen is duidelijk te zien, dat de spanning varieert binnen een zekere bandbreedte met een gemiddelde van circa 1.448 V. Met behulp van de ijkcurve kan worden bepaald, dat dit overeenkomt met een snelheid van 9,95 m/s. Dit komt goed overeen met de gegevens uit bijlage 3.4.1.

In de bijlage zijn tevens de spectra, zoals die op 100, 200, 400 en 600 mm zijn gemeten, weergegeven. Voor 100 mm zal kort worden aangegeven hoe voor het gemeten spectrum een

machtsfunctie kan worden gevonden, die goed aansluit bij de meetwaarden. Bij de andere hoogten worden alleen de resultaten genoemd.

$h=100\text{ mm}$

De logaritmische x-as van het plotje loopt van 12,5 naar 1600 Hz. De frequenties onder de 12,5 Hz bleken geen relevante informatie te geven en zijn weggelaten. De spanningen zijn verticaal uitgezet met een logaritmische schaal (dB). Uit het plotje is duidelijk te zien, dat de afname van het spectrum op het dubbel-logaritmisch papier vrijwel volgens een rechte lijn verloopt. Dit betekent, dat de spanning en frequentie volgens een machtsfunctie aan elkaar zijn gerelateerd.

Uit de helling van de zogenaamde beste rechte, de lijn die het best aansluit bij de meetwaarden, volgt, dat de macht van de genoemde functie -1,77 moet zijn. Door vervolgens een punt op de lijn te nemen, kan de constante factor worden berekend en wordt het spanningsspectrum gevonden:

$$(3.17) S_{vv}(f)=6,9427 \cdot 10^{-3} \cdot f^{1,77}.$$

Door de ijkcurve te lineariseren rondom de gemiddelde snelheid kan het spectrum van de windsnelheid worden bepaald. Er geldt dan namelijk:

$$(3.18) S_{vv}(f)=aS_{vv}(f),$$

als a de richtingscoëfficiënt is van de raaklijn aan de ijkcurve bij de gemiddelde snelheid. De afgeleide van de ijkcurve is

$$(3.19) v'=43,784V-27,067.$$

Op 100 mm was een snelheid van 6,047 m/s gemeten, hetgeen overeenkomt met een spanningsverschil over de draad van 1,723 V. Uit de afgeleide kan berekend worden, dat $a=50,192\text{ Vs/m}$. Het spectrum van de windsnelheid is dus:

$$(3.20) S_{vv}(f)=0,3485 \cdot f^{1,77}.$$

$h=200\text{ mm}$

$$(3.21) S_{vv}(f)=0,08805 \cdot f^{1,78}.$$

$h=400\text{ mm}$

$$(3.22) S_{vv}(f)=3,75113 \cdot 10^{-4} \cdot f^{1,23}.$$

$h=600\text{ mm}$

$$(3.23) S_{vv}(f)=1,5483 \cdot 10^{-5} \cdot f^{0,78}.$$

De spectra bevestigen de resultaten van paragraaf 3.4.1 en 3.4.2. Bij het bepalen van het windprofiel was gevonden, dat de grenslaagstroming op ongeveer 300 mm boven de bodem

van de tunnel beïndigd wordt en overgaat in een laag-turbulente stroming. Dit betekent, dat tot 300 mm een grenslaag-spectrum moet worden gevonden. In de literatuur [o.a. 31] worden een aantal functies voorgesteld om dit spectrum voor een gemiddelde bebouwing van het aardoppervlak te beschrijven. Kenmerkend voor deze functies is, dat ze afnemen met $f^{-1,67}$ en de vorm niet afhankelijk is van de hoogte. Voor $h=100$ en 200 mm wordt praktisch dezelfde waarde voor de macht gevonden, namelijk $-1,77$. De vorm van het spectrum verandert inderdaad niet met de hoogte. De macht $-1,77$ komt redelijk goed overeen met de condities in de atmosfeer (6% afwijking). Boven de 300 mm is te verwachten, dat de spectra niet meer overeenkomen met de functies uit de literatuur. Op 400 en 600 mm blijkt de macht inderdaad afgenomen te zijn tot $-1,23$ respectievelijk $-0,78$. Deze twee spectra zijn tevens een bevestiging van de slechte modellering van de turbulentie bovenin de tunnel.

3.4.4 Krachten

In twaalf verschillende windrichtingen zijn de krachten F_x en F_y bepaald. De kracht F_x werkt in de richting van de wind, F_y loodrecht erop. (Zie ook het assenstelsel in figuur 15.) Net zoals bij de metingen bij de gloeidraad is eerst bepaald hoeveel metingen nodig waren voor een betrouwbaar resultaat. Eerst werd gevonden $n=2000$, later bleek $n=1000$ ook voldoende te zijn. De onderdruk in de tunnel bedroeg ter plaatse van de pitot-buis gemiddeld 60 Pa. De vrije snelheid in de tunnel was dus gemiddeld 10 m/s.

In bijlage 3.4.4 zijn de resultaten van de metingen afgedrukt. F_x is bepaald met $n=2000$. Ter controle van de eerste meting is dit twee maal herhaald, zodat uiteindelijk $n=6000$. De gemeten krachten zijn omgerekend naar een dimensieloze coëfficiënt C_x . Deze is als volgt gedefinieerd:

$$(3.24) \quad C_x = \frac{F_x}{p_w b h}.$$

De kracht F_x kan berekend worden met behulp van de ijkfactor

$$(3.25) \quad F_x = \frac{\Delta V}{s_D} \cdot (V_0 = 1,562 \text{ mV})$$

Voor de ijkfactor moet hier $0,117$ mV/N worden toegepast. De afmetingen van de taartpunt zijn $b \times h = 200 \times 200 \text{ mm}^2$. De stuwdruk p_w wordt ter plaatse van het dak bepaald. Met behulp van de daar gemeten snelheid, $9,40$ m/s, kan worden berekend dat

$$(3.26) \quad p_w = \frac{1}{2} \rho v^2 = 0,5 \cdot 1,29 \cdot 40^2 = 53,02 \text{ N/m}^2.$$

In bijlage 3.4.4 is in een aantal stappen C_x bepaald. Eerst is ΔV bepaald, daarna de kracht F_x , waaruit C_x volgt. In figuur 20 is een grafiek afgebeeld, waarin C_x tegen de windrichting is uitgezet. De definitie van de richtingen is in figuur 15 te vinden.

In de grafiek zijn de 2,5% boven- en ondergrens aangegeven. Deze zijn bepaald met behulp van de standaard afwijking:

$$(3.26) \quad C_{x,extr} = \mu_C \pm 2\sigma_C$$

De gemiddelde waarde van C_x is niet hoger dan 0,86. Dit maximum wordt voor nul graden bereikt. Dit was ook te verwachten, want dit is de windrichting, waarin het gebouw direct getroffen wordt door de wind. Ook bij 180 en 210 graden is C_x hoog. Echter, door de beschutting van de andere hoogbouw in deze windrichtingen ligt dit maximum lager.

Voor de kracht loodrecht op de windrichting, F_y , is hetzelfde gedaan als hiervoor is beschreven. Alleen de ijkfactor is anders, daar nu een versterker is toegepast. Deze wordt nu $s_D=92.8$ V/N. Om hetzelfde aantal metingen als bij de kracht in x-richting te krijgen zijn 6 maal $n=1000$ metingen gemaakt. De resultaten zijn in de bijlage te vinden.

In figuur 21 is de grafische presentatie van een en ander te vinden. In dit plaatje zijn een drietal lijnen te zien. Ten eerste C_x , die al behandeld is. Vervolgens de lijn voor C_y . Duidelijk is te zien, dat over alle windrichtingen gezien C_y nul is, maar pieken kent tot 0,35 voor de afzonderlijke richtingen. De derde lijn geeft de coëfficiënten voor de resulterende kracht op het gebouw.

Als het verloop van C_{tot} en C_y worden vergeleken, valt het op, dat de maxima in de totale kracht meestal gepaard gaan met een kleine kracht loodrecht op de windrichting. De verklaring hiervoor is, dat in deze gevallen (0, 180 en 360 graden) de windrichting loodrecht op de symmetrie-as van het gebouw staat. Hierdoor zal de resulterende kracht in de y-richting klein zijn, daar door de symmetrie een deel van de belasting loodrecht op de windrichting wegvalt.

De variatie in de metingen is al ter sprake gekomen bij C_x . In figuur 20 is immers de bandbreedte van het signaal weergegeven. Uit de meetgegevens kan berekend worden dat voor de maximale stuwdrukcoëfficiënt (0°) de variantie 0,173 bedraagt. Gezien de hoge turbulentie, die tot zo'n 150 mm varieert van 0,13 tot 0,22, is deze fluctuatie in de kracht in de windrichting te verwachten. Loodrecht op de wind wordt voor de variantie 0,157 gevonden bij 120 graden, de richting met de maximale C_y . Dit ligt wederom in de lijn der verwachtingen. De meetresultaten lijken daarom een getrouw beeld te geven van de windbelasting, die op het gebouw zal werken.

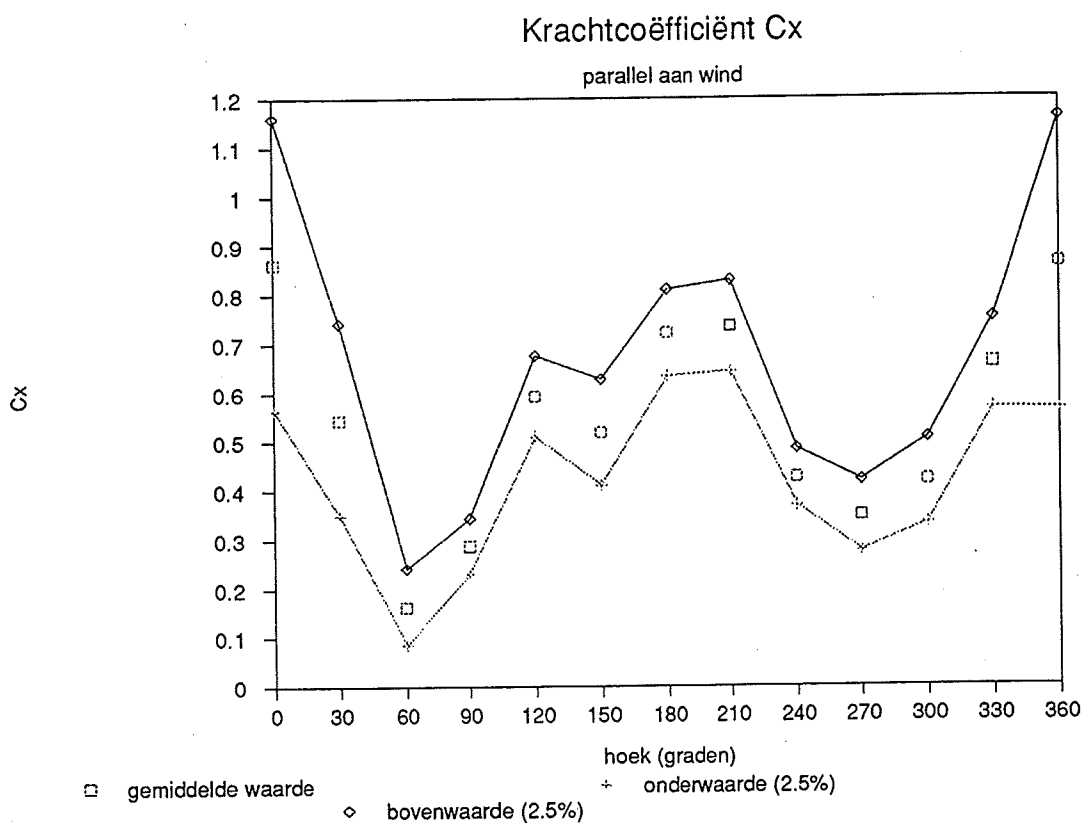


fig. 20 Coëfficiënt voor kracht in x-richting

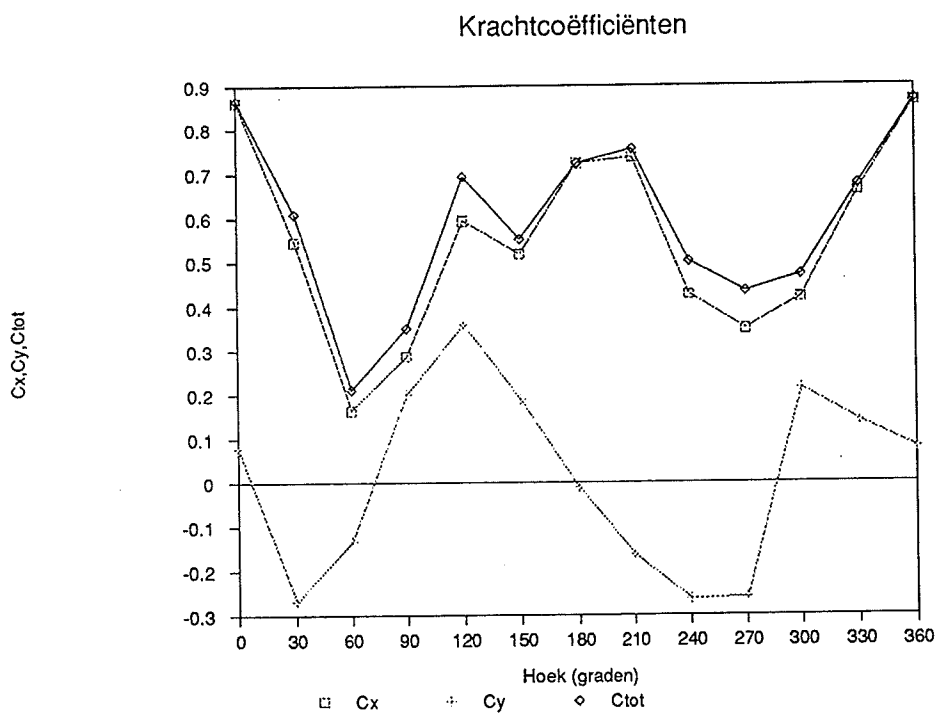


fig. 21 Krachtcoëfficiënten

3.4.5 Momenten

De laatste meetsessie betrof het bepalen van de torsie als functie van de windrichting. In de bijlage staan de meetresultaten voor de torsietafel. Hierbij dient opgemerkt te worden, dat de excentriciteit (e) tussen de twee tafels 65 mm bedroeg. Dat betekent, dat de gemeten torsie (M_t^*) uit twee componenten bestaat:

-het wringend moment om een as loodrecht op de dwarskrachttafel (M_t)

-het koppel $F_y \cdot e$.

In feite is alleen de eerste component interessant. De meetresultaten moeten dus worden omgerekend. Bij de gekozen richtingen geldt

$$(3.27a) M_t^* = M_t - F_y \cdot e$$

$$(3.27b) M_t = M_t^* + F_y \cdot e.$$

In de tabel (bijlage 3.4.5), waar de gemiddelde wringing en de standaard-afwijking staan afgedrukt is hiermee rekening gehouden. Voor σ_M geldt overigens

$$(3.28) \sigma_M = \sigma_{M^*} + \sigma_{F_y} \sqrt{e}.$$

De resultaten zijn weer grafisch weergegeven in figuur 22. Opvallend is, dat het (absolute) maximum nu niet bij 0 maar bij 30 graden ligt. Blijkbaar is het stromingspatroon rond het gebouw daar iets ongunstiger wat de wringing betreft als bij 0 graden. Verder is er een verrassend extreem bij 270 graden.

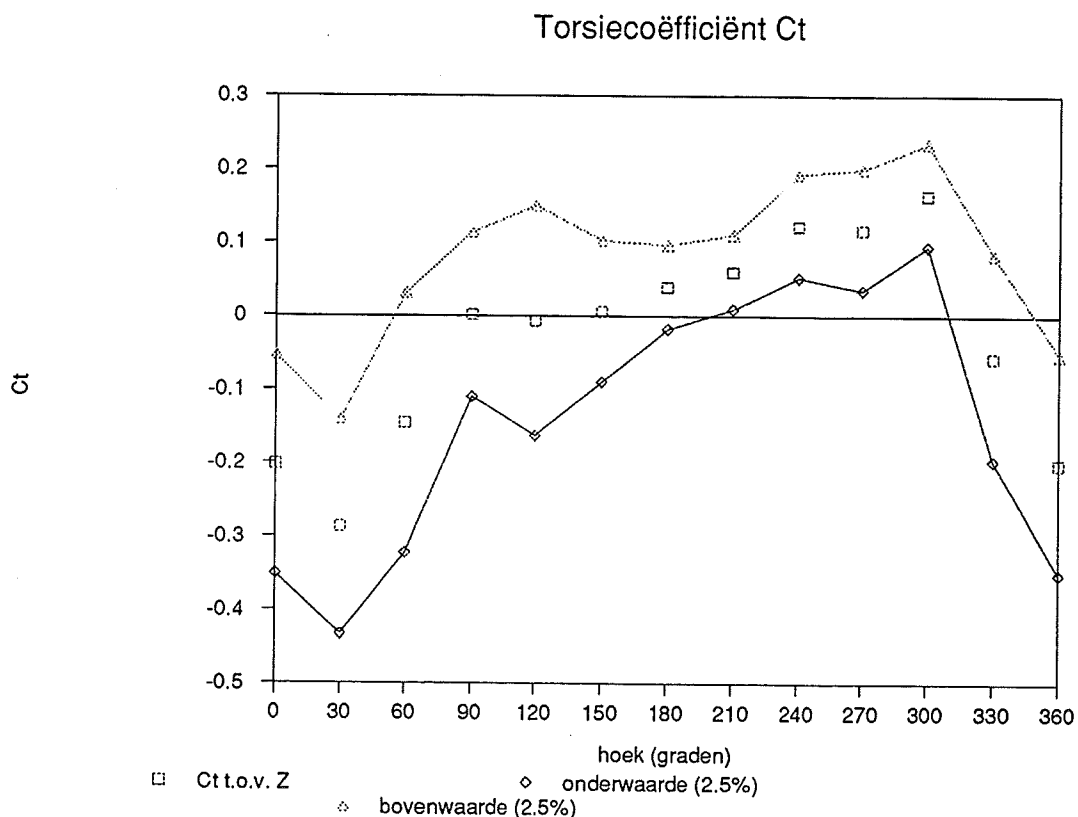


fig. 22 Torsiecoëfficiënt

Bij nader inzien is de hoge waarde van C_t hier te verklaren door het trechter-effect. De wind moet zich in deze richting tussen twee hoge gebouwen door wringen, waarbij de doorgang steeds smaller wordt. Dit is te vergelijken met een trechter. Het is bekend, dat de wanden van een trechter onderdruk ondervinden. Als de wind ter hoogte van de punt van het gebouw is aangekomen verwijdt de doorgang zich, zodat de gevel bij de punt op overdruk wordt belast. Dit verschijnsel levert een groot torderend moment op.

Tenslotte worden de resultaten aan de hand van de variantie gecontroleerd. Bij 30 graden is C_t absoluut gezien maximaal en wordt gevonden $\mu_0=0,255$. Dit is wel wat aan de hoge kant maar geeft toch nog voldoende vertrouwen in de resultaten.

3.5 Meetfouten

Door een aantal oorzaken wordt de nauwkeurigheid van de meting negatief beïnvloed. Helaas is geen van deze fouten systematisch, zodat er geen correctie op de meetwaarden mogelijk is. Wel zal in een aantal gevallen de procentuele fout aangegeven worden. Deze relatieve fouten geven een indruk van het interval waarin de waarden komen te liggen. Het volgende is gesignaleerd gedurende de meetsessies:

1. De tunnel is vrij licht geconstrueerd. De wanden bestaan uit ramen en de vloer en het plafond zijn uit meubelplaat gemaakt. De stijfheid ontleent de tunnel aan een aantal stalen raamwerken uit U-profielen (U47.80). Op zich is dit stijf genoeg, maar de meettafeltjes zijn zo gevoelig, dat bijvoorbeeld leunen tegen de tunnelwand al een spanningsverschil over de brug geeft.
2. De tunnel is slecht gefundeerd. De windtunnel staat in een hal op een aantal stalen kolommen. Deze dragen regels, waarover een houten vloer is gelegd. Op deze wijze is een soort tussenverdieping gecreëerd. De tunnel rust direct op de vloer, wat bijvoorbeeld te zien als langs de meetopstelling wordt gelopen. De apparatuur registreert dan een spanningsverschil.
3. De snelheid in de tunnel is niet constant. De ventilator wordt door een electro-motor aangedreven, maar in de aandrijving zit nogal wat wrijving. Af en toe hoor je de motor dan ook piepen. De onderdruk bij de pitot-buis is daarom niet constant. De gevonden variatie is circa 2 Pa bij een gemiddelde van 60 Pa. De vrije snelheid varieert dan van 9,83 tot 10,17 m/s. De onnauwkeurigheid in de snelheid bedraagt dus 1,7%.
4. Door de maquette neemt de dwarsdoorsnede in de tunnel af. De maximale blokkage is circa 50000 mm². Oftewel, de snelheden verhouden zich (debiet is constant):

$$(3.29) \frac{v_{\text{blok.}}}{v_{\text{pitot}}} = \frac{1098^2}{1098^2 - 50000} = 1.043.$$

Op zich is de 4,3 % hogere snelheid niet zo'n probleem. Met de gloeidraad kan alsnog de juiste snelheid worden bepaald. Dit is echter niet voor elke windrichting gedaan, terwijl de blokkage varieert als de maquette met de cirkel meedraait. De onnauwkeurigheid door dit effect kan worden afgeschat met 2%.

5. De fout in de ijkromme bedroeg 1,4 %. De snelheid zoals die met de gloeidraad is bepaald heeft dus een maximale afwijking van 1,4 %.

6. De verbinding balk-meettafel. De torsietafel is door middel van 4 houtschroeven verbonden met de houten balk, die de verbinding met het frame verzorgt. Bij het demonteren van de opstelling bestond de indruk, dat de schroeven niet voldoende gefixeerd waren. Het is mogelijk,

dat de voorgeboorde gaten iets te ruim waren, waardoor de schroefdraad onvoldoende grip had.

7. Een stukje van de laagbouw van het Beatrixkwartier ligt direct tegen de taartpunt aan en bevindt zich daarom ook op de schijf met diameter 200 mm. Bij het opbouwen is er naar gestreefd om geen krachten via deze laagbouw over te brengen door deze een paar millimeter op te tillen en aan de overige gebouwen vast te maken. Op deze wijze zweeft de laagbouw boven de meetschijf. In hoeverre dit voldoende is om krachtoverdracht te voorkomen is niet onderzocht.

8. De turbulentie is niet goed gemodelleerd.

Een aantal van de genoemde fouten, met name 1. en 2., zijn te ondervangen door de meting lang genoeg te laten duren. Bij deze meetfouten loopt de spanning over de brug na 'belasten' weer snel terug naar het oude niveau. Daarnaast is het zaak om tijdens de metingen niet te lopen, te leunen en dergelijke. Bij 3., 4., 5. en 8. kan een orde van grootte aangegeven worden van de relatieve fout. Bij 7. en 8. is dat niet mogelijk. Daarvan is het zowiezo onduidelijk of ze zijn opgetreden en zo ja wanneer. De nulmeting kan deze verschijnselen ondervangen, mits ze niet optreden tijdens een meting.

3.6 Vergelijking en Conclusies

De resultaten van het windtunnelonderzoek worden in deze paragraaf vergeleken met de Nederlandse norm NEN 6702 en kwantitatieve informatie uit onderzoek van Lythe en Surry (zie deel I, hoofdstuk 4 en 5).

De factor C_x en C_{tot} zijn maximaal voor de windrichting 0° . Daar C_y praktisch nul is, geldt hier bij benadering $C_{tot}=C_x=0,86$. Er wordt uitgegaan van de gemiddelden, daar in artikel 8.6.6.1 van NEN 6702 wordt gesteld, dat de windbelasting voor de krachtsverdeling in de constructie als quasi-statische belasting dient te worden beschouwd. Het fluctuerende deel, dat in σ_F tot uitdrukking komt, wordt niet meegenomen.

In bijlage 5.2 van deel I is al berekend, dat aan de hand van de tabel met stuwdrukken in NEN 6702 C_t voor de taartpunt kan worden bepaald op 0,069 [44]. Op dezelfde wijze kan worden berekend, dat $C_x=0,86$. De krachten in de windrichting komen dus goed overeen.

De maximale torsiecoëfficiënt bedraagt 0,287 in het windtunnelonderzoek, dus voor de wringing is een grote discrepantie tussen norm en modelonderzoek. Blijkbaar is de verdeling van de winddrukken, zoals die voorgesteld wordt in de norm te eenvoudig bij een verzameling hoge gebouwen, zoals die in het Beatrixkwartier voorkomt.

Het is interessant om te kijken of de ontwerpregel, die Lythe en Surry voorstellen, betere resultaten geeft [33]. Daarbij moet in gedachten worden gehouden, dat deze regel geen rekening houdt met interferentie-effecten, zoals in dit geval de nabij gelegen torens. Uit de tabel op pag. 30 van deel I kan het gemiddelde en het gemiddelde voor dit gebouw-type worden gehaald: $\mu_{C_t}=0,0937$ en $\sigma_{C_t}=0,0481$

De juiste torsiecoëfficiënt wordt gevonden als 4,0 maal de standaard-afwijking aan het gemiddelde wordt toegevoegd: $C_t=0,0937+4,0,0481=0,287$. Het resultaat van het windtunnelonderzoek wijkt dus nogal af van het gemiddelde van gebouw-type II. In tabel I is een en ander samengevat.

Tabel I Vergelijking coëfficiënten

bron:	C_t	C_x
Eigen onderzoek	0,287	0,86
NEN 6702	0,069	0,86
Lythe en Surry (gemiddeld)	0,0937	-
Lythe en Surry ($\mu + 4\sigma$)	0,287	-
Blessmann en Riera	0,27	0,66

Blijkbaar is het effect van naburige hoge gebouwen zo belangrijk, dat Lythe en Surry een grote onderschatting van de torsie op de taartpunt geven. Blessmann en Riera hadden dat reeds aangegeven voor twin towers [8]. Zij vinden voor twee vierkante torens een maximale $C_t=0,27$ als de ruimte tussen de gebouwen ongeveer de halve breedte bedraagt. Deze resultaten bevestigen de hoge waarden, die in dit onderzoek zijn gevonden voor de wringing. Ook hier is sprake van een kleine tussenruimte, zodat vergelijking geoorloofd is.

Concluderend kan gesteld worden, dat wat torsie betreft, zowel de norm weinig houvast biedt bij de bepaling van het wringend moment op het gebouw als gevolg van de windbelasting in het geval dat een aantal hoge gebouwen vlak bij elkaar staan. Bij de methode volgens Lythe en Surry kunnen interferentie-effecten in de berekening worden verwerkt door een groot aantal standaard-afwijkingen aan het gemiddelde van C_t toe te voegen. Als echter uit wordt gegaan van het gemiddelde wordt de torsie behoorlijk onderschat.

HOOFDSTUK 4: GEDRAG ONDER WRINGBELASTING

4.1 Gevolgde werkwijze

In het voorlopig ontwerp van de taartpunt zijn twee stijve elementen voorzien, namelijk een kern en een wand. De wand bevindt in de kantoorruimte. Bij Grabowsky&Poort rees de vraag of de kern als enige stijve element in de draagstructuur van de taartpunt de verplaatsingen van het gebouw binnen de toelaatbare grenzen kon houden. Dit zou erg gunstig zijn door de grotere indeelbaarheid van de verdieping als de tussenwand verwijderd wordt.

Om deze vraag te beantwoorden is uitgegaan van de kern uit het definitieve ontwerp, waarvan de afmetingen bepaald zijn door de functionele eisen. Het basis-model voor de berekeningen van het gedrag van het gebouw bestaat uit deze kern en een aantal pendelkolommen en vloeren.

De wringing wordt door de windbelasting veroorzaakt. Door deze belasting zal het gebouw ook buigen. Deze twee componenten hebben een verschillende uitwerking op de verplaatsingen.

Daarnaast zorgt de combinatie van buiging en wringing voor een complexe verdeling van de krachten in de draagstructuur. Deze aspecten van het constructieve gedrag worden in de komende paragrafen uitvoerig behandeld.

Aan de hand van een twee-dimensionale berekening van het basis-model zijn een aantal varianten op dit basis-model bedacht door op verschillende plaatsen in de plattegrond extra stijfheid in te bouwen. Ook de tussenwand uit het voorlopig ontwerp komt aan de orde.

Vervolgens is van de varianten een nauwkeuriger, drie-dimensionaal model gemaakt. Een aantal bijzondere resultaten, die uit berekening hiervan volgen, zijn aan een nader onderzoek onderworpen. In dit detail-gedrag komt de wisselwerking tussen buiging en wringing wederom duidelijk naar voren.

4.2 Schematiseren belasting en constructie

4.2.1 Belasting

De windbelasting wordt loodrecht op de symmetrie-as van het gebouw gezet. Aangenomen wordt, dat de gelijkmatig verdeelde belasting maatgevend is voor wringing om de kern. De belasting volgens art. 8.6.2.5 van NEN 6702 is niet maatgevend. Dit zal aangetoond worden.

De winddrukken zijn uit tabel 10 van NEN 6702 gehaald. Hierbij is er vanuit gegaan, dat het gebouw in gebied II ligt. De drukken zijn omgerekend naar een verdeelde belasting ([kN/m]) door over 4 etages deze drukken te sommeren. De stuwdrukcoëfficiënt is op 1,2 gesteld, zodat de gelijkmatig verdeelde belasting volgt uit:

$$(4.1) q_w = C_{tot} \cdot 14,4 p_w.$$

In figuur 23 staan de resultaten. Op de 2°, 6°, 10°, 14° en 18° etage grijpt de belasting over de hele breedte aan.

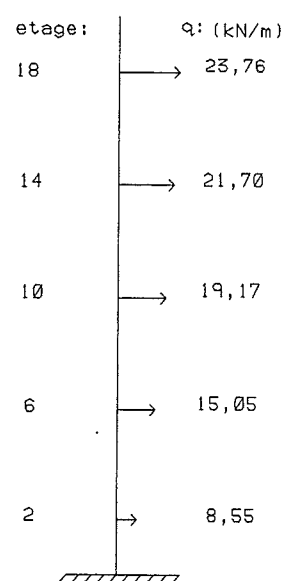


fig. 23 Belasting op model

4.2.2 Schematisering constructie

Het gebouw bestaat ruwweg gezien uit een vijftal onderdelen:

- vloeren
- gevelkolommen
- een eindkolom
- een tussenwand
- een kern.

De kern kan weer gesplitst worden in een low- en high-rise deel. De eindkolom bevindt zich in de punt van het gebouw. Alle onderdelen worden geschematiseerd tot staven. De staaf, die de kern representeert, wordt op het zwaartepunt van de kern geplaatst.

Voorlopig worden alle elementen geconcentreerd gedacht op de symmetrie-as. Uit de plattegrond, die los bijgevoegd is als A3-vel achterin het rapport, worden de afstanden tussen de elementen berekend. In bijlage 4.2.2 is het zwaartepunt van de kern berekend, waaruit volgt dat deze op 49,2 m van de eindkolom zit.

In figuur 24 is te zien, wat het resultaat is van deze schematisering. Het model is 90 graden gekanteld, zodat de opleggingen zich in de tekening rechts bevinden. De afstand tussen de kolommen is 10,8 m. Een uitzondering vormt de afstand tussen hoekkolom en gevelkolom: 15,8 m. De verdiepingshoogte h is 3,3 m. De globale z -as loopt parallel aan de kolommen, van rechts naar links in de tekening. De x - en y -as vormen samen een horizontaal vlak. In figuur 24 loopt x van onder naar boven en staat de y -as loodrecht op het vlak van de tekening.

De kern loopt van knoop 108 tot en met 126. De kern is ingeklemd bij knoop 108. De knopen 1, 22, 43, 64, 85, 127 en 148 zijn scharnierend opgelegd.

Bij de staven zijn nummers te zien. Deze corresponderen met staaf-typen. Hieronder worden deze behandeld.

Staaf-type 1: de vloer

De vloer is in zijn vlak buigstijf. In de andere richtingen is hij slap. De stijfheid hiervan wordt afgeschat:

$$I_x = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_y = 40 \text{ m}^4$$

$$I_z = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4.$$

De lokale y -as is parallel aan de globale z -as.

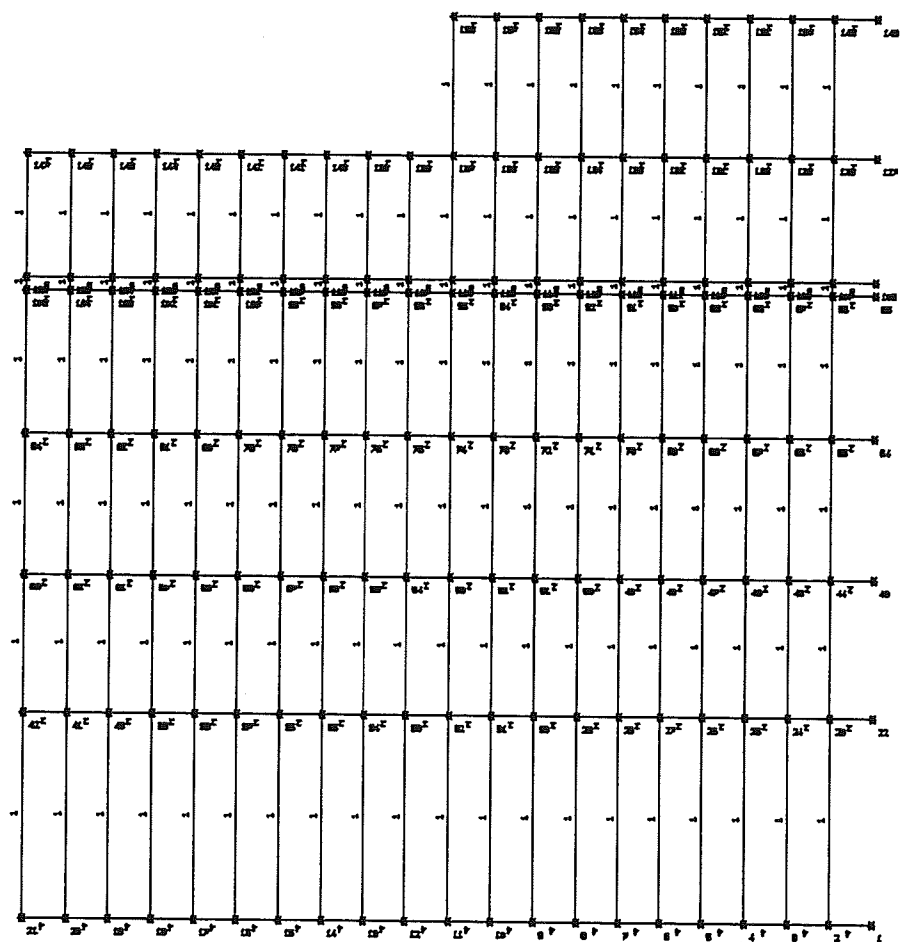
Staaf-type 2: de gevelkolom

De gevelkolommen hebben een ronde doorsnede met een diameter van 750 mm. Dat geeft:

$$I_x = \frac{1}{2}\pi r^4 = 0,0311 \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4 = 0,0155 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{4}\pi r^4 = 0,0155 \text{ m}^4.$$



Geometrie Invoer ruimtelijk staafwerk

fig. 24 Geometrie van het RUSTAF-model

Staaf-type 3: de low-rise kern

In bijlage 4.2.2 is het wringtraagheidsmoment berekend. Tevens worden de twee buigtraagheidsmomenten bepaald:

$$I_x = 181,92 \text{ m}^4$$

$$I_y = 273,72 \text{ m}^4$$

$$I_z = 1639,4 \text{ m}^4$$

De lokale y-as is parallel aan de globale x-as. EI_y is dus de buigstijfheid om de slappe as.

Staaf-type 4: de high-rise kern

Zie de bijlage voor berekening

$$I_x = 147,17 \text{ m}^4$$

$$I_y = 154,48 \text{ m}^4$$

$$I_z = 1366,83 \text{ m}^4$$

Staaf-type 5: de eindkolom

De eindkolom wordt voorlopig gelijk gesteld aan de gevelkolommen. Dus staaf-type 5 is gelijkwaardig aan type 2.

Staaf-type 6: de tussenwand

Dit staaf-type wordt voorlopig niet gebruikt. Zie paragraaf 4.3.4.

De materiaaleigenschappen volgen uit de betonkwaliteit B35, die voor de dragende delen wordt gebruikt. Hieruit volgt een lange duur-E-modulus van $20 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$. Voor beton geldt, dat het getal van Poisson ν ongeveer 0,2 is. Dat geeft voor de G-modulus:

$$(4.2) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0,42E.$$

De invoer van RUSTAF dient te worden uitgedrukt in kN en m dus zijn de relevante materiaaleigenschappen

$$E = 20 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$G = 8,4 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

4.3 Resultaten 2D-berekeningen

In deze paragraaf wordt naar twee aspecten van het gedrag gekeken:

- de verplaatsingen in de top
- de krachten en momenten op de fundering.

Bij de verplaatsingen wordt onderscheid gemaakt in v_1 , v_2 en v_3 . Dit is de verplaatsing in y-richting van respectievelijk de punt, de kern en de zijgevel van het gebouw.

De totale belasting op het gebouw als gevolg van de windbelasting, zoals die in de vorige paragraaf is vastgesteld, bedraagt

$$D_{\text{tot}} = 5564 \text{ kN.}$$

Het totale buigend moment is ook bekend. Dat bedraagt

$$M_{x,\text{tot}} = 207,9 \text{ MNm } (207,9 \cdot 10^3 \text{ kNm}).$$

Aan het eind van de paragraaf zal het belastingsgeval volgens art. 8.6.2.5 van NEN 6702 nader onderzocht worden. In paragraaf 4.2 is weliswaar gesteld, dat voor de taartpunt de volbelasting maatgevend is, maar dit dient uiteraard wel gecontroleerd te worden.

De resultaten van de berekeningen zijn in paragraaf 4.4 verzameld in een aantal tabellen.

4.3.1 Basis-model

In het basis-model moet de kern in z'n eentje de stijfheid en stabiliteit verzorgen. Na berekening in RUSTAF worden de volgende verplaatsingen gevonden:

$$v_1 = 181 \text{ mm}$$

$$v_2 = 48,8 \text{ mm}$$

$$v_3 = 22,5 \text{ mm.}$$

De maximum verplaatsing is $\delta_{\text{max}} = \frac{181}{66000} = \frac{1}{365}h$. In NEN 6702 wordt $1/500 h$ (132 mm)

geëist. Een voorzichtige conclusie is daarom, dat enige verstijving wenselijk is.

De krachten en momenten op de funderingen zijn

$$D_{\text{kern}} = 5589 \text{ kN}$$

$$M_x = -207,9 \text{ MNm}$$

$$M_t = -96,9 \text{ MNm.}$$

De dwarskracht is iets groter dan de totale belasting door de gebruikte schematisering. De pendelkolommen zijn namelijk stijf aan de staven, die de vloeren representeren, verbonden. Hierdoor is een gevelkolom van één verdieping hoog met het nevenstaande statische schema (figuur 25) te beschrijven. De vloer wordt tot een rollende inklemming geschematiseerd en de oplegging van de kolom is scharnierend. De vloer verplaatst door de belasting naar rechts, hetgeen een oplegreactie in de andere richting geeft. Uit het evenwicht van de totale constructie volgt dan, dat de dwarskracht in de kern iets hoger wordt.

De momenten zijn wel als verwacht. M_t kan in dit geval ook direct worden berekend uit de totale belasting en de excentriciteit (e) tussen zwaartpunt van de belasting en de kern.

$$(4.3) M_t = D_{\text{tot}} \cdot e = 5564 \cdot (-48,2 + 0,5 \cdot 59) = -104,0 \text{ MNm.}$$

RUSTAF geeft -96,9 MNm. Het verschil wordt veroorzaakt door de oplegreacties bij de gevelkolommen, die immers tegen de belasting in werken.



fig. 25

4.3.2 Variant 1: stijve eindkolom

In de punt van het gebouw is plaats gereserveerd voor een afvoerkanaal van uitlaatgassen, die afkomstig zijn uit de parkeergarage. In de plattegrond van de taartpunt is dit kanaal te herkennen aan de driehoekige vorm. De wanden kunnen in constructief beton worden uitgevoerd. Dit betekent, dat de eindkolom bestaat uit een koker met een driehoekige doorsnede. Vanwege deze vorm wordt de eindkolom in het vervolg meestal met ∇ -kolom aangeduid.

De driehoek heeft een basis van 2,4 m en een hoogte van 6 m en de wanden zijn 0,3 m dik. In bijlage 4.3.2 worden uit deze gegevens de staafeigenschappen berekend. Daar is ook het lokale assenstelsel gedefinieerd. De richtingen zijn als bij de kern. Voor staaf-type 5 geldt:

$$A=4,39 \text{ m}^2$$

$$I_t=4,25 \text{ m}^4$$

$$I_y=2,108 \text{ m}^4$$

$$I_z=16,51 \text{ m}^4.$$

In het numerieke model is de ∇ -kolom ingevoerd door het staaf-type van de eindkolom te veranderen van 1 (gevelkolom) naar 5. De verplaatsingen van met name de punt van het gebouw nemen af. Er wordt $v_1=161$ mm gevonden, een reductie van 20 mm. De draagstructuur reageert dus zo'n 11 % stijver in de punt van het gebouw door toevoeging van de ∇ -kolom.

Ook in de verdeling van de dwarskrachten komt dit tot uiting:

$$D_{kern} = 4564 \text{ kN}$$

$$D_{\nabla} = 1000 \text{ kN}.$$

De momenten bedragen

$$M_{\nabla} = -14,7 \text{ MNm}$$

$$M_{kern} = -193,2 \text{ MNm}$$

$$M_t = -46,1 \text{ MNm}.$$

Het torsie-moment van -46,1 MNm werkt op de kern. In het basis-model was dit -96,9 MNm, dus treedt door de aanwezigheid van de eindkolom bijna een halvering van het wringend moment op de kern op. Deze grote afname is te verklaren doordat de dwarskracht in de ∇ -kolom een grote arm ten opzichte van het DC (hier: het zwaartepunt van de kern) bezit, zodat een groot deel van de wringing door een koppel kan worden opgenomen.

Opvallend is echter, dat de eindkolom veel meer opneemt dan op grond van de stijfheidsverhoudingen zou worden verwacht. De buigstijfheid om de globale x-as is maar 1% van de kern. Toch wordt 18% van de dwarskracht opgenomen. Dit is het gevolg van het feit, dat de kern de kolom verplaatsingen oplegt, die resulteren in vrij grote krachten in de ∇ -kolom. In paragraaf 4.5 zal hier uitvoerig bij stil staan worden.

De grote reductie in het wringend moment verklaart de significante afname van de verplaatsingen in de punt, die gedomineerd worden door de wringcomponent. Het maximum van 161 mm is echter nog steeds aan de ruime kant, zodat extra stijfheid gewenst is.

4.3.3 Variant 2: vermindering van het aantal gaten in de kern

Theoretisch is het mogelijk om in de low-rise kern het aantal gaten te beperken door de toegang naar de high-rise liften te verwijderen. Praktisch gezien geeft dat nogal wat problemen, daar de goederenlift zich ook in de high-rise liftengroep bevindt.

Stel nu echter, dat ook in de low-rise liftengroep een goederenlift wordt opgenomen. In dat geval is het in principe mogelijk om in de eerste helft van de taartpunt een kern met twee in plaats van drie gaten per verdiepingen te krijgen. Het is snel in te zien, dat dit erg gunstig is

voor de wringstijfheid van de kern. Er ontstaat namelijk op deze wijze een dichte koker met daaraan verbonden twee geperforeerde kokers. In bijlage 4.3.3 is een schetsje van deze nieuwe kern opgenomen en daaruit wordt berekend, dat het wringtraagheidsmoment 2,5 zo groot wordt door het creëren van een dichte koker:

$$I_t = 420,35 \text{ m}^4.$$

Daarnaast zal het buigtraagheidsmoment in de slappe richting toenemen tot $I_y = 301,7 \text{ m}^4$ (verschil 28 m^4).

Het model uit de vorige paragraaf is aangepast met deze nieuwe staaf-eigenschappen. De combinatie van ∇ -kolom en verstijfde low-rise kern levert een flinke reductie van de verplaatsingen van het gebouw. Voor de punt geldt nu $v_1 = 122 \text{ mm}$. Ten opzichte van het basis-model is dit een vermindering van 59 mm ($32,5\%$). Aan de $1/500h$ eis wordt ruimschoots voldaan.

Door de grote buigstijfheid neemt de verplaatsing van de kern op $z = 66 \text{ m}$ nu ook significant af: $v_2 = 42,6 \text{ mm}$ ($12,7\%$ verschil). Het valt te verwachten, dat de kern ten opzichte van de vorige variant meer belasting naar zich toe trekt. Dit blijkt ook uit de krachtsverdeling:

$$D_{\nabla} = 633 \text{ kN}$$

$$D_{\text{kern}} = 4931 \text{ kN}$$

$$M_{\nabla} = -9,3 \text{ MNm}$$

$$M_{\text{kern}} = -198,6 \text{ MNm}$$

$$M_t = -64,4 \text{ MNm}.$$

De eindkolom droeg 1000 kN en nu nog 633 kN . Het verschil komt voor rekening van de kern, die dus zwaarder wordt belast. Ook de momenten op de kern nemen toe. Relatief gezien neemt de torsie het meest toe namelijk 40% . De wringstijfheid is echter zo'n 250% toegenomen dus het netto resultaat is toch kleinere verplaatsingen.

Ondanks de mooie resultaten van de berekening is de verstijfde low-rise kern geen goede variant, daar niet goed aan de functionele eisen wordt voldaan. Naast de problemen met de goederenlift wordt de afstand, die iemand moet afleggen om van de ene naar de andere gevel te lopen, erg groot. Dit betekent, dat de kwaliteit van de plattegrond afneemt. Voor de verhuurbaarheid is dat geen gunstige ontwikkeling. Daarom dienen andere manieren worden gevonden om de draagstructuur te verstijven. Variant 2 dient als een academisch geval te worden beschouwd.

4.3.4 Variant 3: tussenwand

Zoals in de inleiding van dit hoofdstuk reeds is gesteld, was in het voorlopig ontwerp van het Beatrixkwartier in de taartpunt een tussenwand voorzien. In de achter in dit rapport bijgevoegde plattegrond is de wand goed te herkennen. Hij ligt daar tussen de kolommen 102 en 109 in.

De wand bestaat uit drie delen. Op de einden bevinden zich twee vierkante kolommen met zijden 750 mm . Daartussen is een geknikte wand geplaatst met een dikte van $0,3 \text{ m}$. In bijlage 4.3.4 zijn de dimensies in een tekening weergegeven en zijn ook de eigenschappen van staaf-type 6, de tussenwand, berekend. Er wordt gevonden:

$$A = 2,63 \text{ m}^2$$

$$I_t = 0,054 \text{ m}^4$$

$$I_y = 12,03 \text{ m}^4$$

$$I_z = 0,01 \text{ m}^4$$

Om het effect van de tussenwand goed te kunnen beoordelen wordt in eerste instantie de ∇ -kolom vervangen door een gewone gevelkolom.

De tussenwand en de kern zorgen er samen voor, dat de punt van het gebouw maximaal 154,1 mm verplaatst. Dit is een verschil van $\Delta v_1 = 27$ mm met het basis-model. De wand neemt het volgende deel van de belasting op:

$$D_{wand} = 2677 \text{ kN}$$

$$M_{wand} = -39,5 \text{ MNm}$$

en de kern

$$D_{kern} = 2971 \text{ kN} (\Delta D = 2618 \text{ kN})$$

$$M_{kern} = -169,1 \text{ MNm} (\Delta M_{kern} = 38,8 \text{ MNm})$$

$$M_t = -38,9 \text{ MNm} (\Delta M_t = 58,1 \text{ MNm})$$

Tussen haakjes staan de verschillen met het basis-model. Vergeleken met variant 1 is de tussenwand een betere oplossing:

- halvering van de dwarskracht in de kern
- behoorlijke (tot 15%) afname van de verplaatsingen
- meer dan halvering van het wringend moment.

4.3.5 Variant 4: tussenwand en eindkolom

De vraag is of toevoegen van de ∇ -kolom nog een significante verstijving oplevert. Het blijkt, dat de verplaatsingen verder afnemen. Het maximum is nu $v_1 = 142,5$ mm. Hieraan is te zien, dat de twee verstijvingen niet gesuperponeerd mogen worden. De ∇ -kolom gaf een reductie van 20 mm van v_1 , de wand 27 mm, maar de combinatie geeft een verschil van 38,5 mm ten opzichte van het basis-model. Bij variant 1 is al geconstateerd, dat de belasting, die de eindkolom opneemt afhankelijk is van de verplaatsing. Als voor de wand iets dergelijks geldt, hebben we in feite te maken met model van het gebouw dat uit twee translatie-veren en een rotatie-veer (de kern) bestaat. Superponeren is in dat geval uitgesloten.

De verdeling van de krachten en momenten op de fundering is als volgt:

$$D_{\nabla} = 551 \text{ kN}$$

$$M_{\nabla} = -10,8 \text{ MNm}$$

$$D_{wand} = 1804 \text{ kN}$$

$$M_{wand} = -31,1 \text{ MNm}$$

$$D_{kern} = 3265 \text{ kN} (\Delta D = 2324 \text{ kN})$$

$$M_{kern} = -167,4 \text{ MNm} (\Delta M_{kern} = 40,5 \text{ MNm})$$

$$M_t = -30,0 \text{ MNm} (\Delta M_t = 66,9 \text{ MNm})$$

Vergeleken met de vorige variant is het opvallend, dat het buigend en wringend moment op de kern verder afnemen, terwijl de dwarskracht toegenomen is. Deze schijnbare tegenstelling wordt nader onderzocht in paragraaf 4.5.

Niettemin is de samenwerking van kern, wand en eindkolom goed te noemen. Met name de wand wordt door de ∇ -kolom ontlast. De dwarskracht in de wand neemt met 33% en het buigend moment met 21% af.

Verder is het wringend moment op de kern nog slechts 31% van de waarde in het basis-model.

4.3.6 Nieuw belastingsgeval

De verdeling van de stuwdruk volgens art. 8.6.2.5 van NEN 6702 is in deel I reeds behandeld. In bijlage 5.2 van deel I is uitgewerkt op welke wijze de belasting uit dit artikel kan worden bepaald als de volbelasting op de rechterhelft werkt. In de taartpunt ligt de kern aan de rechterkant dus zal de meest ongunstige situatie ten aanzien van wringing optreden als de volle stuwdruk op de linkerhelft werkt. Het belastingsschema van bijlage 5.2, deel I kan gebruikt worden door te spiegelen.

Alle varianten zijn doorgerekend met dit nieuwe belastingsgeval. Het blijkt, dat alleen v_3 en M_t maatgevend zijn. Het verschil met de volbelasting is echter maar klein. Zo is voor variant 0 (basis-model) de torsie op de kern nu 99,0 MNm terwijl bij volbelasting 96,9 MNm gevonden was. Het verschil is dus slechts 2,2%.

Voor de volledigheid zijn in onderstaande tabel de belangrijkste resultaten weergegeven.

Tabel II Resultaten met belasting volgens art. 8.6.2.5

variant:	v_1	v_2	v_3	D_{kern}	D_{∇}	D_{wand}	M_{kern}	M_{∇}	M_{wand}	M_t
	mm	mm	mm	kN	kN	kN	MNm	MNm	MNm	MNm
0	172,8	39,4	-23,6	4445			-167,2			-99,0
1	152,9	38,2	-13,2	3411	1070		-152,6	-14,6		-47,6
2	114,8	34,6	-1,6	3789	680		-158,2	-9,1		-66,5
4	135,5	34,7	-9,6	2133	562	1780	-128,4	-10,0	-29,7	-31,6

4.4 3D-modelleren

In de voorgaande paragrafen is steeds gewerkt met een twee-dimensionale voorstelling van de taartpunt. Door de aanwezigheid van Een symmetrie-as in het gebouw is dit ook goed mogelijk.

Een aantal effecten wordt zo echter niet meegenomen. Denk bijvoorbeeld aan de bijdrage, die de kolommen kunnen leveren aan het opnemen van het buigend moment door een koppel van druk- en trekkrachten.

Om een beter beeld te krijgen van het gedrag van het gebouw is daarom besloten een drie-dimensionaal model van de taartpunt te genereren. Op deze wijze kan een aantal verrassende resultaten, die in de 2D-berekening werden gevonden, ook beter worden verklaard.

4.4.1 Schematisering constructie

Het drie-dimensionale model is afgeleid van het 2D-model. De afstanden in x-richting tussen de kolommen zijn hetzelfde gebleven. De y- coördinaat van een kolom volgt uit de vergelijking $y=0,2x$. De excentriciteit van 1,0 m tussen het zwaartepunt van de kern en de verbindinglijn tussen kolom 104 en 109 (zie plattegrond) is verwaarloosd, zodat de staaf, die de kern representeert op deze lijn komt te liggen.

Verder is de laagbouw weggelaten. Uit de 2D-berekeningen bleek namelijk, dat de verplaatsing daarvan geen relevante informatie omtrent het gedrag van het gebouw gaf. Om het aantal staven te beperken in verband met de capaciteit van RUSTAF is de laagbouw daarom weggelaten.

Op de volgende pagina is een plotje (figuur 26) afgedrukt van het complete model. Naast de knooppuntnummers is bij elke staaf het staaf-type te zien. De gebruikte staaf-eigenschappen zijn onveranderd op staaf-type 1, de vloer, na. In plaats van een vloer wordt nu met type 1 een kolom-strook aangeduid.

Tussen twee kolommen ligt een kolom-strook. Dit is een deel van de vloer met een grotere dikte. In dit geval is de vloer 400 mm dik ter plaatse van de kolom-strook, terwijl de zogenaamde veldstrook 250 mm dik is. Zie figuur 27.

De eigenschappen van deze kolomstrook zijn vrij nauwkeurig te berekenen. Zie bijlage 4.4.1. In de 3D-berekening geldt voor de staaf-eigenschappen van type 1:

$$I_x=0,0531 \text{ m}^4$$

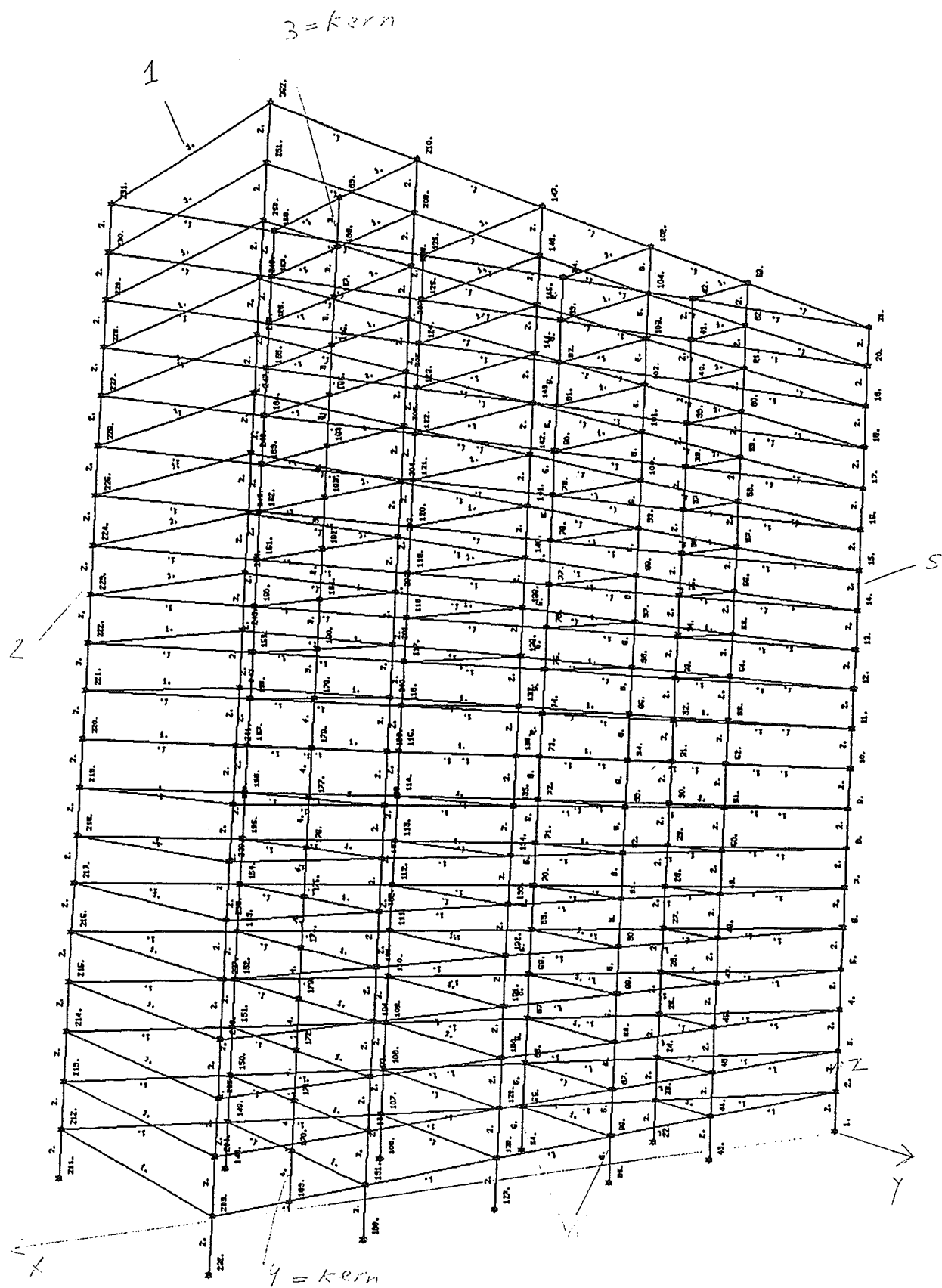
$$I_y=1,50 \text{ m}^4$$

$$I_z=0,015 \text{ m}^4.$$

Loodrecht op de kolom-stroken liggen de vloervelden. Het vloerveld is in het model vervangen door twee staven van het type 1. Dit is niet helemaal correct, maar de vloervelden hebben in hun eigen vlak een met de kolom-strook vergelijkbare stijfheid. Daar voor het gedrag van het totale gebouw deze grote stijfheid in het eigen vlak van de vloer de belangrijkste eigenschap is, krijgen de staven, die de vloervelden representeren, daarom ook het staaf-type 1.

Overigens is in eerste instantie de vloer als een verzameling schijfelementen ingevoerd. Er zijn echter 20 vloeren en daarmee werd het maximum aantal elementen, dat RUSTAF accepteert overschreden. Daarom is uiteindelijk gekozen voor een schematisering als vlak raamwerk.

De belasting is hetzelfde gebleven. Door het weglaten van de laagbouw is de totale dwarskracht en het moment op de fundering iets lager, namelijk respectievelijk $D=5326 \text{ kN}$ en $M=205,3 \text{ MNm}$.



Geometrie Invoer ruimtelijk staafwerk

fig. 26 Geometrie 3D-model

4.4.2 Resultaten

Bij de 2D-berekening is uitvoerig stilgestaan bij de diverse varianten. In tabp2 worden daarom alleen de belangrijkste resultaten weergegeven. Tevens worden de 2D- en 3D-resultaten met elkaar vergeleken. De varianten uit de vorige paragraaf worden met de volgende cijfers aangeduid:

0:basis-model

1:kern+∇-kolom

3:kern+wand

4:kern+∇-kolom+wand

Variant 2, waarbij de low-rise kern is verstijfd, is weggelaten, daar deze uit functioneel opzicht niet reëel is.

Tabel III: Vergelijking verplaatsingen in de top

variant	v1	v2	v3	Δv1	Δv2	Δv3
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0-2D	181,0	48,8	22,5			
0-3D	134,1	35,3	13,1	46,9	13,5	9,4
1-2D	161,0	47,4	26,3			
1-3D	117,4	34,4	16,0	43,6	13,0	10,3
3-2D	154,1	44,4	23,8			
3-3D	108,1	31,0	13,4	46	13,4	10,4
4-2D	142,5	43,5	25,4			
4-3D	101,6	30,7	14,8	40,9	12,8	10,6

Tabel IV: Vergelijking krachten op de fundering

Variant	D _{kern}	D _∇	D _{wand}	ΔD _{kern}	ΔD _∇	ΔD _{wand}
	kN	kN	kN	kN	kN	kN
0-2D	5589					
0-3D	4802			787		
1-2D	4564	1000				
1-3D	4083	1190		481	-190	
2-2D	2971		2677			
2-3D	2678		2628	293		49
4-2D	3265	551	1804			
4-3D	3017	710	1610	248	-159	194

Tabel V: Vergelijking buigende momenten

variant	M _{kern}	M _v	M _{wand}	ΔM _{kern}	ΔM _v	ΔM _{wand}	M _{kol}
	MNm	MNm	MNm	MNm	MNm	MNm	MNm
0-2D	207,9						
0-3D	162,7			45,2			42,6
1-2D	193,2	14,7					
1-3D	153,0	13,1		40,2	1,6		39,2
3-2D	169,1		39,6				
3-3D	129,5		32,9	39,6		6,7	42,9
4-2D	174,4	10,1	31,1				
4-3D	130,1	9,3	25,2	37,3	0,8	5,9	40,7

Tabel VI: Vergelijking wringende momenten

variant	M _t	ΔM _t
	MNm	MNm
0-2D	96,9	
0-3D	79,0	17,9
1-2D	46,1	
1-3D	40,3	5,8
3-2D	38,9	
3-3D	40,6	-1,7
4-2D	30,0	
4-3D	30,2	-0,2

Toelichting bij de tabellen

De afname van de verplaatsing v_1 is bij alle varianten groot, namelijk tussen de 40 en 47 mm. Dit is te verklaren door het feit, dat het gebouw stijver reageert in de 3D-berekening als gevolg van de koppels, die door de kolommen worden geleverd. Uit de derde tabel blijkt, dat deze bijdrage aan het opnemen van het buigend moment significant is: zo'n 40 MNm word door middel van druk- en trekkrachten door de 5 kolom-paren opgenomen.

Uit de derde tabel is tevens te zien, dat bij alle varianten het buigend moment om de globale x-as op de kern hierdoor in dezelfde orde van grootte afneemt. Hierdoor neemt de verplaatsing van de kern in y-richting gemiddeld 33% af.

Ook de rotatie van de taartpunt wordt zo'n 33 % kleiner. Deze is berekend uit het feit, dat de verplaatsingen v_1 en v_3 uit een buig- en een wringcomponent bestaan. Als het rotatie-centrum gelijk is aan het zwaartepunt van de kern kan dit als volgt worden geformuleerd:

$$(4.4a) \quad v_1 = v_2 + 48,2\theta$$

$$(4.4b) \quad v_3 = v_2 - 10,8\theta.$$

Uit formule (4.4a) kan θ worden berekend. Vergelijking (4.4b) kan als controle dienen. Het blijkt, dat beide formules dezelfde waarden opleveren. In feite is alleen voor het basis-model (4.4) juist, daar door het inbouwen van extra stijfheid het dwarskrachtencentrum (=rotatie-centrum) zal verschuiven. Door de grote stijfheid van de kern zal deze verschuiving echter marginaal zijn, zodat (4.4) een goede benadering is.

Voor de afname van de dwarskracht op de kern in de 3D- berekening zijn twee redenen aan te voeren. Ten eerste is de totale dwarskracht afgenomen van 5564 naar 5326 kN, een verschil van 238 kN dus. Het verschil bij variant 0 en 1 is echter groter. Er moet dus nog een andere oorzaak zijn. Deze ligt in de schematisering van de constructie. De kolommen en de kolomstroken zijn stijf verbonden. Dit betekent, dat we hier te maken hebben met een stijf raamwerk. Bij de opleggingen zal daarom een (kleine) dwarskracht op de kolommen werken. Naarmate er meer en stijvere elementen in de draagstructuur worden ingevoerd is dit effect minder belangrijk. Daarom is met name bij variant 0 het verschil groot.

Dit wordt bevestigd door tabel VI, waar het wringend moment volgens de 2D- en 3D-berekening staat afgedrukt. Alleen bij variant 0 is een significante afname te zien. Dit is te verklaren door de reeds genoemde dwarskrachten bij de opleggingen van de kolommen, die een gedeelte van de torsie op zullen nemen.

Een klein rekensommetje ter illustratie: Bij variant 0 is ΔD_{kern} 787 kN. Daarvan is 238 kN als gevolg van de lagere totale belasting, dus is nemen de kolommen gezamenlijk $D_{kol}=787-238=549$ kN op. Schat de excentriciteit tussen het DC en het zwaartepunt van deze kracht op de halve breedte: $e=29,5$ m. De afname van het wringend moment wordt dan :

$$(4.5) \Delta M_t = \Delta D_{kol} e = 549 \cdot 29,5 = 16196 \text{ kNm} = 16,2 \text{ MNm}.$$

Uit tabel VI volgt $\Delta M_t = 17,9$ MNm. Dit komt aardig overeen. Variant 3 en 4 bevatten een stijve wand en die trekt zoveel belasting naar zich toe, dat de kolommen praktisch geen dwarskrachten aan de opleggingen afgeven.

Al met al kan geconcludeerd worden, dat het verschil tussen het twee- en drie-dimensionale model het gedrag van de gevelkolommen is.

4.5 Gedetailleerd gedrag

Een aantal bijzondere resultaten uit de voorgaande berekeningen wordt in deze paragraaf nader bekeken. Dit is aan de hand van de uitvoer van de drie-dimensionale modellen gedaan.

In paragraaf 4.3.2 is reeds sprake geweest van de relatief grote belasting, die de eindkolom opneemt bij de combinatie kern en V-kolom. De uitvoer van deze variant is daarom in detail beschouwd. Bij de verplaatsingen van de kolom wordt op $z=23,1$ m de grootste rotatie om de x-as gevonden. Daarna neemt φ_x af. De eindkolom heeft dus een buigpunt op 0,35h.

Een buigpunt in de verplaatsingslijn betekent, dat de tweede afgeleide van v daar nul is, oftewel $M_x=0$. Het buigpunt vormt de grens tussen overwegend buiging en overwegend afschuiving van de V-kolom. Door het torderen van de kern wordt de draagstructuur in de bovenste helft van het gebouw dus op afschuiving belast.

Het afschuiven heeft een verstijvend effect op de kolom. Dit is bijvoorbeeld te zien aan de rotatie om de globale x-as. Op de top van het gebouw ($z=66$ m) is deze $-1,17$ mrad. Bij het buigpunt was φ_x maximaal en bedroeg $-2,36$ mrad. Er vindt dus een reductie van 50% plaats in de rotatie om de x-as.

De combinatie van buiging plus afschuiving is ook terug te vinden in de krachten in de V-kolom. In figuur 27 zijn de dwarskrachten uitgezet tegen de hoogte. De sprongen in de grafiek zijn het gevolg van het feit, dat de belasting om de vier verdiepingen is aangebracht. Duidelijk is te zien, dat de krachten op de kolom zeer snel afnemen in de hoogte en bovenin zelfs negatief worden.

DWARSKRACHT in hoekkolom

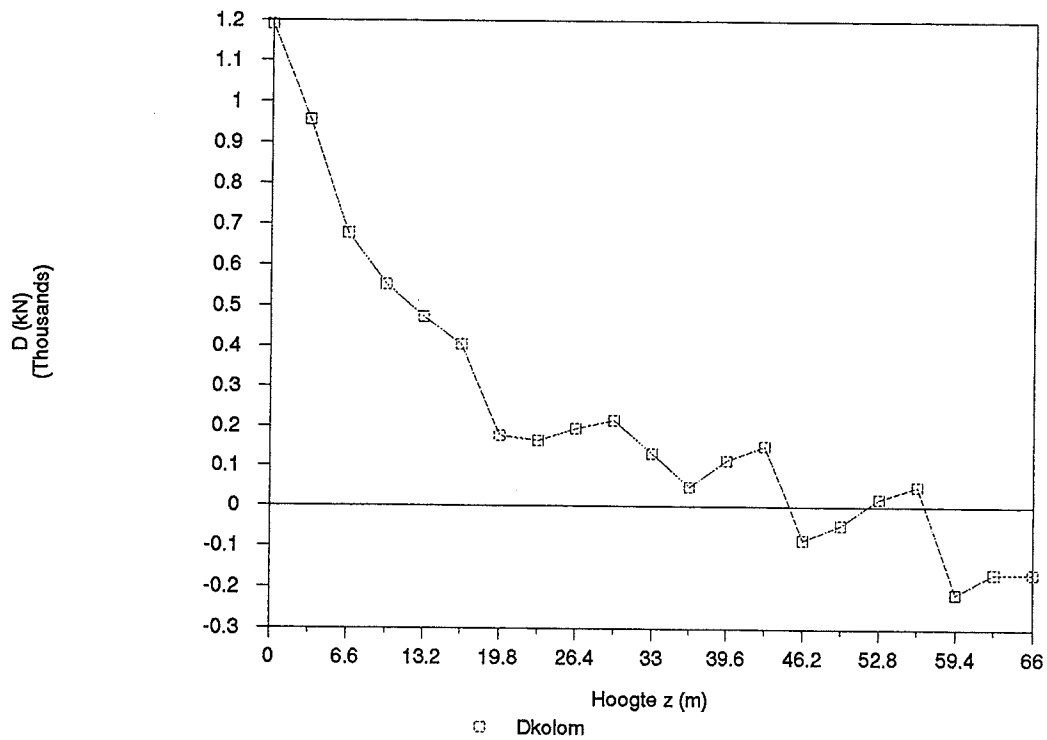


fig. 28 Verloop van de dwarskracht in de hoekkolom

WRINGEND MOMENT

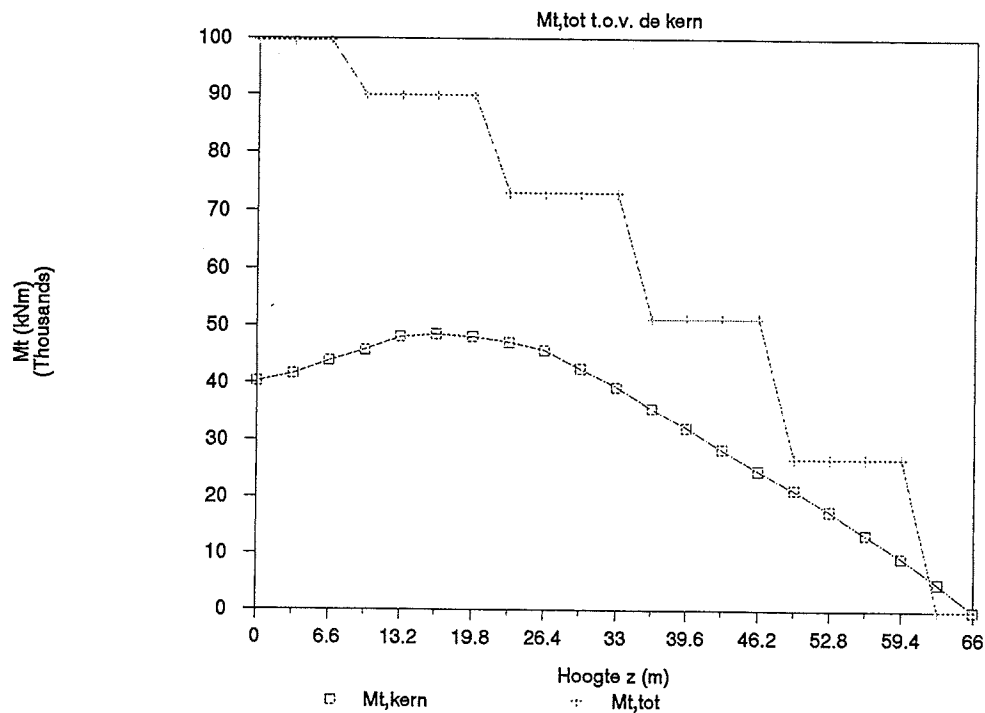


fig. 29 Verloop van het wringend moment in de kern

Dit kan als volgt geïnterpreteerd worden: tot ongeveer de halve hoogte wordt het gedrag van de kolom vooral bepaald door buiging en draagt de kolom bij aan het opnemen van de dwarskracht, daar boven wordt de eindkolom als het ware gesteund door de wringing van de kern. Een eenvoudig rekensommetje toont nu aan, dat de V-kolom inderdaad veel meer opneemt dan op grond van zijn stijfheid zou worden verwacht. Uit het voorgaande kan worden opge-
maakt, dat de eindkolom kan worden geschematiseerd zoals in figuur 30 is aangegeven. Op $z=23,1$ m was het buigpunt bepaald, zodat $l=23,1$ m wordt aangenomen. Op deze hoogte wordt de kolom een verplaatsing opgelegd. Verder wordt verondersteld, dat de buiging van de kolom door een gelijkmatig verdeelde belasting q kan worden voorgesteld. Uit de uitvoer kan v worden bepaald: $v(23,1)=41,1$ mm.

Er geldt:

$$(4.6) \quad v = \frac{ql^4}{8EI} \rightarrow q = \frac{8EI}{l^4} v \text{ dus}$$

$$(4.7) \quad D = ql = \frac{8EI}{l^3} v = \frac{8 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 2,108}{23,1^3} 0,0411 = 1125 \text{ kN.}$$

Uit de numerieke berekening volgt $D=1190$ kN. Het moment kan ook gecontroleerd worden:

$$(4.8) \quad M_x = \frac{1}{2}ql^2 = \frac{1}{2}Dl = 0,5 \cdot 1125 \cdot 23,1 = 12989 \text{ kNm.}$$

Numeriek was bepaald 13,1 MNm, een verschil van slechts 0,1 MNm.

Uit deze kleine berekening blijkt dus inderdaad, dat de V-kolom relatief veel belasting naar zich toe trekt door de vervorming die hem wordt opgelegd door de kern. Door de buigstijfheid van de kolom geeft dit grote dwarskrachten en momenten in de V-kolom.

Het gedrag van de eindkolom doet vermoeden, dat het wringend moment op de kern vooral in de bovenste helft van het gebouw snel zal toenemen. In figuur 29 is daarom in één grafiek het totale wringende moment als gevolg van de windbelasting ten opzichte van de kern en de torsie, die de kern daadwerkelijk opneemt, uitgezet.

Uit het plotje blijkt inderdaad, dat de wringing van de kern van $z=66$ tot $z=30$ m snel en praktisch lineair toeneemt. Daarna begint de V-kolom dwarskracht op te nemen en wordt de kern ontlast. De maximale torsie treedt daarom bij $z=20$ m op en niet ter plaatse van de fundering.

Het verschil tussen de twee lijnen in figuur 29 is het deel van de wringing dat wordt opgenomen door de andere constructie-delen. De grootste bijdrage levert de eindkolom. Overigens wordt het trapvormige verloop van het totale wringend moment veroorzaakt door het plaatsen van de belasting om de vier verdiepingen in het numerieke model.

Om het onderzoek naar het detail-gedrag van de variant kern + V-kolom af te ronden, wordt de opbouw van de buigende momenten in de kern bekeken. In figuur 31 is $M_{x,kern}$ uitgezet tegen het totale buigende moment om de x-as. Het verschil tussen deze twee lijnen wordt door de koppels, die door de trek- en drukkrachten in de kolomparen worden gevormd, en de het moment in de V-kolom opgenomen. Vooral bovenin is de bijdrage van de kolommen aanzienlijk. Daar neemt de eindkolom niets op, zodat het verschil tussen $M_{x,tot}$ en $M_{x,kern}$ door de kolommen moet worden opgenomen. Als $z=42,9$ m is het aandeel zo'n 50%, zoals in het plotje te zien is.

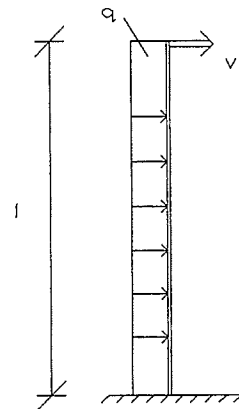
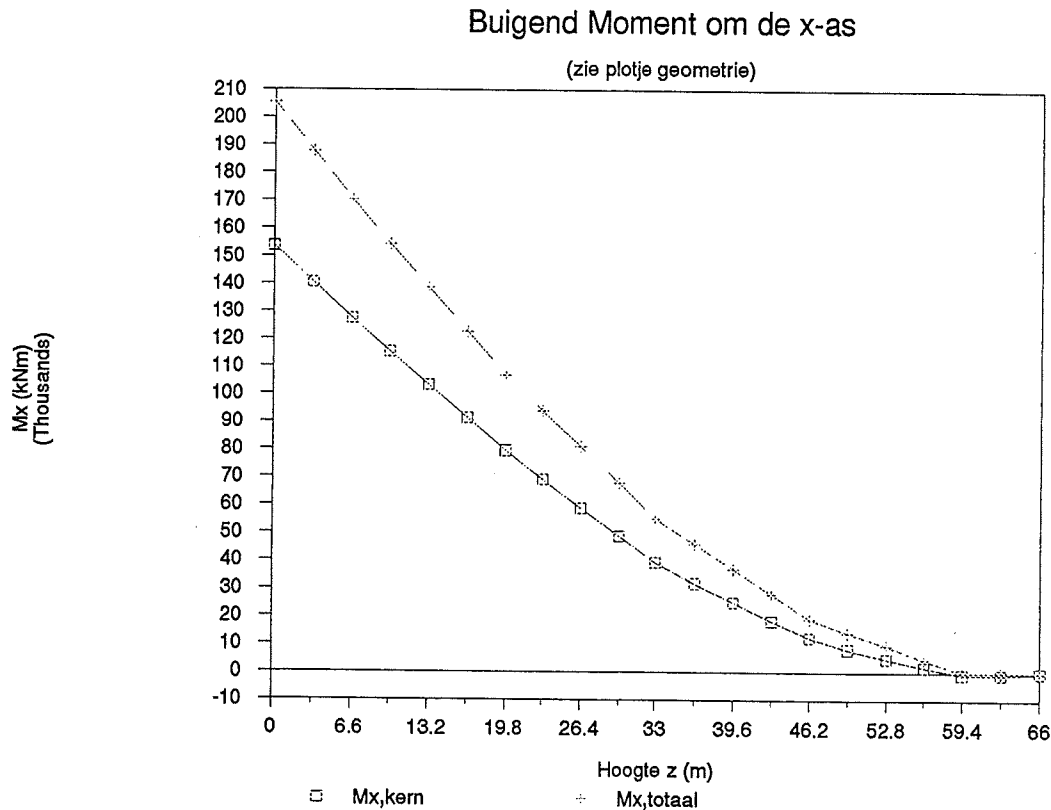


fig. 30 Schematisering kolom



Bij variant 4, kern + wand + eindkolom, was een schijnbare tegenstelling opgetreden. Ten opzichte van de variant, waar alleen wand en kern de stijve elementen zijn, was de dwarskracht op de kern toegenomen, terwijl het buigend moment afnam. Uit de uitvoer zijn voor beide varianten de dwarskrachten over de hoogte bepaald voor kern, wand en ∇ -kolom. In figuur 32 zijn de diverse dwarskrachtlijnen geplot. Verder is voor de duidelijkheid de totale dwarskracht afgedrukt.

Uit figuur 32 blijkt, dat de dwarskracht in de kern alleen onderin het gebouw groter is voor variant 4. Dit is het gebied, waarin de kolom en de wand dwarskracht beginnen op te nemen, zoals aan de D-lijnen is te zien. De verklaring voor het eigenaardige feit, dat de wand in z'n eentje meer dwarskracht opneemt dan samen met de ∇ -kolom moet daarom in de verplaatsingen worden gezocht.

Uit de uitvoer wordt voor variant 3 bepaald, dat de wand zijn buigpunt op 29,7 m heeft en de verplaatsing daar 29,2 mm bedraagt. De dwarskracht volgt uit (4.7):

$$(4.9) D_{wand} = \frac{8EI_{wand}}{l^3} v = \frac{8 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 12,03}{29,7^3} \cdot 0,0292 = 2145 \text{ kN.}$$

Voor variant 4 geldt, dat het buigpunt voor de kolom op 26,4 m ligt en de verplaatsing daar 38,9 mm is. De wand verplaatst 25,5 mm op het buigpunt op 29,7 m.

$$(4.10) D_{kolom} = \frac{8EI_{kolom}}{l^3} v = \frac{8 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 2,108}{26,4^3} 0,0389 = 713 \text{ kN.}$$

$$(4.11) D_{wand} = \frac{25,5}{29,2} 2145 = 1873 \text{ kN.}$$

Verloop van de dwarskrachten

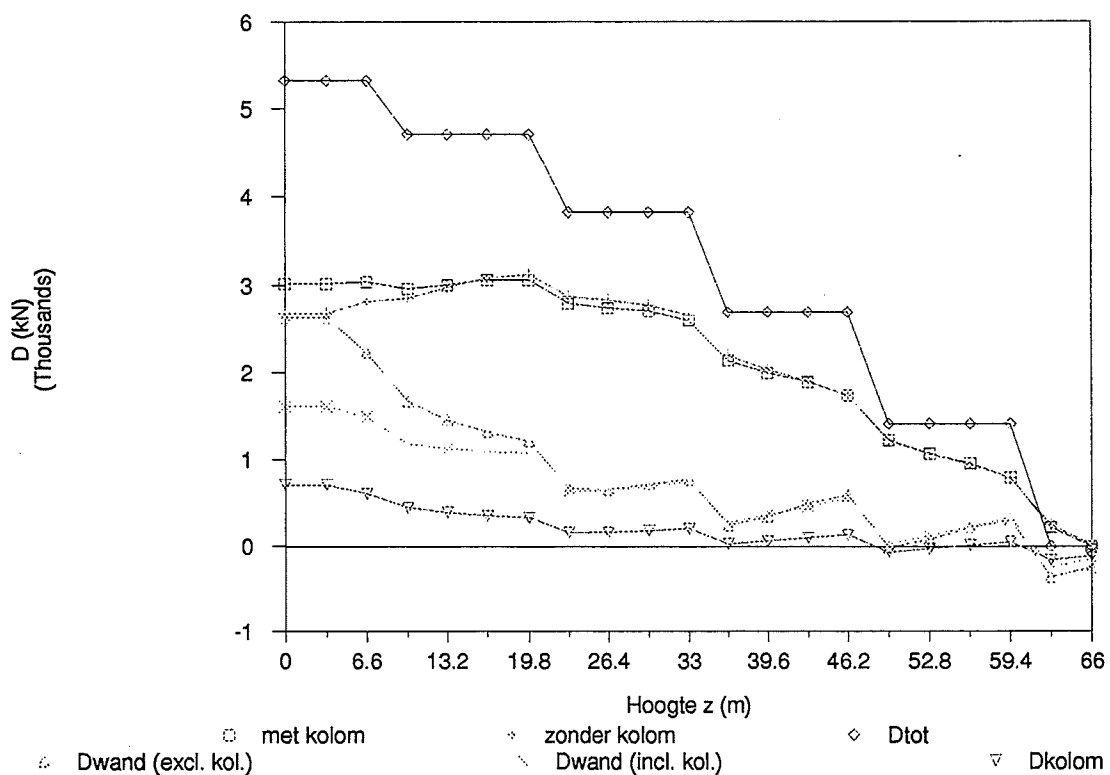


fig. 32 Dwarskrachtenlijn voor diverse constructiedelen

HOOFDSTUK 5 TORSIE-STABILITEIT

5.1 Torsie-stabiliteit voor een kern met pendelkolommen

In deel I is de staaf, waarbij normaal- en dwarskrachtencentrum niet samenvallen, behandeld. Het blijkt dat de buig- en torsie-knik in dat geval niet afzonderlijk kunnen worden beschouwd.

Voor een gebouw, waar de kern excentrisch in de plattegrond is gesitueerd, geldt in feite hetzelfde. Een voorbeeld is de taartpunt van het Beatrixkwartier. De verticale belasting zal door de kern en de 11 gevelkolommen gezamenlijk worden afgedragen naar de fundering. De kern is tegen de smalle zijgevel aangelegd.

Het moge duidelijk zijn, dat in dit voorbeeld het zwaartepunt van de verticale belasting (=NC) niet samenvalt met het zwaartepunt van de kern (=DC). In de vervormde constructie zal daarom een interactie tussen de buiging en de wringing optreden.

In het hiernavolgende zullen eerst de differentiaalvergelijkingen voor deze situatie worden afgeleid. Daarbij is rekening gehouden met een eventuele buigstijfheid van één of meer kolommen. Denk bijvoorbeeld aan de ∇ -kolom. Vervolgens wordt de oplossing gevonden voor het stelsel vergelijkingen, dat de interactie tussen buiging en wringing uitdrukt.

De uitdrukking, die aldus wordt verkregen, is nogal complex en bewerkelijk. Om toepassing van een en ander eenvoudig te houden, is een spread-sheet ontworpen. Uit de gegevens van de draagstructuur berekent deze de kritische drukkracht, waarbij het gebouw zal bezwijken.

Tenslotte zijn de resultaten, die met behulp van de spread-sheet voor de taartpunt zijn berekend, gecontroleerd met een 2^e-orde berekening met het model in RUSTAF.

De volgende aannames zullen worden gebruikt:

- er zijn n kolommen ($i=0..n$),
- de kern wordt met kolom 0 aangeduid,
- de kern is het enige element met een wringstijfheid GI ,
- de kern is volledig ingeklemd in de fundering,
- de extra stijfheid door verhinderde welving wordt verwaarloosd,
- de vloeren zijn stijf in hun vlak,
- de belasting die kolom i draagt wordt P_i genoemd,
- als kolom i is ingeklemd is, kan de buigstijfheid ervan in rekening worden gebracht door middel van $EI_{x,i}$ en $EI_{y,i}$ aangeduid,
- een scharnierend opgelegde kolom bezit in de berekening dus een stijfheid, die gelijk is aan nul.

5.1.1 Afleiding van de differentiaalvergelijkingen

In deel I is reeds enige aandacht voor het stabiliteitscriterium geweest. In deze paragraaf wordt de gedachtengang bij het bepalen van de differentiaalvergelijkingen weergegeven. De volledige afleiding is in bijlage 5.1.1 te vinden. Stel, dat een hoog gebouw de volgende plattegrond bezit:

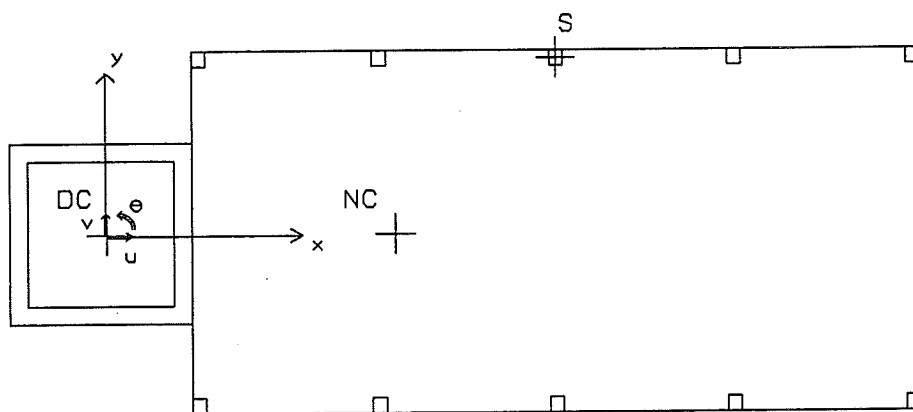


fig. 33 Gebouw met excentriciteit tussen NC en DC

De oorsprong in figuur 33 is in het dwarskrachtencentrum gelegd, hoewel dat niet noodzakelijk is. De richting van de assen is parallel aan de hoofdasen. Kolom i , die gekenmerkt wordt door het punt S met coördinaten (x_i, y_i) , wordt nader beschouwd. Op de kolom werkt een kracht P_i .

De verplaatsingen van de oorsprong, als de constructie zich in uitgebogen toestand bevindt, zijn u , v en θ . Uit figuur 33 volgt, dat voor S geldt

$$(5.1) \quad u_s = u - y_i \theta,$$

$$(5.2) \quad v_s = v + x_i \theta.$$

Door deze verplaatsingen zal kolom i op buiging worden belast. Opstellen van de evenwichts-constitutieve en kinematische vergelijkingen voor buiging geven, als $M_{x0,i}$ en $M_{y0,i}$ de momenten ter plaatse van de fundering zijn:

$$(5.3) \quad +EI_y(u - y_i \theta)'' + P_i(u - y_i \theta) - M_{y0,i} = 0,$$

$$(5.4) \quad -EI_y(v + x_i \theta)'' + P_i(v + x_i \theta) - M_{x0,i} = 0.$$

De wringing om de oorsprong is opgebouwd uit twee componenten:

- de torsie als gevolg van spatkrachten,
- de torsie als gevolg van dwarskrachten in de kolommen.

De spatkrachten $F_{s,x}$ en $F_{s,y}$ ontstaan door scheefstand van de kolom. De drukkracht in de kolom kan dan in een horizontale en verticale component worden ontbonden. Zie ook bijlage 5.1.1. De verticale component is gelijk aan P_i en de horizontale component, de spatkracht, kan uit het momentenevenwicht worden bepaald.

In figuur 34 staat de richting aangegeven, waarin de krachten $F_{s,x}$ en $F_{s,y}$ werken. Hieruit kan het wringend moment om de oorsprong worden bepaald.

$$(5.5) M_t = -F_{x,s}y_i + F_{y,s}x_i.$$

De dwarskracht, die optreedt als de kolom ingeklemd is, is tegengesteld gericht aan de spatkrachten. Verder is bekend, dat de dwarskracht de afgeleide van het moment is. Uit deze gegevens kan de bijdrage van de dwarskracht aan het wringend moment worden berekend.

De differentiaalvergelijking voor wringing is

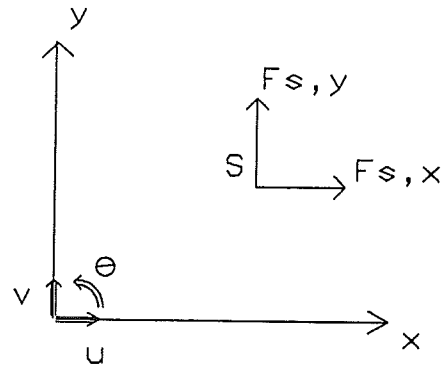


fig. 34 Richting van de krachten

$$(5.6) m_t = -GI_t\theta'',$$

daar aangenomen is, dat de kern vrij kan welven. Eénmaal differentiëren van (5.5), invullen van de constitutieve vergelijking voor de dwarskracht en de kinematische vergelijking voor de spatkracht en combineren met (5.6) geeft na enige uitwerking de differentiaalvergelijking voor wringing als functie van de verplaatsingen:

$$(5.7) \sum_0^n EI_{y,i} u'''' + \sum_0^n P_{y,i} u'' - \sum_0^n EI_{x,i} v'''' - \sum_0^n P_{x,i} v'' - \sum_0^n (EI_{y,i} y_i^2 + EI_{x,i} x_i^2) \theta'''' + [GI - \sum_0^n P_{y,i} (y_i^2 + x_i^2)] \theta'' = 0.$$

Sommeren van alle buigende momenten op de n kolommen levert de twee differentiaalvergelijkingen voor buiging om respectievelijk de y- en x-as op.

$$(5.8) \sum_0^n EI_{y,i} u'' + \sum_0^n P_{y,i} u - \sum_0^n EI_{y,i} y_i \theta'' - \sum_0^n P_{y,i} \theta - M_{y,0} = 0$$

$$(5.9) \sum_0^n EI_{x,i} v'' + \sum_0^n P_{x,i} v + \sum_0^n EI_{x,i} x_i \theta'' + \sum_0^n P_{x,i} \theta + M_{x,0} = 0.$$

$M_{x,0}$ en $M_{y,0}$ zijn de totale inklemmingsmomenten.

Er is nu een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekende verplaatsingsgrootheden als functie van z gevonden. De oplossing wordt in de volgende paragraaf behandeld.

5.1.2 Oplossing van het stelsel vergelijkingen

Het stelsel, dat door de formules (5.7), (5.8) en (5.9) wordt gevormd kan worden opgelost door een uitbuigingsvorm te substitueren, die voldoet aan de randvoorwaarden. In deel I is aangetoond, dat een functie in de volgende vorm voldoet:

$$(5.10) u = A_1 [1 - \cos(\alpha z)].$$

Voor v en θ is deze functie ook geldig.

Het stelsel wordt voor de overzichtelijkheid herschreven met behulp van de volgende definities:

$$(5.11) EI_x = \sum_o^n EI_{x,i} ;$$

$$(5.12) EI_y = \sum_o^n EI_{y,i} ;$$

$$(5.13) P = \sum_o^n P_i ;$$

$$(5.14) x_1 = \frac{\sum_o^n P_i x_i}{P} ;$$

$$(5.15) y_1 = \frac{\sum_o^n P_i y_i}{P} ;$$

$$(5.16) x_2 = \frac{\sum_o^n EI_{x,i} x_i}{EI_x} ;$$

$$(5.17) y_2 = \frac{\sum_o^n EI_{y,i} y_i}{EI_y} ;$$

$$(5.18) r_1^2 = \frac{\sum_o^n P_i (x_i^2 + y_i^2)}{P} ;$$

$$(5.19) r_2^2 = \frac{\sum_o^n EI_{x,i} x_i^2 + EI_{y,i} y_i^2}{EI_x + EI_y}.$$

In (x_1, y_1) is het normaalkrachtencentrum (NC), het fictieve aangrijpingspunt van de kracht P te herkennen. De coördinaten (x_2, y_2) behoren tot het dwarskrachtencentrum. Als de oorsprong in het DC ligt zijn x_2 en y_2 dus beiden nul.

Het stelsel wordt nu:

$$(5.20) EI_y u'' + Pu - EI_y y_2 \theta'' - Py_1 \theta - M_{y,0} = 0,$$

$$(5.21) EI_y v'' + Pv + EI_x x_2 \theta'' + Px_1 \theta + M_{x,0} = 0,$$

$$(5.22) EI_y y_2 u'''' + Py_1 u'' - EI_x x_2 v'''' - Px_1 v'' - (EI_y + EI_x) r_2^2 \theta'''' + [GI - Pr_1^2] \theta'' = 0.$$

Substitutie van (5.10) geeft een stelsel, waarin A_1 (u), A_2 (v) en A_3 (θ) de onbekenden zijn. Uit dit stelsel kan de knikkracht worden bepaald. In de bijlage is de uitwerking gegeven, hier alleen het resultaat:

$$(5.23) P^3 \left[1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{r_1^2} \right] + P^2 \left[\frac{P_x (y_1^2 + 2x_1 x_2) + P_y (x_1^2 + 2y_1 y_2)}{r_1^2} - P_x - P_y - P_\theta \right] + P \left[P_x P_y + P_x P_\theta + P_y P_\theta - \frac{P_x^2 x_2^2 + P_x P_y (x_1 x_2 + y_1 y_2) + P_y^2 y_2^2}{r_1^2} \right] + \frac{P_x^2 P_y x_2^2 + P_x P_y^2 y_2^2}{r_1^2} - P_x P_y P_\theta = 0,$$

met:

$$(5.24) P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2},$$

$$(5.25) P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{4l^2},$$

$$(5.26) P_\theta = \frac{GI + (EI_x + EI_y) (\pi r_2 / 2l)^2}{r_1^2}.$$

Als de dimensies van de kolommen en de kern bekend zijn, kan (5.23) worden opgelost. De laagste positieve waarde van P is P_{krit} . Formule (5.23) vereenvoudigt aanmerkelijk als de oorsprong in het DC ligt. Alle termen met x_2 en y_2 vallen dan namelijk weg. In bijlage 5.1.2 wordt het bewijs van de invariantie van (5.23) geleverd.

Om toepassing van (5.23) eenvoudig te houden is een spread-sheet ontworpen. Het berekenen van $x_1, y_1, x_2, y_2, r_{12}, r_2^2, P_x, P_y$ en P_θ wordt hierdoor erg makkelijk. Meer hierover in de volgende paragraaf.

5.2 TORSSTAB

De formules uit paragraaf 5.1 zijn nogal bewerkelijk. Met name de vele sommaties nodigen als het ware uit om het bepalen van de knikkracht in een spread-sheet onder te brengen. In Symphony is TORSSTAB ontworpen. Dit is gedaan aan de hand van de methode, die in paragraaf 5.1.2 is gepresenteerd. TORSSTAB bestaat uit vier windows. Het overkoepelende window is MAIN. Hierin worden alle ingevoerde gegevens in bewaard. De functie is eigenlijk die van een doorgeefluik.

Er zijn twee invoerschermen. De eenmalig in te voeren gegevens, zoals E-modulus en de stijfheid van de kern worden in ALGEMENE DATA ingevoerd. Het andere invoerscherm heet KOLOM-DATA. In de vorm van een elektronische kaartenbak kunnen in dit window de relevante gegevens van de kolommen worden ingevoerd of gecorrigeerd. De volgende zaken moeten worden ingevoerd:

- de coördinaten (x_i, y_i) in een zelf gekozen assenstelsel,
- het geveloppervlak, dat haar belasting aan kolom i afdraagt, $A_{gevel,i}$,
- het vloeroppervlak, dat haar belasting aan kolom i afdraagt, $A_{vloer,i}$,
- het eigen gewicht van de kolom, G_i ,
- de eventuele buigstijfheid om x - en y -as, $EI_{x,i}$ cq. $EI_{y,i}$.

Uit het gevel- en vloeroppervlak en het eigen gewicht berekent de computer de drukkracht, die op kolom i werkt, met behulp van de volgende formule:

$$(5.27) P_i = G_i + (A_{vloer,i}q_{vloer} + A_{gevel,i}q_{gevel})n.$$

De grootte n is het aantal verdiepingen. Met behulp van de coördinaten, de drukkracht en eventuele stijfheid van de kolommen kunnen de grootheden $x_1, x_2, y_1, y_2, r_1^2$ en r_2^2 berekend worden.

Dit vindt plaats in het window RESULTAAT met behulp van de de formules (5.11) t/m (5.19). De ideale krachten P_x, P_y en P_θ kunnen daarna worden berekend. Er is dan voldoende bekend om de coëfficiënten van het volgende polynoom te kunnen bepalen:

$$(5.28) C_3P^3 + C_2P^2 + C_1P + C_0 = 0.$$

C_0 tot en met C_3 volgen uit formule (5.23). Symphony bepaalt vervolgens iteratief P_{krit} . Normal gesproken is één slag van 50 iteraties voldoende.

Tenslotte wordt de vergrotingsfactor bepaald. Deze factor is niet

$$(5.29) \frac{n}{n-1}, \text{ met } n = \frac{P_{krit}}{P},$$

maar dient afzonderlijk te worden bepaald voor de drie richtingen x, y en θ . De achtergrond hiervan is, dat de 2^e orde effecten in elke richting anders zijn. Stel bijvoorbeeld, dat een gebouw erg stijf is in y -richting en slap in x -richting, dan zullen de tweede orde verplaatsingen v_2 verwaarloosbaar zijn ten opzichte van u_2 .

Dit moet tot uitdrukking komen in de vergrotingsfactoren. Daarom worden de factoren naar richting gesplitst. De drie n-waarden volgen uit

$$(5.30) \quad n_x = \frac{P_x}{P}; \quad n_y = \frac{P_y}{P}; \quad n_\theta = \frac{P_\theta}{P}.$$

Voor de berekening van n_θ is een tussenstap nodig. De waarde van P_θ is namelijk afhankelijk van het gekozen assenstelsel. De minimale waarde wordt gevonden als de oorsprong in het DC ligt. Dit is aangetoond in bijlage 5.1.2. Uit deze bijlage volgt ook, dat de minimale waarde van P_θ wordt gevonden door r_1^2 en r_2^2 om het DC te berekenen volgens

$$(5.31) \quad r_{1,DC}^2 = r_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

$$(5.32) \quad r_{2,DC}^2 = r_2^2 - \frac{EI_x x_2^2 + EI_y y_2^2}{EI_x + EI_y}.$$

De grootheden in het rechterlid van (5.31) en (5.32) zijn in het oude assenstelsel bepaald.

In de statische berekening moeten de berekende krachten, momenten en verplaatsingen met de vergrotingsfactoren worden vermenigvuldigd. Een tweetal voorbeelden zijn:

$$(5.33) \quad M_{x,2} = \frac{n_x}{n_x - 1} M_{x,1}$$

$$(5.34) \quad u_{s,2} = \frac{n_y}{n_y - 1} u_1 - \frac{n_\theta}{n_\theta - 1} y_i \theta_1.$$

In de laatste formule wordt de eerste orde verplaatsing vermenigvuldigd met de vergrotingsfactor $n_y/(n_y - 1)$, daar buiging om de y-as een verplaatsing in de x-richting geeft.

5.3 Gewichtsberekening

De verticale belastingen zijn bepaald in overleg met ir. F. Leatemia, die als constructeur bij Grabowsky&Poort aan het Beatrixkwartier verbonden is. De meeste waarden zijn conform de TGB 1990, op enkele zwaardere eisen van de opdrachtgever, Juno Properties, na.

Belasting op de vloeren

In afwijking op het gestelde in art. 8.2.2.1 van NEN 6702 wordt op de volgende belasting op de vloeren gerekend:

plafond:	0,2 kN/m ² ,
scheidingswanden:	0,5 kN/m ² ,
nuttige belasting:	3,5 kN/m ² ,
totaal:	4,2 kN/m ² .

Bij de vloerbelasting moet nog onderscheid worden gemaakt naar de functie van de verdieping, zoals kantoorruimte, installatieverdieping of openbaar gebied. In deze berekening is daar geen rekening mee gehouden en wordt overal kantoorruimte verondersteld.

Het eigen gewicht volgt uit een gemiddelde dikte van 250 mm:
 $g_{vloer}=24.0,25=6 \text{ kN/m}^2$.

De totale vloerbelasting bedraagt dus

$$(5.35) \quad q_{vloer}=4,2+6,0=10,2 \text{ kN/m}^2.$$

Belasting uit de gevel

Ruwweg gezien bestaat de gevel uit een glasstrook en een borstwering. Zie ook nevenstaande figuur (fig. 35), waar de maten in staan. Voor de ramen geldt $q_{glas}=0,5 \text{ kN/m}^2$ en de borstwering weegt $3,6 \text{ kN/m}^2$. Dit kan omgerekend worden naar een equivalente gevelbelasting:

$$(5.36) \quad q_{gevel} = \frac{2,475 \cdot 0,5 + 0,825 \cdot 3,6}{3,3} = 1,275 \text{ kN/m}^2.$$

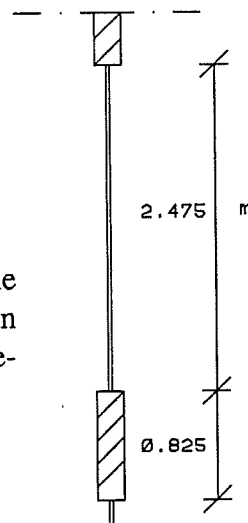


fig. 35 Gevel

Eigen gewicht van kolom

De kolommen hebben een cirkelvormige doorsnede met een diameter van 750 mm. De 'lengte' is 66 m. Het gewicht is dus

$$(5.37) \quad G_{kolom} = \frac{1}{4}\pi 0,75^2 \cdot 66 \cdot 24 = 700 \text{ kN}.$$

Gewicht van de kern

Bij de stabiliteitsberekening wordt gesteld, dat de hoogbouw van de taartpunt los staat van de rest van het Beatrixkwartier. Dit impliceert, dat de high-rise kern tot de begane grond doorloopt. Het feit, dat de low-rise kern stijver is, wordt dus verwaarloosd. Daar staat tegenover, dat het extra gewicht van de lage kern ook genegeerd wordt. Dit negatieve effect valt weg tegen het positieve van de extra stijfheid. Dit rechtvaardigt de genoemde aanname en maakt de berekening veel eenvoudiger.

De doorsnede van de high-rise kern is $20,08 \text{ m}^2$. Bij een hoogte van 66 meter wordt het gewicht van de kern dus

$$(5.38) \quad G_{kern} = 20,08 \cdot 66 \cdot 24 = 31806 \text{ kN}.$$

Drukkracht per kolom

Voor het invoeren van de kolomgegevens is het noodzakelijk om het vloer- en geveloppervlak, dat elke kolom draagt, te weten. Met behulp van (5.27) kan dan de drukkracht op kolom i worden berekend.

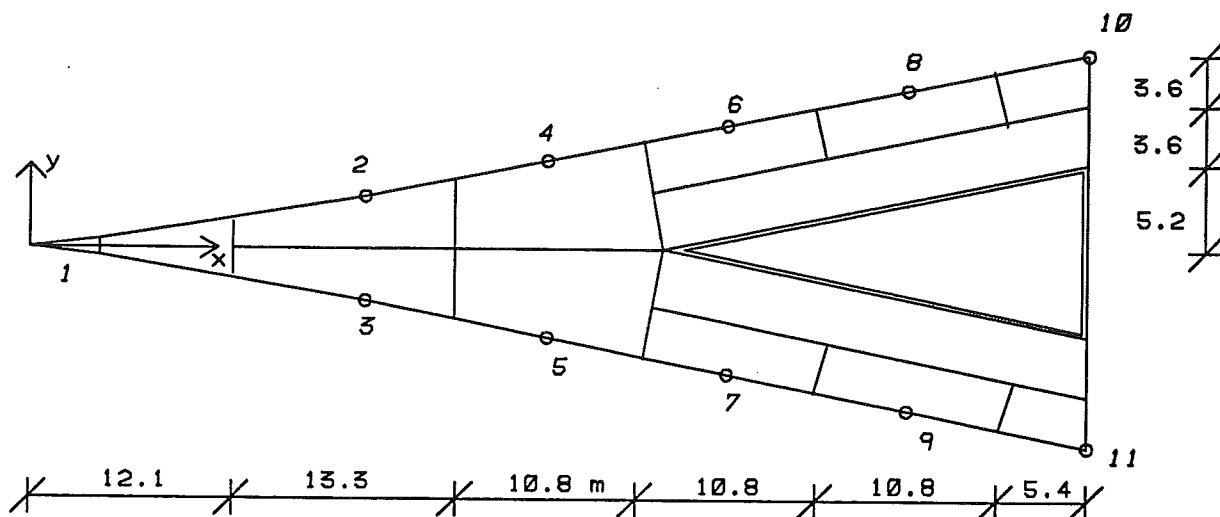


fig. 36 Verdeling van de vloeroppervlakte over de kolommen

Bij de taartpunt zijn er 12 kolommen (inclusief de kern). In figuur 36 is aangegeven welk deel van de vloer cq. gevel naar welke kolom gaat. In onderstaande tabel is de verdeling van de oppervlakken over de kolommen en de kern (kolom 0) gegeven. Tevens zijn de coördinaten in het gekozen assenstelsel weergegeven. Het kolomnummer (cursief) volgt uit figuur 36.

Tabel VII: Kolomgegevens

<i>kolom nr.</i>	x_i	y_i	$A_{\text{gevel},i}$	$A_{\text{vloer},i}$
	m	m	m^2	m^2
0	53,5	0	58,41	313,25
1	4,2	0	84,48	21,43
2	20,7	3,45	43,56	49,92
3	20,7	-3,45	43,56	49,92
4	31,3	5,5	35,64	70,38
5	31,3	-5,5	35,64	70,38
6	41,9	7,55	35,64	38,34
7	41,9	-7,55	35,64	38,34
8	52,5	9,6	35,64	38,34
9	52,5	-9,6	35,64	38,34
10	63,1	11,65	34,98	22,28
11	63,1	-11,65	34,98	22,28

5.4 Controle stabiliteit van de taartpunt

Er zijn een aantal vereenvoudigingen toegepast om de stabiliteits-controle mogelijk te maken volgens de eerder opgestelde regels:

- De taartpunt wordt als een apart gebouw beschouwd. In werkelijkheid bestaat er een constructieve binding met de laagbouw van het Beatrixkwartier.
- De plattegrond van een typische high-rise etage wordt van boven tot onder aanwezig gedacht.
- Elke kolom draagt dat deel van de vloer en gevel, dat direct op de kolom steunt.

5.4.1 Invoer voor TORSSTAB

De specifieke invoergegevens voor de kolommen zijn in vorige paragraaf al berekend. TORSSTAB heeft echter ook een aantal algemene gegevens nodig, die hier zullen worden bepaald. Dit wordt gedaan aan de hand van de volgorde, die in het window ALGEMENE DATA van TORSSTAB wordt aangehouden.

Staafeigenschappen van de kern

De aanname, dat de plattegrond niet verandert, houdt in, dat de kern gekenmerkt wordt door de eigenschappen zoals die in hoofdstuk 4 voor de high-rise kern zijn berekend. Dit waren:

$$I_t = 147,17 \text{ m}^4$$

$$I_y = 154,48 \text{ m}^4$$

$$I_z = 1366,83 \text{ m}^4$$

Materiaaleigenschappen

In de spread-sheet wordt een onderscheid gemaakt tussen de E-modulus van de kern en de kolommen. Voor het Beatrixkwartier geldt voor alle constructie-onderdelen de betonkwaliteit B35. Uit de literatuur [10] is een realistische schatting voor de elasticiteitsmodulus ontleend:

$$E = 15000 \text{ N/mm}^2 = 15 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

Het zij opgemerkt, dat E in dit stadium nog niet nauwkeurig kan worden bepaald, daar bij beton de elasticiteitsmodulus van diverse parameters (bv. wapeningspercentage, betonkwaliteit, 'leeftijd') afhangt.

Het getal van Poisson wordt, zoals bij de statische berekening, op 0,2 gesteld. De glijdingsmodulus wordt dan:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 6,3 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

Hoogte

De hoogte is van belang, daar deze in de formules voor de Eulerse knikkracht (5.24) en (5.25) voorkomt via de lengte $l(=h)$ van de kolom. Formule (5.24) bijvoorbeeld kan als volgt worden geschreven:

$$(5.39) P_{krit} = \frac{\pi^2 EI_x}{4h^2}.$$

Deze formule is gebaseerd op het model, dat in figuur 37 links is afgebeeld. In werkelijkheid echter zal de verticale belasting bij benadering gelijkmatig verdeeld zijn over de hoogte. Dit is het model rechts in figuur 37. Uit het werk van Dicke volgt, dat de exacte oplossing voor het rechtermodel is [18]:

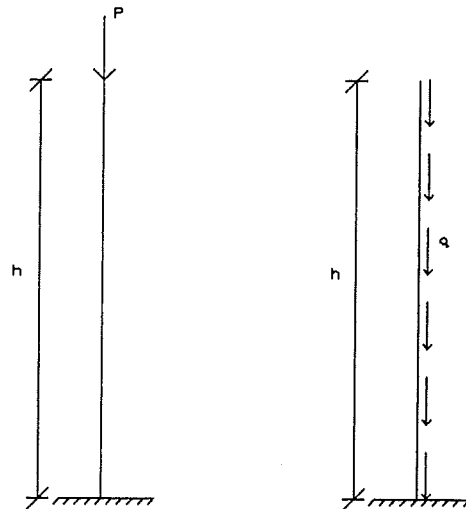


fig. 37 Schematisering kolommen

$$(5.40) P_{krit} = \frac{7,83EI_x}{h^2}.$$

Door de hoogte, die in TORSSTAB wordt ingevoerd, te corrigeren voor het verschil tussen (5.39) en (5.40), wordt een goede weergave van het knikgedrag verkregen. De correctiefactor is

$$(5.41) \sqrt{\frac{7,83,4}{\pi^2}} = 0,56.$$

Voor de taartpunt wordt $h=0,56,66=36,96$ meter gevonden.

Veiligheidsfactor

De veiligheidsfactor wordt bepaald aan de hand van NEN 6702 en bestaat uit twee componenten:

$$(5.42) \gamma = \gamma_f \gamma_m.$$

De eerste component volgt uit art 5.2.1 van NEN 6702:

- 1,2 voor de rustende belasting
- 1,5 voor de variabele belasting.

De tweede component is materiaalafhankelijk en voor beton geeft dat $\gamma_m=1,2$. Om met één veiligheidsfactor te kunnen rekenen wordt de nuttige vloerbelasting met $1,5/1,2$ vermenigvuldigd, zodat

$$(5.35') q_{vloer} = 6,0 + 0,7 + \frac{1,5}{1,2} \cdot 3,5 = 11,08 \text{ kN/m}^2 \text{ en}$$

$$\gamma = 1,2 \cdot 1,2 = 1,44.$$

5.4.2 Resultaten met TORSSTAB

In bijlage 5.4 is de uitvoer van Symphony voor de vier varianten uit de statische berekening verzameld. Daarnaast zijn de algemene gegevens, die in 5.4.1 zijn behandeld nog eens samengevat in de bijlage. De resultaten voor het basis-model zullen stapsgewijs worden doorgelopen. De varianten erop worden summier behandeld.

Basis-model

De uitvoer is in 6 blokken verdeeld. In het eerste blok is onder andere te zien, dat de drie knikkrachten de volgende waarden bezitten:

$$P_x = 4,185 \cdot 10^6 \text{ kN}$$

$$P_y = 37,030 \cdot 10^6 \text{ kN}$$

$$P_\theta = 5,921 \cdot 10^6 \text{ kN}.$$

De knikkracht om de y-as is veel groter dan P_x . Dat is ook logisch, daar de taartpunt veel stijver om de y-as is. De kracht P_θ is niet meer dan een rekengrootheid en is afhankelijk van de plaats van de oorsprong. In blokje 5 wordt de minimale waarde bepaald. De achtergrond hiervan is in paragraaf 5.2 terug te vinden.

Het tweede blok is bedoeld als controle van de invoer aan de hand van een drietal snel te bepalen kentallen. De computer telt het aantal ingevoerde kolommen en berekent het totale vloer- en geveloppervlak.

Het derde blok laat zien, dat het dwarskrachtencentrum op 53.5 meter van de punt van het gebouw is gelegen. Dat is uiteraard de x-coördinaat van het zwaartepunt van de kern, het enige stijve element.

Verder is te zien, dat zwaartepunt van stijfheid en verticale belasting in het basis-model bijna 9.5 meter uit elkaar liggen. Deze excentriciteit is ongeveer 16 % van de breedte van het gebouw, hetgeen behoorlijk veel is.

In het vierde blok wordt de kritische drukkracht volgens formule (5.28) bepaald. De waarde, die uit het iteratieproces volgt, is lager dan de drie waarden P_x , P_y en P_θ . Dat is ook te verwachten, daar de interactie tussen buiging en wringing er voor zorgt, dat het gebouw bij een lagere last bezwijkt dan uit een beschouwing van de afzonderlijke knikgevallen zou volgen.

Tenslotte worden voor de drie richtingen de vergrotingsfactoren berekend. Voor het basis-model is de vergrotingsfactor in θ -richting het grootst, namelijk 1,128. Als de splitsing in drie vergrotingsfactoren niet gewenst is, kan een veilige benadering worden gemaakt door alle verplaatsingen, momenten en dergelijke met 1,128 te vermenigvuldigen.

Variant 1: eindkolom

De toevoeging van een stijve kolom in de punt van het gebouw is in TORSSTAB erg eenvoudig. Invullen van de buigstijfheid om de x- respectievelijk y-as van de ∇ -kolom bij de kolom 1 is voldoende ($I_{x,1}=2,108 \text{ m}^4$; $I_{y,1}=16,51 \text{ m}^4$).

Ten opzichte van het basis-model verandert het gewicht van de kolom

$$(5.43) G_1 = A_{\nabla} h \rho_{\text{beton}} = 4,39 \cdot 66 \cdot 24 = 6954 \text{ kN}.$$

Uit de uitvoer blijkt, dat door toevoeging van de ∇ -kolom de vergrotingsfactor niet verkleind wordt. Sterker nog, de n-waarden in alle drie richtingen nemen iets af, hetgeen hogere vergrotingsfactoren impliceert.

Blijkbaar heeft de toename van het gewicht relatief meer invloed op de uitkomst dan de extra stijfheid. Dit wordt bevestigd door de excentriciteit tussen de twee zwaartepunten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) te berekenen. Deze afstand blijkt 0,35 m te zijn toegenomen en bedraagt nu 9,85 m. In tegenstelling tot de statische berekening geeft de ∇ -kolom dus geen extra stijfheid.

Variant 3: kern plus wand

Te verwachten val, dat de wand als verstijving het beter doet dan de ∇ -kolom. Het gewicht van de wand (kolom 12) is

$$(5.44) G_{12} = 2,63 \cdot 66 \cdot 24 = 4166 \text{ kN}.$$

De stijfheid om de x-as is $12,03 \text{ m}^4$, terwijl om de y-as de stijfheid wordt verwaarloosd. De kolommen 4 en 5 (zie figuur 36), die op dezelfde as staan als de wand, worden ontlast door de wand. Dit is verwerkt in de invoer.

Het resultaat is een kritische knikkracht van $2,716 \cdot 10^6 \text{ kN}$. Dit is 24 % meer dan voor het basis-model geldt. Ook de maximale vergrotingsfactor neemt af:

$$\frac{n_{\theta}}{n_{\theta}-1} = 1,100.$$

De wand doet het dus aanzienlijk beter dan variant 0 en 1.

Variant 4: kern plus wand plus eindkolom

Combinatie van variant 1 en 3 levert een lagere knikkracht op namelijk $P_{\text{krit}} = 2,703 \cdot 10^6 \text{ kN}$. Dit is weer te wijten aan de slechte gewicht/stijfheid verhouding van de hoekkolom.

5.4.3 2^e orde berekening met RUSTAF

Het drie-dimensionale model, dat bij de statische berekening is gebruikt, is ook berekend inclusief de tweede orde effecten. RUSTAF biedt hiertoe de mogelijkheid.

De berekening is gedaan voor variant 3, kern plus wand, en is vooral bedoeld om een indruk te krijgen van juistheid van de resultaten, die via TORSSTAB worden verkregen.

De constructie en horizontale belasting zijn zoals in hoofdstuk 4 is beschreven. Daarnaast is de verticale belasting gemodelleerd als knooppkrachten op de kolommen conform de verdeling uit paragraaf 5.3.

In de volgende tabellen zijn de belangrijkste resultaten verzameld.

Tabel VIII: Resultaten 1^e en 2^e orde berekeningen

	v1	v2	v3	M _{x,kern}	M _{y,kern}	M _t	M _{x,wand}
	mm	mm	mm	MNm	MNm	MNm	MNm
1 ^e orde	208,6	59,3	25,6	-186,5	-19,6	-58,5	-47,4
2 ^e orde	216,6	60,7	25,5	-189,2	-19,5	-60,5	-48,6

Uit het quotiënt van het tweede en eerste orde moment kan de vergrotingsfactor worden bepaald:

$$\frac{n_i}{n_i - 1} = \frac{M_{x,2^e}}{M_{x,1^e}}$$

Als dit voor de drie richtingen wordt gedaan vindt men de n-waarden in de tabel. In deze tabel staan ook de n-waarden volgens TORSSTAB.

Tabel IX: n-waarden

	n _x	n _y	n _θ
RUSTAF	42,7	201	23,7
TORSSTAB	13,8	113	11,0

De verschillen zijn nogal groot, maar in de analytische berekening is het meewerken van de kolommen aan het opnemen van het moment niet meegerekend. Hierdoor worden de verplaatsingen in de eerste orde berekening (zie 4.4) zo'n 35% kleiner, dus het valt te verwachten, dat voor de tweede orde verplaatsingen ook een positief effect uit de 'kolom-stijfheid' volgt.

HOOFDSTUK 6: CONCLUSIES

1. De wringstijfheid van een geperforeerde kern kan, mits de lateien voldoende sterk zijn, analytisch worden berekend met de membraan-analogie. Het verzwakkende effect van de gaten wordt in rekening gebracht door middel van een fictieve dikte van de kernwand ter plaatse van de lateien.
2. Uit het windtunnelonderzoek, dat bij TNO is gehouden, blijkt de wringing op de taartpunt van het Beatrixkwartier veel hoger te zijn dan volgens NEN 6702 zou gelden. Dit bevestigt de conclusie uit deel I, dat de norm wringing onvoldoende beschrijft voor hoge gebouwen, met name door het niet onderkennen van interferentie-effecten.
3. De kern van de taartpunt, zoals die vanuit de functionele eisen is ontworpen, bezit te weinig stijfheid om de verplaatsing in de punt van het gebouw binnen de toelaatbare grenzen te houden.
4. Het toevoegen van een wand blijkt de kern van de taartpunt voldoende te kunnen ontlasten, zodat de verplaatsingen toelaatbaar blijven. Extra verstijving is mogelijk door in de punt van het gebouw het afvoerkanaal voor uitlaatgassen constructief te gebruiken, waardoor de wand ontlast wordt en de verplaatsingen verder afnemen.
5. Door de interactie tussen wringing en buiging als gevolg van de excentrische ligging van de kern in de plattegrond van de taartpunt is de knikkracht lager dan uit zuivere torsie- of buigknik zou volgen. In TORSSTAB, een spread-sheet om de stabiliteit van gebouwen te controleren, is dit effect verwerkt.

LITERATUUR

1. A. Ahmed & C. Ostowari, Longitudinally and transversely spaced cylinders in cross flow, *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, vol. 36, p. 900-910, 1990
2. H. Akdagi & K. Hiramatsu, The response of latticed steel towers due to the action of wind, *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, vol. 30, p. 7-12, 1988
3. R.G. Antonelli, K.J. Meyer & J. Meyer, Torsional instability in structures, *Earthquake engineering/ Structural dynamics*, vol. 9, p. 221-237, 1985
4. T. Balendra, S-L. Lee, S-T Quek & S. Swaddiwuhdipong, Free vibration of asymmetric shear wall-frame buildings, *Earthquake engineering/ Structural dynamics*, vol. 12, p. 629-657, 1988
5. P.V. Bananvalkar, Structural systems to improve wind induced dynamic performance of high-rise buildings, *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, vol. 36, p. 213-224, 1990
6. A.R. Barriga, C.T. Crowe & J.A. Roberson, Pressure distribution on a square cylinder at a small angle of attack in turbulent flow, *Proceeding of the 4th international conference on wind effects*, p. 89-93, Heathrow, 1975
7. J. Blaauwendraad, dictaat Elasticiteitsleer (b16), TU Delft, Delft, 1988
8. J. Blessmann & J.D. Riera, Interaction effects in neighbouring tall buildings, *Proceeding of the 5th international conference on wind engineering*, p. 381-395, Colorado, 1979
9. C.A.M. Bos & H. van Koten, Windbelasting: toelichting op de TGB 1972, TNO, Rijswijk, 1974
10. A.S.G. Bruggeling & W.A. de Bruijn, *Theorie en Praktijk van het gewapend beton*, Stichting Professor Bakkerfonds, Delft, 1986
11. J.E. Cermak, J.A. Peterka & S.T. Thorodsen, Correlation of the components of wind-loading of tall buildings, *Journal of wind engineering and industrial dynamics*, vol. 28, p. 351-360, 1988
12. P.W. Chen & L.E. Robertson, Human perception thresholds of horizontal motion, *Journal of the structural division ASCE*, vol. 98, p. 1681-1695, 1972
13. R.B. Corotis, B. Ellingwood & M.S. Islam, Transfer function models for determining dynamic windloads on buildings, *Journal of wind engineering and industrial dynamics*, vol. 36, p. 449-458
13. J.I. Craig, B.J. Goodno, H. Pabson & K.I. Will, Cladding influence on the dynamic response of tall buildings, *Earthquake engineering/ Structural dynamics*, vol. 12, p. 215-228, 1988
15. W.A. Daghiesh, Experience with wind-pressure measurements on a full-scale building, *Proceedings of the Conference on wind effects*, Washington, 1969
16. F.A. Da Matha Sant'Anna, A. Laneville & J.Y. Trépanier, Detailed pressure field measurements for some 2D rectangular cylinders, *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, vol. 28, p. 241-250, 1988
17. A.G. Davenport & W.H. Melbourne, Tall building criteria and loading, Chapter CL-3, ASCE, New York, 1980
18. D. Dicke, Stabiliteit voor de ontwerper, DUM, Delft, 1991
19. K. Fujii, A. Ohya, Y. Otsuki, H. Tomizawa & K. Washizu, Experiments on the aeroelastic stability of prismatic bars with rectangular sections, *Proceedings of the 3rd international conference on wind effects*, p. 891-898, Tokyo, 1971
20. J. Gandemer, Wind environment around buildings: aerodynamic concepts, *Proceedings of the 4th international conference on wind effects*, p. 423-432, Heathrow, 1975

21. I.S. Gartshore, A. Laneville & G.V. Parkinson, An explanation of some effects of turbulence on bluff bodies, Proceedings of the 4th international conference on wind effects, p. 333-341, Heathrow, 1975
22. J.M. Gere & S.P. Timoshenko, Theory of elastic stability, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1961
23. J.P. Den Hartog, Advanced strength of Materials, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1952
24. D.A. Foutch, The vibrational characteristics of a twelve-storey steel frame building, Earthquake engineering/ Structural dynamics, vol. 6, p. 265-294, 1982
25. R.J. Hansen, J.W. Reed & E.H. Vanmarke, Human response to wind-induced motion of buildings, Journal of the structural division ASCE, vol. 99, p. 1589-1605, 1973
26. G.C. Hart, R.M. DiJulio & M. Lew, Torsional response of high-rise buildings, Journal of the structural division ASCE, vol. 101, p. 397-414, 1975
27. J.B. Hoerner, P.C. Jennings & R.B. Matthiesen, Forced vibration of a tall steel-frame building, Earthquake engineering/ Structural dynamics, vol. 1, p. 107-132, 1972
28. T.-I. Hsu & W.K. Tso, Torsional spectrum for earthquake motions, Earthquake engineering/ Structural dynamics, vol. 6, p. 375-382, 1982
29. H. Inaoka & Y. Taniike, Aeroelastic behaviour of tall buildings in wakes, Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, vol. 28, p. 317-327, 1988
30. A. Kareem, Lateral-torsional motions of tall buildings to windloads, Journal of structural engineering, vol. 111, p. 2479-2496, 1985
31. E. Klaver, H. van Koten & A. Vrouwenvelder, dictaat Stochastische trillingen (b15A), TU Delft, Delft, 1991
32. H.J. Leutheusser, Influence of architectural features on the static wind-loadings of buildings, Proceedings of the Conference on wind effects, Washington, 1969
33. G.R. Lythe & D. Surry, Wind-induced loads on tall buildings, Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, vol. 36, p. 225-234, 1990
34. W. H. Melbourne & J.W. Saunders, Buffeting effects of upstream buildings, Proceedings of the 5th international conference on wind effects, p. 593-606, Colorado, 1979
35. W.K. Tso, Induced torsional oscillations in symmetrical structures, Earthquake engineering/ Structural dynamics, vol. 3, p. 337-346, 1975
36. T.A. Wyatt, The calculation of structural response, Proceedings of the Seminar on modern design of wind-sensitive buildings, London, 1970
37. J.N. Yang, Control of tall buildings under earthquake excitation, Journal of engineering mechanics ASCE, vol. 108, p. 833-849, 1982
38. M.M. Zdravkovich, Review of interference-induced oscillations in flow past two parallel circular cylinders in various arrangements, Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, vol. 28, p. 183-199, 1988

Normen en richtlijnen:

39. TGB-staal '72, NNI, Delft, 1977
40. SBR-rapport nr. 90: Windhinder, -, 1977
41. CUR-rapport 77: Stabiliteit, CUR, Gouda, 1976
42. Ontwerpnorm 6702, NNI, Delft, september 1989
43. VBC '90, NNI, Delft, 1990
44. NEN 6702, NNI, 1991
45. NEN 6770, NNI, 1991

Bijlagen Deel II

BIJLAGE HOOFDSTUK 2

De figuren, waar in deze bijlage naar verwezen wordt, staan in hoofdstuk 2. Alleen figuren, die een B voor het cijfer hebben, staan in deze bijlage. De glijdingsmodulus G is in alle berekeningen $11,76 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$.

Bijlage 2.2 Bewijs 2^e formule van Bredt

Aannames:

- de doorsnede kan vrij welven,
- de wanddikte van de koker is relatief dun, $t \ll \text{omtrek}$,
- de doorsnede is vormvast.

In figuur 4 is een dunwandige koker gegeven. s is de coördinaat langs de omtrek, n staat daar loodrecht op en $t(s)$ is de dikte als functie van s . Het gat wordt bedekt gedacht door een gewichtloze plaat, die door de overdruk p een verplaatsing w zal ondervinden. Door de constante druk zal de plaat evenwijdig aan zichzelf verplaatsen. Het membraan zal dus langs de omtrek verplaatsen van 0 naar w over de lengte $t(s)$. Daar aangenomen is, dat t klein is, stellen we, dat het verloop lineair is. Voor de helling geldt dan:

$$(1) \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{w}{t(s)}.$$

Afgeleid kan worden [7], dat de dwarskracht, die het membraan langs de omtrek op de plaat uitoefent, uitgedrukt kan worden in de verplaatsing w :

$$(2) q = S \frac{\partial w}{\partial n}.$$

Vergelijking (1) en (2) kunnen worden gecombineerd. Het evenwicht van de plaat geeft vervolgens

$$(3) \int_0^s q ds = \int_0^s S \frac{w}{t(s)} ds = p A_{\text{gat}}.$$

Substitutie van $w = \Phi$, $p = 2\kappa_z$ en $S = 1/G$ geeft:

$$(4) \int_0^s \frac{1}{G} \frac{\Phi}{t(s)} ds = 2\kappa_z A_{\text{gat}}.$$

De G -modulus en Φ zijn beiden constant en mogen dus voor het integratie-teken worden gezet. Dat geeft

$$(5) \Phi = \frac{2GA_{\text{gat}}}{\int ds/t}.$$

Het wringend moment is gelijk aan tweemaal de oppervlakte van de zogenaamde Φ -heuvel, zoals uit formule (2.4) blijkt. De oppervlakte van het membraan is te verwaarlozen ten opzichte van A_{gat} dus

$$(6) M_t = 2\Phi A_{gat}.$$

Ook geldt, dat $M_t = G I \kappa_z$, zodat combineren van (5) en (6) een uitdrukking voor het wringtraagheidsmoment oplevert:

$$(7) I_t = \frac{4A_{gat}^2}{\int ds/t}.$$

Dit is de 2^e formule van Bredt.

Bijlage 2.3.1 Bepalen fictieve dikte

Aannames:

- De gaten bevinden zich op elke verdieping en op dezelfde plaats, zodat op elke etage een latei de verbinding vormt tussen twee kern delen.
- De lateien moeten bepaalde afmetingen hebben om de krachten over te kunnen brengen. In deze berekening gaan we vanuit, dat aan deze eis wordt voldaan. Dit moet achteraf steeds gecontroleerd worden !
- De vervorming van de staaf-as van de latei volgt uit figuur 6.
- De latei kan worden geschematiseerd tot een ingeklemde ligger met een lengte $0,5a$ (halve werkelijke overspanning) en een belasting P op het einde. Zie figuur 7.
- De verplaatsing w van het uiteinde van de ingeklemde ligger volgt uit het verplaatsingsbeeld van figuur 6 $w = \frac{1}{2}\gamma a$.

Voor de staafeigenschappen geldt:

$$(8a) EI_1 = \frac{1}{12} E t h_1^3$$

$$(8b) GA_1 = \frac{1}{\eta} G t h_1$$

Voor de ingeklemde ligger is de verplaatsing als gevolg van de puntlast P bekend:

$$(9) w = \frac{Pl}{GA_1} + \frac{Pl^3}{3EI_1},$$

$$(10) \frac{1}{2}\gamma a = \frac{P \frac{1}{2}a}{GA_1} + \frac{P (\frac{1}{2}a)^3}{3EI_1}.$$

Voor P kan de dwarskracht D , die de doorsnede van figuur 5 moet overbrengen, worden gesubstitueerd. De constitutieve vergelijking bij afschuiving is

$$(11) D = GA^* \gamma.$$

GA^* is een vervangende (fictieve) afschuifstijfheid. Door hiermee te werken wordt de latei als het ware uit over de verdiepingshoogte uitgesmeerd.

Combineren van (10) en (11) geeft:

$$(12) \frac{D}{GA^*} = \frac{D}{GA_1} + \frac{Da^2}{12EI_1}.$$

Uit vergelijking (12) kunnen we de fictieve afschuifstijfheid berekenen als we de staaf-eigenschappen invullen:

$$(13) \frac{D}{GA^*} = \frac{D}{1/\eta Gth_1} + \frac{Da^2}{12/12 Eth_1^3} \rightarrow$$

$$(14) \frac{1}{GA^*} = \frac{\eta}{Gth_1} + \frac{G}{E} \frac{a^2}{Gth_1^3}.$$

Omwerken geeft tenslotte:

$$(15) GA^* = \frac{Gth_1}{\eta + G/E(a/h_1)^2}.$$

In de zeepbel-analogie wordt gewerkt met de dikte van het profiel, dus is de volgende stap het vertalen van de fictieve afschuifstijfheid naar een dito dikte t^* . Voor een homogene wand geldt ($\eta=1$):

$$(16) GA^* = Gt^*h.$$

Combineren van (15) en (16) geeft de gezochte fictieve dikte:

$$(17) t^* = t \frac{h_1}{h} \frac{1}{\eta + G/E(a/h_1)^2}.$$

Voor beton geldt meestal $\nu = 0.2$, wat een verhouding tussen buig- en afschuifstijfheid geeft van:

$$(18) \frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)} = 0.42.$$

Voor de latei geldt, dat $\eta=1.2$ dus kan bij geperforeerde kernen van beton voor de fictieve dikte worden geschreven:

$$(19) t^* = t \frac{h_1}{h} \frac{1}{1.2 + 0.42(a/h_1)^2}.$$

Bijlage 2.3.2 Bepalen I_t van een rechthoekige, geperforeerde kern

Voor de dwarskracht geldt volgens formule (2)

$$(20) \quad q_1 = \frac{w_1}{t} S ; q_2 = \frac{w_1}{t^*} S .$$

Voor t^* schrijven we $t^* = t/C$ met

$$(21) \quad C = \frac{h}{h_1} (1.2 + 0.42(a/h_1)^2) .$$

Evenwicht van de plaat geeft:

$$(22) \quad (2d + 2(b-a))q_1 + 2aq_2 = bdp \rightarrow$$

$$(2d + 2(b-a)) \frac{w_1}{t} S + 2a \frac{Cw_1}{t} S = bdp \rightarrow$$

$$(23) \quad w_1 = \frac{1/2 b d t}{d + b - a + C a} \frac{p}{S} .$$

Substitutie van $w_1 = \Phi_1$, $p = 2\kappa_z$ en $S = 1/G$ geeft:

$$(24) \quad \Phi_1 = \frac{b d t \cdot G \kappa_z}{a(C-1) + b + d} .$$

Er geldt, dat het wringend moment twee maal de inhoud van de Φ -heuvel bedraagt en tevens weten we, dat $M_t = G I \kappa_z$, oftewel:

$$(25) \quad I_t = \frac{2 \Phi_1 b d}{G \kappa_z} = \frac{2 b^2 d^2 t}{a(C-1) + b + d} .$$

Vergelijking (25) wordt herschreven door noemer en teller te delen door b en (21) te substitueren:

$$(26) \quad I_t = \frac{2 b d^2 t}{a/b \cdot h/h_1 (1.2 + 0.42(a/h_1)^2) - a/b + 1 + d/b} .$$

Substitutie van de dimensieloze grootheden $v = b/d$; $w = b/h$; $x = b/a$ en $y = h/h_1$ in (26) geeft

$$(27) \quad I_t = \frac{2 b d^2 t}{y/x (1.2 + 0.42(wy/x)^2) - 1/x + 1 + 1/v} .$$

Twee variabelen worden gefixeerd namelijk de verhouding breedte-diepte $v=2$ en de verhouding verdiepingshoogte-breedte $w=10/3$. Hierdoor kan het wringtraagheidsmoment uitgedrukt worden in x en y door middel van de dimensieloze functie $z(x,y)$, waarvan de definitie luidt:

$$(28) z(x,y) = \frac{I_t}{bd^2t}.$$

Invullen van $v=2$ en $w=10/3$ in (27) levert de gezochte functie z op:

$$(29) z(x,y) = \frac{2}{1+y/x(1.2+0.42(10y/3x)^2-1/x+0.5)}.$$

Bijlage 2.4.2 Wringstijfheid van een rechthoekige kern zonder gaten.

Het wringtraagheidsmoment van de rechthoekige kern kan met behulp van de formule van Bredt worden uitgerekend. De maten zijn $b \times d = 4 \times 2 \text{ m}^2$ en de dikte is $0,2 \text{ m}$. Invullen geeft:

$$(30) I_t = \frac{4A_{gat}^2}{\int ds/t} = \frac{4(2.4)^2}{2(2+4)} \cdot 0,2 = 4,267 \text{ m}^4.$$

In het numerieke model wordt gerekend met $G=11,76 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ dus wordt de wringstijfheid

$$(31) GI_t = 11,76 \cdot 10^6 \cdot 4,267 = 50,2 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2 \text{ q.e.d.}$$

Bijlage 2.4.4 Wringstijfheid driehoekige kern (dicht)

Zoals uit het plaatje in paragraaf 2.5.1 (figuur 12) blijkt, is de doorsnede van de kern te vervangen door een membraan en twee gewichtloze platen. De dwarskrachten, die op deze platen werken, zijn

$$(32a) \quad q_1 = \frac{w_1}{t} \cdot S \quad ,$$

$$(32b) \quad q_2 = \frac{w_2}{t} \cdot S \quad .$$

Evenwicht van de twee platen geeft (symmetrie dus beschouw één helft)

$$(33) \quad 0,5q_1 + 1,02 \cdot 13,5 \cdot q_1 - 3,2(q_2 - q_1) = 0,5(0,5 + 3,2)13,5p \quad ,$$

$$(34) \quad 3,2(q_2 - q_1) + 1,02 \cdot 11q_2 + 5,4q_2 = 0,5(3,2 + 5,4)11p \quad .$$

De maten volgen uit figuur 12. Verder uitwerken met behulp van (32) geeft de relatie tussen de verplaatsing w en de druk p

$$(35) \quad 17,5w_1 - 3,2w_2 = 6,17p/s$$

$$(36) \quad -3,2w_1 + 19,6w_2 = 14,33p/s$$

De oplossing van dit stelsel is:

$$(37) \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,500 \\ 0,804 \end{bmatrix} \frac{p}{S} \quad .$$

Substitutie van $w_i = \Phi_i$, $p = 2\kappa_z$ en $S = 1/G$ geeft

$$(38) \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,608 \end{bmatrix} G\kappa_z \quad .$$

Nu kan de wringstijfheid worden bepaald door de inhoud van de Φ -heuvel te bepalen en te delen door κ_z :

$$(39) \quad GI_t = 2[13,5(0,5 + 3,2)\Phi_1 + 11(3,2 + 5,4)\Phi_2]/\kappa_z = 11,76 \cdot 10^6 \cdot 404,1 = 4,75 \cdot 10^9 \text{ kNm}^2 \quad .$$

De schuifkrachten volgen uit de definitie van de schuifspanningen. Zie formule (2.4) :

$$(40) \quad S_x = \tau t = \frac{\Phi}{t} \cdot t = \Phi \quad .$$

Φ is uitgedrukt in $G\kappa_z$. Er geldt tevens, dat

$$(41) \quad M_t = GI_t \kappa_z \rightarrow G\kappa_z = \frac{M_t}{I_t} \quad .$$

Dus de schuifkrachten als functie van het wringend moment zijn

$$(42a) S_x = 1,000 \frac{M_t}{I_t},$$

$$(42b) S_y = 1,608 \frac{M_t}{I_t} [N/m].$$

Bijlage 2.4.5 Wringstijfheid driehoekige kern (open)

De fictieve dikte van de wand ter plaatse van de gaten is

$$(43) t^* = 0,3 \frac{1,2}{3,6} \frac{1}{1,2+0,42(2,4/1,2)^2} = 0,1157t.$$

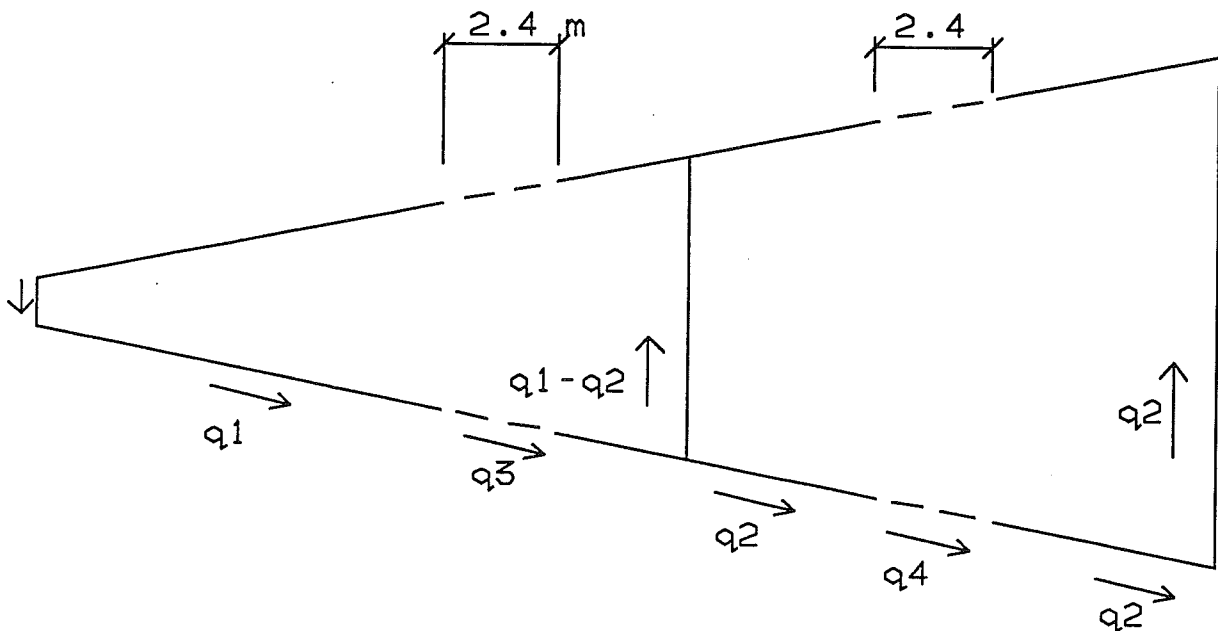


fig. B1 Dwarskrachten op de platen

Dit betekent, dat er nu vier verschillende dwarskrachten zijn:

$$(44a) q_1 = \frac{w_1}{t} \cdot S ; (44b) q_2 = \frac{w_1}{t^*} \cdot S ; (44c) q_3 = \frac{w_2}{t} \cdot S ; (44d) q_4 = \frac{w_2}{t^*} \cdot S .$$

De maten zijn hetzelfde als bij de dichte kern. De lateien zijn 2,4 meter lang. Evenwicht van de platen (uit symmetrie wordt slechts de helft beschouwd)

$$(45) (0,5+1,02 \cdot 13,5-2,4)q_1+2,4q_2+3,2(q_1-q_3)=0,5(0,5+3,2)13,5p ,$$

$$(46) 3,2(q_3-q_1)+(5,4+1,02 \cdot 11-2,4)q_3+2,4q_4 = 0,5 \cdot (3,2+5,4) \cdot 11p .$$

Invullen van q_1 tot en met q_4 in (45) en (46) en vermenigvuldigen met t levert het volgende stelsel op:

$$(47) \quad 12,11w_1 - 10,67w_2 = 24,98p/s$$

$$(48) \quad -10,67w_1 + 128,44w_2 = 47,30p/s$$

De oplossing hiervan is:

$$(49) \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,240 \\ 0,388 \end{bmatrix} \cdot \frac{p}{S}.$$

Substitutie van $w_i = \Phi_i$, $p = 2\kappa_z$ en $S=1/G$ geeft

$$(50) \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,481 \\ 0,776 \end{bmatrix} G\kappa_z.$$

Nu kan de wringstijfheid worden bepaald door de inhoud van de Φ -heuvel te bepalen en te delen door κ_z :

$$(51) \quad GI_t = 2[13,5(0,5+3,2)\Phi_1 + 11(3,2+5,4)\Phi_2]/\kappa_z = 11,76 \cdot 10^6 \cdot 194,87 = 2,29 \cdot 10^9 \text{ kNm}^2.$$

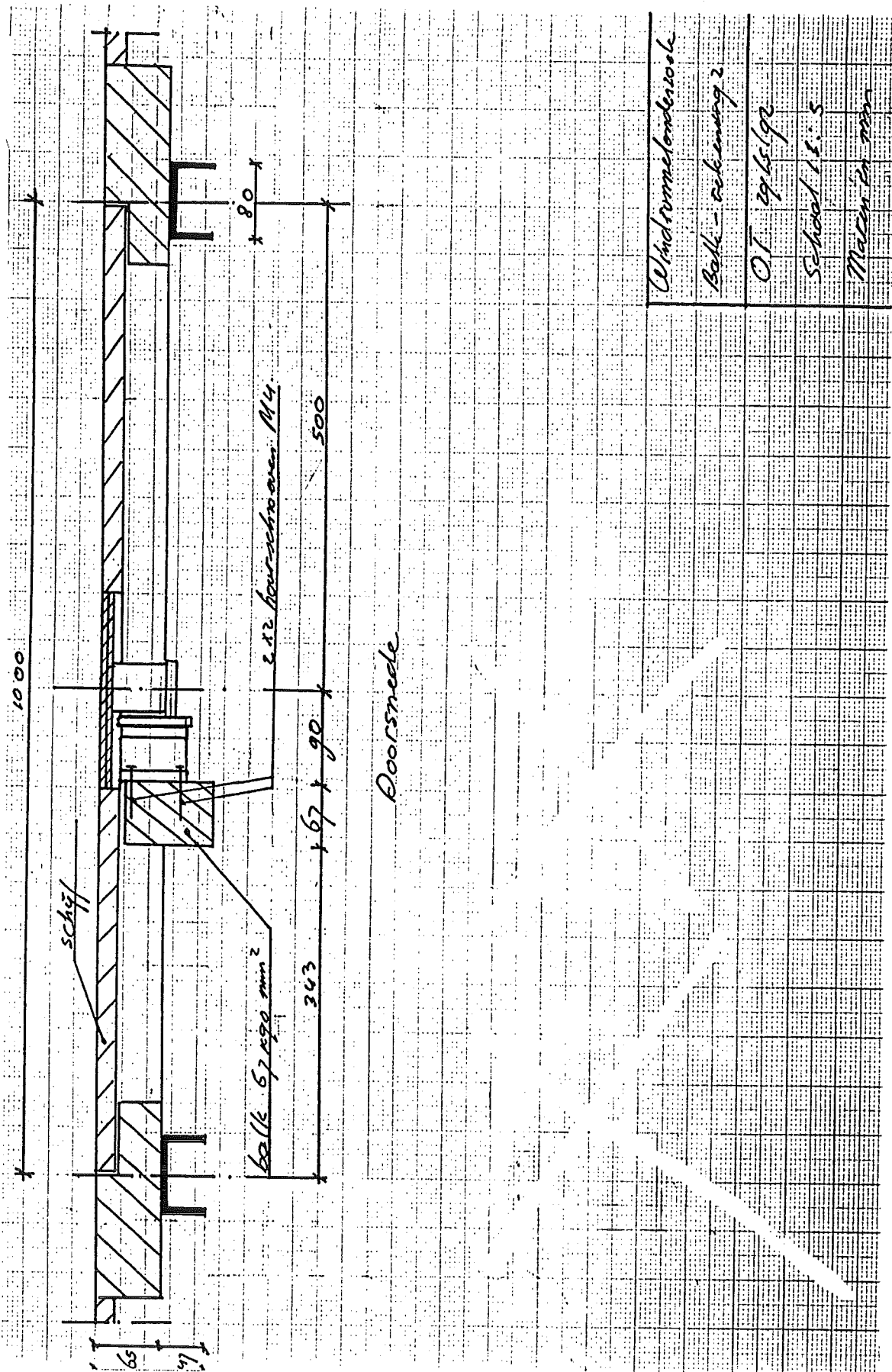
De schuifkrachten als functie van het wringend moment zijn

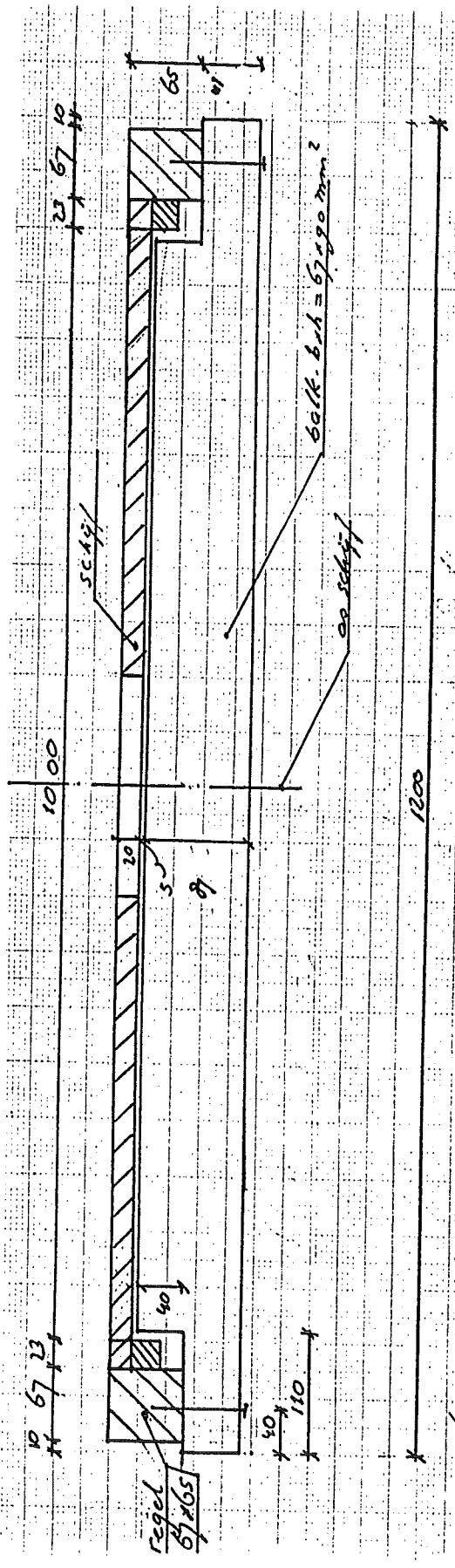
$$(52a) \quad S_x = 0,481 \frac{M_t}{I_t},$$

$$(52b) \quad S_y = 0,776 \frac{M_t}{I_t} [N/m].$$

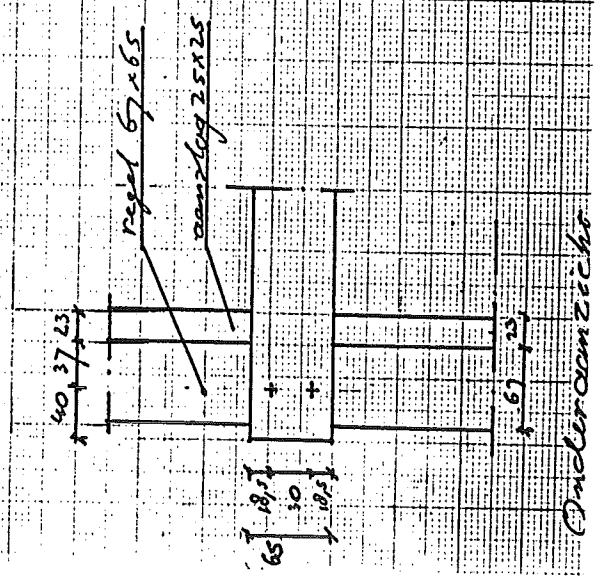
BIJLAGE HOOFDSTUK 3

Bijlage 3.2 Tekeningen Meetopstelling





Zij aanricht



Windruimtelaster	
Balk - rekening 1	
OT 29/5/92	
Schaal 1:5	
Materiaal mm	

Bijlage 3.3 IJking gloeidraad d=.01 mm

p (Pa)	v (m/s)	V (V)	V ₀ (V)	V-V ₀ (V)	ijkkromme (m/s)
0	0,000	1,549	1,549	0,000	12,641
16,7	5,276	2,422	1,549	0,873	5,319
30,8	7,165	2,553	1,549	1,004	7,034
46,5	8,803	2,654	1,549	1,105	8,858
53,7	9,460	2,648	1,516	1,132	9,420
60,5	10,042	2,710	1,549	1,161	10,058
72,0	10,954	2,715	1,516	1,199	10,948
76,5	11,292	2,762	1,549	1,213	11,292
90,5	12,281	2,771	1,516	1,255	12,373
100,5	12,942	2,825	1,549	1,276	12,942
				1,3	13,615
				1,4	16,685

ijking DISA-gloeidraad d=.005 mm

p (Pa)	v (m/s)	V _{oud} (V)	V _{nieuw} (V)	V _{oud} /V _{nieuw} -
0	0,000	1,549	0,739	2,096
46,5	8,803	2,654	1,270	2,090
60,5	10,042	2,710	1,292	2,098
76,5	11,292	2,762	1,317	2,097

gem. vergrotingsfactor: 2,095

Bijlage 3.4.1 Meetgegevens windprofiel

Meetgegevens:

Berekende krommes:

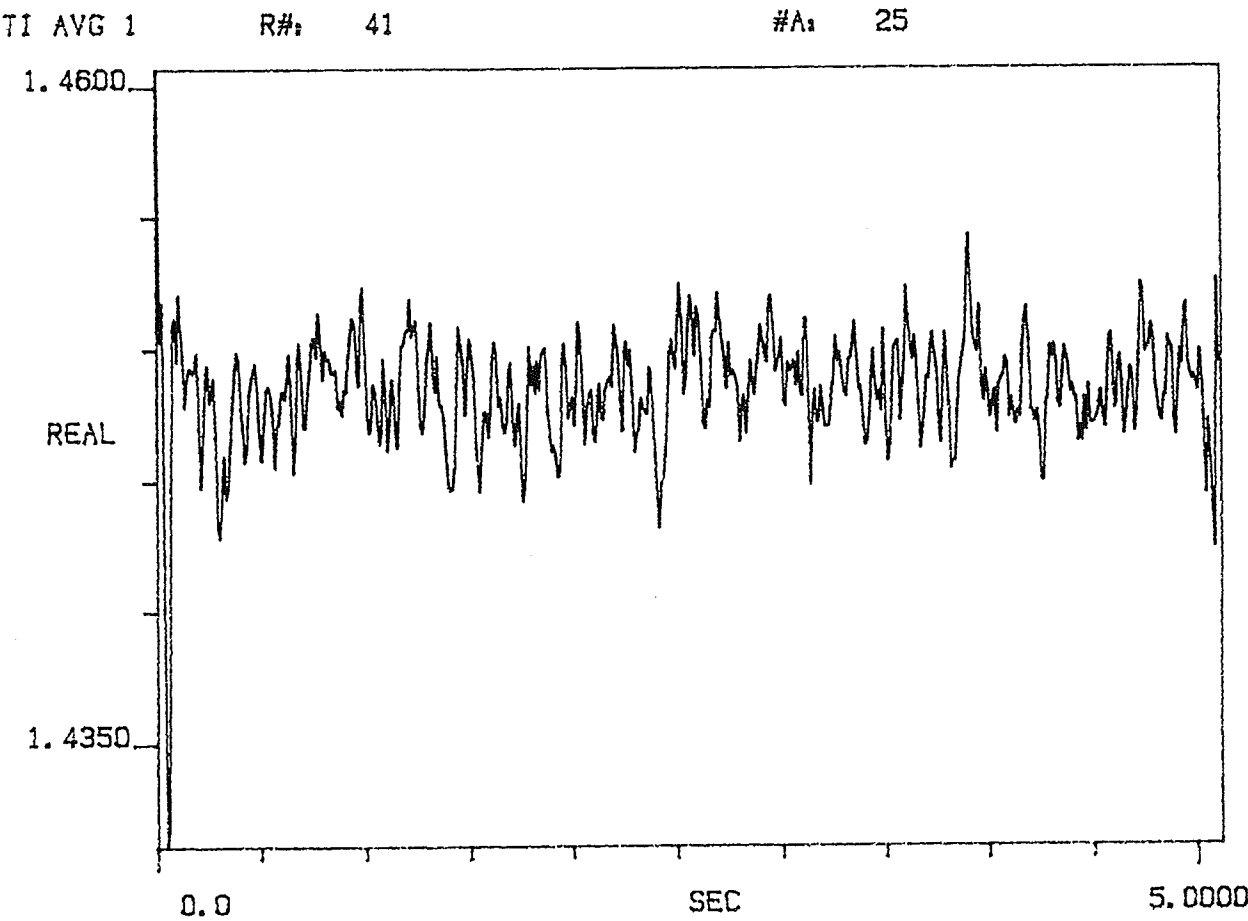
h	gem. v	s.d. v	macht	logaritme
mm	m/s	m/s	v m/s	v m/s
0	0,000	0,000	0,000	0,000
25	4,848	1,000	1,520	1,529
50	4,726	0,721	3,040	3,058
75	5,610	0,735	4,560	4,587
100	6,047	1,310	6,085	6,116
125	7,026	1,360	7,167	7,433
150	8,033	1,010	7,886	8,203
175	8,950	0,559	8,440	8,750
200	9,335	0,513	8,897	9,174
225	9,361	0,317	9,288	9,520
250	9,702	0,258	9,632	9,813
300	10,048	0,346	10,221	10,290
400	10,580	0,132	10,410	10,450
500	10,609	0,084	10,590	10,610
600	10,770	0,074	10,770	10,770

Meetgegevens Turbulentie

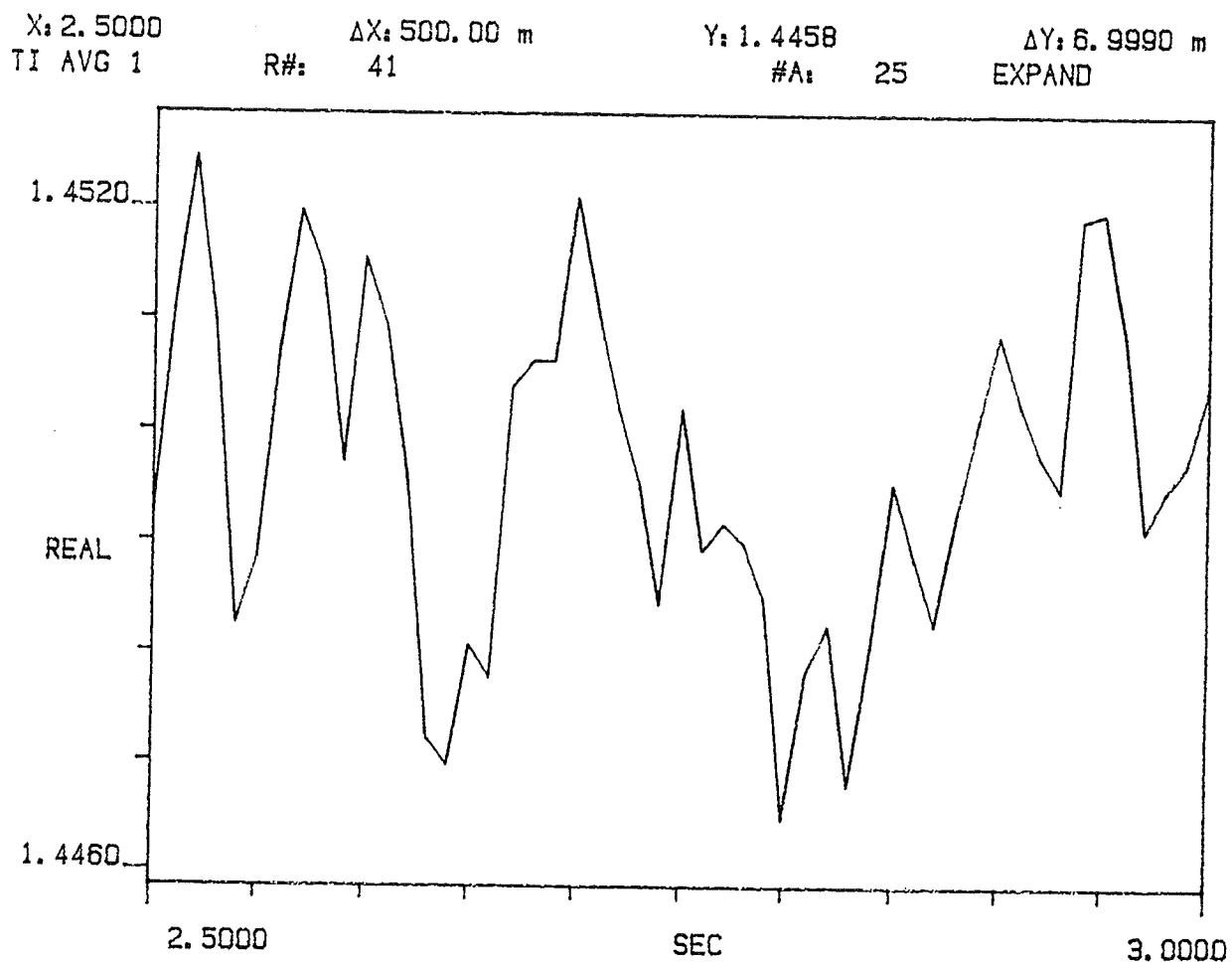
hoogte	turb. I	machtsprofiel
mm	-	-
0	0	0
25	0,206	0,220
50	0,152	0,220
75	0,131	0,220
100	0,216	0,220
125	0,193	0,140
150	0,125	0,097
175	0,062	0,071
200	0,054	0,055
225	0,033	0,043
250	0,026	0,035
300	0,034	0,024
400	0,012	0,014
500	0,008	0,009
600	0,007	0,006

Bijlage 3.4.3 Spectra

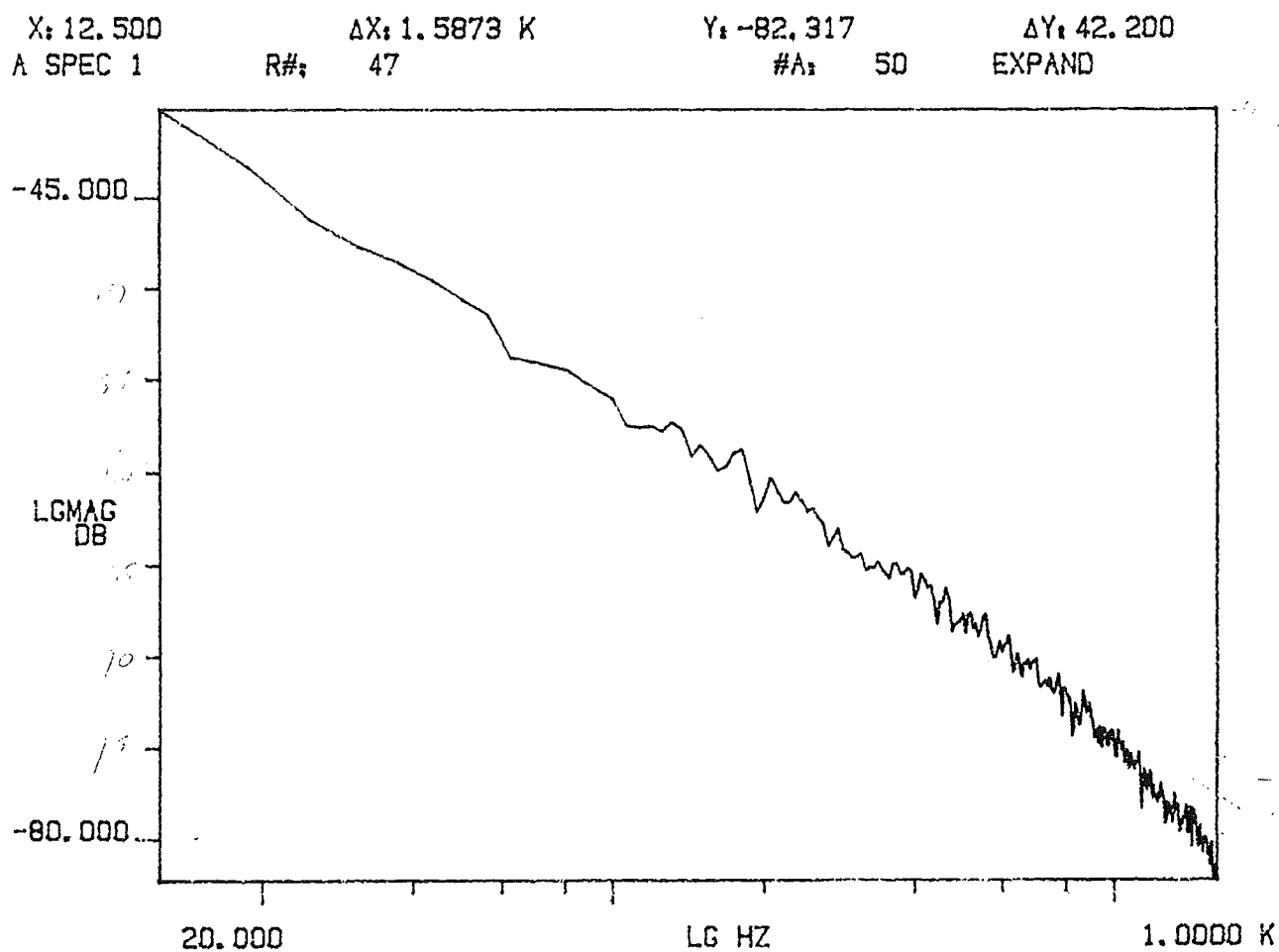
Time-record gloeidraad, vijf seconden



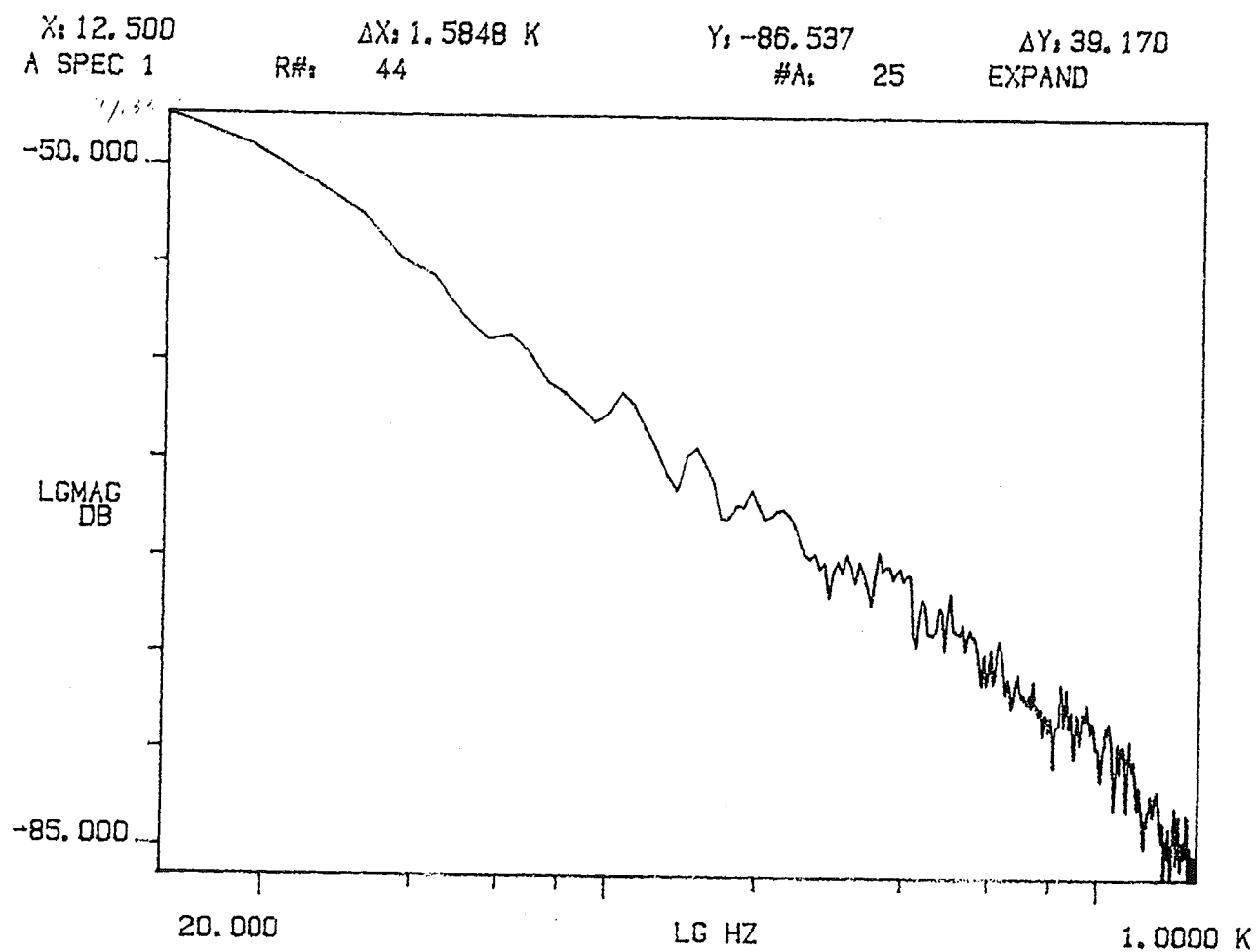
Time-record gloeidraad; uitvergroot: halve seconde



Spectrum voor spanning V op h=100 mm



Spectrum voor spanning V op h=200 mm



Spectrum voor spanning V op h=400 mm

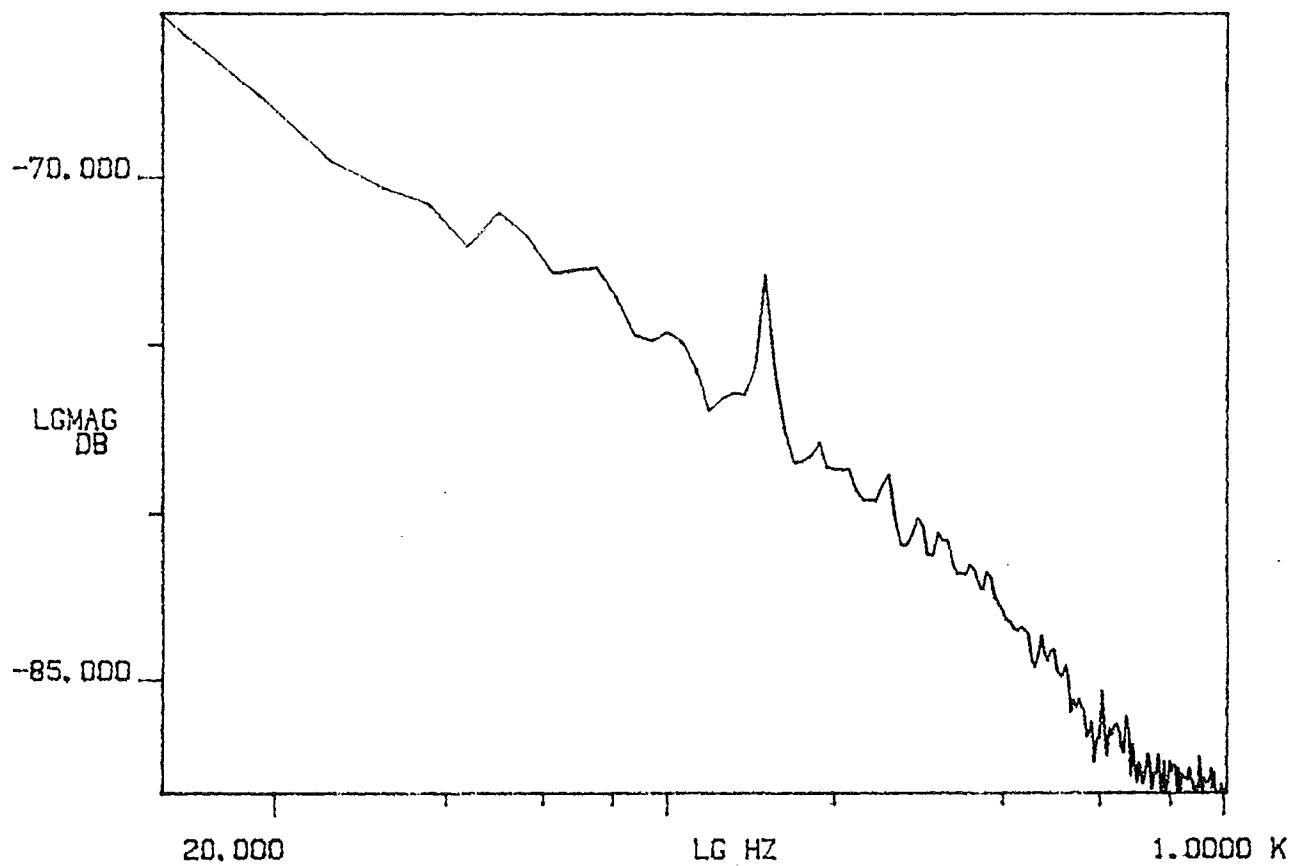
X: 12.500
A SPEC 1

ΔX : 1.0000 K
R#: 45

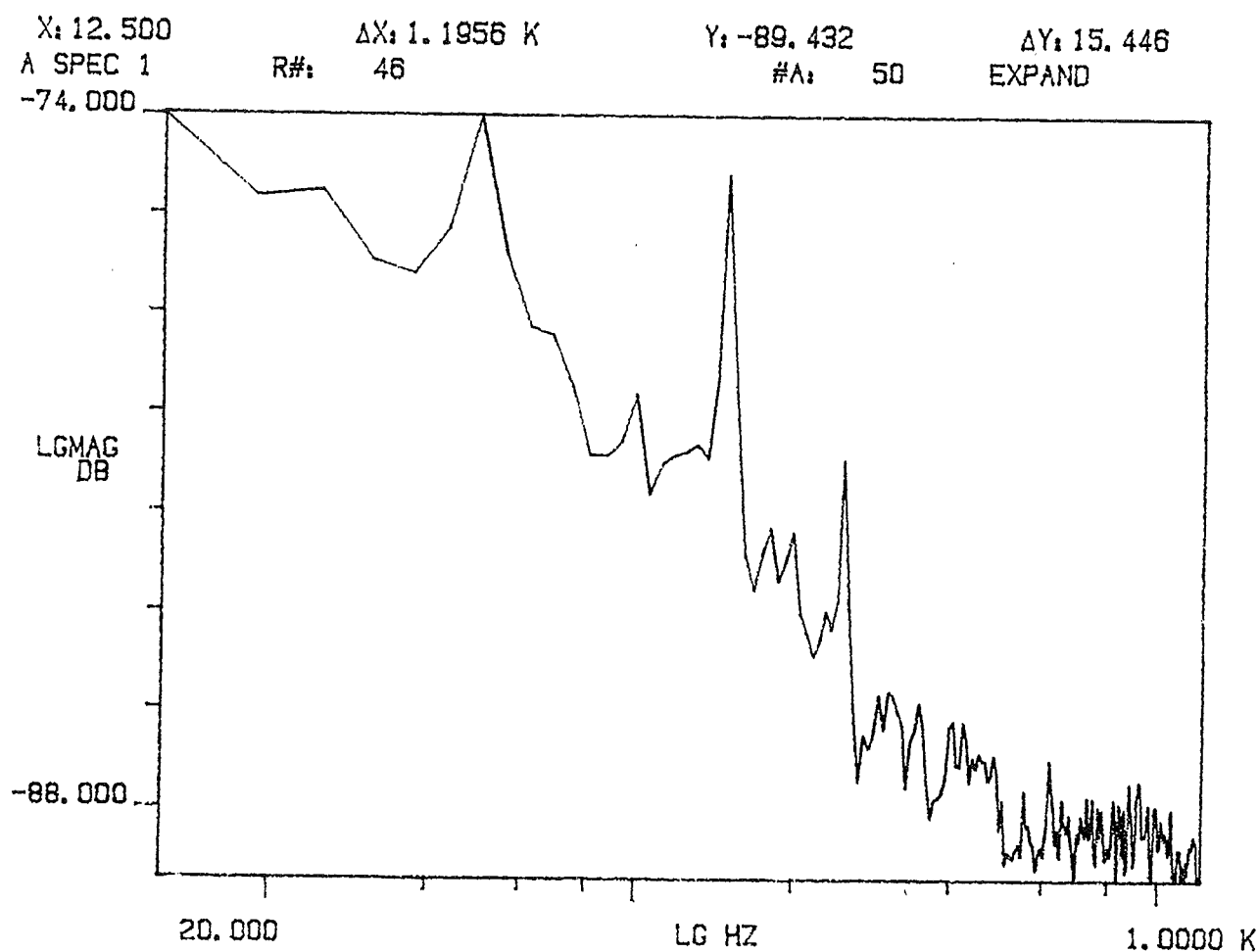
Y: -88.458

#A: 100

ΔY : 23.372
EXPAND



Spectrum voor spanning V op h=600 mm



Bijlage 3.4.4 Meting krachten

Kracht F_x

hoek $^{\circ}$ meetwaarden gemiddelde (n=2000):
(in 0.1 mV)

0	3,720	3,683	3,704
30	2,899	2,935	2,914
60	1,920	1,918	2,062
90	2,176	2,349	2,300
120	3,053	3,047	3,000
150	2,858	2,880	2,812
180	3,383	3,466	3,212
210	3,353	3,400	3,412
240	2,607	2,692	2,562
270	2,437	2,412	2,430
300	2,664	2,636	2,512
330	3,190	3,240	3,162
360	3,720	3,683	3,704

hoek $^{\circ}$ meetwaarden standaard-afwijking (n=2000):
(in 0.01 mV)

0	3,704	3,720	3,670
30	2,450	2,440	2,420
60	0,972	0,976	0,974
90	0,794	0,680	0,619
120	1,050	0,995	1,022
150	1,330	1,350	1,340
180	1,070	1,120	1,090
210	1,150	1,234	1,078
240	0,727	0,718	0,722
270	1,180	0,881	0,608
300	1,100	1,050	1,075
330	1,180	1,100	1,140
360	3,704	3,720	3,670

hoek °	V-V0 (mV)	F _x (N)	C _x -	V ₀ : 1,562 mV
0	0,2140	1,829	0,862	ijkfactor s: 0,117 mV/N normeren op pwbh: 2,121 N
30	0,1354	1,157	0,546	
60	0,0405	0,346	0,163	
90	0,0713	0,609	0,287	
120	0,1471	1,258	0,593	
150	0,1288	1,101	0,519	
180	0,1792	1,531	0,722	
210	0,1826	1,561	0,736	
240	0,1058	0,905	0,426	
270	0,0864	0,739	0,348	
300	0,1042	0,891	0,420	
330	0,1635	1,398	0,659	
360	0,2140	1,829	0,862	

hoek °	σV (mV)	σF _x (N)	F _{min} (N)	F _{max} (N)	C _{x,min} -	C _{x,max} -
0	0,0370	0,316	1,197	2,461	0,564	1,161
30	0,0244	0,208	0,741	1,574	0,349	0,742
60	0,0097	0,083	0,179	0,512	0,085	0,242
90	0,0070	0,060	0,490	0,729	0,231	0,344
120	0,0102	0,087	1,083	1,432	0,511	0,675
150	0,0134	0,115	0,872	1,330	0,411	0,627
180	0,0109	0,093	1,344	1,718	0,634	0,810
210	0,0115	0,099	1,364	1,758	0,643	0,829
240	0,0072	0,062	0,781	1,028	0,368	0,485
270	0,0089	0,076	0,587	0,891	0,277	0,420
300	0,0108	0,092	0,707	1,074	0,333	0,507
330	0,0114	0,097	1,203	1,593	0,567	0,751
360	0,0370	0,316	1,197	2,461	0,564	1,161

Kracht F_y:

hoek
° meetwaarden gemiddelde(n=1000):
(in mV)

0	31,130	31,460	31,760	31,450	31,290	31,290
30	-37,259	-36,790	-36,500	-36,260	-37,120	-36,710
60	-11,080	-10,440	-10,910	-9,970	-9,330	-9,020
90	54,050	55,010	55,990	55,790	56,640	55,510
120	85,950	87,000	86,260	86,430	87,590	86,980
150	45,820	51,640	54,410	55,400	56,020	56,070
180	6,970	12,520	15,790	17,840	17,020	11,670
210	-19,360	-17,020	-19,820	-15,730	-13,700	-11,920
240	-54,440	-54,650	-53,820	52,970	-52,580	-52,080
270	-24,460	-34,850	-38,410	-37,040	-34,230	-40,370
300	84,260	63,760	53,910	56,880	46,630	43,410
330	44,470	44,740	43,840	42,370	42,550	43,740
360	31,130	31,460	31,760	31,450	31,290	31,290

hoek
° meetwaarden standaard-afwijking:
(in mV)

0	5,680	5,690	5,770	5,500	5,960	5,730
30	8,830	9,000	8,810	9,140	8,800	9,000
60	12,900	13,500	13,700	14,000	12,900	12,900
90	8,160	8,210	8,030	7,890	7,870	7,850
120	10,900	11,700	11,400	11,200	10,900	10,900
150	6,190	5,850	5,550	5,610	5,710	5,800
180	3,290	2,720	2,700	2,680	2,770	3,190
210	2,650	2,440	3,190	2,411	2,490	2,560
240	4,370	4,290	4,660	5,460	4,930	4,900
270	6,270	5,400	3,670	3,740	6,510	6,540
300	4,840	4,320	4,390	4,120	4,060	4,130
330	8,300	7,860	8,270	8,430	8,000	8,430
360	5,680	5,690	5,770	5,500	5,960	5,730

hoek °	V-V ₀ (V)	F _y (N)	C _y -	V ₀ : 16,07 mV
0	15,327	0,165	0,078	ijkfactor s:
30	-52,843	-0,569	-0,268	92,8 mV/N
60	-26,195	-0,282	-0,133	
90	39,428	0,425	0,200	normeren op p _{wbh} :
120	70,632	0,761	0,359	2,121 N
150	37,157	0,400	0,189	
180	-2,435	-0,026	-0,012	
210	-32,328	-0,348	-0,164	
240	-51,837	-0,559	-0,263	
270	-50,963	-0,549	-0,259	
300	42,072	0,453	0,214	
330	27,548	0,297	0,140	
360	15,327	0,165	0,078	

hoek °	σV (mV)	σF _y (N)	F _{y,min} (N)	F _{y,max} (N)	C _{y,min} -	C _{y,max} -
0	5,722	0,062	0,042	0,288	0,020	0,136
30	8,930	0,096	-0,762	-0,377	-0,359	-0,178
60	13,317	0,143	-0,569	0,005	-0,268	0,002
90	8,002	0,086	0,252	0,597	0,119	0,282
120	11,167	0,120	0,520	1,002	0,245	0,472
150	5,785	0,062	0,276	0,525	0,130	0,248
180	2,892	0,031	-0,089	0,036	-0,042	0,017
210	2,624	0,028	-0,405	-0,292	-0,191	-0,138
240	4,768	0,051	-0,661	-0,456	-0,312	-0,215
270	5,355	0,058	-0,665	-0,434	-0,313	-0,205
300	4,310	0,046	0,360	0,546	0,170	0,258
330	8,215	0,089	0,120	0,474	0,056	0,223
360	5,722	0,062	0,042	0,288	0,020	0,136

Bijlage 3.4.5 Metingen momenten

hoek meetwaarden gemiddelde (n=1000):
° (in mV)

0	-4,863	-4,554	-4,268	-4,441	-4,710	-4,315
30	-3,576	-3,370	-3,657	-3,252	-3,272	-3,107
60	0,118	0,520	0,373	0,906	0,452	0,635
90	1,778	2,420	2,318	2,217	1,887	1,950
120	-0,136	-0,263	-0,385	-0,455	-0,455	-0,361
150	2,416	2,508	2,255	2,286	2,441	2,325
180	6,315	6,391	6,379	6,482	6,111	6,271
210	8,972	8,909	9,027	8,874	9,159	9,673
240	11,800	12,010	12,820	13,410	13,630	13,500
270	11,500	12,310	12,200	12,210	13,560	13,350
300	8,490	8,633	8,267	8,199	8,500	8,323
330	0,135	0,553	0,896	0,573	0,278	0,623
360	-4,863	-4,554	-4,268	-4,441	-4,710	-4,315

hoek meetwaarden standaard-afwijking:
° (in mV)

0	2,510	2,610	2,690	2,580	2,560	2,650
30	1,810	1,810	1,880	1,800	1,700	1,830
60	0,777	0,769	0,782	0,772	0,774	0,768
90	0,869	0,858	0,807	0,820	0,857	0,823
120	1,250	1,170	1,220	1,180	1,210	1,190
150	1,190	1,250	1,210	1,210	1,190	1,250
180	0,858	0,909	0,862	0,890	0,852	0,811
210	0,751	0,780	0,703	0,777	0,744	0,776
240	0,727	0,708	0,703	0,663	0,665	0,669
270	0,950	0,855	0,836	1,090	0,871	0,818
300	0,871	0,849	0,820	0,839	0,806	0,864
330	1,900	1,860	1,750	1,810	1,860	1,740
360	2,510	2,610	2,690	2,580	2,560	2,650

hoek °	V-V ₀ (V)	M _t (Nm)	C _t -	Vo: 4,597 mV
0	-9,128	-0,0857	-0,202	ijkfactor s: 94,7 mV/Nm
30	-8,020	-0,1217	-0,287	
60	-4,118	-0,0618	-0,146	normeren op p _{wb} ² h: 0,424 Nm
90	-2,550	0,0007	0,002	
120	-4,958	-0,0029	-0,007	
150	-2,237	0,0024	0,006	
180	1,722	0,0165	0,039	
210	4,543	0,0253	0,060	
240	8,346	0,0518	0,122	
270	8,079	0,0496	0,117	
300	3,800	0,0696	0,164	
330	-4,110	-0,0241	-0,057	
360	-9,128	-0,0857	-0,202	

hoek °	σV (mV)	σ M _t (Nm)	M _{t,min} (Nm)	M _{t,max} (Nm)	C _{t,min} -	C _{t,max} -
0	2,591	0,032	-0,149	-0,023	-0,351	-0,053
30	1,801	0,031	-0,184	-0,060	-0,433	-0,141
60	0,775	0,037	-0,137	0,013	-0,323	0,031
90	0,846	0,024	-0,047	0,048	-0,110	0,114
120	1,199	0,033	-0,069	0,063	-0,163	0,150
150	1,217	0,020	-0,038	0,043	-0,091	0,102
180	0,866	0,012	-0,008	0,041	-0,018	0,096
210	0,754	0,011	0,004	0,047	0,009	0,110
240	0,688	0,015	0,022	0,082	0,052	0,193
270	0,902	0,018	0,015	0,085	0,034	0,200
300	0,845	0,015	0,040	0,099	0,094	0,234
330	1,830	0,030	-0,084	0,035	-0,197	0,083
360	2,591	0,032	-0,149	-0,023	-0,351	-0,053

BIJLAGE HOOFDSTUK 4

Bijlage 4.2 Bepalen Staaf eigenschappen van de kern

Wringtraagheidsmoment kern definitief ontwerp

In figuur B2 is de de halve kern afgebeeld. Vanwege de symmetrie is dat voldoende voor het berekenen van de stijfheid. Het plaatje stelt de low-rise kern voor. De high-rise kern is hiervan afgeleid: de vierde koker valt dan weg, zodat een driehoek met een 'hoogte van 26,5 m overblijft.

Voor de berekening van de stijfheid is een assenstelsel aangenomen met de oorsprong in de punt van de kern. De lokale y-as is de symmetrie-as van de kern. De z-as staat daar loodrecht op. De z-coördinaat van de schuine (d.w.z. in de tekening) wanden is afhankelijk van y volgens $z=0,2y$. De dikte van de wanden is 0,3 m. Zoals uit de doorsnede van de kern blijkt, zijn twee fictieve dikten nodig.

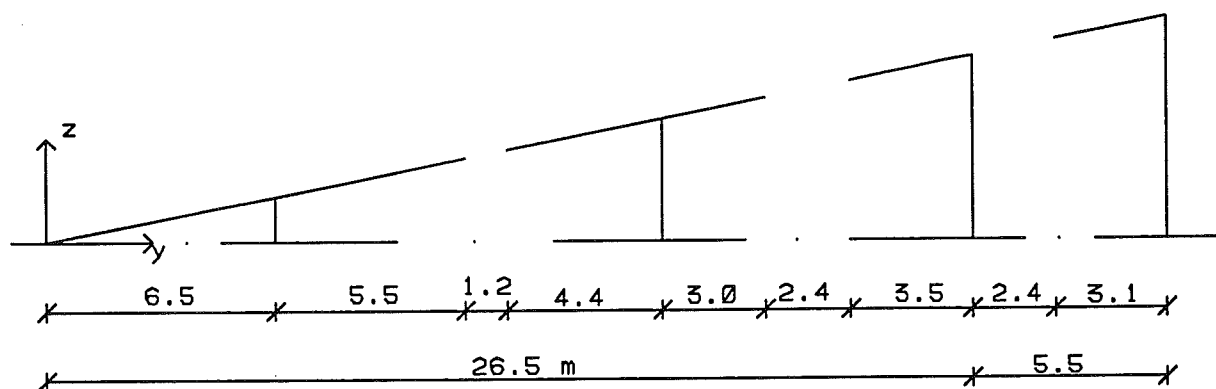


fig. B2 Doorsnede kern van de taartpunt

Ter plaatse van het trappenhuis geldt

$$(1) t_1^* = 0,3 \cdot \frac{1,1}{3,3} \cdot \frac{1}{1,2 + 0,42(1,2/1,1)^2} = 0,0588 \text{ m.}$$

De toegang naar de liftlobby kan in de berekening worden meegenomen via

$$(2) t_2^* = 0,3 \cdot \frac{0,7}{3,3} \cdot \frac{1}{1,2 + 0,42(2,4/0,7)^2} = 0,0104 \text{ m.}$$

De high-rise kern heeft één liftlobby en trappenhuis. De dwarskracht kan als volgt worden gedefinieerd:

$$(3a) q_1 = \frac{w_1}{t} \cdot S ; (3b) q_2 = \frac{w_2}{t} \cdot S ; (3c) q_3 = \frac{w_3}{t} \cdot S ; (3d) q_4 = \frac{w_2}{t_1^*} \cdot S ; (3e) q_5 = \frac{w_3}{t_2^*} \cdot S .$$

Het evenwicht van de drie gewichtloze platen kan nu opgesteld worden, waarbij uit symmetrie slechts de helft wordt beschouwd. De maten volgen uit figuur B2.

$$(4) 1,02 \cdot 6,5q_1 - 1,3(q_2 - q_1) = 0,5 \cdot 1,3 \cdot 6,5p ;$$

$$(5) 1,3(q_2 - q_1) + 1,02(5,5 + 4,4)q_2 + 1,2q_4 + 3,52(q_2 - q_3) = 0,5(1,3 + 3,52)11,1p ;$$

$$(6) -3,52(q_2 + q_3) + 1,02(3 + 3,5)q_3 + 2,4q_5 + 5,3q_3 = 0,5(3,52 + 5,3)8,9p .$$

Invullen van q_1 tot en met q_5 en vermenigvuldigen met t levert het volgende stelsel op:

$$(7) \begin{bmatrix} 7,92 & -1,30 & 0 \\ -1,30 & 21,04 & -3,52 \\ 0 & -3,52 & 84,65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2675 \\ 8,0253 \\ 11,7750 \end{bmatrix} \frac{p}{S} .$$

De oplossing hiervan is:

$$(8) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2293 \\ 0,4217 \\ 0,1566 \end{bmatrix} \frac{p}{S}$$

Substitutie van $w_i = \Phi_i$, $p = 2\kappa_z$ en $S = 1/G$ geeft

$$(9) \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4585 \\ 0,8434 \\ 0,3132 \end{bmatrix} G\kappa_z .$$

Nu kan het wringtraagheidsmoment worden bepaald door de inhoud van de Φ -heuvel te bepalen en te delen door $G\kappa_z$:

$$(10) I_t = 2[6,5 \cdot 1,3\Phi_1 + 11,1(1,3 + 3,52)\Phi_2 + 8,9(3,52 + 5,3)\Phi_3] / G\kappa_z ,$$

$$I_t = 2[3,874 + 45,124 + 24,58] = 147,17 \text{ m}^4 .$$

De wringstijfheid van de low-rise kern kan worden bepaald door toevoeging een vierde evenwichtsvergelijking:

$$(11) -(q_3 - q_6)5,3 + q_5 \cdot 2,4 + 1,02 \cdot 3,1 q_6 + q_6 \cdot 6,4 = 0,5(5,3 + 6,4)5,5p ; \text{ met } q_6 = \frac{w_4}{t} \cdot S .$$

Verder moet aan de derde evenwichtsvergelijking (6) een term $-5,3q_6$ worden toegevoegd worden. Dit geeft het volgende stelsel in matrixvorm na substitutie van (3a) t/m (3e)

$$(12) \begin{bmatrix} 7,92 & -1,30 & 0 & 0 \\ -1,30 & 21,03 & -3,52 & 0 \\ 0 & -3,52 & 86,30 & -5,30 \\ 0 & 0 & -5,30 & 84,50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2675 \\ 8,0253 \\ 11,7750 \\ 9,6525 \end{bmatrix} \frac{p}{S} .$$

De oplossing na substitutie is

$$(13) \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4589 \\ 0,8460 \\ 0,3288 \\ 0,2488 \end{bmatrix} G_{KZ}.$$

Het wringtraagheidsmoment van de low-rise kern wordt dus:

$$(14) I_t = 2[6,5 \cdot 1,3 \Phi_1 + 11,1(1,3 + 3,52) \Phi_2 + 8,9(3,52 + 5,3) \Phi_3 + 5,5(5,3 + 6,4) \Phi_4] / G_{KZ},$$

$$I_t = 2[3,878 + 45,26 + 25,81 + 16,01] = 181,92 \text{ m}^4.$$

Buigstijfheid kern om de lokale y-as

De doorsnede van de kern is in figuur B2 afgebeeld. Vanwege de symmetrie mag voor de berekening van I_y de oorsprong overal op de symmetrie-as worden gelegd. Uit praktische overwegingen wordt hier gekozen voor de punt van de kern.

Eerst zal de high-rise kern worden beschouwd. De buigstijfheid om de y-as kan worden berekend uit de bijdragen van de schuine en de verticale wanden (schuin en verticaal in de tekening):

$$(15) I_{y,kern} = 2 \cdot I_{y,schuin} + I_{y,vert}.$$

De definitie van het buigtraagheidsmoment is

$$(16) I_y = \int_A z^2 dA.$$

Uit onderstaand plaatje is te zien hoe de bijdrage van de schuine wanden wordt berekend:

$$dA = \frac{t \cdot dy}{\cos 11,3^\circ} \text{ en}$$

$$z = 0,2y \rightarrow$$

$$I_{y,schuin} = 1,02 \int_{y_1}^{y_2} (0,2y)^2 t dy \rightarrow$$

$$I_{y,schuin} = 1/3 \cdot 0,01224 y^3 \Big|_{y_1}^{y_2} \rightarrow$$

$$(17) I_{y,schuin} = 4,079 \cdot 10^{-3} (y_2^3 - y_1^3).$$

Invullen van de juiste coördinaten, die uit figuur B2 worden gehaald, geeft

$$(18) I_{y,schuin} = 4,079 \cdot 10^{-3} (12^3 - 0 + 20,6^3 - 13,2^3 + 26,5^3 - 23^3) = 59,6 \text{ m}^4.$$

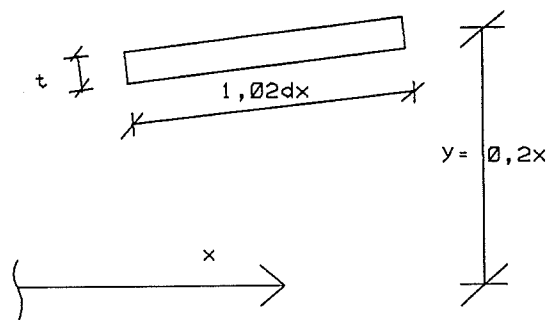


fig. B3 Stukje schuine wand met grootte dA

In (18) is er vanuit gegaan, dat de lateien geen extra stijfheid leveren. De verticale wanden geven

$$(19) I_{y,vert.} = \frac{1}{12} \cdot 0,3(2,3^3 + 6,74^3 + 10,3^3) = 35,28 \text{ m}^4.$$

Van de hoogte van de wanden is steeds 0,3 meter afgetrokken om dubbel tellen te voorkomen. Combineren van (15), (18) en (19) levert het buigtraagheidsmoment om de y-as op:

$$I_y = 154,48 \text{ m}^4.$$

De low-rise kern is 5,5 meter langer, wat een extra stijfheid geeft van

$$(20) I_{y,extra} = 2 \cdot 4,079 \cdot 10^{-3} (32^3 - 28,9^3) + \frac{1}{12} \cdot 0,3(12,8 - 0,3)^3 = 119,24 \text{ m}^4.$$

Het buigtraagheidsmoment van de low-rise is dus

$$I_y = 154,48 + 119,24 \text{ m}^4.$$

Zwaartepunt van de kern

Het zwaartepunt (y_0, z_0) is nodig om de buigstijfheid om de z-as te kunnen berekenen. Verder kan dit punt worden gebruikt in het model voor RUSTAF als de plaats voor de equivalente staaf.

Het moge duidelijk zijn, dat $z_0 = 0$. De y-coördinaat wordt als volgt bepaald:

$$(21) y_0 = \frac{S_y}{A},$$

$$A = 2[(26,5 - 1,2 - 2,4) \cdot 1,02 + 1,3 + 3,52 + 5,3] \cdot 0,3 = 20,08 \text{ m}^2;$$

$$S_y = 2[1,3 \cdot 6,5 + 3,52 \cdot 6,5 + 5,3 \cdot 26,5 + (12,6 + 7,4 \cdot 16,9 + 3,5 \cdot 24,75) \cdot 1,02] \cdot 0,3 = 300,08 \text{ m}^3;$$

$$y_0 = 14,94 \text{ m}.$$

De low-rise heeft een ander zwaartepunt:

$$A = 20,08 + 2 \cdot (3,1 \cdot 1,02 + 6,4) \cdot 0,3 = 25,82 \text{ m}^2;$$

$$S_y = 300,08 + 2 \cdot (3,1 \cdot 1,02 \cdot 30,45 + 6,4 \cdot 32) \cdot 0,3 = 480,72 \text{ m}^3;$$

$$y_0 = 18,62 \text{ m}.$$

Er zit dus een sprong in de lijn, die de zwaartepunten verbindt. In de raamwerkberekening zal dit worden verwaarloosd en wordt de staafas op $y_0 = 14,94 \text{ m}$ van de punt van de kern gedacht. Dit betekent, dat de staaf, die de kern representeert, op $26,5 - 14,94 = 11,56 \text{ m}$ van de zijgevel moet worden geplaatst.

Buigstijfheid om de lokale z-as

Nu het normaalkrachtencentrum bekend is, kan I_z berekend worden. Voor de high-rise kern geldt, dat de bijdrage van de schuine wanden bedraagt (lateien niet meegerekend):

$$(22) I_{z,schuin} = 0,308[\frac{1}{12}12^3 + 12 \cdot (14,94 - 6)^2 + \frac{1}{12}7,4^3 + 7,4 \cdot (16,9 - 14,94)^2 + \frac{1}{12}3,5^3 + 3,5(26,5 - 1,75 - 14,94)^2],$$

$$I_{z,schuin} = 463,75 \text{ m}^4.$$

Voor de rechte wanden geldt

$$(23) I_{z,vert.} = 0,3 \cdot [1,3 \cdot (14,94 - 6,5)^2 + 3,52 \cdot 2,66^2 + 4,6 \cdot (2,66 + 8,9)^2] = 219,67 \text{ m}^4,$$

zodat het totale buigtraagheidsmoment wordt

$$(24) I_z = 2(463,75 + 219,67) = 1366,83 \text{ m}^4.$$

Voor de low-rise komt er nog het volgende bij:

$$(25) I_{y,extra} = 0,308(\frac{1}{12}3,1^3 + 3,1 \cdot (32 - 1,55 - 14,94)^2) + 6,4 \cdot 0,3 \cdot 32 = 136,30 \text{ m}^4,$$

waardoor I_z voor de low-rise wordt:

$$(26) I_y = 1366,83 + 2 \cdot 136,3 = 1639,4 \text{ m}^4.$$

Bijlage 4.3.2 Staaf eigenschappen van de eind-kolom

Uit figuur B4 kunnen de dimensies worden gehaald. De oppervlakte van de doorsnede volgt direct uit het plaatje:

$$(27) A = 2(1,02 \cdot 6 + 1,2)0,3 = 4,39 \text{ m}^2.$$

Het statisch moment ten opzichte van de punt van de kolom is

$$(28) S_y = 2(1,02 \cdot 6 \cdot 3 + 1,2 \cdot 6)0,3 = 15,33 \text{ m}^3.$$

Het zwaartepunt van de kolom bevindt zich dus op $z_0 = 15,33/4,39 = 3,49 \text{ m}$ van de punt.

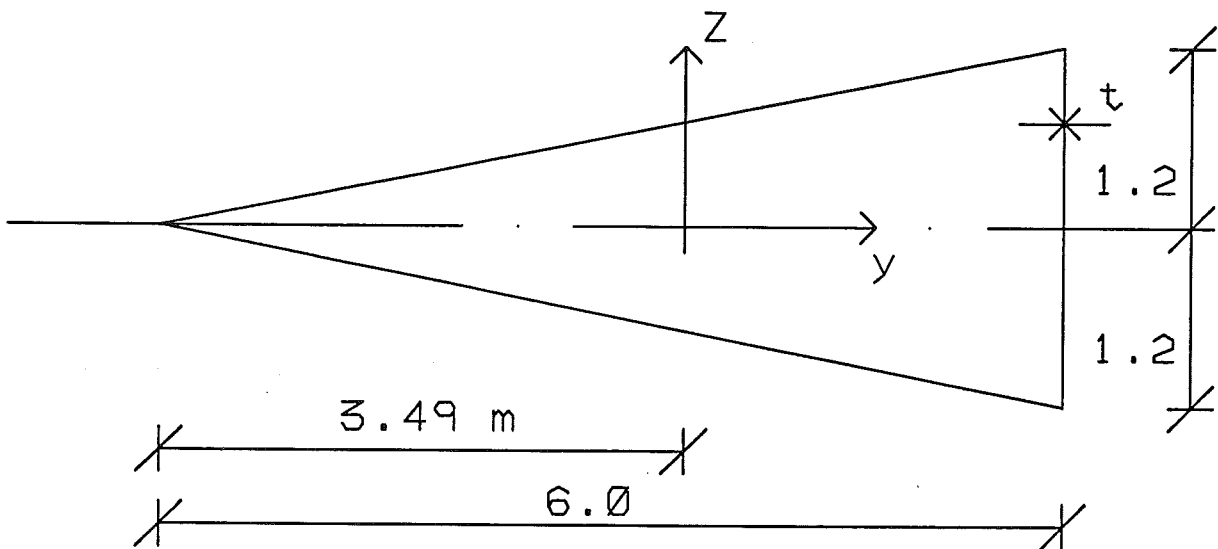


fig. B4 Doorsnede eindkolom

De traagheidsmomenten zijn:

$$(29) I_t = \frac{4A_{gat}^2}{O} = \frac{4(1,2 \cdot 6)^2 0,3}{2(1,02 \cdot 6 + 1,2)} = 4,25 \text{ m}^4,$$

$$(30) I_y = \frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 2,4^3 + 2 \cdot 4,079 \cdot 10^{-3} (6^3 - 0) = 2,108 \text{ m}^4 \text{ en}$$

$$(31) I_z = 2\left(\frac{1}{12} \cdot 0,308 \cdot 6^3 + 0,308 \cdot 6(3 - 3,49)^2\right) + 2 \cdot 4,079 \cdot 10^{-3} (6 - 3,49)^2 = 16,51 \text{ m}^4.$$

Bijlage 4.3.3 Berekening van I_t voor variant 2

Het weglaten van de gaten naar de high-rise liften (zie fig B5) betekent, dat in de membraan-analogie het evenwicht van de derde plaat aangepast moet worden. Dit was de volgende vergelijking (zie bijlage 4.2.1)

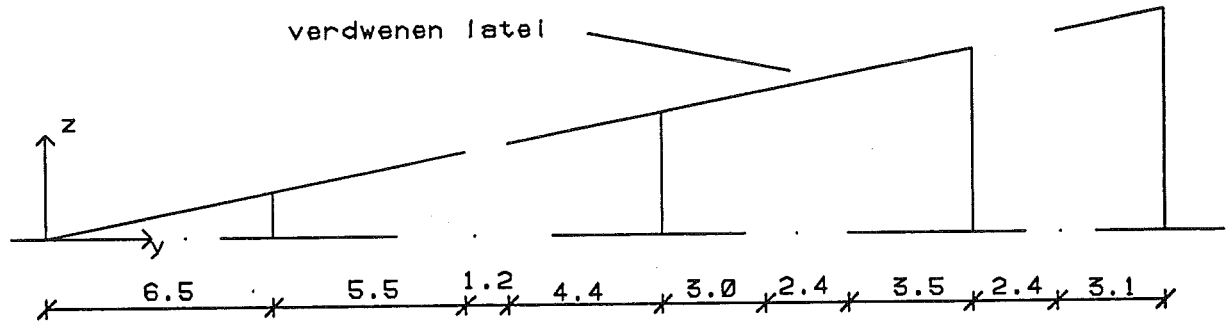


fig. B5 Nieuwe doorsnede van de low-rise kern

$$(32) \quad 3,52(q_3 - q_2) + 1,02(3 + 3,5)q_3 + 2,4q_5 + 5,3(q_3 - q_4) = 0,5(3,52 + 5,3)p.$$

In q_5 zat de stijfheid van de latei verwerkt via de fictieve dikte. De latei is verdwenen, dus wordt q_5 door q_3 vervangen. Dat geeft het volgende stelsel in matrix-vorm (q_1 t/m q_4 zijn al omgewerkt naar verplaatsingen)

$$(33) \quad \begin{bmatrix} 7,92 & -1,30 & 0 & 0 \\ -1,30 & 21,04 & -3,52 & 0 \\ 0 & -3,52 & 17,85 & -5,30 \\ 0 & 0 & -5,30 & 84,50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2675 \\ 8,0253 \\ 11,7750 \\ 9,6525 \end{bmatrix} \frac{p}{S}.$$

Na vegen resulteert

$$(34) \quad \begin{bmatrix} 7,92 & 0 & 0 & 0 \\ -1,30 & 20,83 & 0 & 0 \\ 0 & -3,52 & 17,26 & 0 \\ 0 & 0 & -5,30 & 82,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,268 \\ 8,233 \\ 13,166 \\ 13,695 \end{bmatrix} \frac{p}{S}.$$

Hieruit kan worden berekend, dat

$$(35) \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4950 \\ 1,0654 \\ 1,6271 \\ 0,3305 \end{bmatrix} G\kappa_z.$$

De wringstijfheid volgt uit de Φ -heuvel:

$$(36a) \quad I_t = 2[6,5 \cdot 1,3\Phi_1 + 11,1(1,3 + 3,52)\Phi_2 + 8,9(3,52 + 5,3)\Phi_3 + 5,5(5,3 + 6,4)\Phi_4]$$

$$(36b) \quad I_t = 2(4,1828 + 57,001 + 127,72 + 21,268) = 420,35 \text{ m}^4.$$

Bijlage 4.3.4 Staaf eigenschappen van de wand

In figuur B6 staan de afmetingen van de wand. Ter oriëntatie is de symmetrie-as van het gebouw aangegeven. Het zwaartepunt van de wand ligt op deze as.

De doorsnede van de wand is:

$$(37) A = 2(0,75^2 + 2,5 \cdot 0,3) = 2,63 \text{ m}^2.$$

De traagheidsmomenten zijn:

$$(38) I_t = \frac{1}{3} l t^3 = \frac{1}{3} 6,03^3 = 0,054 \text{ m}^4,$$

$$(39) I_y = \frac{1}{12} \cdot 1,02 \cdot 0,3^3 + 2 \cdot 0,75^2 \cdot 2,8^2 = 12,03 \text{ m}^4 \text{ en}$$

$$(40) I_z \approx \frac{1}{12} 6,03^3 = 10^{-4} \text{ m}^4.$$

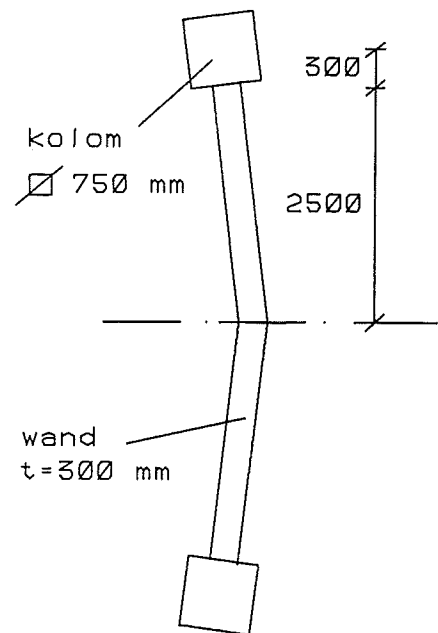
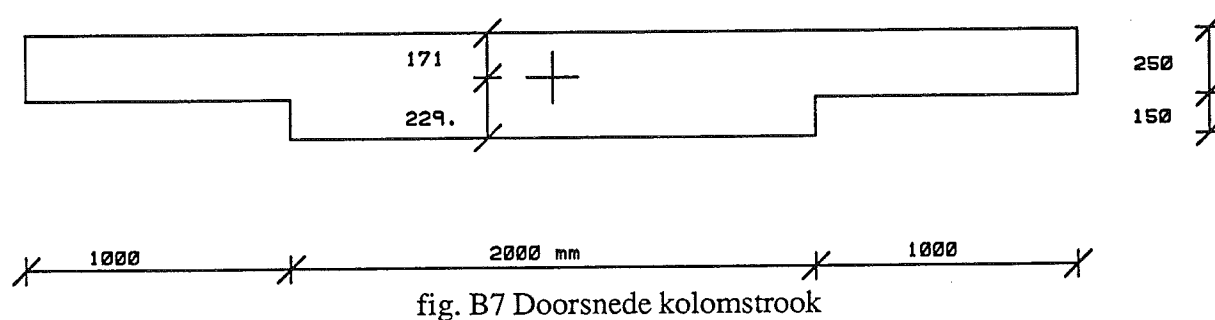


fig. B6 Afmetingen tussenwand

Bijlage 4.4.1 Staaf eigenschappen van de kolomstrook

De kolomstrook wordt geschematiseerd zoals in het onderstaande plaatje is weergegeven. Aan weerszijden van de strook wordt een deel van het vloerveld meegerekend met een breedte van 1000 mm. Het zwaartepunt van de aldus verkregen doorsnede ligt op 171 mm van de bovenkant vloer.



Het wringtraagheidsmoment wordt afgeschat met de formule voor dunwandige strippen:

$$(41) I_t = \frac{1}{3} l t^3 = \frac{1}{3} 4.0,25^3 + \frac{1}{3} 2.0,4^3 = 0,0635 \text{ m}^4.$$

De buigtraagheidsmomenten worden respectievelijk

$$(42) I_y = \frac{1}{12} 0,25 \cdot 6^3 + \frac{1}{12} 0,15 \cdot 2^3 = 4,60 \text{ m}^4 \text{ en}$$

$$(43) I_z = 6 \cdot 0,25(0,125 - 0,158)^2 + \frac{1}{12} 2 \cdot 0,25^3 + 2 \cdot 0,15(0,242 - 0,075)^2 + \frac{1}{12} 2 \cdot 0,15^3 = 0,0182 \text{ m}^4.$$

BIJLAGE HOOFDSTUK 5

Bijlage 5.1.1 Afleiding van de differentiaalvergelijkingen

Buigend moment om de x- en y-as

Beschouw het punt S met coördinaten (x_i, y_i) en de kracht P_i , die in S aangrijpt. De verplaatsingen van de oorsprong, als de constructie zich in uitgebogen toestand bevindt, zijn u , v en θ . Voor S geldt dan (zie figuur B8)

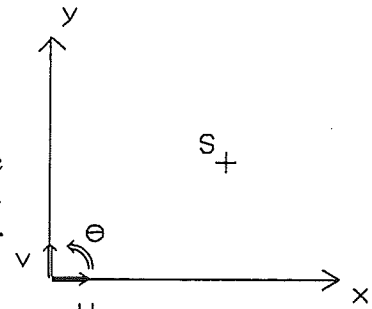


fig. B8 Punt S in een assenstelsel

- (1) $u_s = u - y_i \theta$,
- (2) $v_s = v + x_i \theta$.

Stel nu, dat punt S de ligging van kolom i in de plattegrond van een gebouw aangeeft. Dan kan voor het staafdeel tussen $z=0$ en $z=z$ het momentenevenwicht worden opgesteld. In figuur B9 en B10 is weergegeven welke krachten en momenten er op het staafdeel werken. De tekenafspraken uit paragraaf 1.3 zijn aangehouden.

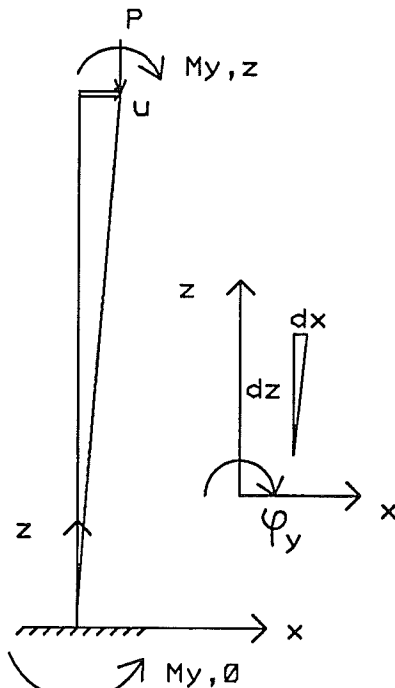


fig. B9 Buiging om de y-as

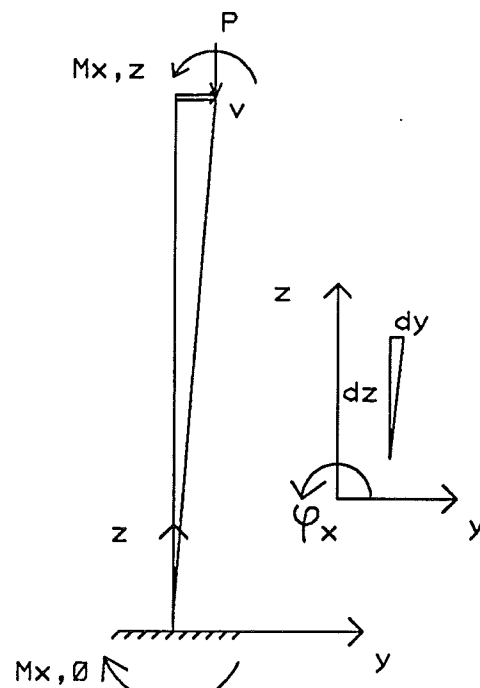


fig. B10 Buiging om de x-as

Uit het momentenevenwicht van het staafdeel volgt dus volgens figuur B9 en B10:

- (3) $M_{y,z} + P u_s - M_{y,0} = 0$,
- (4) $M_{x,z} - P v_s + M_{x,0} = 0$.

In figuur B9 en B10 zijn tevens de kinematische relaties afgeleid. In combinatie met de bekende constitutieve relatie tussen moment en hoekverdraaiing geeft dat:

$$(5) M_{x,i} = EI_{x,i} \phi_x' = -EI_{x,i} v_s'',$$

$$(6) M_{y,i} = EI_{y,i} \phi_y' = +EI_{y,i} u_s''.$$

Combinatie van (1), (3) en (6) alsmede (2), (4) en (5) geeft:

$$(7) +EI_y(u-y_i\theta)'' + P_i(u-y_i\theta) - M_{y0,i} = 0,$$

$$(8) -EI_y(v+x_i\theta)'' - P_i(v+x_i\theta) - M_{x0,i} = 0.$$

Stel, dat er n kolommen zijn, inclusief de kern, die kolom 0 wordt genoemd, dan worden de twee differentiaalvergelijkingen voor buiging om respectievelijk de y - en x -as gevonden door te sommeren:

$$(9) \sum_0^n EI_{y,i} u'' + \sum_0^n P_i u - \sum_0^n EI_{y,i} y_i \theta'' - \sum_0^n P_i y_i \theta - M_{y,0} = 0,$$

$$(10) \sum_0^n EI_{y,i} v'' + \sum_0^n P_i v + \sum_0^n EI_{x,i} x_i \theta'' + \sum_0^n P_i x_i \theta + M_{x,0} = 0.$$

$M_{x,0}$ en $M_{y,0}$ zijn de totale inklemmingsmomenten. Als een kolom scharnierend is opgelegd, zijn (9) en (10) nog steeds geldig als voor de stijfheden nul wordt ingevuld. De differentiaalvergelijkingen voor buiging zijn gekoppeld: drie onbekenden en twee vergelijkingen. Er is dus tenminste nog één D.V. nodig. Deze zal in het volgende blokje worden bepaald.

Wringing om de oorsprong

Beschouw kolom i , die in de plattegrond van het gebouw vastgelegd is door het punt S . In nevenstaande figuur is aangegeven hoe de kolom vervormt en welke krachten in het horizontale vlak dat tot gevolg heeft. De uitbuigingsvorm is die van de ingeklemde kolom. Ook eventuele pendelkolommen zullen in deze vorm uitbuigen, daar aangenomen is, dat de vloeren in hun vlak oneindig stijf zijn. Een pendelkolom zal daarom de vervorming opgedrongen krijgen.

Het stukje staaf ter grootte van dz laat zien, dat de scheefstand van de kolom kleine horizontale krachten tot gevolg heeft. Op de hoogte z geldt:

$$(11) F_{s,x} = P_i \frac{du}{dz} = P_i u_s' = P_i(u' - y_i \theta).$$

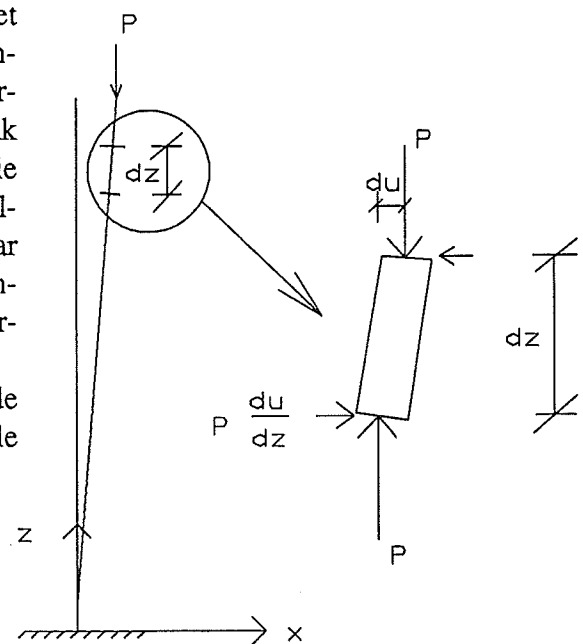


fig. B11 De vervormde kolom

Voor de y-richting kan analoog worden afgeleid:

$$(12) F_{s,y} = P_i v_s' = P_i (v' + x_i \theta).$$

Op de kolom werken $F_{s,x}$ en $F_{s,y}$ in de negatieve richting, maar op de totale constructie in de positieve richting. Nu kan het wringend moment om de oorsprong worden bepaald. Het is voor het oplossen van het stelsel makkelijk als het dwarskrachtencentrum als oorsprong gekozen is. Het is echter geen noodzakelijke voorwaarde. In feite mag de oorsprong zelfs willekeurig worden gekozen. Dit zal nog worden bewezen.

Uit figuur B12 volgt het wringend moment om de oorsprong als gevolg van de horizontale krachten

$$(13) M_t = -F_{s,x} y_i + F_{s,y} x_i.$$

en combineren met (11) en (12) drukt M_t uit in u , v en θ :

$$(14) M_t = -P_i y_i u' + P_i y_i^2 \theta' + P_i x_i v' + P_i x_i^2 \theta'.$$

Als kolom i een buigstijfheid om de x - en/of y -as bezit, zal buiging van de kolom zoals hiervoor is geschetst dwarskrachten tot gevolg hebben. De dwarskracht is de afgeleide van het moment dus volgt uit (5) en (6):

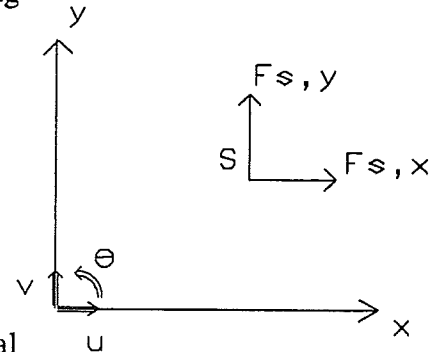


fig. B12 Richting van de spatkrachten

$$(15) D_{x,i} = -M_{y,i}' = -EI_{y,i}(u - y_i \theta)''',$$

$$(16) D_{y,i} = +M_{x,i}' = -EI_{x,i}(v + x_i \theta)'''.$$

De aldus ontstane dwarskrachten werken de verplaatsingen tegen. Voor de bijdrage aan het wringend moment geldt dus (analogie met formule (13))

$$(17) M_t = D_{x,i} y_i - D_{y,i} x_i.$$

Invullen van (15) en (16) in (17) en combinatie met (14) geeft het totale wringende moment als functie van u , v , en θ .

$$(18) M_t = -EI_{y,i} y_i u''' - P_i y_i u' + EI_{x,i} x_i v''' + P_i x_i v' + (EI_{y,i} y_i^2 + EI_{x,i} x_i^2) \theta''' + P_i (y_i^2 + x_i^2) \theta'.$$

De differentiaalvergelijking voor wringing is bekend ($-m_t = GI_t \theta''$). Sommeren van de bijdragen van de n kolommen en (18) éénmaal differentiëren geeft de gezochte derde D.V.:

$$(19) \sum_0^n EI_{y,i} y_i u'''' + \sum_0^n P_i y_i u'' - \sum_0^n EI_{x,i} x_i v'''' - \sum_0^n P_i x_i v'' - \sum_0^n (EI_{y,i} y_i^2 + EI_{x,i} x_i^2) \theta'''' + [GI - \sum_0^n P_i (y_i^2 + x_i^2)] \theta'' = 0.$$

Bijlage 5.1.2 Oplossing van het stelsel vergelijkingen

Substitutie

Het stelsel, dat door de formules (9), (10) en (19) wordt gevormd, kan worden opgelost door de uitbuigingsvorm te substitueren, die in deel I al gebruikt is. Daar is aangetoond, dat dit is toegestaan.

$$(20a) u = A_1 [1 - \cos(\alpha z)],$$

$$(20b) v = A_2 [1 - \cos(\alpha z)],$$

$$(20c) \theta = A_3 [1 - \cos(\alpha z)] ; \alpha = \frac{\pi}{2l}.$$

Voordat (20) in de drie vergelijkingen wordt gesubstitueerd, worden de volgende grootheden gedefinieerd:

$$(21) EI_x = \sum_0^n EI_{x,i} ;$$

$$(22) EI_y = \sum_0^n EI_{y,i} ;$$

$$(23) P = \sum_0^n P_i$$

$$(24) x_1 = \frac{\sum_0^n P_i x_i}{P} ;$$

$$(25) y_1 = \frac{\sum_0^n P_i y_i}{P} ;$$

$$(26) x_2 = \frac{\sum_0^n EI_{x,i} x_i}{EI_x} ;$$

$$(27) y_2 = \frac{\sum_0^n EI_{y,i} y_i}{EI_y} ;$$

$$(28) r_1^2 = \frac{\sum_0^n P_i (x_i^2 + y_i^2)}{P} ;$$

$$(29) r_2^2 = \frac{\sum_0^n EI_{x,i} x_i^2 + EI_{y,i} y_i^2}{EI_x + EI_y}.$$

De coördinaten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) behoren toe aan het respectievelijk NC en DC. Als de oorsprong in het DC ligt zijn x_2 en y_2 dus beiden nul. Herschrijven van (9), (10) en (19) met behulp van (21) tot en met (29) en substitutie van (20) geeft het volgende stelsel:

$$(30) EI_y \alpha^2 A_1 \cos \alpha z + P A_1 (1 - \cos \alpha z) - EI_y y_2 \alpha^2 A_3 \cos \alpha z - P y_1 A_3 (1 - \cos \alpha z) - M_{y,0} = 0,$$

$$(31) EI_x \alpha^2 A_2 \cos \alpha z + P A_2 (1 - \cos \alpha z) + EI_x x_2 \alpha^2 A_3 \cos \alpha z + P x_1 A_3 (1 - \cos \alpha z) + M_{x,0} = 0,$$

$$(32) -EI_y y_2 \alpha^4 A_1 \cos \alpha z + P y_1 \alpha^2 A_1 \cos \alpha z + EI_x x_2 \alpha^4 A_2 \cos \alpha z - P x_1 \alpha^2 A_2 \cos \alpha z + (EI_y + EI_x) r_2^2 \alpha^4 A_3 \cos \alpha z + [GI - P r_1^2] \alpha^2 A_3 \cos \alpha z = 0.$$

Intermezzo

Zowel vergelijking (30) als (31) bevat een constante uitdrukking. In (30) bestaat deze uit drie componenten, namelijk PA_1 , $-Py_1A_3$ en $-M_{y,0}$.

De vraag is wat de waarde van $M_{y,0}$ is. Beschouw hiertoe nogmaals figuur B5. Uit het momentenevenwicht van de hele constructie ($z=l$) volgt, dat

$$M_{y,0} = \sum_0^n P_i u_i(l) ,$$

$$M_{y,0} = \sum_0^n P_i (u(l) - y_i \theta(l)).$$

Verder is bekend, dat

$$u(l) = A_1 (1 - \cos \frac{\pi l}{2l}) = A_1;$$

$$\theta(l) = A_3.$$

Dus $M_{y,0} = PA_1 - Py_1A_3$, oftewel de constante uitdrukking in (30) is in totaal nul ! Analoog kan voor (31) aangetoond worden, dat de constante term daar ook nul is.

Oplossing

Het volgende stelsel blijft over, nadat de cosinussen zijn weggestreept:

$$(33) (EI_y \alpha^2 - P)A_1 + (Py_1 - EI_y y_2 \alpha^2)A_3 = 0,$$

$$(34) (EI_x \alpha^2 - P)A_2 + (EI_x x_2 \alpha^2 - Px_1)A_3 = 0,$$

$$(35) (Py_1 - EI_y y_2 \alpha^2)A_1 + (EI_x x_2 \alpha^2 - Px_1)A_2 + [(EI_x + EI_y)r_2^2 \alpha^2 + GI - Pr_1^2]A_3 = 0.$$

Dit stelsel heeft een niet-triviale oplossing als de determinant van de coëfficiënten-matrix nul is. Teneinde de berekening hiervan te vereenvoudigen, worden wederom een aantal grootheden gedefinieerd. De lezer zal in P_x en P_y de Eulerse knikkracht kunnen herkennen.

$$(36) P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2} ;$$

$$(37) P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{4l^2} \text{ en}$$

$$(38) P_\theta = \frac{GI + (EI_x + EI_y) (\pi r_2 / 2l)^2}{r_1^2},$$

waarmee de determinant als volgt kan worden beschreven:

$$(39) \begin{vmatrix} P_y - P & 0 & Py_1 - P_y y_2 \\ 0 & P_x - P & Px_2 - Px_1 \\ Py_1 - P_y y_2 & Px_2 - Px_1 & r_1^2 (P_\theta - P) \end{vmatrix} = 0$$

De uitwerking van (39) wordt achterwege gelaten. Uiteindelijk wordt de volgende derdegraads vergelijking gevonden:

$$(40) P^3 \left[1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{r_1^2} \right] + P^2 \left[\frac{P_x(y_1^2 + 2x_1x_2) + P_y(x_1^2 + 2y_1y_2)}{r_1^2} - P_x - P_y - P_\theta \right] \\ + P \left[P_x P_y + P_x P_\theta + P_y P_\theta - \frac{P_x^2 x_2^2 + 2P_x P_y (x_1 x_2 + y_1 y_2) + P_y^2 y_2^2}{r_1^2} \right] + \frac{P_x^2 P_y x_2^2 + P_x P_y^2 y_2^2}{r_1^2} - P_x P_y P_\theta = 0.$$

Dit is de gezochte uitdrukking.

Invariantie van de oplossing

Zoals reeds is opgemerkt, is het resultaat van de berekening, de knikkraft, onafhankelijk van de de ligging van de oorsprong. Dit impliceert, dat het niet noodzakelijk is om de ligging van het dwarskrachtencentrum te kennen. De invariantie bij een translatie van het assenstelsel kan bewezen worden. Daartoe wordt (40) herschreven door te vermenigvuldigen met r_1^2 en de uitdrukking te herschikken:

$$(41) P^3 [r_1^2 - x_1^2 - y_1^2] + P^2 [P_x(y_1^2 + 2x_1x_2 - r_1^2) + P_y(x_1^2 + 2y_1y_2 - r_1^2) - r_1^2 P_\theta] \\ + P [P_x(r_1^2 P_\theta - x_2^2 P_x) + P_x P_y(r_1^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2) + P_y(r_1^2 P_\theta - y_2^2 P_y)] + P_x P_y [P_x x_2^2 + P_y y_2^2 - r_1^2 P_\theta] = 0.$$

Als de oorsprong in het DC ligt, wordt vergelijking (41)

$$(42) P^3 [r_1^2 - x_1^2 + y_1^2] + P^2 [P_x(y_1^2 - r_1^2) + P_y(x_1^2 - r_1^2) - r_1^2 P_\theta] + P r_1^2 [P_x P_y + P_x P_\theta + P_y P_\theta] - r_1^2 [P_x P_y P_\theta] = 0.$$

Stel nu echter, dat een nieuwe oorsprong wordt gekozen. Het nieuwe assenstelsel wordt via de volgende translatie verkregen:

$$(43a) \bar{x} = x + a$$

$$(43b) \bar{y} = y + b.$$

De grootheden (24) tot en met (29) veranderen door deze translatie. Door substitutie van (43) in de formules voor x_1 enzovoorts worden de relaties tussen de oude en de nieuwe waarden gevonden:

$$(24') \bar{x}_1 = x_1 + a$$

$$(25') \bar{x}_2 = a$$

$$(26') \bar{y}_1 = y_1 + b$$

$$(27') \bar{y}_2 = b$$

$$(28') \bar{r}_1^2 = r_1^2 + a^2 + b^2 + 2x_1 a + 2y_1 b$$

$$(29') \bar{r}_2^2 = r_2^2 + \frac{EI_x a^2 + EI_y b^2}{EI_x + EI_y}.$$

De overgestreepte grootheden behoren bij het nieuwe assenstelsel. De niet-overgestreepte grootheden gelden als het DC de oorsprong is (oude situatie). Als de vergelijking voor de knikkraft invariant is, moet substitutie van de overgestreepte grootheden in (41) formule (42) opleveren. Dit zal stapsgewijs worden aangetoond door de coëfficiënten C_0 tot C_3 te berekenen, met

$$(43) C_3P^3 + C_2P^2 + C_1P + C_0 = 0.$$

C3:

$$\begin{aligned} & \bar{r}_1^2 - \bar{x}_1^2 - \bar{y}_1^2 \\ & = r_1^2 + a^2 + b^2 + 2x_1a + 2y_1b - (x_1+a)^2 - (y_1+b)^2 \\ (44) & = r_1^2 - x_1^2 - y_1^2. \end{aligned}$$

C2:

$$(45) P_x(\bar{y}_1^2 + 2\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{r}_1^2) + P_y(\bar{x}_1^2 + 2\bar{y}_1\bar{y}_2 - \bar{r}_1^2) - \bar{r}_1^2 P_\theta.$$

Eerst wordt het produkt $\bar{r}_1^2 P_\theta$ bepaald. Uit de definitie (38) blijkt, dat hiervoor geldt

$$\begin{aligned} (46) \quad \bar{r}_1^2 P_\theta &= GI + (EI_x + EI_y) (\pi r_{2l})^2 \\ &= GI + (EI_x + EI_y) (\pi r_{2l})^2 + \frac{EI_x a^2 + EI_y b^2}{EI_x + EI_y} (\pi/2l)^2. \end{aligned}$$

Oftewel:

$$(47) \quad \bar{r}_1^2 P_\theta = r_1^2 P_\theta + a^2 P_x + b^2 P_y.$$

Uit vergelijking (47) volgt, dat het produkt $\bar{r}_1^2 P_\theta$ minimaal is als de oorsprong in het DC ligt. Deze eigenschap wordt in paragraaf 5.2 gebruikt om de vergrotingsfactor voor torsie te kunnen bepalen.

Invullen van (24') - (29') en (47) in (45) geeft

$$\begin{aligned} & P_x[(y_1+b)^2 + 2(x_1+a)a - r_1^2 - a^2 - b^2 - 2x_1a - 2y_1b] + P_y[(x_1+a)^2 + 2(y_1+b)b - r_1^2 - a^2 - b^2 - 2x_1a - 2y_1b] \\ & - r_1^2 P_\theta - a^2 P_x - b^2 P_y \\ (48) & = P_x[y_1^2 - r_1^2] + P_y[x_1^2 - r_1^2] - r_1^2 P_\theta. \end{aligned}$$

C1:

$$P_x(\bar{r}_1^2 P_\theta - \bar{x}_2^2 P_x) + P_x P_y(\bar{r}_1^2 - 2\bar{x}_1\bar{x}_2 - 2\bar{y}_1\bar{y}_2) + P_y(\bar{r}_1^2 P_\theta - \bar{y}_2^2 P_y).$$

Op dezelfde manier als bij C2 vinden we nu:

$$\begin{aligned} & P_x(r_1^2 P_\theta + b^2 P_y) + P_x P_y(r_1^2 - a^2) + P_y(r_1^2 P_\theta - b^2 P_x) \\ (49) & = r_1^2 [P_x P_\theta + P_x P_y + P_y P_\theta]. \end{aligned}$$

C₀:

$$\begin{aligned} & P_x P_y [P_x \bar{x}_2^2 + P_y \bar{y}_2^2 - \bar{r}_1^2 P_\theta] \\ & = P_x P_y [P_x a^2 + P_y b^2 - r_1^2 P_\theta - P_x a^2 - P_y b^2] \\ (50) & = -r_1^2 P_x P_y P_\theta. \end{aligned}$$

Vergelijken van C₀ tot en met C₃ ((44), (48), (49) en (50)) met de overeenkomstige coëfficiënten in (42) laat zien, dat translatie van het assenstelsel geen invloed heeft op de vergelijking waaruit de knikkracht wordt bepaald. Hiermee is de invariantie bewezen.

Bijlage 5.4 Resultaten TORSSTAB

Algemene gegevens voor de stabiliteitsberekening

Kern:

GI_t	$=9e+08 \text{ kNm}^2$
I_x	$=154,5 \text{ m}^4$
I_y	$=1367 \text{ m}^4$
x	$=53,5 \text{ m}$ (x-coördinaat t.o.v. oorsprong)
y	$=0 \text{ m}$ (y-coördinaat t.o.v. oorsprong)
E_{kern}	$=2e07 \text{ kN/m}^2$
$A_{\text{gevel,k}}$	$=58,41 \text{ m}^2$ (gevelopp. direct op de kern rustend)
$A_{\text{vloer,k}}$	$=313,3 \text{ m}^2$ (vloeropp. direct op de kern rustend)
G_{kern}	$=31806 \text{ kN}$ (eigen gewicht van de kern)

Overig:

hoogte	$=36,96 \text{ m}$
n	$=20$ etages
E_{kolom}	$=2e07 \text{ kN/m}^2$
γ	$=1,44$ (veiligheidsfactor volgens NEN 6702)
Q_{gevel}	$=1,275 \text{ kN/m}^2$
Q_{vloer}	$=11,08 \text{ kN/m}^2$
G_{kolom}	$=700 \text{ kN}$ (gewicht van standaard-kolom, afwijkende)
(kolom-gewichten invoeren via KOLOM-DATA)	

Resultaten

De indexering 'o' stelt θ voor.

variant 0

1. Totalen van grootheden

EI_x	$=2,317e09 \text{ kNm}^2$	P_x	$4,185e06 \text{ kN}$
EI_y	$=2,050e10 \text{ kNm}^2$	P_y	$3,703e07 \text{ kN}$
GI	$=9,270e08 \text{ kNm}^2$	P_o	$5,921e06 \text{ kN}$
P_{kern}	$=102712 \text{ kN}$		
P_{tot}	$=223949 \text{ kN}$		

2. Controle:

aantal kolommen:

11

totaal vloeroppervlak:

15464 m^2

totaal geveloppervlak:

$10276,2 \text{ m}^2$

3a. Zwaartepunt van belasting:

$x_1 = 44,067 \text{ m}$

$y_1 = 0,000 \text{ m}$

3b. Zwaartepunt stijfheid (DC):

$x_2 = 53,500 \text{ m}$

$y_2 = 0,000 \text{ m}$

3c. Straal 1 en 2 t.o.v. oorsprong:

$r_1^2 = 2179,851 \text{ m}^2$

$r_2^2 = 290,644 \text{ m}^2$

4. Iteratief bepalen van P_{krit} :

Coëfficiënten:

$C_3 = 2,379e02$

$C_2 = -1,111e10$

$C_1 = 8,888e16$

$C_0 = -1,437e23$

P_{iteratie} :

$2,186e06 \text{ kN}$

$2,186e06 \text{ kN}$

$2,186e06 \text{ kN}$

5. P_o om DC berekenen:

Straal 1 en 2 t.o.v. DC:

$r_1^2 = 326,922 \text{ m}^2$

$r_2^2 = 0,000 \text{ m}^2$

$P_o = 2,836e06 \text{ kN}$

6. Bepaling vergrotingsfactoren:

$n_x = 12,98$

$n_y = 114,83$

$n_o = 8,79$

$n_x/(n_x-1) = 1,083$

$n_y/(n_y-1) = 1,009$

$n_o/(n_o-1) = 1,128$

Let op! De kritische drukkracht is : 2185501 kN

variant 1

1. Totalen van grootheden:

$EI_x =$	$2,349e09 \text{ kNm}^2$	$P_x =$	$4,243e06 \text{ kN}$
$EI_y =$	$2,075e10 \text{ kNm}^2$	$P_y =$	$3,748e07 \text{ kN}$
$GI =$	$9,270e08 \text{ kNm}^2$	$P_o =$	$6,085e+06 \text{ kN}$
$P_{\text{kern}} =$	102712 kN		
$P_{\text{tot}} =$	230203 kN		

2. Controle:

aantal kolommen:

11

totaal vloeroppervlak:

15464 m^2

totaal geveloppervlak:

$10276,2 \text{ m}^2$

3a. Zwaartepunt van belasting:

$x_1 = 42,984 \text{ m}$

$y_1 = 0,000 \text{ m}$

3b. Zwaartepunt stijfheid (DC):

$x_2 = 52,836 \text{ m}$

$y_2 = 0,000 \text{ m}$

3c. Straal 1 en 2 t.o.v. oorsprong:

$r_1^2 = 2121,110 \text{ m}^2$

$r_2^2 = 287,155 \text{ m}^2$

4. Iteratief bepalen van P_{krit} :

Coëfficiënten:

$C_3 = 2,735e02$

$C_2 = -1,289e10$

$C_1 = 1,033e17$

$C_0 = -1,692e23$

$P_{\text{iteratie}}:$

$2,227e06 \text{ kN}$

$2,227e06 \text{ kN}$

$2,227e06 \text{ kN}$

$n = P_{\text{krit}}/P:$

6,718

5. P_o om DC berekenen:

Straal 1 en 2 t.o.v. DC:

$r_1^2 = 370,553 \text{ m}^2$

$r_2^2 = 3,282 \text{ m}^2$

$P_o = 2,871e06 \text{ kN}$

6. Bepaling vergrotingsfactoren:

$n_x = 12,80$

$n_y = 113,06$

$n_o = 8,66$

$n_x/(n_x-1) = 1,085$

$n_y/(n_y-1) = 1,009$

$n_o/(n_o-1) = 1,131$

Let op ! De kritische drukkracht is : 2226820 kN

vaiant 3

1. Totalen van grootheden:

$$\begin{aligned}EI_x &= 2,498e09 \text{ kNm}^2 \\EI_y &= 2,050e10 \text{ kNm}^2 \\GI &= 9,270e08 \text{ kNm}^2 \\P_{\text{kern}} &= 102712 \text{ kN} \\P_{\text{tot}} &= 227532 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_x &= 4,511e06 \text{ kN} \\P_y &= 3,703e07 \text{ kN} \\P_o &= 6,123e06 \text{ kN}\end{aligned}$$

2. Controle:

aantal kolommen:

12

totaal vloeroppervlak:

$$15411,4 \text{ m}^2$$

totaal geveloppervlak:

$$10276,2 \text{ m}^2$$

3a. Zwaartepunt van belasting:

$$x_1 = 43,922 \text{ m}$$

$$y_1 = 0,000 \text{ m}$$

3b. Zwaartepunt stijfheid (DC):

$$x_2 = 51,932 \text{ m}$$

$$y_2 = 0,000 \text{ m}$$

3c. Straal 1 en 2 t.o.v. oorsprong:

$$r_1^2 = 2161,573 \text{ m}^2$$

$$r_2^2 = 296,298 \text{ m}^2$$

4. Iteratief bepalen van P_{krit} :

Coëfficiënten:

$$C_3 = 2,324e02$$

$$C_2 = -1,101e10$$

$$C_1 = 9,397e16$$

$$C_0 = -1,787e23$$

P_{iteratie} :

$$2,716e06 \text{ kN}$$

$$2,716e06 \text{ kN}$$

$$2,716e06 \text{ kN}$$

$n = P_{\text{krit}}/P$:

$$8,291$$

5. P_o om DC berekenen:

Straal 1 en 2 t.o.v. DC:

$$r_1^2 = 296,576 \text{ m}^2$$

$$r_2^2 = 3,428 \text{ m}^2$$

$$P_o = 3,606e06 \text{ kN}$$

6. Bepaling vergrotingsfactoren:

$$n_x = 13,77$$

$$n_y = 113,03$$

$$n_o = 11,01$$

$$n_x/(n_x-1) = 1,078$$

$$n_y/(n_y-1) = 1,009$$

$$n_o/(n_o-1) = 1,100$$

Let op ! De kritische drukkracht is : 2716428 kN

variant 4

1. Totalen van grootheden:

$EI_x =$	2,529e09 kNm ²	$P_x =$	4,568e06 kN
$EI_y =$	2,075e10 kNm ²	$P_y =$	3,748e07 kN
$GI =$	9,270e08 kNm ²	$P_o =$	6,291e06 kN
$P_{kern} =$	102712 kN		
$P_{tot} =$	233786 kN		

2. Controle:

aantal kolommen:

12

totaal vloeroppervlak:

15411,4 m²

totaal geveloppervlak:

10276,2 m²

3a. Zwaartepunt van belasting:

$x_1 =$ 42,860 m

$y_1 =$ 0,000 m

3b. Zwaartepunt stijfheid (DC):

$x_2 =$ 51,335 m

$y_2 =$ 0,000 m

3c. Straal 1 en 2 t.o.v. oorsprong:

$r_1^2 =$ 2104,221 m²

$r_2^2 =$ 292,767 m²

4. Iteratief bepalen van P_{krit} :

Coëfficiënten:

C3 2,673e02

C2 -1,276e10

C1 1,084e17

C0 -2,051e23

Piteratie:

2,703e06 kN

2,703e06 kN

2,703e06 kN

$n = P_{krit}/P:$

8,029

5. P_o om DC berekenen:

Straal 1 en 2 t.o.v. DC:

$r_1^2 =$ 339,118 m²

$r_2^2 =$ 6,442 m²

$P_o =$ 3,532e06 kN

6. Bepaling vergrotingsfactoren:

$n_x =$ 13,57

$n_y =$ 111,33

$n_o =$ 10,49

$n_x/(n_x-1) =$ 1,080

$n_y/(n_y-1) =$ 1,009

$n_o/(n_o-1) =$ 1,105

Let op ! De kritische drukkracht is : 2702834 kN

