Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Het uitbreidingsprobleem voor continue selecties met paracompacte Hausdorff-domeinen

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

RICHARD PIETERS

Delft, Nederland
Juli 2020

Inhoudsopgave

1 Inleiding

In dit artikel kijken we naar het uitbreidingsprobleem voor continue selecties. Het uitbreidingsprobleem in het algemeen vraagt of, gegeven een domein, elke continue functie op een gesloten deelverzameling van dat domein, uitgebreid kan worden tot een continue functie op heel het domein. We kijken in dit artikel echter in het bijzonder naar selecties. Selecties zijn functies waarvan hun definitie afhangt van een zekere multifunctie. Wat het preciese verband is tussen multifuncties en selecties wordt later uitgelegd, maar kort geformuleerd is een multifunctie een functie die punten van een verzameling A afbeeldt op deelverzamelingen van een verzameling B. Een selectie is vervolgens een functie die respectievelijk punten uit verzameling A afbeeldt op *punten* uit verzameling B.

Het idee van dit nieuwe uitbreidingsprobleem op multifuncties en selecties is om het vraagstuk te veralgemenen voor zekere beperkingen van de functies die we willen uitbreiden. We vragen ons af of een functie uit te breiden is waarbij wordt geëisd dat elk beeld van deze functie in een voorgeschreven deelverzameling van het codomein ligt. Duidelijk is dan dat een vereiste functie die uit te breiden is ook in het algemeen uit te breiden is. Dit is triviaal.

Dit probleem presenteert heel wat nieuwe uitdagingen die niet opkomen bij het oorspronkelijke uitbreidingsprobleem, bijvoorbeeld of elke functie gedefiniëerd op de lege verzameling uit te breiden is. In het oorspronkelijke geval is dit triviaal, maar door de beperkingen van ons nieuwe probleem is het niet gegeven dat er überhaupt een continue functie bestaat die aan de eisen voldoet.

We behandelen in dit artikel een aantal begrippen die nodig zijn om een uiteindelijke eindstelling te kunnen formuleren. Deze eindstelling legt de nodige beperkingen op onze functies, zodat ze allemaal uit te breiden zijn. Een van deze beperkingen wordt gelegd op het domein van de functies, namelijk dat deze paracompact dienen te zijn. Hoewel we eigenlijk geïnteresseerd zijn in het beperken van de beelden van de functies, leggen we deze eis omdat het probleem anders te breed wordt. Het uitbreiden van functies zonder paraompacte domeinen verdient zijn eigen artikel. We beginnen het artikel echter zonder deze eis, om de eerste conclusies (die onafhankelijk zijn van paracompactheid) algemeen te houden.

2 Multifuncties en Selecties

In de topologie is men vaak geïnteresseerd in het uitbreidingsprobleem. Dit probleem luidt als volgt: als X en Y twee topologische ruimten en zij $A \subset X$ gesloten, kan elke continue functie $g : A \to Y$ dan worden uitgebreid tot een continue functie $f : X \to Y$? Dit probleem komt onder andere voor bij de uitbreidingsstellingen van Tietze en Whitney.

Het is niet moeilijk om voorbeelden te bedenken waarin dit wel kan. Neem bijvoorbeeld $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Duidelijk kan deze functie altijd uitgebreid worden tot een continue functie op heel $\mathbb{R}$. Laat namelijk $f(x) = f(0) \quad \forall x < 0$ en $f(x) = f(1) \quad \forall x > 1$ en we zijn er al.

Een voorbeeld waarin het niet lukt gaat niet zo triviaal als hiervoor, maar lukt ook vrij eenvoudig. Neem nu $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{Q}$ en definiëer:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0,1] \\ 1 & \text{als } x \in [2,3] \end{cases}.$$

Duidelijk is dat we deze continue functie nooit kunnen uitbreiden naar een continue functie op heel $\mathbb{R}$ aangezien een continue functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{Q}$ constant moet zijn.

Het uitbreidingsprobleem kan op zeer veel verschillende soorten functies worden toegepast. In dit artikel kijken we echter maar naar één soort functie, namelijk de multifunctie.

Definitie 1. Zij X en Y twee topologische ruimten. Een **multifunctie** is een functie $\phi : X \to \mathcal{S}$ waarbij $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$. Bij $\phi : X \to \mathcal{S}$ spreken we van een multifunctie van X naar Y. Dit is dus een functie van X naar (een deelverzameling van) de machtsverzameling van Y.

Hierbij is $\mathcal{P}(Y)$ de machtsverzamling van Y zonder de lege verzameling. De lege verzameling speelt namelijk geen rol bij het uitbreidingsprobleem voor multifuncties. Ook zullen X en Y in dit artikel doorgaans gebruikt worden om topologische ruimten aan te duiden en zullen voor multifuncties oudgriekse letters gebruikt worden (ϕ, ψ, θ etc.) Ten laatste gebruiken we $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ als willekeurige deelverzameling van $\mathcal{P}(Y)$. We richten ons snel naar een ander zeer belangrijk begrip, die het fundament van dit artikel zal leggen.

Definitie 2. Voor een multifunctie $\phi : X \to \mathcal{S}$ noemen we $f : X \to Y$ een **selectie** voor ϕ als er geldt dat:

$$f(x) \in \phi(x) \text{ voor alle } x \in X.$$

Deze definitie is niet al te moeilijk maar graag geven we een paar voorbeelden om de inuïtie te verduidelijken.

Voorbeeld 1. Zij $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{A, B, C\}$ en $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ gegeven door:

$$\phi(1) = \{A\}, \quad \phi(2) = \{A, C\}, \quad \phi(3) = \{A, B, C\}$$

Een selectie voor ϕ is nu een functie $f : X \to Y$ waarbij elk beeld van f een element is van het beeld van ϕ. Laat bijvoorbeeld $f : X \to Y$ gegeven worden door:

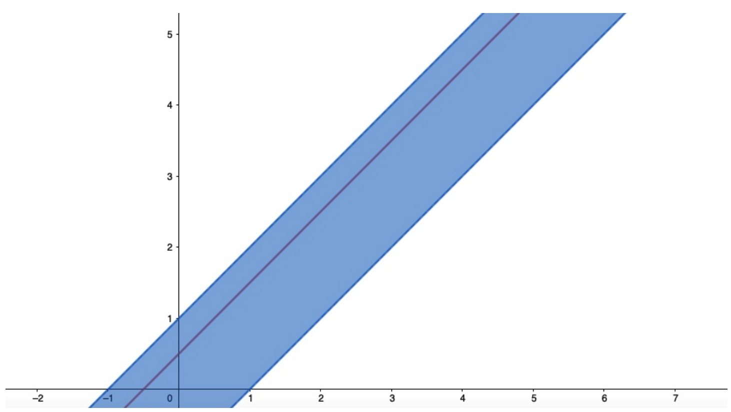
$$f(1) = A, \quad f(2) = C, \quad f(3) = A$$

en we zien dat $f(x) \in \phi(x) \quad \forall x \in X$, dus f is een selectie voor ϕ.

Hoewel dit voorbeeld heel duidelijk en intuïtief is, is het ook abstract. We kijken naar een voorbeeld van een multifunctie en een selectie op de reële getallen, maar eerst geven we de eenvoudige definitie van een continue selectie.

Definitie 3. Een **continue selectie** $f : X \to Y$ voor een multifunctie $\phi : X \to \mathcal{S}$ is een selectie voor ϕ die continu is op X.

Voorbeeld 2. Zij $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gegeven door $\phi(x) = (x-1, x+1)$. Een selectie voor ϕ is per definitie een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor $x - 1 < f(x) < x + 1$ voor alle $x \in X$. Als f continu is, noemen we f een continue selectie voor ϕ. Een voorbeeld hiervan is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x + \frac{1}{2}$.



Figuur 1: De multifunctie ϕ en selectie f uit Voorbeeld 2 worden respectievelijk in het blauw en in het rood weergegeven.

Met de definities van multifunties en selecties duidelijk, kunnen we het uitbreidingsprobleem veralgemenen voor deze begrippen. Dit luidt namelijk: zij X en Y topologische ruimten, zij $A \subset X$ gesloten en zij $\phi : X \to \mathcal{S}$ een multifunctie.

Kan elke continue selectie $g : A \to Y$ uitgebreid worden tot een continue selectie $f : X \to Y$?

Dit probleem noemen we vanaf nu het **selectieprobleem**.

3 Half-continuïteit

Voor alle definities van continuïteit geldt dat een functie continu is als hij continu is in elk punt op het gegeven domein. We kijken eerst naar de bekende definitie van continuïteit op intervallen van $\mathbb{R}$.

Definitie 4. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval en zij $f : I \to \mathbb{R}$. Dan heet f **continu in a** als geldt dat voor alle $\epsilon > 0$, er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in I$ en $|x - a| < \delta$, er geldt dat $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Voor de definitie van half-continuïteit splitsen we de laatste absolute waarde in definitie 3 op in twee delen, waardoor we eigenlijk twee begrippen krijgen die samen half-continuïteit omvatten. Dat gaat als volgt:

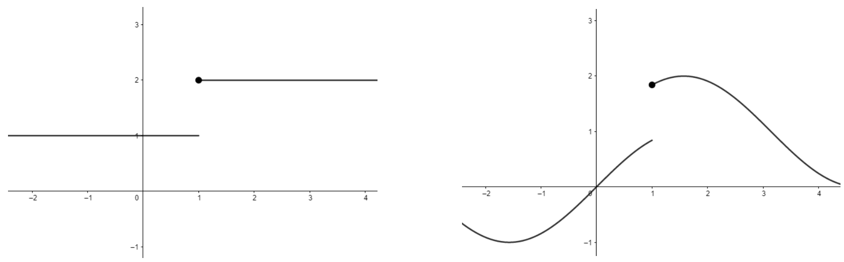
Definitie 5. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval en zij $f : I \to \mathbb{R}$. Dan heet f

1. **half-continu van beneden in a** als geldt dat voor alle $\epsilon > 0$, er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in I$ waarvoor $|x - a| < \delta$, er geldt dat $-\epsilon < f(x) - f(a)$.
2. **half-continu van boven in a** als geldt dat voor alle $\epsilon > 0$, er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in I$ waarvoor $|x - a| < \delta$, er geldt dat $f(x) - f(a) < \epsilon$.

Het is niet moeilijk in te zien dat half-continuïteit een zwakker begrip is dan continuïteit. Dat wil zeggen, elke continue functie is zeker ook half-continu. Om een beter idee te krijgen wat half-continuïteit precies inhoudt, kijken we nu naar een vrij eenvoudig voorbeeld van een half-continue functie.

Voorbeeld 3. Zij $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x < 1 \\ 2 & \text{als } x \geq 1 \end{cases}$. Dan is f half-continu van boven.
Duidelijk is dat f continu is voor zowel $x < 1$ als $x > 1$. Dus we bewijzen dat f half-continu van boven is in $x = 1$.
Zij $\epsilon > 0$. Neem $\delta = 1$. Als $0 \leq x - 1 < \delta$, geldt $f(x) - f(1) = 2 - 2 = 0 < \epsilon$. Als $-\delta < x - 1 < 0$, dan geldt $f(x) - f(1) = 1 - 2 = -1 < \epsilon$. Dus, als $|x - 1| < \delta$, dan geldt $f(x) - f(1) < \epsilon$ en dus is f half-coninu van boven.

Het is misschien intuitief makkelijk om te bedenken dat een functie die half-continu van boven is alleen mag springen als de rand van de grafiek bij het bovenste stuk hoort en een functie die half-continu van beneden is alleen mag springen als de rand van de grafiek bij het onderste stuk hoort. Onderstaande figuren maken deze intuitie iets duidelijker.



Figuur 2: Twee functies die half-continu van boven zijn. De linkerfunctie komt uit het voorbeeld hierboven. De punten geven aan waartoe de randen behoren.

(a) half-continu van boven (b) half-continu van beneden

Figuur 3: Twee functies die erg op elkaar lijken met één verschil, de linker is half-continu van boven en de rechter is half-continu van beneden. Nogmaals geven de punten aan waartoe de randen behoren.

Propositie 1. *De volgende twee uitspraken zijn equivalent:*

1. *f is continu*
2. *f is half-continu van beneden en half-continu van boven*

Bewijs. *1.* $\implies$ *2.* is triviaal. Stel nu dat $f : I \to \mathbb{R}$ zowel van beneden als van boven half-continu is in a. Dan geldt voor alle $\epsilon > 0$ dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in I$ waarvoor $|x-a| < \delta_1$, er geldt dat $-\epsilon < f(x) - f(a)$. Ook bestaat er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta_2 > 0$ zodat voor $x \in I$ waarvoor $|x-a| < \delta_2$, er geldt dat $f(x) - f(a) < \epsilon$. Definiëer nu voor alle $\epsilon > 0$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dan geldt voor alle $x \in I$ waarvoor $|x-a| < \delta$, dat $\epsilon < f(x) - f(a) < \epsilon$. Ofwel, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ en dus is f continu in a. Omdat we $a \in I$ willekeurig gekozen hadden, is f continu op X. $\square$

Nu kijken we naar de veralgemening van dit begrip op topologische ruimten. Deze veralgemening verschilt nauwelijks van de definitie op intervallen van $\mathbb{R}$ en zou vrij intuitief moeten zijn.

Definitie 6. Zij X een topologische ruimte en $f : X \to \mathbb{R}$ een functie. Dan heet f

1. **half-continu van beneden in a** als er voor alle $\epsilon > 0$ een omgeving van a, $N(a)$, bestaat zodat $-\epsilon < f(x) - f(a)$ voor elke $x \in N(a)$.

2. **half-continu van boven in a** als voor alle $\epsilon > 0$ een omgeving van a, $N(a)$, bestaat zodat $f(x) - f(a) < \epsilon$ voor elke $x \in N(a)$.

We kijken naar een voorbeeld van deze definitie toegepast op een eenvoudige topologische ruimte.

Voorbeeld 4. Zij $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$ een topologie op X en zij $f : X \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x$. Dan is f half-continu van boven in 2. Voor alle $\epsilon > 0$ geldt namelijk dat $\{1, 2\}$ een omgeving is van 2 zodat $f(x) - f(2) \leq 0 < \epsilon$ voor alle $x \in \{1, 2\}$. De functie is zelfs half-continu van boven op heel X. Voor het punt 1 zien we namelijk dat $\{1\}$ een omgeving is zodat $f(x) - f(1) < \epsilon$ voor alle $\epsilon > 0$, aangezien 1 het enige element van de omgeving is. Ook voor het punt 3 zien we dat $f(x) - f(3) < \epsilon$ voor alle $x \in X$ en $\epsilon > 0$ aangezien $f(x)$ ten hoogste 3 is. De functie f is echter niet half-continu van beneden. Neem bijvoorbeeld $\epsilon = 1$. We weten dat X de enige omgeving is van 3, maar $1 \in X$ en $f(1) - f(3) = -2 < -\epsilon$. f is wel half-continu van beneden in 1 en 2, door simpelweg de puntverzamelingen te nemen als desbetreffende omgevingen.

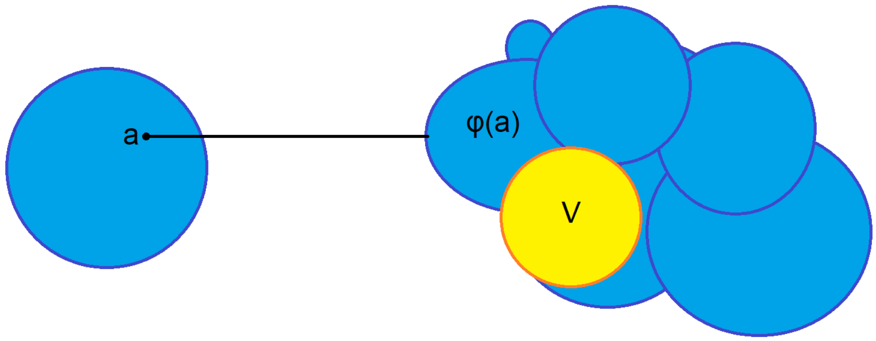
Zoals eeder gezegd, verandert hier eigenlijk niets ten opzichte van definitie 2. We nemen nu voor het domein van f een willekeurige topologische ruimte in plaats van strict een interval van $\mathbb{R}$. Het enige wat daardoor verandert, is dat we het bestaan van een omgeving om a iets anders moeten verwoorden.

Er is nog één stap over, namelijk half-continuïteit definiëren op multifuncties. Dat gaat als volgt:

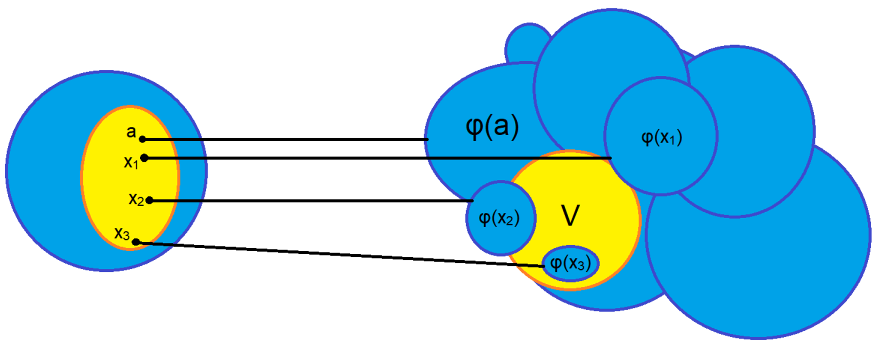
Definitie 7. Een multifunctie $\phi : X \to \mathcal{S}$ heet

1. **half-continu van beneden in a** als voor alle open $V \subset Y$ zodat $\phi(a) \cap V \neq \varnothing$ er een omgeving $N(a)$ van a bestaat zodat voor alle $x \in N(a)$ geldt dat $\phi(x) \cap V \neq \varnothing$.

2. **half-continu van boven in a** als voor alle open $V \subset Y$ zodat $\phi(a) \subset V$ er een omgeving $N(a)$ van a bestaat zodat voor alle $x \in N(a)$ geldt dat $\phi(x) \subset V$.



Figuur 4: Een multifunctie schematisch weergegeven met in het geel een willekeurige open deelverzameling van het codomein.



Figuur 5: Een kopie van figuur 3, waarbij nu ook de omgeving $N(a)$ in het domein in het geel is weergegeven. Ook zien we de beelden van x_1, x_2 en x_3.

Deze definitie ziet er op eerste ogenblik vrij lastig uit, maar met behulp van een aantal schetsen zal dit wat duidelijker worden. We beginnen met half-continuïteit van beneden. Onderstaand zien we een schets met een punt a in het domein X. Het punt a wordt door ϕ afgebeeld naar de verzameling $\phi(a)$, wat uiteraard een element is van het codomein $\mathcal{S}$. Neem nu willekeurig een open $V \subset Y$ die $\phi(a)$ snijdt. Deze verzamling wordt in het geel weergegeven.

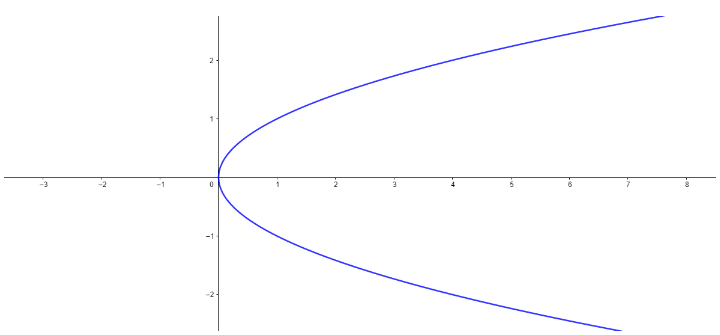
Nu moet gelden dat we een omgeving van a kunnen vinden zodat voor alle punten $x \in N(a)$ van deze omgeving, er geldt dat $\phi(x)$ V snijdt. We zien in figuur 4 een situatie waarin we zo'n omgeving, zeg $N(a)$, kunnen vinden. Deze is in het geel weergegeven. We zien dat voor alle punten in deze $N(a)$, namelijk a, x_1, x_2 en x_3, dat het beeld van deze punten een niet-lege doornsede heeft met V.

Als dit lukt voor elke open $V \subset Y$, dan is ϕ half-continu van beneden in het punt a.

In hoofdstuk 3 zal blijken dat we voor dit artikel alleen half-continuïteit van beneden nodig hebben in dit artikel. Daarom richten we ons vanaf nu enkel op half-continuïteit van beneden. Het enige verschil met half-continuïteit van boven is dat $\phi(a)$ en alle $\phi(x) \in N(a)$ volledig bevat moeten zijn in V in plaats van alleen V doornsijden.

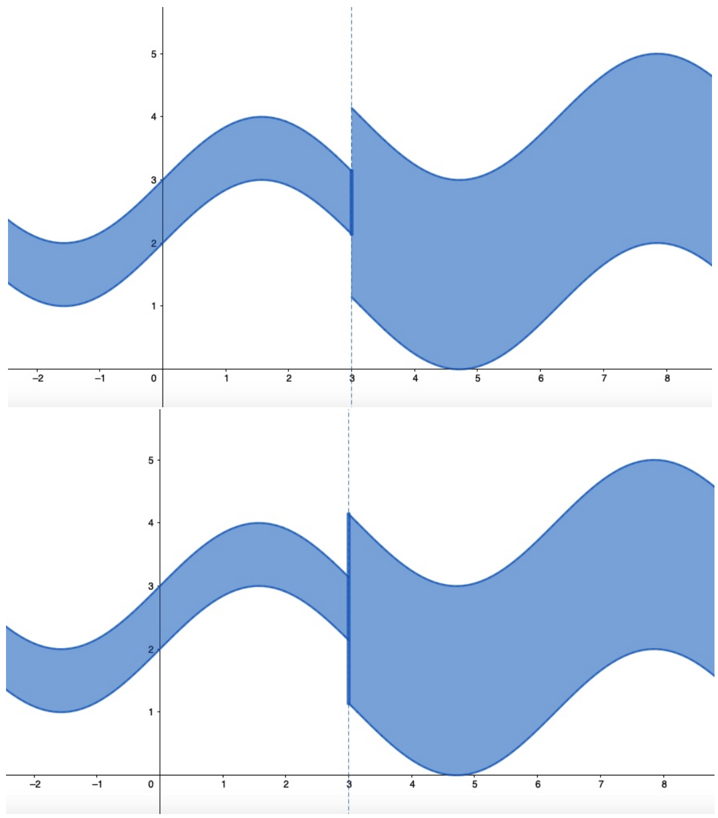
Maar wat moeten we ons precies voorstellen bij een half-continue multifunctie? We kijken naar een eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld 5. Zij $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeven door $g(x) = x^2$. Definiëer $\phi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ door $\phi(x) = g^{-1}(x)$. Dan is ϕ half-continu van beneden. Neem bijvoorbeeld een punt $a \in \mathbb{R}_{>0}$ en een open $V \subset \mathbb{R}_{>0}$ zodat $\phi(a) \cap V \neq \varnothing$. We bewijzen eerst dat $g(V)$ open is. Neem een punt $g(c)$ in $g(V)$. Omdat V open is, bestaat er een $\delta > 0$ zodat $|c - x| < \delta \implies x \in V$. Neem nu $\epsilon = \min\{\frac{\delta}{\delta+2|c|}, |c|^2\}$. Als $|g(c) - y| < \epsilon$, dan hebben we nu dat $|c^2 - y| = |c - \sqrt{y}||c + \sqrt{y}| < \frac{\delta}{\delta+2|c|}$. We gebruiken hier de wortel, omdat we uit $|c^2 - y| < |c|^2$ krijgen dat $y > 0$. En dus geldt $|c - \sqrt{y}| < \delta\frac{|c+\sqrt{y}|}{\delta+2|c|} \leq \delta\frac{|c+\sqrt{y}|}{|c-\sqrt{y}|+|\sqrt{y}+\sqrt{y}|} \leq \delta$ waar we gebruik maken van $|c+\sqrt{y}| \leq |c-\sqrt{y}|+|\sqrt{y}+\sqrt{y}|$ door de driehoeksongelijkheid. Daardoor, $\sqrt{y} \in V$ en dus $y \in g(V)$. Omdat we $c \in V$ willekeurig hadden gekozen, concluderen we dat $g(V)$ open is. Dus $g(V)$ is open en er geldt dat $g(\phi((a)) \cap g(V) \neq \varnothing$. Ofwel, $g(V)$ is open en $a \in g(V)$. Dus $g(V)$ is een omgeving van a. Ook weten we dat $x \in g(V)$ betekent dat er een $y \in V$ bestaat zodat $y^2 = x$. Ofwel $y \in V$ en $y \in g^{-1}(x)$, waardoor duidelijk is dat $g^{-1}(x) \cap V$ niet leeg is voor alle $x \in V$. Vul in dat $g^{-1}(x) = \phi(x)$ en we zien dat ϕ half-continu van beneden is voor $x > 0$.



Figuur 6: De functie ϕ uit Voorbeeld 5.

Om de intuïtie iets te versterken kijken we naar wat het betekent voor een multifunctie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ om half-continu van beneden zijn. Dit is namelijk als die verzamelingen alleen mogen 'springen' naar de kleinste verzameling.



Figuur 7: Een van beneden half-continue multifuncite boven een van boven half-continue multifunctie. In beide grafieken geeft de vetgedrukte lijn aan waartoe de rand behoort en de stippellijn waartoe hij niet behoort.

Omdat de rand in de bovenste grafiek in figuur 7 behoort tot de kleinere verzameling is hij half-continu van beneden. In de onderste figuur zien we bijna dezelfde functie, met het verschil dat de rand nu tot het rechterdeel behoort. Omdat de rand hier dus bij de grotere verzameling behoort, is hij half-continu van boven.

Propositie 2. *Voor een van beneden half-continue multifunctie* $\phi : X \to \mathcal{S}$ *geldt er dat* $\{x \in X \,|\, \phi(x) \cap V \neq \varnothing\}$ *open is voor alle open* $V \subset Y$.

Bewijs. Zij $\phi : X \to \mathcal{S}$ half-continu van beneden en neem een open $V \subset Y$ met een punt $a \in \{x \in X \,|\, \phi(x) \cap V \neq \varnothing\}$ willekeurig. Omdat ϕ half continu van beneden is en $\phi(a) \cap V \neq \varnothing$, bestaat er een omgeving $N(a)$ van a zodat $\phi(x) \cap V \neq \varnothing$ voor alle $x \in N(a)$. Dus geldt er dat $x \in \{x \in X \,|\, \phi(x) \cap V \neq \varnothing\}$ voor alle $x \in N(a)$. Omdat V en a willekeurig gekozen werden, concluderen we dat $\{x \in X \,|\, \phi(x) \cap V \neq \varnothing\}$ open is voor alle open $V \subset Y$. □

In het volgende hoofdstuk zien we hoe we half-continuïteit kunnen gebruiken om het uibtreidingsprobleem te vereenvoudigen.

4 Het Selectieprobleem

We beginnen eerst door wat notatie to introduceren. Zij X en Y topologische ruimten, $A \subset X$ en $\phi : X \to \mathcal{S}$. We zeggen dat $f : A \to Y$ een selectie is voor $\phi \,|\, A$ (zeg ϕ "op" A) als geldt dat $f(x) \in \phi(x)$ voor alle $x \in A$. Met "een selectie voor ϕ" bedoelen we altijd een selectie voor ϕ op het domein van ϕ, in dit geval dus X.

Propositie 3. *Zij $\phi : X \to \mathcal{S}$ een multifunctie zodat voor alle $x \in X$ en $y \in \phi(x)$ er een continue selectie f voor $\phi \,|\, N(x)$ (voor een zekere omgeving $N(x)$ van x) bestaat zodat $f(x) = y$. Dan is ϕ half-continu van beneden.*

Bewijs. Zij ϕ een multifunctie zoals hierboven beschreven en zij $a \in X$ willekeurig. Kies nu een open $V \subset Y$ zodat $\phi(a) \cap V \neq \varnothing$ willekeurig. Dus is er een punt in V dat ook in $\phi(a)$ zit, zeg y. We weten dat er een continue selectie f voor $\phi \,|\, N(a)$ (voor een zekere $N(a)$) bestaat zodat $f(a) = y$. Omdat V open is en f continu is, is het inverse beeld van V onder f, $\{x \in X : f(x) \in V\}$, open. Dus $N'(a) = N(a) \cap \{x \in X : f(x) \in V\}$ is een omgeving van a waarvoor geldt $\phi(x) \cap V \neq \varnothing$ voor alle $x \in N'(a)$. Dus ϕ is half-continu van beneden in a. Aangezien dit geldt voor alle $a \in X$, is ϕ half-continu van beneden op heel X. $\square$

Logisch is nu dat we het selectieprobleem kunnen beperken tot multifuncties die half-continu van beneden zijn. Als we namelijk een niet-van beneden half-continue multifunctie ϕ hebben weten we uit Propositie 1 dat er een $x \in X$ bestaat, waarbij niet alle elementen van $\phi(x)$ het beeld van x kunnen zijn in een selectie. In zekere zin zijn deze elementen dus "overbodig". Als we deze elementen verwijderen uit $\phi(x)$ verandert er niets aan het selectieprobleem, aangezien ze toch nooit deel kunnen uitmaken van een selectie. Als we voor alle $x \in X$ de overbodige elementen van $\phi(x)$ verwijderen, en we noemen deze nieuwe multifunctie ψ, zijn er twee mogelijkheden die zich voor ψ voordoen. Hier is ψ dus de multifunctie met dezelde beelden als ϕ, maar dan zonder de overbodige punten.

1. Er bestaat een $a \in X$ zodat $\psi(a) = \varnothing$.

2. Voor alle $x \in X$ en $y \in \phi(x)$ bestaat er nu een selectie voor een zekere $\psi \,|\, N(x)$ zodat $f(x) = y$ en dus is ψ half-continu van beneden.

In het eerste geval is het onmogelijk om een selectie voor $\psi \,|\, A$ (met $A \subset X$) uit te breiden tot een selectie voor ψ, aangezien er geen enkel element van $\psi(a)$ deel kan uitmaken van een selectie. Het heeft dus geen zin om deze multifuncties mee te nemen in het selectieprobleem. We willen ons dus alleen bezig houden met multifuncties die vooldoen aan punt 2. Het komt er op neer dat de enige interessante multifuncties voor het uibreidingsprobleem half-continu van benenden zijn.

De intuïtie hiervan zit hem in figuur 7. De onderste figuur is niet half-continu van beneden. De 'overbodige' punten zijn hier de punten op de lijn $x = 3$ die horen bij de rand van het rechterdeel. Deze punten kunnen nooit deel uitmaken van een continue selectie van de hele multifunctie. Als we deze punten verwijderen blijven we over met de multifunctie in de bovenste grafiek, die half-continu van beneden is.

We kunnen het selectieprobleem nu als volgt herformuleren.

Zij X en Y topologische ruimten, zij $A \subset X$ gesloten en zij $\phi : X \to \mathcal{S}$ een van beneden half-continue multifunctie. Kan elke continue selectie $g : A \to Y$ uitgebreid worden tot een continue selectie $f : X \to Y$?

Deze vraag kunnen we nu gaan beantwoorden. We bewijzen eerst een propositie die ons daarbij helpt.

Propositie 4. *Als voor zeker topologische ruimten X en Y geldt dat $\{y\} \in \mathcal{S}$ als $S \in \mathcal{S}$ en $y \in S$, dan zijn de volgende twee eigenschappen van $\mathcal{S}$ equivalent.*

1. *Elke van beneden half-continue $\phi : X \to \mathcal{S}$ laat een continue selectie toe.*

2. *Voor alle gesloten $A \subset X$ en voor alle van beneden half-continue $\phi : X \to \mathcal{S}$ geldt dat elke selectie voor $\phi| A$ kan worden uitgebreid tot een selectie voor ϕ.*

Bewijs. Dat *2* $\Longrightarrow$ *1* is duidelijk. Neem namelijk $A = \{x\}$ voor zekere $x \in X$ en neem $y \in \phi(x)$ willeurig. Dan is $f(x) = y$ een continue selectie voor $\phi| A$ en dus kan deze uitgebreid worden tot een continue selectie op X.
Om te laten zien dat *1* $\Longrightarrow$ *2*, zij $\psi : X \to \mathcal{S}$ half-continu van beneden, zij $A \subset X$ gesloten en zij g een continue selectie voor $\phi| A$. Laat $\phi : X \to \mathcal{S}$ gegeven worden door $\phi(x) = \{g(x)\}$ voor $x \in A$ en $\phi(x) = \psi(x)$ voor $x \notin A$. Duidelijk is ϕ half-continu van beneden voor $x \notin A$. Voor $x \in A$ weten we, wegens de continuïteit van g, dat voor alle omgevingen V van $g(x)$, er een omgeving U van x bestaat zodat $g(U) \subset V$. Voor alle $y \in U \cap A$ geldt dan dat $\phi(y) = \{g(y)\} \subset g(U) \subset V$. En voor alle $y \in U \setminus A$ geldt er dat $\phi(y) = \psi(y)$. Nu weten we dat $\psi(x) \cap V \neq \varnothing$, aangezien $g(x) \in \psi(x)$. Omdat ψ half-continu van beneden is op A mogen we nu concluderen dat $\psi(y) \cap V \varnothing$ voor alle $y \in U$. En dus is $\phi(y) \cap V \neq \varnothing$ voor $y \in U \setminus A$. Dan geldt er nu dat $\phi(y) \cap V \neq \varnothing$ voor alle $yinU$ en dus is ϕ half-continu van beneden op A en daardoor ook op heel X. Door de aanname weten we dat ψ een continue selectie, zeg $f : X \to Y$, toelaat. Deze selectie is ook continu voor ψ en er geldt dat $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$. $\square$

Als we $\mathcal{S} = \mathcal{P}(Y)$ nemen en we passen propositie 2 toe zien we het volgende. Aangezien $y \in \mathcal{P}(Y)$ voor alle $y \in Y$ weten we voor elke functie van X naar $\mathcal{P}(Y)$ dat *1.* en *2.* equivalent zijn.

Maar, om formeel antwoord te geven op de vraag van het selectieprobleem: als $\{x\} \in \mathcal{S}$ geldt voor alle $S \in \mathcal{S}$ en $y \in S$, dan kan elke continue selectie $g : A \to Y$ worden uitgebreid tot een continue selectie $f : X \to Y$ voor alle gesloten $A \subset X$ precies wanneer elke van beneden half-continue multifunctie $\phi : X \to \mathcal{S}$ een continue selectie toelaat. Alle functies van X naar $\mathcal{P}(Y)$ voldoen aan de aanname.

We hebben nu het selectieprobleem correct beantwoord, maar we zitten nog steeds met de vraag of ϕ überhaupt een continue selectie toelaat. Gelukkig is een continue selectie vinden wel eenvoudiger dan er een uitbreiden. Al dit werk was dus niet voor niets. We introduceren eerst een eenvoudig maar nuttig begrip.

Definitie 8. We noemen Y een **uitbreidingsruimte** ten opzichte van X als, voor elke gesloten $A \subset X$, elke continue $g : A \to Y$ uitgebreid kan worden tot een continue $f : X \to Y$.

Dus $\mathbb{R}$ is bijvoorbeeld een uitbreidingsruimte ten opzichte van $\mathbb{R}$ zelf, maar $\mathbb{Q}$ niet.

Uit deze definitie en propositie kunnen we eenvoudig de volgende conclusie trekken.

Propositie 5. *Als voor zeker topologische ruimten X en Y geldt dat $\{x\} \in \mathcal{S}$ wanneer $S \in \mathcal{S}$ en $y \in S$, $Y \in \mathcal{S}$ en dat elke van beneden half-continue $\phi : X \to \mathcal{S}$ een selectie toelaat, dan is Y een uitbreidingsruimte ten opzichte van X.*

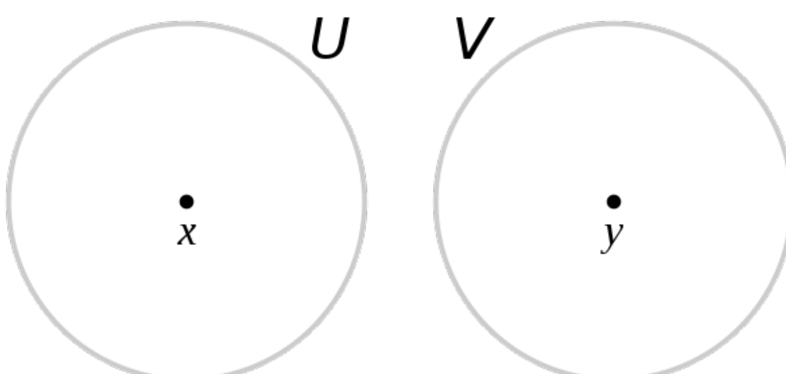
Bewijs. Zij X en Y topologische ruimten waavoor geldt dat $\{x\} \in \mathcal{S}$ wanneer $S \in \mathcal{S}$ en $y \in S$ en dat elke van beneden half-continue $\phi : X \to \mathcal{S}$ een selectie toelaat. Uit propisite 3 weten we nu dat voor alle gesloten $A \subset X$ en voor alle van beneden half-continue $\phi : X \to \mathcal{S}$ er geldt dat elke selectie voor $\phi| A$ kan worden uitgebreid tot een selectie voor ϕ. Per definitie is Y een uitbreidingsruimte ten opzichte van X. $\square$

5 De Scheidingsaxioma's

Omdat een topologische ruimte een heel breed begrip is, wilt men vaak extra axioma's op deze ruimtes opleggen, zodat ze "interessanter" zijn om mee te werken. Zo hebben we bijvoorbeeld de metrische ruimte, waar we een afstand bepalen tussen alle punten in een topologische ruimte. Met deze afstandsfunctie, ook wel metriek, kunnen we bijvoorbeeld allerlei nieuwe stellingen bewijzen over continuïteit, die handig zijn voor werken met bijvoorbeeld $\mathbb{R}$, een metrische ruimte dus.

De scheidingsaxioma's zijn ook dergelijke voorwaarden, die een gewenste vorm kunnen geven aan topologische ruimten. We kijken naar twee soorten ruimtes die bepaald worden door deze scheidingsaxioma's. Dit zijn de Hausdorff-ruimte en de normale ruimte. Er zijn uiteraard ook andere ruimtes bepaald door de axioma's, maar die zijn voor dit artikel niet van belang.

Definitie 9. Een **Hausdorff-ruimte** (ook wel T_2-ruimte) is een topologische ruimte waarvoor geldt dat voor ieder paar verschillende punten x en y disjuncte omgevingen hebben. Dat wil zeggen, voor twee punten x en y zodat $x \neq y$ geldt er dat er open verzamelingen U en V bestaan zodat $x \in U$, $y \in V$ en $U \cap V = \varnothing$.



Figuur 8: In een Hausdorff-ruimte kan voor elk tweetal verschillende punten, twee disjuncte omgevingen worden gevonden.

In figuur 8 zien we definitie 9 grafisch weergegeven. De meeste ruimtes waar we gewend zijn om mee te werken zijn Hausdorff, zoals $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. Elke metrische ruimte is namelijk Hausdorff. Topologische ruimten die niet Hausdorff zijn, zijn meestal heel abstract, maar ze bestaan wel. De triviale topologie op een verzameling X met minimaal twee punten is bijvoorbeeld niet Hausdorff. Deze topologie bestaat simpelweg uit de lege verzameling en X zelf. Ook de Sierpiński-ruimte is Hausdorff. Dit is een ruimte met twee elementen waarin slechts één van de puntverzamelingen open is. We kijken naar een iets lastiger voorbeeld van een ruimte die niet Hausdorff is, waarna we beginnen aan de volgende definitie.

Voorbeeld 6. De overlappend interval-topologie is een topologie op $[-1,1]$ waarbij de open verzamelingen worden gegenereerd door $[-1,b)$ en $(a,1]$ waarbij $a < 0 < b$. De open verzamelingen zijn dus van de vorm $[-1,b)$, $(a,1]$, (a,b), de lege verzameling, of $[-1,1]$ zelf, waarbij opnieuw $a < 0 < b$. De verzameling (a,b) is namelijk de doorsnede van twee verzamelingen $[-1,b)$ en $(a,1]$. Deze topologie is niet Hausdorff. Het punt 0 zit namelijk in elke open verzameling behalve de lege verzameling. Er is dus bijvoorbeeld geen omgeving van 1 die het punt 0 niet bevat.

Definitie 10. Een **normale ruimte** (ook wel T_4-ruimte) is een Hausdorff-ruimte waarvoor geldt dat voor elk paar disjuncte gesloten verzameling E en F er disjuncte open verzamelingen U en V bestaan, zodat $E \subset U$ en $F \subset V$.

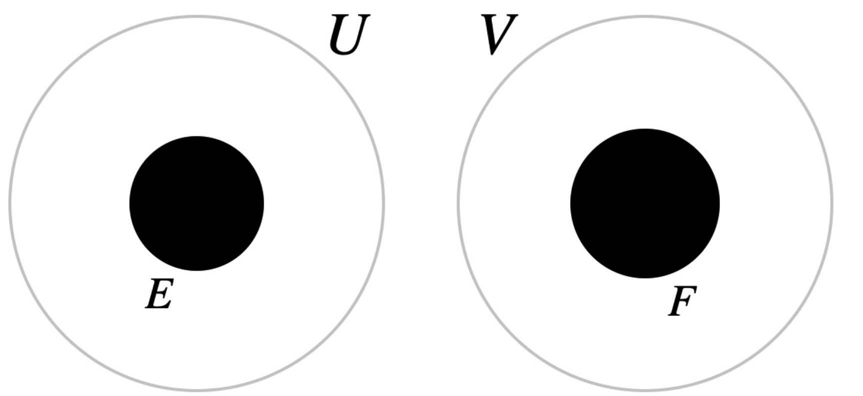
In figuur 9 zien we definitie 10 grafisch weergegeven. Er bestaan ruimtes die wel Hausdorff zijn, maar niet normaal. Neem bijvoorbeeld de K-topologie op $\mathbb{R}$, waarbij $K = \{\frac{1}{n} | \, n \in N\}$. De open verzamelingen worden in deze topologie gegenereerd door alle open intervallen van $\mathbb{R}$ en alle open intervallen van $\mathbb{R}$ zonder K. Dat wil zeggen $B = \{(a,b) | \, a < b\} \cup \{(a,b) \setminus K | \, a < b\}$ is een basis voor de topologie. Deze ruimte is zeker Hausdorff; voor twee verschillende punten nemen we twee standaard intervallen die elkaar niet snijden, net zoals bij de standaard topologie op $\mathbb{R}$. Merk op dat $\mathbb{R} \setminus K = (\infty, -1) \cup \big((-2,2) \setminus K\big) \cup (1, \infty)$ open is, en dus is K gesloten. Maar dan zijn zowel K als $\{0\}$ gesloten, terwijl elke omgeving van 0 een punt in K bevat, dus deze ruimte is niet normaal.

We richten ons nu op de hoofdstelling van dit arikel, een vermaarde uitbreidingsstelling van Russisch wiskundige Pavel Urysohn.

Stelling 1. *De volgende eigenschappen van een Hausdorff-ruimte X zijn equivalent:*

1. *X is normaal.*
2. *$\mathbb{R}$ is een uitbreidingsruimte ten opzichte van X.*

We bewijzen deze stelling niet, maar al onze selectie- en uitbreidingsstellingen, inclusief deze stelling van Urysohn zullen we binnenkort samenvoegen om een stelling te bewijzen waar heel dit ariktel zich naar opbouwt. Voordat we deze stelling kunnen geven, hebben we nog twee begrippen nodig, die in het volgende hoofdstuk wordt uitgelegd.



Figuur 9: In een normale ruimte kan voor elk tweetal disjuncte gesloten verzamelingen, twee disjuncte open verzamelingen worden gevonden die de gesloten verzamelingen bevatten.

6 Paracompactheid en Eenheidspartities

Paracompactheid lijkt, niet al te verrassend, op compactheid, maar is net wat anders gedefiniëerd, waardoor het een zwakker begrip is dan compactheid (d.w.z. elke compacte ruimte is paracompact). We definiëren eerst een begrip dat voorkomt in de definitie van paracompactheid, namelijk een verfijning. Zoals bij de definitie van compactheid, is een overdekking C van een ruimte X een collectie van verzamelingen zodat $X \subset \bigcup_{A \in C} A$.

Definitie 11. Een **verfijning** van een overdekking C van X is een nieuwe overdekking D van X zodat elke verzameling in D een deelverzameling is van een verzameling in C. Dus, als $C = \{U_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ en $D = \{V_\beta \,|\, \beta \in B\}$, dan is D een verfijning van C als er voor alle $\beta \in B$ een $\alpha \in A$ bestaat, zodat $V_\beta \subset U_\alpha$.

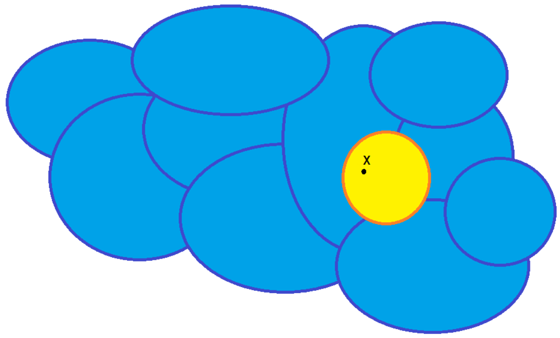
Bij de definite van paracompactheid zoeken we in plaats van een deeloverdekking die eindig is, een verfijning die lokaal eindig is. Dit begrip definiëren we eerst apart.

Definitie 12. Een open overdekking van X noemen we **lokaal eindig** als voor alle $x \in X$ geldt dat x een omgeving $N(x)$ heeft, zodat $N(x)$ slechts eindig veel verzamelingen in de open overdekking snijdt.

We hebben nu alle begrippen om de definitie van paracompactheid te geven.

Definitie 13. Een topologische ruimte X heet **paracompact** als elke open overdekking van X een open lokaal eindige verfijning toelaat. Dat wil zeggen, als C een open overdekking is van X, dan bestaat er een open verfijning D van C, als voor elk punt $x \in D$ geldt dat er een omgeving V van x bestaat, zodat V maar eindig veel verzamelingen in D snijdt.

Het is misschien lastig om je iets voor te stellen bij dit soort abstracte definites, dus gebruiken weer wat figuren om alles te verduidelijken.
In figuur 9 zien we een aantal verzamelingen in het blauw weergegeven die een open verfijning van een open overdekking horen voor te stellen. Deze verfijning kan ook uit oneindig veel verzamelingen bestaan. Nu kiezen we een punt x in de verfijning. Voor dit punt moeten we dus altijd een omgeving kunnen vinden die maar eindig veel van verzamelingen in de verfijning snijdt. In de figuur hierboven zien we dat de gele omgeving van x precies drie verzamelingen snijdt. Deze verfijning is dus lokaal eindig in x.



Figuur 10: Een verfijning, bestaande uit blauwe verzamelingen met een punt x en een gele omgeving van x.

Propositie 6. *Elke compacte ruimte is ook paracompact.*

Bewijs. Zij X een compacte ruimte en zij C een open overdekking van X. Er bestaat, wegens de compactheid van X, een eindige deeloverdekking van X, zeg D. Er geldt nu voor elk punt $x \in X$ dat elke omgeveing van x slechts eindig veel verzemlingen in D snijdt. Er zijn namelijk maar eindig veel verzamelingen in D om te snijden. Dus, D is ook een lokaal eindige verfijning van C en omdat C willekeurig gekozen was, concluderen we dat X ook paracompact is. $\square$

Voorbeeld 7. De reële getallen, $\mathbb{R}$, vormen geen compacte, maar wel een paracompacte ruimte. Zij C namelijk een open overdekking van $\mathbb{R}$. Dan overdekt C alle gesloten reële intervallen $[n, n+1]$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Wegens de stelling van Heine-Borel zijn al deze intervallen $[n, n+1]$ compact, en dus bestaat er een eindige deeloverdekking, zeg $\{D_i^{(n)} \mid i \in J_n\}$, waarbij J_n dus een eindige verzameling is. Merk op dat deze eindige deeloverdekking voor alle $n \in \mathbb{Z}$ onafhankelijk is van C. De verzameling van al deze verzamelingen, $\{D_i^{(n)} \mid i \in J_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ vormt duidelijk een open lokaal eindige verfijning van C.

We keren ons naar een hulpstelling die later van pas gaat komen en paracompactheid verbindt met de schedingsaxioma's.

Lemma 1. *Elke paracompacte Hausdorff-ruimte is normaal.*

Bewijs. Zij X een paracompacte Hausdorff-ruimte met twee disjuncte gesloten verzamelingen E en F en zij $y \in F$. Omdat X Hausdorff is weten we dat voor elke $x \in E$ er een omgeving V_x van x en een omgeving W_x van y bestaat, zodat $V_x \cap W_x = \varnothing$. Duidelijk is dat $(X \setminus E) \cup \{V_x\}_{x \in E}$ een open overdekking vormt voor X. Wegens de paracompactheid van X bestaat er nu een lokaal eindige verfijning van deze overdekking, zeg $\{D_i\}_{i \in I}$ voor zekere indexverzameling I. Definiëer nu $I_E = \{i \in I | \, E \cap D_i \neq \varnothing\}$. Voor alle $i \in I$ bestaat er dus een x_i

zodat $D_i \subset V_{x_i}$. Dus $D_y = \bigcup_{i \in I_E} D_i$ is open en $E \subset D_y$. Er geldt ook dat y een omgeving W_y heeft die slechts eindig veel D_i snijdt, aangezeien $\{D_i\}_{i \in I}$ lokaal eindig is. Ofwel, $I_y = \{i \in I_E | W_y \cap D_i \neq \varnothing\}$ is eindig. We zien dan dat $G_y = W_y \cap \bigcap_{i \in I_y} W_{x_i}$ een omgeving van y is die geen enkele V_{x_i} snijt. Dus G_y snijdt ook geen enkele D_i en daardoor geldt er dat $G_y \cap D_y = \varnothing$. We conluderen dat $G_y \cap E = \varnothing$. Omdat we y willekeurig hebben gekozen, kunnen we voor alle $y \in F$ een desbetreffende G_y vinden. Nu is $(X \setminus F) \cup \{G_y\}_{y \in F}$ een open overdekking van X. Wegens paracompactheid heeft ook deze overdekking weer een lokaal eindige verfijning $\{H_j\}_{j \in J}$ voor zekere indexverzaemling J en op precies dezelfde manier zien we dat elke $x \in E$ een omgeving B_x heeft, die geen enkele H_i snijdt. De vereniging van al deze omgevingen is een open verzameling waarvan E een deelverzameling is die geen enkele H_i snijdt, en daaroor $\bigcup_{y \in F} G_y$ ook niet. Dus $\bigcup_{x \in E} B_x$ en $\bigcup_{y \in F} G_y$ zijn open verzamelingen waarvoor $E \subset \bigcup_{x \in E} B_x$ en $F \subset \bigcup_{x \in E} B_x$ die elkaar niet snijden en dus is X normaal. $\square$

Paracompactheid gaat hand in hand met eenheidspartities. Een eenheidspartitie is een verzameling van functies met bepaalde eigenschappen die vaak worden toegepast in, onder andere, alternatieve bewijzen van paracomapctheid. Eenheidspartities kunnen ook los worden gedefiniëerd, zonder de associatie met paracompactheid, maar in dit artikel spreken we altijd over een eenheidspartitie ondergeschikt aan een zekere open overdekking.

Definitie 14. Een **eenheidspartitie ondergeschikt aan** $\{U_i\}_{i \in I}$, waarbij $\{U_i\}_{i \in I}$ een open overdekking is van een topologische ruimte X met zekere indexverzameling I, is een verzameling $\{p_i\}_{i \in I}$ van functies $p_i : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, zodat p_i nul is op alle U_j waarvoor $j \neq i$ en er voor alle $x \in X$ geldt dat:

1. Er bestaat een omgeving van x waarop slechts eindig veel functies in $\{p_i\}_{i \in I}$ niet nul zijn.
2. De som van alle functiewaardes van functies in $\{p_i\}_{i \in I}$ van x is 1, ofwel $\sum_{i \in I} p(x) = 1$.

De reden dat we deze wat arbitrair-lijkende term introduceren is omdat paracompacte Hausdorff-ruimtes de eigenschap hebben dat ze voor elke open overdekking een eenheidspartitie toelaten, ondergeschikt aan die open overdekking. Dit blijkt later erg handig te zijn om selecties uit te breiden in paracompact ruimtes. We formuleren en bewijzen deze stelling.

Lemma 2. *Zij X een normale ruimte en $U = \{U_i\}_{i \in I}$ een lokaal eindige open overdekking van X met zekere indexverzameling I. Dan bestaat er een lokaal eindige open overdekking $V = \{V_i\}_{i \in I}$ zodat $V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ voor alle $i \in I$.*

Bewijs. Zij $\{U_1, U_2\}$ een open overdekking van X. Duidelijk is dan dat $X \setminus U_1$ en $X \setminus U_2$ gesloten verzameligen zijn met lege doorsnede. Dan bestaan er, wegens de normaliteit van X, disjuncte open verzamelingen $V_1 \supset X \setminus U_2$ en $V_2 \supset X \setminus U_1$. Omdat deze verzamelingen disjunct zijn, mogen we stellen dat $V_1 \subset X \setminus V_2 \subset U_1$ en omdat $X \setminus V_2$ gesloten is geldt er ook dat $\overline{V_1} \subset X \setminus V_2$. Ten laatste geldt er, omdat $V_1 \supset X \setminus U_2$, dat $V_1 \cup U_2 = X$.
Stel nu dat wen een open overdekking van X hebben van de vorm $\{U_i\}_{i \in I}$ voor zekere indexverzameling I. Merk op dat dit te schrijven is als $\{U_{i_1}, \bigcup_{i \in I \setminus \{i_1\}} U_i$, en dus weten we ook dat er een $V_{i_1} \subset \overline{V_{i_1}} \subset U_{i_1}$ bestaat zodat $\{V_{i_1}, \bigcup_{i \in I \setminus \{i_1\}} U_i\}$ een open overdekking is van X, aangezien $\bigcup_{i \in I \setminus \{i_1\}} U_i$ ook gewoon een open verzameling is. Nu is $\{U_{i_2}, V_{i_1} \cup \bigcup_{i \in I \setminus \{1,2\}} U_i\}$ ook weer een open overdekking van X. Het is niet moeilijk in te zien dat we dit proces steeds weer kunnen herhalen en via inductie een open overdekking krijgen $\{V_{i \in I}\}_{i \in I}$ met de eigenschap dat $V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ voor alle $i \in I$. $\square$

Propositie 7. *Een paracompacte Hausdorff-ruimte X laat voor elke open overdekking van X een eenheidspartitie ondergeschikt aan die open overdekking toe.*

Bewijs. Zij X een paracompacte Hausdorff-ruimte en $U = \{U_i\}_{i \in I}$ een open overdekking van X voor zekere indexerzameling I. Wegens de paracompactheid van X bestaat er een lokaal eindige verfijning van U, zeg $D = \{D_j\}_{j \in J}$ voor zekere indexverzameling J. Definiëer $\phi : J \to I$ zodat $\phi(j) = i$ als $D_j \subset U_i$. Dan is $V = \{V_i\}_{i \in I}$ met $V_i = \bigcup_{j \in \phi^{-1}(\{i\})} D_j$ een verfijning van U met dezelfde indexverzameling als U: I. Het is niet moeilijk om in te zien dat V ook lokaal eindig is. Neem namelijk een punt $x \in X$ die natuurlijk een omgeving N_x heeft zodat $J_x = \{j \in J | \, N_x \cap D_i \neq \varnothing$ eindig is. Dan is $I_x = \{\phi(j) \in I | \, j \in J_x\}$ ook eindig en geldt er dat $\bigcup_{i \in I_x} V_i = \bigcup_{j \in J_x} D_j$. Dus $V = \{V_i\}_{i \in I}$ is een lokaal eindige verfijning van U met dezelfde indexverzameling als U.
Uit Lemma 1 weten we dat X normaal is en dus weten we uit Lemma 2 dat er een lokaal eindige verfijning van U bestaat, zeg $W = \{W_i\}_{i \in I}$ zodat $W_i \subset \overline{W_i} \subset V_i$ voor alle $i \in I$. Uit Stelling 1 (Stelling van Urysohn) weten we, dankzij de normaliteit van X, dat $\mathbb{R}$ een uitbreidingsruimte is ten opzichte van X. Merk op dat voor alle $i \in I$, er geldt dat $\overline{W_i} \cup X \setminus V_i$ de vereniging van twee gesloten verzamelingen is, en dus zelf ook gesloten is. Dus we kunnen functies $f_i : \overline{W_i} \cup X \setminus V_i \to \mathbb{R}$ definiëren waarbij f_i gegeven wordt door:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x \in \overline{W_i} \\ 0 \text{ als } x \in X \setminus V_i \end{cases} .$$

Deze functies zijn, wegens de Stelling van Urysohn, uit te breiden naar functies $g_i : X \to \mathbb{R}$ op heel X. Dan is $g : X \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x)$ een eindige som van continue functies en duz zelf ook continu. Deze som is eindig omdat g_i alleen niet nul is als $x \in V_i$ en voor alle x geldt dat x maar in eindig veel V_i bevat is, aangezien V lokaal eindig is. Ook is g nooit nul aangezien er voor alle x wel een $i \in I$ is zodat $x \in W_i$. Als we nu functies $p_i : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

definiëren door $p_i(x) = \frac{g_i(x)}{g(x)}$ zien we dat deze functies de deling zijn van twee continue functies en dus ook zelf continu zijn. We beweren dat deze functies een eenheidspartitie ondergeschikt aan U vormen. We controleren alle vereisten.
Er geldt voor alle $i \in I$ dat p_i nul is precies wanneer g_i nul is, en dit is zeker het geval als $x \notin V_i$. Aangezien $V_i \subset U_i$ is g_i ook zeker nul als $x \notin U_i$. Verder geldt voor alle $x \in X$ dat zij in slechts eindig veel V_i liggen. Omdat de functies p_i alleen waardes ongelijk aan nul aannemen op de verzameling van hun desbetreffende indexgetal, zijn er ook slechts eindig veel functies die in x niet nul zijn. Ten laatste geldt er voor alle $x \in X$ dat

$$\sum_{i \in I} p_i(x) = \sum_{i \in I} \frac{g_i(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{i \in I} g_i(x)}{g(x)} = \frac{g(x)}{g(x)} = 1.$$

Daarmee is het bweijs compleet. $\square$

7 De Eindstelling

We kunnen met de definities uit de vorige hoofdstukken nu eindelijk een antwoord geven op de uitbreidingsstelling, althans, voor zekere eigenschappen van X en Y. Als X een Hausdorff-ruimte is en Y een Banachruimte (een volledige genormeerde vectorruimte) is, kunnen we het uibreidingsprobleem beantwoorden en dat bewijzen we in de eindstelling.

Voor we de eindstelling geven, introduceren we eerst de nodige notatie. We definiëren $\mathcal{F}(Y)$ als de verzameling van alle gesloten convexe verzamelingen in $\mathcal{P}(Y)$. Voor een verzameling S definiëren we ook $l_1(S)$ als de Benachruimte gegeven door $l_1(S) = \{y : S \to \mathbb{R} | \sum_{x \in S} |y(x)| < \infty\}$ waarbij $||y|| = \sum_{x \in S} |y(x)|$.

De eindstelling luidt als volgt:

Stelling 2. *De volgende eigenschappen van een Hausdorff-ruimte X zijn equivalent:*

1. *X is paracompact.*
2. *Als Y een Banachruimte is, dan laat elke van beneden half-continue multifunctie $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ een selectie toe.*

Voor het bewijs van deze stelling hebben we nog een paar definities en lemma's nodig.

Definitie 15. Zij $\mathcal{V}(x)$ de verzameling van alle omgevingen van een punt $x \in X$ in een topologische ruimte X. Een **lokale basis** voor x is een verzameling $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ zodat er voor alle omgevingen $V \in \mathcal{V}(x)$ van x er een $B \in \mathcal{B}(x)$ bestaat zodat $B \subset V$.

Definitie 16. Een Banachruimte X heeft **convex** als voor elk tweetal punten $x, y \in X$ er geldt dat $(1-t)x + ty \in X$ voor alle $t \in [0, 1]$.

Lemma 3. *Zij X paracompact, Y een Banachruimte, $\psi : X \to \mathcal{F}(Y)$ een van beneden half-continue multifunctie, en V een convexe omgeving van de oorsprong van Y. Dan bestaat er een continue functie $f : X \to Y$ zodat $f(x) \in \psi(x) + V$ voor alle $x \in X$.*

Bewijs. Definiëer $U_y = \{x \in X \,|\, y \in \psi(x) + V\}$ voor alle $y \in Y$. Merk op dat $U_y = \{x \in X \,|\, \psi(x) \cap y - V \neq \varnothing\}$, dus U_y is open voor alle $y \in Y$ volgens Propositie 2. Zij $\mathcal{U} = \{U_y\}_{y \in Y}$, zodat $\mathcal{U}$ een open overdekking vormt van X. Wegens de paracompactheid van X, heeft $\mathcal{U}$ een lokaal eindige verfijning en dus bestaat er een eenheidspartitie op X ondergeschikt aan $\mathcal{U}$. Dus $P = \{p_i \,|\, i \in I\}$ is een verzameling van functies van de vorm $p_i : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, zodat elke $x \in X$ een omgeving heeft waarop maar eindig veel functies uit P niet nul zijn, $\sum_{p \in P} p(x) = 1$ voor alle $x \in X$ en elke $p \in P$ nul is buiten een zekere $U \in \mathcal{U}$. Kies nu voor elke $p \in P$ een $y(p) \in Y$ zodat p nul is buiten U_y. Zij $f(x) = \sum_{p \in P} p(x) y(p)$. Aangezien, voor alle $x \in X$, $p(x) \neq 0$ voor maar eindig veel $p \in P$, is $f(x)$, voor alle $x \in X$ een eindige som van continue functies en dus is f zelf ook continu. Als voor zekere $p \in P$ $p(x)$ positief is, dan is $x \in U_y$ en dus hebben we $y(p) \in \psi(x) + V$. Dus $f(x)$ is een convexe combinatie van punten die allemaal in $\psi + V$ liggen. Dus $f(x) \in \psi(x) + V$ voor alle $x \in X$ en daarmee is het bewijs compleet. □

Bewijs van Stelling 2

Bewijs. We bewijzen eerst *1* $\Longrightarrow$ *2*. Zij $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ half-continu van beneden en zij $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ een lokale basis voor de oorsprong van Y bestaande uit symmetrische, convexe verzamelingen, zodat $V_{i+1} \subset (\frac{1}{2})^i V_i$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. We construeren nu een rij continue functies $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ van X naar Y zodat voor alle $x \in X$ en voor alle $i \in \mathbb{N}$:

a $f_{i+1} \in f_i + 2V_i$

b $f_i \in \phi(x) + V_i$

Dit doen we door middel van inductie. Het bestaan van een f_1 die aan (b) voldoet is gegeven door Lemma 3. Stel nu dat we een reeks $\{f_i\}_i^k$ van continue functies hebben die voldoen aan zowel (a) als (b) en definiëer

$$\phi_{k+1}(x) = \phi(x) \cap (f_k(x) + Vk).$$

Dan is $\phi_{k+1}(x)$ wegens de inductiehypothese nooit leeg en half-continu van beneden. Dankzij Lemma 3 weten we dat er een continue $f_{k+1} : X \to Y$ bestaat zodat $f_{k+1} \in \phi_{k+1}(x) + V_{k+1}$ voor alle $x \in X$. Er geldt nu:

$$f_{k+1} \in f_k(x) + V_k + V_{k+1} \subset f_k + 2V_k,$$

dus (a) is voldaan, en we hebben ook $f_{k+1}(x) \in \phi(x) + V_{k+1}$, dus (b) is ook voldaan. Doordat (a) voldaan is, weten we dat $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ uniform Cauchy is, en dus, wegens de volledigheid van Y, convergeert $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ ook uniform naar een continue $f : X \to Y$. Doordat (b) voldaan is, hebben we nu een continue $f : X \to Y$ zodat $f(x) \in \phi(x)$ voor alle $x \in X$, en dus is f een continue selectie voor ϕ.

We bewijzen nu *2* $\Longrightarrow$ *1*. Zij X een Hausdorff-ruimte die aan *2* voldoet en zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Laat nu $Y = l_1(\mathcal{U})$ en definiëer

$$C = \{y \in Y \,|\, y(U) \geq 0 \;\forall U \in \mathcal{U} \wedge \sum_{U \in \mathcal{U}} y(U) = 1\}.$$

Duidelijk is dat C een gesloten, convexe deelverzameling is van Y. Definiëer nu $\phi(x) = C \cap \{y \in Y \,|\, y(U) = 0 \;\forall\, U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$. Duidelijk geldt $\phi(x) \in \mathcal{F}(Y)$ voor alle $x \in X$. Stel nu dat $y \in \phi(x)$ en $\epsilon > 0$ en we bewijzen dat ϕ half-continu van beneden is. Kies ten eerste een $\delta > 1 - \frac{\epsilon}{2}$ en dan eindig veel elementen uit U $\{U_i\}_{i=1}^n$, zodat $y(U_i) > 0$ voor alle $i \leq n$ en $\sum_{i=1}^n y(U_i) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$ en definiëer $y' \in C$ door:

$$\begin{cases} y(U_1) + (1-\delta) & \text{als } U = U_1 \\ y(U_i) & \text{als } U = U_i \;\wedge\; 2 \leq i \leq n \\ 0 & \text{als } U \notin \{U_i\}_{i=1}^n \end{cases} .$$

We weten dat

$$\begin{aligned} ||y - y'|| &= \sum_{U \in \mathcal{U}} |y(U) - y'(U)| \\ &= |y(U_1) - y'(U_1)| \;+ \sum_{U \in \{U_i\}_{i=2}^n} |y(U) - y'(U)| \;+ \sum_{U \notin \{U_i\}_{i=1}^n} |y(U) - y'(U)| \\ &= (1-\delta) + 0 + \sum_{U \notin \{U_i\}_{i=1}^n} |y(U)|. \end{aligned}$$

En

$$\sum_{U \notin \{U_i\}_{i=1}^n} |y(U)| \quad = \quad \sum_{U \in \mathcal{U}} |y(U)| \;-\; \sum_{U \in \{U_i\}_{i=1}^n} |y(U)| \quad = \quad 1 - \delta.$$

Dus $||y - y'|| = 2(1-\delta) < \epsilon$. Definiëer nu $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Omdat $y(U_i) > 0$ voor alle $i \leq n$, volgt er uit de definitie van ϕ dat $x \in U_i$ voor alle $i \leq n$. Dus U is een omgeving van x waarvoor geldt dat $y' \in \phi(x')$ voor alle $x' \in U$. Ofwel, ϕ is half-continu van beneden. Door aanname *2* weten we nu dus dat er een selectie f bestaat voor ϕ. Definiëer dan voor alle $U \in \mathcal{U}$ $f_U : X \to Y$ door

$$f_U(x) = \begin{cases} f(x)(U) & \text{als } x \in U \\ 0 & \text{als } x \notin U \end{cases} .$$

waarbij $f(x)(U)$ de U-de coördinaat van $f(x)$ is. Duidelijk is dat $\{f_U \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ een eenheidspartitie op X vormt, die ondergeschikt is aan $\mathcal{U}$. Er zijn namelijk voor elke x slechts eindig veel $U \in \mathcal{U}$ waarvoor $f_U(x) \neq 0$, en de som van alle functies in elk punt x is via constructie altijd 1. Omdat we dit hebben gedaan voor een willekeurige open overdekking $\mathcal{U}$, mogen we concluderen dat X paracompact is. $\square$

8 Conclusie

Uit de eindstelling weten we dat elke multifunctie $\phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ waarbij X een paracompacte Hausdorff-ruimte en Y een Banachruimte is een selectie toelaat. Omdat $\{y\}$ convex en gesloten is voor alle $y \in Y$ weten we uit Propositie 4 dat voor alle gesloten $A \subset X$ er geldt dat elke selectie voor $\phi| A$ uitgebreid kan worden tot een selectie voor ϕ.

We vroegen ons aan het begin van dit artikel af voor welke beperkingen alle selecties met paracomapcte Hausdorff-domeinen uit te breiden zijn. We weten nu dat dit lukt als we selecties nemen van een van beneden half-continue multifunctie die punten uit het domein afbeeldt op gesloten, convexe deelverzamelingen van een Banachruimte.

We eisen dat de multifuncite half-continu van beneden is zondat de verzamelingen waarin de beelden mogen liggen op de juiste manier aan elkaar 'gehaakt' zijn. Een multifunctie die niet half-continu van beneden is heeft namelijk altijd punten of stukken ruimte waarop een selectie nooit uigebreid kan worden. Denk hier bijvoorbeeld aan geïsoleerde punten of punten die op een verticale rand liggen waardoor ze niet uit te breiden zijn naar één van de zijkanten.

Ook mogen we de eis stellen dat de multifunctie afbeeldt op gesloten, convexe deelverzamelingen aangezien dat geen invloed heeft op het bewijs van Stelling 2. Ook zijn alle puntverzamelingen van een Banachruimte natuurlijk convex en gesloten en dus heeft het ook geen invloed op Propositie 4. Het lijkt misschien handig om ook te eisen dat er wordt afgebeeld op compacte verzamelingen, aangezien alle puntverzamelingen van een Banachruimte compact zijn, maar de reden waarom dit niet kan is dat de verzameling C in de tweede helft van het bewijs van Stelling 2 niet compact gemaakt kan worden.

Wat opvalt aan Stelling 2 is dat het een dubbbele implicatie is. We hebben dus niet alleen iets bewezen voor selecties met compacte Hausdorff-domeinen. We hebben namelijk ook een alternatieve definitie gegeven voor paracompactheid met multifuncties en selecties.

Literatuurlijst

[Mic56] Ernest Michael. „Continuous Selections I". In: (1956).

[Han60] Akihiro Hanai Sitiro; Okuyama. *On paracompactness of topological spaces.* Proc. Japan Acad., 1960.

[Deu83] Petar Deutsch Frank; Kenderov. „Continuous Selections and Approximate Selection for Set-Valued Mappings and Applications to Metric Projections". In: (1983).

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag, 1989.

[Xu01] Yuguang Xu. „A Note on a Continuous Approximate Selection Theorem". In: (2001).

[Por03] John E. Porter. „Base-paracompact spaces". In: (2003).

[A19] Cobzas S.; Miculescu R.; Nicolae A. *Lipschitz Functions.* Springer International Publishing, 2019.

[Kal19] Lutfi Kalantan. „L-paracompactness and L_2-paracompactness". In: (2019).

[Bai20] Mathieu Baillief. „Collared and non-collared manifold boundaries". In: (2020).