Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De Rogers-Ramanujan identiteiten

(Engelse titel: The Rogers-Ramanujan identities)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Roel Tielen

Delft, Nederland
Juli, 2013

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“De Rogers-Ramanujan identiteiten”
(Engelse titel: “The Rogers-Ramanujan identities”)

Roel Tielen

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. W. Groenevelt

Overige commissieleden

Dr. J. Spandaw | Prof.dr. A. Heemink

Juli, 2013 | Delft

0.1 Voorwoord

Deze scriptie is gemaakt ter afsluiting van de bachelor Technische Wiskunde. Doel van dit eindproject is dat de student zelfstandig wiskundige stof tot zich neemt en met behulp van zijn opgedane kennis en vaardigheden hier een scriptie over schrijft. Uiteindelijk zal ter afsluiting het project gepresenteerd worden aan (onder andere) de beoordelingscommissie.

Het Bachelorproject bestaat overigens uit twee onderdelen. Enerzijds het project zelf, met scriptie en eindpresentatie. Anderzijds het studentencolloquium, waarbij de student vertrouwd raakt met het presenteren van wiskundige onderwerpen. Samen vormen deze onderdelen een groot deel van het laatste semester van de Bacheloropleiding (18 ects).

Voor het begin van het laatste kwartaal ben ik me gaan verdiepen in de mogelijke onderwerpen voor het Bachelorproject. Uiteindelijk viel de keuze op de Rogers-Ramanujan identiteiten. Dit vanwege het mooie verhaal over Ramanujan en het verschijnen van de identiteiten in uiteenlopende gebieden van de wiskunde. Na kort overleg met mijn begeleider, Wolter Groenevelt, kon ik direct aan de slag.

Gedurende het project heb ik veel vrijheid gehad in het kiezen van deelonderwerpen, de te bestuderen stof en de frequentie van overleg met mijn begeleider. Hierdoor was ik volledig in staat mijn eigen weg te bewandelen. Desondanks kon ik, wanneer ik vast zat in een berekening of een stuk theorie niet begreep, meteen langskomen bij mijn begeleider. De vierde verdieping verliet ik dan ook bijna altijd met een antwoord op al mijn vragen. Bij deze wil ik dan ook mijn dank uitspreken richting mijn begeleider voor de soepele en goede samenwerking.

In de inleiding vindt u meer informatie over de inhoud van de scriptie. Dan rest mij volgens mij niets meer dan u veel leesplezier te wensen.

Roel Tielen

Inhoudsopgave

0.2 Inleiding

De Rogers-Ramanujan identiteiten zijn twee bijzondere identiteiten. Niet alleen vanwege het verhaal van de ontdekking en herontdekking van deze identiteiten, maar ook vanwege het feit dat de identiteiten in de meest uiteenlopende deelgebieden van de wiskunde verschijnen. Het doel van deze scriptie is om de Rogers-Ramanujan identiteiten vanuit een aantal verschillende oogpunten te bekijken. Op deze manier zal blijken hoe veelzijdig deze identiteiten inderdaad zijn.

Het begin van de scriptie beschrijft kort het verhaal achter de Rogers-Ramanujan identiteiten. We staan hierbij stil bij de lijst die Ramanujan opstelde vol met vermoedens van identiteiten, waaronder de Rogers-Ramanujan identiteiten. Daarnaast beschrijven we hoe het bewijs daadwerkelijk werd gevonden. Dit hoofdstuk is gebaseerd op hoofdstuk 1 van [2].

Het echte bewijs staat centraal in hoofdstuk 2. Hierin volgen we dezelfde weg als die Rogers bewandeld heeft om tot de Rogers-Ramanujan identiteiten te komen. Na het toepassen van een belangrijke substitutie en het opstellen van twee recurrente betrekkingen, leiden we uiteindelijk de beide identiteiten af.

Vanaf dat moment staan we meer stil bij toepassingen van de Rogers-Ramanujan identiteiten. Om te beginnen zoeken we in hoofdstuk 3 uit wat het verband is tussen partities en de Rogers-Ramanujan identiteiten. We leggen eerst uit wat partities precies zijn en bespreken daarna de benodigde theorie om het verband af te leiden tussen partities en de Rogers-Ramanujan identiteiten.

Ten slotte kijken we naar het verschijnen van de Rogers-Ramanujan identiteiten in het zogenaamde Hard Hexagon model. Eerst bespreken we dit model, waarna we ons richten op het verschijnen van de identiteiten in dit model.

Op deze manier belichten we een aantal facetten van de identiteiten: De geschiedenis, het bewijs en twee toepassingen van de Rogers-Ramanujan identiteiten. In de reflectie zal echter blijken dat we nog lang niet alles hebben verteld over de identiteiten. Er zijn nog tal van zaken die uitnodigen tot verder onderzoek. Zo veelzijdig zijn de Rogers-Ramanujan identiteiten dus!

Hoofdstuk 1

Geschiedenis

De Indiër Srinivasa Ramanujan Aiyangar (Ramanujan) zorgde in het jaar 1913 voor grote opschudding door een lijst met identiteiten te formuleren die hij naar eigen zeggen had ontdekt. Hoewel hij geen noemenswaardige vorm van hoger onderwijs had gevolgd, hadden toenmalige wiskundigen vaak meer dan standaardtechnieken nodig om uitsluitsel te geven over het al dan niet correct zijn van deze identiteiten. Sterker nog, over een aantal bleef men in het ongewisse. Er was geen bewijs voor te vinden, maar het tegendeel kon ook niet bewezen worden. Twee van deze identiteiten waren de volgende:

$$1+\frac{q^2}{(1-q)}+\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^{12}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\frac{q^{20}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}\cdots$$
$$=\frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)}\cdot\frac{1}{(1-q^7)(1-q^8)}\cdot\frac{1}{(1-q^{12})(1-q^{13})}\cdot\frac{1}{(1-q^{17})(1-q^{18})}$$

$$1+\frac{q^2}{(1-q)}+\frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\frac{q^{16}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}+\cdots$$
$$=\frac{1}{(1-q)(1-q^4)}\cdot\frac{1}{(1-q^6)(1-q^9)}\cdot\frac{1}{(1-q^{11})(1-q^{14})}\cdot\frac{1}{(1-q^{16})(1-q^{19})}$$

Zoals gezegd konden deze identiteiten niet bewezen worden door de wiskundigen in die tijd. Sterker nog, de toenmalige autoriteit op dit gebied, P.A. MacMahon, kon ze niet bewijzen. Professor G.H. Hardy, die de lijst met identiteiten via Ramanujan onder zijn ogen kreeg, zei over de lijst:

> *"A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them."*

Uiteindelijk was het Ramanujan zelf die in 1917 per toeval het bewijs 'ontdekte'. Inmiddels studeerde hij aan Cambridge en probeerde tevergeefs zijn eigen geformuleerde identiteiten te bewijzen. Tijdens een zoektocht in oude *Proceedings of the London Mathematical Society* (om precies te zijn: [1]) stuitte hij per toeval op een bewijs van de twee identiteiten.

Deze bewijzen waren opgesteld door Leonard James Rogers in het jaar 1894. Aangezien Rogers zich al lang niet meer bezighield met dit onderwerp, was de ophef over Ramanujans identiteiten nooit tot het hem gekomen. De vondst van Ramanujan deed de interesse van Rogers echter weer aanwakkeren, waarna hij zich opnieuw verdiepte in de identiteiten en uiteindelijk een tweede bewijs vond.

Vanaf het moment dat het eerste bewijs van Rogers was gevonden door Ramanujan gingen bovenstaande identiteiten voortaan door het leven als de Rogers-Ramanujan identiteiten.

Figuur 1.1: Ramanujan.

Hoofdstuk 2

Een bewijs van de Rogers-Ramanujan identiteiten

Zoals gezegd heeft L.J. Rogers de Rogers-Ramanujan identiteiten bewezen in het jaar 1894. Na de vondst van Ramanujan verdiepte Rogers zich in zijn eerdere werk en leverde uiteindelijk een tweede bewijs. Aangezien dit bewijs ietwat eleganter is, aldus Andrews [2], zullen we dit bewijs van de Rogers-Ramanujan identiteiten bekijken.

Stelling (Rogers-Ramanujan identiteiten)

Voor $|q| < 1$ *geldt:*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}.$$

We zullen in dit hoofdstuk bovenstaande identiteiten afleiden op de manier zoals Rogers dat deed aan het begin van de 20e eeuw. Eerst zullen we een aantal begrippen introduceren.

2.1 Enkele definities

In dit bewijs zal er veelvuldig gebruikt worden gemaakt van reeksen waarin het q-Pochhammer symbool voorkomt. Aangezien dit symbool dus veelvuldig gebruikt zal worden, zullen we dit als eerste introduceren. Vanaf dit punt nemen we $|q| < 1$ om zeker te zijn van convergentie van de gebruikte reeksen en producten.

Definitie (q-Pochhammer symbool) [3]
Voor $a \in \mathbb{C}$ *en* $n \in \mathbb{N}$ *geldt:*

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^{n-1}).$$

Voor $n = 0$ geldt $(a;q)_0 = 1$. Wanneer n naar oneindig gaat definieren we, als $|q| < 1$,

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - aq^k).$$

Naast het q-Pochhammer symbool zullen we ook een aantal andere begrippen nodig hebben in Rogers bewijs. Één hiervan is één zogenaamde q-exponentiële functie.

Definitie (q-Exponenteniële functie) [3]

Voor $z \in \mathbb{C}$ geldt

$$E_q(z) = (-z, q)_\infty = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{r(r-1)/2} z^r}{(q;q)_r}.$$

Een laatste definitie die we nodig hebben heeft te maken met het compact noteren van een breuk tussen q-Pochhammer symbolen.

Definitie (Gaussiaanse q-binomiaal coëfficiënt) [3]

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{(q;q)_A}{(q;q)_B (q;q)_{A-B}},$$

hierbij zijn A en B niet negatieve gehele getallen. Als $A < B$, dan $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$. Merk op dat $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A-B \end{bmatrix}$.

Aan de hand van bovenstaande definitie kunnen we twee recurrente betrekkingen afleiden die we in Rogers bewijs zullen gebruiken.

Lemma 1.1
Voor niet negatieve gehele getallen A en B geldt

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-1 \\ B \end{bmatrix} + q^{A-B} \begin{bmatrix} A-1 \\ B-1 \end{bmatrix}.$$

Bewijs. Schrijf de rechterkant van bovenstaande uitdrukking uit volgens de definitie. Schrijf vervolgens de twee breuken als één breuk en werk de teller uit:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A-1 \\ B \end{bmatrix} + q^{A-B} \begin{bmatrix} A-1 \\ B-1 \end{bmatrix} &= \frac{(q;q)_{A-1}}{(q;q)_B (q;q)_{A-B-1}} + q^{A-B} \frac{(q;q)_{A-1}}{(q;q)_{B-1}(q;q)_{A-B}} \\
&= \frac{(q;q)_{A-1}(1-q^{A-B}) + (q;q)_{A-1}(1-q^B)q^{A-B}}{(q;q)_B(q;q)_{A-B}} \\
&= \frac{(q;q)_{A-1}(1-q^{A-B}) + (q;q)_{A-1}(q^{A-B}-q^A)}{(q;q)_B(q;q)_{A-B}} \\
&= \frac{(q;q)_{A-1}(1-q^{A-B}+q^{A-B}-q^A)}{(q;q)_B(q;q)_{A-B}} \\
&= \frac{(q;q)_{A-1}(1-q^A)}{(q;q)_B(q;q)_{A-B}} \\
&= \frac{(q;q)_A}{(q;q)_B(q;q)_{A-B}} \\
&= \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 1.2
Voor niet negatieve gehele getallen A en B geldt

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-1 \\ B-1 \end{bmatrix} + q^B \begin{bmatrix} A-1 \\ B \end{bmatrix}.$$

Bewijs. Gebruik de eigenschap dat $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A-B \end{bmatrix}$ en Lemma 1.1.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A \\ A-B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A-1 \\ A-B \end{bmatrix} + q^{A-(A-B)} \begin{bmatrix} A-1 \\ A-B-1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A-1 \\ A-B \end{bmatrix} + q^B \begin{bmatrix} A-1 \\ B \end{bmatrix} \quad \square
\end{aligned}$$

Van beide lemma's is het bewijs redelijk direct. Vanuit de definitie dienen er wat manipulaties toegepast te worden, waarna de identiteit tevoorschijn komt. Het blijken echter zeer handige identiteiten te zijn.

Met behulp van de definities en lemma's uit deze paragraaf zal blijken dat we in staat zijn om de Rogers-Ramanujan identiteiten te bewijzen. Vanaf de volgende bladzijde zullen we daadwerkelijk de weg bewandelen die Rogers meer dan honderd jaar geleden heeft bewandeld.

2.2 Het bewijs van Rogers

Met behulp van de definities en de lemma's uit de voorgaande paragraaf zullen we de Rogers-Ramanujan identiteiten bewijzen.

Rogers begon zijn bewijs met onderstaande gelijkheid.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+2\lambda q^n \cos(\theta)+\lambda^2 q^{2n}) = (-\lambda q e^{i\theta};q)_\infty(-\lambda q e^{-i\theta};q)_\infty \tag{2.1}$$

Hierbij geldt dat $\lambda \in \mathbb{C}$ en $\theta \in [0, 2\pi]$. De juistheid van (2.1) kan aangetoond worden door bijvoorbeeld de rechterhelft uit te schrijven, dit geeft ons dat

$$\begin{aligned}
(-\lambda q e^{i\theta};q)_\infty(-\lambda q e^{-i\theta};q)_\infty &= (1+\lambda q e^{i\theta})(1+\lambda q^2 e^{i\theta})...(1+\lambda q e^{-i\theta})(1+\lambda q^2 e^{-i\theta})\dots \\
&= (1+\lambda q e^{i\theta})(1+\lambda q e^{-i\theta})(1+\lambda q^2 e^{i\theta})(1+\lambda q^2 e^{-i\theta})\dots \\
&= (1+\lambda q(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+\lambda^2 q^2)(1+\lambda q^2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+\lambda^2 q^4)\dots \\
&= (1+2\lambda q\cos(\theta)+\lambda^2 q^2)(1+2\lambda q^2\cos(\theta)+\lambda^2 q^4)\dots \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1+2\lambda q^n\cos(\theta)+\lambda^2 q^{2n}).
\end{aligned}$$

Vanuit identiteit (2.1) ging hij vervolgens verder. Hierbij maakte hij in de tweede regel gebruik van de q-exponentiële functie; Deze is gedefinieerd op pagina 10.

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+2\lambda q^n\cos(\theta)+\lambda^2 q^{2n}) &= (-\lambda q e^{i\theta};q)_\infty(-\lambda q e^{-i\theta};q)_\infty \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{q^{r(r-1)/2}(\lambda q e^{i\theta})^r}{(q;q)_r}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s(s-1)/2}(\lambda q e^{-i\theta})^s}{(q;q)_s}
\end{aligned}$$

Vervolgens schreef hij deze laatste regel om met behulp van het Cauchy product tot

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(\theta)\lambda^n}{(q;q)_n},$$

waarbij

$$B_n(\theta) = q^{n/2(n+1)}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{r(r-n)}e^{i(2r-n)\theta}.$$

Uit [2] (pagina 22) volgt dat we deze uitdrukking ook kunnen schrijven als

$$B_{2n}(\theta) = q^{n^2+n}\Big(\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} + 2\sum_{r=1}^{n} q^{r^2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix} \cos(2r\theta)\Big)$$

en als

$$B_{2n+1}(\theta) = 2q^{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{n} q^{r(r+1)} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix} \cos((2r+1)\theta).$$

Op dit punt stelt Rogers voor om θ handig te kiezen. Laat θ_0 de keuze zijn van θ met de eigenschap dat

$$\cos(2n\theta_0) = (-1)^n q^{n(n-1)/2}(1-q^n).$$

en

$$\cos((2n+1)\theta_0) = (-1)^n q^{n(n-1)/2}(1-q^{2n+1}).$$

Door deze keuze van θ kunnen we het rechterlid in beide gelijkheden substitueren voor het linkerlid in B_{2n} en B_{2n+1}. De uitdrukkingen die op deze manier ontstaan noemen we β_{2n} en β_{2n+1}.

Stelling
Wanneer we voor θ de waarde θ_0 kiezen, krijgen we als uitdrukkingen voor β_{2n} en β_{2n+1}:

$$\beta_{2n} = q^{n^2+n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix},$$

$$\beta_{2n+1} = q^{(n+1)^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix}.$$

Daarnaast hebben we voor β_{2n} nog een tweede uitdrukking afgeleid, te weten

$$\beta_{2n} = -q^{n^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}.$$

Bewijs. We beginnen met β_{2n+1}. Na substitutie van $(-1)^r q^{r(r-1)/2}(1-q^{2r+1})$ krijgen we:

$$\begin{aligned}
\beta_{2n+1} &= q^{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{n} q^{r(r+1)} q^{r(r-1)/2}(-1)^r(1-q^{2r+1}) \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix} \\
&= q^{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{n} q^{(3r^2+r)/2}(-1)^r(1-q^{2r+1}) \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix} \\
&= q^{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{n} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r(1-q^{2r+1}) \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking gaan we schrijven tot een reeks waarbij r loopt van $-\infty$ tot ∞. We zullen eerst de reeks iets anders opschrijven.

$$\begin{aligned}
\beta_{2n+1} &= q^{(n+1)^2}\sum_{r=0}^{n} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r(1-q^{2r+1})\begin{bmatrix}2n+1\\ n-r\end{bmatrix} \\
&= q^{(n+1)^2}\sum_{r=0}^{n} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r\begin{bmatrix}2n+1\\ n-r\end{bmatrix} - q^{(n+1)^2}\sum_{r=0}^{n} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r q^{2r+1}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-r\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Merk op dat vanaf $r = n+1$ geldt dat

$$\begin{bmatrix}2n+1\\ n-r\end{bmatrix} = 0.$$

Immers, vanaf $r = n+1$ is de onderste term een negatief getal, waardoor we de reeks kunnen schrijven van 0 tot ∞:

$$\beta_{2n+1} = q^{(n+1)^2}\sum_{r=0}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r\begin{bmatrix}2n+1\\ n-r\end{bmatrix} - q^{(n+1)^2}\sum_{r=0}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r q^{2r+1}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-r\end{bmatrix}.$$

Nu bekijken we enkel het achterste gedeelte van bovenstaande uitdrukking en passen de substitutie $r = -t-1$ toe. Dit levert ons op dat

$$\begin{aligned}
& -q^{(n+1)^2}\sum_{r=0}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r q^{2r+1}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-r\end{bmatrix} \\
= & -q^{(n+1)^2}\sum_{t=-\infty}^{-1} q^{(-t-1)(-3t-2)/2}(-1)^{-t-1}q^{-2t-1}\begin{bmatrix}2n+1\\ n+t+1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Merk nu op dat $\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\\ A-B\end{bmatrix}$, dus

$$\begin{bmatrix}2n+1\\ n+t+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2n+1\\ n-t\end{bmatrix},$$

waardoor we de volgende uitdrukking kunnen afleiden:

$$\begin{aligned}
& -q^{(n+1)^2} \sum_{t=-\infty}^{-1} q^{(-t-1)(-3t-2)/2} (-1)^{-t-1} q^{-2t-1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+t+1 \end{bmatrix} \\
= & -q^{(n+1)^2} \sum_{t=-\infty}^{-1} q^{(-t-1)(-3t-2)/2} (-1)^{-t-1} q^{-2t-1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-t \end{bmatrix} \\
= & -q^{(n+1)^2} \sum_{t=-\infty}^{-1} q^{(3t^2+5t+2)/2} (-1)^{-t-1} q^{(-4t-2)/2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-t \end{bmatrix} \\
= & -q^{(n+1)^2} \sum_{t=-\infty}^{-1} q^{(3t^2+t)/2} (-1)^{-t-1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-t \end{bmatrix} \\
= & -q^{(n+1)^2} \sum_{t=-\infty}^{-1} q^{t(3t+1)/2} (-1)^{-t-1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-t \end{bmatrix} \\
= & \; q^{(n+1)^2} \sum_{t=-\infty}^{-1} q^{t(3t+1)/2} (-1)^{-t} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-t \end{bmatrix} \\
= & \; q^{(n+1)^2} \sum_{t=-\infty}^{-1} q^{t(3t+1)/2} (-1)^{t} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Uiteindelijk levert het ons op dat

$$\beta_{2n+1} \quad = \quad q^{(n+1)^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2} (-1)^r \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix}.$$

Op dezelfde manier verkrijgen we een formule voor β_{2n}, namelijk

$$\beta_{2n} \quad = \quad q^{n^2+n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2} (-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix}.$$

Het zal nuttig blijken te zijn om ook met een andere uitdrukking voor β_{2n} verder te werken. Daarom bekijken we de formule

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2} (-1)^r \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix}.$$

Aangezien de termen r en $-r-1$ precies tegen elkaar wegvallen, geldt dat

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2} (-1)^r \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix} = 0.$$

We gebruiken nu Lemma 1.2 en schrijven

$$\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix} + q^{n-r} \begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix}.$$

Waardoor we krijgen dat

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2}(-1)^r(\begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix} + q^{n-r}\begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix} = 0.$$

Wanneer we dit uitwerken krijgen we

$$q^n \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix} = -\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}.$$

Vermenigvuldigen met q^{n^2} levert ons het volgende op:

$$q^{n^2+n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix} = -q^{n^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}.$$

oftewel

$$\beta_{2n} = -q^{n^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Nu we een uitdrukking hebben voor β_{2n+1} en β_{2n} kunnen we de volgende recurente betrekking bewijzen.

Stelling (Recurrente betrekking 1)

$$\beta_{2n+1} - q^{n+1}\beta_{2n} = -q^{3n+2}\beta_{2n}$$

Bewijs. We schrijven de linkerkant van bovenstaande identiteit uit met behulp van de uitdrukkingen op de vorige pagina:

$$\beta_{2n+1} - q^{n+1}\beta_{2n} = q^{(n+1)^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r(\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix}).$$

Vervolgens passen we Lemma 1.1 toe op bovenstaande formule. Daarnaast werken we $q^{(n+1)^2}$ uit. We krijgen dan:

$$\beta_{2n+1} - q^{n+1}\beta_{2n} = q^{n^2+2n+1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r q^{n+r+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}.$$

Uit deze sommatie kunnen we de factor q^{n+1} halen waardoor geldt dat

$$\beta_{2n+1} - q^{n+1}\beta_{2n} = q^{n^2+3n+2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r q^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}.$$

Tenslotte halen kunnen we q^r samenvoegen met $q^{r(3r+1)/2}$ om af te leiden dat

$$\begin{aligned} \beta_{2n+1} - q^{n+1}\beta_{2n} &= q^{n^2+3n+2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}. \\ &= -q^{3n+2}\beta_{2n} \end{aligned}$$

Herinner immmers de volgende uitdrukking van β_{2n}:

$$\beta_{2n} = -q^{n^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{3r(r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}.$$

We kunnen bovenstaande uitdrukkingen combineren tot de recurrente betrekking

$$\beta_{2n+1} - q^{n+1}\beta_{2n} = -q^{3n+2}\beta_{2n}. \quad \square$$

Voor β_{2n} en β_{2n-1} gaan we op dezelfde manier een recurrente betrekking afleiden.

Stelling (Recurrente betrekking 2)

$$\beta_{2n} - q^n\beta_{2n-1} = q^{2n}\beta_{2n-1}$$

Bewijs. Net als bij de vorige recurrente betrekking zullen we beginnen met de linkerzijde van de identiteit en deze verder uitschrijven. Een uitdrukking voor β_{2n-1} verkrijgen we hierbij door de substitutie $n \mapsto n-1$ toe te passen op de uitdrukking van β_{2n+1}. We krijgen op die manier de volgende uitdrukking voor β_{2n-1}:

$$\beta_{2n-1} = q^{n^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-r-1 \end{bmatrix}.$$

Zoals gezegd beginnen we met de linkerzijde van de identiteit en werken deze verder uit:

$$\beta_{2n} - q^n\beta_{2n-1} = q^{n^2+n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r (\begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-r-1 \end{bmatrix}).$$

Lemma 1.2 geeft ons de mogelijkheid om bovenstaande uitdrukking om te schrijven. Zo leiden we af dat

$$\beta_{2n} - q^n\beta_{2n-1} = q^{n^2+n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r q^{n-r} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-r \end{bmatrix}.$$

We halen q^n buiten de sommatie en voegen q^{-r} samen met $q^{r(3r+1)/2}$,

$$\beta_{2n} - q^n\beta_{2n-1} = q^{n^2+2n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r-1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-r \end{bmatrix}.$$

Daarna vervangen we in bovenstaande vergelijking de term r voor $-r$. Dit levert ons op:

$$\begin{aligned}\beta_{2n} - q^n\beta_{2n-1} &= q^{2n}q^{n^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+r \end{bmatrix} \\ &= q^{2n}q^{n^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r(3r+1)/2}(-1)^r \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-r-1 \end{bmatrix} \\ &= q^{2n}\beta_{2n-1}.\end{aligned}$$

Uiteindelijk levert ons het de tweede recurrente betrekking op:

$$\beta_{2n} - q^n\beta_{2n-1} = q^{2n}\beta_{2n-1}. \quad \square$$

We hebben nu twee recurrente betrekkingen. Later zal blijken dat ieder van deze betrekkingen zal leiden tot een van de Rogers-Ramanujan identiteiten. De volgende stelling zal van pas blijken te komen:

Stelling
De recurrente betrekkingen

$$\begin{aligned}\beta_{2n+1} - q^{n+1}\beta_{2n} &= -q^{3n+2}\beta_{2n},\\ \beta_{2n} - q^{n}\beta_{2n-1} &= q^{2n}\beta_{2n-1},\end{aligned}$$

hebben, wanneer we deze itereren tegen de beginwaarde $\beta_0 = 1$ *als oplossing*

$$\beta_{2n} = q^{n(n+1)}(q^{n+1};q)_n$$

$$\beta_{2n-1} = q^{n^2}(q^n;q)_n.$$

Bewijs. We bewijzen deze bewering met inductie. Om te beginnen laten we zien dat als we $n = 0$ invullen in de bovenste recurrente betrekking, we een uitdrukking krijgen voor β_1 overeenkomend met de onderste uitdrukking ($\beta_{2n-1} = q^{n^2}(q^n;q)_n$). We krijgen namelijk:

$$\begin{aligned}\beta_1 - q\beta_0 &= -q^2\beta_0 \Rightarrow\\ \beta_1 &= q - q^2 = q(1-q) = q(q;q)_1\end{aligned}$$

Evenzo geldt dat als we $n = 1$ invullen in de onderste recurrente betrekking, we een uitdrukking krijgen voor β_2 overeenkomend met de bovenste uitdrukking ($\beta_{2n} = q^{n(n+1)}(q^{n+1};q)_n$). We krijgen namelijk:

$$\begin{aligned}\beta_2 - q\beta_1 &= q^2\beta_1 \Rightarrow\\ \beta_2 &= (q+q^2)\beta_1 = (q+q^2)(q-q^2) = q^2 - q^4 = q^2(1-q^2) = q^2(q^2;q)_1\end{aligned}$$

Vervolgens nemen we aan dat voor $n = k$ beide uitdrukkingen gelden. Dit betekent dus dat geldt:

$$\beta_{2k} = q^{k(k+1)}(q^{k+1};q)_k,$$

$$\beta_{2k-1} = q^{k^2}(q^k;q)_k.$$

We bekijken eerst de bovenste recursieformule:

$$\begin{aligned}\beta_{2k+1} - q^{k+1}\beta_{2k} &= -q^{3k+2}\beta_{2k}\\ &= (q^{k+1} - q^{3k+2})\beta_{2k}\\ &= (q^{k+1} - q^{3k+2})q^{k(k+1)}(q^{k+1};q)_k\\ &= (1 - q^{2k+1})q^{k(k+1)+(k+1)}(q^{k+1};q)_k\\ &= q^{(k(k+1)+(k+1)}(q^{k+1};q)_{k+1}\\ &= q^{(k+1)^2}(q^{k+1};q)_{k+1}.\end{aligned}$$

Dit levert ons precies de onderste uitdrukking op voor $n = k + 1$.

Evenzo bekijken we de onderste recursieformule:

$$\begin{aligned}\beta_{2k+2} - q^{k+1}\beta_{2k+1} &= q^{2k+2}\beta_{2k+1} \Rightarrow \\ \beta_{2k+2} &= (q^{k+1} + q^{2k+2})\beta_{2k+1}.\end{aligned}$$

Vervolgens maken we gebruik van de uitdrukking voor β_{2k+1} die we zojuist hebben afgeleid. Daarnaast schrijven we $(q^{k+1}; q)_{k+1}$ als $\frac{1-q^{k+1}}{1-q^{2(k+1)}}(q^{k+2}; q)_{k+1}.$,

$$\begin{aligned}\beta_{2k+2} &= (q^{k+1} + q^{2(k+1)})q^{(k+1)^2}(q^{k+1}; q)_{k+1} \\ &= (q^{(2(k+1)} + q^{k+1})q^{(k+1)^2}\frac{1-q^{k+1}}{1-q^{2(k+1)}}(q^{k+2}; q)_{k+1}.\end{aligned}$$

We werken de haakjes uit en halen $(1 - q^{2(k+1)})$ buiten de haken.

$$\begin{aligned}\beta_{2k+2} &= \frac{(q^{2(k+1)} + q^{k+1})(q^{(k+1)^2} - q^{(k+1)^2+(k+1)})}{1-q^{2(k+1)}}(q^{k+2}; q)_{k+1} \\ &= \frac{q^{(k+1)^2+2(k+1)} - q^{(k+1)^2+3(k+1)} + q^{(k+1)^2+(k+1)} - q^{(k+1)^2+2(k+1)}}{1-q^{2(k+1)}}(q^{k+2}; q)_{k+1} \\ &= \frac{-q^{(k+1)^2+3(k+1)} + q^{(k+1)^2+(k+1)}}{(1-q^{2(k+1)})}(q^{k+2}; q)_{k+1} \\ &= \frac{q^{(k+1)^2+(k+1)}(1-q^{2(k+1)})}{(1-q^{2(k+1)})}(q^{k+2}; q)_{k+1}.\end{aligned}$$

Na het wegstrepen verkrijgen we precies de gewenste uitdrukking:

$$\begin{aligned}\beta_{2k+2} &= q^{(k+1)^2+(k+1)}(q^{k+2}; q)_{k+1} \\ &= q^{k^2+3k+2}(q^{k+2}; q)_{k+1} \\ &= q^{(k+1)(k+2)}(q^{k+2}; q)_{k+1}\end{aligned}$$

We zien dat onder de inductiehypothese ook de tweede recurrente betrekking geldt. Hiermee hebben we de juistheid van de stelling aangetoond. □

Wanneer we verder willen komen in het bewijs, blijkt dat we gebruik moeten maken van Jacobi's drievoudige product. Deze relatie is ontdekt door de wiskundige Carl Gustac Jacobi in zijn boek *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* in het jaar 1829. We zullen het bewijs hier achterwege laten.

Stelling(Jacobi's drievoudig product):

Voor $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *geldt:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} z^n = (q; q)_\infty(-\frac{1}{z}; q)_\infty(-zq; q)_\infty$$

In het bewijs van Rogers hebben we onderstaande identiteit nodig.

Lemma 1.3:

$$(q;q)_\infty \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(\theta)q^{-n/2}}{(q;q)_n}\right\} \quad = \quad 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2/2}\cos(n\theta)$$

Bewijs. Deze gelijkheid is af te leiden met behulp van Jacobi's drievoudige product. Herinner de volgende gelijkheid, gevonden op pagina 12, maar nu met $\lambda = q^{-\frac{1}{2}}$:

$$(q;q)_\infty \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(\theta)q^{-n/2}}{(q;q)_n}\right\} \quad = \quad (q;q)_\infty(-q^{1/2}e^{i\theta};q)_\infty(-q^{1/2}e^{-i\theta};q)_\infty.$$

Vervolgens maken we gebruik van Jacobi's drievoudig product met

$$z = q^{-1/2}e^{-i\theta}.$$

Daarnaast brengen we de machten van q bij elkaar tot $q^{(n/2)^2}$:

$$\begin{aligned}
(q;q)_\infty(-q^{1/2}e^{i\theta};q)_\infty(-q^{1/2}e^{-i\theta};q)_\infty &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2}(q^{-1/2}e^{-i\theta})^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2}q^{-n/2}e^{-in\theta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2}e^{-in\theta}.
\end{aligned}$$

Vervolgens splitsen we de laatstverkregen reeks in drie delen en schrijven

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2}e^{-in\theta} \quad = \quad 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{n^2/2}e^{-in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2/2}e^{-in\theta}.$$

In de tweede sommatie passen we nu de substitutie $n \mapsto -n$ toe. Hierdoor kunnen we de twee sommaties samenvoegen:

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{n^2/2}e^{-in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2/2}e^{-in\theta} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2/2}e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2/2}e^{-in\theta} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2/2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}).
\end{aligned}$$

En vanwege het feit dat $\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \cos(n\theta)$ geldt nu

$$(q;q)_\infty \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(\theta)q^{-1/2n}}{(q;q)_n}\right\} \quad = \quad 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2/2}\cos(n\theta). \quad \square$$

Om nu tot de Rogers-Ramanujan identiteiten te komen, bekijken we de gelijkheid van voorgaand lemma en beperken ons tot de even veelvouden van θ. Omdat er hier sprake is van twee cosinusreeksen, moet de som van de even termen van beide reeksen in Lemma 1.3 gelijk zijn. Vervolgens passen we de substituties toe die Rogers eerder al voorstelde. De gelijkheid die we dan krijgen geldt enkel voor θ_0. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{(2n)^2/2}\cos(2n\theta_0) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(2n)^2/2}(-1)^n q^{n(n-1)/2}(1+q^n) \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n(1+q^n). \end{aligned}$$

We kunnen nu dus schrijven:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{(2n)^2/2}\cos(2n\theta_0)\Big) &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n(1+q^n)\Big) \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{2n}q^{-n}}{(q;q)_{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_{2n}q^{-n}}{(q;q)_{2n}} \end{aligned}$$

Aangezien bekend is dat $\beta_{2n} = q^{n(n+1)}(q^{n+1};q)_n$ kunnen we deze in bovenstaande uitdrukking substitueren. Vervolgens dienen we nog op te merken dat geldt: $\frac{(q^{n+1};q)_n}{(q;q)_{2n}} = \frac{1}{(q;q)_n}$. We krijgen dan dat

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_{2n}q^{-n}}{(q;q)_{2n}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}(q^{n+1};q)_n q^{-n}}{(q;q)_{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(q^{n+1};q)_n}{(q;q)_{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}. \end{aligned}$$

Uiteindelijk levert dit ons de volgende identiteit op:

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n(1+q^n)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}.$$

Op analoge wijze zullen we nu de oneven veelvouden van θ bekijken. De som van de oneven veelvouden in Lemma 1.3 moet nu gelijk zijn. Wederom passen we de substitutie toe die Rogers eerder voorstelde en enkel geldt voor θ_0. Wanneer we deze substitutie verder uitwerken betekent dit dat

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/2}\cos((2n+1)\theta_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/2}(-1)^n q^{n(n-1)/2}(1-q^{2n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n+1)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n+1)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1}).
\end{aligned}$$

We kunnen nu dus schrijven:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/2}\cos((2n+1)\theta_0)\Big) &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n+1)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{2n+1}q^{-n-\frac{1}{2}}}{(q;q)_{2n+1}}.
\end{aligned}$$

We hebben dus op dit moment de gelijkheid

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n+1)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{2n+1}q^{-n-\frac{1}{2}}}{(q;q)_{2n+1}}.$$

Om het rekenwerk zodadelijk te vergemakkelijken delen we aan beide kanten door $q^{1/2}$. Op die manier krijgen we dat

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{2n+1}q^{-n-1}}{(q;q)_{2n+1}}.$$

Aangezien bekend is dat $\beta_{2n+1} = q^{(n+1)^2}(q^{n+1};q)_{n+1}$ kunnen we deze in bovenstaande uitdrukking substitueren. Vervolgens dienen we nog op te merken dat geldt: $\frac{(q^{n+1};q)_{n+1}}{(q;q)_{2n+1}} = \frac{1}{(q;q)_n}$. We krijgen dan:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{2n+1}q^{-n-1}}{(q;q)_{2n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n+1)^2}(q^{n+1};q)_{n+1}q^{-n-1}}{(q;q)_{2n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}(q^{n+1};q)_{n+1}}{(q;q)_{2n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_n}.
\end{aligned}$$

Uiteindelijk levert dit ons de volgende identiteit op:

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}.$$

We zijn nu nog maar enkele stappen verwijderd van de Rogers-Ramanujan identiteiten. De volgende twee stellingen vormen het slotstuk van dit bewijs.

Stelling (De eerste Rogers-Ramanujan identiteit)
Uit de identiteit

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n(1+q^n)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}$$

volgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}.$$

Bewijs. Hiervoor schrijven we

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n(1+q^n)\Big) \qquad (*)$$

verder uit. Eerst splitsen we de machtreeks in twee delen, waarna we op het laatste deel de substitutie $n \mapsto -n$ toepassen.

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n q^n\Big)\\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{(5(-n)^2+n)/2}(-1)^{-n} q^{-n}\Big)\\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{(5n^2+n)/2}(-1)^{n} q^{-n}\Big)\\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^{n}\Big)\\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n\Big)
\end{aligned}$$

We hebben dus laten zien dat

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n(1+q^n)\Big) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n\Big).$$

We gaan nu verder met het rechterdeel van bovenstaande identiteit. Met behulp van Jacobi's drievoudig product zullen we deze rechterhelft omschrijven. Eerst zullen we het rechterdeel zo moeten schrijven, dat we daadwerkelijk Jacobi's drievoudige product kunnen toepassen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n\Big) &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{(n(n+1)/2)})^5 q^{-3n}(-1)^n\Big)\\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{(n(n+1)/2)})^5 (-q^{-3})^n\Big)
\end{aligned}$$

We passen nu Jacobi's drievoudige product toe waarbij $q \mapsto q^5$ en $z \mapsto -q^{-3}$. We krijgen dan:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(q^{(n(n+1)/2)})^5(-q^{-3})^n\Big) &= \frac{(q^5;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty(q^2;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}.\end{aligned}$$

We hebben dus aangetoond dat

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{(5n^2-n)/2}(-1)^n(1+q^n)\Big) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}.$$

Waaruit de eerste Rogers-Ramanujan identiteit volgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}. \quad \square$$

Op eenzelfde manier bewijzen we de tweede Rogers Ramanujan identiteit.

Stelling (De tweede Rogers-Ramanujan identiteit)
Uit de identiteit

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}$$

volgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})}.$$

Bewijs. Hiervoor schrijven we

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}$$

verder uit.

Eerst laten we zien dat geldt

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big).$$

Om dit te doen pakken we het rechtergedeelte van de gelijkheid

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big) \qquad (**)$$

en splitsen deze machtreeks op. Vervolgens passen we de substitutie $n \mapsto -n$ toe op de sommatie die van $-\infty$ tot -1 loopt. Merk op dat $(-1)^{-n} = (-1)^n$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{-1} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5(-n)^2-3n)/2}(-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} q^{(5n^2-3n)/2}(-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big).
\end{aligned}$$

Vervolgens passen we de substitutie $n \mapsto n+1$ toe op de eerste sommatie, zodat ook deze sommatie met $n = 0$ begint;

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5(n+1)^2-3(n+1))/2}(-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+10n+5-3n-3)/2}(-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+7n+2)/2}(-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big).
\end{aligned}$$

Nu halen we q^{2n+1} buiten $q^{(5n^2+7n+2)/2}$. Merk ook op dat $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$. Tenslotte schrijven we de twee sommaties tot één sommatie;

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}q^{2n+1}(-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(-\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}q^{2n+1}(-1)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big).
\end{aligned}$$

We hebben dus laten zien dat

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big).$$

We gaan nu verder met het rechterdeel van bovenstaande identiteit. Met behulp van Jacobi's drievoudig product zullen we deze rechterhelft omschrijven. Eerst zullen we het rechterdeel zo moeten schrijven, dat we daadwerkelijk Jacobi's drievoudige product kunnen toepassen;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n\Big) &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{(n(n+1)/2)})^5 q^{-n}(-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{(n(n+1)/2)})^5 (-q^{-1})^n\Big).
\end{aligned}$$

We passen nu Jacobi's drievoudige product toe waarbij $q \mapsto q^5$ en $z \mapsto -q^{-1}$. We krijgen dan:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(q^{(n(n+1)/2)})^5(-q^{-3})^n\Big) &= \frac{(q^5;q^5)_\infty(q^1;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})}.
\end{aligned}$$

We hebben dus aangetoond dat

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{(5n^2+3n)/2}(-1)^n(1-q^{2n+1})\Big) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})},$$

waaruit de tweede Rogers-Ramanujan identiteit volgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})}. \quad \square$$

Hoofdstuk 3

Partities

Na het tweede bewijs van Rogers te hebben bestudeerd, zullen we in dit hoofdstuk kijken naar een interpretatie van de Rogers-Ramanujan identiteiten. Het zal blijken dat er een interpretatie bestaat van deze identeiten met betrekking tot *partities*. Alvorens we hier verder op ingaan, zullen we beginnen met enige informatie betreffende partities. Voor dit hoofdstuk is [4] van groot belang geweest. Onder een partitie van een positief geheel getal n verstaan we een manier om n als een som van gehele positieve getallen te schrijven.

Definitie (Partitie)
Een partitie van een getal $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ is een verzameling positieve gehele getallen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ met $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zodanig dat:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k \ \textit{en} \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n.$$

We noteren een partitie als volgt: $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$.

Voorbeeld:

Het getal 7 vijftien verschillende partities, te weten:

$$(7), (6,1), (5,2), (5,1,1), (4,3), (4,2,1), (4,1,1,1), (3,3,1), (3,2,2),$$
$$(3,2,1,1), (3,1,1,1,1), (2,2,2,1), (2,2,1,1,1),$$
$$(2,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,1).$$

3.1 Genererende functies

Het ligt voor de hand om de vraag te stellen hoeveel verschillende partities een getal n heeft. Een expliciete formule voor het aantal partities $p(n)$ van het getal n is gevonden door Rademacher in het jaar 1937 [5].
Daarnaast bestaat er een genererende functie voor $p(n)$. Wanneer deze functie wordt geschreven als machtreeks zal men $p(n)$ kunnen destileren door te kijken naar de coëfficiënten.

Definitie (Genererende functie)
Een genererende functie van een rij $(a_1, a_2, \ldots)$ is een functie die geschreven kan worden als machtreeks, waarbij de coëfficiënten precies de elementen van de rij zijn. Dus:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Voorbeeld: $\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n$ *is een genererende functie voor de rij* $1, a, a^2, ..$

Eerst zullen we kijken naar de genererende functie voor het aantal partities van n. We nemen hierbij $|x| < 1$.

Stelling (Aantal partities)
Een genererende functie f *voor* $p(n)$ *is de functie*

$$f(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)} = \frac{1}{(x;x)_\infty}.$$

Bewijs. Om bovenstaande stelling te bewijzen zullen we f verder uitschrijven. Vervolgens herkennen we de meetkundige reeks:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x^3)} \cdot \ldots \\ &= (1 + (x)^1 + (x)^2 + (x)^3 \ldots) \cdot (1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 \ldots) \cdot (1 + (x^3)^1 + (x^3)^2 + (x^3)^3 \ldots) \ldots \\ &= (1 + x^{1\cdot 1} + x^{1\cdot 2} + x^{1\cdot 3} \ldots) \cdot (1 + x^{2\cdot 1} + x^{2\cdot 2} + x^{2\cdot 3} \ldots) \cdot (1 + x^{3\cdot 1} + x^{3\cdot 2} + x^{3\cdot 3} \ldots) \ldots \end{aligned}$$

Wanneer we deze uitdrukking helemaal uit zouden vermenigvuldigen kunnen we kijken naar de verschillende machten van x. Als we bijvoorbeeld kijken naar x^5, dan zien we dat deze op verschillende manieren gevormd kan worden:

$$x^{5\cdot 1}, x^1 \cdot x^{4\cdot 1}, x^{2\cdot 1} \cdot x^{3\cdot 1}, x^{1\cdot 2} \cdot x^{3\cdot 1}, x^{1\cdot 1} \cdot x^{2\cdot 2}, x^{1\cdot 3} \cdot x^{2\cdot 1}, x^{1\cdot 5}$$

Dit komt precies overeen met de zeven verschillende partities van 5:

$$(5), (4+1), (3+2), (3+1+1), (2+2+1), (2+1+1+1), (1+1+1+1+1)$$

We zien dat de coëfficiënt behorende bij x^5 precies overeenkomt met het aantal partities van 5. $\square$

In plaats van het aantal partities van een getal n wordt er vaak gekeken naar het aantal partities van een getal waarbij er restricties worden opgelegd aan de elementen van de partities. Wanneer we kijken naar het aantal partities van een getal n onder twee verschillende restricties, kan het voorkomen dat dit aantal gelijk is voor alle n. Met andere woorden, wanneer $p_1(n)$ het aantal partities is voor een getal n onder restrictie 1 en we $p_2(n)$ analoog definiëren, kan het in de praktijk voorkomen dat

$$p_1(n) = p_2(n).$$

Wanneer $p_1(n)$ als genererende functie f heeft en $p_2(n)$ als generende functie g, dan geldt ook:

$$f = g.$$

Op deze manier kunnen aan de hand van de gelijkheden tussen partities identiteiten afgeleid worden. Het is echter ook mogelijk dat de gelijkheid tussen genererende functies aanleiding geeft tot een gelijkheid tussen verschillende soorten partities.
We illustreren dit met een voorbeeld.

Om te beginnen zullen we kijken naar het aantal partities van een getal n waarbij de elementen onderling verschillend zijn. Het aantal partities onder deze restrictie noteren we als $p_d(n)$. Zo geldt voor het getal 7 dat $p_d(7) = 5$:

$$7, (6+1), (5+2), (4+3), (4+2+1).$$

Voor $p_d(n)$ blijkt er een genererende functie te bestaan.

Lemma (Partitie met verschillende elementen)
Het aantal partities van een getal n waarbij alle elementen verschillend zijn, $p_d(n)$, heeft als genererende functie

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = (-x;x)_\infty.$$

Bewijs. Vermenigvuldig een aantal producten uit, we krijgen dan:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\dots \\ &= (1+x+x^2+x^{2+1})(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\dots \\ &= (1+x+x^2+x^3+x^{2+1}+x^{1+3}+x^{2+3}+x^{3+3})(1+x^4)(1+x^5) \\ &\vdots \end{aligned}$$

We zien dat de coëfficiënt van de macht x^n precies overeenkomt met het aantal partities met verschillende elementen. $\square$

We kunnen ook kijken naar partities waarbij we eisen dat ieder element oneven is. Op deze manier kunnen we kijken naar het aantal partities dat ieder getal heeft onder deze eigenschap heeft, $p_o(n)$. Zo geldt voor het getal 7 dat $p_o(7) = 5$:

$$7, (5+1+1), (3+3+1), (3+3+1), (3+1+1+1+1), (1+1+1+1+1+1+1).$$

Om de genererende functie van $p_o(n)$ te vinden zullen we eerst de genererende functie afleiden voor de partities waarbij de elementen uit de verzameling $\{a_1, a_2, a_3 \dots\}$ komen.

Lemma (Aantal partities met elementen uit: $\{a_1, a_2, a_3 \dots\}$)
Een genererende functie f voor het aantal partities van n waarbij de elementen enkel mogen komen uit de verzameling $\{a_1, a_2, a_3 \dots\}$ is de functie

$$f(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{a_i})}.$$

Bewijs. Om bovenstaande stelling te bewijzen zullen we f uitschrijven. Vervolgens herkennen we de meetkundige reeks:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1-x^{a_1})} \cdot \frac{1}{(1-x^{a_2})} \cdot \frac{1}{(1-x^{a_3})} \cdot \dots \\ &= (1+x^{a_1 \cdot 1}+x^{a_1 \cdot 2}+x^{a_1 \cdot 3}..) \cdot (1+x^{a_2 \cdot 1}+x^{a_2 \cdot 2}+x^{a_2 \cdot 3}...) \cdot (1+x^{a_3 \cdot 1}+x^{a_3 \cdot 2}+x^{a_3 \cdot 3}...)... \end{aligned}$$

Wanneer we deze uitdrukking helemaal uit zouden vermenigvuldigen kunnen we kijken naar de verschillende machten van x. Net zoals bij de stelling betreffende het totale aantal partities zonder verdere restricties, geeft uitvermenigvuldigen precies iedere mogelijke partitie. $\square$

Dankzij dit lemma, kunnen we nu gemakkelijk een aantal genererende functies afleiden. We maken hierbij handig gebruik van het feit dat we gemakkelijk de even en oneven elementen van $\mathbb{N}$ kunnen beschrijven. De oneven elementen zijn van de vorm $2n+1$, met $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. De even elementen zijn van de vorm $2n$ met $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Lemma (Partitie met oneven elementen)
Het aantal partities van een getal n waarbij alle elementen oneven zijn, $p_o(n)$, heeft als genererende functie

$$g(x) = \frac{1}{\prod_{i=0}^{\infty}(1-x^{2i+1})}.$$

Bewijs. Dit is een direct gevolg van voorgaand lemma. Alle machten van x zijn namelijk enkel de oneven elementen van $\mathbb{N}$. $\square$

Lemma (Partitie met even elementen)
Het aantal partities van een getal n waarbij de elementen even zijn, $p_e(n)$, heeft als genererende functie

$$g(x) = \frac{1}{\prod_{i=0}^{\infty}(1-x^{2i})}.$$

Bewijs. Dit is een direct gevolg van voorgaand lemma. Alle machten van x zijn namelijk enkel de even elementen van $\mathbb{N}$. $\square$

Lemma (Partitie met m elementen)
Het aantal partities van een getal n waarbij het aantal elementen gelijk is aan m, $p_m(n)$, heeft als genererende functie

$$g(x) = \frac{1}{\prod_{i=0}^{m}(1-x^{i})}.$$

Bewijs. Dit is een direct gevolg van het lemma over het aantal partities van een getal n. In dit geval loopt het product tot en met m. Alle machten van x zijn namelijk enkel opgebouwd uit de elementen van $\{1, 2, 3 \ldots, (m-1), m\}$. $\square$

Nu we een aantal genererende functies hebben gezien, kunnen we ons de vraag stellen of deze ook een gelijkheid impliceren tussen verschillende soorten partities. Zoals de oplettende lezer misschien al was opgevallen, bleek het aantal partities van 7 met enkel oneven elementen gelijk te zijn aan het aantal partities van 7 met verschillende elementen. Euler bewees in het jaar 1748 met behulp van genererende functies dat dit voor ieder positief geheel getal n geldt.

Stelling (Euler)
Het aantal partities van een getal n waarbij alle elementen verschillend zijn is gelijk aan het aantal partities waarbij alle elementen oneven zijn, met andere woorden:

$$p_d(n) = p_o(n).$$

Bewijs. Om de stelling te bewijzen, tonen we aan dat de genererende functies van $p_d(n)$ en $p_o(n)$ gelijk zijn aan elkaar. We beginnen met de genererende functie van $p_d(n)$:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)...\\ &= \frac{(1-x^2)}{(1-x)}\cdot\frac{(1-x^4)}{(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^6)}{(1-x^3)}\cdot\frac{(1-x^8)}{(1-x^4)}\cdots\end{aligned}$$

Merk nu op dat alle termen met een even macht van x tegen elkaar wegvallen, aangezien er één boven en één onder de deelstreep staat. We krijgen dus:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) &= \frac{(1-x^2)}{(1-x)}\cdot\frac{(1-x^4)}{(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^6)}{(1-x^3)}\cdot\frac{(1-x^8)}{(1-x^4)}\cdots\\ &= \frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^3)}\cdot\frac{1}{(1-x^5)}\cdot\frac{1}{(1-x^7)}\cdots\\ &= \frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^{2n+1})}.\end{aligned}$$

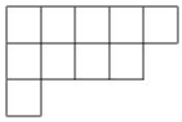
□

Nu we de genererende functies van verschillende soorten partities hebben belicht en de functionaliteit ervan hebben gezien in het bewijzen van verschillende identeiten, zullen we ons richten op het representeren van partities.

3.2 Young diagrammen

Voordat we ons verder zullen richten op de Rogers-Ramanujan identiteiten zullen we nog een methode beschrijven om partities op een handige manier te noteren. We geven een partitie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ grafisch weer als Young diagram.

Bij deze methode noteren we een element λ_1 door λ_1 vierkantjes naast elkaar te tekenen. Vervolgens noteren we λ_2 door λ_2 vierkantjes daaronder te plaatsen. Zie ook onderstaand voorbeeld.



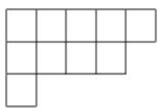
Figuur 3.1: De weergave van een partitie van 10 bestaande uit (5,4,1) met behulp van een Young diagram.

Naast het feit dat het grafisch representeren van partities voor beeldend ingestelde lezers als prettig kan worden ervaren, is er ook nog een hoger doel mee gediend. Het zal blijken dat deze manier van noteren bij het bewijzen van stellingen over partities erg handig is. Het is niet noodzakelijk om gebruik te maken van Young diagrammen, maar het verduidelijkt het bewijs wel. Om dit te illusteren, bewijzen we onderstaand lemma waarbij we ook Young diagrammen zullen gebruiken.

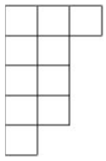
Lemma
Het aantal partities van een getal n bestaande uit exact μ elementen is gelijk aan het aantal partities van n waarbij μ het grootste element is.

Bewijs. Bekijk een willekeurig getal n die een partitie heeft van exact μ elementen. Noteer deze partitie in een Young diagram. Wanneer we nu kijken naar de kolommen dan zien we dat iedere kolom aanleiding geeft tot 1 element van een nieuwe partitie, waarbij de elementen opgeteld wederom n opleveren. Ieder element kan, vanwege het feit dat er precies μ rijen zijn, maximaal grootte μ hebben. Op deze manier zien we dat iedere partitie bestaande uit μ elementen gelijk is aan een partitie waarbij het grootste element gelijk aan μ is. □

Als voorbeeld nemen we 10 en de partitie $(5, 4, 1)$. Dus $n = 10$ en $\mu = 3$.



Wanneer we dit Young diagram draaien krijgen we onderstaand plaatje:



Wat precies overeenkomt met een partitie van 10 met als grootste element 3. Overigens leidt dit lemma meteen tot een volgend lemma.

Lemma
Het aantal partities van een getal n die uit maximaal μ elementen bestaat is gelijk aan het aantal partities van n waarbij de elementen niet groter zijn dan μ

Bewijs. Dit is een gevolg van voorgaand lemma. □

We hebben gezien hoe we partities kunnen representeren en hoe we op deze manier op een gemakkelijke manier gelijkheden tussen partities aannemelijk kunnen maken.
Eerder hadden we gezien wat het verband is tussen genererende functies en verschillende soorten partities. We zullen in de volgende paragraaf het verband leggen tussen deze inleidende paragraaf over partities en de Rogers-Ramanujan identiteiten.

3.3 De eerste Rogers-Ramanujan identiteit

In de eerste paragraaf hebben we een aantal lemma's gezien die betrekking hadden op partities met bepaalde restricties. We hebben gezien dat het kan gebeuren dat voor ieder getal n het aantal partitities onder de ene voorwaarde gelijk is aan het aantal partities onder een andere voorwaarde.

Bij het bewijs van de stelling van Euler toonden we eerst aan dat de genererende functies aan elkaar gelijk waren, waarna we concludeerden dat dan ook de interpretaties in termen van partities gelijk moesten zijn. Natuurlijk hadden we deze volgorde ook om kunnen draaien: Eerst bewijzen dat de interpretaties voor iedere n hetzelfde aantal partities opleverde, waaruit volgt dat de genererende functies ook aan elkaar gelijk moeten zijn.

Voor ieder getal n kunnen we kijken naar het volgende type partities.

Definitie (d-verschillende partitie)
Een d-verschillende partitie ($d \in \mathbb{N}$) *van een getal n is een partitie met als extra eigenschap dat*

$$\lambda_1 - d \geq \lambda_2, \lambda_2 - d \geq \lambda_3 ..., \lambda_{k-1} - 2 \geq \lambda_k.$$

We hebben hierbij dus als extra eis dat de elementen minstens d van elkaar verschillen. Het zal belangrijk blijken om te kijken naar de 2-verschillende partities van getallen. Hierbij moet dus ieder element minimaal 2 kleiner zijn dan zijn voorganger. We zullen eerst een overzicht maken voor de eerste 11 getallen en de bijbehorende 2-verschillende partities.

n	partities van n die 2-verschillend zijn	aantal d-verschillende partities
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4, (3,1)	2
5	5, (4,1)	2
6	6, (5,1), (4,2)	3
7	7, (6,1), (5,2)	3
8	8, (7,1), (6,2), (5,3)	4
9	9, (8,1), (7,2), (6,3), (5,3,1)	5
10	10, (9,1), (8,2), (7,3), (6,4), (6,3,1)	6
11	11, (10,1), (9,2), (8,3), (7,4), (7,3,1), (6,4,1)	7

Vervolgens kunnen we ons de volgende vraag stellen: Kunnen we een verzameling $N \subset \mathbb{N}$ vinden zodanig dat geldt:

$$p(n|\text{elementen uit } N) = p(n|\text{2-verschillend})?$$

3.3.1 Constructie van N

We zoeken dus een verzameling N waarbij voor ieder getal n (positief en geheel) het aantal 2-verschillende partities gelijk is aan het aantal partities waarbij de elementen uit N komen. Laten we beginnen met te stellen dat $N = \emptyset$ en vervolgens N uitbreiden. Dit doen we als volgt.

Wanneer we in onze tabel kijken zien we dat bij $n = 1$ er slechts één partitie hoort. Deze kan enkel gemaakt worden door het element 1 te gebruiken. Deze voegen we dus toe aan de verzameling N. We krijgen nu $N = \{1\}$.

Bij $n = 2$ hebben we wederom maar één partitie. We moeten dus in onze verzameling N ervoor zorgen dat er ook maar één partitie bestaat van 2. We kunnen vanuit de huidige samenstelling van N al de partitie $(1, 1)$ halen, dus mogen we 2 niet toevoegen aan N. Anders zouden we twee partities van 2 kunnen vinden. Voor N blijft gelden: $N = \{1\}$.

Voor $n = 3$ geldt natuurlijk hetzelfde. We zien dat er maar één partitie van 3 bestaat in de tabel. Daarnaast merken we op dat we aan de hand van de huidige samenstelling van N er al een kunnen vinden, namelijk $(1, 1, 1)$. Voor N blijft gelden: $N = \{1\}$.

Vanaf $n = 4$ wordt het al interessanter. Aangezien we op dit moment slechts één partitie van 4 kunnen maken met elementen uit N, zullen we N moeten uitbreiden. Aangezien 2 en 3 niet toegevoegd mochten worden, voegen we dus 4 toe aan onze verzameling N. Op die manier hebben we net zoals in de tabel hierboven, twee verschillende partities van 4, te weten $(1, 1, 1, 1)$ en (4). We krijgen nu $N = \{1, 4\}$.

Tenslotte zullen we het geval $n = 5$ bekijken. Deze heeft in de tabel hierboven twee partities. Met de huidige verzameling N kunnen we al twee partities vinden, namelijk $(1, 1, 1, 1, 1)$ en $(4, 1)$. We voegen dus 5 niet toe aan de verzameling N.

We kunnen dit proces blijven herhalen, waarbij we op den duur onze tabel boven aan deze pagina zullen moeten uitbreiden. We breiden de verzameling N steeds verder uit, waarbij we telkens blijven eisen dat het aantal 2-verschillende partities gelijk is aan het aantal partities met elementen uit N voor iedere n. Doorgaan met dit proces levert het volgende op:

$$N = \{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, 21, \ldots\}.$$

Het probleem is natuurlijk dat we met deze methode nooit een identiteit zullen kunnen bewijzen. Het is immers niet mogelijk om op deze manier oneindig veel gevallen na te gaan in een eindige tijd. Desalniettemin is deze methode wel degelijk handig om een bepaalde gelijkheid *aannemelijk* te maken. Wanneer we namelijk kijken naar de verzameling N, dan zit er een regelmaat in de elementen van deze verzameling. Voor iedere element $x \in N$ geldt namelijk:

$$x \equiv \pm 1 \text{ mod}(5).$$

Sterker nog, we zien dat alle getallen die bij deling door vijf rest 1 of 4 geven in N zitten. Er geldt dus:

$$N = \{x \in \mathbb{N} | x \equiv \pm 1 \text{ mod}(5)\}.$$

Genererende functies en de eerste Rogers-Ramanujan identiteit

We hebben dus met deze uitbreidingsprocedure een mogelijke identiteit gevonden (maar nog niet bewezen!) in termen van partities:

$$p(n|\text{elementen} \equiv \pm 1 \text{ mod}(5)) = p(n|\text{elementen 2-verschillend}).$$

Later in deze paragraaf zullen we kijken naar het bewijs van bovenstaande gelijkheid. Eerst richten we ons op het verband tussen deze gelijkheid en de eerste Rogers-Ramanujan identiteit.

Dit verband kan gevonden worden met behulp van genererende functies. Wanneer we namelijk de (vermoedelijke) gelijkheid tussen de partities noteren in termen van genererende functies, blijkt de eerste Rogers-Ramanujan identiteit te voorschijn te komen.

We zullen beginnen met de rechterzijde van de gelijkheid, de partitities die 2-verschillend zijn.

Stelling
Een genererende functie van het aantal partities die 2-verschillend zijn is

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)}.$$

Bewijs. Neem aan dat $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ een 2-verschillende partitie is van het getal k. Dan is het mogelijk om op de volgende manier een rij $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 0$ te definiëren:

$$\begin{aligned} r_m &= n_m + 1 \\ r_{m-1} &= n_{m-1} + 3 \\ r_{m-2} &= n_{m-2} + 5 \\ &\vdots \\ r_1 &= n_1 + 2m - 1. \end{aligned}$$

Merk nu op dat $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ dan een partitie is van $k - (1+3+5+\dots+(2m-1)) = k - m^2$, bestaande uit m elementen. We kunnen voor de generende functie van de 2-verschillende partities van m elementen schrijven:

$$\sum_{n_m \geq \dots \geq n_1 \geq 0} x^{(n_1+1)+(n_2+3)+\dots+(n_m+2m-1)} = x^{m^2} \sum_{n_m \geq \dots \geq n_1 \geq 0} x^{(n_1+n_2+\dots+n_m)}.$$

We hebben gezien op pagina 32 dat voor de genererende functie van het aantal partities van m elementen geldt

$$\sum_{n_m \geq \dots \geq n_1 \geq 0} x^{(n_1+n_2+\dots+n_m)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}.$$

Hierdoor wordt onze genererende functie voor 2-verschillende partities van m elementen:

$$g(x) = \frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}.$$

We moeten echter nog sommeren over alle mogelijke waarden van $m \geq 0$ en krijgen dus, wanneer we m vervangen door n.

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} \quad \square$$

Nu we een genererende functie hebben gevonden voor de partities die 2-verschillend zijn, zullen we vervolgens proberen om een genererende functie te vinden voor het aantal partities waarbij de elementen gelijk zijn aan $\pm 1 \bmod(5)$.

Stelling
De genererende functie van het aantal partities waarbij de elementen gelijk zijn aan ± 1 *mod(5) is*

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5n-4})(1-x^{5n-1})}.$$

Bewijs. We maken handig gebruik van het feit dat we de genererende functie kennen van de verzameling $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Bekend is dat de elementen gelijk aan 1(mod 5) van de vorm $5n-4$ met $n \in \mathbb{N}_{n\geq 1}$ zijn. Ook is bekend dat de elementen gelijk aan 4(mod 5) van de vorm $5n-1$ met $n \in \mathbb{N}_{n\geq 1}$ zijn. Hieruit volgt direct dat de genererende functie gelijk is aan:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5n-4})(1-x^{5n-1})}. \quad \square$$

Nu we de genererende functies voor de twee soorten partities hebben gevonden, zien we meteen wat een gelijkheid tussen de partities zou impliceren, namelijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5n-4})(1-x^{5n-1})}$$

We herkennen onmiddelijk de eerste Rogers-Ramanujan identiteit.

Met het resultaat van hoofdstuk 2 in ons achterhoofd, zouden we kunnen concluderen dat wegens het bewijs van Rogers deze gelijkheid inderdaad geldt. Hieruit volgt dan:

Het aantal partities die 2*-verschillend zijn is gelijk aan het aantal partities waarbij de elementen gelijk zijn aan* ± 1 *mod(5).*

3.4 Een bewijs van de eerste Rogers-Ramanujan identiteit

We hebben gezien dat wegens het bewijs van Rogers de twee eerder genoemde partities gelijk zijn aan elkaar. Wanneer we echter op een andere manier zouden kunnen bewijzen dat deze partities aan elkaar gelijk zijn, dan vinden we een tweede bewijs voor de eerste Rogers-Ramanujan identiteit.

Een dergelijk bewijs kan gegeven worden door een bijectie te construeren tussen de twee soorten partities. Indien zo'n bijectie gevonden wordt, impliceert dit de gelijkheid tussen de twee soorten partities en dus ook tussen de genererende functies.

A. Garsia en S. Milne hebben in het jaar 1980 een bijectie gevonden waarmee de eerste Rogers-Ramanujan identeit bewezen kon worden [6]. Aangezien dit bewijs ongeveer een vijftigtal pagina's telt, bekijken we een ander bewijs. D. Bressoud en D. Zeilberger vonden in het jaar 1983 een bewijs dat slechts twee pagina's omvat [7].

3.4.1 Een bijectie tussen de twee soorten partities

We zullen voor dit bewijs eerst voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een aantal verzamelingen definiëneren. Laat:

$$\begin{aligned} A(n) &= \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t) | t \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_t = n \text{ en } \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2 \text{ voor } i = 1, \ldots t-1\} \\ C(n) &= \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t) | t \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_t = n \text{ en } \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 0, \\ &\quad \lambda_i \equiv 1, 4 (\text{mod } 5) \text{ voor } i = 1, \ldots t\} \end{aligned}$$

Het doel is nu om te laten zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ het aantal elementen van $A(n)$ en $C(n)$ gelijk is.
Het eerste wat we op dienen te merken is het feit dat er een isomorfie bestaat tussen $A(n)$ en de verzameling $B(n)$, waarbij $B(n)$ als volgt is gedefinieerd:

$$B(n) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t) | t \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_t = n \text{ en } \lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \lambda_t \geq t\}$$

Het isomorfisme wordt hierbij gegeven door:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t) \mapsto (\lambda_1 - t + 1, \ldots, \lambda_i + 2i - 1 - t, \lambda_t + t - 1)$$

Het moge duidelijk zijn dat gegeven een partitie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ van n uit $A(n)$ geldt dat:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - t + 1) + \ldots + (\lambda_t - t + 2t - 1) &= (\lambda_1 - t + \ldots + \lambda_t - t) + (1 + \ldots + 2t - 1) \\ &= (\lambda_1 - t + \ldots + \lambda_t - t) + t^2 \\ &= \lambda_1 + \ldots + \lambda_t \\ &= n \end{aligned}$$

Wegens de isomorfie tussen $A(n)$ en $B(n)$ is het voldoende om te laten zien dat $B(n)$ en $C(n)$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ uit evenveel elementen bestaan.

We doen dit door een verzameling $X(n)$ als volgt te definiëren:

$$X(n) = \{(j, \lambda_1, \ldots, \lambda_t) | -\infty < j < \infty, t \geq 0, \frac{1}{2}(5j^2 - j) + \lambda_1 + \ldots + \lambda_t = n \text{ en } \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_t \geq 0\}$$

Vervolgens zullen we voor iedere n de deelverzamelingen $X_e(n)$ en $X_o(n)$ bekijken, waarbij $X_e(n)$ de deelverzameling is van $X(n)$ met j even en $X_o(n)$ die met j oneven.

Om nu aan te tonen dat $B(n)$ en $C(n)$ evenveel elementen bevatten, construeerden Bressoud en Zeilberger een tweetal involuties.

$$\phi : X(n) - O \times B(n) \to X(n) - O \times B(n) \text{ en } \psi : X(n) - O \times C(n) \to X(n) - O \times C(n)$$

Hierbij staat $X(n) - O \times B(n)$ voor de partities die in $X(n)$ zitten, behalve degene die ook in $B(n)$ zitten. O geeft aan dat j gelijk is aan 0.

Het definiëren van deze involuties en het aantonen dat het inderdaad involuties zijn is het meeste werk. Hoewel Bressoud en Zeilberger hier slechts twee pagina's voor nodig hadden, is er meer voorkennis voor nodig om het bewijs daadwerkelijk te begrijpen. Hierdoor is het helaas niet mogelijk gebleken om het volledige bewijs in deze scriptie te behandelen. We zullen echter wel kort stilstaan bij de rode draad van het bewijs.

De belangrijke eigenschap die beide involuties hebben, is dat ze de pariteit van j veranderen. Er geldt dus $\phi(X_o(n) - O \times B(n)) \subset X_e(n) - O \times B(n)$ en $\phi(X_o(n) - O \times C(n)) \subset X_e(n) - O \times C(n)$.

Hieruit is te concluderen dat $|B(n)| = |C(n)|$. Deze laatste opmerking is zeer zeker niet triviaal. Het bewijs hiervan is te vinden in [6] en telt ongeveer acht pagina's. Wegens het isomorf zijn van $A(n)$ en $B(n)$ geldt dus ook: $|A(n)| = |C(n)|$.

Er dient opgemerkt te worden dat de involuties enkel aantonen dat er een bijectie bestaat tussen de verschillende klassen van partities. In beide bewijzen wordt ook een daadwerkelijke bijectie gegeven, waarbij de involuties herhaaldelijk na elkaar worden toegepast. Voor het bewijzen van de Rogers-Ramanujan identiteiten via de verschillende klassen van partities is een explicitiete uitdrukking van de bijectie niet van belang. Het feit dat er één bestaat is voldoende.

3.5 De tweede Rogers-Ramanujan identiteit

Tot nu toe hebben we in deze paragraaf enkel nog maar gekeken naar het verband tussen de eerste Rogers-Ramanujan identiteit en partities. We kunnen de vraag stellen wat de tweede Rogers-Ramanujan identiteit te maken heeft met partities. Vanwege de grote overeenkomsten met de eerste identiteit, zullen we hier korter bij stilstaan. Wel zullen we kijken naar de interpretatie van de tweede identiteit. Herinner de tweede Rogers-Ramanujan identiteit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n(n+1)}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5n-3})(1-x^{5n-2})}.$$

In de wetenschap dat de eerste Rogers-Ramanujan identiteit een gelijkheid is tussen twee verschillende klassen van partities, zal het niet verbazen dat dit ook geldt voor de tweede Rogers-Ramanujan identiteit. We zullen met twee stellingen aantonen dat beide kanten van de gelijkheid genererende functies zijn van bepaalde klassen van partities.

De rechterzijde van de identiteit zullen we als eerste behandelen. Het bewijs is haast gelijk aan het bewijs dat bij de eerste Rogers-Ramanujan identiteit is gegeven.

Stelling
De genererende functie van het aantal partities waarbij de elementen gelijk zijn aan $2 \mod 5$ *of* $3 \mod 5$ *is*

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5n-3})(1-x^{5n-2})}.$$

Bewijs. We maken handig gebruik van het feit dat we de genererende functie kennen van de verzameling $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Bekend is dat de elementen gelijk aan $3 (\mathrm{mod}\ 5)$ van de vorm $5n-3$ met $n \in \mathbb{N}_{n\geq 1}$ zijn. Ook is bekend dat de elementen gelijk aan $2 (\mathrm{mod}\ 5)$ van de vorm $5n-2$

met $n \in \mathbb{N}_{n\geq 1}$ zijn. Hieruit volgt direct dat de genererende functie gelijk is aan

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5n-3})(1-x^{5n-2})}. \quad \square$$

Voor de linkerzijde van de identiteit passen we het bewijs dat eerder gegeven is bij de eerste Rogers-Ramanujan identiteit een klein beetje aan. We kijken nu niet alleen naar de 2-verschillende partities, maar leggen als extra eis op dat de elementen groter moeten zijn dan 1.

Stelling
De genererende functie van het aantal partities die 2-verschillend zijn en waarbij de elementen groter zijn dan 1 is

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n+1)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}.$$

Bewijs. Neem aan dat $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ een 2-verschillende partitie is van het getal k, waarbij de elementen groter dan 1 zijn. Dan is het mogelijk om op de volgende manier een rij $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_m \geq 0$ te definiëren:

$$\begin{aligned} r_m &= n_m + 2 \\ r_{m-1} &= n_{m-1} + 4 \\ r_{m-2} &= n_{m-2} + 6 \\ &\vdots \\ r_1 &= n_1 + 2m \end{aligned}$$

Merk nu op dat $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ dan een partitie is van $k-(2+4+6+\ldots+2m) = k-m(m+1)$, bestaande uit m elementen. We kunnen voor de generende functie van de 2-verschillende partities schrijven:

$$\sum_{n_m \geq \ldots \geq n_1 \geq 0} x^{(n_1+2)+(n_2+4)+\ldots+(n_m+2m)} = x^{m(m+1)} \sum_{n_m \geq \ldots \geq n_1 \geq 0} x^{(n_1+n_2+\ldots+n_m)}.$$

We hebben gezien dat voor de genererende functie van het aantal partities van m elementen geldt dat

$$\sum_{n_m \geq \ldots \geq n_1 \geq 0} x^{(n_1+n_2+\ldots+n_m)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}.$$

Hierdoor wordt onze genererende functie voor 2-verschillende partities van m elementen

$$g(x) = \frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}.$$

We moeten echter nog sommeren over alle mogelijke waarden van $m \geq 0$ en krijgen dus nadat we m hebben vervangen door n,

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n+1)}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}. \quad \square$$

Aangezien we in hoofdstuk 2 gezien hebben dat de tweede Rogers-Ramanujan identiteit inderdaad geldt, kunnen we concluderen:

Het aantal partities van een positief geheel getal n die 2-verschillend zijn en waarbij ieder element groter is dan 1, is gelijk aan het aantal partities waarbij de elementen gelijk zijn aan $3 \mod 5$ *of* $2 \mod 5$*.*

Hoofdstuk 4

Het Hard Hexagon model

4.1 Introductie

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat de Rogers-Ramanujan identiteiten voorkomen binnen de theorie van partities. De identiteiten spelen echter niet alleen binnen de wiskunde een rol, maar ook in deelgebieden van de natuurkunde. Een voorbeeld van een dergelijk deelgebied is de statistische mechanica. In deze tak van de natuurkunde houdt men zich bezig met het beschrijven van de eigenschappen van complexe systemen, meestal bestaande uit deeltjes, gassen of vloeistoffen. Om deze eigenschappen van systemen af te leiden, richt men zich vaak op het gedrag van de bouwstenen van deze systemen zoals atomen, moleculen, elektronen of andere deeltjes.

In dit hoofdstuk zullen wij ons richten op het zogenaamde Hard Hexagon model. Er zal blijken dat de Rogers-Ramanujan identiteiten een rol spelen binnen dit model. Van groot belang voor dit hoofdstuk is [8] geweest.

Dit hoofdstuk is grofweg opgebouwd uit twee delen. Om te beginnen beschrijven we het Hard Hexagon model in het algemeen met de daarbij horende begrippen. Vervolgens zullen we ons richten op het verband met de Rogers-Ramanujan identiteiten.

Het Hard-Hexon model is overigens slechts één van de vele modellen waar binnen de statistische mechanica onderzoek naar is gedaan. Voor een overzicht van de verschillende modellen en hun oplossingen is [9] aan te bevelen.

Dit hoofdstuk bevat geen complete uitleg of uitwerking van het Hard Hexagon model. Zoals gezegd zullen we voornamelijk aandacht besteden aan de begrippen en vergelijkingen die we nodig hebben voor de Rogers-Ramanujan identiteiten. Voor een beschrijving van alle facetten van het Hard Hexagon model, zie [8], [9] en [10].

4.2 Beschrijving van het model

Zoals aan het begin van dit hoofdstuk is aangegeven, beginnen we met het beschrijven van het model.

We bekijken een gas waarbij de deeltjes zich enkel kunnen bevinden op de roosterpunten van een rechthoekig rooster. Wanneer we N roosterpunten hebben, kunnen we voor ieder roosterpunt een "bezettingsindicator" definiëren: Voor ieder roosterpunt i ($i \in \{1, 2, \ldots N\}$) geldt voor de "bezettingsindicator" σ_i dat deze waarde 1 heeft wanneer zich een deeltje op roosterpunt i bevindt en 0 wanneer dit niet het geval is. Overigens worden de roosterpunten van links naar rechts en van boven naar beneden genummerd. Bij het daadwerkelijk rekenen met dit model wordt gekeken naar het geval wanneer N naar oneindig gaat en we als het ware een vlak bekijken.
Daarnaast eisen we dat twee aangrenzende roosterpunten niet beiden bezet kunnen zijn, met andere woorden:

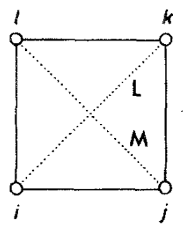
$$\sigma_i \sigma_j = 0, \textit{ als } i \textit{ en } j \textit{ aangrenzende roosterpunten zijn.}$$

We definiëren de *toestand* σ van dit systeem als een N-dimensionale vector met componenten σ_i, dus $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_N)$. De kans dat een bepaalde toestand σ wordt aangenomen noteren we met $p(\sigma)$ en er geldt:

$$p(\sigma) = \frac{1}{Z} \prod_{(i,j,k,l)} W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l).$$

De functie $W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l)$ is als volgt gedefiniëerd:

$$W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) = z^{(\sigma_i+\sigma_j+\sigma_k+\sigma_l)/4} e^{L\sigma_i\sigma_k + M\sigma_j\sigma_l} t^{-\sigma_i+\sigma_j-\sigma_k+\sigma_l}.$$



Figuur 4.1: Een viertal (i, j, k, l) met daarbij de interactiecoëfficiënten L en M. De nummering begint altijd linksonder en gaat tegen de klok in.

Dit product genomen over alle viertallen (i, j, k, l) die samen een vakje van het rooster vormen. De term $\frac{1}{Z}$ dient zó gekozen te worden dat de kansen over alle toestanden σ optellen tot 1. Hierbij is $W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l)$ gelijk aan 0 als de voorwaarde wordt geschonden dat aangrenzende roosterpunten niet beiden 1 als waarde mogen hebben. L en M ($\in \mathbb{R}$) zijn coëfficiënten die bepalen hoe sterk de interactie is tussen de deeltjes die met een diagonaal verbonden zijn. L heeft invloed op de diagonaal die van linksonder naar rechtsboven gaat in een vierkant, M voor de diagonaal die van rechtsonder naar rechtsboven gaat.

Doordat we slechts een beperkt aantal mogelijke invullingen van de viertallen (i,j,k,l) hebben, kunnen we vrij gemakkelijke alle mogelijk waarden van $W(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k,\sigma_l)$ berekenen.

$$\begin{aligned}
W(0,0,0,0) &= 1 \\
W(1,0,0,0) &= W(0,0,1,0) = z^{1/4}t^{-1} \\
W(0,1,0,0) &= W(0,0,0,1) = z^{1/4}t^{1} \\
W(1,0,1,0) &= z^{1/2}t^{-2}e^{L} \\
W(0,1,0,1) &= z^{1/2}t^{2}e^{M}
\end{aligned}$$

De variabele t speelt eigenlijk in het verdere model geen enkele rol: Voor ieder punt i in het product komt $t^{-\sigma_i}$ net zo vaak voor als t^{σ_i}.
$z \in \mathbb{R}^+$ is de coëfficiënt die de activiteit beschrijft. In [8], [9] en [10] wordt helaas niet meer uitleg gegeven over de parameters.

Z kunnen we uitdrukken met behulp van de eis de som over alle kansen op een toestand gelijk aan 1 moet zijn:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma} \frac{1}{Z} \prod_{(i,j,k,l)} W(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k,\sigma_l) = 1 \\
Z = \sum_{\sigma} \prod_{(i,j,k,l)} W(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k,\sigma_l).
\end{aligned}$$

We zullen ons nu vooral richten op de gemiddelde waarde van een roosterpunt 1. Deze waarde noteren we met $<\sigma_1>$. Een uitdrukking voor $<\sigma_1>$ verkrijgen we door de formule voor $p(\sigma)$ en Z in te vullen. We sommeren hierbij over alle mogelijke toestanden σ en noteren de waarde van rooster punt 1 als σ_1:

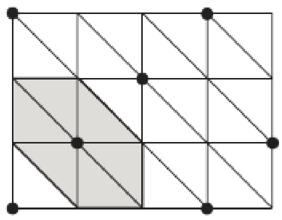
$$\begin{aligned}
<\sigma_1> &= \sum_{\sigma} \sigma_1 p(\sigma) \\
&= \sum_{\sigma} \sigma_1 \frac{1}{Z} \prod_{(i,j,k,l)} W(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k,\sigma_l) \\
&= \frac{\sum_{\sigma} \sigma_1 \prod_{(i,j,k,l)} W(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k,\sigma_l)}{Z} \\
&= \frac{\sum_{\sigma} \sigma_1 \prod_{(i,j,k,l)} W(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k,\sigma_l)}{\sum_{\sigma} \prod_{(i,j,k,l)} W(\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k,\sigma_l)}
\end{aligned}$$

Aangezien we geïnteresseerd zijn in $<\sigma_1>$, bekijken we enkel het geval wanneer daadwerkelijk $<\sigma_1>$ uit kunnen rekenen. Dit blijkt het geval te zijn wanneer voor z geldt:

$$z(L,M) = \frac{(1-e^{-L})(1-e^{-M})}{(e^{L+M}-e^{L}-e^{M})},$$

zie ook [10]. Hierbij is z dus een functie van de variabelen L en M. Wanneer we kijken naar de

situatie dat $L \to 0$ en $M \to -\infty$ blijkt dat dit een bijzonder geval is. Er is dan geen interactie tussendeeltjes die verbonden zijn met een diagonaal die van linksonder naar rechtsboven loopt. Tegelijkertijd is er wel een totale afstoting tussen deeltjes die verbonden zijn met een diagonaal die van rechtsonder naar linksboven loopt.
Wanneer we in deze situatie in het midden van een rooster een deeltje plaatsen, mogen er op zes plaatsen rondom dit deeltje geen deeltjes meer geplaatst worden: De punten die zich boven, onder, links, rechts, linksboven en rechtsonder bevinden van het deeltje. Hierdoor onstaat het zogenaam "Hard Hexagon model".



Figuur 4.2: Een voorbeeld van een toestand die voldoet aan de eigenschappen van het Hard Hexagon model.

Uit [10] blijkt ook dat de volgende constante een bijzondere rol speelt in het model:

$$\Delta(z, L, M) = z^{-1/2}(1 - ze^{L+M}).$$

Δ is dus gewoon een constante, afhankelijk van z, L en M. Aangezien we enkel kijken naar de situatie dat $<\sigma_1>$ uitgerekend kan worden, moet de relatie gelden tussen z en de twee interactiecoëfficiënten L en M, zoals eerder beschreven. We kunnen in dat geval stellen dat Δ enkel een functie is van L en M:

$$\Delta(z(L, M), L, M) = \Delta(L, M).$$

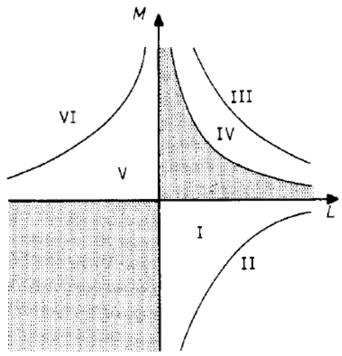
Door de uitdrukking voor z te substitueren in de uitdrukking voor Δ verkrijgen we de volgende relatie:

$$\begin{aligned}
\Delta &= z^{-1/2}(1 - ze^{L+M}) \\
\Delta^{-2} &= z(1 - ze^{L+M})^{-2} \\
\Delta^{-2} &= \frac{(1-e^{-L})(1-e^{-M})}{(e^{L+M}-e^L-e^M)}\Big(1 - (\frac{(1-e^{-L})(1-e^{-M})e^{L+M}}{(e^{L+M}-e^L-e^M)})\Big)^{-2} \\
\Delta^{-2} &= \frac{(1-e^{-L})(1-e^{-M})}{(e^{L+M}-e^L-e^M)}\Big(1 - (\frac{(e^{L+M}-e^L-e^M+1)}{(e^{L+M}-e^L-e^M)})\Big)^{-2} \\
\Delta^{-2} &= \frac{(1-e^{-L})(1-e^{-M})}{(e^{L+M}-e^L-e^M)}\Big(\frac{1}{(e^{L+M}-e^L-e^M)})\Big)^{-2} \\
\Delta^{-2} &= (1-e^{-L})(1-e^{-M})(e^{L+M}-e^L-e^M) \\
\Delta^{-2}e^{L+M} &= (e^L-1)(e^M-1)(e^{L+M}-e^L-e^M).
\end{aligned}$$

De vraag is natuurlijk wat het belang is van deze constante Δ. Er blijkt een waarde te zijn voor $|\Delta|$, waarbij het model niet analytisch oplosbaar is. In [9] heeft men deze waarde Δ_c bepaald en er geldt:

$$\Delta_c^{-2} = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\right]^5 = \frac{1}{2}(11+5\sqrt{5}) \approx 11,09$$

We kunnen nu dus een grafiek schetsen waarbij L en M tegen elkaar uitgezet zijn. Hierin tekenen we een lijn bij iedere combinatie van L en M waarbij $|\Delta| = \Delta_c$. Daarnaast dienen we rekening te houden met het feit dat er combinaties van L en M zijn die fysisch gezien niet realistisch zijn. Er zijn immers waarden van L en M waarbij z negatief wordt. De lijnen waarbij $|\Delta| = \Delta_c$ zijn ook in deze figuur te zien.



Figuur 4.3: De verschillende gebieden die ontstaan wanneer we L en M tegen elkaar uitzetten. De lijnen tussen $(VI \cup V)$, $(IV \cup III)$ en $(I \cup II)$ komen overeen met de kritische lijnen. De grijsgetinte gebieden zijn fysisch niet realistisch.

Zoals te zien is onstaan er in totaal zes gebieden die van belang zijn. Ieder punt hoort bij een bepaalde waarde van Δ en ieder gebied dus bij een bepaald interval:

- Gebied I: $\Delta > \Delta_c$
- Gebied II: $0 < \Delta < \Delta_c$
- Gebied III: $0 > \Delta > -\Delta_c$
- Gebied IV: $\Delta < -\Delta_c$
- Gebied V: $\Delta > \Delta_c$
- Gebied VI: $0 < \Delta < \Delta_c$

Merk overigens op dat de gebieden $(I \cup II)$ en $(V \cup VI)$ nagenoeg gelijk zijn: Ze komen overeen met het omwisselen van L en M. Dit komt in het rooster overeen met het draaien van het hexagon met 90 graden.

Nu we het Hard Hexagon model hebben geïntroduceerd, zullen we ons in de volgende paragraaf richten op de Rogers-Ramanujan identiteiten. Zij blijken voor te komen bij het oplossen van dit model.

In de voorgaande pagina's hebben we het Hard Hexagon model beschreven en enkele relevante begrippen besproken. Nu is het tijd om ons te richten op de motivitatie om naar het Hard Hexagon model te gaan kijken, namelijk de Rogers-Ramanujan identiteiten.
Voor het verband met de Rogers-Ramanujan identiteiten, kijken we in het bijzonder naar $< \sigma_1 >$. Een explicitie uitdrukking voor $< \sigma_i >$ is door Baxter gevonden met behulp van zogenaamde *Corner Transfer Matrices.*

Het idee bij het gebruiken van Corner Transfer Matrices is dat een gebied R wordt opgedeeld in vierstukken. Deze vier stukken zijn niets anders dan de vier kwadranten die ontstaan wanneer we een y-as en een x-as op het rooster leggen.

Baxter beschrijft in zijn artikelen ([8], [9] en [10]) uitgebreid hoe men de techniek van Corner Transfer Matrices gebruikt om een expliciete uitdrukking te vinden voor $< \sigma_1 >$.

Aangezien het veel te veel zou hebben gekost om deze techniek helemaal doorgronden, zijn we genoodzaakt om een grote stap te nemen. We bekijken enkel het resultaat van de techniek.

Het blijkt namelijk dat we voor $< \sigma_1 >$ kunnen schrijven:

$$< \sigma_1 > = \frac{r_0^2 F(1)}{F(0) + r_0^2 F(1)},$$

waarbij r_0 een functie is van x. x is hierbij een parameter die gebruikt wordt om e^L en e^M te parametriseren alvorens Baxter de techniek van Corner Transfer Matrices toepast.

Er geldt voor $F(\sigma_1)$:

$$F(\sigma_1) = \sum_{(2,m)} q^{\sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 + \ldots + (m-1)\sigma_m}.$$

We sommeren hierbij over alle mogelijke toestanden van $(\sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ die kunnen worden aangenomen, gegeven een vaste waarde van σ_1. Net als x verschijnt q bij de parametrisatie die Baxter gebruikt voordat hij verder gaat met de Corner Transfer Matrices. Aangezien σ_1 slechts de waarden 0 en 1 kan aannemen, kunnen we voor deze waarden proberen om $F(\sigma_1)$ daadwerkelijk uit te rekenen. Het zal blijken dat hierbij een deel van de Rogers-Ramanujan identiteit tevoorschijn zal komen.

4.3 De Rogers-Ramanujan identiteiten in het Hard Hexagon model

In de voorgaande paragrafen hebben we het Hard Hexagon model geïntroduceerd en daarbij een aantal begrippen en identiteiten besproken die we in deze paragraaf zullen gebruiken. Het doel is om uiteindelijk duidelijk te maken op welke manier de Rogers-Ramanujan identiteiten een rol spelen in het Hard Haxagon model. We bekijken hierbij een rooster waarin we m naar ∞ laten gaan. Het gaat hierbij dus als het ware om een oneindig groot rooster.

Herinner uit de voorgaande paragraaf de volgende definitie van $F(\sigma_1)$:

$$F(\sigma_1) = \sum_{(2,m)} q^{\sigma_2+2\sigma_3+3\sigma_4+\ldots+(m-1)\sigma_m}.$$

Hierbij geldt dat voor σ_i en σ_{i+1} dat ze niet beiden waarde 1 mogen hebben. De waarde van $F(\sigma_1)$ is dus inderdaad afhankelijk van de waarde van σ_1.

We zullen nu eerst kijken naar het geval dat σ_1 gelijk is aan 0: $F(0)$.

Nu is het zaak om over alle mogelijke toestanden σ te sommeren. We bekijken als eerste de toestand waarbij alle σ_i gelijk zijn aan 0. Deze bijdrage aan de waarde van $F(0)$ is gelijk aan 1. Daarna bekijken we de bijdragen waarbij iedere keer voor slechts een enkele σ_i er een bijdrage is. Dit betekent dus dat we als het ware slechts 1 deeltje telkens verplaatsen en op een ander punt leggen. De bijdrage van al die toestanden samen geeft, wanneer $m \to \infty$:

$$q + q^2 + q^3 + \ldots = q(1 + q + q^2 + \ldots) = q\frac{1}{1-q}.$$

Vervolgens bekijken we wat er gebeurt als we twee deeltjes kunnen leggen op het rooster. Om dit op een gestructureerde manier te doen, leggen we eerst een deeltje vast, en verleggen we vervolgens het tweede deeltje. Merk op dat σ_i en σ_{i+1} niet beiden waarde 1 mogen hebben.

Als het eerste deeltje wordt gelegd op σ_2 en we het tweede deeltje verleggen krijgen we als bijdrage:

$$q^4 + q^5 + q^6 + q^7 \ldots$$

Vervolgens leggen we het eerste deeltje op σ_3 en verschuiven het tweede deeltje weer. We krijgen dan:

$$q^6 + q^7 + q^8 + q^9 \ldots$$

Vervolgens leggen we het deeltje op σ_n. De eerste term die we dan krijgen is $q^{(n-1)+(n+1)} = q^{2n}$,

$$q^{2n} + q^{2n+1} + q^{2n+2} \ldots$$

De totale bijdrage wanneer we twee deeltjes tot onze beschikking hebben, wordt dan:

$$q^4 + q^5 + 2q^6 + 2q^7 + \ldots$$

Om net als de vorige keer deze reeks om te schrijven tot een eindige uitdrukking, halen we eerst q^4 buiten haakjes.

$$q^4 + q^5 + 2q^6 + 2q^7 + \cdots = q^4(1 + q + 2q^2 + 2q^3 + \ldots)$$

Merk nu vervolgens op dat we $q^4(1+q+2q^2+2q^3+\ldots)$ kunnen schrijven als product van twee bekende reeksen. We krijgen namelijk met behulp van Cauchy's product formule voor convergente reeksen dat

$$\begin{aligned} q^4(1+q+2q^2+2q^3+\ldots) &= q^4(1+q+q^2+\ldots)(1+q^2+q^4+\ldots) \\ &= q^4\frac{1}{1-q}\frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)}. \end{aligned}$$

Indien we kijken naar n deeltjes die geplaats moeten worden, krijgen we als bijdrage

$$\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}.$$

Dit betekent dat we voor $F(0)$ kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} F(0) &= 1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)}+\ldots+\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\frac{q^{i^2}}{(q;q)_i}. \end{aligned}$$

Waarbij we dus een gedeelte van de eerste Rogers-Ramanujan identiteit tegenkomen.

Wanneer we kijken naar $F(1)$, zien we dat er niet veel aan bovenstaande berekening veranderd. Het enige waar we rekening mee dienen te houden, is het feit dat σ_1 gelijk is aan 1. Dit betekent dat σ_2 altijd waarde nul zal moeten aannemen. Er treedt nu dus als het ware een verschuiving op.

Bij het plaatsen van 1 deeltje kunnen we dus het deeltje plaatsen op ieder punt vanaf σ_3. Analoog met het geval $F(0)$ zien we dan dat de bijdrage van het plaatsen van een enkel deeltje (naast het deeltje dat al op σ_1 geplaatst is) gelijk is aan

$$q^2+q^3+q^4+\ldots = q^2(1+q+q^2+\ldots) = \frac{q^2}{1-q}$$

Het plaatsen van 2 deeltjes geeft wederom een verschuiving. De macht van q is het kleinste als op σ_3 en σ_5 een deeltjes worden geplaatst. Als we het deeltje op σ_3 vasthouden en het andere deeltje verplaatsen, krijgen we

$$q^6+q^7+q^8+q^9+q^{10}+\ldots+q^m$$

De verdere berekening gaat op dezelfde manier verder en leidt dus tot een bijdrage van de vorm

$$\begin{aligned} q^6(1+q+2q^2+2q^3+\ldots) &= q^6(1+q+q^2+q^3+\ldots)(1+q^2+q^4+q^6+\ldots) \\ &= q^6\frac{1}{1-q}\frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)}. \end{aligned}$$

Uiteindelijk levert dit een uitdrukking op voor $F(1)$:

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 + \frac{q^2}{1-q} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)} + \ldots + \frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_n} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{i(i+1)}}{(q;q)_i}. \end{aligned}$$

Waarin we dus een gedeelte van de tweede Rogers-Ramanujan identiteit herkennen.

Aangezien we bij de partities zagen dat het voorkomen van de Rogers-Ramanujan identiteiten aanleiding gaf tot een alternatief bewijs van de identiteiten, kunnen we ons dat natuurlijk ook afvragen bij deze toepassing. We hebben dit hoofdstuk gezien dat de oneindige sommatie van beide identiteiten voorkomt bij het berekenen van de gemiddelde waarde van $< \sigma_1 >$, maar geven ze ook een alternatief bewijs?

Deze vraag moeten we echter beantwoorden met nee. Zoals Baxter op pagina 434 van [9] aangeeft: *What is by no means obvious, but was proved by Rogers* (1894) *and found by Ramanujan* (1919), *is that* $F(0) = \frac{1}{[(1-q)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^9)(1-q^{11})\ldots]}$ *en dat* $F(1) = \frac{1}{[(1-q^2)(1-q^3)(1-q^7)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots]}$.

Hoofdstuk 5

Conclusie en reflectie

5.1 Conclusie

Zoals in de inleiding is beschreven, was het doel van dit bachelorproject om de Rogers-Ramanujan identiteiten vanuit verschillende perspectieven te bekijken.

In het begin van de scriptie heb ik kort de geschiedenis beschreven van de vondst van het bewijs van Rogers door Ramanujan. Vooral over Ramanujan is veel meer te vertellen dan enkel de Rogers-Ramanujan identiteiten. Wegens het wiskundige karakter van deze scriptie heb ik die verhalen achterwege gelaten. Desalniettemin zijn deze verhalen zeker de moeite waard om te lezen.

Het tweede hoofdstuk stond in het teken van het bewijs van de Rogers-Ramanujan identiteiten. Het moge duidelijk zijn dat het bij tijd en wijle een hele puzzel was om iedere stap netjes te verantwoorden, zeker omdat in [2] vele stappen in een keer werden genomen. Ter indicatie: het bewijs van de Rogers-Ramanujan identiteiten is door Andrews opgeschreven in iets meer dan een enkel A4-tje ...

Als welkome afwisseling op al het rekenwerk dat in hoofdstuk 2 is verricht, ben ik vervolgens verder gegaan met de toepassingen van de Rogers-Ramanujan identiteiten. In hoofdstuk 3 heb ik stilgestaan bij het verband tussen partities en de Rogers-Ramanujan identiteiten. Ook heb ik kort stilgestaan bij een bewijs van de Rogers-Ramanujan identiteiten vanuit de gelijkheid van twee soorten partities.

Ten slotte heb ik beschreven hoe de Rogers-Ramanujan identiteiten een rol spelen in het Hard Hexagon model. Het blijkt dat ze voorkomen bij het berekenen van de gemiddelde waarde $< \sigma_1 >$.

5.2 Reflectie

Terugkijkend op dit bachelorproject ben ik zeker tevreden met het uiteindelijk resultaat. Desalniettemin zijn er een zeker een aantal punten waar ik nog meer onderzoek naar had kunnen doen. Vanwege de beperkte tijd van het bachelorproject, is het daar helaas niet van gekomen.

Zoals ik al eerder aangaf, is er over Ramanujan nog veel meer te vertellen. Zeker zijn 'Lost Notebook' is een aanrader. Hierin staan veel aantekenen die hij maakte in de laatste jaren van zijn leven, met vulpen geschreven op dik papier. In de universiteitsbibliotheek is een replica te vinden. Alleen al het zien van legio onbegrijpbare aantekeningen maakt het de moeite waard dit boek door te bladeren.

Het Hard Hexagon model had ik achteraf gezien gedetalileerder uit willen werken. Gedurende het project merkte ik dat ik om het echt helemaal uit te leggen, aan slechts een paar maanden teweinig had. Daarom heb ik uiteindelijk een paar grote stappen moeten maken in dit hoofdstuk om tot de Rogers-Ramanujan identiteiten te komen.

Daarnaast heb ik in deze scriptie geen aandacht besteed aan generelisaties van de Rogers-Ramanujan identiteiten. Er bestaat namelijk een hele familie van dit type identiteiten, zie ook [2]. Aangezien gedurende dit project niet alle facetten van de Rogers-Ramanujan identiteiten konden worden bestudeerd, heb ik dit gedeelte achterwege gelaten.

Zoals blijkt zijn de Rogers-Ramanujan identiteiten zo veelzijdig dat ze niet volledig te beschrijven zijn in een tijdsbestek van vier maanden. Toch hoop ik u een goed inzicht te hebben gegeven van de veelzijdigheid van deze wonderlijke identiteiten.

Bibliografie

[1] L.J. Rogers, Second memoir on the expansion of certain infinite products, Proceedings of the London Mathematical Society, Volume 25, 1894, blz. 318-343

[2] G.E. Andrews, q-series: Their development and application in analysis, number theory, combinatoriscs, physics, and computer algebra, American Mathematical Society Providens, Rhode Island, 1986

[3] G. Gasper en M. Rahman, Basisc hypergeometric series, Cambridge University Press, 1990

[4] G.E. Andrews en K. Eriksson, Integer Partitions, Cambridge University Press, 2004

[5] H. Rademacher, On the partition function p(n). Proceedings of the London Mathematical Society, Volume 43, 1937, blz. 241-254.

[6] A. Garsia en S. Milne, A Rogers-Ramanujan bijection, Journal of Combinatorial Theory, Volume 31, 1981, blz. 289-339

[7] D. Bressoud en D. Zeilberger, A short Rogers-Ramanujan bijection, Discrete Mathematics, Volume 38, 1982, blz. 313-315

[8] R.J. Baxter, Rogers-Ramanujan Identities in the Hard Hexagon Model, Journal of statistical Physica, Volume 26, Number 3, 1981, blz. 427-452

[9] R.J. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, Academic press, 1982

[10] R.J. Baxter, Hard Hexagons: Exact Solutions, Journal of statistical Physica, 1980, blz. 61-70