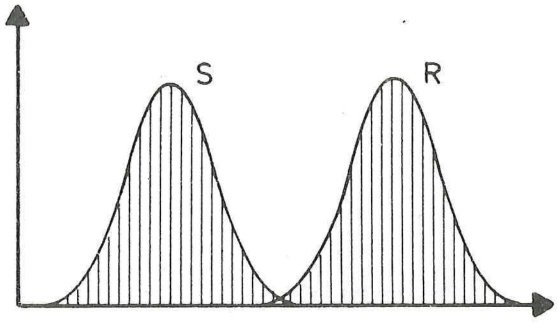
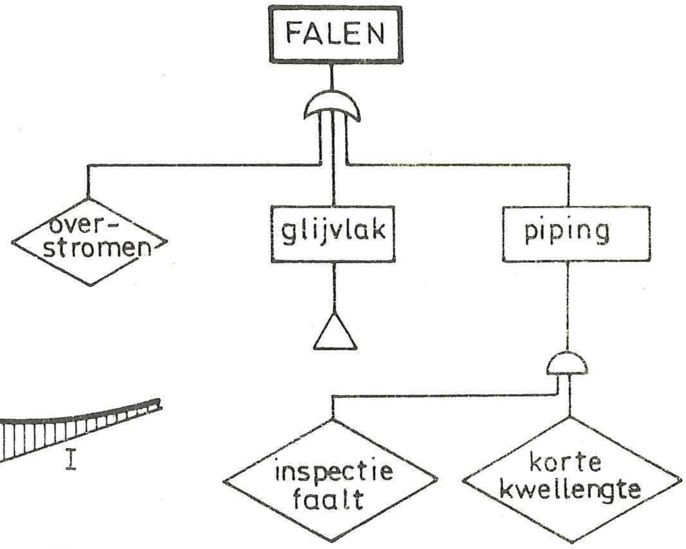
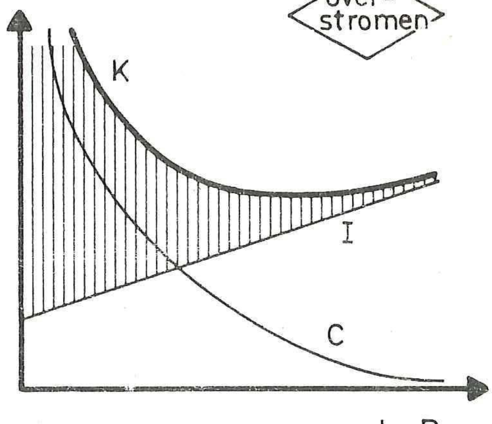
b 3

Probabilistisch ontwerpen

Ir. A.C.W.M. Vrouwenvelder/ir. J.K. Vrijling







TU Delft
Technische Universiteit Delft

Faculteit der Civiele Techniek
Vakgroep Mechanica en Constructies
Sectie Toegepaste Mechanica

INHOUD:

[illegible] sept. [illegible]	4e herdruk sept. 86	5e herdr. sept.'87	b[illegible].I	[illegible]	[illegible]				± ƒ 12,-

762272

Notatie

$P(A)$	=	kans op gebeurtenis A
Ω	=	zekere gebeurtenis (uitkomstenruimte)
ϕ	=	onmogelijke gebeurtenis
$\bar{A}$	=	complement van A
$A \cup B$	=	vereniging van A en B (= A OF B)
$A \cap B$	=	doorsnede van A en B (= A EN B)
$A \subset B$	=	"A impliceert B" danwel "B bevat A" (= A IN B)
$A-B$	=	$A \bar{B}$
$A \mid B$	=	A gegeven B
$f_x(\xi)$	=	kansdichtheidsfunktie van x = $P\{\xi < x < \xi + d\xi\}/d\xi$
$F_x(\xi)$	=	verdelingsfunktie van x = $P(x < \xi)$
$E(g(x))$	=	verwachtingswaarde van $g(x)$
$\mu(x)$, μ_x	=	gemiddelde waarde van x
$\sigma(x)$, σ_x	=	standaardafwijking van x
ϕ_N	=	verdelingsfunktie standaard normale verdeling
u, v	=	standaard normaal verdeelde variabelen
f_{xy}, (ξ, η)	=	tweedimensionale kansdichtheid van x en y
cov_{xy}	=	covariantie van x en y
ρ_{xy}	=	correlatiecoëfficiënt van x en y
$f_{\underline{x}}(\underline{\xi})$	=	kansdichtheidsfunktie voor stochastische vector $\underline{x}$
$g(\underline{x})$	=	funktie van een stochastische vector $\underline{x}$
$g_{,i}(\underline{x})$	=	$\partial g/\partial x_i$ = partiële afgeleide van g naar x_i

1. Inleiding

1.1 Doel van het college

Het entameren van nieuwe activiteiten brengt altijd additionele risico's met zich. Daarmee is men in Nederland reeds lang vertrouwd. De tochten die de schepen van de V.O.C. naar Indië maakten, waren bijzonder riskante ondernemingen. Slechts twee van de drie schepen, die uit Amsterdam vertrokken, keerden ooit in de hoofdstad terug.
Ook het bewonen van lage gronden, of zelfs de bodem van de Beemster, nadat de woeste plannen van Leeghwater waren uitgevoerd, was niet zonder gevaar. Talloze overstromingen toonden dat aan.
Toch hebben onze voorouders in deze en nog vele andere zaken, de kwade kans getrotseerd en daarmede een steen bijgedragen aan de huidige welvaart in Nederland.
Vroeger werd waarschijnlijk in een kleine kring besloten of de te verwachten opbrengsten van een riskante onderneming opwogen tegen de kans op verliezen. Tegenwoordig is dat niet langer zo.
De vraag of men over moet gaan tot het gebruik van moderne energiesystemen als L.N.G. en kernenergie, leidt tot intense maatschappelijke discussies.
De kleine kans op grote en onvoorstelbare gevolgen, die gepaard gaan met het falen van dergelijke systemen beheerst de discussie veeleer dan de omvang van de te behalen voordelen.
De beoordeling van de maatschappelijke aanvaardbaarheid van riskante activiteiten heeft twee kanten: enerzijds de maatstaven die de bevolking aanlegt, anderzijds de objectieve methoden ter bepaling van de gevolgen van ongewenste gebeurtenissen en de kans daarop. Vooral de tweede kant van het probleem zal het werkgebied van de ontwerpende civiel-ingenieur gaan raken.
In feite is die ontwikkeling al op gang gekomen met de introduktie van de begrippen karakteristieke sterkte en karakteristieke belasting in de VB '74.
De definitie van de karakteristieke sterkte als de sterkte met een onderschrijdingskans van 5% houdt in dat het hier om een kansverschijnsel gaat, en niet om een deterministisch gegeven.
Het stochastisch karakter van de belastingen op een constructie is nog veel duidelijker. Vooral wanneer het golfbelasting, windbelasting, gronddruk betreft. Maar ook bijvoorbeeld de belasting van woonhuisvloeren is verre van deterministisch (zie figuur 1.1) wanneer men een groot aantal woningen in beschouwing neemt.
De Nederlandse bouwvoorschriften eisen verder, dat men een zekere marge aanhoudt (de veiligheidscoëfficiënt) tussen de karakteristieke waarden van sterkte en belasting. Dat is noodzakelijk, omdat anders 5% van de belastingen de karakteristieke sterkte zouden overtreffen.
De vraag hoe veilig nu een correct gedimensioneerde constructie is, blijft echter onbeantwoord.

Ook in de Nederlandse waterbouwkunde is door de Deltacommissie een stochastisch element aangebracht.
De primaire waterkeringen rond centraal-Holland dienen volgens de Deltacommissie zó ontworpen te worden, dat zij een stormvloed met een overschrijdingskans van 10^{-4} per jaar volledig kunnen weerstaan.
In de praktijk ontwerpt men de dijk zo, dat afgezien van verborgen veiligheden, de gemiddelde sterkte juist de ontwerpbelasting (10^{-4} per jaar) evenaart.

Dit betekent echter, dat er 50% kans is, dat de dijk bezwijkt tijdens de ontwerp stormvloed. Hetgeen niet in overeenstemming is met de eis van de Deltacommissie. De Deltacommissie heeft wel een poging gedaan om een veiligheidseis in de zin van een economisch optimale inundatiekans te formuleren, maar is uit praktische overwegingen teruggekeerd tot het aangeven van de overschrijdingskans van de belasting.

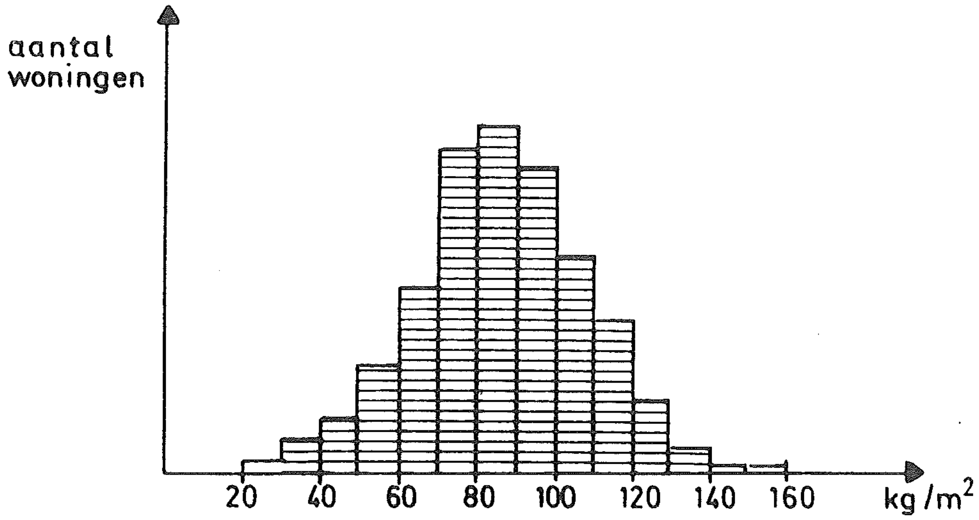


Fig. 1.1 Histogram van de grootste vloerbelasting gemeten in 1000 woningen.

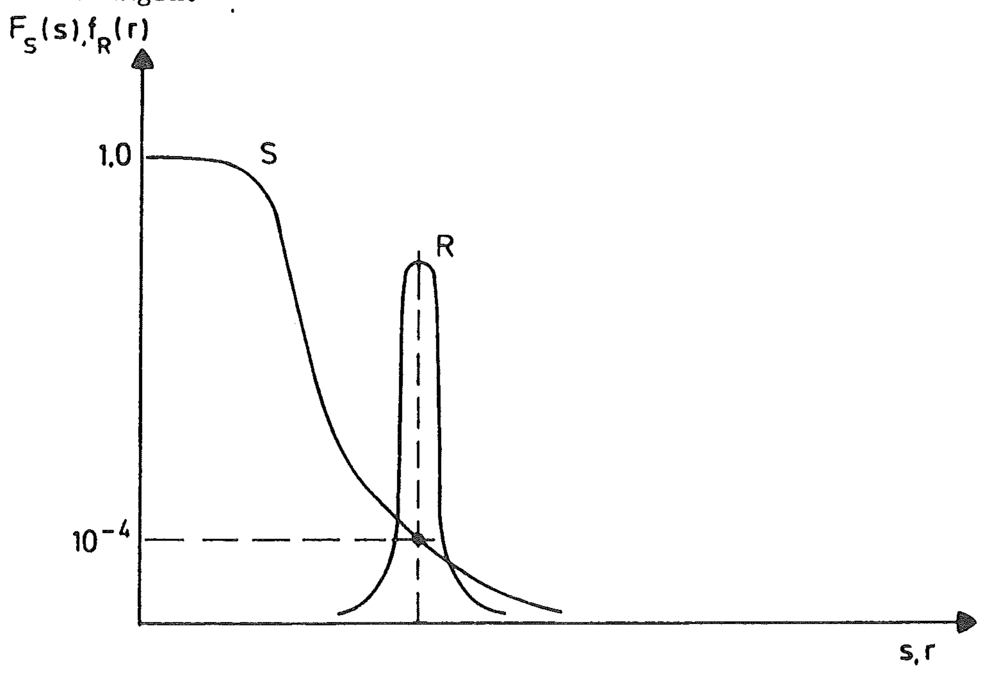


Fig. 1.2 Een Nederlands dijkontwerp.

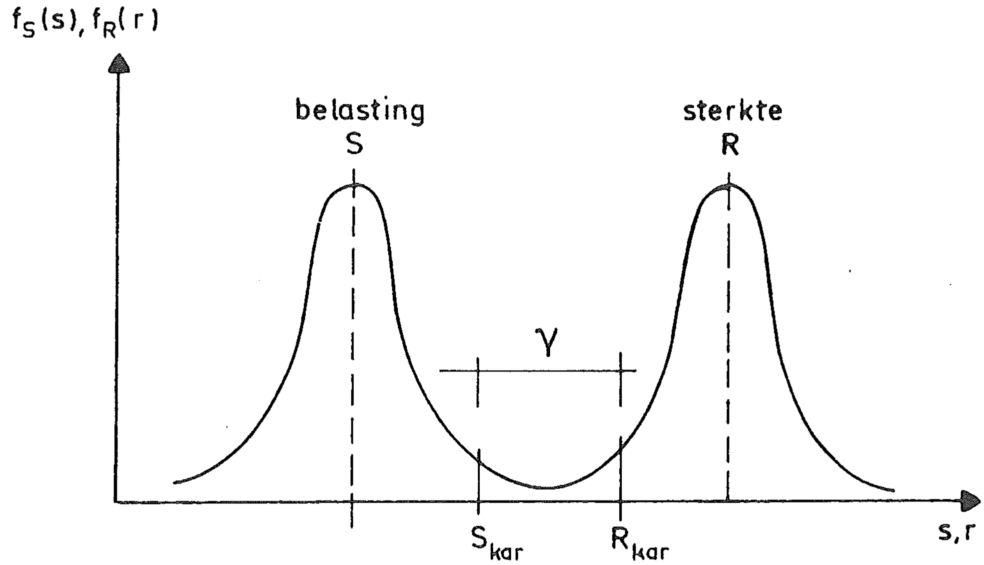


Fig. 1.3 De dimensionering van een konstruktie volgens de VB'74.

Uit beide voorbeelden blijkt, dat men stopt voordat het doel, het ontwerpen van een constructie die aan een bepaalde veiligheidseis voldoet, formeel bereikt is. Dit betekent natuurlijk niet dat de constructies onveilig zijn. Maar wel, dat de veiligheid van uiteenlopende constructies niet consistent is.

Er zijn in hoofdzaak twee redenen aan te voeren voor het feit, dat men een constructie niet ontwerpt op basis van een veiligheidseis in de zin van een geaccepteerde bezwijkkans.

1. Ten tijde van de Deltacommissie waren de methoden van de risico-analyse nog niet goed bekend. De toepassing van de waarschijnlijkheidsleer in de natuurkunde (statistische mechanica) kwam pas in de jaren dertig op gang onder invloed van Einstein, Fermi en Dirac.
   De analyse van de veiligheid (of de risico's) van technische systemen werd ontwikkeld in de jaren zestig. Het onderwerp van studie was toen de veiligheid van kerncentrales, hetgeen resulteerde in het befaamde Rasmussen-rapport (WASH 1400).
   De toepassing van de waarschijnlijkheidsleer op constructies werd geïnitieerd door Maier in 1920. Maar de betrouwbaarheidsanalyse van civiele constructies wordt pas de laatste 10 jaar intensief bestudeerd.

2. De methoden van de betrouwbaarheidsanalyse brengen veel rekenwerk met zich. Het numeriek uitvoeren van meer-dimensionale integraties is een standaard onderdeel van de bepaling van de betrouwbaarheid van een constructie. Het zal duidelijk zijn, dat de introduktie van de elektronische rekenmachine niet vreemd is aan de recente bloei van het probabilistisch ontwerpen.

De laatste jaren zijn er in Nederland ontwikkelingen gaande om met behulp van probabilistische technieken te komen tot economisch optimaal betrouwbare ontwerpen. Bij wijze van voorbeeld kan men noemen:

De studies in het kader van STUMATS naar de veiligheid van een eenvoudig booreiland in de Noordzee.
De vermoeiingsberekening van het Andoc-boorplatform.
Het ontwerp van de Stormvloedkering Oosterschelde, dat in grote lijnen met behulp van probabilistische technieken tot stand is gebracht.

Binnen het kader van de Technische Adviescommissie voor de Waterkeringen is een studie gaande om het ontwerp van waterkeringen geheel op probabilistische leest te schoeien. Deze ontwikkelingen en de inspanningen in het buitenland vormen voldoende reden om een college over het gebruik van probabilistische methoden bij het ontwerpen van civiele constructies toe te voegen aan het leerprogramma C.T. In dit college zal een overzicht gegeven worden van de probabilistische sterkteberekeningen, de systeembenadering van constructies, belasting en sterkte als stochastische grootheden, de risico-analyse, en een filosofie over de te realiseren betrouwbaarheidsniveaus. Het geheel zal worden verlucht met voorbeelden ontleend aan de Nederlandse ervaring.

1.2 Elementen van een risico-analyse

De studie van de veiligheid van constructies concentreert zich op het falen en het bezwijken. Hoewel de beide termen in het spraakgebruik vrijwel dezelfde betekenis hebben, is in het kader van dit college een duidelijk onderscheid te maken.
Een kunstwerk faalt als het één van zijn belangrijkste funkties niet meer vervult of kan vervullen.
Een constructie bezwijkt als ten gevolge van evenwichtsverlies grote vervormingen ontstaan; de kans op falen is daarbij meestal onaanvaardbaar groot.

In veel gevallen zullen falen en bezwijken samengaan. Volgens de definities is het echter mogelijk dat een kunstwerk faalt zonder te bezwijken en omgekeerd. Een dijk, die overstroomt, faalt bijvoorbeeld zonder te bezwijken. Bezwijken zonder falen treedt op als, ten gevolge van een dijkval, de waterkering niet langer in tact is, maar een inundatie uitblijft door een lage buitenwaterstand.

Het is de zorg van de ontwerpende ingenieur, dat de kans op falen van een op de tekentafel liggende constructie verantwoord klein is. In het algemeen denkt hij daarbij aan belastingen, die de sterkte overtreffen. En aan funkties, die onvoldoende vervuld worden. Op deze facetten is dan ook het stelsel van bouwvoorschriften hoofdzakelijk gericht. De ervaring leert echter, dat de meeste bezwijkgevallen niet worden veroorzaakt door stochastische deviaties van sterkte en/of belasting, maar door menselijke fouten. Het ligt daarbij voor de hand te denken aan een rekenfout in de sterkteberekening van de constructie.
Maar een veel groter gevaar vormt het over het hoofd zien van een maatgevend bezwijkmechanisme.
Zo was bijvoorbeeld de dynamische stabiliteit o.i.v. windbelasting van de Tacoma Narrowsbrug onvoldoende onderzocht. Kort na de voltooiing raakte de brug in een torsie slingering en bezweek.

Ook in de tweede levensfase van de constructie (de bouwfase) worden fatale fouten gemaakt. De meeste bezwijkgevallen komen voor tijdens de uitvoering, omdat de krachtswerking in het half voltooide kunstwerk niet genoeg aandacht krijgt.

Een bekend voorbeeld van de gevolgen van fouten gemaakt tijdens de uitvoering is de ineenstorting van de stalen brug over de haven van Curacao. Doordat een betonvlechter een las had uitgevoerd aan enkele hoogwaardig stalen verankeringsstaven, was de sterkte van deze essentiële onderdelen zodanig verzwakt, dat de uitbouw van de brug tot bezwijken leidde. Het gevolg van de lasfout werd versterkt door het feit, dat de verankering was uitgevoerd als een evenaarconstructie. Het bezwijken van één staaf kon daardoor het einde van de gehele constructie inluiden.

Helaas komen niet alle uitvoeringsfouten tijdens de bouw aan het licht. Als de wapening in een balkon aan de onderzijde ligt, kan dat pas blijken in het gebruik.

In de gebruiksfase wordt de constructie onderworpen aan de belastingen, waarvoor hij ontworpen is. Nu kunnen menselijke fouten in het gebruik leiden tot het bezwijken van een overigens goede constructie. Men stelle zich slechts de inrichting van een omvangrijke bibliotheek in een woonhuis voor.
Ook verwaarlozing van noodzakelijke inspektie en onderhoud kan ernstige gevolgen hebben, vooral als daarop bij het ontwerp is gerekend. Zo maakt in de vliegtuigbouw de regelmatige inspektie een integraal deel uit van de ontwerpfilosofie t.a.v. vermoeiing.

levensfase / oorzaak	ontwerpfase	bouwfase	gebruiksfase
ontwerpfout	Tacoma-bridge	Curacao	Tacoma-bridge
uitvoeringsfout	Markiezaatskade	Curacao	balkon
gebruiksfout	x	x	bibliotheek
beheersfout	x	x	coupure

Tot slot kunnen sommige constructies onder extreme omstandigheden pas funktioneren <u>na</u> menselijk ingrijpen.
De gevolgen laten zich raden, indien door nalatigheid van de daardoor aangewezen personen de ingreep achterwege blijft.
Een goed voorbeeld is een coupure in een havendijk, die het wegverkeer toegang verschaft tot het buitendijkse haventerrein.
Indien men nu vergeet voor een storm de schotbalken in de sponningen aan te brengen, inundeert het achterland.

Een geheel andere categorie van oorzaken van bezwijken is wat men aanduidt als overmacht.
De wet verstaat onder overmacht: gebeurtenissen die niet voortvloeien uit grote nalatigheid of onzorgvuldigheid, zoals meteoriet- en blikseminslag, oorlogshandelingen, aardbevingen, sabotage, aanrijdingen etc. Hoewel het onderscheid duidelijk lijkt, is enige oplettendheid vereist, omdat hetgeen als overmacht beoordeeld wordt, kan variëren met tijd en plaats. Een stormramp van de omvang van 1953 zou door de mensen, die rond 1600 ons land bevolkten, als overmacht gekwalificeerd zijn. Doch als een stormvloed van dit niveau in 1980 optreedt met ernstige gevolgens, zal dit zeker resulteren in een beschuldiging van grove nalatigheid aan het adres van de beheerders en toezichthouders.

Het technisch vermogen en de welvaart van een samenleving bepalen dus mede, welke risico's als overmacht worden geaccepteerd.
Anderzijds varieert hetgeen men opvat als overmacht met de plaats. Over een aardbeving zal men in Nederland niet lang debatteren, doch in Japan kan de constructeur van een gebouw dat tijdens een matige aardbeving bezwijkt, op weinig clementie rekenen.
Uit deze voorbeelden blijkt, dat de frequentie waarmee een gebeurtenis ter plaatse optreedt ook een rol speelt bij de beoordeling.
Gebeurtenissen met een herhalingstijd, die veel langer is dan een mensenleven, rangschikt men gemakkelijk onder overmacht. Indien een fenomeen met ernstige consequenties zich echter enkele malen binnen een mensenleeftijd herhaalt en het binnen het technisch en economisch vermogen van een samenleving ligt zich er tegen te beschermen, zal een beroep op overmacht worden afgewezen. In het gebied tussen de beide uitersten is het oordeel moeilijk.

Het spreekt vanzelf, dat de belangstelling niet uitgaat naar het falen van de constructie om het falen zelf, maar om de gevolgen die ermee gepaard kunnen gaan.
Om de angst voor de gevolgen van een mogelijk falen van technische systemen te proeven behoeft men slechts een krant open te slaan. De discussie over de risico's van kernenergie, L.N.G.-aanvoer etc. vullen dagelijks kolommen. Helaas is het in deze discussie niet exact duidelijk wat men onder risico moet verstaan.
In dit college wordt het risicobegrip als volgt gedefinieerd:

risico = kans op falen x gevolg

De eenvoud van deze definitie is slechts schijn. Met name de gevolgen van falen zijn complex en kunnen bestaan uit materiële schade, verlies van toekomstig inkomen, gewonden en doden. Deze meer-dimensionaliteit van het gevolg geeft problemen bij de toepassing van het risico-begrip. Daarom verwaarloost men in de praktijk meestal alle dimensies op één na.
In het Rapport van de Deltacommissie is op deze wijze het gevolg van een overstroming beperkt tot het direkte materiële verlies uitgedrukt in guldens.
Andere benaderingen beperken zich tot de aantallen doden en gewonden die het gevolg zijn van het falen, omdat men een economische beschouwing van het risico etisch onverantwoord acht. Men beschouwt het menselijk leed als een imponderabilium.

Ondanks de geconstateerde maatschappelijke afkeer van risico's is volstrekte veiligheid onbereikbaar. Daarom zal een politieke consensus moeten worden gevormd omtrent aanvaardbare risico-niveaus. Hoewel op dit terrein veel onderzoek wordt verricht, zijn de resultaten voor technici nog niet goed bruikbaar.
Voorlopig rest technici de opdracht de risico's verantwoord te verminderen. Dat kan zowel gebeuren door de kans op falen te verkleinen, als door de omvang van de gevolgen te beperken.

1.3 De analyse van grenstoestanden

Bij de probabilistische analyse van constructies is vooral de grens tussen het normaal funktioneren van het kunstwerk en het falen en/of bezwijken onderwerp van studie. De faalkans is immers de kans, dat deze grens wordt overschreden.

Een constructie (of een constructie-onderdeel), die juist op deze grens balanceert, verkeert in een grenstoestand.
De wijze, waarop de constructie (of een constructie-onderdeel) in de loop van de tijd onder invloed van inwendige en uitwendige omstandigheden overgaat van normaal funktioneren naar falen en/of bezwijken, noemt men een mechanisme.
Een grenstoestand is dus altijd in samenhang met een mechanisme gedefinieerd. Grenstoestanden onderscheidt men internationaal in twee categorieën, al naar gelang de overschrijding ervan leidt tot falen én bezwijken of uitsluitend tot falen.
De eerste categorie omvat de uiterste grenstoestanden (ultimate limit state). Men denkt hierbij aan het bezwijken (en falen) van de constructie t.g.v. evenwichtsverlies.
De afschuiving van een grondlichaam, de breuk van een trekstaaf en het uitknikken van een kolom zijn voorbeelden van uiterste grenstoestanden.
Uiterste grenstoestanden gelden zowel voor de bouwfase van de constructie als voor de eindfase.

De tweede categorie bevat toestanden die de grens aangeven tussen het gebied waarin de constructie bruikbaar is en het gebied waarin niet aan de functie-eisen kan worden voldaan.
Men noemt dit bruikbaarheids-grenstoestanden of service-ability limit states.
In deze categorie grenstoestanden vallen ontoelaatbare doorbuigingen onaanvaardbare scheurvorming, trillingen etc.
De tweede categorie grenstoestanden wordt meestal bereikt o.i.v. gedurig aanwezige belastingen, terwijl de uiterste grenstoestand meestal gepaard gaat met extreme belastingen.

Vaak wordt binnen de uiterste grenstoestanden nog een onderscheid gemaakt naar de aard van de belastingen. Indien de oorzaak van het bezwijken van de constructie gelegen is in een zeldzame belasting, waarmede men in het ontwerp in eerste instantie geen rekening houdt, spreekt men van "accidental limit states". Voorbeelden van dergelijke ongelukkige belastingen zijn brand, aanvaring, aanrijding, explosies etc.; zaken die men in feite als overmacht zou kunnen betitelen.
Het punt is echter, dat deze grenstoestanden maatgevend worden indien de veiligheid tegen bezwijken volgens de normale mechanismen hoog is opgevoerd. Zo is de kans, dat een betonvloer door brand op een benedenverdieping bezwijkt, groter dan ten gevolge van overbelasting.

2. Waarschijnlijkheidsrekening

In dit hoofdstuk wordt een samenvatting gegeven van die onderwerpen uit de waarschijnlijkheidsrekening, die voor dit college van belang zijn. Aan de orde komen achtereenvolgens de axiomatische opbouw, de beschrijving van een enkele stochastische variabele en van meerdere stochastische variabelen. De behandeling sluit zo nauw mogelijk aan bij de toepassingen in de betrouwbaarheidsanalyse; mathematische strengheid wordt niet nagestreefd. Voor meer informatie wordt verwezen naar de literatuur (1) t/m (3), met name het collegedictaat A80, de hoofdstukken 2, 4, 5, 6 en 8.

2.1 Axiomatische opbouw

De waarschijnlijkkheidsrekening wordt gewoonlijk opgebouwd vanuit de volgende drie axioma's:

I $P(A) \geq 0$
II $P(\Omega) = 1$
III $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ als $A \cap B = \phi$

Het eerste axioma geeft aan dat de kans P op een willekeurige gebeurtenis A groter is dan of gelijk is aan 0. Het tweede axioma stelt de kans op de zekere gebeurtenis Ω gelijk aan 1. Volgens het derde axioma is de kans op het optreden van $\{A$ of $B\}$ gelijk aan de som van de kansen op A en B afzonderlijk, vooropgesteld dat A en B elkaar uitsluiten. (ϕ is de onmogelijke gebeurtenis). Voor een overzicht van de diverse symbolen wordt verwezen naar de notatielijst en figuur 2.1. Strikt genomen zijn de gegeven axioma's, met name axioma III, alleen bruikbaar zolang we ons beperken tot uitkomstenruimten met een eindig aantal gebeurtenissen. De uitbreiding naar meer algemene axioma's (zie bijvoorbeeld (1)) bevat echter geen nieuwe gezichtpunten die voor dit college van belang zijn en blijft daarom buiten beschouwing.

In bovenstaande is de kans geïntroduceerd als een mathematische grootheid. Daarmee is overigens nog weinig gezegd over de interpretatie van het kansbegrip. Deze interpretatie is in wezen een filosofisch probleem waarop later in dit college nog zal worden teruggekomen. Voorlopig gaan we ervan uit, dat intuïtief het begrip kans in voldoende mate is bepaald.

Uitgaande van de axioma's kunnen nu enkele stellingen worden afgeleid. De meeste van deze stellingen zijn tamelijk triviaal en een bewijsvoering lijkt overbodig. Toch is het nalopen van deze bewijzen, mede aan de hand van de Venn-diagrammen van figuur 2.1, erg nuttig om thuis te raken in de redeneertrant van de kansrekening.

1. $P(\phi) = 0$ (2-1)

   Daar $A \cap \phi = \phi$ geldt wegens axioma III:
   $P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$
   Verder is $A \cup \phi = A$ zodat $P(A \cup \phi) = P(A)$
   Combinatie van beide resultaten levert $P(\phi) = 0$

2. $\underline{P(A) + P(\bar{A}) = 1}$ ($\bar{A}$ = "A niet") (2-2)

Wegens $A \cup \bar{A} = \Omega$ en $A \cap \bar{A} = \phi$ (zie figuur 1a) geldt achtereenvolgens via axioma's III en II:
$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$

3. $\underline{0 \leq P(A) \leq 1}$ (2-3)

De linker ongelijkheid volgt direkt uit axioma I; daar verder wegens axioma I eveneens $P(\bar{A}) \geq 0$ volgt de rechter ongelijkheid verder uit stelling 2.

4. $\underline{\text{Als } A \subset B \text{ dan } P(A) \leq P(B)}$ (2-4)

Wegens $A \subset B$ is $(B-A) \cup A = B$ en $(B-A) \cap A = \phi$ (zie figuur 1f).
Toepassing axioma III:
$P(B) = P((B-A) \cup A) = P(B-A) + P(A)$.
Via $P(B-A) \geq 0$ (axioma I) volgt dan $P(B) \geq P(A)$

5. $\underline{\text{Als } A \subset B \text{ dan } P(A \cup B) = P(B)}$ (2-5)

Als $A \subset B$ geldt $A \cup B = B$ (zie figuur 1f), waaruit de stelling direkt volgt.

6. $\underline{P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B)}$ (2-6)

Er geldt $A \cup B = A \cup (B-A)$ (zie figuur 1g), terwijl A en (B-A) elkaar uitsluiten.
Wegens axioma III: $P(A \cup B) = P(A) + P(B-A)$.
Vervolgens geldt: $B = (A \cap B) \cup (B-A)$ (zie figuur 1g), waarbij ook $(A \cap B)$ en $(B-A)$ elkaar uitsluiten.
Wegens axioma III: $P(B) = P(A \cap B) + P(B-A)$.
Eliminatie van $P(B-A)$ bewijst de stelling.

7. $\underline{\text{Max } \{P(A); P(B)\} \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)}$ (2-7)

Voor de linker ongelijkheid maken we gebruik van $P(A \cup B) = P(A) + P(B-A)$ (zie bewijs stelling 6, eerste stap).
Daar $P(B-A) \geq 0$ (axioma I) geldt $P(A \cup B) \geq P(A)$. Evenzo valt te bewijzen $P(A \cup B) \geq P(B)$.
De rechter ongelijkheid volgt op grond van stelling 6 en $P(A \cap B) \geq 0$ (axioma I).

Het is nu interessant de verschillende stellingen m.b.t. $P(A \cup B)$ met elkaar in verband te brengen. Stelling 6 geeft een exacte uitdrukking, maar heeft als nadeel dat $P(A \cap B)$ nog bepaald moet worden (daarover meer in 2.2). Stelling 7 geeft een boven en een ondergrens uitgedrukt in $P(A)$ en $P(B)$. De bovengrens is exact als A en B elkaar uitsluiten (zie axioma III of stelling 6); de ondergrens is exact als A de gebeurtenis B impliceert of omgekeerd (zie stelling 5).

Voorbeeld 2.1

In hoofdstuk 1 is gesteld dat een dijk faalt als deze te laag is of als na een eventueel bezwijken onvoldoende kerende hoogte aanwezig is. Voer in:

F = falen van de dijk
A = de waterstand is hoger dan de dijk $A \cap B = \phi$
B = de dijk bezwijkt en heeft onvoldoende kerend vermogen

Stel nu: $P(A) = 2 \times 10^{-4}$ en $P(B) = 3 \times 10^{-4}$

Voor het falen van de dijk geldt dan:

$3 \times 10^{-4} \leqslant P(F) \leqslant 5 \times 10^{-4}$ $P(A)+P(B)$

Het kennen van deze grenzen is voor veel problemen al voldoende; merk op dat de grenzen dicht bij elkaar kunnen liggen als één van de kansen veel groter is dan de ander.

Enkele van de gegeven stellingen zullen we nu uitbreiden naar meerdere gebeurtenissen. Een bewijs wordt alleen gegeven voor stelling 8; de andere stellingen kunnen volgens hetzelfde principe worden bewezen.

A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 onafhankelijk

8. Als $A_i \cap A_j = \phi$ voor alle $i \neq j$ dan:

$$\underline{P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)} \qquad (2\text{-}8)$$

Dit is een uitbreiding van het derde axioma. Voor n = 3 loopt het bewijs als volgt:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) =$

$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

Hierbij is axioma III eerst toegepast op $(A_1 \cup A_2)$ en A_3 en daarna nog een keer op A_1 en A_2. Uitbreiding naar n=4,5 enz. gaat op soortgelijke wijze.

9. Als $A_i \cap A_j = \phi$ voor alle $i \neq j$ en $(A_1 \cup A_2 \ldots\ldots \cup A_n) = \Omega$ dan:

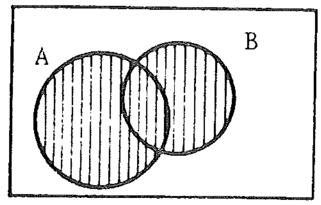
$$\underline{P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) = 1} \qquad (2\text{-}9)$$

Dit is een uitbreiding van stelling 2 en een bijzonder geval van stelling 8.

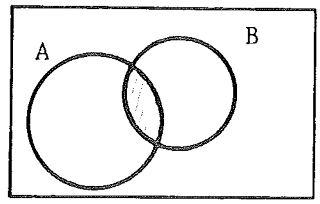
10. Als $A_i \subset A_j$ voor alle $i \neq j$ dan (uitbreiding stelling 5):

$$\underline{P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = P(A_j)} \qquad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \cdots \subset A_j \qquad (2\text{-}10)$$

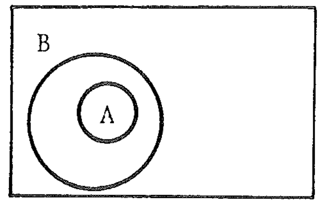
a) Vereniging van A en B: $A \cup B$
(A of B)



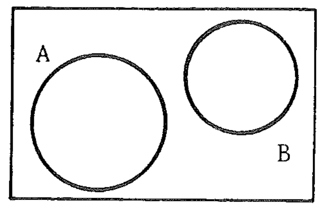
b) Doorsnede van A en B: $A \cap B$
(A en B)



c) A impliceert B: $A \subset B$
(A in B of B "bevat"A)

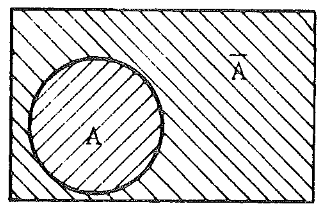


d) A en B sluiten elkaar uit: $A \cap B = \phi$



e) $A \cup \bar{A} = \Omega$

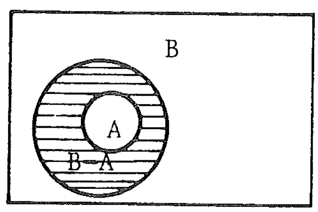
$A \cap \bar{A} = \phi$



f) Als $A \subset B$ dan $A \cup (B-A) = B$

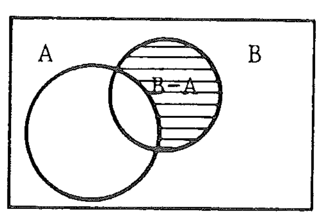
$A \cap (B-A) = \phi$

$A \cup B = B$



g) $A \cup (B-A) = A \cup B$

$A \cap (B-A) = \phi$



h) $(B-A) \cup (A \cap B) = B$

$(B-A) \cap (A \cap B) = \phi$

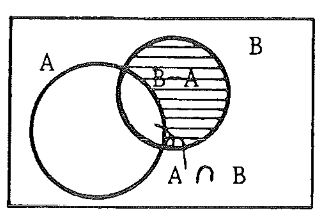


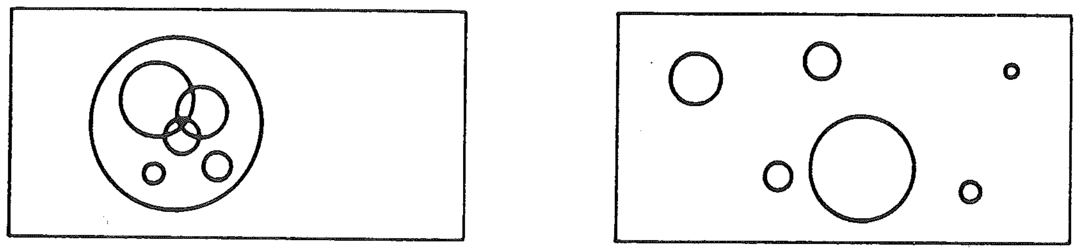
Fig. 2.1 Venndiagrammen ter verduidelijking van de stellingen 1 t/m 7.

11. Voor willekeurige A_i geldt:

$$\underline{\max \{P(A_i)\} \leq P(A_1 \cup A_2 \ \ldots \cup A_n) \leq \Sigma\, P(A_i)} \qquad (2\text{-}11)$$

Dit is een uitbreiding van stelling 7. De kans dat minstens één van een aantal gebeurtenissen A_i optreedt is groter dan kans op de meest waarschijnlijke gebeurtenis en kleiner dan de som van de afzonderlijke kansen. De ondergrens treedt op als een der gebeurtenissen alle andere volledig "bevat" en de bovengrens treedt op als alle gebeurtenissen elkaar "uitsluiten" (zie figuur 2.2). Een bijzonder geval treedt nog op als alle kansen $P(A_i)$ aan elkaar gelijk zijn:

$$\underline{P(A_i) \leq P(A_1 \cup A_2 \ \ldots \cup A_n) \leq nP(A_i)} \qquad (2\text{-}11a)$$



$P(A \cup A_2 \ .. \cup A_n) = \max P(A_i)$ $\qquad$ $P(A_1 \cup A_2 \ .. \cup A_n) = \Sigma P(A_i)$

Fig. 2.2 In stelling 11 treedt de ondergrens op als één der gebeurtenissen de overige volledig "bevat", terwijl de bovengrens optreedt als de gebeurtenissen elkaar uitsluiten.

<u>Voorbeeld 2.2</u>

Gegeven een zeskantige dobbelsteen. Laat A_i de gebeurtenis zijn dat een worp de uitkomst i oplevert. De gebeurtenissen A_i sluiten elkaar uit. Als er geen voorkeur bestaat voor één van de uitkomsten, dus als $P(A_i) = P(A_j)$, dan volgt op grond van stelling 9 dat $P(A_i) = 1/6$ voor alle i.

<u>Voorbeeld 2.3</u>

De kans om in één worp met de dobbelsteen 4, 5 of 6 te gooien is wegens stelling 11a:

$1/6 \leq P(A_4 \cup A_5 \cup A_6) \leq 3/6$

Daar de gebeurtenissen A_4, A_5 en A_6 elkaar uitsluiten, weten we via stelling 8 dat in feite het rechter gelijkteken geldt.

<u>Voorbeeld 2.4</u>

De kans om in één worp met een dobbelsteen een zes te gooien is 1/6. Wegens stelling 11a is de kans om in drie worpen minstens één zes te gooien groter dan 1/6 maar kleiner dan 3/6. Geen van beide grenzen geldt in dit geval exact (waarom niet?).

uitgewerkt $= \binom{3}{1} \cdot 1/6 \cdot 5/6^2 + \binom{3}{2} 1/6^2 \cdot 5/6 + \binom{3}{3} \cdot 1/6^3$

Voorbeeld 2.5

Een constructie wordt gebouwd voor 100 jaar. Per jaar wordt de faalkans geschat op 10^{-5}. Voor de faalkans in 100 jaar geldt dan:

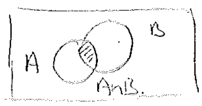
$$10^{-5} \leqslant P \text{ (Falen in 100 jaar)} \leqslant 10^{-3}$$

In de volgende paragraaf wordt op enkele van deze voorbeelden nog teruggekomen.

2.2 Conditionele kansen - Afhankelijkheid en onafhankelijkheid

Een belangrijk begrip bij de verdere opbouw van de waarschijnlijkheidsrekening is de conditionele of voorwaardelijke kans gedefinieerd volgens:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2\text{-}12)$$



De definitie is alleen zinvol als $P(B) \neq 0$. Alvorens in te gaan op de interpretatie van de conditionele kans zullen we eerst aantonen, dat met recht van een "kans" gesproken kan worden.

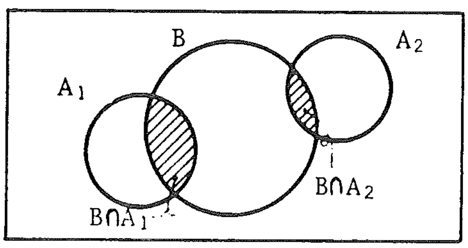
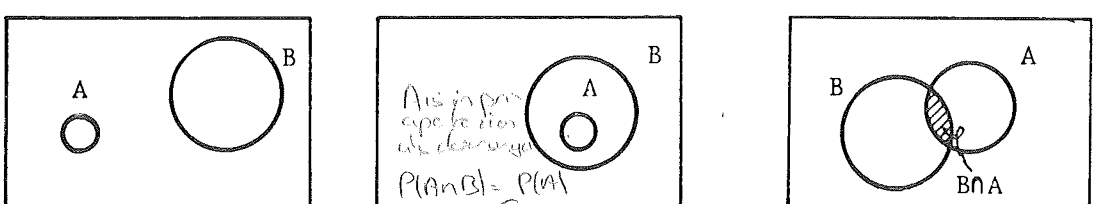


Fig. 2.3 Als A_1 en A_2 elkaar uitsluiten, dan sluiten $(A_1 \cap B)$ en $(A_2 \cap B)$ elkaar eveneens uit.



$P(A|B) = 0$ $\qquad$ $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ $\qquad$ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Fig. 2.4 Het verwerken van het gegeven B op de kanstoekenning aan A.

Met andere woorden: bewezen zal worden dat de conditionele kans volgens definitie (12) voldoet aan de axioma's I, II en III. Het eerste axioma geeft niet veel problemen.
Daar $P(A\ B) > 0$ en $P(B) \neq 0$ moet ook $P(A|B) > 0$. Beschouw vervolgens het tweede axioma; het bewijs dat daaraan wordt voldaan verloopt als volgt:

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Tenslotte moet worden aangetoond dat wordt voldaan aan de derde axioma. We maken gebruik van het Venn-diagram volgens figuur 2.3. Getekend zijn de elkaar uitsluitende gebeurtenissen A_1 en A_2 en de gebeurtenis B. Geconcludeerd kan worden dat:

$$(A_1 \cup A_2) \cap B\} = (A_1 \cap B) \cup (A_2\ B)$$

Aangezien A_1 en A_2 elkaar uitsluiten, sluiten ook $(A_1\ \ B)$ en $(A_2\ \ B)$ elkaar uit, zodat:

$$P\ (A_1 \cup A_2) \cap B\} = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$

Links en rechts delen door $P(B) \neq 0$:

$$\frac{P\ (A_1 \cup A_2) \cap B\}}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

Vervolgens op grond van definitie (12):

$$P\ (A_1 \cup A_2)|B\} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

En dit is axioma III voor conditionele kansen.
Uit het feit dat de conditionele kans voldoet aan de drie axioma's van de waarschijnlijkheidsleer volgt, dat alle stellingen voor gewone kansen ook voor conditionele kansen kunnen worden geschreven.
Zo geldt bijvoorbeeld:

$$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1 \tag{2-13}$$

$$P(A|B) < 1 \tag{2-14}$$

$$P(\phi|B) = 0 \tag{2-15}$$

enz.

Gezien deze stellingen is het mogelijk de conditionele kansrekening te interpreteren als een gewone kansrekening waarbij echter de uitkomstenruimte Ω gereduceerd is tot het deelgebied B. Een belangrijk argument voor deze interpretatie is het volgende:

$$P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \tag{2-16}$$

De gebeurtenis B speelt in de conditionele kansrekening de rol van de zekere gebeurtenis Ω met een kans van optreden gelijk aan 1. Dit brengt ons ertoe om B te zien als een "gegeven". Om de een of andere reden mag als vaststaand worden aangenomen, dat de gebeurtenis B optreedt.

De kansen op de andere gebeurtenissen worden daarmee als volgt in overeenstemming gebracht (zie figuur 2.4):

- de kans op een gebeurtenis die B uitsluit wordt nul;
- de kans op een gebeurtenis die B impliceert wordt gedeeld door P(B). Door deze procedure worden alle kansen op gebeurtenissen A_i met $A_i \subset B$ op genormeerd zonder dat hun onderlinge verhoudingen veranderen.
- als een gebeurtenis A de gebeurtenis B slechts gedeeltelijk uitsluit of impliceert, kan A worden opgebroken in de afzonderlijke gebeurtenissen $(A \cap B)$ en $(A \cap \bar{B})$ waarna bestaande procedures kunnen worden toegepast. Inderdaad leidt dit tot definitie (2-12). De resulterende kans $P(A|B)$ wordt meestal uitgesproken als de kans op A gegeven B.

Afhankelijkheid en onafhankelijkheid

In het algemeen zal P(A B) niet gelijk zijn aan P(A). In het bijzondere geval dat dit wel zo is spreken we van onafhankelijkheid. Twee gebeurtenissen A en B zijn zodoende onafhankelijk als:

$$P(A|B) = P(A) \tag{2-17}$$

A is dus onafhankelijk van B als het gegeven dat B plaats vindt geen invloed heeft op de kanstoekenning aan A.
De regels voor EN- en OF-kansen komen in het geval van onafhankelijkheid er als volgt uit te zien:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) \tag{2-18}$$

!! def | onafhankelijkheid

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \,.\, P(B) \tag{2-19}$$

(A en B onafhankelijk)

Wiskundig bezien is het overigens beter (2-18) niet als gevolg van onafhankelijkheid te zien maar als definitie zelf. Deze definitie laat zich ook gemakkelijk uitbreiden naar n gebeurtenissen.
De gebeurtenissen A_i zijn onderling onafhankelijk als

$$P(A_1 \cap A_2 \,..\, \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \,...\, P(A_n) \tag{2-20}$$

Het rekenen met onafhankelijke gebeurtenissen is veel plezieriger dan het rekenen met afhankelijke gebeurtenissen. Er bestaat daarom ook een voorkeur om met onafhankelijke gebeurtenissen te werken. In sommige gevallen kan de onafhankelijkheid van twee gebeurtenissen mathematisch worden aangetoond; in de praktijk zal men de onafhankelijkheid meestal postuleren op basis van fysische overwegingen (het onwaarschijnlijk achten van enig causaal verband). Het gebeurt echter ook wel dat men rekent alsof bepaalde gebeurtenissen onafhankelijk zijn, terwijl men weet dat er sommige vormen van afhankelijkheid in het spel zijn. Op die manier vindt men vaak bruikbare resultaten die als benaderingen van het werkelijke probleem kunnen worden gezien.

Voorbeeld 2.6

Het gegeven E = "de uitkomst is even" leidt bij een dobbelsteenworp tot de volgende voorwaardelijke kansen:

$$P(A_1 | E) = P(A_3 | E) = P(A_5 | E) = 0$$

$$P(A_2 | E) = P(A_4 | E) = P(A_6 | E) = 1/3$$

Merk op dat bijvoorbeeld E en A_6 niet onafhankelijk zijn omdat $P(A_6 | E) \neq P(A_6)$.

Voorbeeld 2.7

De gebeurtenissen E = "de uitkomst is even" en A_{56} = "de uitkomst is 5 of 6" zijn onafhankelijk. Immers:

$$P(E) = P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = \tfrac{1}{2}$$

$$P(A_{56}) = P(A_5 \cup A_6) = 1/3$$

$$P(E \cap A_{56}) = P(A_6) = 1/6$$

Er geldt dus $P(E \cap A_{56}) = P(E)\ P(A_{56})$

Voorbeeld 2.8

In voorbeeld 2.4 werd driemaal met een dobbelsteen gegooid en ging het om de kans dat minstens één van die worpen een 6 opleverde. We zullen nu aannemen dat de resultaten van de verschillende worpen onafhankelijke gebeurtenissen zijn en deze kans vervolgens uitrekenen. Merk op dat de onafhankelijkheid wordt aangenomen. Het is niet zo dat de kansrekening "leert" dat het hier gaat om afhankelijke gebeurtenissen.

Stel B_1 = eerste worp geeft 6
B_2 = tweede worp geeft 6
B_3 = derde worp geeft 6

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

Het probleem kan het eenvoudigst worden opgelost door de probleemstelling om te keren. We vragen ons dan af wat de kans is dat er geen 6 gegooid wordt. Daartoe dienen elk van de drie worpen geen 6 op te leveren:

$$\bar{B} = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3$$

Wegens onafhankelijkheid van $\bar{B}_i$ geldt (zie 2-20):

$$P(\bar{B}) = P(\bar{B}_1)\ P(\bar{B}_2)\ P(\bar{B}_3) = P(\bar{B}_i)^3$$

$$1 - P(B) = \{1 - P(B_i)\}^3$$

$$P(B) = 1 - \{1 - P(B_i)\}^3$$

$$P(B) = 1 - \{1 - 1/6\}^3 = 0{,}42$$

We voldoen daarbij aan $1/6 \leq P(B) \leq \tfrac{1}{2}$, zoals berekend in voorbeeld (2.4).

Voorbeeld 2.9

Neem aan dat het falen van de constructie van voorbeeld 2.5 in de verschillende jaren beschouwd mag worden als onafhankelijke gebeurtenissen. Duidt falen in jaar i aan met F_i, zodat:

$$P(\text{Falen in n jaar}) = P(F_1 \cup F_2 \; .... \cup F_n)$$

Analoog aan de redenering bij voorbeeld 2.8:

$$P(\text{Niet Falen in n jaar}) =$$

$$P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \; ... \cap \bar{F}_n) =$$

$$P(\bar{F}_1) * P(\bar{F}_2) * \; ... \; P(\bar{F}_n) = P(\bar{F}_i)^n = \{1 - P(F_i)\}^n$$

$$P(\text{Falen in n jaar}) = 1 - \{1 - P(F_i)\}^n$$

Met $P(F_i) = 10^{-5}$ en $n = 100$ volgt

$$P(\text{Falen in 100 jaar}) = 0.0009995$$

We merken op dat de bovengrens van 2-11a hier een zeer goede benadering is. Hierop zal nog worden teruggekomen in de latere colleges.

Het theorema van de totale waarschijnlijkheid

Een veel gebruikte stelling binnen de kansrekening is het zogenaamde "Total Probability Theorem", dat gegeven wordt door:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i) \qquad (2\text{-}21)$$

Hierbij moeten de B_i elkaar uitsluiten en samen een zekere gebeurtenis zijn (d.w.z. $B_i \cap B_j = \phi$, $B_1 \cup B_2 \; ... \cup B_n = \Omega$).

Het bewijs berust op de volgende identiteiten (zie figuur 2.5):

$$A = \{(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \; ... \cup (A \cap B_n)\}$$

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \phi$$

Er volgt nu gemakkelijk:

$$\begin{aligned} P(A) &= P\{(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n)\} = \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P_n(A \cap B\;) = \\ &= \Sigma\, P(A \cap B_i) = \\ &= \Sigma\, P(A \mid B_i)\, P(B_i) \end{aligned}$$

De laatste stap volgt op basis van definitie (2-12).

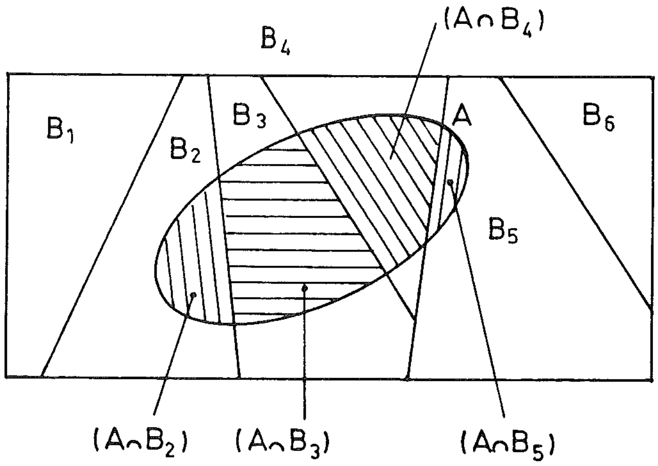


Fig. 2.5 De gebeurtenisssen (A B_i) sluiten elkaar uit en hun vereniging is precies A.

Voorbeeld 2.10

Er wordt tweemaal met een dobbelsteen gegooid. Wat is de kans dat de som gelijk is aan 9.

We passen het Total Probability Theorem toe met A = "de som is 9" en B_i = "de eerste worp is i":

$$P(A) = \Sigma\, P(A|B)\; P(B_i)$$

Als de eerste worp een 1 is, is de kans op een som van 9 natuurlijk 0, en evenzo bij 2. Als de eerste worp 3 oplevert, moet de tweede worp een 6 zijn en de kans is dus 1/6. Analoog bij 4, 5 of 6. Er geldt dus:

$$P(A|B_1) = P(A|B_2) = 0$$

$$P(A|B_3) = P(A|B_4) = P(A|B_5) = P(A|B_6) = 1/6$$

Daarmede:

$$P(A) = \Sigma\, P(A|B_i)\; P(B_i) =$$

$$\Sigma\, P(A|B_i) * 1/6 =$$

$$1/6\; \Sigma\, P(A|B_i) = 4/36$$

Men kan deze uitkomst uiteraard ook langs een andere weg berekenen.

Het Theorema van Bayes

Voor twee gebeurtenissen A en B kan men schrijven:

$$P(A \cap B) = P(A)\; P(B|A) \text{ of}$$

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A|B)$$

Hieruit volgt dat ook geldt:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\ P(A)}{P(B)} \qquad (2.22)$$

Deze eenvoudige gelijkheid staat bekend als het theorema van Bayes. Men kan het opvatten als een regel voor informatieverwerking. De kans op A onder invloed van gegeven B is de kans op A zonder gegeven B vermenigvuldigd met $P(B|A)$ / $(P(B)$. Het belang ligt in het feit dat $P(B|A)$ in sommige gevallen beter rechtstreeks te bepalen is dan $P(A|B)$.

2.2 Stochastische variabelen

Verdelingsfunktie en dichtheidsfunktie van een variabele

Als de (stochastische) uitkomst van een experiment in een getal wordt uitgedrukt spreken we van een stochastische variabele. Een dergelijke variabele kan discreet zijn of continu, dan wel een mengvorm van beide. We zullen ons hier beperken tot continue variabelen, d.w.z. de kans dat de variabele een bepaalde discrete waarde aanneemt is nul.

Een stochastische variabele kan worden beschreven door zijn verdelingsfunktie, die per definitie de kans weergeeft dat de stochastische variabele een bepaalde waarde onderschrijdt:

$$F_x(\xi) = P(x \leqslant \xi) \qquad (2\text{-}23)$$

De verdelingsfunktie is monotoon niet dalend van $F_x = 0$ bij $\xi = -\infty$ tot $F_x = 1$ bij $\xi = +\infty$ (fig. 2.6).
Door differentiëren van de verdelingsfunktie krijgen we de kansdichtheidsfunktie:

$$f_x(\xi) = \frac{dF_x(\xi)}{d\xi} \qquad (2\text{-}24)$$

Voor de interpretatie van de dichtheidsfunktie moeten we bedenken dat $x \leqslant \xi$ en $\xi < x \leqslant \xi + d\xi$ gebeurtenissen zijn die ekaar uitsluiten:

$$P(x \leqslant \xi + d\xi) = P(x \leqslant \xi) + P(\xi < x \leqslant \xi + d\xi)$$

Derhalve volgt:

$$P(\xi < x \leqslant \xi + d\xi) = P(x \leqslant \xi + d\xi) - P(x \leqslant \xi) =$$

$$= F_x(\xi + d\xi) - F_x(\xi) = f_x(\xi)\ d\xi$$

De dichtheidsfunktie vermenigvuldigd met een infinitesimale intervalbreedte geeft de kans dat de stochastische variabele een waarde aanneemt binnen dat interval (fig. 2.6).

Zonder bewijs geven we verder nog een aantal belangrijke eigenschappen van de dichtheidsfunktie:

$$f_x(\xi) > 0 \quad \text{voor alle } \xi \tag{2-25}$$

$$P(x \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f_x(\xi)\, d\xi = F_x(a) \tag{2-26}$$

$$P(x \leqslant \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\xi)\, d\xi = F_x(\infty) = 1 \tag{2-27}$$

$$P(x \text{ in } A) = \int_A f_x(\xi)\, d\xi \tag{2-28}$$

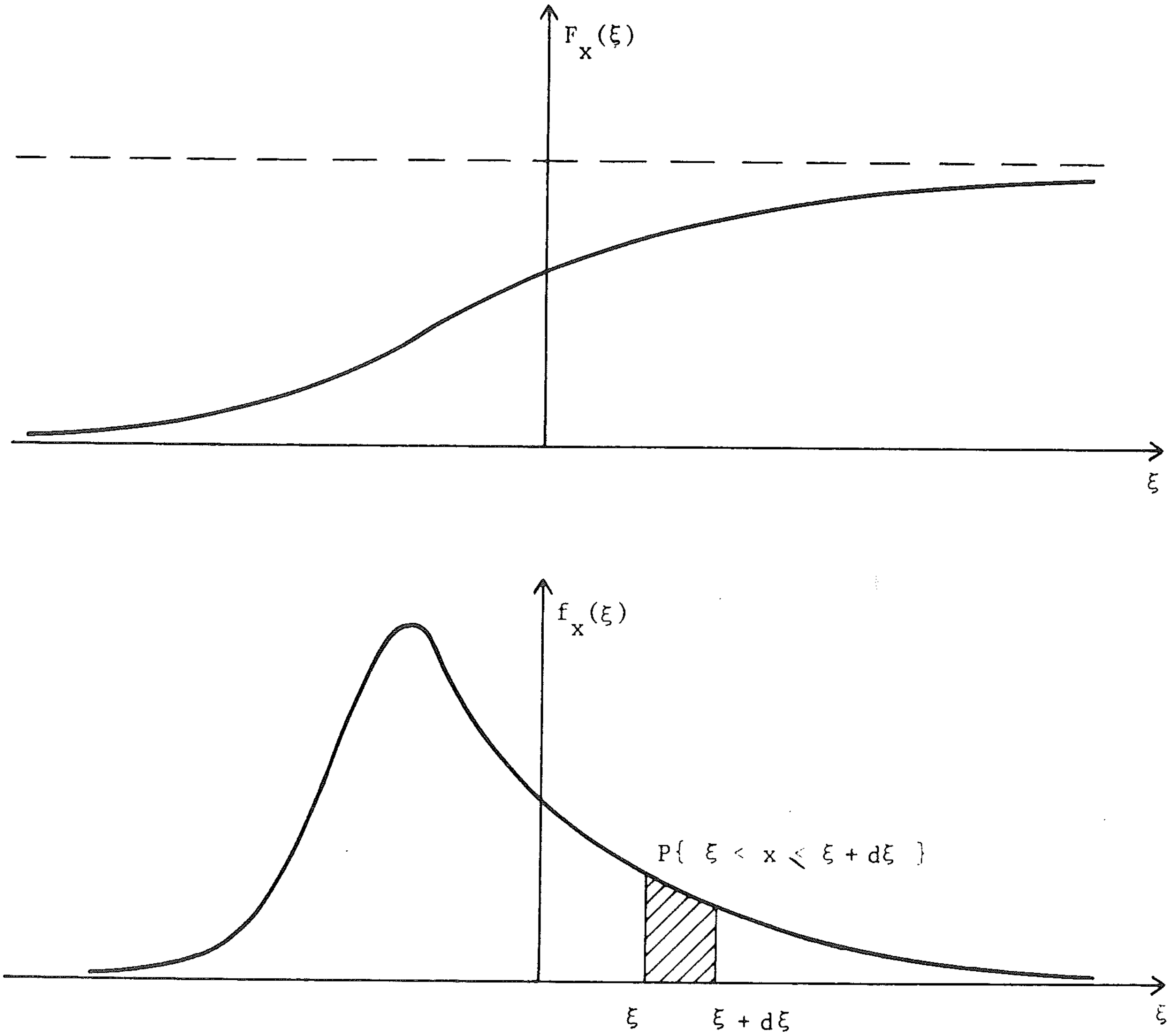


Fig. 2.6 Verdelingsfunktie en dichtheidsfunktie voor willekeurige variabele x.

Verwachtingswaarde, gemiddelde en standaardafwijking

Als x een stochastische variabele is en g(x) is een funktie van x, dan is de verwachtingswaarde van g(x) gedefinieerd als:

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\ f_x(\xi)\ d\xi \qquad (2\text{-}29)$$

Gemakkelijk valt in te zien dat E(g(x)) de volgende eigenschappen bezit:

$$E(a) = a \qquad (2\text{-}30a)$$

$$E(ag(x)) = aE(g(x)) \qquad (2\text{-}30b)$$

$$E(g(x) + h(x)) = E(g(x)) + E(h(x)) \qquad (2\text{-}30c)$$

De belangrijkste voorbeelden van verwachtingswaarden zijn het gemiddelde en de variantie van een stochastische variabele:

$$\mu(x) = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\ f_x(\xi)\ d\xi \qquad (2\text{-}31)$$

$$\sigma^2(x) = E\{(x - \mu(x))^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu(x))^2\ f_x(\xi)\ d\xi \qquad (2\text{-}32)$$

Het gemiddelde $\mu(x)$ of μ_x is een maat voor de ligging van een stochastisch variabele. De wortel uit de variantie, de standaardafwijking $\sigma(x)$ of σ_x, geldt als een maat voor de spreiding. Veel gebruikt wordt ook nog de variatie-coëfficient V(x) of V_x, dat is de standaardafwijking gedeeld door het gemiddelde:

$$V(x) = \frac{\sigma(x)}{\mu(x)} \qquad (2\text{-}33)$$

De variatie-coëfficiënt is een relatieve maat voor de spreiding. Merk op dat het gemiddelde en de variantie verwachtingswaarden zijn, maar de standaardafwijking en de variatie-coëfficiënt niet.

Transformaties

Als x een stochastische variabele is, dan is ook y = g(x) een stochastische variabele. Gegeven de dichtheidsfunktie van x kan de dichtheidsfunktie van y worden bepaald. In veel gevallen is het echter voldoende om alleen het gemiddelde en de standaardafwijking van y te bepalen. Voor een lineaire funktie g(x) kan dat exact, voor een niet-lineaire funktie moet benaderd worden.

1. Lineaire funktie y = a x + b

$$\mu(y) = E(y) = E(a\ x + b) = aE(x) + b = a\mu(x) + b \qquad (2\text{-}34)$$

$$\sigma^2(y) = E\{(y - \mu(y))^2\} =$$

$$= E\{ax + b - a\mu(x) - b)^2\} =$$

$$= E\{a^2(x - \mu(x))^2\} =$$

$$= a^2\sigma^2(x) \qquad (2\text{-}35)$$

Hierbij is uitsluitend gebruik gemaakt van de definitie en eigenschappen van verwachtingswaarden.

2. Niet lineaire funktie

Lineairisering van de niet-lineaire funktie m.b.v. een Taylor-reeks:

$$y = g(x) \approx g(x_0) + (x - x_0)\, g'(x_0) \qquad (2\text{-}36)$$

Toepassing van de formules voor lineaire g(x): $\mu(y) = E(g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0))$
$= g(x_0) + g'(x_0)E(x - x_0)$

$$\mu(y) \approx g(x_0) + (\mu(x) - x_0)\, g'(x_0) \qquad (2\text{-}37)$$

$$\sigma(y) \approx \left| g'(x_o) \right| \sigma(x) \qquad (2\text{-}38)$$

$E(g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) - g(x_0) - g'(x_0)(\mu(x) - x_0))$
$E(g'(x_0)((x - x_0) - (\mu_x - x_0)))^2 = E(g'(x_0) \cdot (x - \mu_x))^2$

In veel gevallen wordt $x_o = \mu(x)$ (mean value benadering) gekozen, σ_x^2. hetgeen leidt tot:

$$\mu(y) \approx g(\mu(x)) \qquad (2\text{-}39)$$

$$\sigma(y) \approx \left| g'(\mu(x)) \right| \sigma(x) \qquad (2\text{-}40)$$

Voorbeeld 2.11

Als voorbeeld nemen we $y = x^2$. De mean value benadering leidt tot $\mu(y) = \mu^2(x)$ en $\sigma(y) = |2\mu(x)|\, \sigma(x)$.
Ter vergelijking zullen we $\mu(y)$ exact bepalen. Daartoe beginnen we met definitie (2-32) voor de variantie verder uit te werken:

$$\sigma^2(x) = \int (\xi - \mu)^2 f\, d\xi =$$

$$= \int (\xi^2 - 2\mu\xi + \mu^2)\, f\, d\xi$$

$$= \int \xi^2 f\, d\xi - 2\mu \int \xi f\, d\xi + \mu^2 \int f\, d\xi$$

$$= E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 =$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

Hierin staat kortheidshalve μ voor $\mu(x)$ en f voor $f_x(\xi)$; de integraties lopen van $-\infty$ tot $+\infty$.

Het resultaat is dat $\mu(y) = E(x^2) = \mu^2(x) + \sigma^2(x)$. De benadering is dus goed als $\sigma(x) << |\mu(x)|$.
$E(y) = E(x^2) = \mu(y) = \sigma^2(x) + \mu^2$

De normale verdeling

Een van de meest gebruikte verdelingstypen is de normale verdeling of Gauss-verdeling (fig. 2.7). De dichtheidsfunktie wordt gegeven door:

$$f_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\{ - \frac{(\xi - \mu)^2}{2\sigma^2} \} \qquad (2\text{-}41)$$

Hierin is μ het gemiddelde en σ de standaardafwijking.
Een normaal verdeelde variabele met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1 wordt de standaard normale variabele genoemd, meestal aangeduid als u. Een willekeurige variabele x kan dan geschreven worden als:

$$x = \mu_x + u\sigma_x \qquad u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

De verdelingsfunktie van de normale verdeling is niet in analytische vorm bekend, maar moet worden opgezocht in een tabel (zie bijvoorbeeld tabel 2.1). Voor kleine kansen kan vaak met voldoende nauwkeurigheid gebruik worden gemaakt van de volgende benadering:

$$P(u < a) = \Phi_N(\nu) = \frac{1}{-\nu\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \qquad (2\text{-}42)$$

De benadering is bruikbaar voor $\nu < -2$.

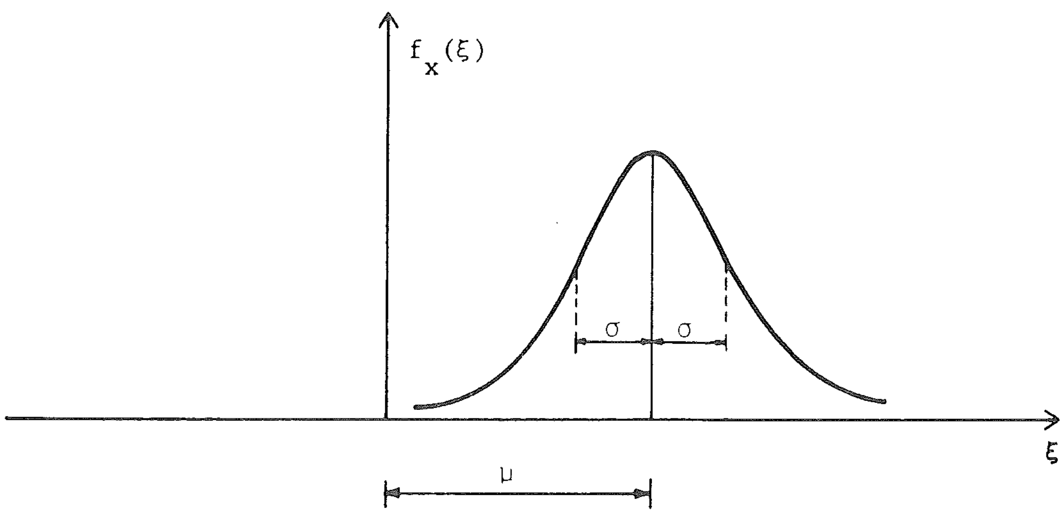


Fig. 2.7 Dichtheidsfunktie voor de normale verdeling.

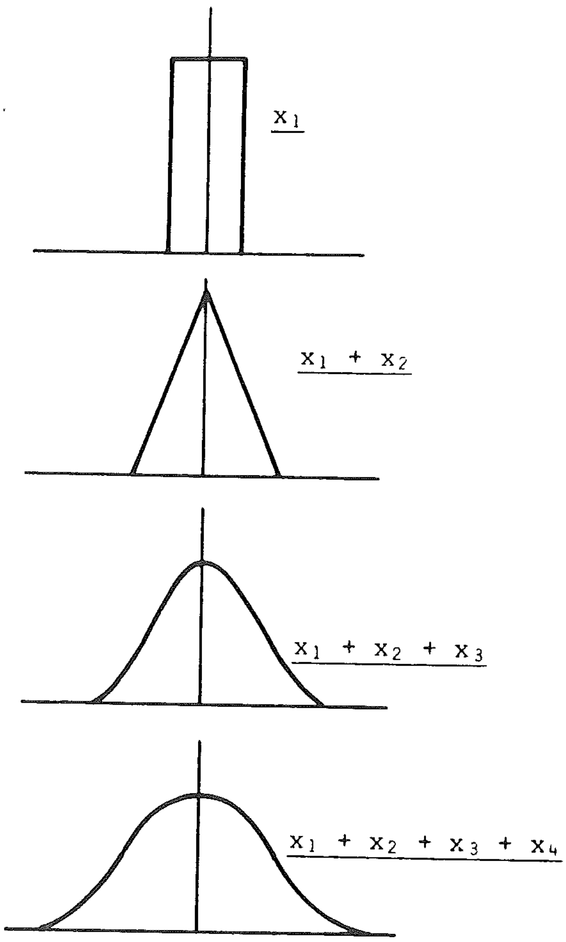


Fig. 2.8 Illustratie van de centrale limietstelling: de variabelen x_i zijn onafhankelijk en hebben een uniforme verdeling. Reeds de som van 4 van deze variabelen heeft een verdeling die (afgezien van de staarten) redelijk lijkt op een normale verdeling.

σ_x / μ_x

Voorbeeld 2.12

Een materiaal heeft een gemiddelde sterkte $\mu(x) = 30$ MPa met een variatiecoëfficiënt van 13.3%. Wat is bij een normale verdeling de kans dat de sterkte lager is dan 20 MPa?

De standaardafwijking $\sigma(x) = 4$ MPa zodat: $\sigma(x) = 0{,}133 \times 30 = 4$

$$P(x < 20) = P(30 + 4u < 20) = P(u < -2.5) = 0.62 * 10^{-2}$$

$P(u < \frac{x-\mu}{\sigma})$

Hierbij is gebruik gemaakt van tabel 2.1.
Benaderingsformule (2-42) levert: $P(u < -2.5) = 0.70 * 10^{-2}$
Voor de meeste doeleinden die voor ons van betekenis zijn is deze benadering voldoende nauwkeurig. Naarmate de kans kleiner wordt, wordt de benadering overigens steeds beter.

De normale verdeling ontstaat wanneer een groot aantal onafhankelijke stochastische variabelen, waarvan geen enkele domineert, worden opgestelt, ongeacht de uitgangsverdeling van die variabelen (zie bijvoorbeeld figuur 2.8.

Dit resultaat staat bekend als de Centrale Limietstelling. Een gevolg van die stelling is dat de som van twee normaal verdeelde variabelen ook weer een normale verdeling bezit.

De lognormale verdeling

Als x een lognormale verdeling heeft, betekent dat dat y = ln x normaal verdeeld is, ofwel x = exp y met y normaal. De lognormale verdeling volgt dus via een niet-lineaire transformatie uit de normale verdeling. Als het gemiddelde en de standaardafwijking van y bekend zijn, kunnen die van x bepaald worden via:

$$\mu(x) = \exp\{\mu(y) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(y)\} \approx \exp \mu(y) \qquad (2\text{-}44)$$

$$\sigma(x) = \mu(x)\sqrt{\exp(\sigma^2(y)) - 1} \approx \mu(x)\,\sigma(y) \qquad (2\text{-}45)$$

De benaderingsformules gelden voor $\sigma(y) << \mu(y)$ en kunnen eventueel gemakkelijk worden nagerekend met de mean value benaderingsformules (2-39) en (2-40).

De dichtheidsfunktie wordt gegeven door:

$$f_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\,\xi} \exp\left\{-\frac{(\ln\xi - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\} \qquad (2\text{-}46)$$

De verdelingsfunktie kan niet expliciet worden opgeschreven, maar moet bepaald worden m.b.v. de tabel voor de normale verdeling.

De lognormale verdeling wordt vaak gebruikt voor variabelen die om fysische redenen geen negatieve waarde mogen aannemen; de normale verdeling is voor die variabelen minder geschikt al maakt dat bij kleine variatiecoëfficiënten meestal weinig verschil.
Tenslotte: zoals de normale verdeling te voorschijn komt als de som van een groot aantal variabelen, zo komt de lognormale tevoorschijn als het produkt.

ν	$\phi_N(\nu)$	ν	$\phi_N(\nu)$	ν	
0,0	0,50				
- 0,1	0,46	- 1,1	0,14	- 2,1	$0{,}18.10^{-1}$
- 0,2	0,42	- 1,2	0,12	- 2,2	0,14
- 0,3	0,38	- 1,3	0,10	- 2,3	0,11
- 0,4	0,34	- 1,4	$0{,}81.10^{-1}$	- 2,4	$0{,}82.10^{-\cancel{1}2}$
- 0,5	0,31	- 1,5	$0{,}67.10^{-1}$	- 2,5	0,62
- 0,6	0,27	- 1,6	$0{,}55.10^{-1}$	- 2,6	0,47
- 0,7	0,24	- 1,7	$0{,}45.10^{-1}$	- 2,7	0,35
- 0,8	0,21	- 1,8	$0{,}36.10^{-1}$	- 2,8	0,26
- 0,9	0,18	- 1,9	$0{,}29.10^{-1}$	- 2,9	0,19
- 1,0	0,16	- 2,0	$0{,}23.10^{-1}$	- 3,0	0,13

ν	$\phi_N(\nu)$	ν	$\phi_N(\nu)$	ν	
- 3,1	$0{,}97.10^{-3}$	- 4,1	$0{,}21.10^{-4}$	- 5,1	$0{,}17.10^{-6}$
- 3,2	0,69	- 4,2	0,13	- 5,2	0,10
- 3,3	0,48	- 4,3	$0{,}85.10^{-5}$	- 5,3	$0{,}58.10^{-7}$
- 3,4	0,34	- 4,4	0,54	- 5,4	0,33
- 3,5	0,23	- 4,5	0,34	- 5,5	0,19
- 3,6	0,16	- 4,6	0,21	- 5,6	0,11
- 3,7	0,11	- 4,7	0,13	- 5,7	$0{,}60.10^{-8}$
- 3,8	$0{,}72.10^{-4}$	- 4,8	$0{,}79.10^{-6}$	- 5,8	0,33
- 3,9	0,48	- 4,9	0,48	- 5,9	0,18
- 4	0,32	- 5,0	0,29	- 6,0	$0{,}99.10^{-9}$

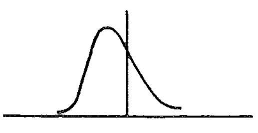
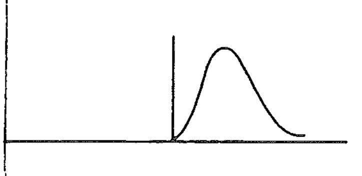
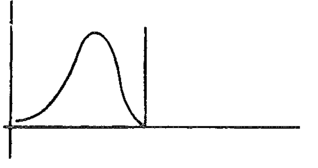
Tabel 2.1. Verdelingsfunktie voor de standaardnormale verdeling:

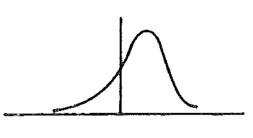
$$\phi_N(\nu) = P(u < \nu) = \int_{-\infty}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$$

Voor $\nu > 0.0$ volgt $\phi_N(\nu)$ uit: $\phi_N(\nu) = 1 - \phi_N(-\nu)$

Voorbeeld: x is normaal met $\mu = 10$ en $\sigma = 2$; hoe groot is de kans dat $x < 14$?

$P(x < 14) = P(10 + 2u < 14) = P(u < 2) = \phi_N(2) =$
$1 - \phi(-2) = 0{,}977.$

	type I maxima (Gumbel)	type II maxima	type III maxima
$F_x(\xi)$	$\exp\,[-e^{-\alpha(\xi-u)}]$	$\exp\,[-\,(\xi/u)^{-k}]$	$\exp\,[-(\xi/u)^{k}]$
$f_x(\xi)$	$\alpha \exp\,[-\alpha(\xi-u)-e^{-\alpha(\xi-u)}]$	$(k/u)(\xi/u)^{-k-1}\exp\,[-(\xi/u)^{-k}]$	$-(k/u)(\xi/u)^{k-1}\exp\,[-(\xi/u)^{k}]$
range	$-\infty < \xi,\ u < +\infty;\ \alpha > 0$	$\xi,\ u,\ k > 0$	$u,\ \xi \leqslant 0 \quad k > 0$
$\mu(x)$	$\mu = u + 0.577/\alpha$	$\mu = u\,\Gamma(1 - 1/k) \quad (k>1)$	$\mu = u\,\Gamma(1 + 1/k)$
$\sigma(x)$	$\sigma = \pi/\alpha\sqrt{6}$	$\sigma^2 + \mu^2 = u^2\,\Gamma(1-2/k) \quad (k>2)$	$\sigma^2 + \mu^2 = u^2\,\Gamma(1 + 2/k)$
$x = \max y_i$ $i = 1\ldots n$	$\alpha_x = \alpha_y;\ u_x = u_y + \frac{\ln n}{\alpha}$	$k_x = k_y;\ u_x = u_y\, n^{1/k_y}$	$k_x = k_y;\ u_x = u_y\, n^{-1/k_y}$
			

	type I minima	type II minima	type III (Weibull)
$F_x(\xi)$	$1 - \exp\,[-e^{+\,\alpha(\xi-u)}]$	$1 - \exp\,[-(\xi/u)^{-k}]$	$1 - \exp\,[-(\xi/u)^{k}]$
$f_x(\xi)$	$\alpha \exp\,[\alpha(\xi-u)-e^{\alpha(\xi-u)}]$	$-(k/u)(\xi/u)^{-k-1}\exp\,[-(\xi/u)^{-k}]$	$(k/u)(\xi/u)^{k-1}\exp\,[-(\xi/u)^{k}]$
range	$-\infty < \xi,\ u < +\infty;\ \alpha > 0$	$u,\ \xi \leqslant 0 \quad k > 0$	$u,\ \xi \geqslant 0 \quad k \geqslant 0$ $\Gamma(z) = 1 \cdot 1$
$\mu(x)$	$\mu = u - 0.577/\alpha$	$\mu = u\,\Gamma(1 - 1/k)$	$\mu = u\,\Gamma(1 + 1/k)$
$\sigma(x)$	$\sigma = \pi/\alpha\sqrt{6}$	$\sigma^2 + \mu^2 = u^2\,\Gamma(1 - 2/k)$	$\sigma^2 + \mu^2 = u^2\,\Gamma(1 + 2/k)$
$x = \min y_i$ $i = i\ldots n$	$\alpha_s = \alpha_y;\ u_x = u_y - \frac{\ln n}{\alpha}$	$k_x = k_y;\ u_x = u_y\, n^{1/k_y}$	$k_x = k_y;\ u_x = u_y\, n^{-1/k_y}$
			

Tabel 2.2. Overzicht extreme-waarde-verdelingen.

Opmerkingen: 1. De type II en III verdelingen zijn gegeven met onder- (boven)grens 0; via translatie kan ook een willekeurige andere grens worden geïntroduceerd.
2. Voor de gammafunktie geldt: $\Gamma(r) = (r-1)!$ als r geheel.

werd $F_x(\xi) = P(x < \xi)$

Voorbeeld 2.13

Zelfde probleemstelling als voorbeeld 12.2, maar nu heeft x een lognormale verdeling.
Gegeven zijn $\mu(x)$ en $\sigma(x)$ waaruit eerst $\mu(y)$ en $\sigma(y)$ moeten worden bepaald door omgekeerde toepassing van de formules (2-44/45).
De benaderingsformules leiden direkt tot $\sigma(y) = V(x) = 0.133$ en $\mu(y) = 3.40$.
De exacte formules geven:

$\ln(\mu(x)) = \mu(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 y$

$$\sigma^2(y) = \ln\{1 + V^2(x)\} = (0.132)^2$$

$\sigma^2 x = \mu^2 x(e^{\sigma^2 y} - 1)$

$\Leftrightarrow \sigma^2 x + \mu^2 x = \mu^2 x \, e^{\sigma^2 y}$

$$\mu(y) = \ln(\mu(x)) - \tfrac{1}{2}\sigma^2(y) = 3.39$$

$e^{\sigma^2 y} = \frac{\sigma^2 x}{\mu^2 x} + 1 \Rightarrow \sigma^2 y = \ln(V^2 x + 1)$

De benaderingsformules zijn in dit geval kennelijk nauwkeurig genoeg.
We bepalen nu de overschrijdingskans.

$$\begin{aligned}
P(x < 20) &= P(\exp y < 20) = \\
&= P(y < \ln 20) = \\
&= P(3.39 + 0.132\, u < \ln 20) = \\
&= P(u < \{3.00 - 3.39\}/0.13\}) = \\
&= P(u < -3.0) = 0.13 * 10^{-2}
\end{aligned}$$

De overschrijdingskans bij de normale verdeling in voorbeeld 2.12 was bijna 5x zo hoog.

Extreme waarde verdelingen

Bij veel toepassingen gaat het om de grootste of kleinste waarde van een groep stochastische variabelen, bijvoorbeeld de grootste golf, de maximale windsnelheid of de geringste sterkte. De verdeling van zo'n maximum of minimum van een aantal variabelen tendeert naar een zogenaamde extreme-waarden-verdeling. De convergentie is echter niet algemeen en bijzonder langzaam, veel langzamer bijvoorbeeld dan de convergentie van een som van variabelen naar een normale verdeling.

Extreme-waarden-verdelingen, zowel maxima als minima, worden onderscheiden in drie typen, aangeduid met de Romeinse cijfers, I, II en III.
Tabel 2.2 heeft een overzicht van de belangrijkste formules. Het belangrijkste verschil tussen de diverse typen is dat type I gedefinieerd is voor $(-\infty, +\infty)$; type II is voor maxima begrensd aan de onderzijde en voor minima aan de bovenzijde; type III is juist omgekeerd. Type I wordt verder vaak aangeduid als een Gumbel-verdeling, type III voor minima als Weibull. Een interessante eigenschap van extreme waarden-verdeling is (uiteraard) dat het maximum van twee of meer extreem verdeelde variabelen (onafhankelijk en van hetzelfde type) ook een extreme verdeling heeft. We zullen dit illustreren aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 2.14

De onafhankelijke variabelen y_1 .... y_n hebben een extreme-waarde-verdeling van het type II voor maxima.
Gedefinieerd wordt $x = \max (y_1 \ldots y_n)$.
Gevraagd de verdeling van x.

onafhankelijk

$$F_x(\xi) = P(x < \xi) =$$

$$= P(y_1 < \xi \text{ en } y_2 < \xi \text{ en} \ldots \text{en } y_n < \xi) =$$

$$= P(y_1 < \xi)\, P(y_2 < \xi) \ldots\ldots P(y_n < \xi) =$$

$$= F_y^{\,n}(\xi)$$

$$= \{\exp - (\xi/u_y)^{-k_y}\}^n \qquad \{e^{-(\xi/u_y)^{-k_y}}\}^n$$

$$= \exp - n(\xi/u_y)^{-k_y} \qquad \rightarrow e^{-n(\xi/u_y)^{-k_y}}$$

$$= \exp - (\xi/u_y n^{1/k_y})^{-k_y}$$

Conclusie: x heeft ook een extreme-waarde-verdeling type II voor maxima met $k_x = k_y$ en $u_x = u_y n^{1/k_y}$.

Kijken we naar de gemiddelden en standaardafwijkingen, dan volgt dat $\mu(x) = \mu(y).n^{1/k_y}$ en $V(x) = V(y)$.

$\mu(x) = a_x \Gamma(1 - 1/k) = u_y n^{1/k_y} \Gamma(1 - 1/k)$
$= n^{1/k_y} \cdot \mu(y)$

Het gemiddelde neemt dus toe, de variatiecoëfficiënt blijft hetzelfde.

De gamma-verdeling

In toepassingen komt men tenslotte ook nog regelmatig de gamma-verdeling tegen waarvan de dichtheidsfunktie gegeven wordt door:

$$f_x(\xi) = \frac{1}{a\Gamma(k)} \left(\frac{\xi}{a}\right)^{k-1} \exp(-\xi/a) \qquad (2\text{-}47)$$

Het is $\Gamma(k)$ de gamma-funktie met $\Gamma(k) = (k-1)!$ als k geheel en positief. Het gemiddelde en de standaardafwijking worden gegeven door:

$$\mu(x) = ak \qquad \sigma(x) = a\sqrt{k} \qquad (2\text{-}48)$$

Voor even waarden van k geldt dat f_x de verdeling is van:

$$x = \frac{a}{2} \sum_{1}^{k/2} u_i^2$$

Met u_i onafhankelijke standaard normale variabelen.
Voor $a = 2$ en $\nu = k/2$ komt de gamma-verdeling dan ook overeen met een chi-kwadraat verdeling met ν graden van vrijheid.

2.3 Twee stochastische variabelen x en y

De tweedimensionale kansdichtheidsfunktie

Voor de beschrijving van een tweetal stochastische variabelen x en y wordt de twee-dimensionale kansdichtheidsfunktie geïntroduceerd, gedefinieerd volgens:

$$f_{xy}(\xi, \eta)\ d\xi\ d\eta = P(\xi < x < \xi + d\xi \text{ en } \eta < y < \eta + d\eta) \qquad (2\text{-}49)$$

Eigenschappen van deze funktie zijn:

$$f_{xy}(\xi, \eta) \geq 0 \qquad (2\text{-}50)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(\xi, \eta)\ d\xi\ d\eta = 1 \qquad (2\text{-}51)$$

$$P((x,y) \text{ in } A) = \iint_A f_{xy}(\xi, \eta)\ d\xi\ d\eta \qquad (2\text{-}52)$$

Een bijzonder geval doet zich voor als de variabelen x en y onafhankelijk zijn:

$$f_{xy}(\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta = P(d\xi < x \leq \xi + d\xi \text{ en } \eta < y \leq \eta + d\eta) =$$

$$= P(\xi < x \leq \xi + d\xi)\ P(\eta < y \leq \eta + d\eta) =$$

$$= f_x(\xi)\ f_y(\eta)\ d\xi\ d\eta \qquad (2\text{-}53)$$

De twee-dimensionale kansdichtheidsfunktie is dan het produkt van de twee ééndimensionale dichtheidsfunkties. Bij afhankelijke variabelen is dat niet het geval en bieden de afzonderlijke dichtheidsfunkties in het algemeen onvoldoende informatie om de tweedimensionale dichtheidsfunkties te kunnen vastleggen.

In fig. 2.9 is een twee-dimensionale kansdichtheidsfunktie getekend; meestal zullen we ons verder overigens beperken tot een weergave van de hoogtelijnenkaart.

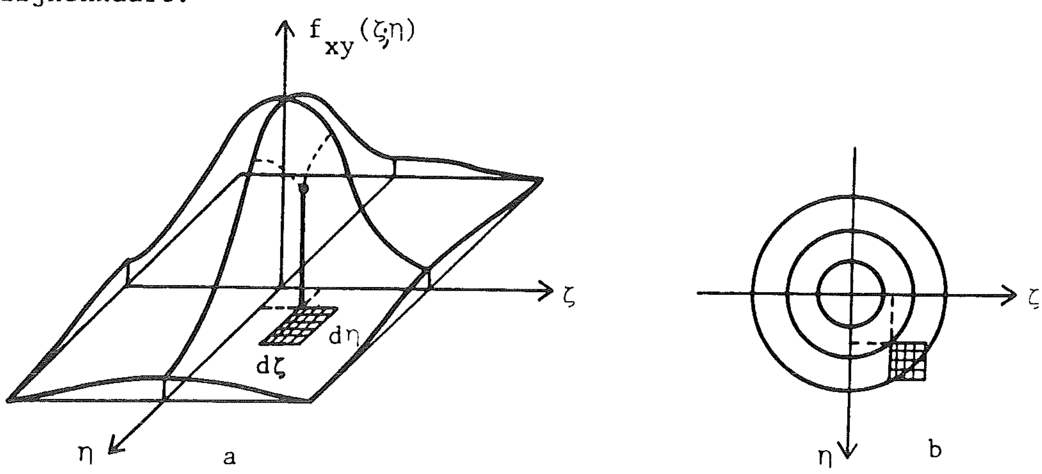


Fig. 2.9 Twee dimensionale dichtheidsfunktie voor stochastische variabelen x en y; Fig. 2.9b geeft de hoogtelijnenkaart.

Verwachtingswaarde, gemiddelde, variantie en covariantie

Evenals bij de ééndimensionale verdeling kan ook voor de twee-dimensionale verdeling een verwachtingswaarde worden gedefinieerd:

$$E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta)\, f_{xy}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (2\text{-}54)$$

De belangrijkste eigenschappen zijn:

$$E(a) = a \qquad (2\text{-}55a)$$

$$E(ag) = aE(g) \qquad (2\text{-}55b)$$

$$E(g + h) = E(g) + E(h) \qquad (2\text{-}55c)$$

Alle x en y onafhankelijk zijn geldt verder:

$$E(g(x)\, h(y)) = E(g(x))\, E(h(y)) \qquad (2\text{-}55d)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} E(g(x)\, h(y)) &= \int \int g(\xi)\, h(\eta)\, f_{xy}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \\ &= \int \int g(\xi)\, h(\eta)\, f_x(\xi)\, f_y(\eta)\, d\xi\, d\eta = \\ &= \int g(\xi)\, f_x(\xi)\, d\xi \int h(\eta)\, f_y(\eta)\, d\eta = \\ &= E(g(x))\, E(h(y)) \end{aligned}$$

Ter karakterisering van de gezamenlijke kansdichtheidsfunktie van x en y wordt, evenals bij de gewone dichtheidsfunktie, veel gebruik gemaakt van gemiddelden (verachtingswaarde van x en y zelf) en varianties (verwachtingswaarde van $x - \mu(x)$ en $y - \mu(y)$ in het kwadraat):

$$\mu(x) = E(x); \quad \sigma^2(x) = E\{(x - \mu(x))^2\} \qquad (2\text{-}56)$$

$$\mu(y) = E(y); \quad \sigma^2(y) = E\{(y - \mu(y))^2\} \qquad (2\text{-}57)$$

Deze definities zijn volkomen compatibel met de eerder gegeven ééndimensionale definities (2-31) en (2-32). Gelet op de definities voor $\sigma^2(x)$ en $\sigma^2(y)$ ligt het voor de hand nog een derde kental in te voeren, namelijk een gemengte kwadratische verwachtingswaarde, ofwel de covariantie:

$$\mathrm{cov}(xy) = E\{(x-\mu(x))(y-\mu(y))\} \qquad (2\text{-}58)$$

Door deze toevoeging wordt een bepaalde mate van volledigheid bereikt: voor ieder tweetal variabelen dat verkregen kan worden via een lineaire transformatie van x en y kunnen weer gemiddelden, varianties en een covanriantie worden bepaald (zie voorbeeld 2-15).

Direkt gekoppeld aan de covariantie is het begrip correlatie-coëfficiënt ρ_{xy}, gedefinieerd volgens

$$\rho_{xy} = \frac{cov(xy)}{\sigma(x)\sigma(y)} = E\left\{\frac{x-\mu(x)}{\sigma(x)} \cdot \frac{y-\mu(y)}{\sigma(y)}\right\} \qquad (2\text{-}59)$$

Voor de correlatiecoëfficiënt gelden de volgende eigenschappen:

- als x en y onafhankelijk: $\rho_{xy} = 0$ (2-60a)
- als x en y volledig lineair afhankelijk: $\rho_{xy} = \pm 1$ (2-60b)
- algemeen: $-1 \leqslant \rho_{xy} \leqslant +1$ (2-60c)

De correlatie-coëfficiënt is dus een genormeerde maat voor de onderlinge afhankelijkheid van twee stochastische variabelen. We zullen de gegeven eigenschappen bewijzen.

a. Als x en y onafhankelijk zijn geldt (zie 2-58) en (2-55d)):

$$cov(xy) = E\{(x-\mu(x))(y-\mu(y))\} =$$
$$= E\{x-\mu(x)\}\ E\{y-u(y)\} =$$
$$= 0 * 0 = 0$$

$\mu(x) - \mu(x) = 0$

Daarmee is ook $\rho_{xy} = 0$; dat $E\{x-\mu(x))\} = 0$ volgt direkt uit de definitie van $\mu(x)$ volgens (2-31).

b. Volledige lineaire afhankelijkheid wil zeggen dat y geschreven kan worden als een lineaire funktie van x met bekende coëfficiënten $y = ax + b$.
Voor het gemiddelde en de standaardafwijking van y geldt:
$\mu(y) = a\mu(x) + b$ en $\sigma(y) = |a|\sigma(x)$.
Voor de covarianties van x en y volgt:

$$cov(xy) = E\{(x-\mu(x))(y-\mu(y))\} =$$
$$= E\{(x-\mu(x))(ax + b - a\mu(x) - b)\} =$$
$$= aE\{(x-\mu(x))^2\} =$$
$$= a\sigma^2(x)$$

De correlatiecoëfficiënt:

$$\rho_{xy} = \frac{cov(xy)}{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{a\sigma^2(x)}{\sigma(x)\{|a|\sigma(x)\}} = \frac{a}{|a|} = \pm 1$$

c. Beschouw de ongelijkheid:

$$E\left\{\left[\frac{x-\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{y-\mu(y)}{\sigma(y)}\right]^2\right\} > 0$$

Deze ongelijkheid berust op het feit dat een kwadraat (van reële getallen) altijd positief is, en dus ook de verwachtingswaarde van een kwadraat. Uitwerking hiervan m.b.v. de eigenschappen van verwachtingswaarde en de diverse definities leidt tot:

$$E\left\{\left(\frac{x-\mu(x)}{\sigma(x)}\right)^2 - 2\left(\frac{x-\mu(x)}{\sigma(x)}\right)\left(\frac{y-\mu(y)}{\sigma(y)}\right) + \left(\frac{y-\mu(y)}{\sigma(y)}\right)^2\right\} > 0$$

$$1 - 2\rho_{xy} + 1 > 0$$

$$\rho_{xy} < 1$$

De ongelijkheid $-1 < \rho_{xy}$ kan bewezen worden door uit te gaan van het kwadraat met een plusteken.

<u>Opmerking</u>: Als x en y onafhankelijk zijn volgt dat $\rho(xy) = 0$, maar uit $\rho(xy) = 0$ mag men niet concluderen dat x en y onafhankelijk zijn; er kunnen namelijk nog niet-lineaire afhankelijkheden in het spel zijn.
Als x en y een normale verdeling hebben mag uit $\rho(xy) = 0$ wel tot onafhankelijkheid van x en y worden besloten.

<u>Voorbeeld 2.15</u>

De variabelen x en y worden beschreven door:

$$\mu(x) = \mu(y) = 0$$

$$\sigma(x) = 1 \qquad \sigma(y) = 2 \qquad \text{cov}(xy) = 1$$

Gevraagd worden gemiddelden, varianties en covarianties van $s = x + y$ en $t = 2x - y$.

<u>Uitwerking</u>: Direkt valt in te zien dat $\mu(s) = \mu(t) = 0$.
Voor de variantie van s volgt:

$$\sigma^2(s) = E\{(s - \mu(s))^2\} =$$

$$= E\{(x+y)^2\} =$$

$\overbrace{E(x^2) - \mu(x)^2}^{\sigma^2(x)} + 2E(xy) + \overbrace{E(y^2) - \mu(y)^2}^{\sigma^2(y)}$

$$= E(x^2) + 2E(xy) + E(y^2) = \text{(wegens } \mu(x) = \mu(y) = 0)$$

$$= \sigma^2(x) + 2\,\text{cov}(xy) + \sigma^2(y) =$$

geg $Z = R_1 + R_2 + R_3 - B$

$$= 1 + 2 + 4 = 6$$

$\mu R_i = 3000$ $\quad \sigma^2 Z = E[Z - \mu(Z)]^2$

$\sigma R_i = 200$ $\quad = [R_1 + R_2 + R_3 - B - \mu R_1 - \mu R_2 - \mu R_3 + \mu B]^2$

$\rho R_i = 0{,}35$ $\quad = \sigma^2 R_1 + \sigma^2 R_2 + \sigma^2 R_3 + E(R_1 - \mu R_1)(R_2 - \mu R_2)$

$\mu B = 4000$ $\quad + E(R_1 - \mu R_1)(R_3 - \mu R_3)$ enz. $+ \sigma^2 B$

$\sigma B = 1000$

Ga zelf na dat $\sigma^2(t) = 4 - 4 + 4 = 4$
Tenslotte de covariantie:

$$\text{cov}(st) = E\{(s-\mu(s))(t-\mu(t))\} =$$

$$= E\{(x+y)(2x-y)\} =$$

$$= E(2x^2) + E(xy) - E(y^2) =$$

$2\sigma^2(x) + \text{cov}(xy) - \sigma^2(y)$

$$= 2 + 1 - 4 = -1$$

$= 3\sigma^2 R + 6\rho\sigma^2 R + \sigma^2 B$

De correlatiecoëfficiënt ρ_{xy} in dit geval was 0.5 en $\rho_{st} = -0.20$.

Voorbeeld 2.16

Gegeven twee onafhankelijke variabelen x en y met $\mu(x) = \mu(y) = 0$ en $\sigma(x) = \sigma(y) = 1$. Als $z = ax + by$, dan is $\mu(z) = 0$ en $\sigma(z)$ volgt uit:

$$\sigma^2(z) = E\,(ax + by)^2 \qquad E\,(z - \underbrace{\mu(z)}_{=0})^2$$

$$= a^2\, E(x^2) + 2ab\, E(xy) + b^2\, E(y^2) = a^2 + b^2$$

onafhankelijk dus cov = 0

We bepalen nu de covariantie van z en x:

$$\mathrm{cov}(xz) = E\{(x-\mu(x))(z-\mu(z)\} =$$

$$= E\{(x)(ax + by)\} =$$

$$= aE(x^2) + bE(xy) = a\sigma^2(x) + b\ \mathrm{cov}\ (xy) = a\sigma^2(x) = a$$

Daarmee volgt voor $\rho(xz)$:

$$\rho(xz) = \frac{\mathrm{cov}(xz)}{\sigma(x)\sigma(z)} = \frac{a}{\sqrt{\{a^2 + b^2\}}}$$

Stel nu $a^2 + b^2 = 1$ waardoor $\sigma(z) = 1$ en $\rho(xz) = a$. Als a bijna 1.0 hebben x en $z = ax + y\sqrt{\{1-a^2\}}$ veel met elkaar gemeen en is $\rho(xz)$ hoog; als $|a|$ klein is heeft z weinig gemeen met x, en is $\rho(xz) \approx 0.0$.

Funkties van 2 variabelen

Beschouw de funktie $z = g(x,y)$. Als de gezamenlijke kansdichtheidsfunktie van x en y bekend is kan de dichtheidsfunkite van z worden berekend. Voor veel doeleinden is het echter voldoende als voor z het gemiddelde en de standaardafwijking kunnen worden bepaald.

1. z is de som van x en y: $z = x + y$

In dat geval wordt het gemiddelde van z gegeven door:

$$\mu(z) = E(z) = E(x+y) = E(x) + E(y) = \mu(x) + \mu(y) \qquad (2\text{-}61)$$

Voor de variantie van z volgt:

$$\sigma^2(z) = E\{(z-\mu(z))^2\} =$$

$$= E\{(x+y - \mu(x) - \mu(y))^2\} =$$

$$= E\{(x-\mu(x))^2 + 2(x-\mu(x))\ (y-\mu(y)) + (y-\mu(y))^2\} =$$

$$= \sigma^2(x) + 2\ \mathrm{cov}(xy) + \sigma^2(y) =$$

$$= \sigma^2(x) + 2\rho\sigma(x)\cdot\sigma(y) + \sigma^2(y) \qquad (2\text{-}62)$$

Als $\rho = 0$ vereenvoudigt dit tot $\sigma^2(z) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y)$

2. Willekeurige lineaire funktie $z = a + bx + cy$

Op dezelfde wijze kan worden afgeleid:

$$\mu(z) = a + b\mu(x) + c\mu(y) \tag{2-63}$$

$$\sigma^2(z) = b^2\sigma^2(x) + 2bc\ \mathrm{cov}(xy) + c^2\sigma^2(y) \tag{2-64}$$

3. Benadering niet-lineaire funktie

Als $z = g(xy)$ een niet-lineaire funktie is, kan in veel gevallen de volgende benadering op basis van lineairisering worden gebruikt:

$$z \simeq g(x_o y_o) + (x - x_o)\ g,_x(x_o y_o) + (y - y_o)\ g,_y(x_o y_o) \tag{2-65}$$

$$\mu(z) \simeq g(x_o y_o) + (\mu(x) - x_o)\ g,_x(x_o y_o) + (\mu(y) - y_o)\ g,_y(x_o y_o) \tag{2-66}$$

$dy/dx\,|_{x=x_0}$

$$\sigma^2(z) \simeq g,_x(x_o y_o)\ \sigma(x)\}^2 + 2g,_x(x_o y_o)\ g,_y(x_o y_o)\ \mathrm{cov}(xy) + \{g,_y(x_o y_o)\ \sigma(y)\}^2 \tag{2-67}$$

Hierin worden met $g,_x$ en $g,_y$ respectievelijk de afgeleiden $\partial g/\partial x$ en $\partial g/\partial y$ bedoeld; $(x_o y_o)$ is een geschikt gekozen ontwikkelingspunt, soms wordt daarvoor het punt $(\mu(x), \mu(y))$ genomen (mean value benadering).

Voorbeeld 2.17: $z = xy$ met x en y onafhankelijk

We kiezen $x_o = \mu(x)$ en $y_o = \mu(y)$:

$$z = \mu(x)\ \mu(y) + (x - \mu(x))\mu(y) + (y - \mu(y))\mu(x)$$

$$\mu(z) = \mu(x)\ \mu(y)$$

$$\sigma^2(z) = \mu(y)\ \sigma(x)\}^2 + \mu(x)\ \sigma(y)\}^2$$

Voor de variatiecoëfficiënt $V(z)$ kan nog worden afgeleid:

$$V^2(z) = \frac{\sigma^2(z)}{\mu^2(z)} = \frac{\mu^2(y)\sigma^2(x) + \mu^2(x)\sigma^2(y)}{\mu^2(x)\ \mu^2(y)} = V^2(x) + V^2(y)$$

Van dit resultaat wordt vaak gebruik gemaakt in de literatuur. Interessant is dat van dit voorbeeld de exacte oplossing bekend is:

$\mu(z) = \mu(x)\mu(y)$ en $\sigma^2(z) = \mu^2(y)\sigma^2(x) + \mu^2(x)\sigma^2(y) + \sigma^2(x)\sigma^2(y)$.

(Ga dat na). De benadering is dus goed als $V(x)$ of $V(y)$ klein is.

2.4 n stochastische variabelen

De uitbreiding van 2 naar n variabelen bevat in feite geen nieuwe elementen. De n-dimensionale dichtheidsfunktie voor de variabelen $\underline{x} = \{x_1 \;....\; x_n\}$ wordt gedefinieerd door:

$$f_{\underline{x}}(\underline{\xi})\, d\xi_1 \,...\, d\xi_n = P\{\xi_1 < x_1 \leqslant \xi_1 + d\xi_1 \text{ en } ... \;\xi_n < x_n \leqslant \xi_n + d\xi_n\} \tag{2-68}$$

Voor de gebeurtenis "$\underline{x}$ in A" geldt:

$$P(\underline{x} \text{ in A}) = \underset{A}{\int..\int} f_{\underline{x}}(\underline{\xi})\, d\xi_1 \;....\; d\xi_n \tag{2-69}$$

Als de variabelen $x_1 \;....\; x_n$ onafhankelijk zijn wordt $f_{\underline{x}}(\underline{\xi})$ gegeven door:

$$f_{\underline{x}}(\underline{\xi}) = f_{x_1}(\xi_1)\, f_{x_2}(\xi_2) \;....\; f_{x_n}(\xi_n) \tag{2-70}$$

De verwachtingswaarde van een funktie $g(\underline{x})$ is gedefinieerd als:

$$E(g(\underline{x})) = \int_{+\infty}^{-\infty}..\int g(\underline{\xi})\, f_{\underline{x}}(\underline{\xi})\, d\xi_1 \;....\; d\xi_n \tag{2-71}$$

Gemiddelden, varianties en covarianties laten zich met behulp hiervan vervolgens definiëren als:

$$\mu(x_i) = E(x_i) \tag{2-72}$$

$$\sigma^2(x_i) = E\{(x_i - \mu(x_i))^2\} \tag{2-73}$$

$$\mathrm{cov}(x_i x_j) = E\{(x_i - \mu(x_i))(x_j - \mu(x_j))\} \tag{2-74}$$

De correlatiecoëfficiënt $\rho(x_i x_j) = \mathrm{cov}(x_i x_j)/\sigma(x_i)\sigma(x_j)$ is in het n-dimensionale geval een volledige matrix.
Deze matrix is symmetrisch en heeft op de hoofddiagonaal allemaal ênen.
Bij onafhankelijke variabelen zijn de off-diagonaalterms gelijk nul.

Het gemiddelde en de standaardafwijking van een willekeurige funktie $z = g(\underline{x})$ kan vaak met voldoende nauwkeurigheid benaderd door:

$$\mu(z) = g(\underline{x}_o) + \Sigma(\mu(x_i) - x_{oi})\, g,_i(\underline{x}_o) \tag{2-75}$$

$$\sigma^2(z) = \Sigma\,\Sigma\, g,_i(\underline{x}_o)\, g,_j(\underline{x}_o)\, \mathrm{cov}\,(x_i x_j) \tag{2-76}$$

Als alle variabelen x_i onafhankelijk zijn:

$$\sigma^2(z) = \Sigma\{g,_i(\underline{x}_o)\sigma_i)\}^2 \tag{2-77}$$

Hierin is $\underline{x}_o$ een geschikt gekozen benaderingspunt en $g,_i$ de afgeleide van g naar x_i.

Literatuur

1. Roes, P.B.M., Ooorschot, J.J.L. van
Kansrekening en Statistiek (coll. A80)
Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, 1978

2. Benjamin, J.R., Cornell, C.A.
Probability Statistics and Decision for Civil Engineers
McGraw Hill Book Company, New York, 1969

3. Papoulis, A.
Probability, Random Variables and Stochastic Processes
McGraw Hill, Kogakusha, 1965

3. Sterkteberekeningen op niveau I, II en III

3.1 De indeling in niveaus

In het constructieve vakgebied vindt de benadering van het probleem van de veiligheid van componenten steeds plaats middels de gebruikelijke filosofie van grenstoestanden en de daarbij behorende wiskundige modellen (zie fig. 3.1).

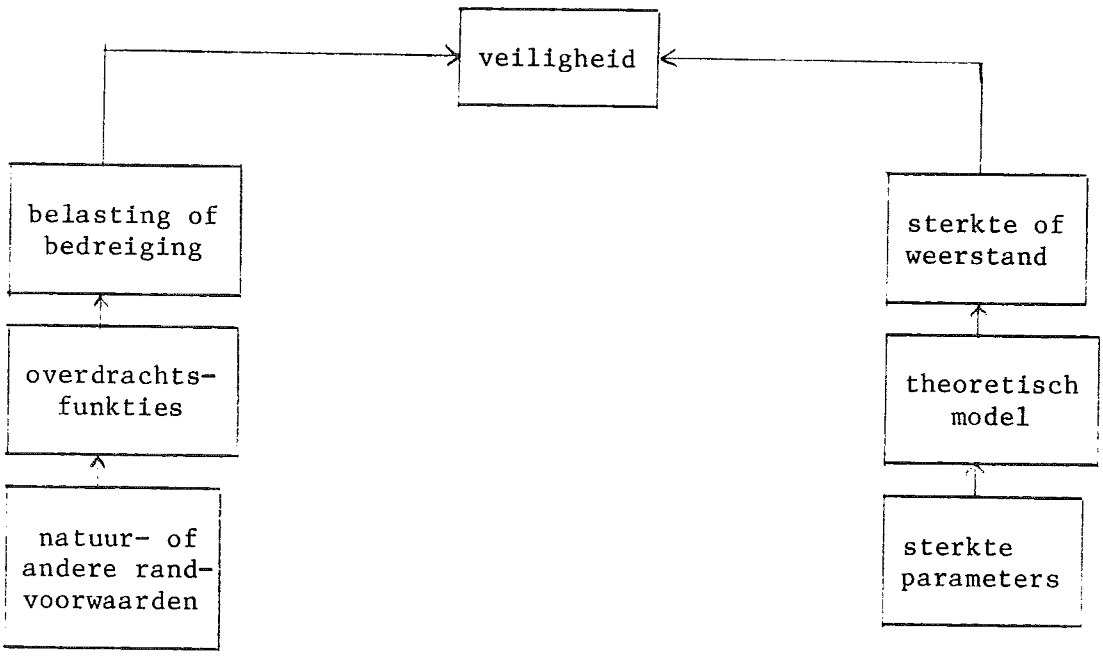


Fig. 3.1 Een grenstoestand van een mechanisme.

Alleen de wijze, waarop de veiligheid in de zin van voldoende zekerheid, dat de belastingen de sterkte niet overschrijden, wordt vastgesteld, is anders. Om de discussie te vergemakkelijken heeft het Joint Committee on Structural Safety (C.E.B.-C.E.C.M.-C.I.B.-F.I.P.-I.A.B.S.E.) een niveauindeling voorgesteld voor de gebruikelijke methoden om de veiligheid van constructies te bepalen.

Niveau III behelst de exacte probabilistische benadering, waarbij de kansdichtheidsfunkties (k.d.f's) van alle variabelen in aanmerking worden genomen.

Niveau II omvat een aantal benaderende methoden, waarbij het probleem wordt gelineariseerd rond een bepaald met zorg gekozen punt. Correlaties tussen variabelen dienen vermeden te worden.

Niveau I bevat de huidige ontwerpmethoden, die afstand scheppen tussen de karakteristieke waarden van sterkte en belasting door middel van een verzameling partiële veiligheidsfaktoren.

Alleen bij berekeningen volgens de niveaus II en III wordt de veiligheid of de betrouwbaarheid expliciet vastgesteld. Meestal gebeurt dat uit praktische overwegingen in de vorm van een bezwijkkans.

Bij de niveau I benadering wortelt de veiligheid meer in de ervaring, dat constructies, die volgens de geldende voorschriften gedimensioneerd zijn, goed voor hun taak berekend zijn.
De recente ontwikkeling is echter, dat niveau I voorschriften gecalibreerd worden met behulp van methoden van een hoger niveau teneinde de veiligheid consistent te maken voor diverse typen constructies.

3.2 Berekeningen op niveau III

In de berekeningen op niveau III wordt de bezwijkkans berekend op grond van de exacte kansdichtheidsfunkties van de sterkte en de belasting.
De basis van de berekening is echter de wiskundige formulering van het bestudeerde mechanisme en de daarbij behorende grenstoestand.
In het eenvoudigste geval komt dit neer op de volgende redenering:

stel de sterkte gelijk aan : R
en de belasting aan : S
Definieer nu de betrouwbaarheidsfunktie als:

$$Z = R - S \tag{3-1}$$

Met behulp van Z zijn nu het veilige gebied, het onveilige gebied en de daartussen liggende bezwijkgrens aan te geven.

$Z > 0$ veilig gebied
$Z = 0$ bezwijkgrens
$Z < 0$ onveilig gebied

Het zal duidelijk zijn dat de constructie in een grenstoestand verkeert indien $Z = 0$.

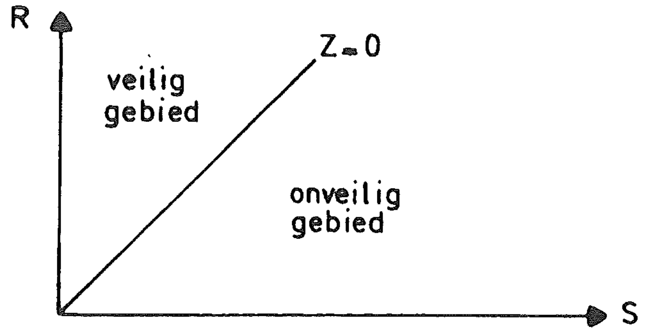


Fig. 3.2 Het veilige, het onveilige gebied en de bezwijkgrens.

Als nu bovendien de kansdichtheidsfunkties van de sterkte en de belasting gegeven zijn door:

$f_R(r)$

$f_S(s)$

dan volgt, indien de stochastische variabelen R en S onafhankelijk zijn, de gezamenlijke k.d.f. door vermenigvuldiging:

$f_R(r).f_S(s)$

Deze gezamenlijke kansdichtheidsfunktie kan d.m.v. een hoogtelijnen kaart worden getekend in het R,S vlak.
Het is nu gemakkelijk in te zien dat de bezwijkkans van de constructie gelijk is aan de inhoud van de gezamenlijke k.d.f. in het onveilige gebied.

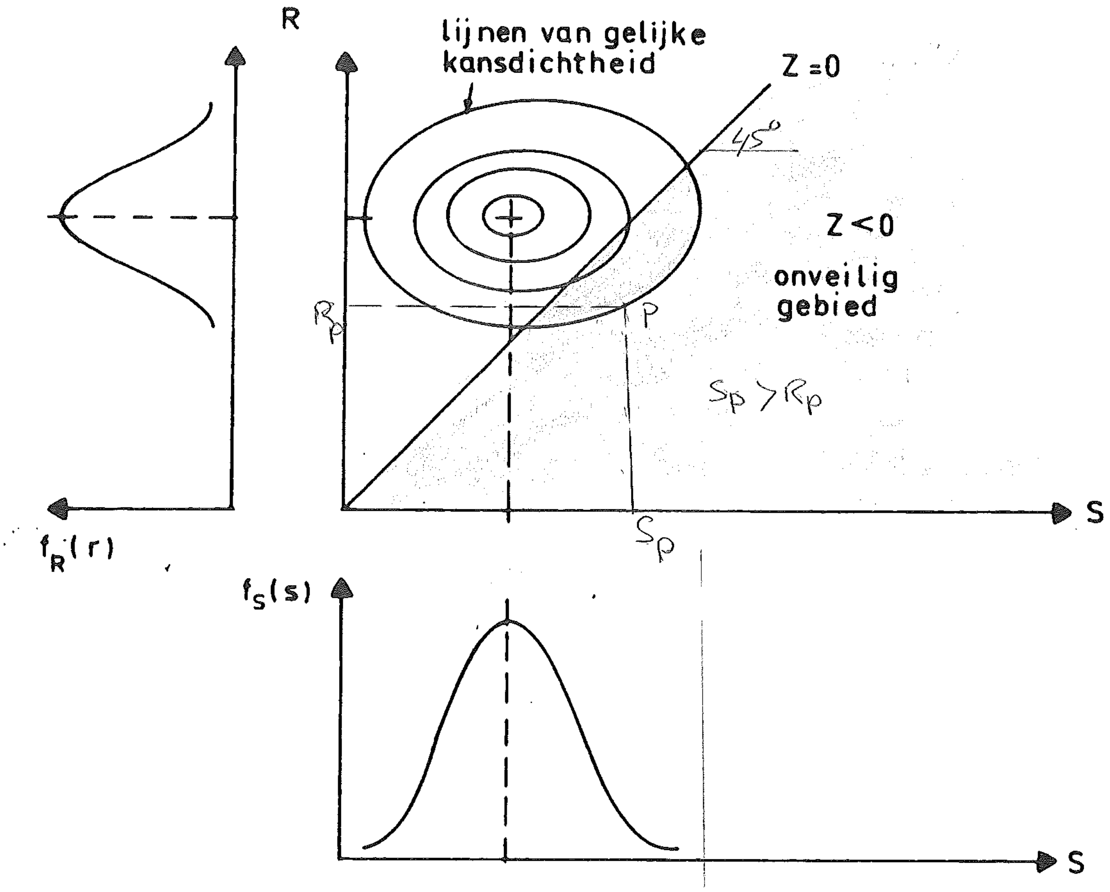


Fig. 3.3 De bepaling van de bezwijkkans.

Of wiskundig genoteerd:

oppervlak onder figuur.

$$P_b = \iint_{Z<0} f_R(r)\, f_S(s)\, dr\, ds \qquad (3\text{-}2)$$

Op de oplossing van deze integraal die meestal met numerieke methoden plaatsvindt, wordt later ingegaan.
Het probleem kan ook iets anders worden uitgewerkt.

De bezwijkkans is de kans dat de belasting de sterkte overtreft. Of wiskundig genoteerd:

$S > r_1$ <u>EN</u> $R = r_1$ (S>R)

De kans dat de belasting de waarde r_1 overtreft is gegeven door:

$$P(S > r_1) = \int_{r_1}^{\infty} f_S(s)\, ds$$

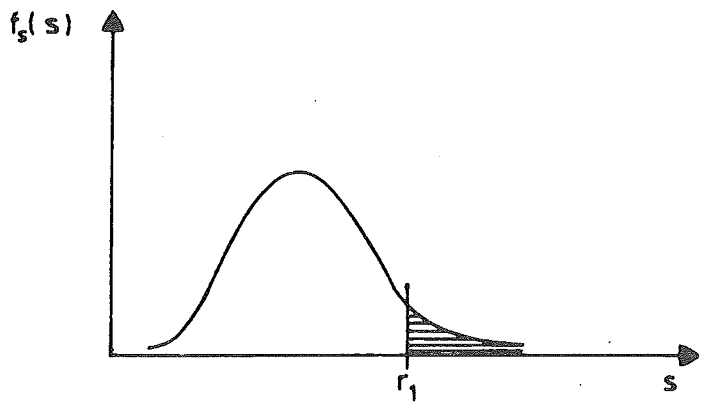
En de kans dat de sterkte juist gelijk is aan r_1:

$$P(R = r_1) = f_R(r_1)\, dr$$

Volgens de basisregels voor EN kansen geldt:

$$P(S > r_1 \text{ EN } R = r) = \int_{r_1}^{\infty} f_S(s)\, ds . f_R(r)\, dr$$

Maar omdat deze redenering van toepassing is voor elke waarde van r_1, dient een integratie over r plaats te vinden.



De overschrijdingskans van de belasting.

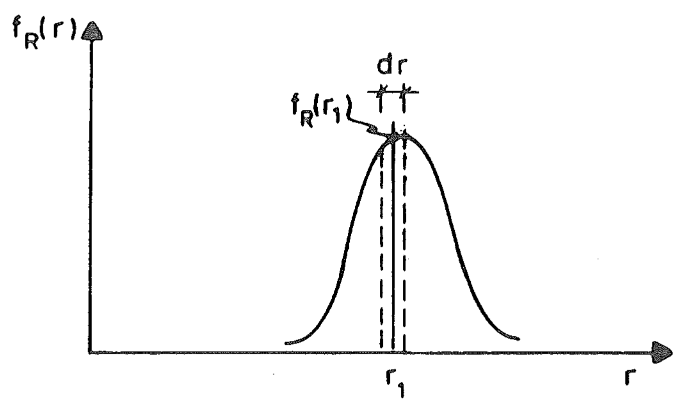


Fig. 3.4 De kansdichtheid van de sterkte.

$$P(R < S) = \int_{o}^{\infty} \int_{r_1}^{\infty} f_S(s)\, ds\, f_R(r)\, dr$$ sterkte $r \geq 0$

Deze integraal, die ook geschreven kan worden als:

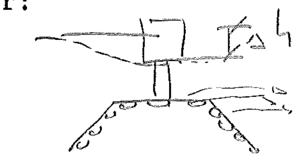
$\int_{r_i}^{\infty} f_s(s)\,ds = 1 - \int_0^{r_i} f_s(s)\,ds = 1 - F_s(r_i)$

$$P(R < S) = \int_0^{\infty} \{1 - F_S(r)\}\, f_R(r)\, dr \qquad (3\text{-}3)$$

staat bekend als de convolutie-integraal. De numerieke uitwerking is eenvoudig uit te voeren volgens standaard procedures.

Voorbeeld

De stortstenen drempel van de stormvloedkering Oosterschelde wordt zwaar belast, indien tijdens een superstorm één der schuiven weigert. Omdat alle schuiven op de weigerende na op de laagwaterkentering gesloten zijn, staat er een groot verval over de kering. En dientengevolge stort het water zich met donderend geweld door de niet afgesloten opening. Daarna stroomt het water met grote snelheid over de stortstenen drempel en tracht die te eroderen.
De overschrijdingslijn van het verval Δh wordt gegeven door:



$$Pr(\Delta h > x) \qquad 1 - F_{\Delta h}(x) = 1 - e^{-\exp \frac{3.77-x}{0,3026}} \qquad \int_x^{\infty} f_s(s)\,ds$$

Volgens de norm van de Deltacommissie ($2,5.10^{-4}$ per jaar) is het ontwerpverval 6.30 m. Met behulp van modelproeven is de stortstenen drempel zo ontworpen, dat hij juist bij een verval van 6.30 m bezwijkt. Bij de vertaling van de modelresultaten naar de werkelijke constructie spelen echter allerlei onzekerheden, zoals schaaleffekten, schematisatiefouten, meetfouten, etc.
Bovendien kunnen in de werkelijke constructie de belangrijkste parameters, zoals b.v. de diameter en de soortelijke massa van de stortsteen enigszins van de ontwerpwaarden afwijken.
Om deze twee redenen wordt de sterkte van de drempel voorgesteld door een normale verdeling met

$$\mu_{\Delta h} = 6,30 \text{ m}$$

$$\sigma_{\Delta h} = 0,75 \text{ m}$$

De bezwijkkans van de drempel is nu met behulp van de convolutie-integraal te bepalen.

$$P_b = \int_0^{\infty} \left[1 - e^{-\exp \frac{3,77-x}{0,3026}}\right] \cdot \frac{1}{0,75\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-6,30}{0,75}\right)^2} dx$$

→ normale verdeling van sterkte drempel

In fig. 3.5 is het verloop van de integrand geschetst tezamen met de overschrijdingslijn van het verval en de k.d.f. van de sterkte. Men ziet, dat bezwijken het meest waarschijnlijk is bij een verval van ~ 4.50 m. Middels een numerieke integratieprocedure is de bezwijkkans berekend op:

$$P_b = 4.10^{-3}$$

Het feit dat de schuif open moet staan wordt aangenomen, de kans dat deze niet werkt is ≈ 10^-3 [illegible] totale kans wordt dus kleiner.

Dit resultaat is enigszins verwarrend, omdat het de overschrijdingskans van het ontwerp~~interval~~ verval ($2,5.10^{-4}$) overtreft. Echter bezwijken kan eerder optreden → 2 onzekerheden: twee kansfuncties (1) de aanbelasting (2) de sterkte. Het ontwerpverval hoeft niet overschreden worden, als de sterkte maar kleiner is → kans op bezwijken >> dan kans op overschrijden ontwerpverval

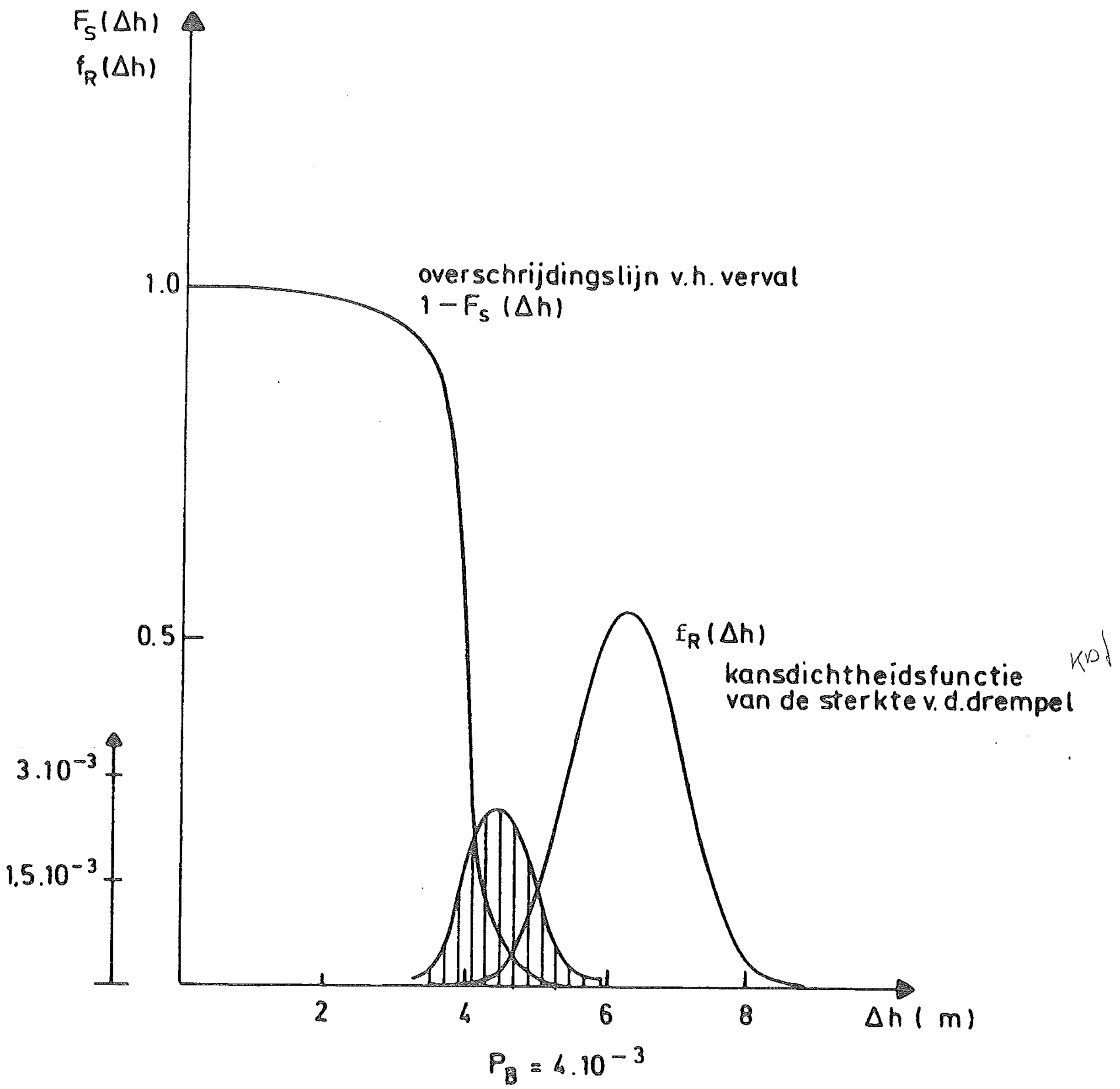


Fig. 3.5 De berekening van de bezwijkkans m.b.v. de convolutie-integraal.

De drempel werd echter zo gedimensioneerd, dat de gemiddelde sterkte het ontwerpverval evenaarde. Het feit, dat de voorkomenskans van een zwakkere drempel aanzienlijk is, weerspiegelt zich in de grootte van de bezwijkkans.
De hierboven aangegeven werkwijze is toepasbaar als de sterkte en de belasting ieder als stochasten bekend zijn.
In een realistisch geval zullen echter zowel de belasting als het draagvermogen uit meerdere variabelen worden afgeleid.
Indien van deze variabelen de k.d.f.'s bekend zijn, kan theoretisch langs de weg van meervoudige integratie de bezwijkkans worden bepaald.

Stel de sterkte is gegeven door:

$$R = R\,(X_1,\ X_2\ \ldots\ldots\ X_m)$$

en de belasting is

$$S = S\,(X_{m+1},\ X_{m+2}\ \ldots\ldots\ X_n)$$

Dan volgt voor de betrouwbaarheidsfunktie:

$$Z = R - S = Z\,(X_1,\ X_2\ \ldots\ldots\ X_n)$$

Als nu bovendien de gezamenlijke k.d.f.'s van de sterkte- en de belastingparameters gegeven zijn:

$$f_R\,(x_1,\ x_2\ \ldots\ldots\ x_m)$$

$$f_S\,(x_{m+1}\ \ldots\ldots\ x_n)$$

dan geldt voor de bezwijkkans (bij onafhankelijkheid van R en S):

$$P_b = \underset{Z<0}{\int\int\int..\int} f_R\,(x_1,\ x_2\ \ldots\ldots\ x_m)\ f_S\,(x_{m+1}\ \ldots\ldots\ x_n)\ dx_1\ dx_2\ \ldots\ldots\ dx_n \tag{3-4}$$

Om deze mathematische oplossing te verduidelijken kiezen we het eenvoudige probleem van een draad belast door een trekkracht. De sterkte van de draad wordt bepaald door de diameter d en de breuksterkte σ volgens:

$$R = \frac{\pi d^2 \sigma}{4}$$

Voor de belasting wordt om het probleem tot twee dimensies te beperken, een deterministisch bekende kracht van 100 kN gekozen.

$$S = 100 \text{ kN}$$

Als betrouwbaarheidsfunktie resulteert nu:

$$Z = R - S = \frac{\pi d^2 \sigma}{4} - S < 0$$

Veronderstel nu verder dat de draaddiameter en de vloeispanning normaal verdeeld zijn met als parameters:

$$\mu_d = 30 \text{ mm} \qquad \sigma_d = 3 \text{ mm}$$

$$\mu_\sigma = 290 \text{ N/mm}^2 \qquad \sigma_\sigma = 25 \text{ N/mm}^2$$

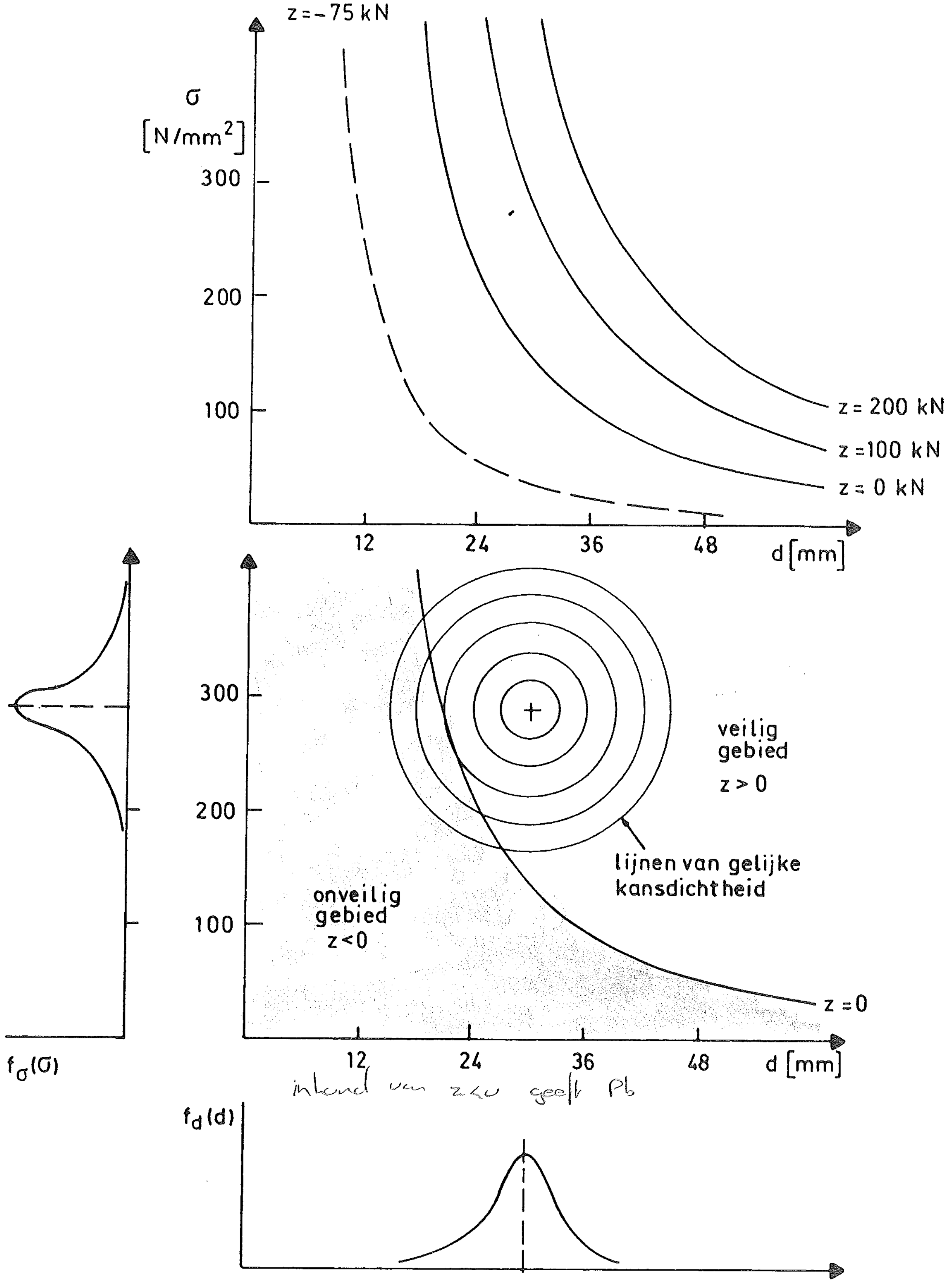


Fig. 3.6 De bepaling van de bezwijkkans van een draad op niveau III.

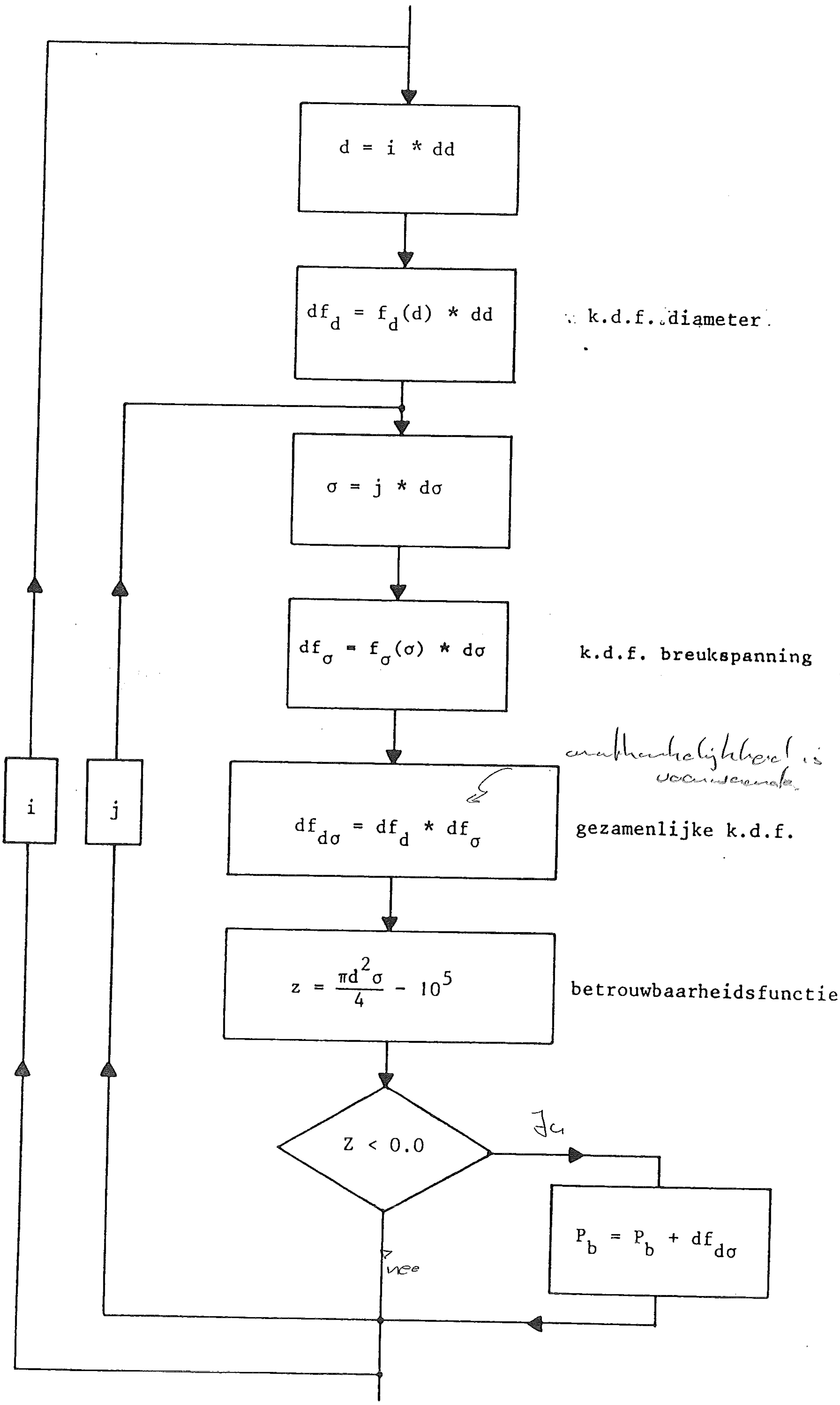


Fig. 3.7 Het stroomdiagram v.d. Riemann procedure.

AANTAL INTEGRATIESTAPPEN =1024

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

BEZWIJKKANS = 2.54545131E-03

$DX = \frac{S}{2}$
NH = 32

5 min

AANTAL INTEGRATIESTAPPEN =4096

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

BEZWIJKKANS = 2.30782781E-03

$DX = \frac{S}{4}$
64

20 min

AANTAL INTEGRATIESTAPPEN =16384

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

BEZWIJKKANS = 2.20691846E-03

$DX = \frac{S}{8}$
128

1 h 20 min

De kansdichtheidsfunktie van S, een Diracfunktie, wordt proforma aangeduid door:

$$f_S(s)$$ (in dit geval 1)

Wanneer de k.d.f.'s van de draaddiameter en de breuksterkte met gebruikmaking van hun statistische onafhankelijkheid worden samengesteld tot een bi-normale verdeling, dan luidt de op te lossen integraal:

$$P_b = \iiint_{Z < 0} f_R(d,\sigma)\, f_S(s)\, dd\, d\sigma\, ds$$

Omdat S een deterministische grootheid is, reduceert de integraal tot

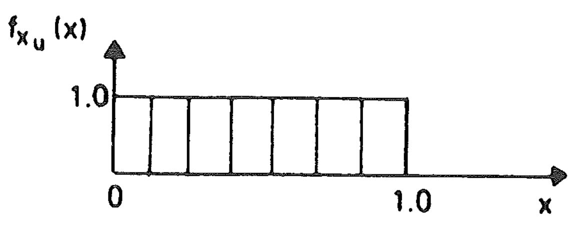
$$P_b = \iint_{Z < 0} f_R\, (d,\sigma)\, dd\, d\sigma$$

Dergelijke meervoudige integralen moeten in het algemeen numeriek worden opgelost.
Met behulp van een Riemann procedure verloopt de integratie eenvoudig volgens het schema gegeven in fig. 3.7.
In het schema is verondersteld, dat de twee basisvariabelen d en σ onafhankelijk zijn. Bij afhankelijkheid van variabelen moet de procedure zo gewijzigd worden, dat de gezamenlijke kansdichtheidsfunktie in de berekening wordt opgenomen.

Het resultaat van de numerieke integratie is in de tabel gegeven.
De stapgrootte is gevarieerd van $\frac{1}{2}\sigma$ tot $1/8\sigma$, hetgeen in dit voorbeeld de uitkomst niet sterk beïnvloedt.
Een formele beschouwing van de nauwkeurigheid van de integratie is mij niet bekend.

Monte Carlo

Een andere berekeningsmethode die tot niveau III gerekend wordt, is de Monte Carlo simulatie. Deze methode maakt gebruik van de mogelijkheid om randomgetallen te trekken uit een uniforme k.d.f., die alle moderne computertalen bieden.
Kansdichtheidsfunktie



Er zijn in principe twee methoden om, gebruikmakend van de uniforme generator, getallen uit een andere verdeling te trekken.
De eerste methode is gebaseerd op de grondslag van de gewenste verdeling.

1) vb: y: $-0{,}67$ $0{,}92$ $1{,}15$ $0{,}21$ $-1{,}61$ $R_i = \sigma \cdot y_i + \mu$

$R = \sigma y + \mu \wedge \sigma = 2 \wedge \mu = 10 \Rightarrow$

2) u: $0{,}66$ $0{,}25$ $0{,}38$ $0{,}95$ $0{,}11$

$F_X = 1/16\,(\xi - 4)^2$

$F_X^{-1} = 4\sqrt{y} + 4$

$X = 4\sqrt{u} + 4 \wedge y$

Door bijvoorbeeld een aantal uitkomsten van een uniforme randomgenerator te sommeren, krijgt men op grond van de centrale limietstelling een normaal verdeelde stochast y.

som v/h aantal uniform verdeelde getallen

$$y = \frac{\{\sum_{i=1}^{N} X_u\} - N/2}{\sqrt{N/12}}$$

↳ gemiddelde.

) standaardafwijking van getallen

waarin X_u = uniform verdeeld $0 < X < 1$

De stochast y volgt een normale verdeling met een gemiddelde 0 en een standaardafwijking 1.
Via een eenvoudige transformatie kan nu een getal met willekeurige μ en σ worden verkregen.

beetje vervormd, daarom omdat y een σ van 1 heeft deze een willekeurige σ kan krijgen

(1) $$X_N = \sigma . y + \mu$$

(2) De tweede methode is gebaseerd op het feit, dat de overschrijdingskans uniform verdeeld is en tussen nul en één ligt.

$$p = F_X(x)$$

In sommige gevallen is het mogelijk x op te lossen uit deze vergelijking.

$$x = F_X^{-1}(p)$$ inverse

Indien men nu voor p een uniform verdeeld getal X_u trekt, volgt X de gewenste verdeling F_X.

↳ $0 < X_u < 1$

$$X_{F_X} = F_X^{-1}\,(X_u)$$

Deze methode is bijvoorbeeld toepasbaar op de extreme verdeling

$$p = e^{-\lambda(x-\mu)}$$

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln p + \mu$$

alle variabelen hebben een zekere verdeling. Door een groot aantal keren deze verschillende variabelen te kombineren en de daarbij behorende uitkomst te bepalen komen we aan een faalkans! (numeriek proces)

De randomgenerator wordt dus

$$X_E = -\frac{1}{\lambda}\ln(X_u) + \mu$$

In vorig geval geldt: $Z = R - S = \frac{\pi d^2 \sigma}{4} - 1 \cdot 10^5$ $\Rightarrow Z < 0$ bezwijken

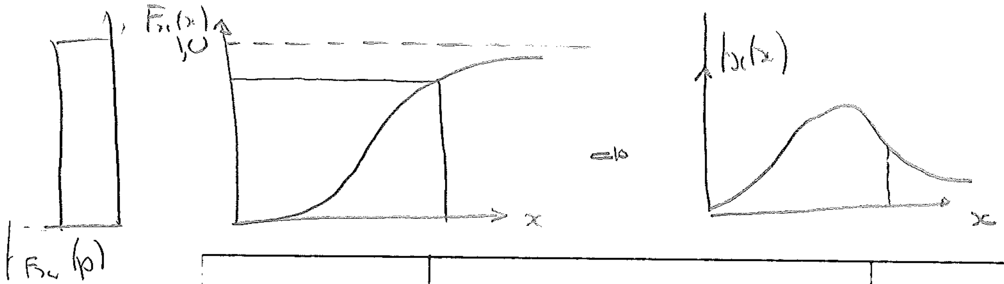
↳ betrouwbaarheidsfunktie.

$\Rightarrow$ variabelen $\sigma \wedge d$ beide met een normaalverdeling.

voor σ: $X_n = 25 \cdot \frac{\{\sum_{i=1}^{N} X_u\} - N/2}{\sqrt{N/12}} + 240$

voor d: $X_n = 3$ " $+ 30$

kombinaties (vermelden) bepalen of $Z < 0$ (bezwijkt) of niet.



verdeling	k.d.f.	procedure
normale verdeling	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)^2}$	$X_n = \sigma\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_u\right) - N/2}{\sqrt{N/12}}\right\} + \mu$
lognormale verdeling	$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\ln x}{\sigma}\right)^2}$	$X_{ln} = e^{\sigma X_n + \mu}$
extreme verdeling	$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda(x-\mu)}$	$X_E = -\frac{1}{\lambda} \ln (X_u) + \mu$
chi kwadraat	$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}\, x^{\gamma/2-1}}{2^{\gamma/2}\, \Gamma(\frac{\gamma}{2})}$	$X_{\chi^2} = \sum_{i=1}^{\gamma} X_n^2$
weibull verdeling	$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$	$X_w = -\alpha\, (\ln(1-X_u))^{\frac{1}{\beta}}$

De kern van de Monte Carlo simulatie is nu dat men voor alle variabelen van de betrouwbaarheidsfunktie een waarde trekt uit de bijbehorende verdelingen.
Voor de getrokken waarden van de variabelen berekent men vervolgens het teken van de betrouwbaarheidsfunktie. Indien deze funktie negatief is, is er sprake van een bezweken exemplaar van de constructie. Door de procedure een groot aantal malen te herhalen is een schatting te geven van de faalkans P_b in de vorm van het quotiënt van het aantal bezweken exemplaren N_b en het aantal simulaties N.

De fout die gemaakt wordt is te schrijven als:

$$\varepsilon = \frac{N_b}{NP_b} - 1$$

$Pb = Nb/N$?

Gemiddeld is deze fout nul en de standaardafwijking is te berekenen als $\sigma(\varepsilon) = \sqrt{(1-P_b)/NP_b}$. Verder heeft ε bij voldoend grote N een normale verdeling (Centrale limietstelling). We eisen nu dat de fout ε met voorgeschreven betrouwbaarheid kleiner is dan een bepaalde waarde E, ofwel:

$$k\ \sigma(\varepsilon) < E$$

X_i kan diverse verdelingen hebben mbv randomgeneratoren

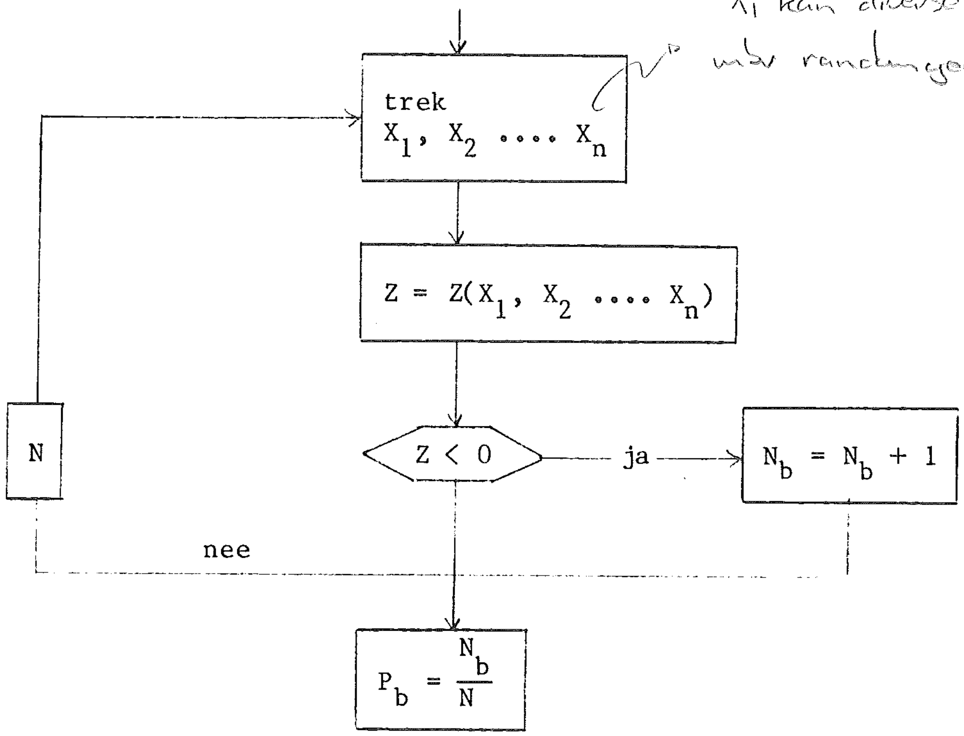
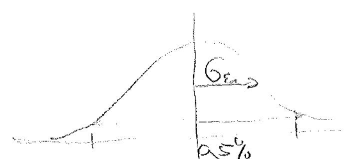


Fig. 3.8 Het stroomschema van de Monte Carlo procedure.

Hieruit volgt voor het aantal simulaties:

$$N > \frac{k^2}{E^2}\left(\frac{1}{P_b} - 1\right) \approx \frac{k^2}{E^2 P_b}$$

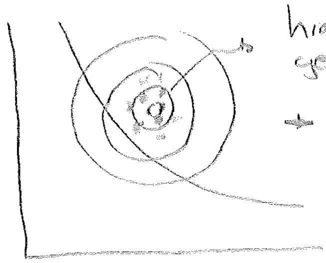


Indien men nu een 95% betrouwbaarheidsinterval eist (k = 2) met een relatieve grootte E = 0,1, dan volgt het benodigd aantal simulaties uit de nagestreefde bezwijkkans.

→ bepaald nauwkeurigheid

$$N > 400 \left(\frac{1}{P_b} - 1\right)$$

Het aantal basisvariabelen, dat in de betrouwbaarheidsfunktie Z voorkomt, speelt dus geen rol. Dit in tegenstelling tot de oplossing van de bezwijkkans door meervoudige integratie.



→ hier worden de meeste gevallen getrokken

→ handelt in dat aantal bezwijken konstrukties een steekproef is

AANTAL EXPERIMENTEN = 10000

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 21

BEZWIJKKANS = 2.1E-03
VARIATIECOEF= .217988641

1,5 h

AANTAL EXPERIMENTEN = 10000

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 21

BEZWIJKKANS = 2.1E-03
VARIATIECOEF= .217988641

1,5

AANTAL EXPERIMENTEN = 10000

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 24

BEZWIJKKANS = 2.4E-03
VARIATIECOEF= .203879049

1,5

AANTAL EXPERIMENTEN = 10000

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 20

BEZWIJKKANS = 2E-03
VARIATIECOEF= .223383079

1,5

AANTAL EXPERIMENTEN = 100000

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 222

BEZWIJKKANS = 2.22E-03
VARIATIECOEF= .0670410658

15 h (?)

belachelijk!
integratie methode 1 h zo min
met zelfde resultaat

Fig. 3.9 Resultaten Monte Carlo analyse van het probleem.

Daar volgt het aantal malen N dat de Z-funktie berekend moet worden, uit:

$$N = i^n$$

waarin i = aantal integratiestappen, dat voor elke variabele gelijk is verondersteld

Indien het probleem dus een groot aantal basisvariabelen kent, is de Monte Carlo procedure de aangewezen weg om de rekentijd te beperken. Doch als het gaat om het berekenen van zeer kleine bezwijkkansen, verdient integratie de voorkeur vanuit het oogpunt van computergebruik.

Teneinde het grote aantal berekeningen, dat een Monte Carlo simulatie vereist, te reduceren, wordt vaak een benaderingsmethode voorgesteld. De essentie van de methode is, dat men het eerste en het tweede moment (μ, σ) van de k.d.f. van Z bepaalt. Daartoe vervangt men in het stroomschema (fig. 3.8) van de Monte Carlo procedure de keuze ($Z < 0$) door een sorteerprocedure, die een histogram van de Z-waarden berekent. Uit het histogram zijn eenvoudig het eerste en tweede moment af te leiden. Het gewijzigde stroomschema ziet er als volgt uit:

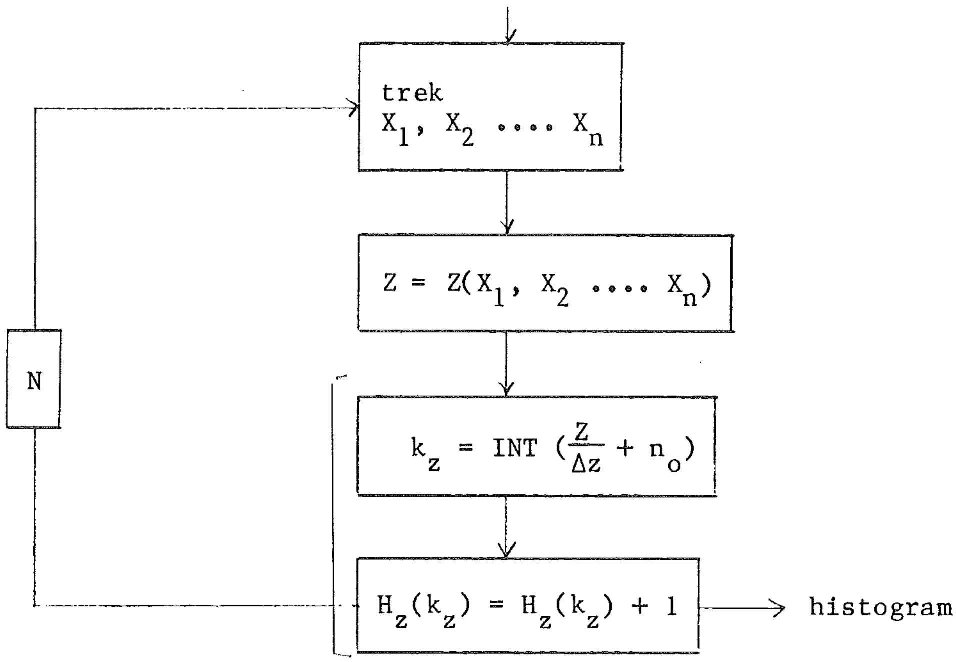


Fig. 3.10 Het stroomschema voor de Monte Carlo procedure met momentenbepaling.

Vervolgens is m.b.v. een veronderstelling omtrent het type van de k.d.f. van Z de bezwijkkans ($Z < 0$) te bepalen.
Zo volgt de bezwijkkans in het geval, dat Z normaal verdeeld is, uit de tabel van de standaard normale verdeling.

normaal:
$\Pr\{u \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\}$

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z}$$

normaal verdeling

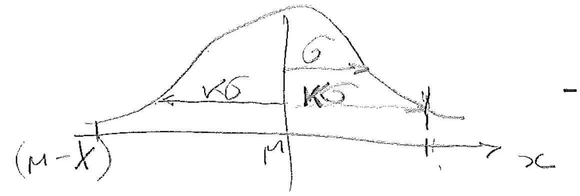
$$P_b = F_N(-\beta)$$

?

we willen .. dat $Z < 0 \rightarrow x = 0$

$\Pr\{u \leq \frac{-\mu}{\sigma}\}$

$\Pr\{u \leq -\beta\}$ zie standaard tabel



Indien er onzekerheid bestaat aangaande het type k.d.f. van Z, dan is de bezwijkkans te bepalen volgens de Chebysev-ongelijkheid.
Deze ongelijkheid luidt:

$$P\ \{\mu\text{-}X\ < k\sigma\} > 1 - \frac{1}{k^2}$$

$P\{\frac{\mu-X}{\sigma} < k\} > 1 - 1/k^2$

Of toegepast op het gestelde probleem:

$$P\{\frac{\mu}{\sigma} > \beta\} < \frac{1}{\beta^2}$$

< Z willekeurig

$-1 + P\{\mu-x < k\sigma\} > -1/k^2$

$1 - P(\mu-x < k\sigma) < 1/k^2$

$P(\mu-x > k\sigma) < 1/k^2$

$P(\frac{\mu-x}{\sigma} > k) < 1/k^2$

Het zal duidelijk zijn dat op deze wijze een ruime bovengrens wordt gevonden.

$\beta = \frac{\mu}{\sigma}$

$\mu = \beta\sigma$

β	Gauss	Chebysev
1	0,15	1,0
2	0,024	0,25
3	0,002	0,11

Bij toepassing van de geschetste methode op het probleem van fig. 3.6 kan het aantal simulaties beperkter zijn dan bij de klassieke Monte Carlo benadering.
In de figuren 3.11 tot 3.14 zijn de resultaten gegeven bij 100 en 1000 simulaties. Duidelijk is te zien, dat het resultaat van de Monte Carlo benadering een kansverschijnsel is.
De waarde van β bedraagt ongeveer 2,30. Indien men nu veronderstelt, hetgeen in dit geval onjuist is, dat Z normaal verdeeld is, kan de bezwijkkans eenvoudig worden bepaald d.m.v. tabel I:

$$P_b = 1.10^{-2}$$

$P\{\mu/\sigma > 2{,}30\} \approx 1{,}1\ 10^{-2}$ blz 2-19.

Zonder dat een veronderstelling omtrent de vorm van de verdeling nodig is, kan men op grond van de Chebychev ongelijkheid zeggen, dat:

$$P_b < \frac{1}{\beta^2} = 0{,}19$$

Bij vergelijking van deze resultaten met eerder verkregen exacte antwoorden, blijken beide benaderingen een bovengrens op te leveren.
Van de Chebychev ongelijkheid was dat te verwachten.
De benadering door de normale verdeling geeft een bovengrens omdat de werkelijke kansdichtheidsfunktie van Z scheef naar rechts is. De kansmassa aan de linkerzijde is daardoor minder dan bij een symmetrische kansdichtheidsfunktie.

zelfde beginwaarden
andere random getallen

AANTAL EXPERIMENTEN = 100

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

K	Z	HZ
0	-175000	0
1	-125000	0
2	-75000	0
3	-25000	0
4	25000	10
5	75000	39
6	125000	36
7	175000	12
8	225000	3
9	275000	0
10	325000	0
11	375000	0
12	425000	0
13	475000	0
14	525000	0
15	575000	0

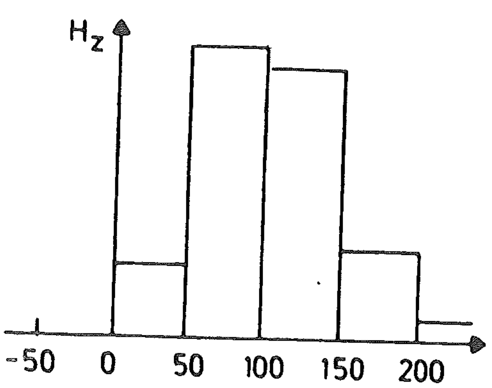
AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 0
BETA = 2.25121953

AANTAL EXPERIMENTEN = 100

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

K	Z	HZ
0	-175000	0
1	-125000	0
2	-75000	0
3	-25000	0
4	25000	8
5	75000	36
6	125000	43
7	175000	9
8	225000	3
9	275000	1
10	325000	0
11	375000	0
12	425000	0
13	475000	0
14	525000	0
15	575000	0

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 0
BETA = 2.3232523



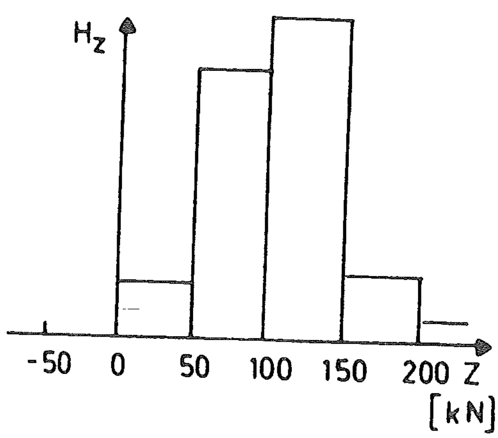


Fig. 3.11 Histogram van de Z funktie bepaald m.b.v. Monte Carlo simulatie.

AANTAL EXPERIMENTEN = 100

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

K	Z	HZ
0	-87500	0
1	-62500	0
2	-37500	0
3	-12500	0
4	12500	1
5	37500	6
6	62500	13
7	87500	28
8	112500	18
9	137500	15
10	162500	14
11	187500	4
12	212500	1
13	237500	0
14	262500	0
15.	287500	0

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 0
BETA = 2.63461748

AANTAL EXPERIMENTEN = 100

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

K	Z	HZ
0	-87500	0
1	-62500	0
2	-37500	0
3	-12500	0
4	12500	1
5	37500	10
6	62500	19
7	87500	17
8	112500	19
9	137500	16
10	162500	6
11	187500	3
12	212500	5
13	237500	4
14	262500	0
15	287500	0

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 0
BETA = 2.0773464

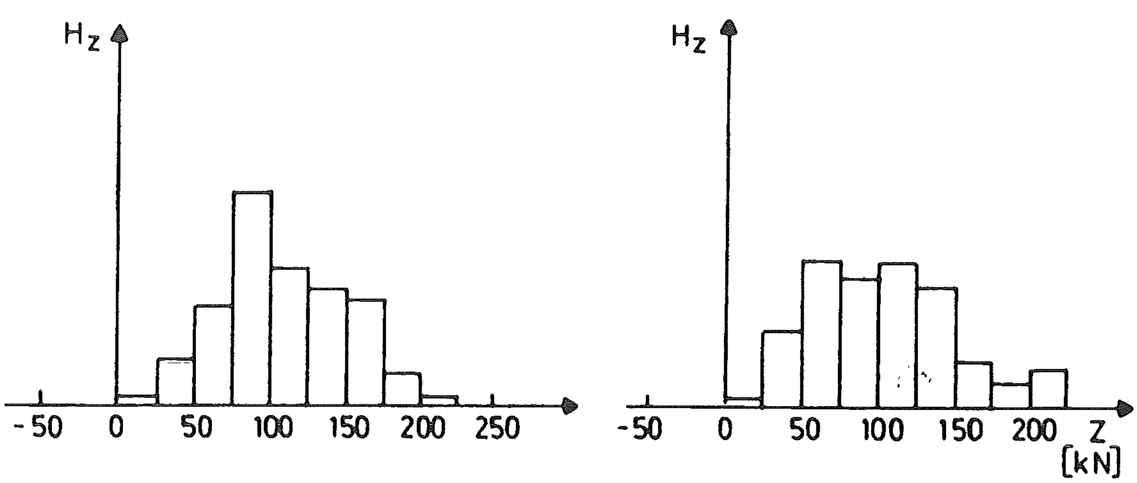


Fig. 3.12 De bepaling van het histogram van de Z-funtie m.b.v. Monte Carlo simulatie.

AANTAL EXPERIMENTEN = 1000

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

K	Z	HZ
0	-87500	0
1	-62500	0
2	-37500	0
3	-12500	2
4	12500	17
5	37500	71
6	62500	149
7	87500	229
8	112500	202
9	137500	162
10	162500	90
11	187500	48
12	212500	17
13	237500	9
14	262500	2
15	287500	2

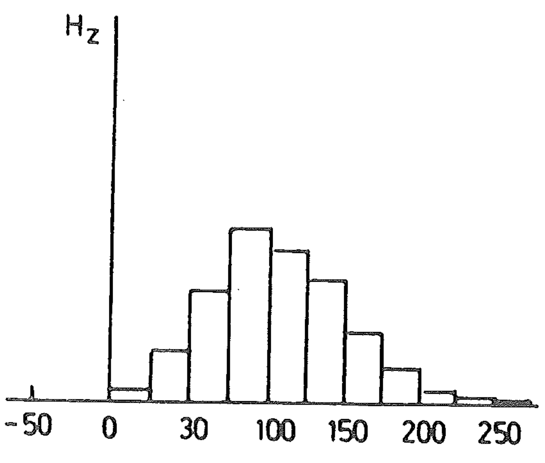
AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 2
BETA = 2.34625909

AANTAL EXPERIMENTEN = 1000

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

K	Z	HZ
0	-87500	0
1	-62500	0
2	-37500	0
3	-12500	0
4	12500	22
5	37500	72
6	62500	165
7	87500	207
8	112500	209
9	137500	166
10	162500	94
11	187500	42
12	212500	16
13	237500	5
14	262500	2
15	287500	0

AANTAL BEZWIJKGEVALLEN = 0
BETA = 2.3805203



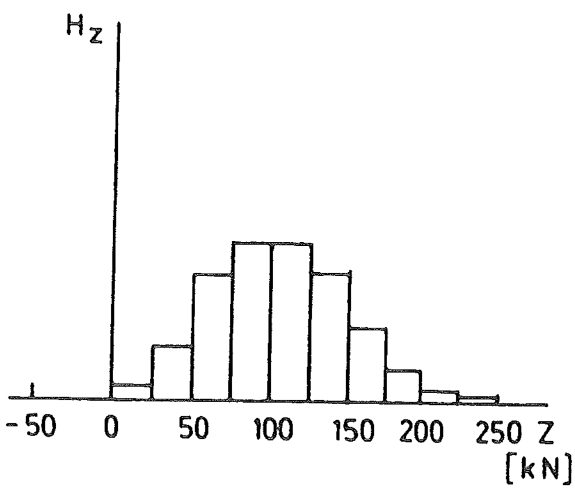


Fig. 3.13 De bepaling van het histogram van de Z-funktie m.b.v. Monte Carlo simulatie.

AANTAL INTEGRATIESTAPPEN =1024

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

BEZWIJKKANS = 2.54545131E-03

K	Z	HZ
1	-62500	3.98808047E-07
2	-37500	8.83405103E-05
3	-12500	2.4567119E-03
4	12500	.0198736073
5	37500	.0631188372
6	62500	.147683525
7	87500	.23219212
8	112500	.233492999
9	137500	.135861768
10	162500	.0883288902
11	187500	.0470269441
12	212500	.0194544602
13	237500	7.47951811E-03
14	262500	2.24344249E-03
15	287500	6.75597298E-04

BETA = 2.37317819

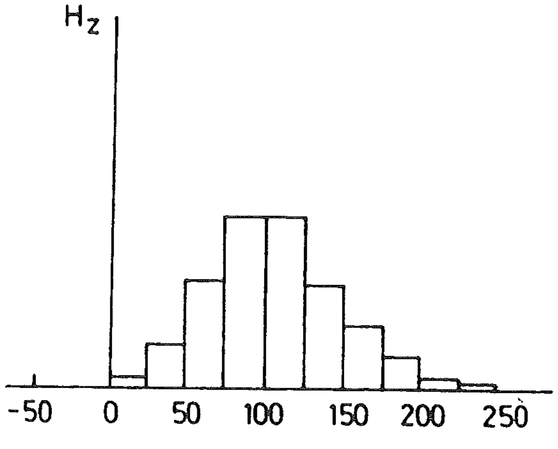
AANTAL INTEGRATIESTAPPEN =4096

X(I)	M(I)	S(I)	V(I)
SI	290	25	1
D	30	3	1

BEZWIJKKANS = 2.30782781E-03

K	Z	HZ
1	-62500	4.85091418E-07
2	-37500	8.09671999E-05
3	-12500	2.22637544E-03
4	12500	.0188349916
5	37500	.0675152656
6	62500	.153476028
7	87500	.228649121
8	112500	.210292162
9	137500	.145954653
10	162500	.102341719
11	187500	.0432668277
12	212500	.0183174299
13	237500	5.81837733E-03
14	262500	2.38304228E-03
15	287500	8.28264833E-04

BETA = 2.36534556



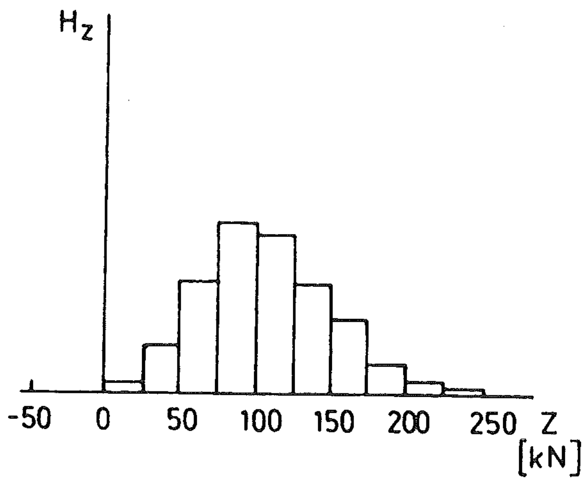


Fig. 3.14 De bepaling van het histogram van de Z-funktie m.b.v. de integratie methode.

Het is uiteraard ook mogelijk het stroomschema van de integratiemethode uit te breiden met de bepaling van het histogram van Z.
De integratiemethode levert dan niet alleen een bezwijkkans als resultaat, maar tevens het histogram dat de kansdichtheidsfunktie van Z benadert. Dit laatste resultaat kan van belang zijn als men niet zozeer geïnteresseerd is in de bezwijkkans van de constructie, als wel in de kansdichtheidsfunktie van de belasting of de kansdichtheidsfunktie van de sterkte.
In de praktijk komt het voor dat de kansdichtheidsfunktie van de belasting als een gegeven beschouwd wordt, terwijl men gedurende het ontwerpproces met de k.d.f. van de sterkte manipuleert (zie het voorbeeld van de drempel van de S.V.K.O.).
Teneinde dit te bereiken voert men alleen de basisvariabelen van die kant van het probleem, waarin men geïnteresseerd is, als stochasten in.
De overige variabelen worden als deterministisch beschouwd.
De berekende k.d.f. van Z is dan de verschoven k.d.f. van sterkte of belasting.

Het rekenvoorbeeld is in dit opzicht een goede illustratie omdat de belasting S = 100 kN een deterministische grootheid is. De k.d.f. van Z is dus in dit geval gelijk aan de k.d.f. van de sterkte die over een afstand van 100 kN verschoven is (zie fig. 3.14):

$$f_R(r) = f_Z\ (r - 100)$$

3.3 Berekeningen op niveau II

TENTAMENSTOF.

De niveau II berekeningen hebben de laatste jaren een grote vlucht genomen. De reden daarvan is, dat zij in tegenstelling tot de niveau III methoden praktisch toepasbaar zijn.
Een tweede reden is, dat zij inzicht verschaffen in de bijdragen van de diverse basisvariabelen in de bezwijkkans van de constructie.
De niveau III methoden verschaffen dit inzicht niet.
De niveau II berekeningen staan ook wel bekend als eerste orde - tweede moment methoden, omdat zij op een eerste orde benadering van de bezwijkgrens zijn gebaseerd.
Op niveau II maakt men weer onderscheid tussen drie hoofdklassen van methoden:

1. gemiddelde waarde - eerste orde - tweede moment methoden
2. verfijnde - eerste orde - tweede moment methoden
3. methoden, die gebruik maken van benaderende kansdichtheidsfunkties

In deze paragraaf zullen de drie klassen van methoden achtereenvolgens aan de orde worden gesteld.

De eerste variant (mean value approach) is eenvoudig te begrijpen en erg instruktief, maar helaas niet erg betrouwbaar.
De methode gaat uit van de reeds gedefinieerde bezwijkgrens:

$$Z = R - S = 0$$

$$= Z(X_1, X_2 \ldots . X_n) = 0$$

De funktie Z laat zich nu met behulp van reeksontwikkeling, lineairiseren rond een punt $\vec{X}^*(X_1^*, X_2^* \;\ldots\; X_n^*)$.

$$Z \quad Z(X_1^*, X_2^* \;\ldots\; X_n^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial X_i} (X_i - X_i^*) \;\ldots \qquad (3\text{-}5)$$

Voert men deze lineairisatie uit rond het gemiddelde van $\vec{X}$, dan kan worden afgeleid dat: Bewijs?

$$\mu_Z = Z(\mu_{X_1} \;\ldots\; \mu_{X_n}) \qquad (3\text{-}6)$$

$$\sigma_Z = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial X_i}\right)^2 \sigma_{X_i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3\text{-}7)$$

De kans, dat $Z < 0$ is nu gemakkelijk te benaderen door de waarde van de betrouwbaarheidsindex β op te zoeken in een tabel van de normale verdeling.

Ter illustratie een toepassing van de methode op het probleem van de draad.

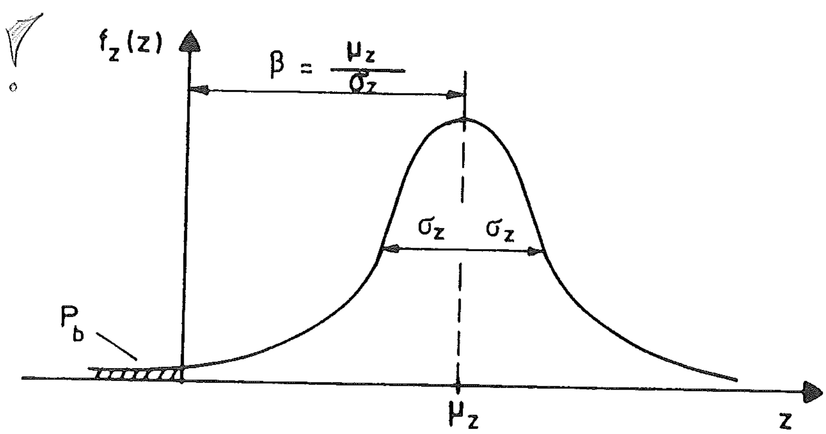


Fig. 3.15 De bepaling van de bezwijkkans m.b.v. de betrouwbaarheidsindex.

$$Z = \frac{\pi d^2 \sigma}{4} - S$$

$$\mu_Z = \frac{\pi \mu_d^2 \mu_\sigma}{4} - S = \frac{\pi . 30^2 . 290}{4} - 100.000 = 104.988,9 \text{ N}$$

Vervolgens moeten de afgeleiden van Z bepaald worden in het punt (μ_d, μ_σ).

gewogen
gevoeligheidsgetal

$\frac{\partial Z}{\partial X_i}$	σ_i	$\frac{\partial Z}{\partial X_i} \cdot \sigma_i$	$(\frac{\partial Z}{\partial X_i} \cdot \sigma_i)^2$	%
$\frac{\partial Z}{\partial \sigma} = \frac{\pi d^2}{4} = 706.9$ ($\pi \cdot 30^2/4$)	25	17671,5	$312,3 \cdot 10^6$	16%
$\frac{\partial Z}{\partial d} = \frac{\pi d \sigma}{2} = 13665.9$	3	40997,8	$1680 \cdot 10^6$ +	84% +
			$1993,1 \cdot 10^6$	100%

α_i met het zelfde teken als $\delta Z/\delta x_i$ hebben

$$\sigma_Z = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial Z}{\partial X_i}\right)^2 \cdot \sigma_{X_i}^{2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 44.644,2$$

$\sqrt{1993,1 \cdot 10^6}$

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = 2,35$$

Uit de tabel van de normale verdeling volgt nu:

$$P_b \approx 10^{-2}$$

Bij deze benadering is het gekromde Z-vlak

$$Z = \frac{\pi d^2 \sigma}{4} - S$$

vervangen door een vlak volgens de Taylorreeks-ontwikkeling

$$Z = Z(\mu_\sigma, \mu_d) + \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \{\sigma - \mu_\sigma\} + \frac{\partial Z}{\partial d} \{d - \mu_d\}$$

Of na substitutie van de getalwaarden

$$Z = 104.988,9 + 706,9\ (\sigma - 290) + 13665,7\ (d - 30)$$

$$\boxed{Z = -\ 509.983,1 + 706,9\ \sigma + 13665,7\ d}$$

In het punt (μ_σ, μ_d) is de waarde van het benaderende Z-vlak juist gelijk aan het echte.

$$Z = -\ 509.983,1 + 706,9 \cdot 290 + 13665,7 \cdot 30$$

$$= 104.998,9$$

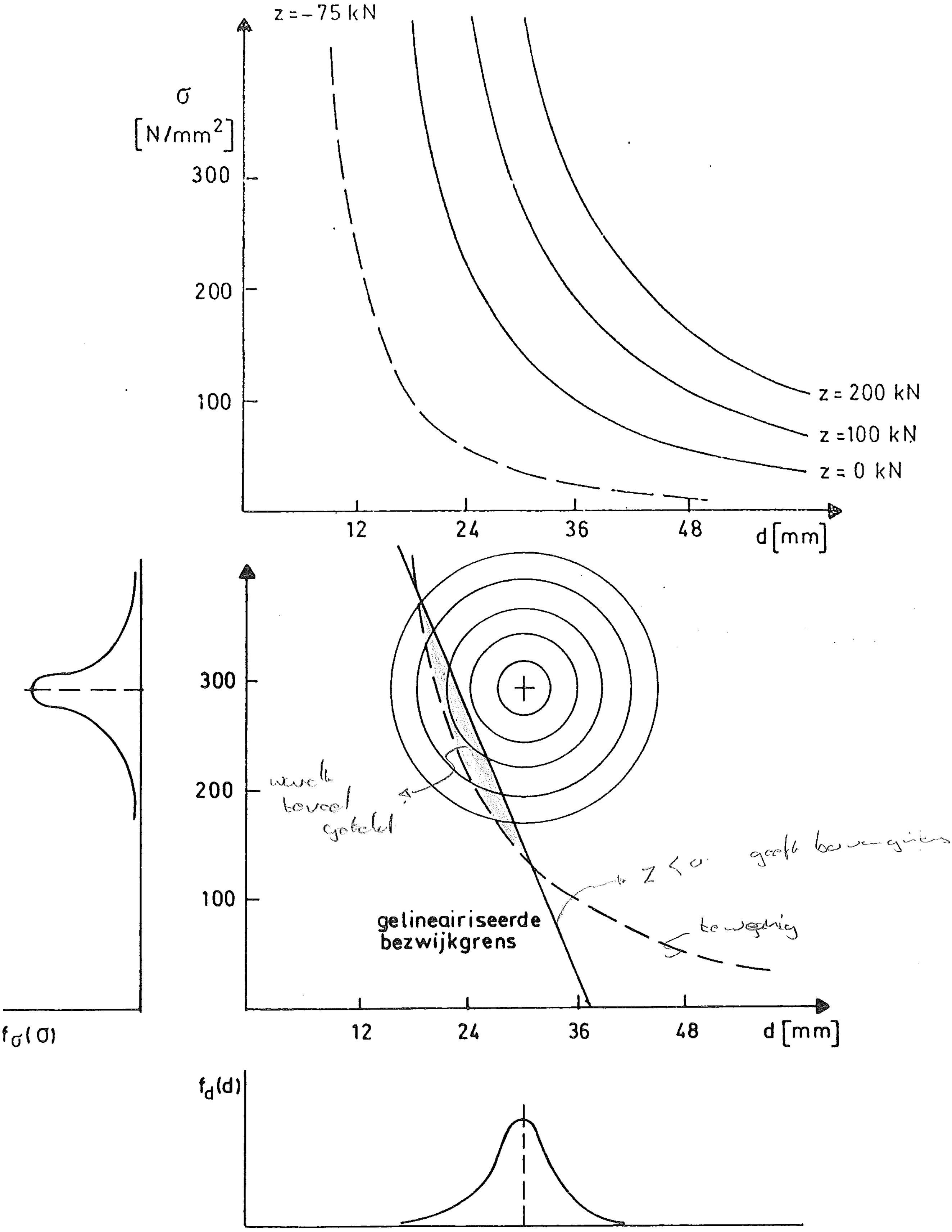


Fig. 3.16 Niveau II benadering, gemiddelde waarde variant.

Hieruit volgt:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{148,5}{37,76} = 3,93$$

Bij deze waarde van β behoort volgens de tabel van de normale verdeling een bezwijkkans

$$P_b = 0,45.10^{-4}$$

Teneinde het verschil te verklaren onderzoeken we de gelineairiseerde bezwijkgrens

$$Z = 148,5 + 1,9\ (\sigma - 290) + 9,43\ (d - 30) = 0$$

$$= -\ 424,4 + \sigma + 9,43\ d = 0$$

Het resultaat verschilt inderdaad van de eerder gevonden uitdrukking. Het schetsen van de bezwijkgrens in het σ, d vlak levert fig. 3.17. Nu onderschat de gelineairiseerde bezwijkgrens het onveilige gebied t.p.v. de grootste kansdichtheid. De gevonden waarde van de bezwijkkans is dan ook te laag vergeleken met de exacte $P_b = 2,2\ 10^{-3}$.
Hoewel uit de twee voorbeelden al blijkt, dat de gemiddelde waarde - eerste orde - tweede moment benadering ten eerste onnauwkeurig is en ten tweede niet invariant is bij eenvoudige transformaties van de bezwijkgrens, verdient de methode toch enige aandacht.

Niet alleen is de gemiddelde waarde methode als enige geschikt voor een eenvoudige handberekening, maar ook geeft zij een goed inzicht in het karakter van de Niveau II berekeningen.
Men zou dat karakter kunnen omschrijven als een <u>gewogen gevoeligheidsanalyse</u>.

De gevoeligheid van de oplossing Z = 0 voor een kleine variatie in de waarde van een variabele wordt formeel vastgesteld door partiële differentiatie. Daarna vindt een weging plaats met de mate van onzekerheid van de variabele gesymboliseerd door de standaardafwijking.
Het resultaat is een in procenten gegeven bijdrage van elke variabele aan de totale onzekerheid.
In feite voert een goede ontwerper een dergelijke procedure meestal uit, zij het op intuïtieve gronden.
Het constructieve probleem overziende, voert hij voor de variabelen die hij niet goed kent én voor de variabelen, die hij bepalend acht voor de oplossing van het probleem, eens een hogere en lagere waarde in om de gevoeligheid van de oplossing te bepalen.

De gemiddelde waarde methode is eigenlijk een standaardprocedure voor deze handelwijze van de ervaren ontwerper.
Maar als middel om de bezwijkkans van een mechanisme te bepalen kan zij de toets der kritiek niet doorstaan.

Gelukkig zijn in klasse 2 van Niveau II verfijndere methode beschikbaar. De verbetering bestaat hieruit, dat men tracht de funktie Z te lineairiseren rond het punt van de bezwijkgrens Z = 0 met de hoogste kansdichtheid $\bar{X}^*$.

Punt met hoogste kansdichtheid (= kleinste straal)

$\Rightarrow$ minimaliseer $\beta^2 = \sum \left(\frac{\mu_i - x_i}{\sigma_i}\right)^2 \wedge z(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$

transformeer: $X_i = x_i/\sigma_i$

$\beta^2 = \sum \left(\frac{\mu_i}{\sigma_i} - X_i\right)^2 \qquad z = (x_1\sigma_1, \sigma_2 x_2, \dots, x_n\sigma_n) = 0$

Stel een eerste benadering van de nog onbekende gelineairiseerde bezwijkgrens is

$$Z \approx Z\,(X_1^*,\ X_2^* \ \dots\ X_n^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial X_i}(X_i - X^*) = \underline{\underline{0}} \qquad (3\text{-}8)$$

waarin $\frac{\partial Z}{\partial X_i}$ wordt berekend in $(X_1^*,\ X_2^* \ \dots\ X_n^*)$

In tegenstelling tot de vorige benadering is nu:

$$\mu_Z = Z\,(X_1^*,\ X_2^* \ \dots\ X_n^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial X_i}(\mu_{X_i} - X_i^*) \qquad (3\text{-}9)$$

en $$\sigma_Z = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial X_i}\right)^2 \cdot \sigma_{X_i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3\text{-}10)$$

De laatste betrekking wordt nu uitgedrukt in een lineaire funktie van de standaardafwijkingen

$$\sigma_Z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial Z}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \qquad (3\text{-}11)$$

waarin

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial Z}{\partial X_i} \cdot \sigma_{X_i}}{\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial X_j}\right)^2 \cdot \sigma_{X_j}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \qquad \sigma_Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Z}{\partial x_j}\right)^2 \sigma_{x_j}^2}} = \qquad (3\text{-}12)$$

Nu wetend dat het punt $\vec{X}^*$ op de bezwijkgrens moet liggen, zou moeten gelden:

$$Z = Z\,(X_1^*,\ X_2^* \ \dots\ X_n^*) = 0$$

$\mu_Z = \underbrace{z(X_1^*, X_2^*, \dots X_n^*)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\mu_{x_i} - x_i^*)$

Hieruit volgt:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mu_{X_i} - X_i^*) \frac{\partial Z}{\partial X_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial Z}{\partial X_i} \cdot \sigma_{X_i}} \qquad (3\text{-}13)$$

$\sum_{i=1}^{n} (\mu_{x_i} - x_i^*)\, \cancel{\partial Z/\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta \alpha_i \cancel{\frac{\partial Z}{\partial x_i}} \sigma_{x_i}$

$\sum_{i=1}^{n} \mu_{x_i} - \beta \alpha_i \sigma_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i^*$

De oplossing van deze vergelijking geeft een nieuwe schatting voor $\vec{X}^*$ dat gewoonlijk het ontwerppunt wordt genoemd.

$$X_i^* = \mu_{X_i} - \alpha_i \beta\, \sigma_{X_i} \quad \text{voor alle i} \qquad (3\text{-}14)$$

De waarden van de partiële afgeleiden werden echter in het oude punt bepaald.
Een herhaling van de procedure is daarom noodzakelijk totdat een stabiele waarde voor het ontwerppunt $\vec{X}^*$ gevonden is. iteratief proces

Bij formule (3-13) voor β is verondersteld dat $Z^* = 0$; die was nodig om (3-14) te kunnen afleiden. Zolang het juiste design point nog niet gevonden is zal echter $Z^* \neq 0$ zijn. Willen we een zo goed mogelijke schatting voor β dan moeten we daarmee dus rekening houden:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{Z(\vec{X}^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial x_i} \{\mu_{X_i} - X_i^*\}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} \sigma_{X_i}} \qquad (3\text{-}15)$$

De gehele procedure moet nu herhaald worden voor een nieuwe $\vec{X}^*$ gebaseerd op deze nieuwe waarde van β.
De correcte oplossing wordt dus d.m.v. een iteratie-procedure gevonden.
Een goede methode bestaat uit de volgende stappen:

1. Schat een waarde voor β
2. Stel $X_i^* = \mu_{X_i}$ voor alle i
3. Bereken $\frac{\partial Z}{\partial X_i}$ voor alle i in $\vec{X} = \vec{X}^*$
4. Bereken α_i voor alle i (3-12)
5. Bereken de nieuwe waarden voor $\vec{X}^*$ (3-14)
6. Herhaal de stappen 3 t/m 5 totdat een stabiele waarde voor $\vec{X}^*$ is gevonden
7. Bereken $Z = (X_1^*, X_2^* \dots X_n^*)$
8. Pas indien nodig β aan (3-15), opdat $Z = 0$ en herhaal de stappen 3 t/m 5
9. Bepaal de bezwijkkans uit $P_b = 1 - \phi_N(-\beta)$

Een stroomschema, waarin deze volgorde van stappen is geschetst, wordt gegeven in fig. 3.18.

Wanneer we de verfijnde - eerste orde - tweede moment methode toepassen op het probleem van de draad met onzekere diameter en breukspanning, volgt als oplossing een waarde voor β en daarmee een waarde voor de bezwijkkans (zie fig. 3.19):

$\beta = 2{,}87$

$P_b = 2{,}10.10^{-3}$

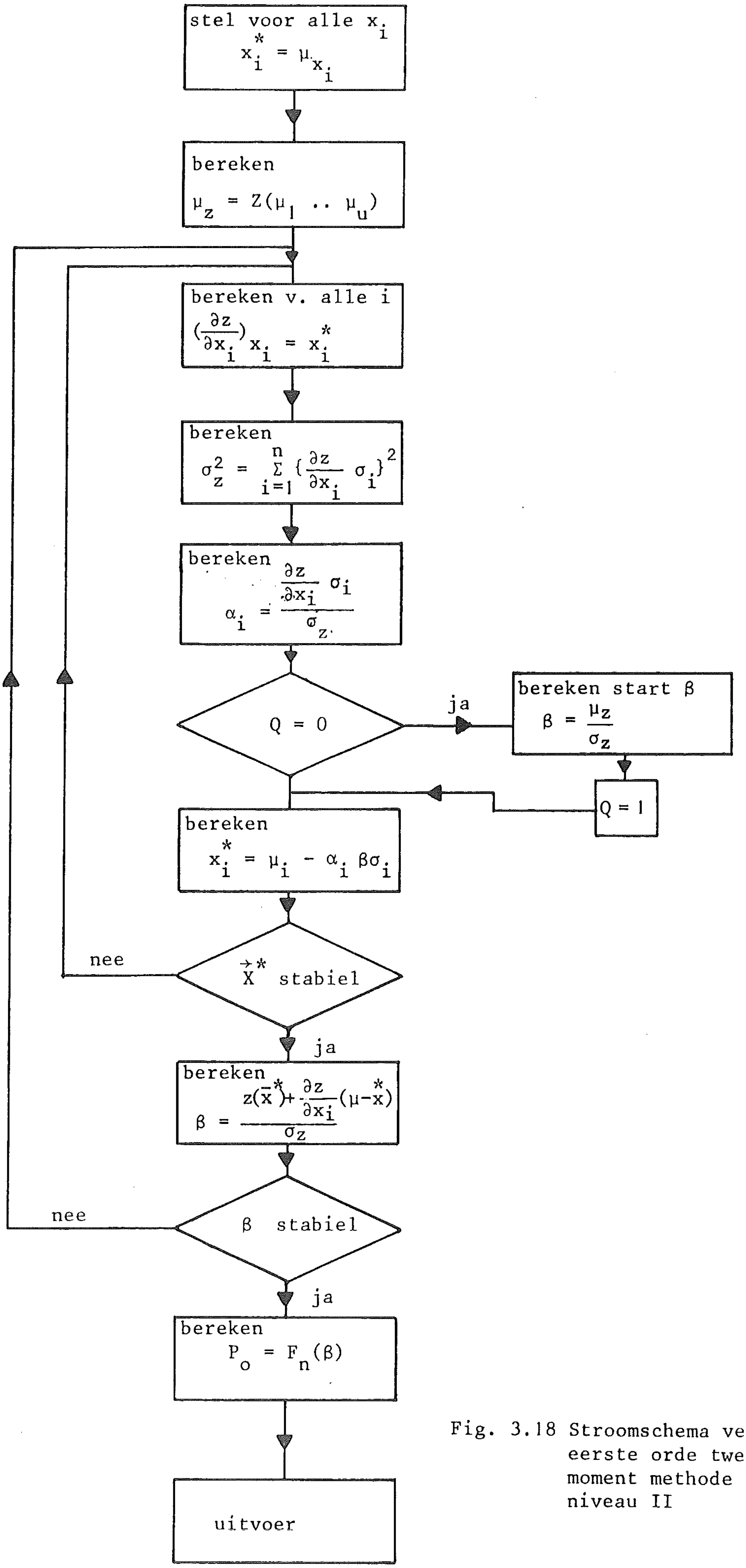


Fig. 3.18 Stroomschema verfijnde eerste orde tweede moment methode op niveau II

Het valt op, dat de gevonden bezwijkkans iets kleiner is dan de exacte waarde $2,2.10^{-3}$ uit de vorige paragraaf.
Het ontwerppunt is eveneens een resultaat van de berekening.

$$\sigma^* = 266,81 \text{ N/mm}^2$$

$$d^* = 21,85 \text{ mm}$$

Substitutie van deze waarden in de betrouwbaarheidsfunktie toont aan, dat het punt inderdaad op de bezwijkgrens gelegen is.

$$Z = \frac{\pi d^2 \sigma}{4} - 100.000 =$$

$$= 100044,88 - 100.000 \approx 0$$

De gelineairiseerde bezwijkgrens wordt m.b.v. de Taylorreeks-ontwikkeling gevonden.

$$Z = Z(\vec{X}^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial X_i} (X_i - X_i^*)$$

Volgens de resultaten van fig. 3.19 geldt dus

$$Z = \frac{\partial Z}{\partial \sigma} (\sigma - \sigma^*) + \frac{\partial Z}{\partial d} (d - d^*) = 0$$

$$= 374,9 \; (\sigma - 266,81) + 9154,6 \; (d - 21,85)$$

$$= -\; 300.054,2 + 374,9 \; \sigma + 9154,6 \; d$$

$$\boxed{Z = -\; 800,4 + \sigma + 24,4 \; d = 0}$$

Deze lijn verschilt van de bij de gemiddelde waarde methode gevonden rechte. Een schets van de gelineairiseerde bezwijkgrens is gegeven in fig. 3-20.

Duidelijk is te zien dat de rechte in het ontwerppunt de echte bezwijkgrens raakt. Daardoor wijkt de berekende bezwijkgrens minder af van de op niveau III bepaalde waarde. Het verschil is eenvoudig te verklaren. Door de lineairisering van de bezwijkgrens wordt een deel van het onveilige gebied niet in de integratie betrokken. De berekende bezwijkkans is dus te klein.

De betrouwbaarheidsfunktie

$$Z = \frac{\pi d^2 \sigma}{4} - 100.000$$

Gemiddelde waarde methode

```
←BETA = 2.35170203
BEZWIJKKANS = 9.37165555E-03
```

	X(I)	Z'(I)	SI(I)	
SI	290	705.86	25	.155
D	30	13565.771	3	.947

Verfijnde methode

```
DEF. BETA = 2.87220867
BEZWIJKKANS = 2.04559124E-03
```

	X(I)	Z'(I)	SI(I)	
SI	266.809	374.877	25	.104
D	21.845	9154.551	3	.995

TEL-Z = 36

Fig. 3.19 Resultaten van een Niveau II benadering van het probleem.

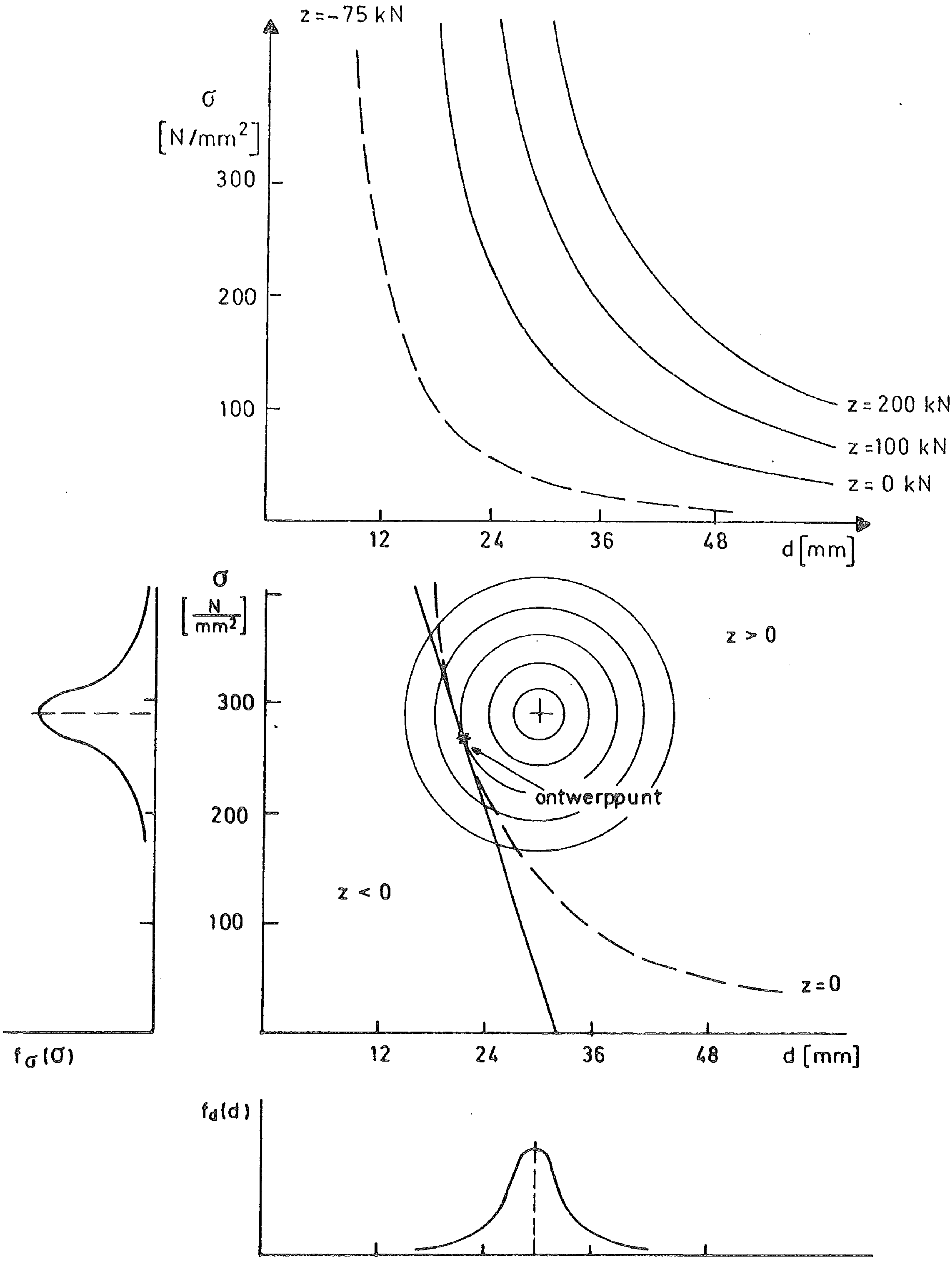


Fig. 3.20 Niveau II benadering verfijnde variant.

De betrouwbaarheidsfunktie

$$Z = \sigma - \frac{4.100.000}{\pi d^2}$$

Gemiddele waarde methode

←BETA = 3.9338233
BEZWIJKKANS = 4.2007922EE-05 — veranderd.

	X(I)	X'(I)	SI(I)	
SI	290	1	25	.438
D	30	9.431	3	.561

Verfijnde methode

DEF. BETA = 2.8722111B
BEZWIJKKANS = 2.045675E-03 → invariant

	X(I)	X'(I)	SI(I)	
SI	266.91	1	25	.103
D	21.94	24.539	3	.896

TEL-Z = 57

Fig. 3.21 Resultaten van een Niveau II benadering van het probleem andere formulering van de Z-funktie.

Het is interessant de verfijnde methode te beproeven op de uitdrukking voor de betrouwbaarheidsfunktie waarmede werd aangetoond dat de gemiddelde waarde methode niet invariant is voor de schrijfwijze van de Z-funktie.

$$Z = \sigma - \frac{4 \cdot 100.000}{\pi d^2}$$

Het berekeningsresultaat is in fig. 3.21 gegeven. De waarden van β en de bezwijkkans zijn nu gelijk aan de reeds gevonden waarden.
En het valt op dat de partiële afgeleiden dezelfde waarden hebben als de richtingscoëfficiënten van de gelineairiseerde bezwijkgrens.
De verfijnde methode is dus invariant voor de schrijfwijze van $Z(X_1, X_2 \ldots . X_n)$.

Het meest verfijnde type van de niveau II berekeningen (klasse 3) houdt ook nog rekening met de verdelingsfunktie, die elke basisvariabele heeft. Dat is noodzakelijk, omdat veel praktische problemen variabelen bevatten, die niet normaal verdeeld zijn.
Bij wijze van voorbeeld kan men extreme waterstanden noemen, die vaak een Gumbel of een extreme verdeling volgen.
De essentie van de niveau II-klasse 3 berekeningen is nu dat de exacte verdeling van de basisvariabele via een normale verdeling zodanig benaderd wordt, dat overschrijdingskans én kansdichtheid in het ontwerppunt voor de exacte en de benaderende verdeling gelijk zijn.
In de grafiek van de verdelingsfunktie betekent dat, dat in het ontwerppunt de funktiewaarde én de richting voor de exacte en voor de benaderende verdeling gelijk zijn (zie fig. 3.22).
Mathematisch gezien vindt de aanpassing van de normale verdeling aan de exacte verdeling als volgt plaats.
Bepaal de overschrijdingskans van de ontwerpwaarde X_i^* van de basisvariabele:

$$P = F_E\ (X_i^*) \qquad (3\text{-}16)$$

extreme verdeling

Met behulp van de inverse normale verdeling stelt men nu vast hoeveel malen de standaardafwijking het gemiddelde $\mu_N(X_i)$ van de benaderende normale verdeling van de ontwerpwaarde verwijderd moet zijn.

$$k = F_N^{-1}\ (P) \qquad (3\text{-}17)$$

inverse normale verdeling

Kans is dus gelijk voor $F_N(k) = F_E(X_i^*)$

Uit een vergelijking van de kansdichtheden (richtingen) volgt de standaardafwijking.

$$\sigma_N(X_i) = \frac{f_N(k)}{f_E(X_i^*)} \qquad (3\text{-}18)$$

De waarde van het gemiddelde van de benaderende verdeling ligt nu vast volgens

$$\mu_N(X_i) = X_i^* - k.\sigma_N(X_i) \qquad (3\text{-}19)$$

In het stroomschema van de verfijnde methode kan een fase worden toegevoegd, waarin telkens voor een nieuwe waarde van het ontwerppunt voor de niet normaal verdeelde variabelen de benaderende μ en σ wordt vastgesteld.

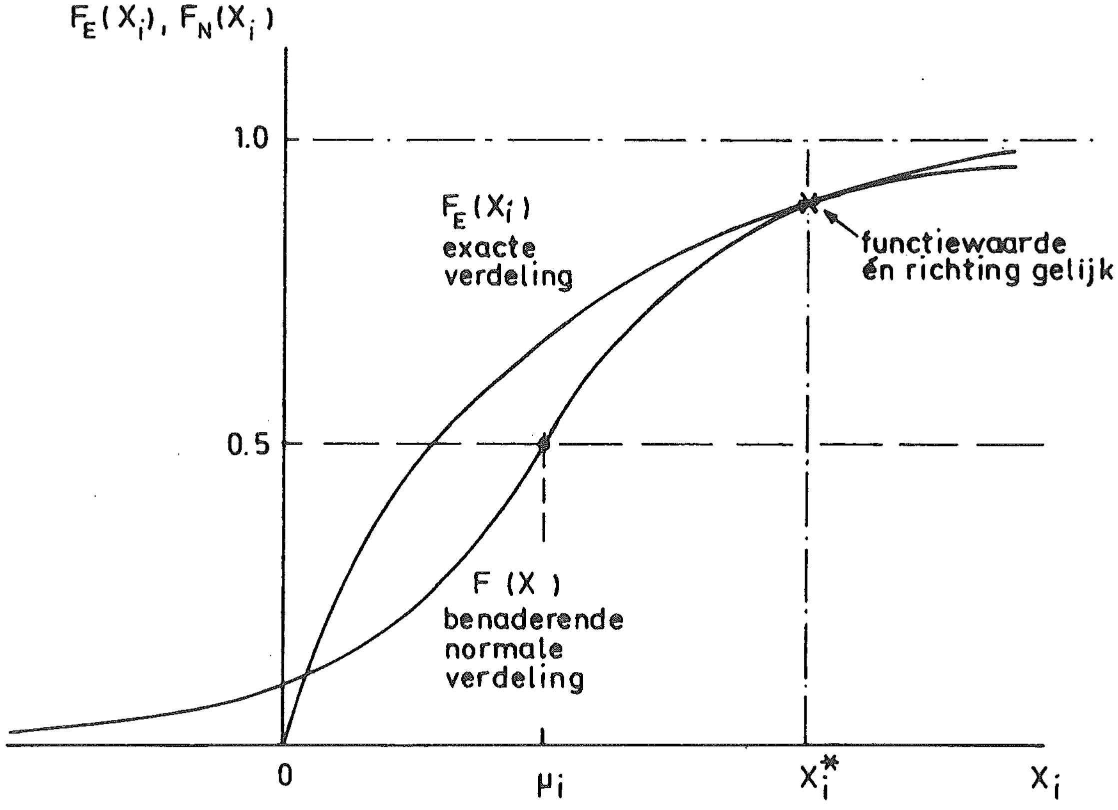


Fig. 3.22 Berekening op Niveau II die gebruik maakt van van benaderende normale verdelingen.

Voorbeeld

Op een groot waterbouwkundig werk stond men voor het probleem dat de zandbodem van een getijarm gefixeerd moest worden, tijdens een bouwfase.
De "1 x per jaar stroomsnelheid" bedroeg 2,50 m/s zodat het van nature aanwezige zand van 200 µm diameter niet stabiel was.
Men besloot nu ter fixatie van de zandbodem een afdeklaag van grind aan te brengen.

De dimensionering van deze afdeklaag vond plaats met behulp van de bekende formule van Shields.

$$\psi = \frac{\bar{v}^2}{C^2 \Delta\, D_{50}}$$

waarin

$\bar{v}$ = gem snelheid m/s
C = constante van Chezy
Δ = $\frac{\rho_w}{\rho_{st}} - 1$
D_{50} = mediaan van de diameter-verdeling

Daartoe voerde men in deze formule de volgende redelijke getalwaarden in

v = 2,50 m/s
C = 60
Δ = 1,6
ψ = 0,04

Het resultaat was een benodigde diameter van

D_{50} = 0,027 m = 27 mm

Op grond van hetgeen tot nu toe in hoofdstuk 3 uiteengezet is, mag men bij een dergelijke dimensionering op grond van gemiddelde waarden een bezwijkkans van 50% verwachten.

En inderdaad spoelde in werkelijkheid delen van de afdeklaag weg.
De noodzaak tot het toepassen van een veiligheidscoëfficiënt was gebleken. Bij gebrek aan kennis hieromtrent besloot met te dimensioneren met een Niveau II methode.

De invoergegevens:

	μ	σ
v	2,50	0,25
C	60	10
Δ	1,6	0,032
ψ	0,04	0,004
D_{50}	0,059	0,003

D gekozen waarde ?!

In feite ← $\gamma = \frac{D_{nieuw}}{D_{oud}} \approx 2$ 59/27

Een eerste controle met de mean value variant van het Niveau II berekening leidt tot de volgende tabel.

De betrouwbaarheidsfunktie

$$Z = \Delta\, D_{50} - \frac{\bar{v}^2}{C^2 \psi} \qquad \mu_Z = 0{,}0509 \qquad \beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{0{,}0509}{0{,}0182} \simeq 2{,}8$$

X_i	$\frac{\partial Z}{\partial X_i}$	σ_{X_i}	$\frac{\partial Z}{\partial X_i}\, \sigma_{X_i}$	$\{\frac{\partial Z}{\partial X_i}\, \sigma_{X_i}\}^2$	α_i^2
Δ	$\frac{\partial Z}{\partial \Delta} = D_{50} = 0{,}059$	0,032	$1{,}88\ 10^{-3}$	$3{,}56\ 10^{-6}$	1%
D_{50}	$\frac{\partial Z}{\partial D_{50}} = \Delta = 1{,}60$	0,003	$4{,}8\ 10^{-3}$	$2{,}30\ 10^{-5}$	7%
$\bar{v}$	$\frac{\partial Z}{\partial v} = - \frac{2v}{C^2 \psi} = 0{,}035$	0,25	$8{,}75\ 10^{-3}$	$7{,}66\ 10^{-5}$	23%
C	$\frac{\partial Z}{\partial c} = \frac{2v^2}{C^3 \psi} = 1{,}45.10^{-3}$	10	$1{,}45\ 10^{-2}$	$2{,}10\ 10^{-4}$	63%
ψ	$\frac{\partial Z}{\partial \psi} = \frac{v^2}{C^2 \psi^2} = 1{,}085$	0,004	$4{,}34\ 10^{-3}$	$1{,}88\ 10^{-5}$ ========== +	6% ====
				$\sigma_Z^2 = 3{,}32\ 10^{-4}$	100%
				$\boxed{\sigma_Z = 0{,}0182}$	

	SSS	MC	Niv II
aantal variab.	—	+	0.
nauwkeurigh	+	+/—	0
rekentijd	M^n	100/Pf	matig
Z discontinu	+	+	—
$f_x(x)$	+	+	—
inzicht	—	—	+
analyt.	+	+	—/+

Shields benadering

$$Z = \Delta \; D_{50} - \frac{\bar{v}^{2}}{C^{2}\psi}$$

Gemiddelde waarde methode

BETA = 2.80683759
BEZWIJKKANS = 2.51055068E-03

	X(I)	Z'(I)	SI(I)	
DEL	1.6	.059	.032	.01
D50	.059	1.599	3E-03	.069
U	2.5	-.035	.25	.228
C	60	1E-03	10	.634
PSI	.04	1.085	4E-03	.057

Verfijnde methode

DEF. BETA = 1.74245449
BEZWIJKKANS = .0407567064

	X(I)	Z'(I)	SI(I)	
DEL	1.597	.058	.032	1E-03
D50	.058	1.597	3E-03	.01
U	2.662	-.071	.25	.139
C	44.359	4E-03	10	.805
PSI	.038	2.423	4E-03	.042

TEL-Z = 125

Fig. 3.23 Berekening van de bezwijkkans van een granulaire afdeklaag onder stroomaanval.

3.4 Berekeningen op niveau I

3.4.1 Algemeen

Berekeningen die gebaseerd zijn op het concept van de veiligheidsfactor worden algemeen aangeduid als berekeningen op niveau I.
Aan de hand van het portaal van figuur 3.24 zal worden nagegaan wat deze berekeningsmethode inhoudt en welke ontwikkelingen er, met name via bouwvoorschriften, gaande zijn.

De TGB-1955 (TGB = Technische Grondslagen voor de berekening van Bouwconstructies) was gebaseerd op het concept van de toelaatbare spanningen. Met behulp van de elasticiteitstheorie worden daarbij de buigende momenten in de meeste kritieke doorsneden berekend. Vervolgens wordt geeist dat dit moment kleiner is dan het product van weerstandsmoment en toelaatbare spanning. De veiligheid is bij een dergelijke procedure ondergebracht aan de sterktekant en men spreekt daarom van Resistance Factor Design (RFD). $R/\gamma \leqslant S$

Volgens de TGB 1972 worden sterkteberekeningen uitgevoerd op basis van uiterste draagkracht. Geeist wordt dat onder een γ-voudige belasting de grenstoestand van bezwijken niet wordt bereikt. De veiligheid is nu dus helemaal ondergebracht aan de belastingkant en er is sprake van een Load Factor Design (LFD). $R \leqslant \gamma S$

De beoordeling van de veiligheid kan plaats hebben op elementniveau en op de constructieniveau. In het eerste geval bepaalt men het belastingseffekt van de γ-voudige belasting in elk element (in dit geval het moment) en vergelijkt dat met de elementsterkte (het volplastisch moment of breukmoment). In het tweede geval toont men aan dat de constructie als geheel bestand is tegen de γ-voudige belasting. De overgang van RFD naar LFD opent dus de mogelijkheid voor bezwijkanalystische beschouwingen, zowel voor het element als voor het systeem. Op die manier is het mogelijk de extra veiligheid door plastische herverdeling bij statisch onbepaalde constructies in rekening te brengen. Ook wordt een betere basis gelegd voor de beoordeling van geometrisch niet-lineaire problemen, zoals bijvoorbeeld de knikstaaf.

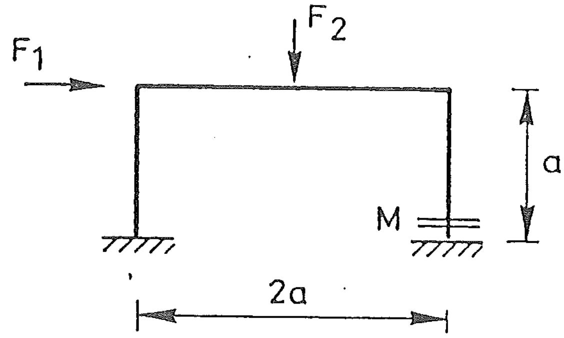
In de TGB 1972 wordt ook het begrip karakteristieke waarde geïntroduceerd. De karakteristieke waarde van een sterkte- of belastingsgrootheid is een waarde die wordt vastgelegd middels de kansdichtheidsfunktie van de grootheid. Voor sterkteparameters als vloeigrens of kubusdruksterkte kiest men een waarde die hoort bij een 2 of 5% overschrijdingskans:

$$R_{kar} = \mu(R) - k\,\sigma(R) \qquad (3\text{-}20)$$

Bij een normale verdeling en een 5% onderschrijdingskans is $k = 1.64$.
Voor belastingen kiest men meestal een waarde die gemiddeld eens in de n jaar wordt overschreden: bijvoorbeeld de 100-jaars-golf of de 50-jaars windsnelheid. De vloerbelasting daarentegen is weer een belasting met een kleine kans van overschrijding in de levensduur. Naar analogie van (3-20) kan men schrijven:

eigenbelasting heeft grote zekerheid

windbelasting grote onzekerheid



gaat het uiterste vezel σ_p.

RFD: $M = c_1aF_1 + c_2aF_2 \leq \overline{W}\overline{\sigma} = W\dfrac{\sigma_p}{\gamma}$ σ_p

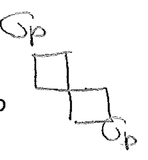
ISO 2394

γ_m verdisconteert:

- afwijking van karakteristieke waarde
- onzekerheden rekenmodel
- spreiding in maatvoering
- verschil proef-constructie

LFD: op elementniveau:

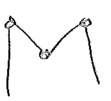
$$M = c_1a\gamma F_1 + c_2a\gamma F_2 \leq W_p\sigma_p$$



op constructieniveau:

bezwijkmechanisme

$$c_1'a\gamma F_1 + c_2'a\gamma F_2 \leq \Sigma\, c_i'W_{pi}\sigma_p$$



γ_f:

- onzekerheden rekenmodel
- afwijkingen van karakteristieke waarde.

LRFD: op elementniveau:

$$M = c_1a\gamma_1F_1 + c_2a\gamma_2F_2 \leq \frac{1}{\gamma_m}W_p\sigma_p$$

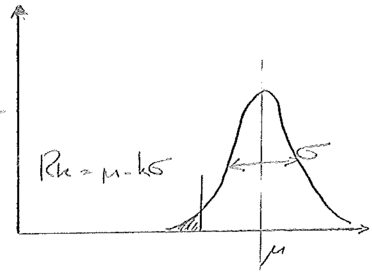
op constructieniveau:

$$c_1'a\gamma_1F_1 + c_2'a\gamma_2F_2 \leq \Sigma\,\frac{1}{\gamma_m}c_i'W_{pi}\sigma_p$$

Fig. 3.24 Overzicht van Resistance Factor Design en Load and Resistance Factor Design.

Karakteristieke sterkte

Bij belasting andersom.



$$S_{kar} = \mu(S) - k\,\sigma(S) \qquad (3\text{-}21)$$

Bij belasting is de waarde van k in absolute zijn veelal kleiner dan bij sterkte; meestal is k negatief, waardoor $S_{kar} > \mu(S)$, soms echter zelfs positief!

Het nieuw element in de komende TGB 1985 is de invoering van partiële veiligheidsfactoren: iedere belastingsbron krijgt zijn eigen belastingsfactor en iedere materiaal zijn materiaalfactor (zie figuur 3.24). Men spreekt daarom van een Load and Resistance Factor Design (LRFD). De grootte van iedere partiële factor hangt af van de onzekerheden die met de betreffende grootheid samenhangen. De partiële factor voor eigen gewicht bijvoorbeeld kan kleiner zijn dan die voor wind, die voor staal kleiner dan die voor hout.

De basisuitdrukking voor een veiligheidsbeschouwing met partiële veiligheidsfactoren wordt gegeven door:

$$S_{kar} \cdot \gamma_s \cdot \gamma_c \leq \frac{R_{kar}}{\gamma_m} \qquad (3\text{-}22)$$

Volgens ISO 2394 wordt γ_s opgesplitst in 3 factoren en γ_c en γ_m in elk 2 factoren. Achtereenvolgens hebben deze factoren de volgende funktie:

- γ_{s_1} houdt rekening met de mogelijkheid van een ongunstige afwijking van de belastingen ten opzichte van de karakteristieke belastingen.
- γ_{s_2} houdt rekening met de onwaarschijnlijkheid, dat verschillende belastingen, die gezamenlijk op de constructie werken, tegelijkertijd hun karakteristieke waarde bereiken.
- γ_{s_3} is bedoeld om rekening te houden met mogelijke ongunstige effecten van onjuiste ontwerpveronderstellingen en van kleine uitvoeringsfouten zoals de toevallige scheefstand en excentriciteit van kolommen.
- γ_{m_1} is bedoeld om de mogelijke reductie in sterkte van de in de constructie verwerkte materialen t.o.v. de karakteristieke sterkte, die werd afgeleid uit proefstukken, te dekken.
- γ_{m_2} dekt mogelijke zwakheden in de constructie, die het gevolg zijn van andere oorzaken, dan de hierboven genoemde reductie in materiaalsterkte.
- γ_{c_1} houdt rekening met de aard van de constructie en haar gedrag bij bezwijken (b.v. bezwijken zonder waarschuwing, geen herverdeling van krachten of voortgaand bezwijken).
- γ_{c_2} houdt rekening met de ernst van de situatie die het gevolg is van het bereiken van de bezwijktoestand.

Toen het concept van de partiële veiligheidsfactoren ruim 10 jaar geleden internationaal werd geïntroduceerd, is aanvankelijk gedacht aan een geheel op zichzelf staande methode. De laatste jaren, met name sinds 1978, wordt er echter steeds meer naar gestreefd de getalwaarden voor de partiële veiligheidsfactoren te onderbouwen met probabilistische niveau II berekeningen. Langs die weg zijn de voorschriften één van de belangrijkste toepassingsgebieden geworden van de probabilistische veiligheidsbeschouwing.

3.4.2 Koppeling tussen niveau I en niveau II

De sleutel tot de relatie tussen de niveau's I en II is het design point. Het design point kan omschreven worden als dat punt op de "failure boundary" waar de kansdichtheid van R en S maximaal is (fig. 3.25).
Met andere woorden, indien een constructie bezwijkt, dan is de kans groot dat sterkte R en belasting S dicht bij de design point waarden R^* en S^* liggen. Een probabilistische geïnspireerde ontwerpeis wordt- derhalve gegeven door:

$$R^* > S^* \tag{3-23}$$

Onder wijziging naar hoofdstuk 3.3 worden R^* en S^* gegeven door:
verfijnde MV. methode

$$\alpha_r = \frac{dZ/dR\,\sigma_R}{\sigma_Z} \qquad \alpha_s = \frac{dZ/dS\,\sigma_S}{\sigma_Z}$$

$$R^* = \mu(R) - \alpha_R \beta\sigma(R) \tag{3-24a}$$

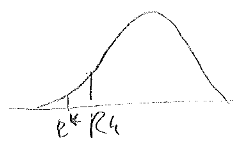
$$S^* = \mu(S) - \alpha_S \beta\sigma(S) \tag{3-24b}$$

Vergelijken wij (3-24) met (3-22) voor het standaardgeval dat $\gamma_c = 1$, dan volgt dat de relatie tussen niveau I en II gegeven wordt door:

$R^* < R_{kar}$ $\qquad S^* > S_{kar}$

$R^* = S^*$ in design punt

$$\gamma_m = R_{kar}/R^* \quad ; \quad \gamma_S = S^*/S_{kar} \tag{3-25}$$



Door de formules voor de karakteristieke waarden en de design-point- waarden in te vullen, kan dit worden uitgewerkt tot:
spreiding zie 3.14

$$V_r = \frac{\sigma_r}{\mu_r}$$

$$\gamma_m = \frac{1-kV_R}{1-\alpha_R \beta V_R} \qquad \gamma_S = \frac{1-\alpha_S \beta V_S}{1-kV_S} \tag{3-26}$$

In het algemeen zal een partiële factor groter zijn naarmate:

a) de invloedscoëfficiënt α groter is;
b) het gewenste betrouwbaarheidsniveau β hoger ligt;
c) de onzekerheid V groter is.

De factor (1-kV) corrigeert hierop het deel van de veiligheid dat reeds is ondergebracht bij de karakteristieke waarde.

De formules (3-26) bevatten de invloedscoëfficiënten α_R en α_S. Gemakkelijk valt na te gaan dat voor Z = R - S geldt:

$$\alpha_R = \sigma_R/\sigma_Z \text{ en } \alpha_S = -\sigma_S/\sigma_Z \text{ met } \sigma_Z = \sqrt{\{\sigma_R^2 + \sigma_S^2\}} \tag{3-27}$$

Het probleem is dat α_R (en daarmee γ_R) via σ_Z afhankelijk is van σ_S en dat α_S (en daarmee γ_S) afhankelijk is van σ_R.
Het is dus helaas niet mogelijk om belastingsfactoren te maken die onafhankelijk zijn van de spreiding in de sterkte en omgekeerd. Hierop wordt teruggekomen in 3.4.3.

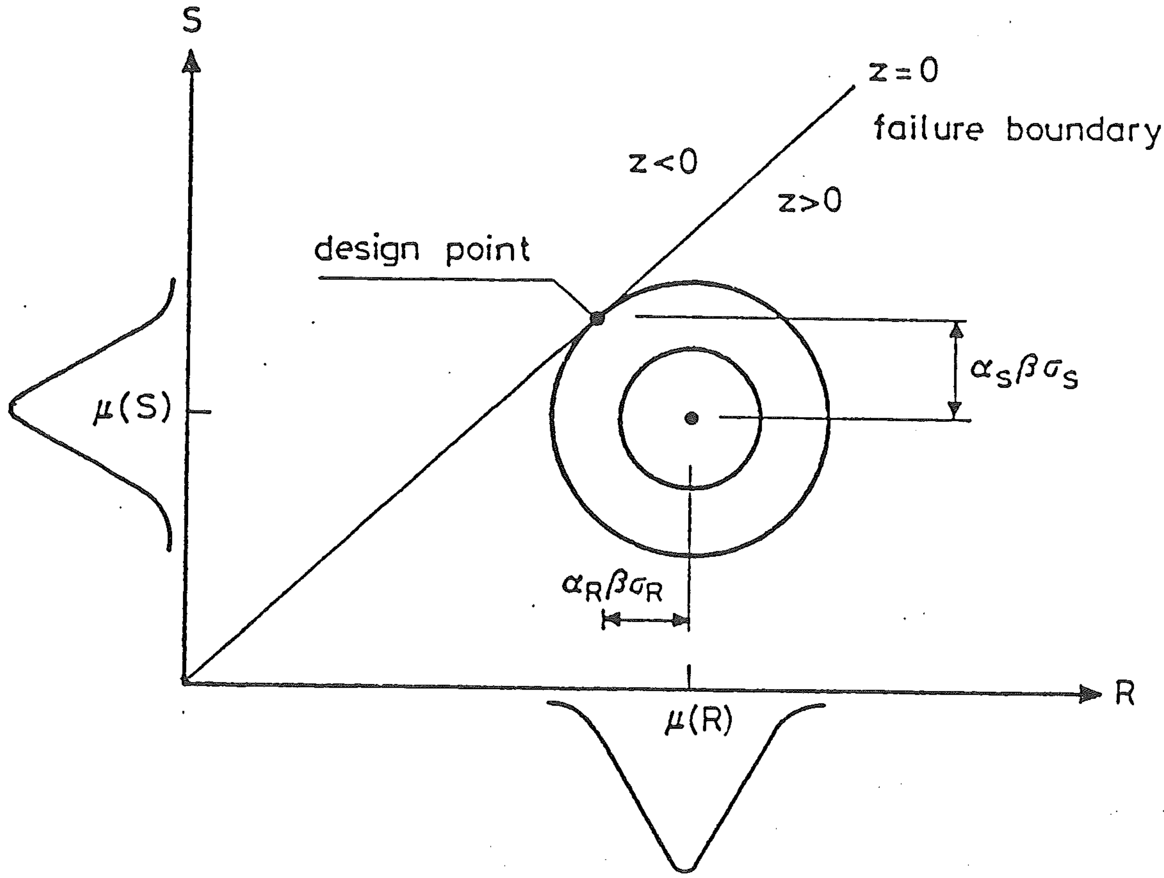


Fig. 3.25 Locatie van het design point op de failure boundary Z = 0.

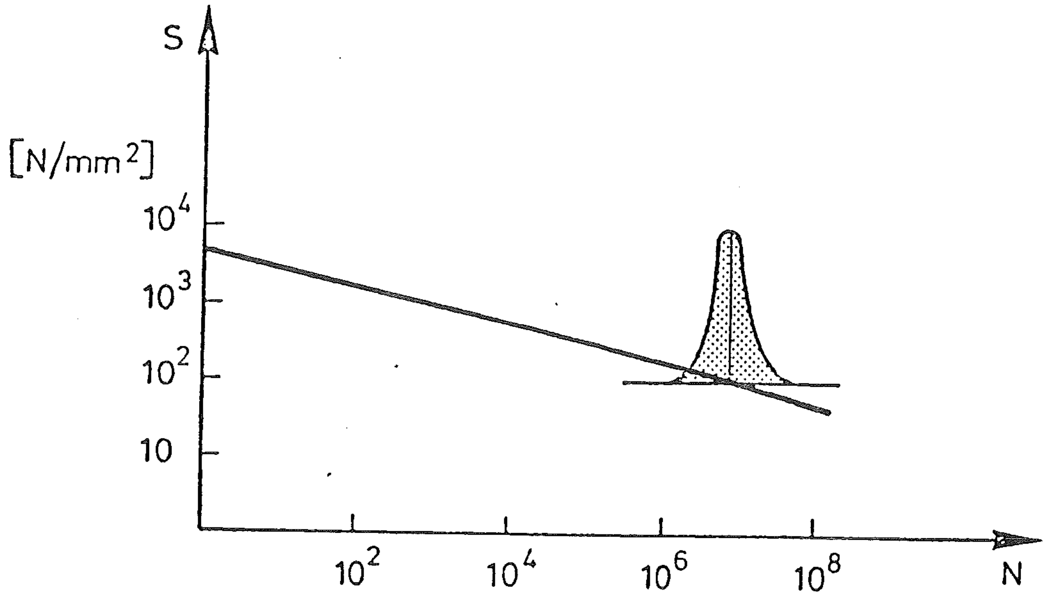


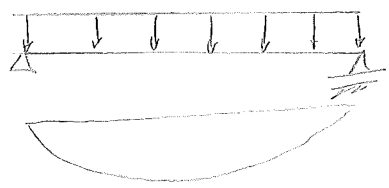
Fig. 3.26 Verband tussen de spanningsrange S (2 maal de amplitude) en het aantal wisselingen tot breuk bij vermoeiing.

Voorbeeld 3.4.1: ligger op buiging belast

Een op buiging belaste ligger bezwijkt zodra het maximaal moment t.g.v. de belasting groter is dan de momentcapaciteit van de doorsnede. In dit geval is dus R het opneembare moment en S het belastingseffect. Stel:

$$\mu(R) = 200 \text{ kNm} \qquad \sigma(R) = 20 \text{ kNM}$$

$$\mu(S) = 100 \text{ kNm} \qquad \sigma(R) = 15 \text{ kNm}$$



In dat geval geldt: $Z = R - S$

$$\mu(Z) = 200 - 100 = 100 \text{ kNm}$$

$$\sigma^2(Z) = (20^2 + 15^2) = (25 \text{ kNm})^2$$

$$\beta = 100/25 = 4$$ (betrouwbaarheidsindex)

P_F (faalkans) $\approx 10^{-4}$ a 10^{-5}

normaal verdeling

R = opneembaar moment

S = moment t.g.v. belasting

$Z = R - S$

Voor α_R en α_S volgt dat:

$$\alpha_R = \frac{\delta Z/\delta R \, \sigma(R)}{\sigma(Z)} = \frac{1 \cdot 20}{25} = 0{,}8$$

$$\alpha_S = \frac{\delta Z/\delta S \, \sigma(S)}{\sigma(Z)} = \frac{-1 \cdot 15}{25} = -0{,}6$$

$Z = R - S$

$$\alpha_R = 20/25 = 0.8 \text{ en } \alpha_S = -15/25 = -0.6$$

zodat het design point (R^*, S^*) bepaald kan worden op:

$$R^* = \mu(R) - \alpha_R \beta\sigma(R) = 200 - (0.8)(4)(20) = 136 \text{ kNm}$$

$$S^* = \mu(S) - \alpha_S \beta\sigma(S) = 100 + (0.6)(4)(15) = 136 \text{ kNm}$$

Uiteraard geldt dat $R^* = S^*$ omdat het design point op de grenstoestand $R = S$ moet liggen.

Nivo I

Stel dat R_{kar} en S_{kar} gedefineerd zijn als:

$$R_{kar} = \mu(R) - 2\sigma(R) = 160 \text{ kNm}; \quad S_{kar} = \mu(S) = 100 \text{ kNm}$$

We vinden dan:

$$\gamma_{LFD} = \gamma_m \cdot \gamma_s = 1{,}18 \cdot 1{,}36 = 1{,}60$$

$$\gamma_m = \frac{R_{kar}}{R^*} = \frac{160}{136} = 1.18 \; ; \; \gamma_s = \frac{S^*}{S_{kar}} = \frac{136}{100} = 1.36$$

In tabel (3.4.1) zijn bovenstaande resultaten weergegeven tezamen met twee variantberekeningen. De tweede regel geeft het resultaat van een berekening met een lagere variatiecoëfficiënt voor de sterkte: $V(R) = 0.06$. We concluderen dat de geringe spreiding in de sterkte leidt tot een vrijwel zuiver load factor design. De derde regel geeft het resultaat voor een hogere spreiding in de sterkte: $V(R) = 0.20$.

Het resultaat is een vrijwel resistance factor design. Opmerkelijk in dit verband is dat de TGB-hout (hout is een materiaal met grote spreiding) in 1972 als enige met toelaatbare spanningen is blijven werken. Deze beschouwingen geven daarvoor achteraf een zekere rechtvaardiging.

2e vb

$Z = M_p - M_q - M_g$

	V	α	γ
M_p	0,10	0,65	1,05
M_q	0,10	0,15	1,10
M_g	0,40	0,75	1,20

M_p (plastisch moment)
M_q (moment t.g.v. q)
M_g (moment t.g.v. eigengewicht)

↳ grootste aandeel (variatie)

$\beta = 3,5$

	γ_m	γ_s
$V_R = 0.10$	1.18	1.36
$V_R = 0.06$	0.99	1.50
$V_R = 0.20$	2.75	1.09

Tabel 3.4.1 Waarden voor γ_m en γ_s bij $V_S = 0.15$, $\beta = 4$, $k_S = 0$, $k_R = 2$.

Voorbeeld 3.4.2: Vermoeiing

Tussen het aantal wisselingen tot breuk N en de opgelegde spanningsrange S wordt bij proeven op dubbellogaritmische schaal een lineair verband gevonden (zie figuur 3.26):

als $\sigma_x \ll \mu_x$ dan kan i.p.v.
$\mu(y) = \ln \mu_x - \frac{1}{2}\sigma_x^2 \approx \ln \mu_x$
$\sigma(y) = \sqrt{\ln(1+V^2(x))} \approx \sigma_x/\mu_x$

$$\log N = -k \log \left\{\frac{S}{S_F}\right\}$$

De parameter k geeft de helling van de lijn weer en S_F het snijpunt met de S-as bij N = 1. Veronderstel dat een bepaald kritieke punt in de constructie belast wordt door de n wisselingen van range S. De betrouwbaarheidsfunctie kan dan gedefinieerd worden als:

$\mu(z) = 4\ln 5300 - 4\ln 20 - \ln 10^8 = 3,858$

$$Z = \log N - \log n = k \log S_F - \{k \log S + \log n\}$$

ln

$\sigma(z) = \sqrt{16\cdot\left(\frac{740}{5300}\right)^2 + 16\left(\frac{5}{20}\right)^2} = 1,145$

De eerste term representeert de sterkte, de term tussen haken de belasting. Neem aan dat k = 4 en n = 10^8 beide deterministisch zijn, terwijl S en S_F stochastisch zijn met statistische gegevens in tabel 3.4.2.

$\beta = 3,858/1,145 = 3,40$

X	omschrijving	verdeling	μ(X)	σ(X)	α_X^2
S_F	par. S-N-lijn	lognormaal	5300 MPa	740 MPa	24%
S	spanningsrange	lognormaal	20 MPa	5 MPa	76%

$\alpha_{SF} = \frac{\partial z/\partial S_F \cdot \sigma}{\sigma_z \cdot \ldots} = \frac{4/5300 \cdot 740}{1,145 \cdot \ldots} = 0,50$

of $\alpha_{SF}^2 = \frac{k^2\sigma_{x_1}^2}{\sigma_z^2}$

Tabel 3.4.2 Gegevens betrouwbaarheidsanalyse voor vermoeiing.

$\alpha_S = \frac{k^2\sigma_{x_2}^2}{\sigma_z^2}$

De berekening resulteert in een betrouwbaarheidsindex β = 3.4 en in $\alpha_{SF} = \sqrt{0.24} = 0.5$ en $\alpha_S = -\sqrt{0.76} = -0.88$ (zie ook voorbeeld 5.6).

Op grond daarvan volgen als partiële veiligheidscoëfficiënten (t.o.v. het gemiddelde):

$$\gamma_{S_F} = 1.25 \text{ en } \gamma_S = 1.77$$

Wat opvalt in bovenstaande analyse is de strakke redeneerwijze vergeleken met meer conventionele procedures. Daarbij kon bijvoorbeeld geëist worden dat bij een γ-voudige spanning en bij een ondergrens voor de SN-lijn de berekende levensduur vijfmaal de planmatige moest zijn. Een aldus ontworpen constructie kan natuurlijk best voldoende veilig zijn, maar erg doorzichtig is dit niet.

Het tweede voorbeeld maakt duidelijk wat de grote kracht is van de methode van partiële veiligheidscoëfficiënten en de koppeling tussen niveau I en niveau II, namelijk een uniforme en systematische behandeling van zeer uiteenlopende veiligheidsproblemen. Een ander interessant voorbeeld daarvan zijn de "accidental limit states", dit zijn grenstoestanden t.g.v. bijzondere en zelden voorkomende belastingen als brand, aanvaring, aardbeving enz. De kans dat een constructie faalt onder zo'n bijzondere omstandigheid kan geschreven worden als (bijv. voor brand):

$$P\{\text{Falen door Brand}\} = P\{\text{Falen/Brand}\}\ P\{\text{Brand}\} \qquad (3\text{-}28)$$

Stel dat de kans op Falen door Brand niet groter mag zijn dan 10^{-5} en dat de kans op brand gelijk is aan 10^{-2}. Het ontwerp moet dan gericht zijn op een kans op falen onder brandomstandigheden van 10^{-3}, ofwel een β van 3.0. De reductie van veiligheidsfactoren die onder bijzondere omstandigheden in het verleden meestal arbitrair plaats vond kan via de niveau I-II koppeling op consequente en logische wijze worden onderbouwd.

3.4.3 Voorschriftentheorie (open [illegible] ?!)

In het voorgaande is uiteengezet hoe op basis van niveau II berekeningen partiële veiligheidsfactoren kunnen worden bepaald. In beginsel wordt voor ieder stochastische basisvariabele een partiële veiligheidsfactor afgeleid volgens:

$$\gamma_i = X_i^*/X_{kar\ i} \text{ of } \gamma_j = X_{kar\ j}/X_j^* \qquad (3\text{-}29)$$

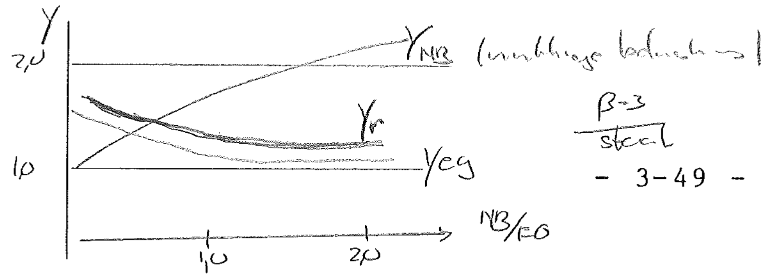
De eerste formulering heeft betrekking op belastingsgrootheden, de tweede op sterktegrootheden. De controle van de veiligheid vindt plaats door te eisen dat:

$$Z\{\gamma_i X_{kar\ i}, \frac{X_{kar\ j}}{\gamma_j}\} \geq 0 \qquad (3\text{-}30)$$

Voor praktische uitwerking moet met enkele complicaties rekening worden gehouden. Hiervoor worden steeds meer algemeen geaccepteerde regels ontwikkeld die gezamenlijk een "code theory" vormen. We bespreken hier een viertal onderwerpen.

1. Indien voor iedere stochastische variabele een partiële veiligheidsfactor wordt gedefinieerd, wordt het aantal veel te groot. Het totaal aantal factoren moet beperkt worden door combinaties te maken.

ad 3



Voorbeeld: het opneembaar moment van een stalen ligger wordt gegeven door $M_p = m\, W_p \sigma_p$. Hierin is m een modelfactor, W_p het plastische weerstandsmoment en σ_p de vloeispanning. In plaats van 3 factoren voor elk van de variabelen combineren we deze tot één factor:

$$\gamma_m = W_{p\ nom}\ \sigma_{p\ kar} / (m^* \ W_p^* \ \sigma_p^*)$$

Hierin is $W_{p\ nom}$ de nominale waarde voor het plastische weerstandsmoment en $\sigma_{p\ kar}$ de karakteristieke vloeispanning.

2. In 3.4.2 is aangetoond dat voor de exacte overeenkomst tussen niveau I ontwerpprocedures en niveau II berekeningen het nodig is voor ieder materiaal, belastinggeval en elementtype afzonderlijke coëfficiënten te bepalen. Uiteraard is dat onpractisch en men zou beter direct op niveau II kunnen ontwerpen. In een practisch voorschrift moeten belastingfactoren materiaalonafhankelijk zijn en materiaalfactoren belastingsonafhankelijk. De factoren die in voorschriften terecht komen zijn derhalve noodzakelijk gemiddelden van een aantal referentiegevallen. Bij zo'n middelingsprocedure wordt gewogen naar de mate waarin een bepaald geval voorkomt. Formeel wordt bijvoorbeeld als volgt te werk gegaan:

   Bepaal $\underline{\gamma}$ zodanig dat $\sum_{i=1}^{n} p_i \{\beta_i(\underline{\gamma}) - \beta_i^t\}^2$ minimaal is.

   Hierin is $\underline{\gamma}$ de set van partiële veiligheidsfactoren, i het nummer van het referentiegeval, p_i een gewichtsfactor en β_i^t de streefwaarde voor de betrouwbaarheidsindex die hoort bij een bepaalde set veiligheidsfactoren.

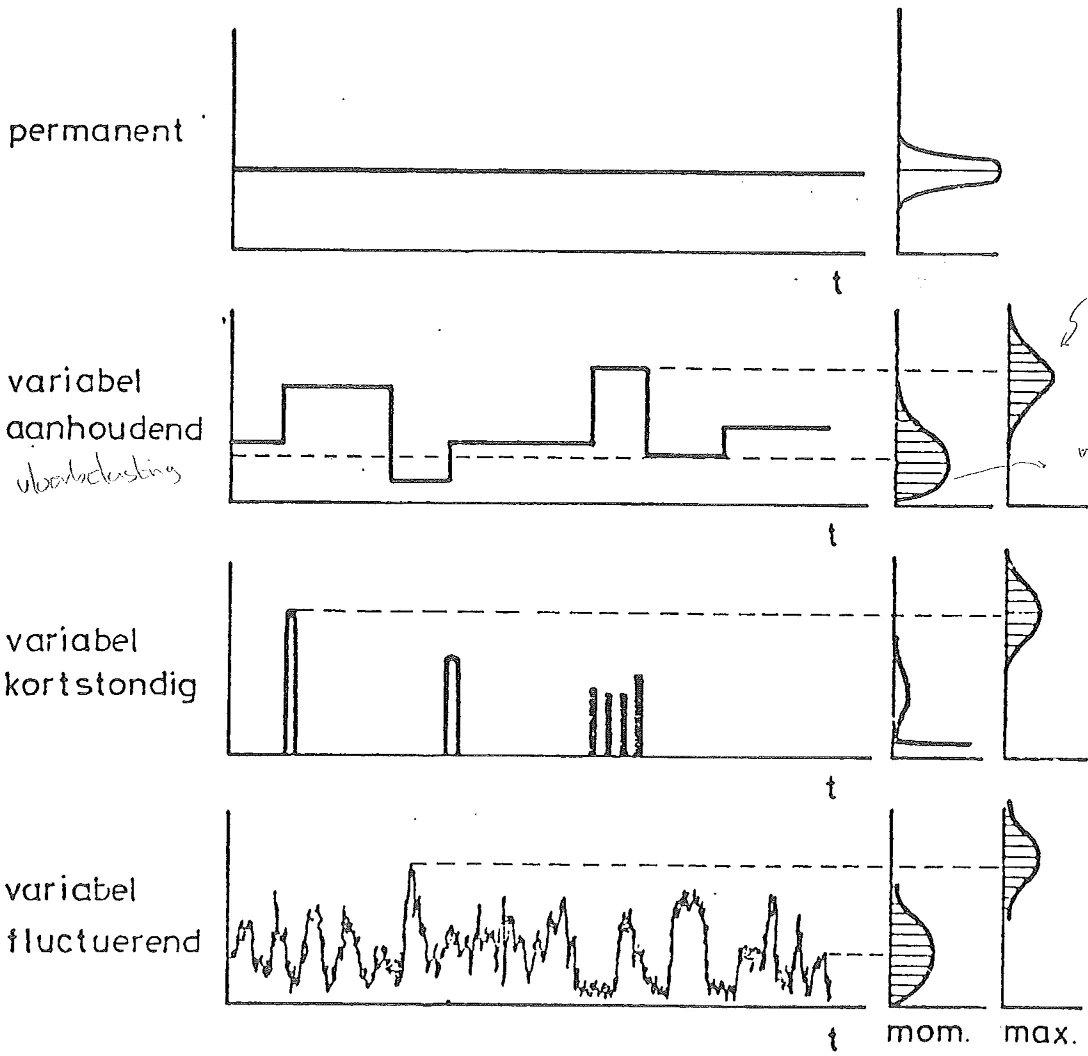
3. Een voorschrift geldt vaak voor een uitgestrekt geografisch gebied en voor een aantal verschillende gevallen. Met name belastingen kunnen daarbij aanzienlijke verschillen ten toon spreiden. In Noord-Holland bijvoorbeeld is de windbelasting duidelijk hoger dan in Limburg. Een ander voorbeeld is het verschil in vloerbelasting tussen woonkamers en slaapkamers. Indien een voorschrift deze verschillen wil meenemen, wordt het gauw te gedetailleerd. Het is verstandiger om deze verschillen onder te brengen bij de overige spreiding, bijvoorbeeld door alle waarnemingen te "poolen". Men noemt dit "randomizen": een in wezen deterministische spreiding wordt als stochastisch behandeld. Voor bijzondere constructies kan het omgekeerd interessant zijn om juist wel de zeer specifieke kenmerken van locale omgevingscondities op te sporen (golfklimaat, aardbevingsklimaat etc.). Dit staat bekend als micro-zonation.

4. Belastingen zijn in het algemeen geen stochastische variabelen, maar stochastische processen, d.w.z. er treden fluctuaties in de tijd op. In figuur 3.27 zijn een aantal fluctuatietypen getekend. Het eigen gewicht vertoont natuurlijk weinig fluctuatie in de tijd en kan als constant worden beschouwd. Bij de variabele belastingen onderscheiden we "aanhoudend", "kortstondig" of "voortdurend fluctuerend" (in het Engels sustained, transient, erratic). Achtereenvolgens kan men denken aan vloerbelasting door inventaris, vloerbelastings tijdens verhuizing of recepties en windbelasting.

In al deze gevallen is het nodig om onderscheid te maken tussen de waarde op een willekeurig tijdstip of de maximale waarde in bijvoorbeeld de levensduur: de momentane en de maximale belasting. In figuur 3.27 zijn schematisch de kansdichtheidsfuncties voor beide weergegeven.

Bij het combineren van meerdere belastingen die in de tijd fluctueren doet zich het probleem voor dat de maxima in de tijd niet samenvallen. Feitelijk zou men eerst de belastingen moeten sommeren en daarna het maximum moeten bepalen. De verhoudingen waarin de verschillende belastingen voorkomen zijn echter voor iedere constructie en ieder onderdeel verschillend. Een practische oplossing voor dit probleem is de zogenaamde Turkstra-regel. Volgens deze regel wordt de maximale waarde van één belastingsbron gecombineerd met de momentane waarden van de overige. Dezelfde regel is te gebruiken als het gaat om tijdsafhankelijke materiaaleigenschappen.

$S = g + q + W + S$



extreme belasting

momentane belasting

bv vloerbelasting

Fig. 3.27 Verschillende belastingstypen als functie van de tijd met hun momentane en maximale kansverdeling.

Voorbeeld: de combinatie van eigen gewicht met de maximale vloerbelasting wordt vergeleken met de korte-duur-sterkte en de combinatie van eigen gewicht en momentane vloerbelasting met de lange-duur-sterkte. De momentane belastingen vormen ook een goed uitgangspunt voor het beoordelen van grenstoestanden van bruikbaarheid.

Op basis van de hierboven omschreven uitgangspunten worden momenteel in veel landen, waaronder Nederland, nieuwe voorschriften gemaakt. Voor Nederland kunnen op dit moment nog geen resultaten worden getoond. Daarom is in figuur 3.28 het resultaat gegeven van een Amerikaanse onderzoek. Geeist is dat de constructie of het onderdeel bestand is tegen een aantal belastingscombinaties. Geval 1 is "eigen gewicht alleen" waarbij een partiële veiligheidsfactor van 1,4 wordt geeist. Geval 2 is de combinatie "eigen gewicht en vloerbelasting" met respectievelijk factoren 1,2 en 1,6. Vervolgens komt tweemaal de combinatie "eigen gewicht, vloerbelasting en wind", voor waarbij eerst de vloerbelasting momentaan en de wind maximaal is, daarna omgekeerd. Tenslotte zijn er nog de combinaties met sneeuw en het geval dat de gewichtsbelasting "gunstig" werkt, De tabel in figuur 3.28 geeft een indruk van de γ_m-waarden voor stalen en betonnen constructie-onderdelen.

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{R}{\gamma_r} \geq & 1{,}2\ g & & & \text{eigen gewicht} \\
 & 1{,}2\ g + 1{,}6\ q & & & \text{+ vloerbelasting} \\
 & 1{,}2\ g + 0{,}5\ q & + 1{,}3\ w & & \text{+ max wind} \\
 & 1{,}2\ g + 1{,}6\ q & + 0{,}1\ w & & \text{+ max vloerbelast} \\
 & 1{,}2\ g + 0{,}5\ q & & + 1{,}6\ s & \text{eig., vlbel + max sneeuw} \\
 & 1{,}2\ g + & + 0{,}8\ w & + 1{,}6\ s & \text{eig, wind + max sn.} \\
 & -\ 0{,}9 & + 1{,}3\ w & &
\end{array}
$$

γ_r-waarden:

	staal	beton
ligger	1,2	1,2 - 1,6
kolom	1,3	1,4 - 1,6
dwarsk.	-	2,0
boutverb.	1,7	-

Fig. 3.28 Partiële veiligheidsfactoren volgend het NBS-onderzoek; g = gewicht, q = vloerbelasting, w = wind en s = sneeuw.

4. SYSTEMEN

4.1 Inleiding

Bij de beoordeling van een constructie beperken we ons meestal tot de berekening van een aantal doorsneden of onderdelen. Gekeken wordt of ieder onderdeel voldoet aan bepaalde normen van veiligheid, vastgelegd via een veiligheidscoëfficiënt γ of een betrouwbaarheidsindex β. Een constructie is echter meer dan een verzameling van onderdelen: de onderdelen vormen samen een systeem. Het niet funktioneren van één onderdeel heeft daardoor in de ene constructie andere gevolgen dan in een andere constructie. Soms leidt het falen van een enkel onderdeel tot het voortgaand bezwijken van het hele systeem (progressieve collapse), in een ander geval zijn er nauwelijks gevolgen, omdat andere onderdelen de taak van het falende onderdeel overnemen (er is een alternative path).

Bij de betrouwbaarheidsanalyse van systemen zijn er twee systeemtypen die in het bijzonder de aandacht vragen, te weten het serie-systeem en het parallelsysteem (fig. 4.1).
Bij het serie-systeem zijn de elementen zodanig gerangschikt, dat bezwijken van een enkel onderdeel ogenblikkelijk leidt tot bezwijken van het hele systeem; bij het parallelsysteem bestaat de mogelijkheid dat falen van een element wordt opgevangen door andere elementen. In werkelijkheid komt men deze zuivere systeemtypen natuurlijk niet vaak in zuivere vorm tegen, al zijn er wel voorbeelden te geven; een statisch bepaald vakwerk in een seriesysteem en een paalfundering met veel palen een parallelsysteem.
We concluderen dat het seriesysteem geassocieerd kan worden met "statisch bepaald" en "progressive collapse", het parallelsysteem met "statisch onbepaald" en "alternative path".

Meestal komen in constructies beide systeemtypen gelijktijdig voor, bijvoorbeeld als in het talud, weergegeven in fig. 4.2. Een enkel mechanisme vormt een parallelsysteem omdat de schuifspanningsbijdragen langs een enkele glijcirkel de taak van elkaar kunnen overnemen; de glijvlakken gezamenlijk vormen echter een seriesysteem omdat één enkel glijvlak reeds bepalend is voor bezwijken. Voor een goede beoordeling daarvan is het echter nodig eerst beide systemen afzonderlijk te leren kennen.

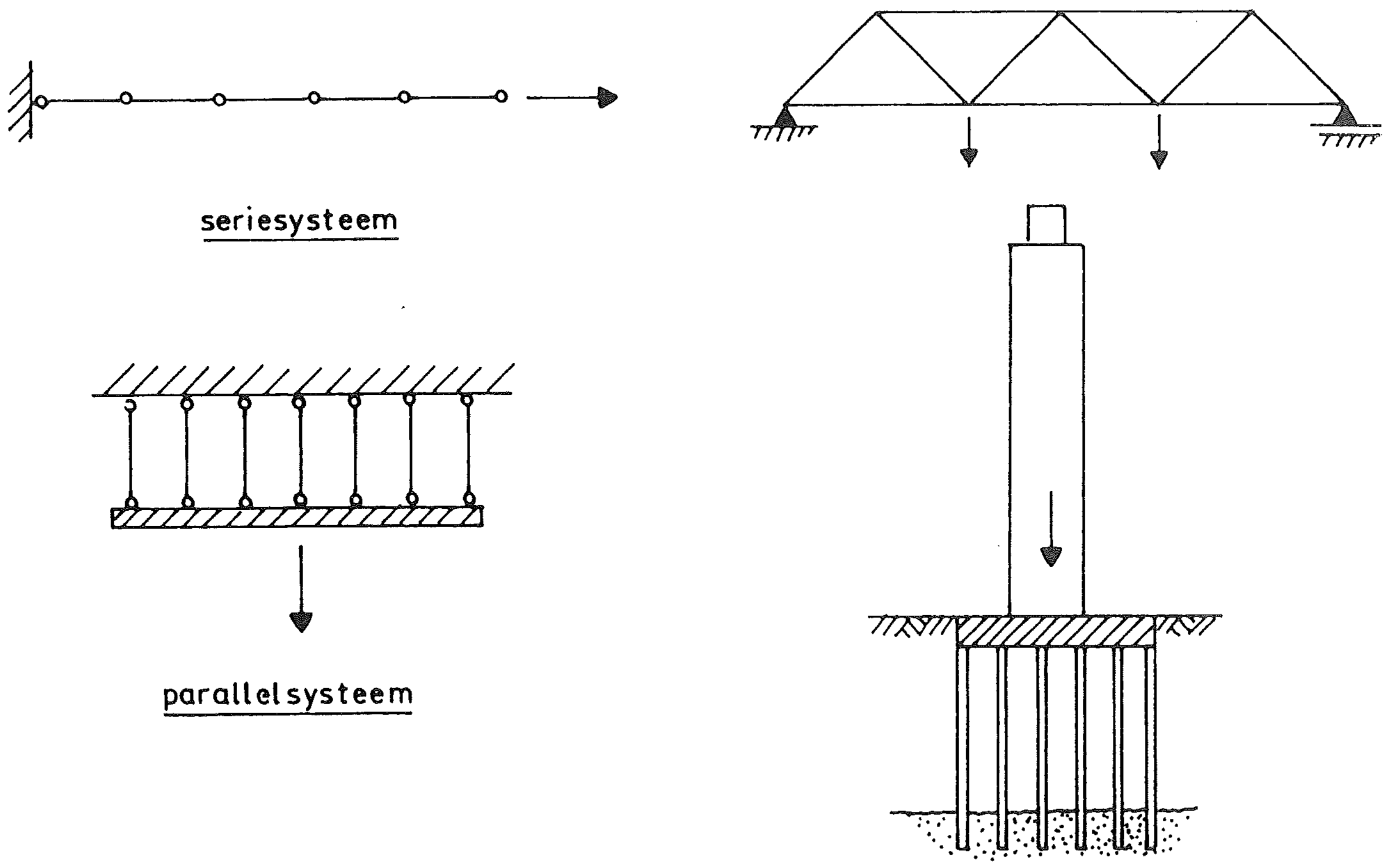


Fig. 4.1 Schematische voorstelling van serie- en parallelsystemen en voorbeelden uit de praktijk.

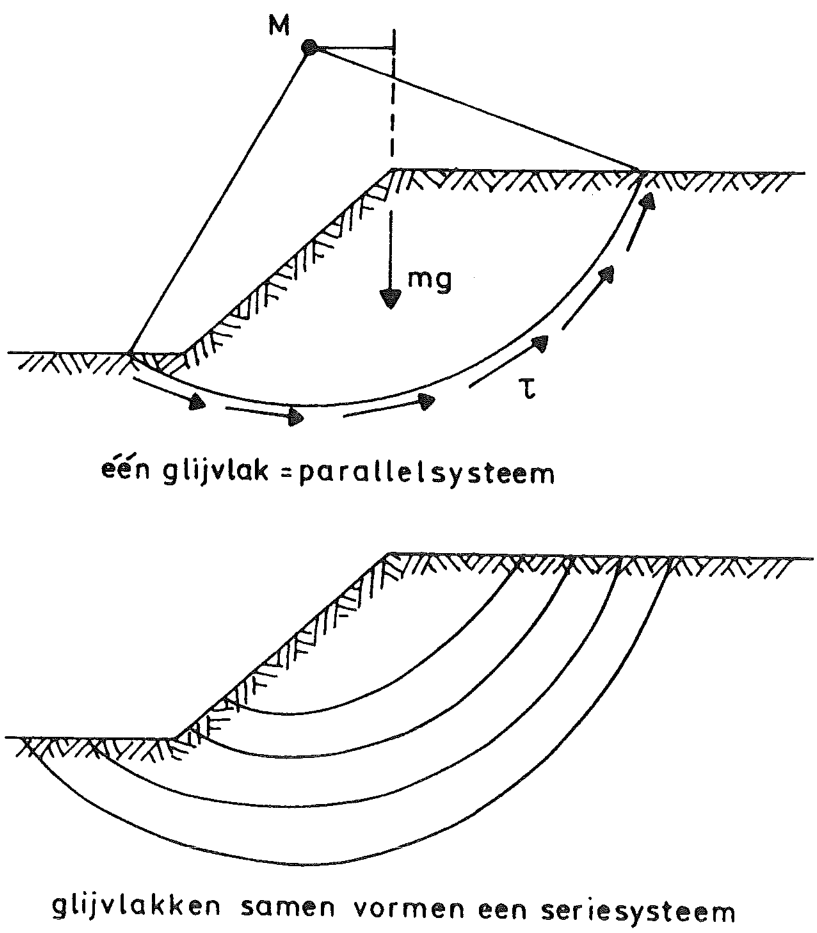


Fig. 4.2 Combinatie van serie- en parallelwerking binnen een systeem.

(1) bij $\sigma(S)=0$ (deterministisch), $\rho(R_1,R_2)=0$ (onafhankelijk) } $P\{F\} = P\{Z_1<0 \text{ of } Z_2<0\}$
$= P\{Z_1<0\} + P\{Z_2<0\} - P\{Z_1<0 \cap Z_2<0\}$

$P\{Z_1<0\}\, P\{Z_2<0 \mid Z_1<0\}$

$P\{R_1<S\}\, P\{R_2<S \mid R_1<S\}$ is onafhankelijk

$\Phi(-\beta_1)\cdot\Phi(-\beta_2)$

$P(F) = \Phi(-\beta_1) - \Phi(-\beta_2) - \underbrace{\Phi(-\beta_1)\cdot\Phi(-\beta_2)}_{\text{meestal verwaarloosbaar}}$

geeft bovengrens

4.2 Het seriesysteem

Twee elementen

We beschouwen om te beginnen een seriesysteem van twee elementen. Element 1 heeft een sterke R_1 en element 2 een sterkte R_2. Voor elk element kan een betrouwbaarheidsfunctie Z_i worden opgesteld als het systeem belast wordt door een belasting S:

(2) $\sigma(R_1)=\sigma(R_2)=0$ $P\{F\} = P\{Z_1<0 \text{ of } Z_2<0\}$

$P(F) = P\{Z_1<0\} + P\{Z_2<0\} - \underbrace{P\{S>R_1\}}\, \underbrace{P\{S>R_2 \mid S>R_1\}}_{1,0}$ $\wedge R_1=R_2$

$$Z_1 = R_1 - S \tag{4-1a}$$

$$Z_2 = R_2 - S \tag{4-1b}$$

$= P(Z_2<0)$ μ_Z/σ_Z

Indien gemiddelden, standaardafwijkingen en verdelingen van R_i en S bekend zijn kunnen de betrouwbaarheidsindices β_i en de faalkansen $P(F_i)$ worden bepaald. De faalkans P(F) van het systeem is daarmee echter niet zonder meer bekend. Wel kunnen gemakkelijk onder- en bovengrenzen worden aangegeven (zie stelling 2-7).

$$\max\{P(F_1), P(F_2)\} < P(F) < P(F_1) + (P(F_2)) \tag{4.2}$$

De ondergrens treedt op bij volledige afhankelijkheid van de mechanismen, d.w.z. falen van het ene mechanisme impliceert falen van het andere. Het toevoegen van een extra mechanisme leidt in dat geval niet tot een toename van de faalkans.

De bovengrens treedt op als de mechanismen elkaar uitsluiten, overeenkomstig het twee axioma. In de praktijk komt dit nauwelijks voor, maar toch zal deze bovengrens erg belangrijk blijken als benadering.

De waarde die P(F) tussen de beide uitersten zal innemen wordt, aangenomen dat Z_1 en Z_2 normaal verdeeld zijn, geheel bepaald door de correlatiecoëfficiënt ρ van de beide betrouwbaarheidsfuncties. Het verband tussen P(F) en ρ is weergegeven in figuur 4.3. We herkennen in deze grafiek de ondergrens (bij $\rho = +1$) en de bovengrens (bij $\rho = -1$). Gemakkelijk te bepalen is verder het punt $\rho = 0$; in dat geval zijn Z_1 en Z_2 onafhankelijk en geldt:

$$P(F) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1)\,P(F_2) \approx 0 \tag{4-3}$$

Aangezien de kansen $P(F_i)$ bij de betrouwbaarheidsanalyse van constructies meestal klein zijn ligt de faalkans bij onafhankelijke mechanismen dicht bij de bovengrens. Uit figuur 4.3 blijkt verder dat ook voor niet al te grote positieve correlatie de bovengrens een goede benadering vormt. Pas bij zeer hoge correlatie ($\rho > 0.8$) wordt de ondergrens van belang.

De faalkans P(F) als functie van ρ kan, behoudens de punten $\rho = 0$, en $\rho = \pm 1$, niet exact worden bepaald.

Er bestaan echter goede benaderingsmethoden zoals bijv. de methode van Ditlevsen (lit. 4.1) die we hier zullen behandelen. We schrijven daartoe om te beginnen:

$$P(F) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \text{ en } F_2) \tag{4-4}$$

Het probleem is de bepaling van $P(F_1$ en $F_2)$. Beschouw eerst het geval dat Z_1 en Z_2 onafhankelijk zijn met betrouwbaarheidsindices β_1 en β_2. Zonder dat dit ten koste van de algemeenheid gaat, nemen we aan dat $\sigma(Z_1) = \sigma(Z_2) = 1{,}0$. (We mogen immers altijd een Z-functie met een willekeurige factor vermenigvuldigen). Geschreven kan dan worden:

$$Z_1 = \beta_1 + u_1 \tag{4-5a}$$

$Z_1 = (\beta_1 + u_1 = 0 \quad u_1 = -\beta_1$

$P\langle Z_1 < 0\rangle = \phi_N(-\beta_1)$

$$Z_2 = \beta_2 + u_2 \tag{4-5b}$$

Hierin zijn u_1 en u_2 onafhankelijke standaard normale variabelen (met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1, zie hoofdstuk 2.2. Ga na dat geldt: $P\{Z_i < 0\} = \phi_N(-\beta_i)$. In figuur 4.4a is een hoogtelijnenkaart getekend van de gezamenlijke kansdichtheidsfuncties van u_1 en u_2 en zijn tevens de "failure boundaries" $Z_1 = 0$ en $Z_2 = 0$ aangegeven.

De gezochte kans $P(F_1$ en $F_2)$ is, gegeven de onafhankelijkheid van u_1 en u_2, eenvoudig af te leiden als (zie (2-18)):

$$P(F_1 \text{ en } F_2) = P(u_1 < -\beta_1)\, P(u_2 < -\beta_2) = \Phi(-\beta_1) . \Phi(-\beta_2) \tag{4-6}$$

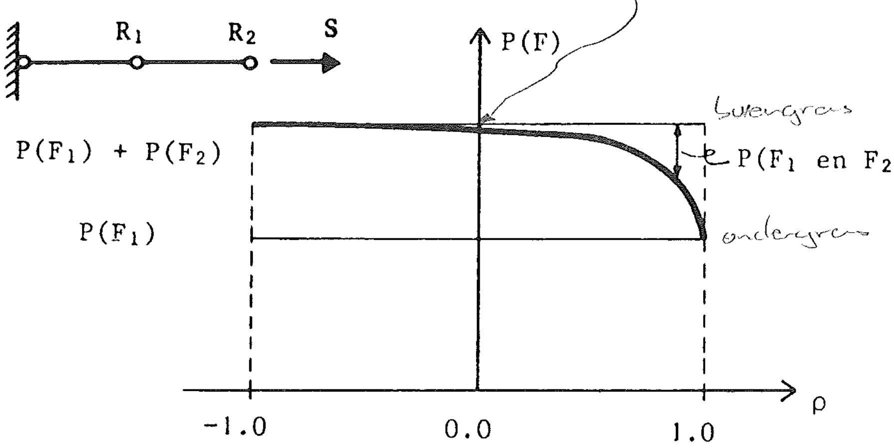


Fig. 4.3 Faalkans voor een seriesysteem van 2 elementen als functie van de correlatiecoëfficiënt $\rho(Z_1 Z_2)$. (Schematisch voor kleine faalkansen).

We beschouwen vervolgens het geval dat Z_1 en Z_2 niet onafhankelijk zijn. Dit kunnen we bijv. bereiken door Z_2 een functie te maken van zowel u_1 als u_2:

β_1^* $\quad Z_2 = 0 \quad \beta_2 + u_1 \sin\alpha + \beta_2 \cos\alpha = 0$

$u_1 = \dfrac{-\beta_2(1 + \cos\alpha)}{\sin\alpha} = \beta_1^*$?

$\mu(Z_2) = \beta_2 + 0 + 0 = \beta_2$
$\sigma^2(Z_2) = 0 + 1 \cdot \sin^2\alpha + 1 \cdot \cos^2\alpha = 1$ } β_2

$$Z_1 = \beta_1 + u_1 \qquad \rho \neq 0 \tag{4-7}$$

$$Z_2 = \beta_2 + u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha \tag{4-8}$$

$Z_2 = 0$ $\quad u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha = -\beta_2$?

Ga na dat nog steeds geldt: $\mu(Z_i) = \beta_i$, $\sigma(Z_i) = 1{,}0$ en $P\{Z_i < 0\} = \Phi(-\beta_i)$ voor i = 1 en i = 2. We bepalen de correlatiecoëfficiënt $\rho(Z_1 Z_2)$ via (2-59) en (2-58):

$$\rho(Z_1 Z_2) = \mathrm{cov}\,(Z_1 Z_2)/\{\sigma(z_1)\sigma(Z_2)\} = \frac{\sigma^2(S) + \rho(R_1R_2)\sigma^2(R)}{\sigma^2(S) + \sigma^2(R)}$$

$(Z_1 - \mu_{Z_1})(Z_2 - \mu_{Z_2})$

$\rho \gg$ naarmate $\alpha \gg$ (tot 90°)

voor geval (1) $\rho(Z_1 Z_2) = 0$

(2) $\rho(Z_1, Z_2) = \dfrac{\sigma^2(S) + 0}{\sigma^2(S)} = 1{,}0$

$$= E\,\{(Z_1-\beta_1)(Z_2-\beta_2)\}/\{(1)(1)\} =$$

$$= E\,\{u_1(u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha)\} = \sin\alpha \tag{4-9}$$

$= E \sin\alpha\, u_1^2 + \cos\alpha\, E(u_1u_2) = \sin\alpha$ (u_1 en u_2 onafhankelijk)

We gaan nu over tot de benadering van $P(Z_1 < 0$ en $Z_2 < 0)$. Uit figuur 4.4c blijkt dat geldt:

eerste ondergrens

$$(1)\; P(Z_1 < 0 \text{ en } Z_2 < 0) \geq P(u_1 < -\beta_1 \text{ en } u_2 < -\beta_2^*) = \phi(-\beta_1)\,\phi(-\beta_2^*) \tag{4-10a}$$

$\beta_1 \quad \beta_2^*$
$Z_1 = \beta_1 + u_1$
$Z_2 = \beta_2 + u_2$
u normaal, $\sigma = 1$, $\mu = 0$

Hierin is $-\beta_2^*$ de u_2-coördinaat van het snijpunt van $Z_1 = 0$ en $Z_2 = 0$, ofwel:

$u_1 = -\beta_1$

$$\beta_2^* = \frac{\beta_2 - \beta_1 \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\beta_2 - \rho\beta_1}{\sqrt{\{1-\rho^2\}}} \tag{4-11}$$

$0 = \beta_2 - \beta_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha$
$u_2 = \dfrac{-\beta_2 + \beta_1 \sin\alpha}{\cos\alpha}$
$\beta_2^* = -u_2$

Analoog aan (4-10a) geldt, met β_2^* overeenkomstig (4.11):

tweede ondergrens

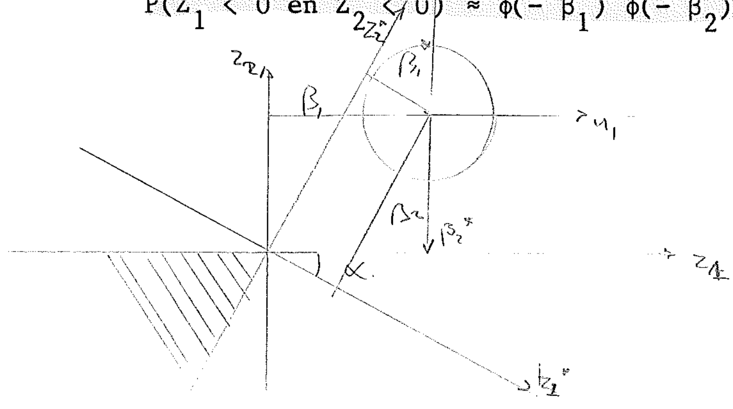
$$(2)\; P(Z_1 < 0 \text{ en } Z_2 < 0) \geq \phi(-\beta_1^*)\cdot\phi(-\beta_2) \tag{4-10b}$$

We hebben daarmee twee ondergrensbenaderingen; optellen van de beide ondergrenzen geeft vervolgens een bovengrens. (Figuur 4.4d laat zien welk deel dubbel geteld wordt):

$$P(Z_1 < 0 \text{ en } Z_2 < 0) \leq \phi(-\beta_1)\,\phi(-\beta_2^*) + \phi(-\beta_1^*)\,\phi(-\beta_2) \tag{4-12}$$

? Uit de figuren 4.4b en 4.4c kan verder worden geconcludeerd dat de ondergrens een goede benadering vormt voor kleine ρ (het teveel getelde deel wordt bij toenemend α steeds kleiner). $\rho = \sin\alpha \to \alpha \gg \to \rho \gg$
Aangezien $P(Z_1 < 0$ en $Z_2 < 0)$ alleen bij grote ρ van belang is, ligt het voor de hand de bovengrens (4-12) als benaderingsformule aan te houden:

$$P(Z_1 < 0 \text{ en } Z_2 < 0) \approx \phi(-\beta_1)\,\phi(-\beta_2^*) + \phi(-\beta_1^*)\,\phi(-\beta_2) \tag{4-13}$$



indien $\beta_1 = \beta_2$ wordt dit $2\phi(-\beta_1)\phi(-\beta_2)^*$?
anders gewoon bovenstaande formule toepassen.

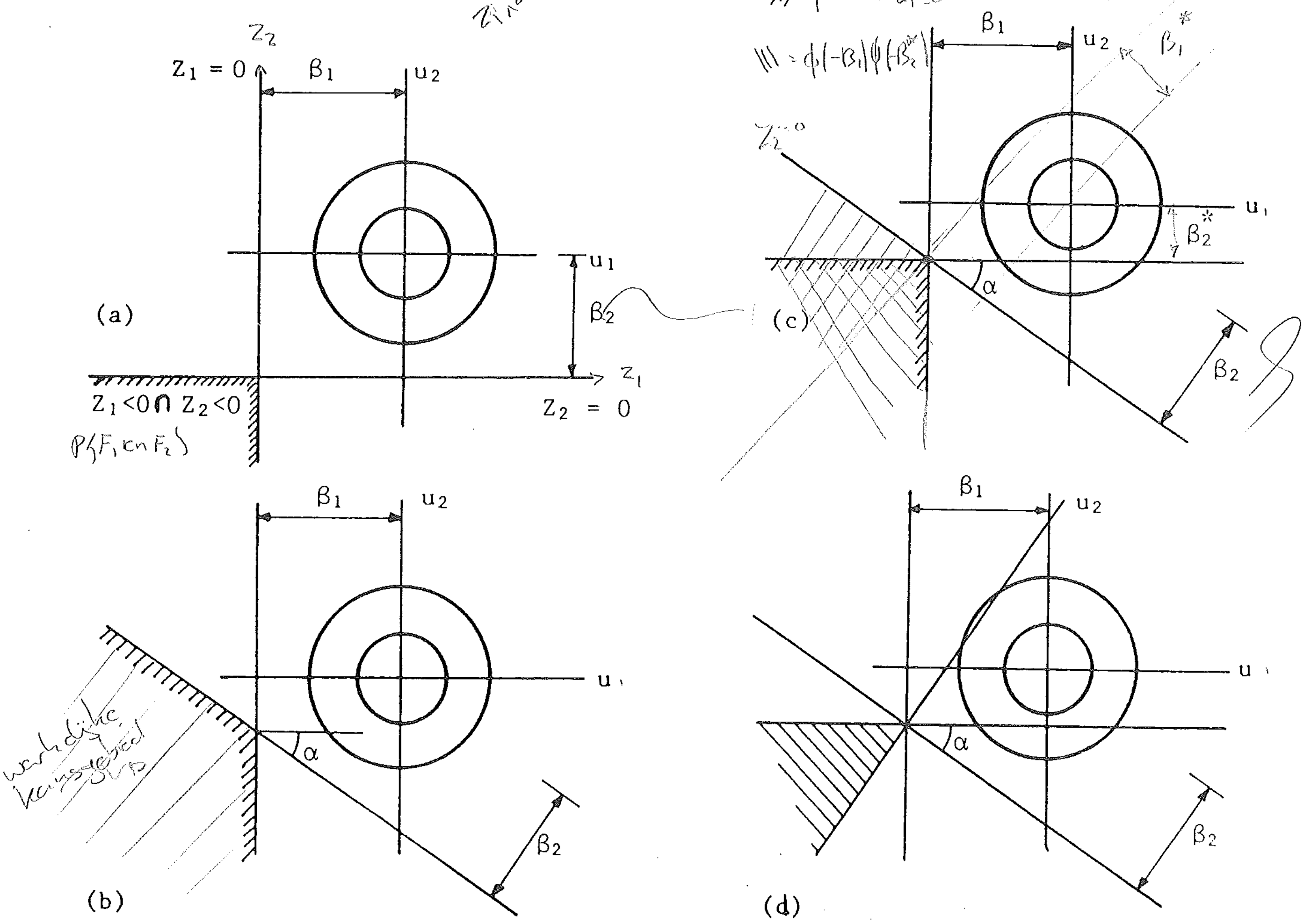


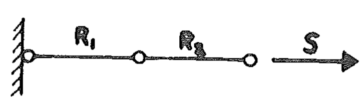
Fig. 4.4 Benadering volgens Ditlevsen van $P(F_1$ en $F_2)$.

Voorbeeld 4.1

Gegegeven een seriesysteem met twee stochastisch onafhankelijke elementen (Rl, R_2), beide belast door een kracht S.

R_1, R_2 en S worden als onderling onafhankelijk stochastische variabelen beschouwd; de verdere gegevens zijn opgenomen in bijgaande tabel.
Gevraagd de kans op bezwijken van het systeem.

x	$\mu(x)$	$\sigma(x)$
R_1	10 kN	1 kN
R_2	10 kN	1 kN
S	4 kN	1 kN



Voor de beide individuele mechanismen geldt:

$$\mu(Z_i) = \mu(R_i) - \mu(S) = 6 \text{ kN}$$

$$\sigma^2(Z_i) = \sigma^2(R_i) + \sigma^2(S) = (1,4 \text{ kN})^2$$

$$\beta_i = \mu(Z_i) \;/\; \sigma(Z_i) = 4,2$$

$$P(Z_i < 0) = 1,3 * 10^{-5}$$

Op grond van (4-2) volgt daarmee voor het systeem:

$$1,3 * 10^{-5} \leq P(F) \leq 2,6 * 10^{-5}$$ onafhankelijk

Voor een nauwkeuriger uitspraak moet de correlatie-coëfficiënt ρ worden bepaald van de mechanismen Z_1 en Z_2. Daartoe bepalen we eerst de covariantie:

$Z_1 = R_1 - S_1 \quad Z_2 = R_2 - S_2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}\,(Z_1\,Z_2) &= E\,\{Z_1 - \mu(Z_1))(Z_2 - \mu(Z_2))\} = \\
&= E\,\{(R_1 - S - \mu(R_1) + \mu(S))(R_2 - S - \mu(R_2) + \mu(S))\} = \\
&= E\,\{(R_1 - \mu(R_1))(R_2 - \mu(R_2))\} - E\,\{(R_1 - \mu(R_1))(S - \mu(S))\} - \\
&\quad - E\,\{(S - \mu(S))(R_2 - \mu(R_2))\} + E\{(S - \mu(S))^2\} = \\
&= \cancel{\mathrm{cov}\,(R_1 R_2)} - \cancel{\mathrm{cov}\,(R_1\;S)} - \cancel{\mathrm{cov}\,(S\;R_2)} + \sigma^2(S)
\end{aligned}$$

Aangezien R_1, R_2 en S als stochastische onafhankelijke variabelen zijn geïntroduceerd, zijn alle covarianties nul. Voor de corelatie-coëfficiënt geldt derhalve:

$$\rho(Z_1 Z_2) = \frac{\mathrm{cov}\,(Z_1 Z_2)}{\sigma(Z_1)\;\sigma(Z_2)} = \frac{\sigma^2(S)}{\sigma^2(R_i) + \sigma^2(S)} = \frac{1}{1+1} = 0.5$$

Op grond van figuur 4.3 kan direct geconcludeerd worden dat voor deze lage correlatie zonder bezwaar de bovengrens kan worden aangehouden en dat geen verdere berekening hoeft te worden uitgevoerd.

<u>Voorbeeld 4.2</u>

Dezelfde uitgangspunten als het voorgaande probleem maar nu met $\sigma(R_i) = 0,45$ kN en $\sigma(S) = 1,34$ kN. In dat geval blijft $\sigma(Z) = 1,41$ kN en daarmee veranderen de faalkansen van de afzonderlijke mechanismen niet. Wat wel verandert, is de correlatie-coëfficiënt $\rho(Z_1 Z_2)$:

$$\rho(Z_1 Z_2) = \frac{\sigma^2(S)}{\sigma^2(R_i) + \sigma^2(S)} = \frac{1,80}{2,00} = 0,90$$

We passen nu (4-13) toe:

$$P(Z_1 < 0 \text{ en } Z_2 < 0) = 2\;\phi(-\,\beta_1)\;\phi(-\,\beta_2^*)$$

met $\beta_2^* = \dfrac{\beta_2 - \rho\beta_1}{\sqrt{\{1-\rho^2\}}} = \dfrac{(4,2) - (0,9)(4,2)}{\sqrt{\{1-(0,9)^2\}}} = \dfrac{0,42}{0,44} = 0,96$

Tesamen met (4.4) volgt dan tenslotte:

$$P(F) = 2\ \phi(-\ \beta_1) - 2\ \phi(-\ \beta_1)\ \phi(-\ \beta_2^*) =$$
$$= 2\ \phi(-\ \beta_1)\ \{1 - \phi(-\ \beta_2^*)\} =$$
$$= 2\ \phi(-\ \beta_1)\ \{1 - 0,16\} = 1,68\ \phi(-\ \beta_1) = 2,4 * 10^{-5}$$

We concluderen dat zelfs bij $\rho = 0.90$ de bovengrens een waarde geeft die slechts 16% te hoog is. Kennelijk moet de correlatie wel erg hoog zijn om bij een gering aantal elementen voor een seriesysteem van belang te worden. ⇒ ? 8,5%

Meerdere elementen

Ook voor een seriesysteem van meerdere elementen kunnen analoog aan het systeem met 2 elementen eenvoudige onder- en bovengrenzen worden aangegeven

$$\max P(F_i) \leq P(F) \leq \Sigma\ P(F_i) \qquad (4-14)$$

Duidelijk zal zijn dat deze grenzen bij veel elementen ver uit elkaar kunnen liggen. De exacte bepaling of het vinden van een goede benadering is echter vaak een zeer tijdrovende aangelegenheid. Het is daarom prettig dat de wijde grenzen (4-14) tamelijk eenvoudig vervangen kunnen worden door (in veel gevallen) veel nauwere, eveneens ontwikkeld door Ditlevsen (lit. 4.2).

Voor de bovengrens wordt er van uitgegaan dat het bezwijken bij twee elementen nog exact wordt uitgerekend:

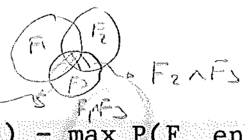
$$P(F) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \text{ en } F_2)$$

We breiden nu uit naar 3 elementen (zie figuur 4.5). Voor een exacte faalkansberekening zou P(F) nu moeten worden vermeerderd met de kans op de gearceerde gebeurtenis (F_3 en $\bar{F}_1$ en $\bar{F}_2$). Stel nu dat we P(F) vermeerderen met de kans op (F_3 en $\bar{F}_1$). In dat geval tellen we er iets te veel bij op zodat een bovengrens ontstaat. Hetzelfde gebeurt als we P(F) vermeerderen met de kans op (F_3 en $\bar{F}_2$). Er geldt derhalve:

$$P(F) \leq P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \text{ en } F_2) + \min_{i \leq 2} P(F_3 \text{ en } \bar{F}_i)$$

of $P(F_3 \text{ en } \bar{F}_1)$
$P(F_3 \text{ en } \bar{F}_2)$

Ofwel via $P(F_3 \text{ en } \bar{F}_i) = P(F_3) - P(F_i \text{ en } F_3)$:



$$P(F) \leq P(F_1) + \{P(F_2) - P(F_1 \text{ en } F_2)\} + \{P(F_3) - \max_{i \leq 2} P(F_3 \text{ en } F_i)\} \qquad (4-15)$$

$P(F) \leq P(F_1) + \{P(F_2) - P(F_1 \text{ en } F_2)\} + \{P(F_3) - \max_{i \leq 2} P(F_3 \text{ en } F_i)\}$

Bij een systeem met 4 elementen komt er nog een term $\{P(F_4) - \max P(F_4 \text{ en } F_i)\}$ bij met $i \leq 3$, enz.

Ook bij de ondergrens wordt voor twee elementen nog uitgegaan van de exacte formule. Voor 3 elementen wordt als ondergrensbenadering gebruikt:

$$P(F) \geq P(F_1) + \{P(F_2) - P(F_1 \text{ en } F_2)\} + \{P(F_3) - \sum_{i \leq 2} P(F_3 \text{ en } F_i)\} \qquad (4\text{-}16)$$

let ook hier op dat bijdrage niet negatief wordt

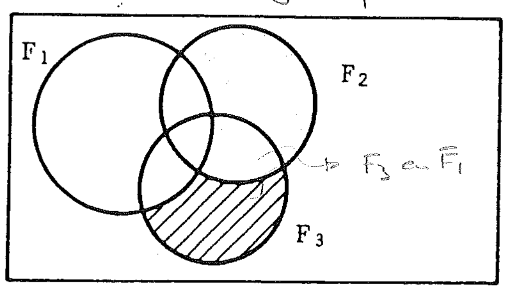
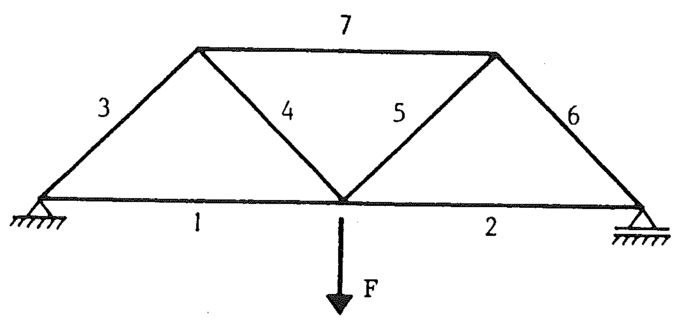


Fig. 4.5 Het gearceerde deel is (F_3 en $\bar{F}_1$ en $\bar{F}_2$).

Met behulp van figuur 4.5 valt af te leiden dat $P(F_3$ en F_2 en $F_1)$ door deze benadering teveel is afgetrokken.
Bij een systeem met 4 elementen wordt $P(F_4) - \Sigma\, P(F_4$ en $F_i)$ bij (4-16) opgeteld met $i \leq 3$, enz. Indien, zoals bij hoge correlatie het geval kan zijn de bijdrage van een element negatief is, wordt uiteraard een bijdrage van nul als ondergrens gehanteerd.

Voorbeeld 4.3



Gegeven een statisch bepaald vakwerk als aangegeven; voor iedere staaf kan een betrouwbaarheidsfunctie Z_i worden opgesteld van de vorm:

$$Z_i = s_{pi} - s_i$$

Hierin is s_{pi} de vloeispanning van staaf i en s_i de spanning t.g.v. de de belasting F. Neem aan dat $\mu(s_{pi}) = 280$ MPa, $\sigma(s_{pi}) = 20$ MPa, $\mu(s_i) = 160$ MPa en $\sigma(s_i) = 20$ MPa. Er geldt dan:

$\mu(Z_i) = 120$ MPa $\qquad \sigma(Z_i) = 28$ MPa

$\beta = 4{,}2$

$P(Z_i < 0) = \phi(-\ 4{,}2) = 1{,}3 * 10^{-5}$

Gevraagd wordt de kans dat het systeem bezwijkt als tussen de vloeispanningen van de staven een correlatie aanwezig is met een gegeven coëfficiënt $\rho = 0{,}7$. Een dergelijke correlatie-coëfficiënt weerspiegelt dat de onzekerheid t.a.v. de vloeispanning voornamelijk bepaald wordt door een "gemeenschappelijke onzekerheid aangaande alle 7 staven" en in mindere mate door "individuele spreiding en onderlinge verschillen".

We bepalen eerst de correlatie-coëfficiënt van Z_i en Z_j; bij voorbeeld 4.1 is afgeleid:

$$\text{cov}\ (Z_1 Z_2) = \text{cov}\ (R_1 R_2) - \text{cov}\ (R_1 S) - \text{cov}\ (R_2 S) + \sigma^2(S)$$

$\sigma_{spi} = \sigma_{spj}$

Voor het huidige voorbeeld kan dat worden "vertaald" in:

$\text{cov}(s_{pi}; s_{pj})$ $\text{cov}(s_{pi})$

$\rho(s_{pi} s_{pj}) = \sigma_{spi} \cdot \sigma_{spj} = \sigma^2_{spi}$

$$\text{cov}\ (Z_i Z_j) = \text{cov}\ (s_{pi}\ s_{pj}) + \sigma^2(s_i)$$

$\text{cov}(s_{pi}, s_{pj}) = \rho(s_{pi}, s_{pj}) \sigma_{spj} \sigma_{spi}$

Hierbij is aangenomen dat de belasting en sterkte onafhankelijk zijn; op grond van de definitie van correlatie-coëfficiënt volgt dan verder:

$\text{cov}(Z_1 Z_2)$

$\rho(Z_1 Z_2) \cdot \sigma(Z_1) \cdot \sigma(Z_2)$

$$\rho(Z_i Z_j)\ \sigma^2(Z_i) = \rho(s_{pi}\ s_{pj})\ \sigma^2(s_{pi}) + \sigma^2(s_i)$$

$\sigma^2(z_1) = \sigma^2(s_{pi}) + \sigma^2(s_i)$

$$\rho(Z_i Z_j) = \frac{\rho(s_{pi}\ s_{pj})\ \sigma^2(s_{pi}) + \sigma^2(s_i)}{\sigma^2(s_{pi}) + \sigma^2(s_i)} = \frac{0{,}7\ *\ 400 + 400}{400 + 400} = \frac{680}{800} = 0.85$$

We berekenen eerst β^*_j volgens formule (4.10):

$$\beta^*_j = \frac{\beta_j - \rho\beta_i}{\sqrt{\{1 - \rho^2\}}} = \frac{4{,}2 - (0{,}85)(4{,}2)}{\sqrt{\{(1 - 0{,}85^2)\}}} = 1{,}20$$

Voor $P(Z_i < 0$ en $Z_j < 0)$ volgt dan op grond van (4.13):

$$P(F_i \text{ en } F_j) = 2\ \phi(-\ \beta_i)\ \phi(-\ \beta^*_j) = 0{,}24\ \phi(-\ \beta_i) = 0{,}24\ P(F_i)$$

Via bovengrensformule (4-15) toegepast op 7 elementen, volgt nu:

$$P(F) \leqslant P(F_1) + 6\ \{P(F_i) - P(F_i \text{ en } F_j)\} = 5{,}6\ P(F_i)$$ $\Rightarrow P(F_1) + 6 F_1 - 6 \cdot 0{,}24\ P(F_1)$

↳ ? $(P F_i = P F_j)$

En m.b.v. ondergrensformule (4-16) volgt:

$$P(F) \geqslant P(F_1) + \{P(F_2) - P(F_1 \text{ en } F_2)\} + P(F_3) - \{P(F_i \text{ en } F_j)\} + \ldots =$$

$$= 5\ P(F_1) - 10\ P(F_1 \text{ en } F_2) = 2{,}6\ P(F_i)$$

↳ 5 omdat formule voor 6 elementen nog is

Vergelijken we deze Ditlevsen-grenzen met de elementaire grenzen (4-15) dan zien we dat het interval is gereduceerd van $P(F_i) \leq P(F) \leq 7,0\ P(F_i)$ tot $2,6\ P(F_i) \leq P(F) \leq 5,6\ P(F_i)$.

Merk op dat de bijdrage van staaf 5 aan de ondergrens nog maar net positief is; voor het zesde element is de bijdrage negatief en moet de formule worden afgebroken.

Continue serie-systemen (geen examenstof)

Tenslotte beschouwen we een continu serie systeem (dijklichaam, betonbalk enz.) zoals weergegeven in figuur 4.6. Aangenomen wordt dat de sterkte van het systeem in elk punt een stochastische grootheid is met (constant) gemiddelde $\mu(R)$ en (constante) standaardafwijking $\sigma(R)$. De sterkte in twee verschillende punten x_1 en x_2 wordt als gecorreleerd beschouwd, waarbij de waarde van de correlatie-coëfficiënt alleen afhangt van de afstand $\Delta x = x_2 - x_1$. Als Δx heel klein is zal ρ dicht bij de waarde 1 liggen omdat hele grote verschillen op korte afstand onwaarschijnlijk zijn. Voor grote waarden van Δx neemt ρ steeds verder af, hetzij tot een limiet nul, hetzij tot een limiet ongelijk nul. Een veel gebruikte uitdrukking voor de correlatiefunctie is (zie figuur 4.6).

$$\rho\{R(x),\ R(x + \Delta x)\} = \exp\left\{-\left(\frac{\Delta x}{d}\right)^2\right\} \qquad (4\text{-}17)$$

Hierin is d de zogenaamde correlatie-afstand.

De meest voor de hand liggende methode om een dergelijk probleem aan te pakken is om het beschouwde continue systeem op te delen in discrete elementen. Binnen een element wordt de sterkte dan als een niet-fluctuerende (volledig gecorreleerde) grootheid beschouwd, en kan op de gebruikelijke wijze een betrouwbaarheidsindex β_i worden bepaald. Voor berekening van de systeemfaalkans heeft nu de elementaire formule (4-14) weinig betekenis. Indien men het systeem in meer elementen verdeelt, blijft de kans per element gelijk en neemt de bovengrens evenredig met het aantal elementen toe. Voor de bepaling van een bovengrensbenadering moeten we ons daarom baseren op formule (4-15). Na opdeling in n identieke elementen volgt daarmee:

$$P(F) = P(F_1) + (n-1)\left\{P(F_i) - \max_{j<i} P(F_i \text{ en } F_j)\right\}$$

De correlatie tussen twee elementen is het grootst als deze naast elkaar liggen; dientengevolge is ook $P(F_i$ en $F_j)$ maximaal voor aangrenzende elementen:

$$P(F) = P(F_1) + (n-1)\left\{P(F_i) - P(F_i \text{ en } F_{i-1})\right\}$$

Daar alle elementen dezelfde betrouwbaarheidsindex β bezitten:

$$P(F) = \phi(-\beta) + (n-1)\left\{\phi(-\beta) - 2\ \phi(-\beta)\ \phi\left(-\beta\ \frac{1-\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)\right\}$$

De correlatie-coëfficiënt ρ is hier gelijk aan de correlatie-coëfficiënt $\rho(Z_i Z_{i-1})$ van twee mechanismen, met $Z_i = R_i - S$ waarbij de R_i gecorreleerd zijn volgens (4-17). Gaan we er (gemakshalve) van uit dat de belasting S deterministisch dan is $\rho(Z_i Z_{i-1}) = \rho(R_i R_{i-1}) = \exp(-(\Delta x/d)^2)$.
Bij een groot aantal elementen is Δx klein en ligt ρ dicht bij 1. We maken gebruik van de benadering:

$$\rho \approx 1 - (\Delta x/d)^2 \quad \text{en} \quad \rho^2 \approx 1 - 2(\Delta x/d)^2$$

De formule voor P(F) kan daarmee verder worden ontwikkeld tot:

$$P(F) = \phi(-\beta)\ [1 + (n-1)\ \{1 - 2\ \phi(-\beta\ \frac{\Delta x}{d\sqrt{2}})\}]$$

Voor kleine u kan $\phi(u)$ benaderd worden als:

$$\phi(u) = \phi(0) + u\ \phi'(0) = \tfrac{1}{2} + \frac{u}{\sqrt{2\pi}}$$

Hiervan gebruik makend volgt:

$$P(F) = \phi(-\beta)\ [1 + (n-1)\ \{1 - 1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\beta\Delta x}{d\sqrt{2}}\}]$$

$$P(F) = \phi(-\beta)\ [1 + \frac{(n-1)\ \beta\Delta x}{d\sqrt{\pi}}]$$

Neem nu $\Delta x = L/n$, en bedenk dat n groot is:

$$P(F) = \phi(-\beta)\ \{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\ \frac{L}{d}\} \qquad (4\text{-}18)$$

We concluderen dat de benadering niet meer afhankelijk is van het aantal elementen n waarin het continue systeem is onderverdeeld.
Een interessante interpretatie van (4-18) is de volgende: als L/d groot is kan het systeem opgedeeld gedacht worden in elementen met een lengte $d\sqrt{\pi}/\beta$; deze elementen mogen dan als statistisch ongecorreleerd worden beschouwd.

Tenslotte: bij de afleiding van formule (4-18) is verondersteld dat $\sigma(S) = 0$. Als $\sigma(S) \neq 0$ gaat (4-18) over in:

$$P(F) = \phi(-\beta)\ \{1 + \alpha_R\ \frac{\beta L}{\sqrt{\pi}d}\} \qquad (4\text{-}19)$$

Hierin is $\alpha_R^2 = \sigma_R^2/(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)$ (ga dit na).

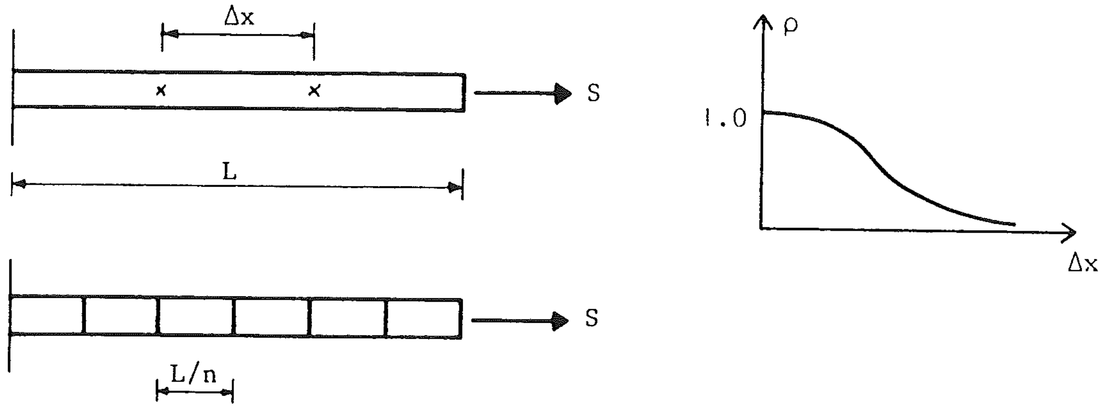


Fig. 4.6

4.3 Het parallelsysteem

Een parallelsysteem wordt in zijn algemeenheid gekenmerkt door het feit dat elementen elkaar kunnen compenseren: het falen van één element leidt niet automatisch tot falen van het systeem. De wijze waarop dat gebeurt kan overigens nogal verschillen. Vergelijk bijvoorbeeld de parallelsystemen van de figuren 4.7a en 4.7b. In figuur 4.7a wordt een gebied tegen inundatie beschermd door twee waterkeringen. Als de primaire kering faalt, treedt niet onmiddellijk inundatie op omdat dan de tweede kering in werking treedt. Pas als ook de tweede kering faalt, faalt het systeem als geheel. Een dergelijk systeem is eigenlijk de zuivere tegenhanger van het serie-systeem: het seriesysteem faalt als één van de elementen faalt, het parallelsysteem werkt als één van de elementen werkt. Mathematisch zijn de beide systemen dan ook gelijkwaardig als men faalkansen door succeskansen vervangt en omgekeerd. Hierop wordt nader teruggekomen bij het hoofdstuk over de systeemanalyse m.b.v. fouten- en gebeurtenissenbomen.
In dit hoofdstuk zullen we ons bezighouden met het andere type parallelsystemen, namelijk dat van figuur 4.7b. Getekend is een portaal met twee kolommen waarop een horizontale belasting werkt. Deze belasting wordt door beide opgenomen en het systeem faalt als de belasting groter is dan de som van de twee kolomcapaciteiten. De sterkte van het systeem is dus gelijk aan:

$$R = R_1 + R_2 \qquad (4\text{-}20)$$

waarbij R_i de maximale reactiekracht is die door kolom i geleverd kan worden.
Voor de geldigheid van formule (4-20) is het overigens van belang dat het last-verplaatsingsdiagram van een enkele kolom een ductiel (taai) karakter heeft. Deze eis is nader toegelicht in figuur 4.8a en 4.8b. Bij een taai gedrag (met een horizontaal vloeitraject) wordt (4-20) inderdaad volledig gehaald. Bij een bros gedrag echter kan, afhankelijk van de stijfheidsverhoudingen de draagkracht van het systeem lager zijn dan de som van de componentensterkten.

Een praktisch voorbeeld hiervan is de dwarskrachtcapaciteit van een gewapend betonbalk: zowel het beton als de wapening leveren een bijdrage: het beton (met een bros karakter) echter bij een lagere vervorming dan het staal. Beide capaciteiten mogen dan ook niet zonder meer worden opgeteld.

Uiteraard zijn "bros" en "ductiel" op zich ook weer uitersten van een scala van mogelijkheden. Meestal bevindt de werkelijkheid zich er ergens tussenin. In het algemeen zal een constructeur er echter naar streven de constructie zo "ductiel" mogelijk te maken: dit verhoogt in het algemeen de draagkracht en de reserve. Om die reden, maar ook vanwege de betere mathematische toegankelijkheid zullen we ons verder beperken tot het ductiele parallelsysteem.

Ductiel parallelsysteem met 2 elementen

De draagkracht van dit systeemtype is reeds gegeven door (4-20). Voor het gemiddelde $\mu(R)$ en de standaardafwijking $\sigma(R)$ volgt daarmee:

$$\mu(R) = \mu(R_1) + \mu(R_2) \tag{4-21}$$

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(R_1) + 2\rho\sigma(R_1)\sigma(R_2) + \sigma^2(R_2) \tag{4-22}$$

2.62

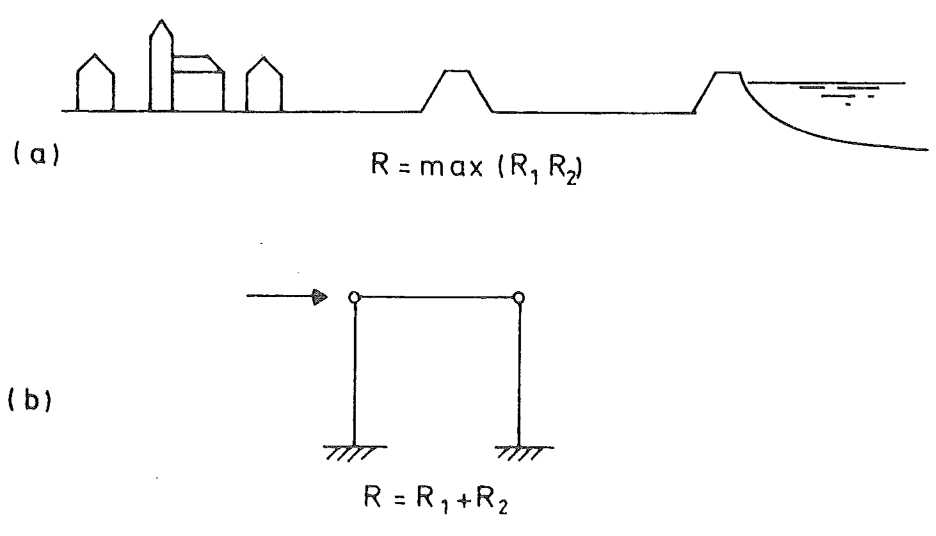


Fig. 4.7 Verschillende soorten parallelsystemen.

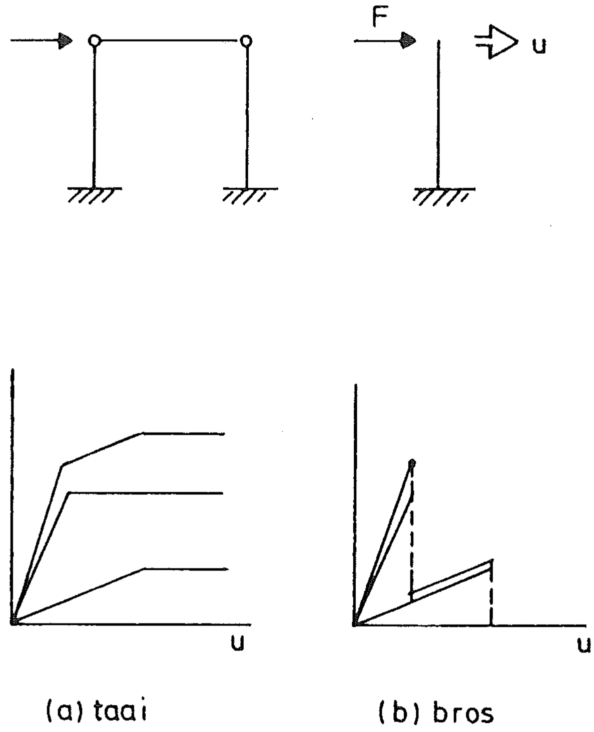


Fig. 4.8 Parallelsystemen voor taai en bros gedrag.

Als aangenomen wordt dat beide elementen dezelfde statistische eigenschappen bezitten, geldt:

$$\mu(R) = 2\mu(R_i) \tag{4-23}$$

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(R_i)\,\{2 + 2\rho\} \tag{4-24}$$

Interessant is om na te gaan wat de variatiecoëfficiënt V(R) van het systeem wordt:

$$V(R) = \frac{\sigma(R)}{\mu(R)} = \frac{\sigma(R_i)\,\sqrt{\{2 + 2\rho\}}}{2\,\mu(R_i)} = V(R_i)\,\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \rho)} \tag{4-25}$$

Als de elementen onafhankelijk zijn ($\rho = 0$) daalt de variatiecoëfficiënt van het systeem tot 0,7 maal de variatiecoëfficiënt van één element. De parallelschakeling heeft dus een gunstige werking omdat de relatieve spreiding afneemt en daarmee het systeem betrouwbaarder wordt dan zijn componenten. Dit effekt vermindert overigens naarmate de componenten meer gecorreleerd zijn en is bij volledige afhankelijkheid ($\rho = 1$) helemaal verdwenen.

Ductiel parallelsysteem met n-elementen

Voor een systeem met n elementen met gelijk gemiddelde en standaardafwijking geldt:

$$\mu(R) = \Sigma\ \mu(R_i) = n\mu(R_i) \tag{4-26}$$

$$\sigma^2(R) = \Sigma\ \Sigma\ \rho_{ij}\ \sigma(R_i)\ \sigma(R_j) = \sigma^2(R_i)\ \Sigma\ \Sigma\ \rho_{ij} \tag{4-27}$$

We werken dit nader uit voor verschillende gevallen:

1. Onafhankelijke elementen

voor $i = j$ $\rho = 1$

Met $\rho_{ij} = 0$ voor $i \neq j$ wordt (4-27):

$V(R) = V(R_1) \cdot \sqrt{\frac{1}{n}(1+\rho)}$

$$\sigma^2(R) = n\ \sigma^2(R_i) \tag{4-28}$$

$\approx V(R_1) \sqrt{\frac{1}{n}}$

Voor de variatiecoëfficiënt van het systeem volgt:

$$V(R) = V(R_i)/\sqrt{n} \tag{4-29}$$

$V(R) = \frac{\sigma R}{\mu R} = \frac{\sqrt{n}\,\sigma R_1}{n\,\mu R_1} = \frac{1}{\sqrt{n}} V(R^1)$

Dit is de reeds eerder geconstateerde afname van de relatieve spreiding bij onafhankelijke elementen.

bv A B C D E
A² AB AC AD AE
AB B² BC DB BE
geeft n² combinaties waarvan 5 met $\rho = 1$
A², B², C², D², E²

2. Gelijk-gecorreleerde elementen

Met $\rho_{ij} = \rho$ voor $i \neq j$ en $\rho_{ij} = 1$ voor $i = j$

voor deze n geldt $\rho = 1$

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(R_i)\ \{n + (n^2-n)\ \rho\} \tag{4-30}$$

$$V(R) = V(R_i)\ \sqrt{(1 - \frac{1}{n})\ \rho + \frac{1}{n}} \tag{4-31}$$

$= V(R_1)\frac{\sqrt{n + (n^2-n)\rho}}{n} = V(R_1)\sqrt{\frac{1}{n} + (1-\frac{1}{n})\rho}$

Voor grote n gaat V(R) naar $V(R)_i)\ \sqrt{\rho}$

3. Correlatie die afneemt met de afstand

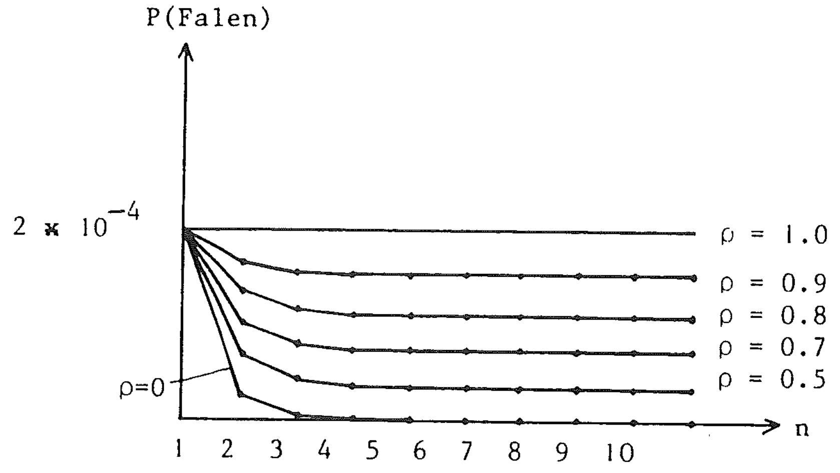
Als $\rho_{ij} = \exp\ \{-(\Delta i/m)^2\}$ met $\Delta i = i-j$ (d.w.z. de correlatie is hoog voor dicht bij elkaar gelegen elementen en laag voor elementen die verder van elkaar verwijderd zijn) dan volgt (zonder bewijs) voor grote n en m

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(R_i)\ \sqrt{\pi}\ n\ m \tag{4-32}$$

$$V(R) = V(R_i)\ \sqrt{\frac{m\sqrt{\pi}}{n}}$$

Een dergelijk systeem van n gecorreleerde elementen kan men dus vervangen denken door een systeem van $n/m\sqrt{\pi}$ ongecorreleerde elementen.

Als het systeem belast wordt door een stochastische belasting S, dan hangt de faalkans natuurlijk ook af van $\mu(S)$ en $\sigma(S)$. In figuur 4.9 is de faalkans weergegeven als functie van het aantal elementen en hun onderlinge (constante) correlatie. Bij de berekening is uitgegaan van $\mu(R)/\mu(S) = 2$, $V(R_i) = 0{,}10$ en $V(S) = 0{,}20$.



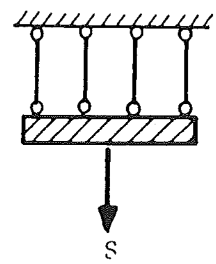
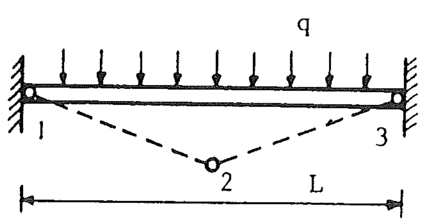
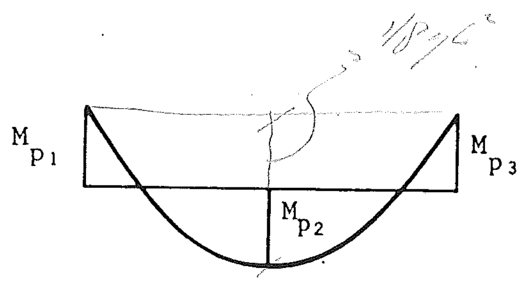


Fig. 4.9 Faalkans voor parallelsysteem met n onderling gelijk gecorreleerde elementen met $\mu(R) = 2\ \mu(S)$ en $V(R_i) = 0{,}10$, $V(S) = 0{,}20$.

Voorbeeld 4.4





Een ingeklemde stalen ligger met overspanning L wordt belast door een gelijkmatige belasting q. De ligger bezwijkt als zich drie plastische scharnieren hebben ontwikkeld, te weten één in het veld en twee bij de inklemmingen. De betrouwbaarheidsfunctie Z luidt:

$$Z = \tfrac{1}{2}\ Mp_1 + Mp_2 + \tfrac{1}{2}\ Mp_3 - \frac{1}{8}\ qL^2$$

In dit parallelsysteem komen dus gewichtsfaktoren voor die bepaald worden door de mechanica-eigenschappen van het systeem.
Als statistische eigenschappen gaan we uit van:

X	$\mu(X)$	$V(X)$
Mp_i	90 kNm	10%
q	20 kN/m	20%
L	6 m	-

Van belang is verder de afhankelijkheid van de momenten Mp_i. Beschouw eerst <u>volledige afhankelijkheid</u>:

$$Z = 2Mp_i - \frac{1}{8} qL^2$$

$\sigma^2(z) = (2\times 9)^2 + (\frac{1}{8}\cdot 36\cdot 4)^2 = 18^2 + 18^2$

$$\mu(Z) = 180 - \frac{1}{8}(20)6^2 = 90 \text{ kNm}$$

$$\sigma^2(Z) = (18)^2 + (18)^2 = (25{,}5 \text{ kNm})^2$$

$$\beta = 90/25{,}5 = 3{,}54$$

$$P(F) = 0{,}20 * 10^{-3}$$

Vervolgens nemen we de Mp_i <u>volledig onafhankelijk</u>; hierdoor verandert niet het gemiddelde van Z maar wel de standaardafwijking:

$$\sigma^2(Z) = (4{,}5)^2 + (9)^2 + (4{,}5)^2 + (18)^2 = (21{,}1 \text{ kNm})^2$$

$$\beta = 90/21.1 = 4.3$$

$$P(F) = 0.8 * 10^{-5}$$

De werkelijkheid zal tussen beide extremen inliggen, maar vermoedelijk het dichtst bij volledige correlatie. Het is niet waarschijnlijk dat zich binnen een stalen balk van 6 m lengte erg grote verschillen zullen voordoen. Laten we bij wijze van voorbeeld aannemen dat $\rho_{12} = \rho_{23} = 0{,}9$ en $\rho_{13} = 0{,}8$ (vanwege de grotere afstand). In dat geval volgt:

$$\sigma^2(Z) = \{\Sigma\,\Sigma\, \rho_{ij}\, c_i c_j\, \sigma(Mp_i)\, \sigma(Mp_j)\} + \frac{1}{64} L^4 \sigma^2(q)$$

Hier zijn c_i de coëfficiënten behorende bij Mp_i in de betrouwbaarheidsfunctie, ofwel $c_1 = c_3 = 0{,}5$ en $c_2 = 1{,}0$.

$i=1 \quad j=1,2,3$

$i=2$

$i=3$

Uitwerken hiervan:

$$\sigma^2(Z) = \sigma^2(Mp_i)\ \{\Sigma\,\Sigma\, \rho_{ij}\, c_i c_j\} + \{\frac{1}{8} L^2 \sigma(q)\}^2 =$$

$$= 9^2\ \{\underbrace{(0{,}5)^2}_{11} + \underbrace{(1)^2}_{22} + \underbrace{(0{,}5)^2}_{33} + 2(0{,}9)(0{,}5)(1) + 2(0{,}8)(0{,}5)^2 +$$

$$+ 2(0{,}9)(1)(0{,}5)\} + 18^2 = (25{,}0 \text{ kNm})^2$$

Daarmee volgt tenslotte:

$$\beta = 90/25{,}0 = 3{,}60$$

$$P(F) = 0{,}16 * 10^{-3}$$

De correlatie doet, zoals verwacht kon worden, het gunstige paralleleffekt vrijwel helemaal teniet.

Continue parallel-systemen (geen examenstof)

Tenslotte beschouwen we nog een continue parallel systeem (bijvoorbeeld het glijvlak van fig. 4.2) waarbij de sterkte niet gegeven wordt door een som maar door een integraal:

$$R = \int_0^a r(x)\, dx \tag{4-34}$$

Als het gemiddelde $\mu(r)$ en de standaardafwijking $\sigma(r)$ constant zijn geldt (vgl. (4-26) en (4-27)):

$$\mu(R) = a\mu(r) \tag{4-35}$$

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(r) \int_0^a \int_0^a \rho\{r(x_1)\ r(x_2)\}\, dx_1\, dx_2 \tag{4-36}$$

Als $\rho(r(x_1)\ r(x_2))$ alleen afhangt van het verschil $\Delta x = x_2 - x_1$ en gegeven wordt door (4-17), kan worden aangetoond dat voor grote a/d geldt:

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(r).(\sqrt{\pi}\, ad) \tag{4-37}$$

$$V(R) = V(r) \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} d}{a}} \tag{4-38}$$

Men kan het continue systeem derhalve opvatten als een discreet systeem bestaande uit $n = a/d\sqrt{\pi}$ onafhankelijke elementen met lengte $d\sqrt{\pi}$, gemiddelde $\mu(r)\ d\sqrt{\pi}$ en standaardafwijking $\sigma(r)\ d\sqrt{\pi}$.

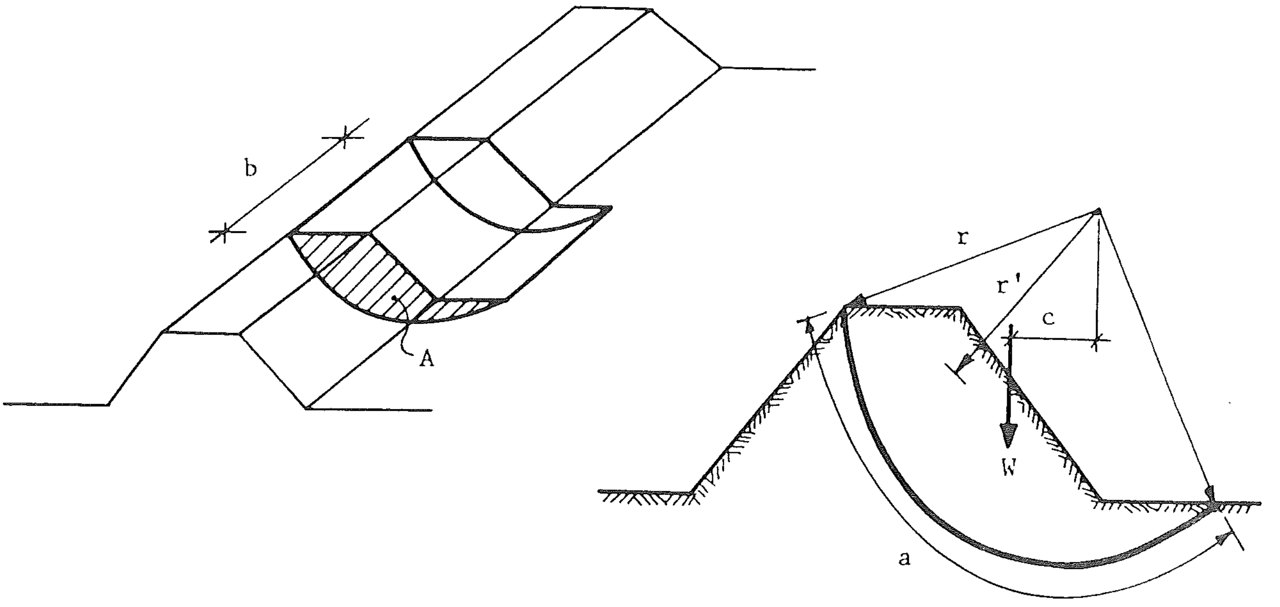
Voorbeeld 4.5 (overgenomen uit [4.2])

Beschouw de dijk van figuur 4.10a. Getekend is een cylindervorming glijvlak waarbij de lengte van de cirkelboog a en de breedte van het glijvlak b genoemd is. We definiëren nu de stabiliteitsfactor f als de verhouding van het weerstandbiedend moment M_r en het aandrijvend moment M_s:

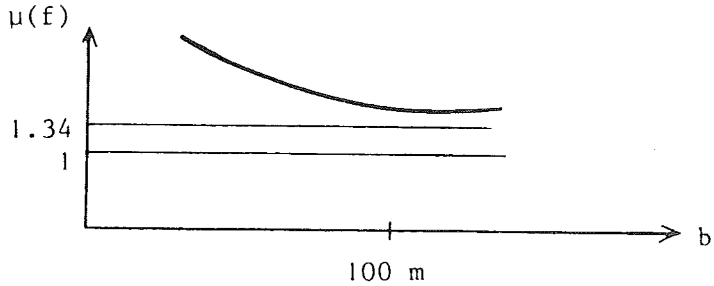
$$f = \frac{M_r}{M_s} = \frac{\bar{s}.a.b.r + 2A\ r'\ \bar{s}_A}{Wbc}$$

Hierin is r de straal van de glijcirkel, A het oppervlak en r' de effectieve arm van kopvlakken, W is het gewicht per lengte en c de excentriciteit; $\bar{s}$ en $\bar{s}_A$ zijn de ruimtelijk-gemiddelde ongedraineerde schuifsterkten, waarbij $\bar{s}$ bijvoorbeeld gegeven wordt door:

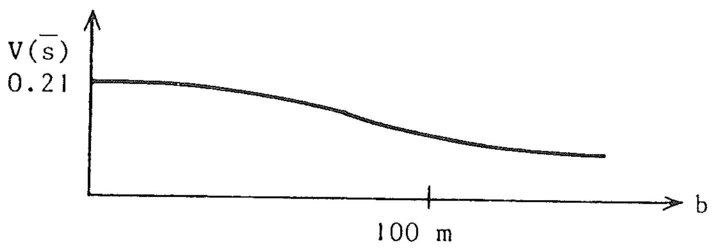
$$\bar{s} = \frac{1}{ab} \int \int s(\phi,x)\ r d\phi.dx$$



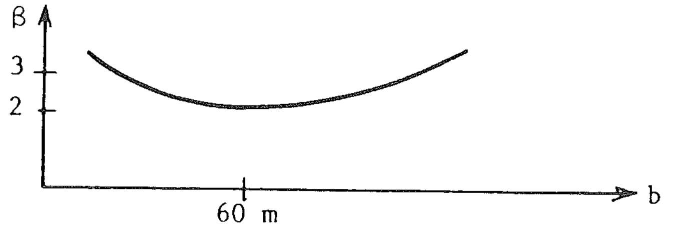
(a) gegevens: r = 16 m, r' = 10 m, a = 12 m. c = 10 m, A = 90 m^2
W = 1800 kN/m



(b) gemiddelde stabiliteitsfactor als functie van b



(c) variatie-coëfficiënt gemiddelde schuifsterkte



(d) betrouwbaarheidsindex β

Fig. 4.10

Aangenomen wordt dat s een stochastische grootheid is met gemiddelde $\mu(s) = 130\ kN/m^2$, een variatiecoëfficiënt V(s) = 0.31 en een correlatiepatroon volgens (vergelijk 4-17):

$$\rho = \exp\left\{-\left(\frac{\Delta x}{d_x}\right)^2 - \left(\frac{r\Delta\phi}{d_c}\right)^2\right\}$$

Dit patroon is dus een tweedimensionale uitbreiding van (4-17).

We bepalen eerst m.b.v. de gegevens van figuur 4.9 de gemiddelde waarde van f als functie van de glijvlakbreedte b. Bijvoorbeeld voor b = 100 m volgt:

$$\mu(f) = \frac{(130)(12)(100)(16) + 2(90)(10)(150)}{(1800)(12)(100)} = 1{,}46$$

Het volledige resultaat is uitgezet in figuur 4.10b. Het blijkt dat $\mu(f)$ een dalende functie is van b met als limietwaarde voor $b \to \infty$: $\mu(f) = 1.34$.

Vervolgens beschouwen we de spreiding. Voor de variatiecoëfficiënt van s geldt, als 4-38 zowel in x-richting als langs de cirkel wordt toegepast:

$$V(\bar{s}) = V(s)\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}\, d_x}{b}}\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}\, d_c}{a}} = V(s)\ \pi\sqrt{\frac{d_x}{b}\cdot\frac{d_c}{a}}$$

Voor b = 90 m volgt:

$$V(\bar{s}) = (0.31)\sqrt{\pi\ \frac{25}{100}\cdot\frac{3}{12}} = 0{,}14$$

In figuur 4.10 is $V(\bar{s})$ als functie van b weergegeven (bedenk dat voor kleine waarden van b benadering (4-38) niet meer geldig is). We stellen nu gemakshalve $V(f)$ gelijk aan $V(\bar{s})$ waarna een betrouwbaarheidsindex β bepaald kan worden uit

$$\beta = \frac{\mu(f) - 1}{\sigma(f)}$$

Dit resultaat, eveneens als functie van b, is uitgezet in figuur 4.10d. Het blijkt dat bij b = 60 m de betrouwbaarheidsindex β een minimum bereikt. Bij een kleinere waarde van b is de veiligheid groter omdat de bijdrage van de kopvlakken tot een hoge $\mu(f)$ leidt. Bij grotere waarde van b leidt de daling van $V(\bar{s})$ (parallelwerking) tot een dusdanige vermindering van de onzekerheid, dat β weer op kan lopen. We constateren dat het probabilistische model leidt tot een meer realistisch resultaat (eindige glijvlakbreedte) dan het deterministische model.

4.4 Systeemoverwegingen bij het ontwerpen

De gegeven theoretische explicaties over de eigenschappen van systemen komen op dit moment nog niet of nauwelijks in aanmerking voor directe en kwantitatieve toepassing in de praktijk. Wel kunnen een aantal bruikbare kwalitatieve conclusies worden getrokken:

- zorg dat een systeem voldoende reserve en redundancy (overtolligheid, parallelwerking) bezit; de veiligheid kan daardoor sterk toenemen, vooropgesteld dat de parallel geschakelde elementen niet volledig statistisch afhankelijk zijn;

- zorg ervoor, dat een parallelsysteem voldoende ductiliteit (taaiheid) bezit;

- elk serie-geschakeld element en elk faalmechanisme verhoogt de faalkans, tenzij volledige correlatie aanwezig is. Vermijdt daarom een zeer groot aantal mechanismen die alle dezelfde faalkans bezitten. Beter is het daar, waar dat eenvoudig kan, een extra veiligheid in te bouwen of over te dimensioneren. Faalkansen in de orde van de geaccepteerde systeemfaalkans moet men uitsluitend reserveren voor de hoofdmechanismen.

Literatuur

4.1 Ditlevsen, O.
Narrow bounds for Structural Systems
Journal of Structural Mechanics, proc. ASCE Vol.1 No. 4 1979 pag. 453-472.

4.2 Vanmarcke, E.
Reliability of earth slopes
Journal Geot. Div., proc. ASCE GT 11, Vol. 103, 1977.

5. STERKTE EN LEVENSDUUR

5.1 Modellen voor de sterkte

De materiaalsterkte zoals die gehanteerd wordt bij de berekening van constructies, is in beginsel een macroscopisch begrip. De breuk- of vloeispanning van een materiaal wordt bepaald door de totale kracht op een proefstuk (trekstaaf, kubus) te delen door het oppervlak. Het is duidelijk dat op deze wijze voorbij wordt gegaan aan het krachtenspel in het proefstuk waarbij de inwendige structuur (korrels, vezels) en de aanwezigheid van defecten (microscheuren, dislocaties, kwasten) een belangrijke rol spelen. Het proefstuk is eigenlijk weer een constructie op zich. Vanuit die gedachte ligt het voor de hand het macromateriaalgedrag te analyseren met behulp van de theorie van systemen.

Een materiaal met een bros gedrag (porcelein, steen) doet inderdaad in sterke mate denken aan een seriesysteem en een materiaal met een ductiel gedrag (staal) aan een parallelsysteem. De meeste materialen zijn in werkelijkheid combinaties van beide, maar dat neemt niet weg dat het zinvol is beide ideaal-schematiseringen te bestuderen.

5.2 Bros materiaalgedrag

Het meest ontwikkeld is de theorie van de brosse breuk (weakest link) waarvoor de grondslag werd gelegd door Weibull [5.1] in 1939 en die later uitgewerkt is door met name Freudenthal [5.2] en [5.3]. De grondgedachte is dat een materiaal opgebouwd gedacht kan worden uit een aantal elementaire cellen (figuur 5.1). Iedere cel heeft een bepaalde kansverdeling voor de sterkte. Meestal wordt het voorgesteld alsof in ieder element een aantal defecten aanwezig is van verschillende aard. Deze defecten zijn random door het materiaal verdeeld. Het is dus zuiver aan het toeval te wijten of een bepaalde cel wel of niet het defect bezit dat bij een bepaalde spanning tot breuk leidt. Verder wordt aangenomen, dat een breuk in één cel zich onmiddellijk voortplant over het gehele proefstuk. Op die manier vormen alle elementaire cellen een seriesysteem van onafhankelijke elementen.

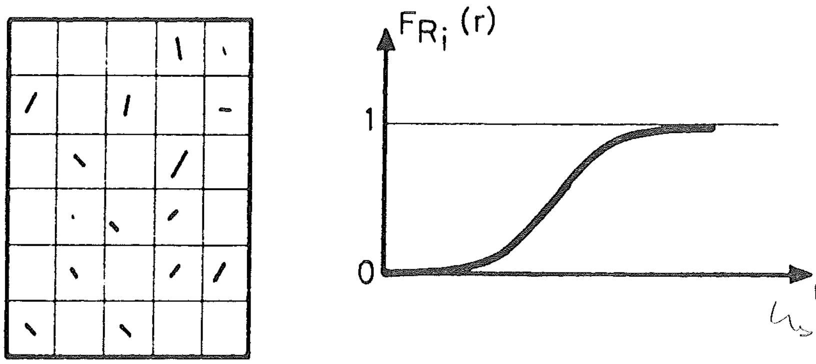
Veronderstel dat de faalkans van elementaire cel i voor het niveau r gegeven wordt door:

r_i = sterkte

$$P_i = P\{R_i < r\} = F_{Ri}(r) \qquad (5\text{-}1)$$

Aangezien we geïnteresseerd zijn in de kleinste van een groot aantal elementen, is vooral het gedrag van $F_{Ri}(r)$ bij de lage waarden van r van belang.

verdelingsfunctie sterkte uit proefstuk



ks sterkte

Fig. 5.1 Opdeling van een materiaal in een aantal elementaire cellen; de sterkte van een cel is afhankelijk van een random-defect.

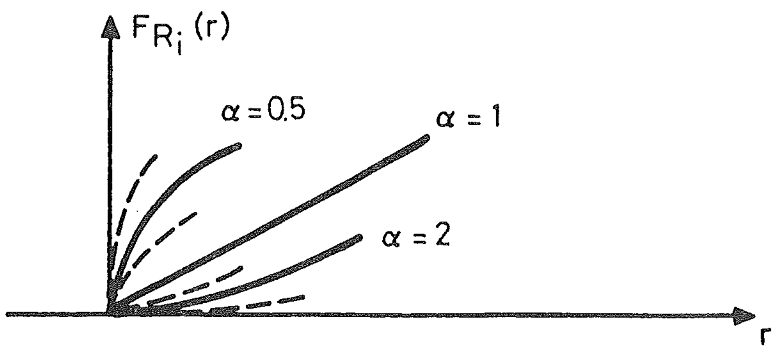


Fig. 5.2 Mogelijke vormen van de linker staart voor $F_{Ri}(r) = (r/r_c)^{\alpha}$.

In de theorie van de brosse breuk wordt aangenomen dat het gedrag van $F_{Ri}(r)$ voor kleine $F_{Ri}(r)$ goed beschreven kan worden door:

$$F_{Ri}(r) = \left(\frac{r}{r_c}\right)^{\alpha} \quad \text{voor } F_{Ri}(r) \ll 1 \text{ en } r > 0 \qquad (5\text{-}2)$$

schaalparameter

Figuur 5.2 maakt duidelijk dat een redelijke vrijheid bestaat in mogelijke vormen voor de staart van $F_{Ri}(r)$. Negatieve waarden van r zijn bij voorbaat geëlimineerd.

De kans dat het gehele systeem van n elementen ($n \gg 1$) een sterkte R heeft hoger dat r, wordt in analogie van het serie-systeem (zie 4.2) gegeven door:

$$P(R > r) = P\{R_1 > r \text{ en } R_2 > r \text{ .. en } R_n > r\}$$

$$= P\{R_1 > r\}P\{R_2 > r\} \text{ .. } P\{R_n > r\}$$

$$= [P\{R_i > r\}]^n$$

$F_R(r) = P\{R<r\}$
$= 1 - P\{R>r\}$

$$= [1 - F_{Ri}(r)]^n$$

$= 1 - [P\{R_i > r\}]^n$

$$\simeq \exp\{-n\, F_{Ri}(r)\}$$

? Taylor Ja
zie blz
6.10

$= 1 - [1 - (\frac{r}{r_c})^\alpha]^n$

$$= \exp\{-n\, (\frac{r}{r_c})^\alpha\}$$

$= 1 - \exp\{-n\, (\frac{r}{r_c})^\alpha\}$

(r_c is schaalparameter)

Daarmee volgt voor de verdelingsfunctie van de materiaalsterkte:

$$F_R(r) = 1 - \exp\{-n\, (\frac{r}{r_c})^\alpha\} \qquad (5\text{-}3)$$

We herkennen hierin de Weibull-verdeling (zie hoofdstuk 2). Stel verder het volume van het basis-element gelijk aan v_o en het geheel beschouwde volume v; daarmee is $n = v/v_o$ en gaat (5-2) over in:

$$F_R(r) = 1 - \exp\{-(\frac{v}{v_o})(\frac{r}{r_c})^\alpha\} \qquad (5\text{-}4)$$

Door eenmaal differentiëren hiervan vindt men de dichtheidsfunctie van de Weibull-verdeling. De vorm wordt in sterke mate bepaald door de parameter α zoals weergegeven in figuur 5.3.

Het gemiddelde en de variatiecoëfficiënt worden gegeven door:

gemiddelde sterkte daalt
als n toeneemt
v_o/v <<

$$\mu(R) = r_c\, (\frac{v_o}{v})^{1/\alpha}\, \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \qquad (5\text{-}5)$$

zie fig 5.4

$$V(R) = \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 2/\alpha)}{\Gamma^2(1 + 1/\alpha)} - 1} \qquad (5\text{-}6)$$

We concluderen hieruit dat de gemiddelde sterkte kleiner wordt naarmate het volume v toeneemt (zie figuur 5.4); de variatiecoëfficiënt V(R) daarentegen blijft constant.

In (5.4) en (5.5) is $\Gamma(1 + z)$ de zogenaamde gamma-functie. De belangrijkste eigenschappen van deze functie zijn:

(1) als z geheel dan: $\Gamma(1 + z) = z!$, derhalve $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$ enz.
(2) algemeen geldt: $\Gamma(1 + z) = z\,\Gamma(z)$
(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Verder dient de Γ-functie te worden opgezocht in tabellen. Voor practische waarden van α (zeg $1 \leq \alpha \leq 10$) geldt overigens $0{,}88 \leq \Gamma(1 + 1/\alpha) \leq 1{,}0$ en $V \simeq 1/\alpha$.

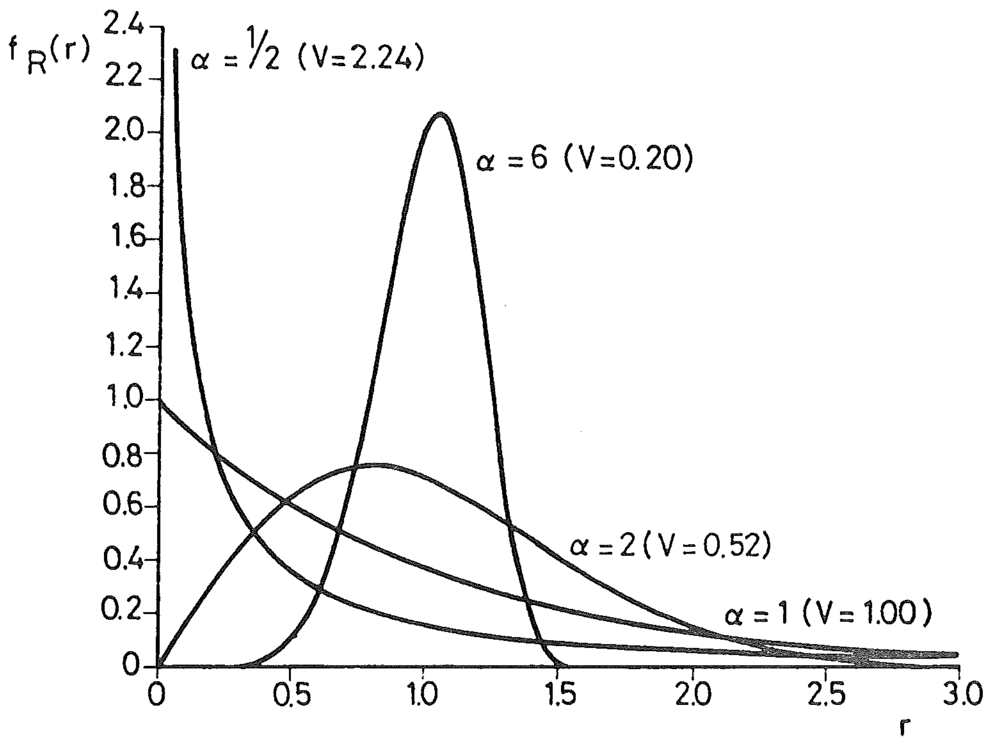


Fig. 5.3 Kansdichtheidsfunctie van de Weibull-verdeling voor verschillende waarden van α (voor alle curven geldt een gemiddelde waarde gelijk aan 1.0).

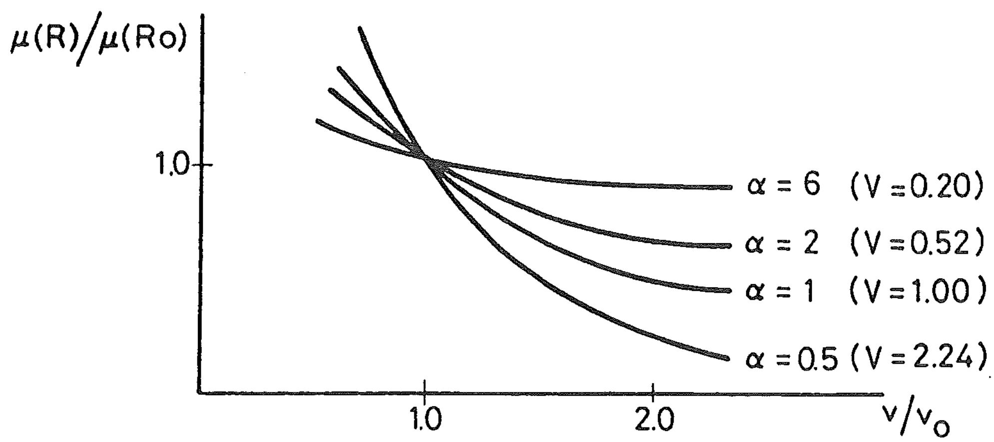


Fig. 5.4 Het gemiddelde $\mu(R)$ als functie van het volume voor verschillende waarden van α.

Voorbeeld 5.1

De Weilbull-verdeling is het eenvoudigst als $\alpha = 1$ (exponentiële verdeling).
Er geldt dan: $\Gamma(1 + 1/\alpha) = \Gamma(2) = 1.0$ en $\Gamma(1 + 2/\alpha) = \Gamma(3) = 2.0$.
Het gemiddelde en de variatiecoëfficiënt worden gegeven door:

$$\mu(R) = r_c \left(\frac{v_o}{v}\right)$$

$$V(R) = \sqrt{\frac{2}{1} - 1} = 1,0$$

Andere eenvoudige uitkomsten treden op als $\alpha = \frac{1}{2}$, 1/3 enz., maar deze zijn voor toepassingen minder interessant.

Voorbeeld 5.2 $\quad \Gamma(1+0,5) = 0,5\,\Gamma(0,5) \quad \Gamma(1+1) = 1! = 1$

Als $\alpha = 2$ kan via $\Gamma(1,5) = 0,5\ \Gamma(0,5) = 0,5\ \sqrt{\pi}$ en $\Gamma(2) = 1$, het gemiddelde en de variatiecoëfficiënt bepaald worden als:

$$\mu(R) = r_c \left(\frac{v_o}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(1,5) = \tfrac{1}{2}\, r_c \sqrt{\pi} \left(\frac{v_o}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\approx 0,94)$$

$$V(R) = \sqrt{\frac{1}{\pi/4} - 1} = 0,52$$

Voor $\alpha = 2$ komt de Weibull-verdeling precies overeen met de bekende Rayleigh-verdeling (zie ook figuur 5.3). (bv bij golfhoogten)

Voorbeeld 5.3

Neem aan dat betonkuben van 0,2 x 0,2 x 0,2 m^3 een gemiddelde sterkte hebben van 20 MPa en een variatiecoëfficiënt van 0,20. Gevraagd wordt met behulp van de brosse-breuk-theorie de gemiddelde sterkte te bepalen van een 4 m hoge kolom met afmetingen 0,4 x 0,4 m^2.

$$\mu(R_{kolom}) = r_c \left(\frac{v_o}{v_{kolom}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$\alpha = 6$
$\mu(R) = 4$
$V(R) \approx 0,20$

$$\mu(R_{kubus}) = r_c \left(\frac{v_o}{v_{kubus}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$V_{kubus} = V_o$

De onbekenden r_c en v_o kunnen worden gedimensioneerd; via V = 0,20 volgt verder $\alpha = 6$ zodat: ?

$V \approx 1/\alpha \Rightarrow V = 5$?

$$\mu(R_{kolom}) = \left(\frac{v_{kubus}}{v_{kolom}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \mu(R_{kubus}) = \left(\frac{1}{80}\right)^{\frac{1}{6}} * 20 = 0,48 \times 20 = 9,6 \text{ MPa}$$

$$\mu(R_{kolom}) = \left(\frac{V_o}{V_{kolom}} \cdot \frac{V_{kubus}}{V_{kubus}}\right)^{1/\alpha} \Gamma(1 + 1/\alpha)$$

(in werkelijkheid 0,85) (bv ...)

Meestal wordt de theorie nog uitgebreid met een ondergrensterkte. Aangenomen wordt dat geen enkele elementaire cel bezwijkt beneden de waarde r_o:

$$\mu(R_{kol}) = \left(\frac{V_{kubus}}{V_{kolom}}\right)^{1/\alpha} \underbrace{\left(\frac{V_o}{V_{kubus}}\right)^{1/\alpha} \Gamma(1 + 1/\alpha)}_{\mu(R_{kubus})}$$

$$F_{Ri}(r) = \left(\frac{r - r_o}{r_c}\right)^{\alpha}, \quad r > r_o \qquad (5\text{-}7)$$

Daarmee wordt de Weibull-verdeling:

$$F_R(r) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{v}{v_o}\right)\left(\frac{r - r_o}{r_c}\right)^{\alpha}\right\} \tag{5-8}$$

$$\mu(R) = r_o + r_c \left(\frac{v_o}{v}\right)^{1/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \tag{5-9}$$

$$V(R) = \frac{\mu(R) - r_o}{\mu(R)} \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 2/\alpha)}{\Gamma^2(1 + 1/\alpha)} - 1} \approx 1/\alpha \tag{5-10}$$

Of deze minimumsterkte werkelijk bestaat of niet is nooit met zekerheid aangetoond. Wel is waar dat de verschuivingsterm r_o aan de Weibull-verdeling een grote flexibiliteit geeft die het mogelijk maakt om uiteenlopend statistisch materiaal te beschrijven, vaak ook in gevallen waar de fysische achtergrond ontbreekt (bijvoorbeeld de verdeling van momentane windsnelheden of golfhoogten).

Een aardige verificatie van de theorie is gedaan door Pisarenko en beschreven in Bolotin [5.4]. Pisarenko heeft proeven gedaan op een metaal-keramische legering met volumina van 911, 7290 en 17280 mm^3. De gemiddelden bedroegen resp. 9,9, 11,5 en 14,9 kg/m^2. Indien 17280 mm^3 als standaardvolume v_o wordt aangehouden kan m.b.v. formule (5-9) bepaald worden dat:

$$r_o = 1 \text{ kg/m}^2 \qquad r_c = 9 \text{ kg/m}^2 \qquad \alpha = 7{,}25$$

De variatiecoëfficiënt zou theoretisch op grond van (5-10) 16% moeten bedragen. Gemeten bij de diverse afmetingen zijn achtereenvolgens: 12%, 12% en 16%, ofwel gemiddeld 13%.

<u>Voorbeeld 5.4</u>

Voor beton bedraagt, eveneens volgens Bolotin, de α-waarde 3 en geldt bij $v_o = 0{,}1 * 0{,}1 * 0{,}1 \text{ m}^3$:

$$\mu(R) = \mu(R_o) \left[0{,}58 + 0{,}42 \left(\frac{v_o}{v}\right)^{1/3}\right]$$

De minimumsterkte van beton zou derhalve gelijk zijn aan 58% van de gemiddelde sterkte bij $v_o = 0{,}001 \text{ m}^3$. Met behulp hiervan maken we nogmaals de berekening van voorbeeld 5.3. Eerst de gemiddelden voor de 0,2 * 0,2 * 0,2 kubus en de kolom:

$$\mu(R_{0,008}) = \mu(R_{0,001}) \left[0{,}58 + 0{,}42 \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}\right] = 0{,}79\, \mu(R_{0,001})$$

$$\mu(R_{kolom}) = \mu(R_{0,001}) \left[0{,}58 + 0{,}42 \left(\frac{1}{640}\right)^{1/3}\right] = 0{,}63\, \mu(R_{0,001})$$

Derhalve

$$\mu(R_{kolom}) = 0{,}80\ \mu(R_{0{,}008})$$

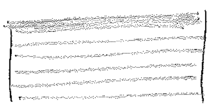
M.b.v. formule (5-10) valt te berekenen dat voor $v = 0{,}001\ m^3$, $0{,}008\ m^3$ en $0{,}0640\ m^3$ de variatiecoëfficiënt respectievelijk 0,15, 0,10 en 0,03 bedraagt. Deze resultaten zijn, afgezien van de $v = 0{,}03$ voor de kolom, realistischer dan die verkregen met $r_o = 0$.

Uiteraard kan de theorie nog verder worden uitgebreid. Tot nu toe is bij de volumevergroting ervan uitgegaan dat de spanning in elk punt even groot was. In een constructie wordt echter meestal niet elk punt tot het maximum belast. Bijvoorbeeld bij zuivere buiging is alleen de randzône zwaar belast. In de neutrale lijn is de kans op bezwijken nul; als $r \neq 0$ is er zelfs een eindig gebied waar de kans nul is.

5.3 Het ductiel materiaalgedrag

Zoals het seriesysteem model staat voor een ideaal bros materiaal, zo staat het parallelsysteem model voor ideaal ductiel materiaal. Beschouw wederom het materiaalvolume opgebouwd uit $n = v/v_o$ elementaire delen, dan volgt op grond van de formules voor het parallelsysteem:

$\mu(R_v) = \frac{n \cdot \mu(R_i)}{n} = \mu(R_i)$



(spanning)

$$\mu(R_v) = \mu(R_o) \qquad (5\text{-}11)$$

$$V(R_v) = V(R_o)\sqrt{\frac{v_o}{v}} \qquad (5\text{-}12)$$

$\sqrt{n}$

Op grond van de centrale limietstelling volgt dat de verdeling normaal is, ongeacht de verdeling van de sterkte in de elementaire cellen. Inderdaad is de verdeling van de sterkte van een ductiel materiaal als staal redelijk goed met een normale verdeling te beschrijven.
Het volume-effect van de parameters klopt echter niet goed met de werkelijkheid. Het is duidelijk waarom dit model niet helemaal kan kloppen. De parallelwerking kan alleen van toepassing worden verklaard op twee van de drie dimensies: de derde dimensie is in beginsel altijd een richting met serie-werking. We zullen dus het model minstens moeten uitbreiden zoals aangegeven in figuur 5.5a of figuur 5.5b. Daarmee hebben we echter eigenlijk te maken met een gecombineerd systeem. De keuze van de schakeling heeft veel invloed en het aantal variaties kan zeer groot worden (zie ook Borges [5.5]). Verder moet als beperking van het model worden vermeld dat alle elementaire cellen onderling onafhankelijk worden genomen, hetgeen niet erg realistisch is. In het algemeen is er sprake van correlatie en die werkt dempend op de volume-effecten.

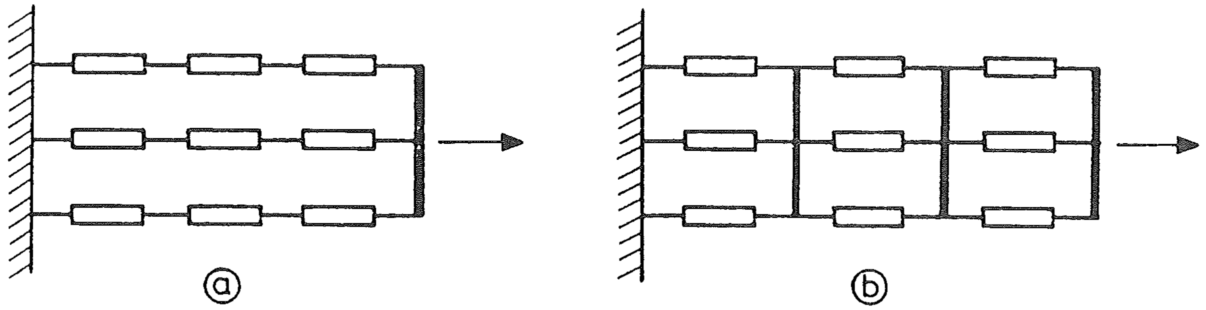


Fig. 5.5 Mogelijke combinaties van serie- en parallelsystemen voor ductiel materiaalgedrag.

5.4 Rekenmodellen voor practische berekening

Bij seriewerking treedt bij volumevergroting vermindering van de gemiddelde sterkte op, maar volgens het Weibull-model ook een vermindering van de standaardafwijking. Bij $r_o \neq 0$ is er zelfs sprake van vermindering van de variatie-coëfficiënt.
Bij parallelwerking blijft het gemiddelde hetzelfde en neemt de spreiding af. Bij een gecombineerd systeem mogen we dus verwachten dat bij volumevergroting in ieder geval de spreiding afneemt en het gemiddelde meer of minder afneemt, al naar gelang de serie- dan wel de parallelwerking overheerst. Kennis hieromtrent is van groot practisch belang. Welke betekenis heeft het beproeven van betonkuben, trekstaven, kleine grondmonsters enz. in relatie met de sterkte van de constructie. Als de parallelwerking overheerst, is de karakteristieke waarde van de kleine monsters een pessimistische schatting van de karakteristieke waarde van de constructie. Als de seriewerking overheerst, is de karakteristieke waarde echter een te optimistische schatting (zie figuur 5.6). Het onderzoek naar deze fenomenen is echter nog niet erg van de grond gekomen.

Tabel 5.1 Statistische modellen voor de sterkte.

Materiaal	Verdeling	Gemiddelde	Spreiding
Staal Fe 360	lognormaal	280 MPa	V = 0,08
Beton B 22.5	normaal	22 MPa	V = 0,10 à 0,20
Standaardbouwhout (buiging)	Weibull	$30 \left(\frac{v_o}{v}\right)^{0,1}$ MPa ($v_o = 0,02\ m^3$)	V = 0,18
Grond	normaal	meetwaarde	V = 0,30 (locaal) V = 0,10 (globaal)

De statistische verdeling van de meeste materialen wordt natuurlijk door nog veel andere zaken beinvloed, bijvoorbeeld het fabricage-proces dat bij kleine volumina anders verloopt dan bij grote. Een proefkubus van beton wordt anders verdicht dan een balk, ontwikkelt niet zo'n hoge temperatuur in het midden, enz. Bovendien worden materialen gekeurd: op het oog, statistisch, destructief, niet-destructief, enz. Het gevolg is dat de verdeling van het basismateriaal verstoord wordt. Figuur 5.7 geeft een indruk van de invloed van de keuring. In het algemeen zal een keuring er niet voor kunnen zorgen dat alle slechte realiseringen verdwijnen. Aan de andere kant zullen bepaalde goede partijen ook af en toe ten onrechte worden afgekeurd. De verdeling is daardoor meestal niet meer symmetrisch en de normale verdeling is minder geschikt om de sterkte te beschrijven. Daarom wordt vaak de lognormale verdeling gebruikt. Deze verdeling heeft verder het voordeel dat negatieve waarden een kans nul bezitten. Zolang de variatiecoëfficiënt klein is maakt het overigens niet veel verschil.

Resumerend: In de meeste gevallen is het vrijwel onmogelijk om op grond van één enkel beginsel een bepaalde verdeling als meest geëigend voor een gegeven materiaal aan te wijzen. Meestal spelen verschillende effecten door elkaar heen. Men laat daarom vaak de keuze van de verdeling afhangen van de mathematische eenvoud. Tabel 5.1 geeft een mogelijk keuze voor de materialen staal, beton, hout en grond met betrekking tot het verdelingstype en het volume-effect. Men doet er echter goed aan te bedenken dat dit slechts één keuze is en dat andere visies of verfijndere modellen mogelijk zijn. Bij staal en beton wordt in tabel 5.1, terecht of onterecht, geen rekening gehouden met volume-effecten. Andere bronnen van spreiding worden geacht te overheersen. Men moet deze cijfers dan ook alleen hanteren voor één enkel constructie-onderdeel (balk, kolom, plaat) en bijvoorbeeld niet voor een gehele constructie. Bij hout daarentegen is binnen één onderdeel al wel van een merkbaar volume-effect sprake, waarmee zelfs in sommige voorschriften rekening wordt gehouden (bijv. CIB-modelcode bij belasting loodrecht op de vezel). Het serie-effect overheerst: Weibull-verdeling, afnemend gemiddelde bij toenemend volume en constante variatie-coëfficiënt. Als gevolg van neven-invloeden (keuring, parallelwerking in breedterichting) zijn α en V niet helemaal volgens de stricte theorie met elkaar in overeenstemming.

Ten slotte wordt bij grond vaak de stelling verdedigd dat het parallelsysteem overheerst en dat de nogal grote spreiding van punt tot punt voor technisch interessante bezwijkmechanismen geen betekenis heeft. Het onderzoek hierover is momenteel echter nog in volle gang.

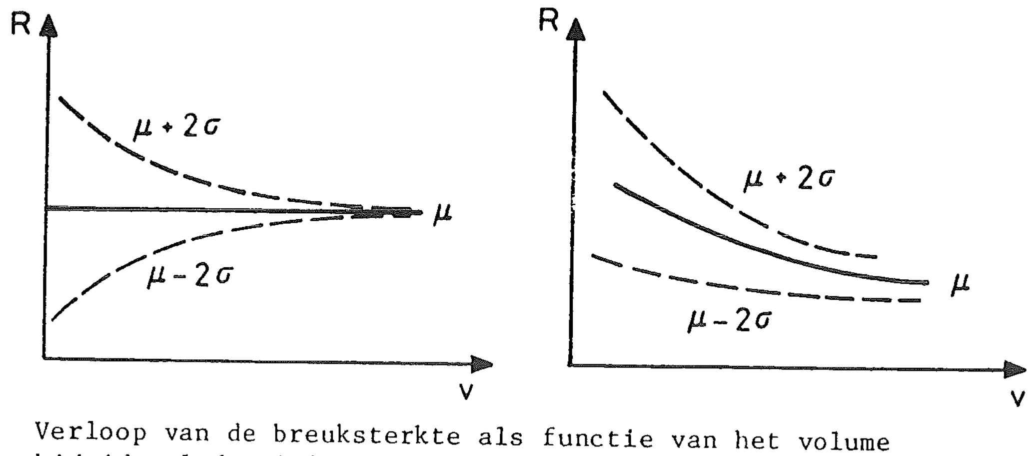


Fig. 5.6 Verloop van de breuksterkte als functie van het volume bij ideaal ductiel en ideaal bros materiaal.

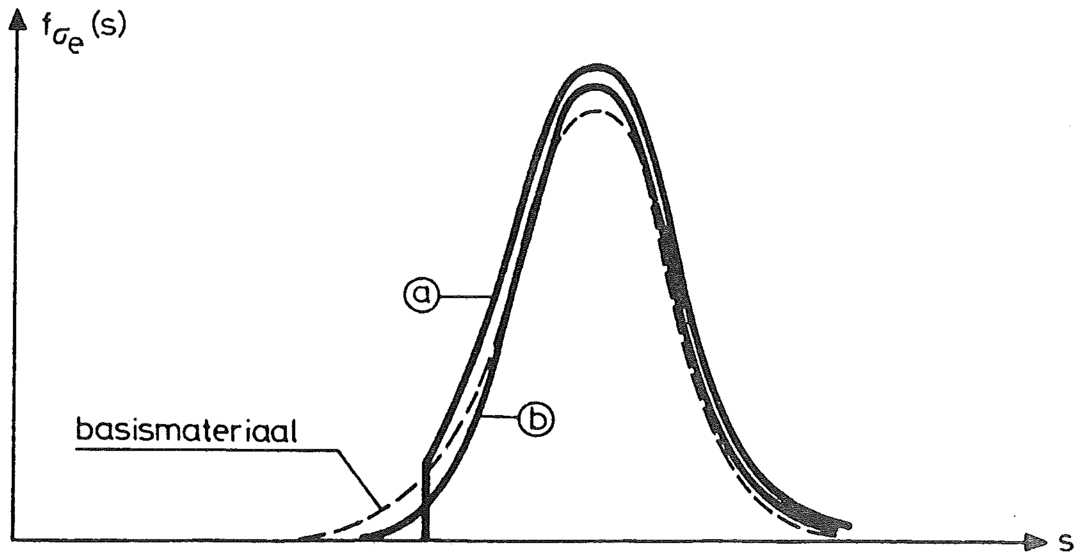


Fig. 5.7 Invloed van de keuring op de statistische verdeling van materiaaalsterkte (schematisch).

5.5 Levensduur

In het algemeen zijn zowel de belasting S als de sterkte R functies van de tijd. Het heeft daarom doorgaans weinig zin om te spreken over de kans op bezwijken zonder de periode te vermelden waarop deze betrekking heeft. Als referentieperiode wordt in de civiele techniek meestal één jaar aangehouden, soms echter is ook de faalkans gedurende de "geplande levensduur" (bijvoorbeeld 50 jaar) van belang.

Voor de verwerking van het tijdsaspect in de betrouwbaarheidsanalyse bestaan globaal twee methoden. Deze methoden hangen samen met de wijze waarop men R en S definieert. Voor de uitwerking beperken we ons tot de tijdsafhankelijkheid in de belasting S. De beide te onderscheiden definities luiden dan als volgt:

(a) S(t) is de momentane belasting op het tijdstip t
(b) S(t) is de maatgevende belasting voor de periode (0,t)

Met t = 0 wordt het begintijdstip van een beschouwde periode bedoeld; veelal zal dit samenvallen met het tijdstip waarop de constructie in ge- of herbruik wordt genomen. Volgens de eerste definitie komt S(t) rechtstreeks overeen met de externe fysische grootheid, bijvoorbeeld de winddruk of de golfbelasting. Een belasting die op die wijze is gedefinieerd zal in het algemeen een verloop hebben als aangegeven in figuur 5.8a. Essentieel bij methode (a) is dat het tijdsaspect, of beter het tijdsduuraspect, in de definitie van S(t) ontbreekt. Dientengevolge heeft ook de kans $P\{R(t) < S(t)\}$ alleen betrekking op een bepaald tijdstip en niet op een periode. De intervalfaalkans voor de periode (0, t) wordt dus niet gegeven door $P\{R(t) < S(t)\}$, maar dient bijvoorbeeld geschreven te worden als:

$$P\{\text{falen in } (0,\ t)\} = 1 - P\{\text{niet falen in } (0,\ t)\} =$$

$$= 1 - P\{R(\tau) > S(\tau) \text{ voor alle } \tau \text{ in } (0,\ t)\} \qquad (5\text{-}13)$$

Rekenkundig is de stap van $P\{R(t) < S(t)\}$ naar de faalkans voor een periode vaak zeer lastig. Om die reden biedt het voordelen om met definitie (b) te werken,. Aangezien daar gewerkt wordt met een maatgevende belasting S voor de gehele periode (0, t) geldt rechtstreeks:

$$P\{\text{falen in } (0, t)\} = P\{R(t) < S(t)\} \qquad (5\text{-}14)$$

Uiteraard is men op die manier de problemen niet kwijt: men schuift de verwerking van het tijdsaspect als het ware door naar de bepaling van de kansdichtheidsfunctie voor S(t). De ervaring leert dat het daar wel gemakkelijker gaat. Als nadeel staat daar tegenover dat men zich reeds bij voorbaat moet vastleggen op een bepaald mechanisme. Bij statische sterkte is de maatgevende belasting de extreme belasting in een bepaalde periode, terwijl het bij vermoeiing gaat om een cumulatieve maat. Beide gevallen zijn ter illustratie weergegeven in figuur 5.8b en in figuur 5.8c, waarbij steeds de momentane faalkans van figuur 5.8a als uitgangspunt is genomen.

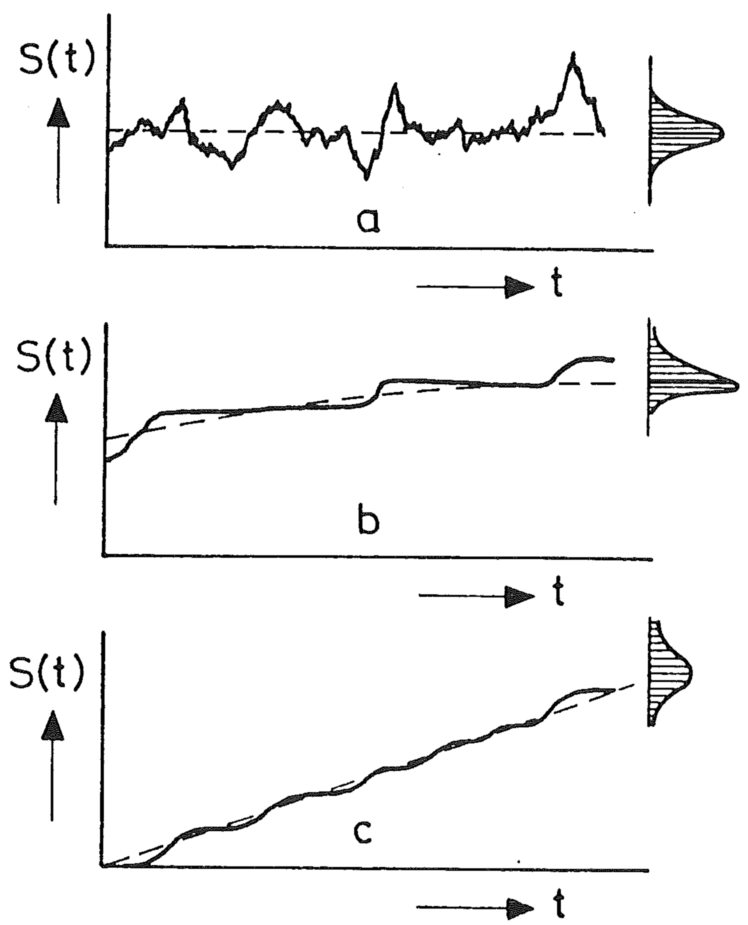


Fig. 5.8 Belasting op een constructie:
a. momentane waarde;
b. extreme waarde; (maximum)
c. cumulatieve waarde.

Behalve de belasting kan natuurlijk ook de sterkte of weerstand van een systeem aan tijdsafhankelijke verandering onderhevig zijn. Sommige systemen worden in de loop van de tijd sterker (bijvoorbeeld beton als gevolg van doorgaande verharding), andere worden juist zwakker (veroudering bij metalen). Als R en S beide tijdsafhankelijk zijn moet men voorzichtigheid betrachten met het definiëren van maatgevende belasting en sterkte: een minimale waarde van R hoeft niet samen te vallen met een maximale waarde van S; zie bijvoorbeeld figuur 5.9. In principe is het echter in alle gevallen mogelijk zodanige definities te kiezen dat het algemene beeld ontstaat volgens figuur 5.10: een monotoon dalende lijn voor de maatgevende R, een monotoon stijgende (of horizontale) lijn voor de maatgevende S en voor beide lijnen een gemiddelde met daaromheen een spreiding ten gevolge van onzekerheden en fluctuaties.

Voor ieder tijdstip t kan daarmee een faalkans voor een bepaalde periode worden uitgerekend. Een mogelijk resultaat van de faalkans als functie van de tijd is weergegeven in figuur 5.10.

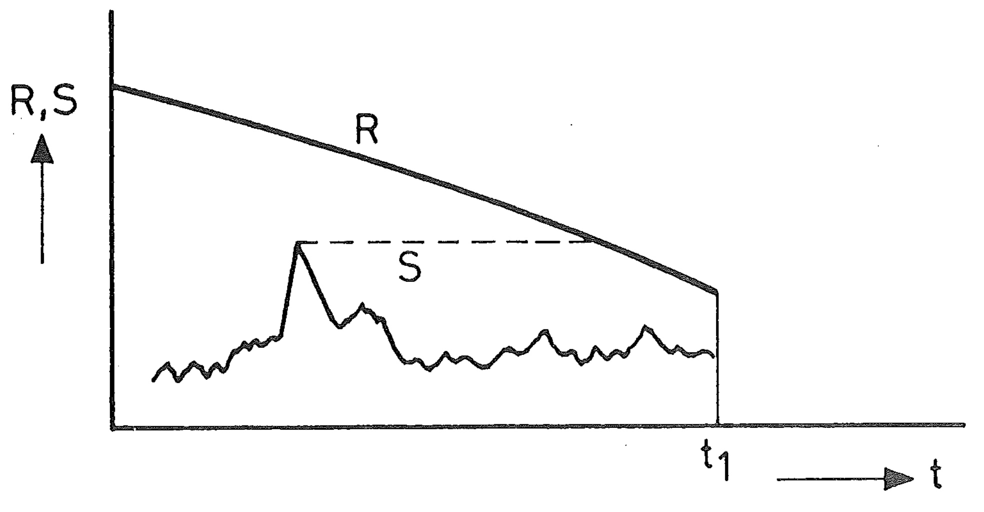
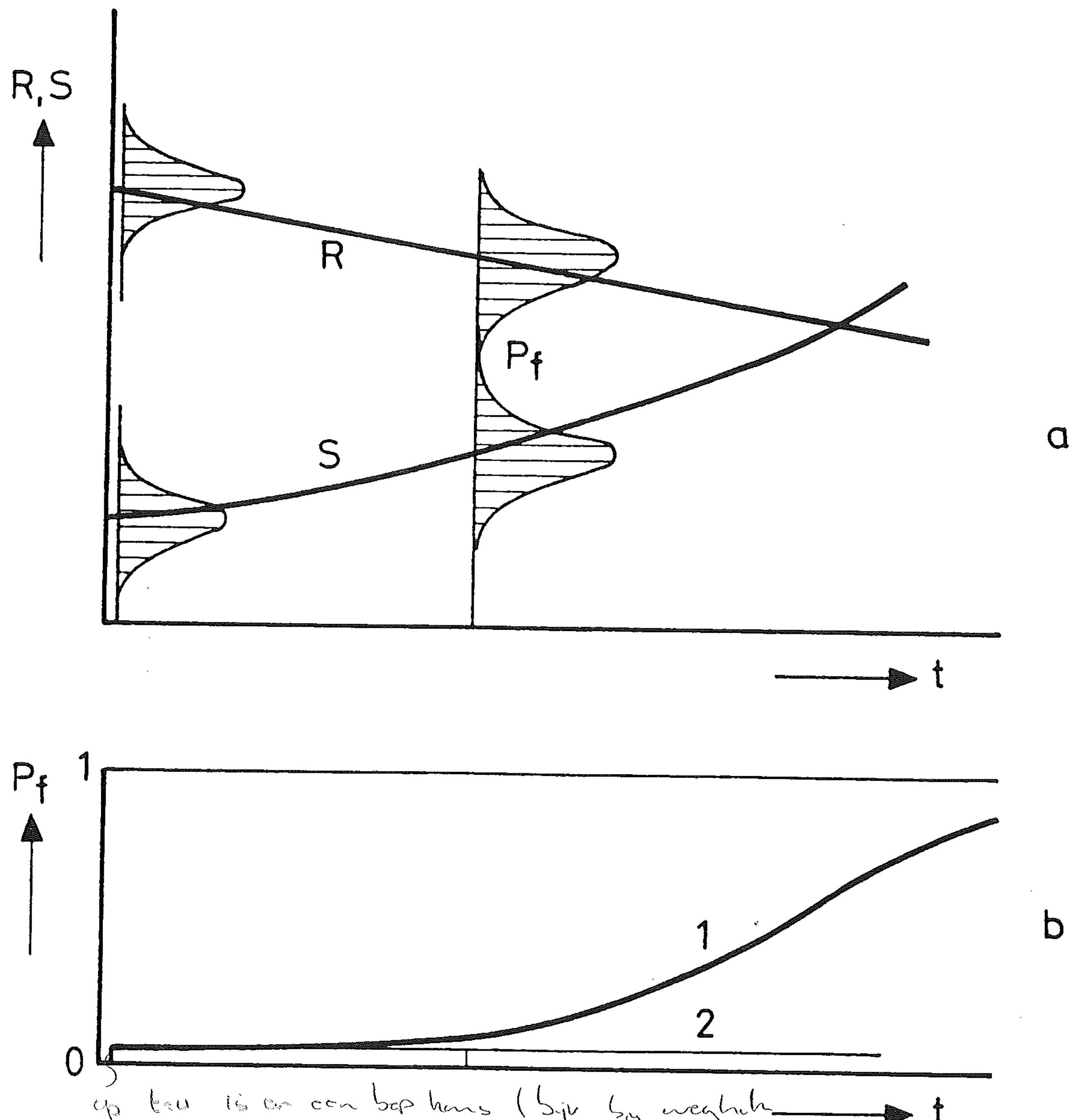


Fig. 5.9 Na de beschouwde periode is het maximum van S groter dan het minimum van R; toch treedt geen bezwijken op.



op t=0 is er een bep kans (bijv bij weghalen v/d belasting)

Fig. 5.10 a. Tijdsafhankelijke R en S;
b. Faalkans P_f als stijgende functie van de tijd (kromme 1) en faalkans P_f volgens een tijdsonafhankelijk model (kromme 2).

Op t = 0 begint deze functie met een bepaalde initiële waarde. Dit is de kans dat reeds direct bij het in gebruik nemen falen optreedt. Daarna zal bij $t > 0$ de faalkans langzaam oplopen en in principe naar de limietwaarde 1 gaan, omdat uiteindelijk alle constructies een eindige levensduur hebben. Rekenkundig is binnen een bepaald gedachtenmodel ook een andere limietwaarde denkbaar, bijvoorbeeld een tijdsonafhankelijk model waarbij P_f voor alle waarden van $t > 0$ gelijk is aan de initiële waarde $P_f(0)$.

In het algemeen is de faalkans echter een monotoon stijgende functie van de tijd, beginnend bij 0 voor $t = 0$ en oplopend tot 1 voor $t = \infty$. De functie $P_f(t)$ heeft dus het karakter van een verdelingsfunctie. De stochastische variabele die daarbij hoort is de levensduur L van de constructie. Immers, de gebeurtenis "$L < t$" is identiek met de gebeurtenis "falen in (0, t)", ofwel:

falen in (0,t)

$$F_L(t) = P\{L < t\} = P_f(t) \tag{5-15}$$

Gegeven de verdelingsfunctie voor de levensduur, kan men gemakkelijk de kansdichtheidsfunctie bepalen:

$$f_L(t) = \frac{d}{dt} F_L(t) \tag{5-16}$$

Vermenigvuldigen van de kansdichtheid met dt leidt tot de kans dat de levensduur eindigt tussen de tijdstippen t en t + dt:

$$f(t)dt = P\{t < t_L < t + dt\}$$

Beëindiging van de levensduur in (t, t + dt) houdt in dat $R < S$ in (t, t + dt), maar tevens dat $R > S$ in (0, t). Immers, als reeds eerder dan het tijdstip t de belasting groter zou zijn geweest dan de sterkte, dan zou de beëindiging van de levensduur op dat tijdstip hebben plaatsgevonden. Derhalve:

$$f(t)dt = P\{R < S \text{ in } (t, t + dt) \text{ en } R > S \text{ in } (0, t)\} \tag{5-17}$$

Formulering (5-17) is juist ongeacht of R en S als momentane of als maatgevende waarden zijn gedefinieerd.

De kansdichtheidsfunctie voor de levensduur kan ook gezien worden als de kans op falen per tijdseenheid ofwel als een faaltempo. Men spreekt ook wel van het <u>onvoorwaardelijke faaltempo</u> (unconditional failure rate) in tegenstelling tot het zogenaamde <u>voorwaardelijke faaltempo</u> r(t) (conditional failure rate of hazard function). Bij de functie r(t) geeft r(t)dt eveneens de kans aan dat bezwijken optreedt in (t, t + dt), maar dan onder de voorwaarde dat in (0, t) geen falen heeft plaatsgevonden:

$$r(t)dt = P\{R < S \text{ in } (t, t + dt) \mid R > S \text{ in } (0, t)\} \tag{5-18}$$

Tussen de functies F, f en r bestaat uiteraard een directe relatie. Deze relatie kan het eenvoudigst worden afgeleid door uit te gaan van de betekenis van de kansdichtheidsfunctie volgens (5-17):

$$f(t)dt = P\{R > S \text{ in } (0,\ t) \text{ en } R < S \text{ in } (t,\ t + dt)\}$$

$$= P\{R > S \text{ in } (0,\ t)\}.P\{R < S \text{ in } (t,\ t + dt) \mid R > S \text{ in } (0,\ t)\}$$

$$= \{1 - F(t)\}.r\ (t)dt$$

Ofwel:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{5-19}$$

Duidelijk blijkt dat de voorwaardelijke en onvoorwaardelijke faaltempo voor lage waarden van F vrijwel aan elkaar gelijk zijn. Voor constructies waarbij F altijd zeer laag is geldt dus dat men beide functies zonder bezwaar aan elkaar gelijk mag stellen. → $f(t) \approx r(t)$
Gegeven F(t) kunnen via (5-16) en (5-19) gemakkelijk f(t) en r(t) worden afgeleid. Omgekeerd kan ook F(t) uit r(t) worden bepaald. Zonder afleiding geven we daarvoor de formule:

$$F(t) = 1 - \exp \int_{o}^{t} - r(\tau)d\tau \tag{5-20}$$

In figuur 5.11 zijn voor een aantal gevallen de functies F, f en r getekend. In figuur 5.11a is sprake van een constante r(t). Het gegeven dat de constructie enige tijd heeft gefunctioneerd zonder te falen, heeft kennelijk geen invloed op de faalkans in het komend interval. Een dergelijke situatie kan zich bijvoorbeeld voordoen indien de faaloorzaak een calamiteit betreft, zoals brand in een gebouw. In figuur 5.11b zien we een dalende r-functie. Hierbij heeft het gegeven dat de constructie enige tijd goed heeft gefunctioneerd gunstige uitwerking op de faalkans voor de komende perioden. Het feit dat de constructie reeds enige tijd zonder problemen werkt en een aantal belastingssituaties heeft doorstaan, wettigt het vermoeden dat de constructie geen zwakke plekken vertoont.

bv brand explosie

bv veroudering vermoeiing

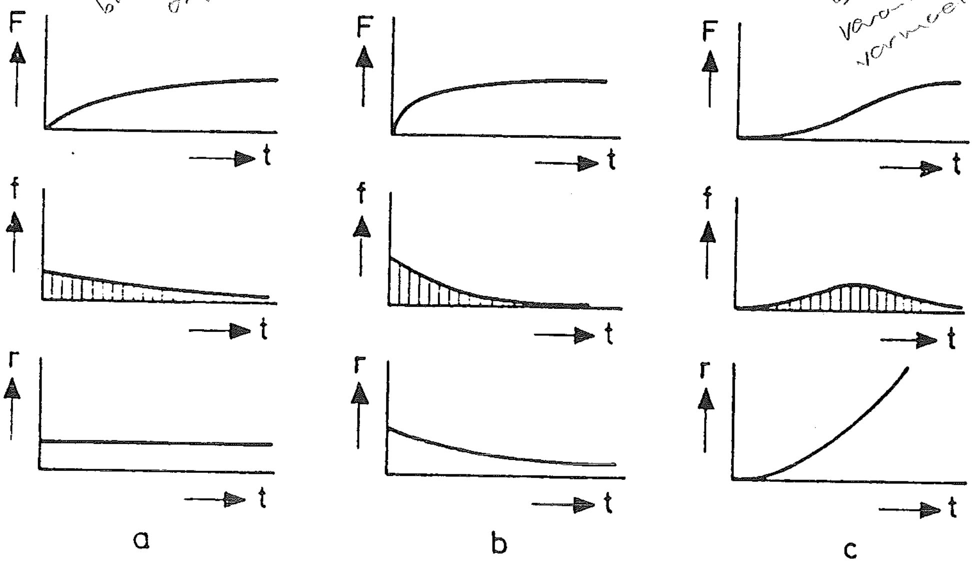


Fig. 5.11 Drie typen levensduurverdelingen:
a. met constante r-functie;
b. met dalende r-functie;
c. met stijgende r-functie.

Bij gelijktijdige beschouwing van een groot aantal constructies zouden we ook kunnen zeggen dat de slechte constructies langzaam maar zeker worden uitgefilterd en de goede overblijven. Ten slotte is in figuur 5.11c een stijgende r-functie getekend. Een dergelijke functie treedt op als de constructie onderhevig is aan veroudering of slijtage. Het gegeven dat de constructie reeds enige tijd in bedrijf is, leidt daarbij juist tot de conclusie dat "beschadiging" is opgelopen en dat de kans op bezwijken daardoor toeneemt.

Bij een werkelijke constructie zijn natuurlijk combinatievormen mogelijk, waarbij de mengverhouding van constructie tot constructie kan verschillen. In het algemeen resulteert echter een r-functie als aangegeven in figuur 5.12 die wel wordt aangeduid als de badkuipcurve. Men onderscheidt drie gebieden: een beginfase, waarbij falen optreedt als gevolg van bouw- en ontwerpfouten, een middenfase waarin calamiteiten en bijzonder extreme omstandigheden een rol spelen en ten slotte een eindfase met falen als gevolg van veroudering of slijtage.

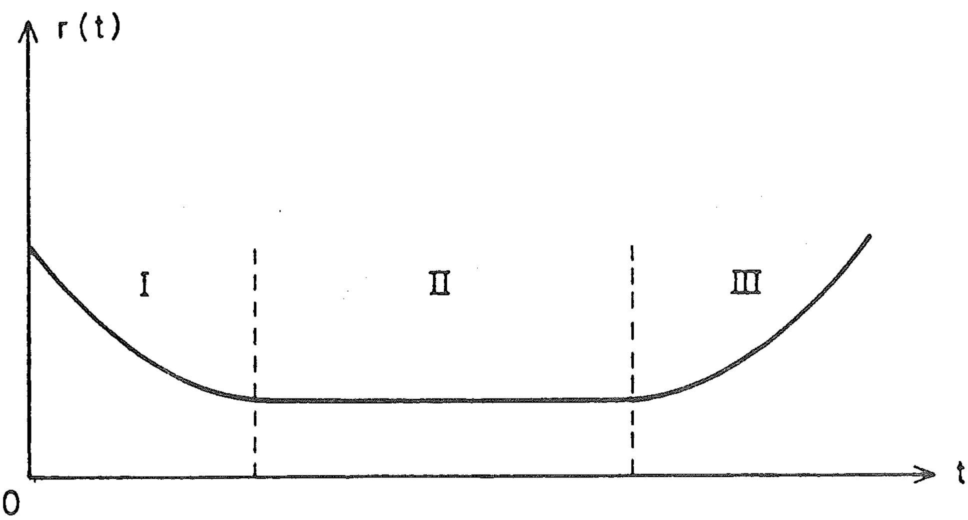
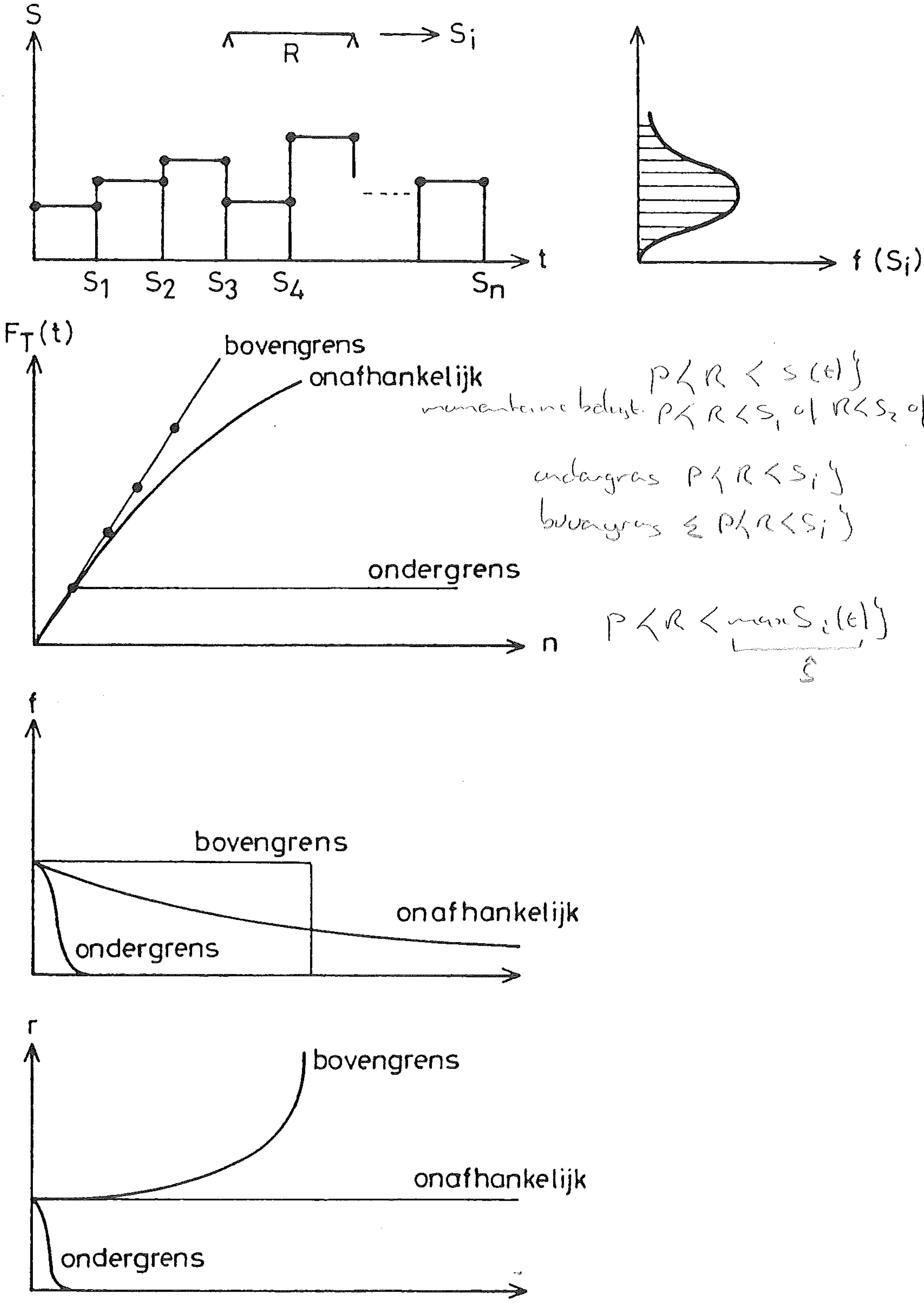


Fig. 5.12 Algemene vorm van de voorwaardelijke faaltempofunctie (badkuipcurve):
I : falen wegens geringe sterkte; (kinderziektes)
II : falen wegens extreme omstandigheden;
III : falen wegens cumulatieve effecten. (veroudering)

Voorbeeld 5.5

Als eerste voorbeeld nemen we een constructie die achtereenvolgens wordt belast door onafhankelijke belastingen S_1, S_2, S_3... We nemen aan dat de sterkte R in de tijd niet verandert. Hoe groot is de kans dat bezwijken optreedt als de constructie n-maal belast wordt (zie figuur 5.13).

Bepalend voor het al dan niet bezwijken van de constructie is het maximum $\hat{S}$ van de momentane belastingen S_i. Als R groter is dan $\hat{S}$ faalt de constructie niet, als R kleiner is dan $\hat{S}$ faalt de constructie wel.



$P\{R < s(t)\}$

momentane belast. $P\{R < S_1$ of $R < S_2$ of $R < S_3 \cdots R < S_n\}$

ondergrens $P\{R < S_i\}$

bovengrens $\leq P\{R < S_i\}$

$P\{R < \underbrace{\max S_i(t)}_{\hat{S}}\}$

Fig. 5.13 Verdelingsfunctie, dichtheidsfunctie en voorwaardelijk faaltempo bij onafhankelijke belastingwisselingen in de tijd en tijdsonafhankelijke sterkte.

Derhalve:

$$P\{\text{falen door } S_1..S_n\} = P\{R < \hat{S}\} \qquad (5\text{-}21)$$

De verdelingsfunctie van $\hat{S} = \max\{S_i\}$ volgt uit:

$$F_{\hat{S}}(s) = P\{\hat{S} < s\} = P\{S_1 < s \text{ en } S_2 < s \text{ en} .. S_n < s\}$$

Wegens de veronderstelde onafhankelijkheid:

$$F_{\hat{S}}(s) = P\{S_i < s\}^n = \{F_{S_i}(s)\}^n \qquad (5\text{-}22)$$

De faalkans wordt gegeven door de convolutie-integraal (zie hoofdstuk 3):

$$P(\text{falen door } S_1..S_n) = \int_0^\infty f_R(r)\{1-F_{\hat{S}}(r)\}dr =$$

$$= \int_0^\infty f_R(r)\,\{1-F^n_{Si}(r)\}dr \qquad (5\text{-}23)$$

In bovenstaande is S_i de momentane belasting; de maatgevende belasting is $\hat{S} = \max S_i$. De bepaling van de verdeling van $\hat{S}$ is numeriek bezien geen moeilijke opgave. In het bijzondere geval dat de S_i een extreme-waarden-bepaling voor maxima bezitten, is er zelfs een analytische oplossing: $\hat{S}$ heeft dan eveneens een extreme-waarden-verdeling met de parameters die op eenvoudige wijze bepaald kunnen worden. In het hoofdstuk over belastingen wordt daarop nog nader teruggekomen.

Het probleem in dit voorbeeld vertoont grote overeenkomst met dat van het seriesysteem en de brosse breuk. Inderdaad kan men na elkaar aangrijpende belastingen opvatten als een seriesysteen in de tijd. We kunnen in dit voorbeeld dus ook profiteren van de aldaar afgeleide onder- en bovengrenzen:

$$\max P\{R < S_i\} \leq P\{\text{falen door } S_1..S_n\} \leq \Sigma\, P\{R < S_i\} \qquad (5\text{-}24)$$

De faalkans voor de "periode" (1..n) is dus ingesloten tussen de maximale momentane faalkans en de som van de momentane faalkansen. In figuur 5.13 is een en ander grafisch weergegeven. Onder verwijzing naar hoofdstuk 4 kan hierbij het volgende commentaar worden gegeven:

- De bovengrens treedt op als de gebeurtenissen $R < S_i$ elkaar uitsluiten. Fysisch gesproken komt dit zelden of nooit voor, maar ook hier geldt dat de bovengrens belangrijk is omdat het vaak een goede benadering is voor gevallen die wel veel voorkomen.

Als we de bovengrens differentiëren om de bijbehorende kansdichtheidsfunctie van de levensduur te vinden, ontstaat een constante f-functie (we vergeten even dat de bovengrens eigenlijk een trapjeslijn is); de voorwaardelijke faalkanssnelheid r is een stijgende functie. Als $F_L(t)$ de waarde 1 bereikt, valt f terug op nul en zal r de waarde ∞ bereiken.

- Als de gebeurtenissen $R < S_i$ onafhankelijk zijn (hetgeen het geval is bij $\sigma(R) \ll \sigma(S_i)$ en S_i onafhankelijk) dan kan voor $F_L(t)$ de e-macht worden afgeleid op dezelfde wijze als bij het seriesysteem. De levensduur heeft dan een exponentiële verdelingsfunctie en het onvoorwaardelijk faaltempo is constant.

- Ten slotte levert de ondergrens een ontaarde verdelingsfunctie op: immers, voor $t \to \infty$ is $\lim F_L(t) \neq 1$. Dit geval representeert de situatie dat $\sigma(R) \gg \sigma(S_i)$. Het overleven van de eerste belasting geeft vooral informatie over de sterkte van de constructie en biedt zekerheid dat volgende belastingen ook overleefd zullen worden.

<u>Voorbeeld 5.6</u>

Een constructie wordt belast door n cyclische belastingswisselingen met een constante amplitude $\frac{1}{2}S$ (zie figuur 5.14). Uit proeven is bekend dat het aantal wisselingen N tot breuk kan worden berekend met de formule:

$$N = \{S/S_F\}^{-k}$$

Stel dat mag worden aangenomen dat k = 4 (deterministisch) terwijl S_F een lognormale verdeling heeft met μ = 5300 MPa en σ = 740 MPa. Verder is gegeven dat $n = 10^8$ en S een lognormale verdeling heeft met μ = 20 MPa en σ = 5 MPa. Gevraagd wordt de kans op breuk.

De meest voor de hand liggende formulering voor de betrouwbaarheidsfunctie lijkt Z = N-n. Gegeven de lognormale verdeling van S en S_F is het echter handiger om te kiezen voor:

(op een logaritmische schaal hebben ze een normale verdeling

$$Z = \ln N - \ln n$$

Gebruik makend van $N = (S/S_F)^{-k}$ volgt:

$$Z = k \ln S_F - (k \ln S + \ln n)$$

levensduur

De eerste term representeert de sterkte, de tweede de belasting. Deze maatgevende belasting is hier dus geen extreme waarde, maar een cumulatief effect.

Gegeven de lognormale verdelingen van S_F en S hebben $\ln S_F$ en $\ln S$ normale verdelingen met (zie hoofdstuk 2):

$$\mu(\ln S_F) = 8{,}56 \qquad \sigma(\ln S_F) = 0{,}14$$

$$\mu(\ln S) = 2{,}96 \qquad \sigma(\ln S) = 0{,}25$$

M.b.v. standaard niveau II berekeningen volgt verder:

$\mu(Z) = 4 * 8,56 - (4 * 2,96 + 18,42) = 3,98$

$\sigma(Z) = \sqrt{(4 * 0,14)^2 + (4 * 0,25)^2} = 1.15$

$\beta = 3,5$

$P\{breuk\} = 2 * 10^{-4}$

x lognormaal
$\mu(x)$ $\sigma(x)$
$y = \ln x$ normaal
$\mu(y) = \ln \mu_x$
$\sigma(y) = V_x = \sigma_x / \mu_x$

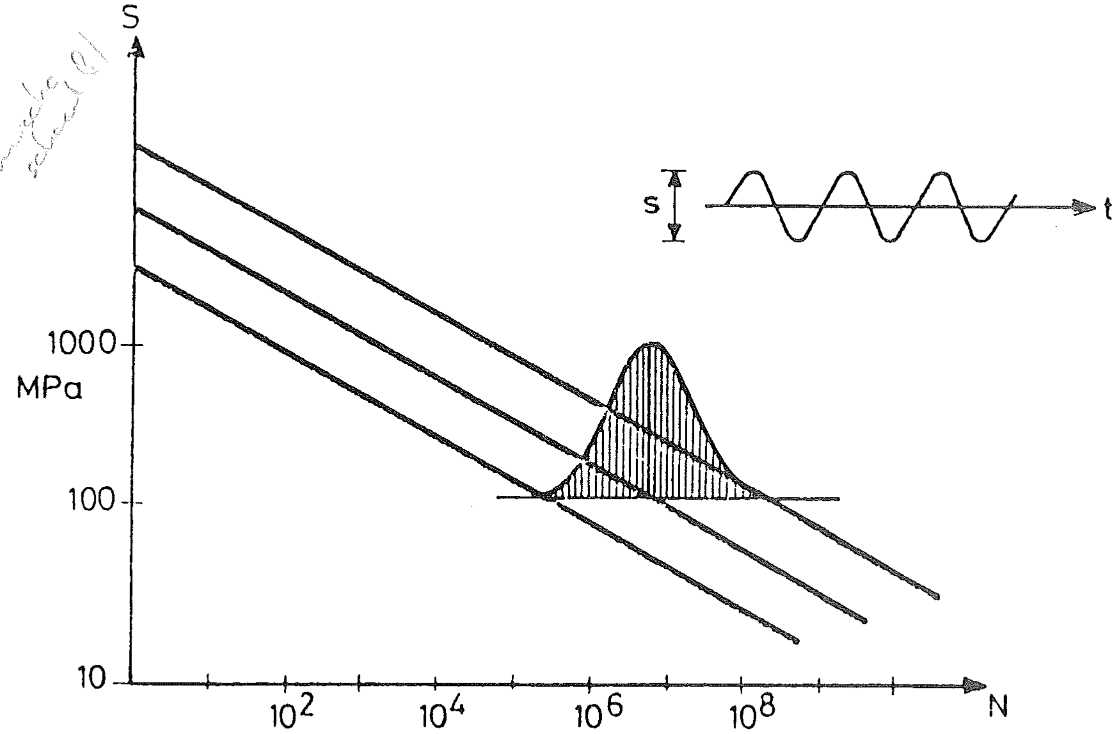


Fig. 5.14 Vermoeiing onder cyclische belasting.

De betrouwbaarheidsanalyse voor vermoeiing verschilt in essentie dus niet van die voor een Ultimate Limite State.

Een opmerking over de lognormale verdeling is hier nog op zijn plaats. Vaak wordt beweerd dat de lognormale verdeling (en ook de normale verdeling) niet geschikt is ter beschrijving van de levensduur bij vermoeiing en veroudering. Het argument is dat de normale en lognormale verdelingen voor grote t een dalende failure rate (voorwaardelijk faaltempo) bezitten, en het is nu eenmaal onlogisch dat in geval van vermoeiing of veroudering de kans op falen in een volgend tijdsinterval zou dalen bij toenemende levensduur. Theoretisch is dit wel een goed argument, maar het is de vraag of het opweegt tegen de redelijk goede beschrijving van de gegevens; bovendien zijn we meestal meer geïnteresseerd in het gebied met de kleine levensduren.

Voorbeeld 5.7

Veel materialen, maar hout zeer in het bijzonder, vertonen bij langeduurbelasting een lagere sterkte dan bij korte-duurbelasting. Figuur (5.15a) geeft aan hoe hout kruipt en vervolgens breekt (creep-rupture).

Experimentele resultaten worden meestal gepresenteerd door op de horizontale as de tijd uit te zetten op een logarithmische schaal en op de verticale as de aangelegde spanning gedeeld door de korte-duursterkte (figuur 5.15b).
Dit verband blijkt bij goede benadering lineair en kan gemiddeld worden weergegeven door (log staat hier voor de tiende-logaritme):

$$^{10}\log T = A + B\alpha$$

Hierin is $\alpha = S/S_{kd}$ met S aangelegde spanning en S_{kd} de korte-duursterkte. Realistische numerieke waarden zijn:

$A = 14{,}4 \qquad B = -16 \qquad$ (T in uren).

Bij T = 3 minuten vindt men $\alpha = 1$ bij T = 50 jaar vindt men $\alpha = 0{,}56$.

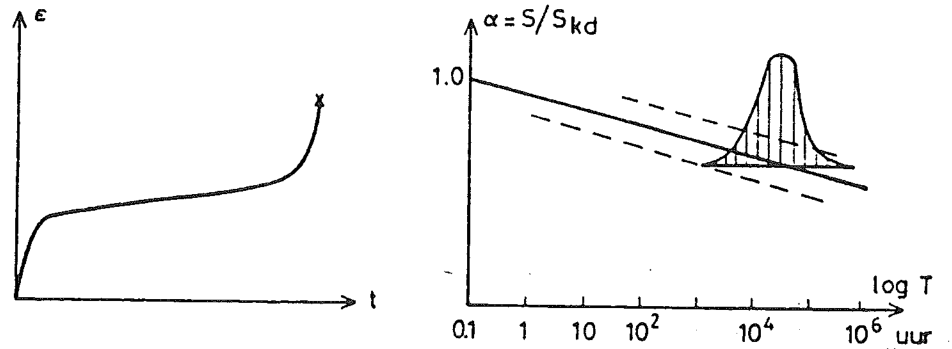


Fig. 5.15 Lange-duursterkte bij hout.

De lijn in figuur 5.15 is echter een gemiddelde en meestal vindt men bij experimenten een bepaalde spreiding rondom die lijn. De standaardafwijking van log T blijkt daarbij tamelijk ongevoelig voor het spanningsniveau, met uitzondering van α-waarden heel dicht bij 1. Een redelijke maat voor $\sigma(\log T)$ blijkt te zijn (zie [5.6][5.7]):

$\sigma(\log T) = 0{,}8 \qquad$ (T in uren)

De verdeling van log T is bij goede benadering normaal, zodat de levensduur zelf lognormaal verdeeld is. Bij veel toepassingen is echter niet zozeer de vraag welke levensduur bij een bepaalde spanning hoort, als wel welke sterkte hoort bij een bepaalde belastingsduur T_o.

Voor die omrekening schrijven we eerst:

$$\log T = A + B\alpha + u\,\sigma(\log T)$$

De variabele u is de standaard-normale variabele met gemiddelde nul en standaardafwijking 1. Gemakkelijk kan dit, voor gegeven T_o, naar α worden opgelost:

$$\alpha = \frac{\log T_o - A - u\,\sigma(\log T)}{B}$$

Bijvoorbeeld voor een periode van 10 jaar = 88000 uur.

$$\alpha = \frac{4,9 - 14,4 - 0,8\ u}{-\ 16} = 0,59 + 0,05\ u$$

α heeft dus een gemiddelde van 0,59 en een standaardafwijking van 0,05. De lange-duursterkte zelf wordt gegeven door:

$$S = \alpha\ S_{kd} = S_{kd} \left[\frac{\log T_o - A\ u\ \sigma(\log T)}{B}\right]$$

$\mu(S) - \alpha\mu(S_{kd}) - 0,59\mu(S_{kd})$

Met behulp van een niveau II benadering volgt verder voor T_o = 10 jaar:

$$\mu(S) = 0,59\ \mu(S_{kd})$$

blz 2-28 anderen

$$V(S) = \sqrt{V^2(S_{kd}) + V^2(\alpha)} = \sqrt{(0,20)^2 + (0,08)^2} = (0,22)$$

Gekonkludeerd kan worden dat de spreiding in het lange-duureffect klein is en vrijwel verwaarloosd kan worden t.o.v. de spreiding in de korte-duursterkte. Bij veredelde houtsoorten (gelamineerd hout) kan dit echter anders liggen.

In bovenstaande analyse is ervan uitgegaam dat bij experimenten α precies bekend is, ofwel dat de korteduursterkte S_{kd} precies bekend is.

Feitelijk is dit natuurlijk niet zo: men zou daartoe een en hetzelfde proefstuk tweemaal tot breuk moeten belasten, éénmaal kort en éénmaal lang. Men kan practisch gesproken aan deze eis voldoen door één proefstuk in drieën te zagen en van beide uiterste delen de korteduursterkte te bepalen, terwijl het middelste deel wordt gebruikt voor de langeduurproef. Als men deze mogelijkheid niet heeft, doet men er verstandig aan α te definiëren als $\alpha = S/\mu(S_{kd})$ en de spreiding van lange- en korteduureffecten niet uit te splitsen.

LITERATUUR

[5.1] Weibull, W. (1939): A Statistical Theory of the Strength of Materials, Proc. Roy. Swedish Inst. Eng. Res., no. 159.

[5.2] Freudenthal, A.M. (1951): Planning and Interpretation of Fatigue Tests, ASTM Symp. Statis. Aspects Fatigue Spec. Tech. Pub. no. 121.

[5.3] Freudenthal, A.M. and E.J. Gumbel (1956): Physical and Statistical Aspects of Fatigue, Advan. Appl. Mech., vol. 4.

[5.4] Bolotin, V.V.: Statistical Methods in Structural Mechanics Holden-day, Inc., San Francisco, 1969.

[5.5] Borges J.F., Gastanheta M.: Structural Safety, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisabon, 1968.

[5.6] Meyer, W.R.G.: Veiligheidsbeschouwing van houtconstructies (deel I) TNO-rapport B(-81-4/62.2.2100, TNO-IBBC, Rijswijk, 1981.

[5.7] Vermeyden, P.: Literatuuronderzoek betreffende het tijdeffect van verschillende factoren op hout en houtverbindingen. Stevin Laboratorium, TH-Delft., rapport 4-59-7-HD-3, 1959.

6. BELASTINGEN

6.1 Inleiding

Het functioneren van een constructie wordt in gevaar gebracht door een groot aantal bedreigingen van buiten af. Het inventariseren en kwantificeren van deze bedreigingen vormt een onmiskenbaar element in de betrouwbaarheidsanalyse.
Bedreigingen worden onderverdeeld in bedreigingen van mechanische, van fysische en van chemisch/biologische aard. De bedreigingen van mechanische aard worden aangeduid als belastingen. Tabel 6.1 geeft een overzicht van de meest voorkomende belastingsbronnen. Hoe uitgebreid deze lijst op het eerste gezicht ook lijkt, volledig is hij echter allerminst. Een aardig voorbeeld in dit verband is het bezwijken van het dak van de hoogovenhal in 1966 als gevolg van accumulatie van ijzerstof.

Voor het ontwerpen van gebouwen zijn eigen gewicht, vloerbelasting, sneeuw en wind het meest belangrijk. Aan deze onderwerpen zal in dit hoofdstuk daarom aandacht worden besteed. De gepresenteerde theorie is overigens grotendeels overdraagbaar op andere belastingsbronnen. Alvorens daartoe over te gaan volgen hier eerst nog enkele vaak gehanteerde belastingsklassificaties (zie ook tabel 6.1).

De eerste klassificatie is een indeling naar de variatie in het tijdsdomein. Onderscheiden worden permanent, veranderlijk en bijzonder. Permanente belastingen zijn belastingen die langdurig aanwezig zijn en slechts weinig in grootte variëren (eigen gewicht). Veranderlijke belastingen variëren in de loop van de tijd en kunnen ook een deel van de tijd afwezig zijn (vloer-, sneeuw- en windbelasting). Bij veranderlijke belastingen maakt men daarom onderscheid tussen de momentane waarde (aanwezig op een willekeurig tijdstip) en de extreme waarde (de maximale waarde in de referentieperiode). Bijzondere belastingen tenslotte zijn belastingen waarvan het optreden binnen de referentieperiode een lage waarschijnlijkheid heeft (explosies, aardbevingen in Nederland).

Een tweede klassificatie betreft de variatie in het plaatsdomein. Onderscheiden worden plaatsgebonden en vrije belastingen. Bij plaatsgebonden belastingen ligt de ruimtelijke verdeling over de gehele constructie vast. Denk hierbij aan eigen gewicht, waterdruk en gronddruk. Vrije belastingen kunnen binnen bepaalde grenzen een willekeurige verdeling over de ruimte hebben, bijvoorbeeld vloerbelasting. Belastingen als wind en sneeuw worden geacht een vrij en een plaatsgebonden deel te hebben.

Tenslotte is een vaak gemaakt onderscheid dat tussen statische en dynamische belastingen. Belastingen zijn dynamisch zodra in de constructie versnellingen van betekenis worden opgewekt. De meeste belastingen mogen als statisch worden beschouwd. Ook bij dynamische belastingen volstaat men vaak met een statische berekening en wordt het dynamisch effect in rekening gebracht via een dynamische vergrotingsfactor.

Belastings-bron	perm	vari	bijz	geb	vrij	stat	dyn
eigen gewicht	x			x		x	
vloerbelasting		x			x	x	
sneeuw		x		x	x	x	
wind		x		x	x		x
tornado			x	x	x		x
waterdruk	x			x		x	
stroom	x			x		x	
golven		x		x			x
ijs		x		x	x	x	
gronddruk	x			x		x	
aardbeving			x	x			x
verkeer		x			x		x
explosie			x		x		x
botsing			x		x		x
temperatuur		x				x	
zettingen		x		x		x	
montage	x				x	x	
krimp	x				x	x	

Tabel 6.1 Overzicht van belastingen met indicaties over de klassificatie.

6.2 Eigen gewicht

Het eigen gewicht is een belastingsbron van een permanente, plaatsgebonden belasting met een relatief lage spreiding. Afhankelijk van het materiaal, de maattoleranties en de rekennauwkeurigheid moet gedacht worden aan een variatiecoëfficiënt van 4 à 8%. Ook de model-onzekerheid met betrekking tot deze belastingsbron is betrekkelijk gering. Een waarde van V = 10% voor het uiteindelijke belastingseffect (moment, spanning) lijkt daarom ook alleszins redelijk.
Gemiddeld gesproken neemt men aan dat het eigen gewicht iets wordt onderschat: de constructeur vergeet eerder iets dan dat hij wat teveel meeneemt. Als gemiddelde neemt men daarom vaak de nominale waarde vermeerderd met $\pm$ 5%.
Als verdelingstype voor het eigen gewicht wordt vrij unaniem de normale verdeling aangehouden.
In tabel 6.2, paragraaf 6.6, zijn alle gegevens overzichtelijk bij elkaar geplaatst, tezamen met de gegevens van de andere belastingsbronnen.

6.3 Vloerbelastingen

Naar vloerbelasting is in het algemeen vrij veel onderzoek gedaan, hetgeen overigens het vaststellen van een goed bruikbaar statistisch model nog niet eenvoudig maakt. Een aantal van de problemen die daarbij kunnen spelen zijn hieronder opgesomd.

1. Er moet onderscheid gemaakt worden tussen verschillende gebouwtypen als woningen, kantoren, scholen, hotels, ziekenhuizen enz.

2. Ook per gebouwtype bestaan echter weer systematische verschillen: de kelder en de eerste verdieping hebben in het algemeen een andere belasting dan de hogere verdiepingen. De bestemming van een ruimte maakt eveneens verschil. In woonhuizen onderscheidt men woonkamers, slaapkamers, keukens, gangruimten enz. In kantoren zijn er kamers voor één of hooguit enkele personen, vergaderruimten, archiefruimten, gangen, toiletten en vestiaires enz.
Sommige onderzoekers splitsen dit uit, anderen doen dat niet. De vraag is natuurlijk ook in hoeverre men deze verschillen wil laten doorwerken. Met andere woorden: welk gebruikstype wil men "randomizen" en welk wil men expliciet meenemen.

3. Het meeste onderzoek is uitgevoerd op de overwegend permanente belasting: de meubels en overige inventaris. Soms is de gewoonlijk aanwezige belasting door personen daarbij opgeteld, hetzij op basis van meting, hetzij op basis van taxatie.

4. Weinig gegevens zijn bekend over bijzondere belastingssituaties zoals die optreden tijdens recepties, verhuizingen en dergelijke. Meestal worden hierover alleen uitspraken gedaan op basis van schattingen.

5. Van groot belang is natuurlijk de maximale belasting zoals die in de geplande levensduur zal optreden. Om die te kunnen bepalen is het nodig een inzicht te hebben in het aantal malen dat een ruimte een andere bewoner of bestemming krijgt, en het aantal malen dat een bijzondere belasting optreedt. De gegevens hierover zijn uiteraard eveneens schaars.

6. Vloerbelasting is een vrije belasting en varieert van punt tot punt op het vloeroppervlak. In de ontwerpberekening gaan we echter uit van een constante oppervlaktebelasting (gelijkmatig verdeeld). Voor het gemiddeld belastingseffect maakt dat geen verschil, maar wel voor de berekende spreiding. Voor eenzelfde vloer zal de relatieve spreiding dus anders zijn voor de totale belasting dan bijvoorbeeld voor het veroorzaakte moment in het midden of voor een oplegreactie. In dit verband wordt ook onderscheid gemaakt tussen het invloedsoppervlak (influence area = totaal oppervlak waar belasting nog invloed uitoefent op een belastingsefect) en het bijdrageoppervlak (tributary area = gewogen vloeroppervlak).
Voorbeeld: voor een oneindig uitgestrekte paddestoelvloer met stramienmaat a is voor een kolom het invloedsoppervlak ongeveer 4 a^2 en het bijdrage-oppervlak a^2.
In veel publicaties wordt per belastingseffect een zogenaamde EUDL (Equivalent Uniformly Distributed Load) bepaald als correctie op de standaardbelasting behorend bij het bijdrage-oppervlak. Voor de karakteristieke vloerbelasting kunnen deze correcties variëren tussen 1,1 en 1,35.

Vloerbelasting bij kantoren

Verreweg het meeste onderzoek dat is uitgevoerd had betrekking op de permanente (momentane) vloerbelasting in kantoren. Met name interessant is een onderzoek van Mitchell en Woodgate van 1971 in London, dat nader statistisch is geanalyseerd door Peir en Cornell [6.6]. In figuur 6.1 zijn enkele resultaten weergegeven. Uitgezet zijn de kansdichtheidsfuncties voor de vloerbelasting bij verschillende waarden van het beschouwde vloeroppervlak A. In alle gevallen blijkt een gamma-verdeling de meetgegevens goed te kunnen beschrijven. De gemiddelde vloerbelasting is vrijwel onafhankelijk van A en gelijk aan 0,5 kN/m^2. (Sommige andere onderzoekers constateren wel enige invloed van A op het gemiddelde, in die zin dat bij een groter oppervlak het gemiddelde afneemt; met oppervlak bedoelt men overigens dan meestal wel kameroppervlak). De spreiding is natuurlijke wel heel duidelijk een functie van A. Voor een zeer klein oppervlak, zeg A = 1 m^2, is er enerzijds een grote kans op een belasting van vrijwel nul, terwijl aan de andere kant natuurlijk ook een zeer hoge belasting denkbaar is. Met andere woorden: de spreiding bij A = 1 m^2 is erg groot.
Naarmate het beschouwde oppervlak toeneemt, neemt de spreiding af en gaat de verdeling steeds meer op een normale verdeling lijken.

De invloed van het oppervlak kan gemodelleerd worden door de vloer onder te verdelen in een aantal basis-opppervlakken A_o en de belasting op deze deeloppervlakken als onafhankelijk te beschouwen (fig. 6.2). De belasting op het totale oppervlak is gelijk aan:

$$q = \frac{\Sigma\, q_i\, A_o}{A} \qquad \text{met } i = 1..n \quad \text{en} \quad n = \frac{A}{A_o} \tag{6-1}$$

Hierin is q_i de belasting op deel i met $\mu(q_i) = \mu_o$ en $\sigma(q_i) = \sigma_o$.
Voor de belasting q volgt:

$$\mu(q) = \frac{A_o}{A}\, \Sigma\, \mu(q_i) = \frac{A_o}{A}.n\, \mu_o = \mu_o \tag{6-2}$$

Het gemiddelde verandert dus niet, overeenkomstig de meetresultaten van Mitchel en Woodgate. Voor de standaardafwijking volgt:

$E(q - \mu)^2$

$E\left(\frac{\Sigma q_i A_o}{A} - \frac{A_o}{A} \Sigma \mu(q_i)\right)^2$

$$\sigma^2(q) = \left\{\frac{A_o}{A}\right\}^2 \Sigma\, \sigma^2(q_i) = \left\{\frac{A_o}{A}\right\}^2 n\, \sigma_o^2 = \frac{A_o}{A}\, \sigma_o^2 \tag{6-3}$$

$E\left(\frac{A_o}{A}\right)^2 \Sigma (q_i - \mu q_i)^2 = \frac{A_o^2}{A^2} \sigma^2(q)$

Ofwel: $\sigma(q) = \sigma_o \sqrt{A_o/A}$, waaruit volgt dat de spreiding in q afneemd met toenemend oppervlak. Voor de variatiecoëfficiënt volgt:

$$V(q) = V_o \sqrt{\frac{A_o}{A}} \tag{6-4}$$

(μ is immers gelijk)
$\mu q = \mu_o$

Uiteraard is dit een zeer ruwe modellering van de werkelijkheid. Meer realistisch is om te veronderstellen dat de deeloppervlakken onderling gecorreleerd zijn. De correlatie tussen twee deeloppervlakken zal daarbij afnemen naarmate de onderlinge afstand toeneemt (figuur 6.3).

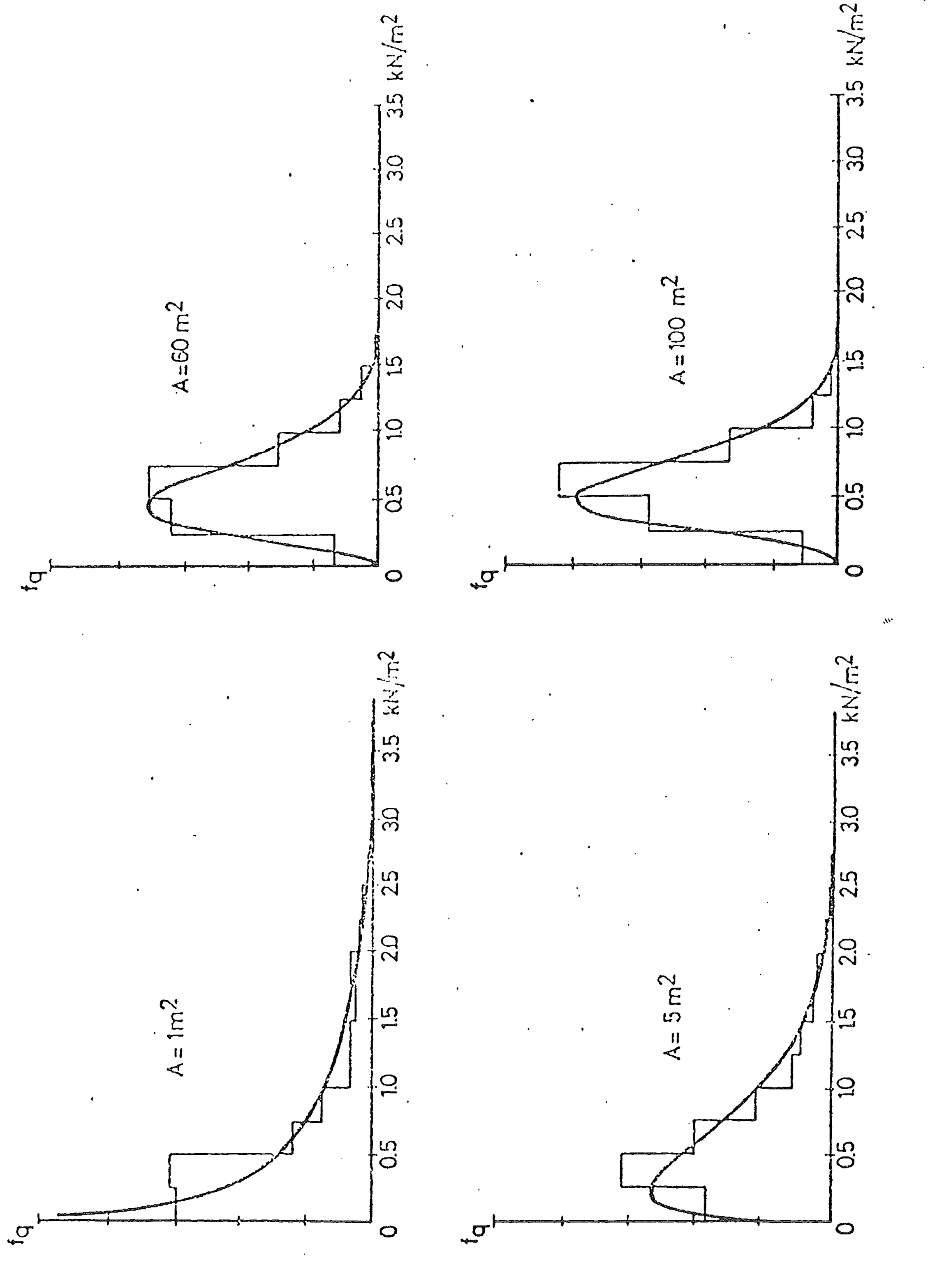


Fig. 6.1 Kansdichtheidsfuncties voor de verdeelde vloerbelasting voor verschillende oppervlakken (ontleend aan [7.6]).

Een exacte uitwerking van dit model voert te ver, maar het zal niet moeilijk zijn in te zien dat reeds een verbetering van het model wordt verkregen indien de oppervlakken een constante onderlinge correlatie ρ_o bezitten. De ρ_o weerspiegelt de correlatie die alle delen van een vloer met elkaar hebben omdat ze "in een gebouw zitten". Verschillen tussen gebouwen kunnen niet doordringen tot een enkele vloer. Uitgaande van deze basis ρ_o volgt (vgl. het parallelsysteem):

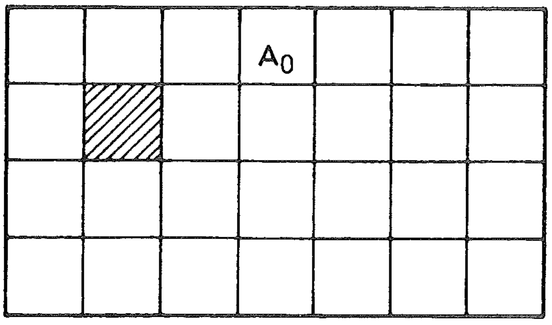


Fig. 6.2 Ten behoeve van de analyse van de vloerbelasting wordt het totaal oppervlak in gedachten opgedeeld in delen met oppervlak A_o, waarop de belasting geheel of gedeeltelijk onafhankelijk wordt genomen.

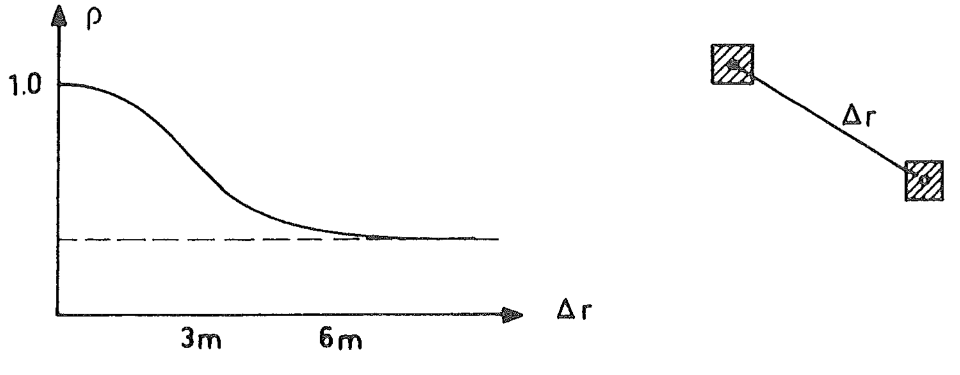


Fig. 6.3 Afnemende correlatie $\rho(q_1\ q_2)$ tussen de vloerbelastingen q_1 en q_2 op plaatsen met onderlinge afstand Δr. Voor grote Δr ($\Delta r > 6$ m) blijft er nog altijd een correlatie van 0,2 à 0,3 die uitdrukt "dat de punten in ieder geval in hetzelfde gebouw liggen.

$$\sigma^2(q) = (\frac{A_o}{A})^2 \; \Sigma \; \Sigma \; \rho_{ij} \; \sigma(q_i) \; \sigma(q_j) \quad i,j = 1..n \quad \rho_{ij} = \rho \text{ voor } i \neq j$$

$$\sigma^2(q) = (\frac{A_o}{A})^2 \; \{n \; \sigma_o^2 + (n^2 - n) \; \rho_o \; \sigma_o^2\}$$

$$\sigma^2(q) = \{\frac{A_o}{A} + (1 - \frac{A_o}{A}) \; \rho_o\} \; \sigma_o^2 \approx \{\frac{A_o}{A} + \rho_o\} \; \sigma_o^2 \qquad (6-4)$$

Voor de variatiecoëfficiënt volgt:

$$V(q) = V(q_o) \; \sqrt{\rho_o + A_o/A} \qquad (6-5)$$

Met A_o = 10 m^2, $V(q_o)$ = 1,0 en ρ_o = 0,20 blijkt dit model redelijk overeen te stemmen met de meetresultaten. Overigens zij opgemerkt dat verschillende onderzoekers vaak met afwijkende resultaten aankomen. De gemiddelde vloerbelasting varieert bijvoorbeeld van 0,4 tot 0,6 kN/m^2 en de spreiding bij bijvoorbeeld A = 20 m^2 van V = 0,36 tot V = 0,68. Het nastreven van erg nauwkeurige modellen heeft daarom ook weinig zin.

De onnauwkeurigheid in schattingen voor de parameters van de extreme vloerbelasting in 50 jaar is nog groter. Bij de inleiding over de vloerbelastingen is reeds gemeld dat gegevens hierover bijzonder schaars zijn. Gemiddelden variëren afhankelijk van hun oppervlak van 1 tot 3 kN/m^2 en variatiecoëfficiënten van 0,18 tot 0,38 (beide voor A $\leqslant$ 100 m^2). De relatief grote spreiding in het gemiddelde maakt het wat minder zinvol de afhankelijkheid t.o.v. het oppervlak nauwkeurig te willen vastleggen.
Daarom is in de overzichtstabel, tabel 6.2 volstaan met het geven van één waarde voor het gemiddelde (1,5 kN/m^2) en één voor de variatiecoëfficiënt (0,4) (geldig zolang A $\leqslant$ 100 m^2). De spreiding drukt tevens de onzekerheid met betrekking tot het gemiddelde uit.

In bovenstaande is uitsluitend aandacht gegeven aan kantoorvloeren. Voor woonhuisvloeren geldt een vrijwel gelijkluidend verhaal, met dien verstande dat het gemiddelde lager ligt (zie tabel 6.2). Ook voor andere vloeren (hospitalen, scholen, winkels) kunnen soortgelijke resultaten worden vermeld, al zijn hierover meestal nog minder gegevens beschikbaar.

6.4 Windbelasting

Op veel plaatsen in Nederland en ook daarbuiten worden reeds geruime tijd metingen verricht naar windsnelheid en windbelasting. De meeste statistische gegevens hebben betrekking op de windsnelheid. De basisgrootheid is daarbij de snelheid op 10 m boven het maaiveld, ongeacht de windrichting en gemiddeld over een periode van 60 min. Deze gemiddelde snelheid zullen we hier aanduiden met $\underline{v}$:

De maximale wind (3 s gemiddelde) in een uur bedraagt dan (zie fig. 6.4):

$$v = \bar{v}\ (1 + gI) = 1.7\ \bar{v} \qquad (6\text{-}6)$$

De factor (1 + gI) is de zogenaamde vlaagfactor, nodig om fluctuaties binnen het uur in rekening te brengen. De grootheid I is de zogenaamde turbulentie-intensiteit, gedefinieerd als $\sigma(v)/\bar{v}$. Afhankelijkheid van de terreinruwheid varieert deze van 0,10 tot 0,40; een redelijke maat is 0,20. Voor g wordt meestal een waarde van 3 à 4 aangehouden. De bijbehorende stuwdruk wordt gegeven door:

$$q = \tfrac{1}{2}\ \rho v^2 = \tfrac{1}{2}\ \rho \bar{v}^2\ \{1 + 2\ gI\} = \tfrac{1}{2}\ \rho \bar{v}^2 * (2,4) \qquad (6\text{-}7)$$

De term $(gI)^2$ is hierbij bewust weggelaten omdat dit kwadratische deel gepaard gaat met hogere frequenties en de meeste constructies daar niet gevoelig voor zijn.
Op de winddruk zijn verder nog een aantal correcties nodig voor:
- positie van het getroffen oppervlak en vorm van het bouwwerk (stroming Cw waarde)
- grootte van het getroffen oppervlak (vorm oppervlak?)
- andere hoogte dan 10 m
- dynamische responsie
- ruwheid van het terrein

Deze aspecten blijven binnen het kader van dit dictaat buiten beschouwing.

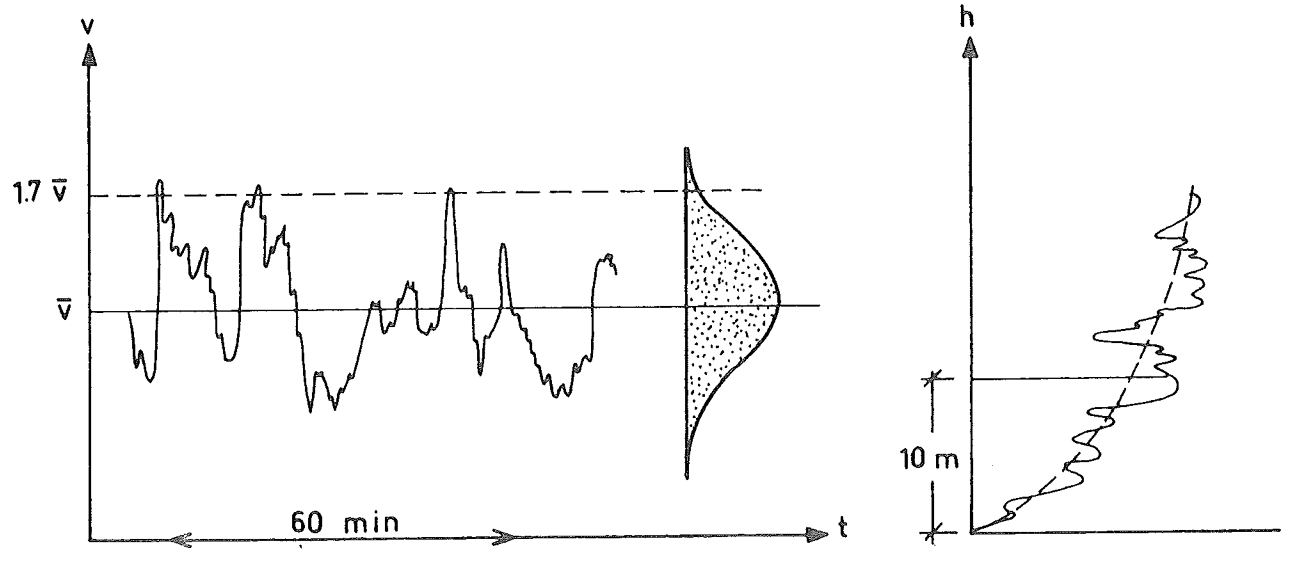


Fig. 6.4 De wind varieert in de tijd en over de hoogte.
De basisgrootheid voor de windbelasting is de uurgemidelde windsnelheid op 10 m boven het maaiveld.

Uit statistische gegevens van het KNMI [6-13] blijkt dat in de kuststreek van Nederland de "uurgemiddelde windsnelheid $\bar{v}$" gemiddeld gelijk is aan 5,2 m/s bij een standaardafwijking van 2,7 m/s:

$\mu(\bar{v}) = 5{,}2$ m/s $\sigma(\bar{v}) = 2{,}7$ m/s

De verdeling van $\bar{v}$ wordt het best benaderd door een Weibull-verdeling. Om practische redenen ? nemen we hier echter een Gumbel of dubbel exponentiële verdeling. klaren

Het voordeel is dat de Gumbell-verdeling een extreme-waarden-verdeling voor maxima (type I, zie tabel 2.2) is, waardoor een jaarmaximum of een maximum over langere tijd wederom een Gumbel-verdeling heeft. (Zie de eigenschappen van extreme-waarden-verdelingen in hoofdstuk 2).

De verdelingfunctie voor de Gumbel-verdeling luidt: blz 2-20

$$F_x(\xi) = \exp\{-\exp(-\alpha(\xi - \mu))\} \tag{6-8}$$

Het gemiddelde en de standaardafwijking worden gegeven door:

$$\mu = u + \frac{0.577}{\alpha} \quad \text{en} \quad \sigma = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}} \tag{6-9}$$

De parameters u en α kunnen daarmee worden bepaald op:

$\alpha = 0{,}47$ s/m   en $u = 4{,}0$ m/s

Als eerste stap willen we de verdeling bepalen van het maximale uurgemiddelde dat in een periode van een jaar kan optreden. Een jaar heeft 365 x 24 = 8800 uur. Op grond van de eigenschappen als beschreven in hoofdstuk 2 zou de Gumbelverdeling voor het jaarmaximum dezelfde standaardafwijking (of α-waarde) hebben en alleen verschoven zijn over een afstand $\Delta u = (\ln n)/\alpha = (\ln 8800)/0{,}47 = 19{,}1$ m/s. Deze regel geldt echter alleen als de uurgemiddelden als onderling onafhankelijk mogen worden beschouwd. Dit is natuurlijk niet het geval: wanneer het in een bepaald uur windstil is, is het zeer onwaarschijnlijk dat het een volgend uur stormt en omgekeerd. De wind vertoont wat genoemd wordt een zekere persistentie en veranderingen voltrekken zich met een bepaalde geleidelijkheid. Een eenvoudige manier om die in rekening te brengen is om het totaal aantal uren te vervangen door een equivalent aantal onafhankelijke uren. Dit aantal bedraagt ca 1600 uur, waardoor de verschuivingsterm komt op: is leuk, hoe te bepalen

$$\Delta u = \frac{\ln 1600}{0{,}47} = 15{,}7 \text{ m/s}$$

Het jaarmaximum van het uurgemiddelde heeft dus een Gumbelverdeling met:

Ja Ja

$u_1 = 4 + 15{,}7 = 19{,}7$ m/s $\alpha_1 = 0{,}47$ s/m

$\mu_1 = 5{,}2 + 15{,}7 = 20{,}9$ m/s $\sigma_1 = 2{,}7$ m/s

In fig. 6.5 zijn zowel het uurgemiddelde als het jaarmaximum weergegeven.

In de bouwvoorschriften wordt tegenwoordig internationaal als ontwerpwindsnelheid de windsnelheid genomen die gemiddeld eens in de 50 jaren jaar wordt overschreden: $\bar{v}_{50}$.

In een willekeurig jaar is de kans op het overschrijden van deze snelheid dus 2%. De referentie-windsnelheid volgt daarmee uit:

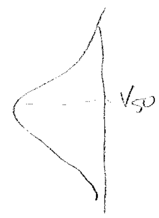
$$\exp\{-\exp\{-\alpha_1(\bar{v}_{50}-u_1)\}=1-0{,}02=0{,}98$$

$$\bar{v}_{50}=u_1-\frac{1}{\alpha_1}\ln(-\ln 0.98)=28{,}0 \text{ m/s}$$

Via (6-7) volgt dan als belasting:

$$q_{50}=\tfrac{1}{2}*1{,}25*(28)^2*2{,}4=1176 \text{ N/m}^2$$

De windsnelheid die gemiddeld eens per 50 jaar wordt overschreden noemt men ook wel de windsnelheid met een herhalingstijd van 50 jaar. Hoe groot is nu de kans dat deze windsnelheid $\bar{v}_{50}$ in een willekeurige periode van 50 jaar wordt overschreden?



Het voor de hand liggende antwoord is 50%, maar dat is niet juist. Beschouw daartoe eerst algemeen de onafhankelijke gebeurtenissen A_1, $A_2 .. A_n$ met:

$$P(A_i)=p \qquad p \ll 1 \quad \text{en} \quad n \gg 1$$

De kans op $A=\{A_1 \text{ of } A_2 \text{ of } .. A_n\}$ wordt gegeven door:

$$P(A)=1-(1-p)^n \sim 1-\exp(-np)$$

Het bewijs hiervan is te leveren door $(1-p)^n$ te ontwikkelen met het binomium van Newton en de exponent met een reeks-ontwikkeling van Taylor:

$$(1-p)^n=1-np+\frac{n(n-1)p^2}{2!}-\frac{n(n-1)(n-2)p^3}{3!}\ldots$$

$$\exp(-np)=1-np+\frac{(np)^2}{2!}-\frac{(np)^3}{3!}\ldots$$

Inderdaad is de benadering correct als $n \gg 1$ en $p \ll 1$.

Als voorbeeld beschouwen we de kans om met een dobbelsteen minstens één 6 te gooien in 6 worpen. Met A_i = "de i-de worp wordt een 6", $p = 1/6$ en $n = 6$ volgt exact:

$$P(A)=1-(5/6)^6=0.66$$

De benadering levert op:

$$P(A)=1-\exp(-6\times\frac{1}{6})=1-\frac{1}{e}=1-0.37=0.63$$

Het gooien van een 6 komt gemiddeld eens per 6 beurten voor: de "6" heeft dus een herhalingstijd van 6 beurten. De kans dat de "6" optreedt in de herhalingsperiode is gelijk aan 63%, de kans dat dat niet gebeurt 37%.
Voor de wind geldt eigenlijk hetzelfde. De ontwerpwindsnelheid $\bar{v}_{50}$ heeft per jaar een kans op overschrijding van 1/50.

Gemiddeld wordt deze snelheid dus éénmaal per 50 jaar overschreden en heeft dus een herhalingstijd van 50 jaar. De kans dat $\bar{v}_{50}$ in 50 jaar wordt overschreden is:

$$P\{v > \bar{v}_{50} \text{ in 50 jaar}\} = 1 - (1 - \frac{1}{50})^{50} = 1 - \exp(-1) = 0{,}63$$

63% in 50 j.

Er is dus een kans van 37% dat de 50-jaars-windsnelheid in de herhalingsperiode niet wordt overschreden.

Beschouw nu de maximale windsnelheid in 50 jaar: $\bar{v}_{max\ 50}$.
Deze heeft een Gumbelverdeling die verschoven is over (ln 50)/0.47 = 8,3 m/s t.o.v. de Gumbelverdeling voor het jaarmaximum. De parameters voor het maximum uurgemiddelde in 50 jaar worden gegeven door:

μ_{50} = 29.2 m/s $\qquad$ σ_{50} = 2,7 m/s

u_{50} = 28 m/s $\qquad$ α_{50} = 0,47 s/m

We constateren dat de parameter u_{50} numeriek precies gelijk is aan de ontwerpsnelheid $\bar{v}_{50}$. Dit is geen toeval maar kan worden bewezen, immers (zie 6-8):

$$P\{\bar{v}_{max\ 50} < u_{50}\} = \exp\{-\exp 0\} = \exp(-1) = 0{,}37$$

De parameter u van de maximale windsnelheid in 50 jaar is dus gelijk aan de windsnelheid met een herhalingsperiode van 50 jaar. De parameter u stelt ook nog de modale waarde voor (modale waarde = waarde waarvoor de kansdichtheidsfunctie maximaal is).

In fig. 6.5 zijn de resultaten samengevat. Getekend zijn de momentane windsnelheid, zowel de Weibull als de Gumbelverdeling , de Gumbelverdeling voor het jaarmaximum en de Gumbelverdeling voor de maximale uurgemiddelde windsnelheid in 50 jaar.

Constructies worden ontworpen op de modale waarde van deze verdeling, welke windsnelheid een herhalingstijd heeft van 50 jaar. In een willekeurige periode van 50 jaar is er een kans van 37% dat de maximale windsnelheid kleiner is en 63% dat deze groter is. Tenslotte geeft fig. 6.6 een beeld van de windsnelheden met een herhalingstijd van 50 jaar voor Europa. Voor Nederland varieert de 50 jaars windsnelheid van 28 m/s aan de kust (als eerder gevonden) tot 24 m/s in het zuid-oosten.

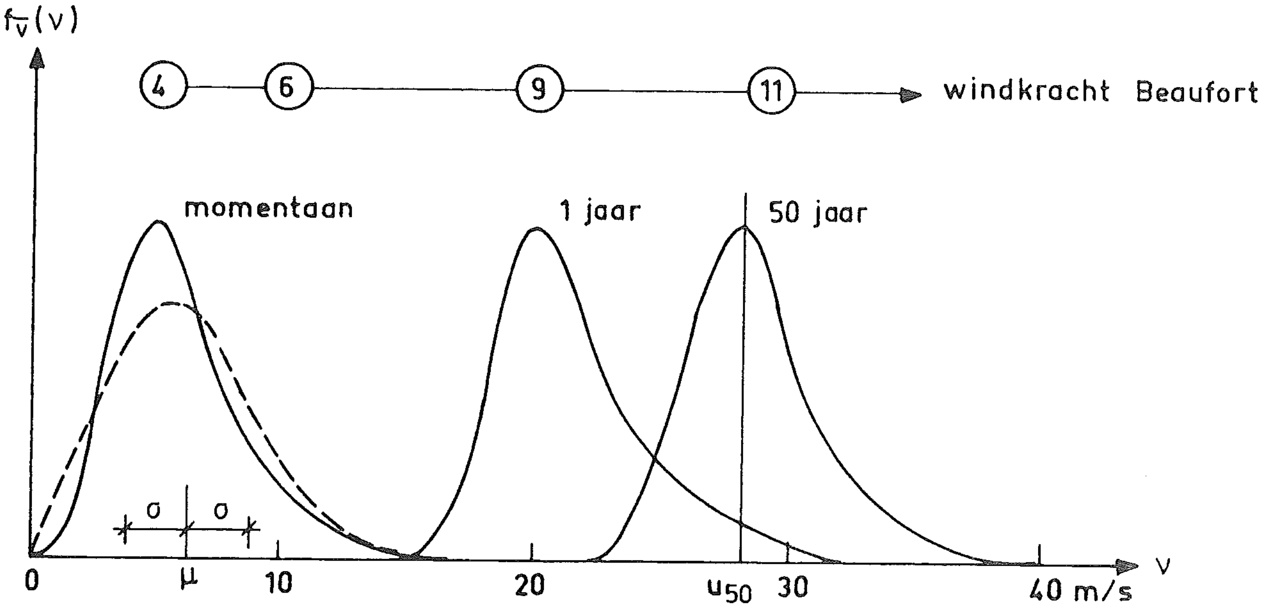


Fig. 6.5 Windsnelhedenverdeling voor de Nederlandse Noordzeekust volgens Borges [6-3]. Zowel voor momentaan als voor het maximum in 1 en 50 jaar wordt de Gumbel-verdeling (Extreem I voor maxima) genomen. Ter vergelijking is ook een Weibull-verdeling getekend voor de momentane windsnelheid met hetzelfde gemiddelde (6,5 m/s) en dezelfde standaardafwijking (2,7 m/s).

Na deze beschouwing over de windsnelheid keren we nu terug naar de winddruk q. De maximale winddruk in 50 jaar wordt bepaald uit (vgl. 6.7):

$$q_{max\ 50} = \tfrac{1}{2}\ \rho\ C_D\ G\ \bar{v}^2_{max\ 50}$$

Hierin is ρ de dichtheid van de lucht, C_D een aerodynamische drukcoëfficiënt, G de vlaagfactor en $\bar{v}_{max\ 50}$ de maximale uurgemiddelde windsnelheid in 50 jaar. We gaan ervan uit dat naast $\bar{v}_{max\ 50}$ ook C_D en G stochastische grootheden zijn. De gemiddelde waarde voor q volgt uit:

$$\mu(q_{max\ 50}) = \tfrac{1}{2} * 1{,}25 * C_D * 2{,}4 * 29.2^2 = 1280\ C_D\ N/m^2$$

Voor de variatiecoëfficiënt vinden we (ga dat na):

$$V^2(q_{max\ 50}) = V^2(C_D) + V^2(G) + 4\ V^2\ (\bar{v}_{max\ 50})$$

Europe

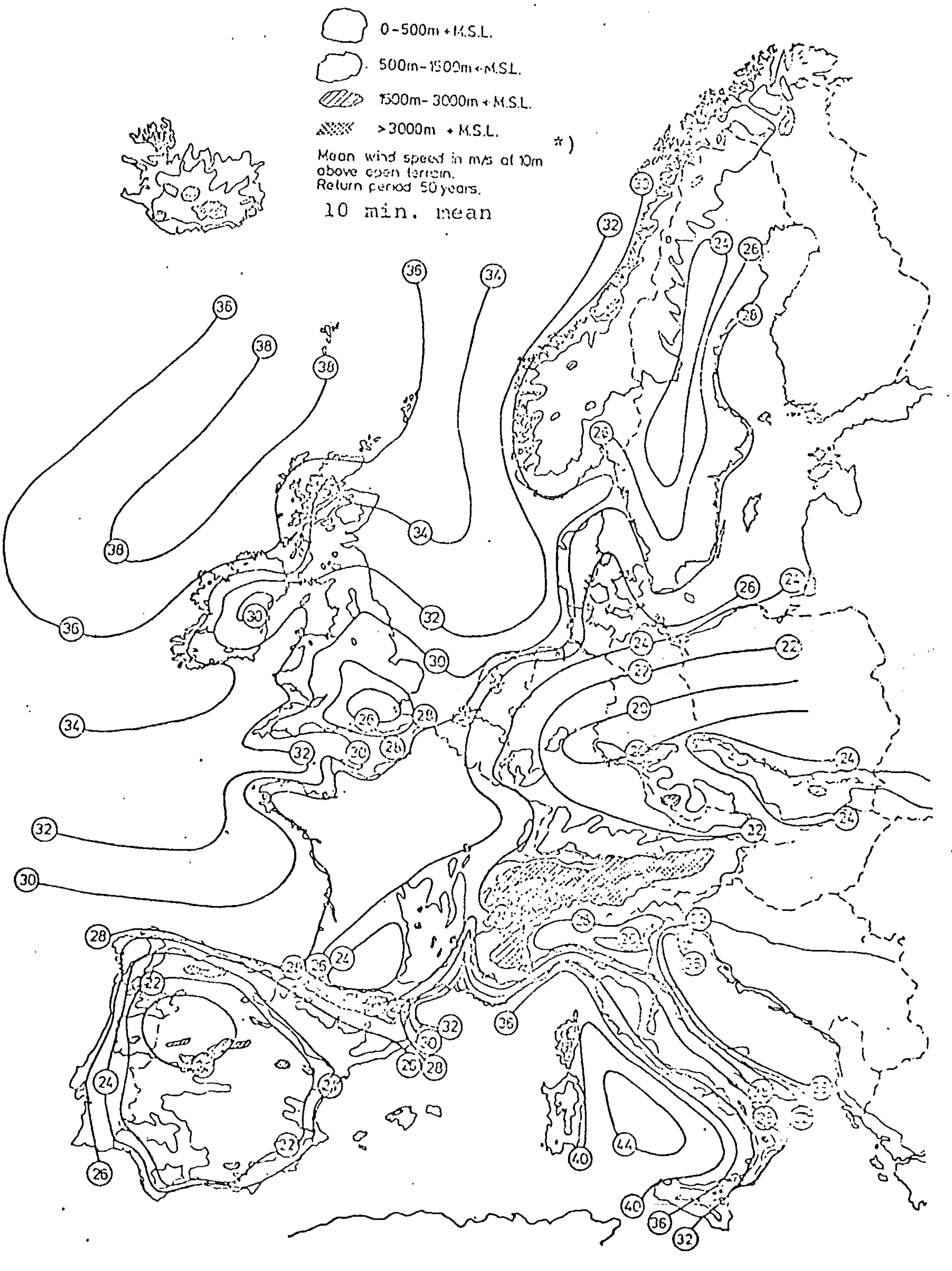


Fig. 6.6 Hoogtelijnenkaart voor 10 min. gemiddelde windsnelheden met een herhalingstijd van 50 jaar volgens [6-3].

*) The values indicated have to be divided by 1.05 to obtain the mean hourly wind.

Met $V(\bar{v}) = 0,10$ en (geschat) $V(C_D) = V(G) = 0,10$ volgt:

$$V^2(q_{max\ 50}) = (0,10)^2 + (0,10)^2 + 4\ (0,10)^2 = (0.25)^2$$

Deze waarden zijn opgenomen in tabel 6.2.

6.5 Sneeuwbelasting

Onderzoek naar de grootte van de sneeuwbelasting is in Nederland nog weinig verricht. Dit wordt wellicht mede veroorzaakt door het ontbreken van sneeuwhoogte-metingen in KNMI-gegevens. De resultaten van onderzoek in andere landen waar wel sprake is van een aanzienlijke sneeuwbelasting zijn slechts ten dele bruikbaar voor het bepalen van de sneeuwbelasting op Nederlandse daken.

Algemeen wordt ervan uitgegaan dat de sneeuwbelasting op een dak S gelijk is aan de sneeuwbelasting op de grond S_o vermenigvuldigd met een vormfactor voor het dak:

$$S = C.S_o$$

Ten aanzien van dakvormfactoren zijn geen Nederlandse onderzoekresultaten beschikbaar. Door ISO wordt voor platte daken een waarde C = 0,8 gehanteerd.

Voor een schatting van de sneeuwbelasting op de grond kan worden uitgegaan van de neerslaggegevens. De hoeveelheden neerslag worden gesommeerd over aaneengesloten perioden waarin de gemiddelde temperatuur beneden het vriespunt ligt. Kortdurende perioden (1 à 2 dagen) met een gemiddelde temperatuur iets boven het vriespunt (1 à 3 ^oC) worden niet als onderbreking geteld.
De op deze wijze verkregen neerslagcijfers geven een gemiddelde (over 37 jaar) van 22,6 mm en een standaardafwijking van 18,54 mm.

Indien rekening wordt gehouden met een verdamping van 0,15 mm/dag en indien verder wordt gesteld dat 1 mm neerslag overeenkomt met een belasting van 10 N/m^2, kan het gemiddelde en de standaardafwijking van de jaarlijkse maximale sneeuwbelasting worden geschat op:

$$\mu(S_o) = 226\ N/m^2$$

$$\sigma(S_o) = 185\ N/m^2$$

$$V = 0,82$$

Door ISO en in [6-3] wordt de Extreme waardenverdeling type I voor maxima aanbevolen als de meest geschikte verdeling. De parameters α en u voor deze verdeling kunnen bepaald worden via (zie hoofdstuk 2):

$$\alpha = \pi/\sigma\sqrt{6} \qquad = 0{,}0069\ m^2/N$$

$$u = \mu - 0{,}045\ \sigma = \qquad 143\ N/m^2$$

In de figuren 6.7 en 6.8 zijn de verdelingsfunctie en de dichtheidsfunctie weergegeven, tezamen met de data.

Ter vergelijking beschouwen we de resultaten van een Duits onderzoek over sneeuwbelasting. Voor het plaatsje Brunsbüttel aan de Duitse Noordzeekust wordt gevonden:

$$\mu = 322\ kN/m^2 \quad \text{en} \quad \sigma = 339\ kN/m^2$$

Het gemiddelde ligt dus iets hoger, de spreiding is zelfs aanzienlijk meer. Gegeven de meer noordelijke ligging van deze plaats is dit niet geheel onlogisch.

Voor de maximale sneeuwbelasting in 50 jaar worden op basis van de extreme waardenverdeling achtereenvolgens $\mu = 800\ N/m^2$ voor De Bilt en $\mu = 1200\ N/m^2$ voor Brunsbüttel gevonden. Het is erg moeilijk om op grond van deze gegevens een goede schatting te maken van het landelijk gemiddelde en de variatie over het land. De noordelijke en oostelijke provincies zullen tussen De Bilt en Brunsbüttel in liggen, het westen en midden van het land verschillen waarschijnlijk niet veel met De Bilt, of liggen iets lager. Een redelijke veronderstelling lijkt te zijn:
$\mu = 900\ N/m^2$ bij een variatiecoëfficiënt V = 0,3.
Voor de maximale sneeuwbelasting op een dak resulteert dan
$\mu = 0{,}8 * 900\ N/m^2 \sim 700\ N/m^2$ met V = 0,3. Deze waarden zijn opgenomen in tabel 6.2.

Voor de bepaling van de verdeling van de momentane sneeuwbelasting baseren we ons in eerste instantie op het jaarmaximum, waarvoor gemiddeld $250\ N/m^2$ met een standaardafwijking van $200\ N/m^2$ wordt aangehouden. Nu is het jaarmaximum natuurlijk maar een zeer beperkt deel van het jaar aanwezig, de meeste dagen is de sneeuwbelasting nul. Ten behoeve van de eenvoud nemen we aan dat de sneeuwbelasting 9 maanden van het jaar gelijk is aan nul en 1 maand gelijk aan het jaarmaximum. De kans om op een willekeurig ogenblik een sneeuwbelasting aan te treffen groter dan ξ wordt derhale gegeven door:

$$P(S > \xi) = \frac{1}{12} \{1 - \exp(-\exp(-\alpha(\xi - u))\}$$

Voor grote waarden van ξ, waarin we uiteindelijk geïnteresseerd zijn, kan $P(S > \xi)$ geschreven worden als:

$$P(S > \xi) \approx \frac{1}{12} \exp(-\alpha(\xi - u)) = \exp\{-\alpha\xi + \alpha u - \ell n\ 12\}$$

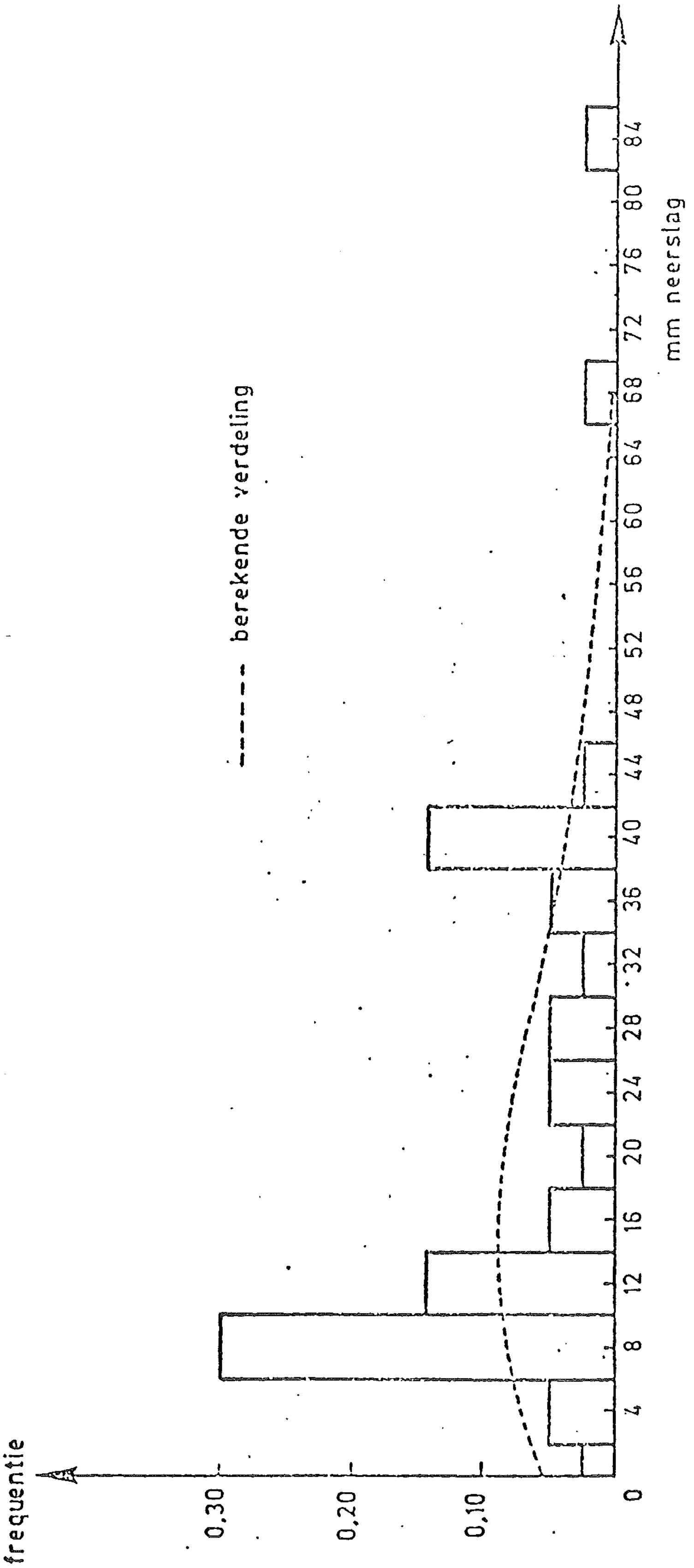


Fig. 6.7 Histogram en theoretische verdelingsfunctie voor de neerslag in De Bilt gedurende aaneengesloten perioden met temperaturen benden $0^{o}C$.

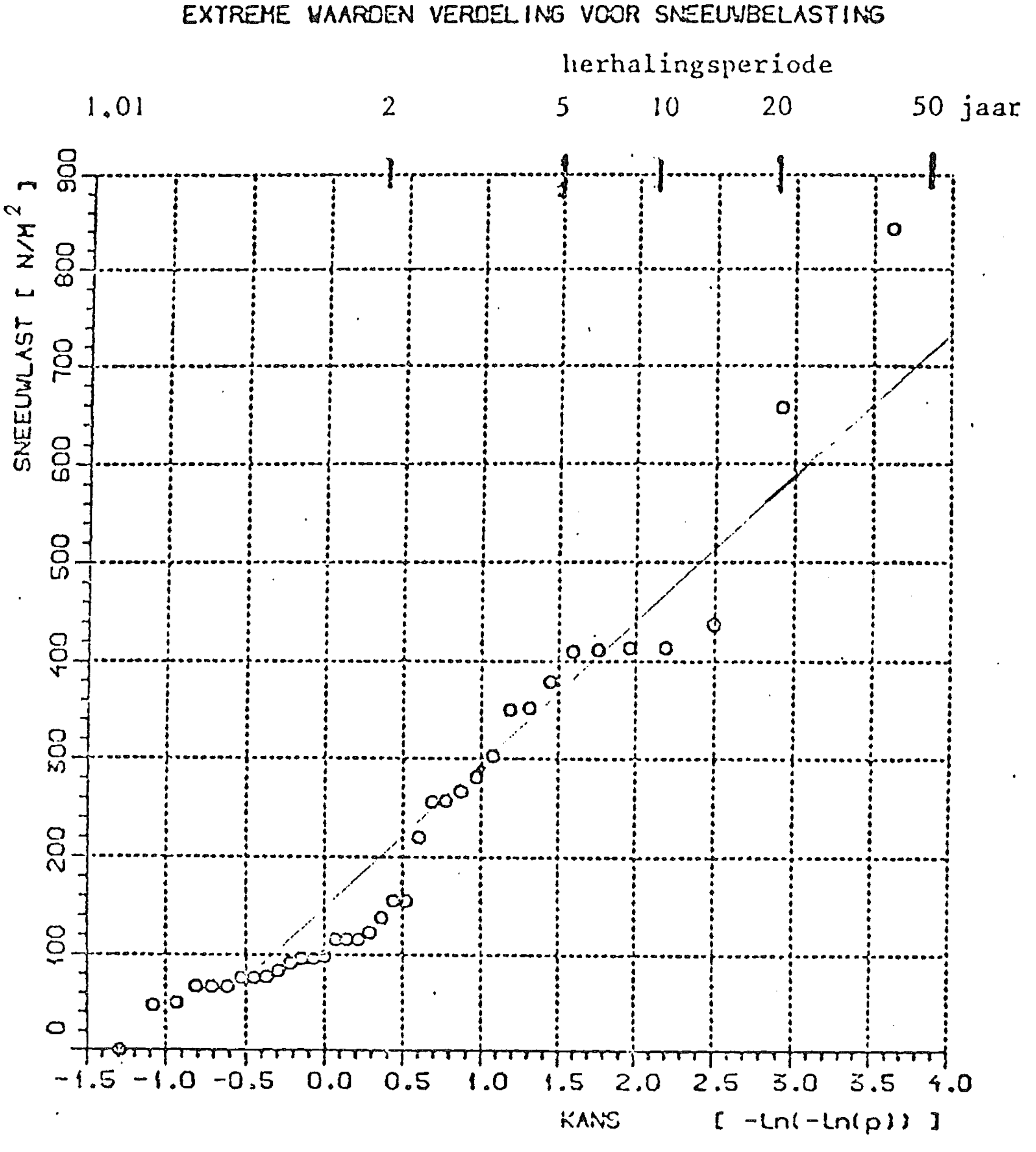


Fig. 6.8 Extreme-waardenverdeling voor de sneeuwbelasting.

Uit $\mu = 250\ kN/m^2$ en $\sigma = 200\ kN/m^2$ volgt dat $\alpha = 0{,}0064\ m^2/kN$ en $u = 160\ kN/m^2$ waarmee resulteert:

$$P(S > \xi) = \exp\left\{-\frac{\xi}{156} - \ldots.\right\} \approx \exp\left\{-\frac{\xi}{156}\right\}$$

of

$$F_S(\xi) = 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{156}\right)$$

Blijkens hoofdstuk 2 is dit precies de uitdrukking voor een Weibull-verdeling met gemiddelde $\mu = 156\ N/m^2$ en $V = 1{,}0$.

6.6 Algemeen overzicht

Tabel 6.2 geeft voor alle behandelde belastingen een gemiddelde waarde, een spreiding en een verdelingstype.

belasting q	type	gemiddelde	V(q)
eigen gewicht	Normaal	$1{,}05 * q_{nom}$	0,05 à 0,10
vloerbelasting			
kantoor-extreem	Ex I	1,50 kN/m^2	0,4
kantoor-momentaan	Gamma	0,50	$0{,}4 + A/A_o$; $A_o = 10\ m^2$
woonhuis-extreem	Ex I	1,00	0,4
woonhuis-momentaan	Gamma	0,30	$0{,}4 + A/A_o$; $A_o = 10\ m^2$
windbelasting (Westen)			
extreem	Ex I	1,00	0,25
momentaan	Weibull	0,10	1,0
sneeuwbelasting			
extreem	Ex I	0,70	0,3
momentaan	Weibull	0,15	1,0

Tabel 6.2 Overzicht van statistische belastingsgegevens.

Literatuur

[6-1] Joint Committee on Structural Safety
General Principles on Quality Assurance for Structures, Lisbon, January 1981.

[6-2] Ellingwood, B., Galambos, Th., McGregor, J., Cornell, C.A.
Development of a probability based load Criterion for American National Standard A58.
Building Code Requirements for Minimum Design Loads in Buildings and other Structures, NBS Special Publication 577, June 1980.

[6-3] Joint Committe on Structural Safety
Basic Notes on Actions, Lisbon, October 1976.

[6-4] ISO Standard
Permanent Actions (draft), October 1981.

[6-5] Peir, J.C.
A Stochastic Live Load Model for Buildings,
Research Report R71-35. MIT Department of Civil Engineering, September 1971.

[6-6] Peir, J.C., Cornell, C.A.
Spatial and temporal Variability of Live Loads, Journal of the Structural Division, ASCE, May 1973.

[6-7] McGuire, R.K., Cornell, C.A.
Live Load Effects in Office Buildings,
Research Report R73-28, MIT Department of Civil Engineering, July 1973.

[6-8] Sentler, L.
A Live Load Survey in Domestic Houses,
Report 47, Division of Building Technology, Lund, Sweden, 1974.

[6-9] Sentler, L.
A Live Load Survey in Office Buildings and Hotels,
Report 56, Division of Building Technology, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden 1974.

[6-10] Sentler, L.
A Stochastic Model for Live Loads on floors in Buildings,
Report 60, Division of Building Technology, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden 1975.

[6-11] Sentler, L.
Live Load Surveys; A Review with discussions,
Report 78, Division of Building Technology, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden 1976.

[6-12] Borges, J.F., Castanheta, M.
Wind in Western Europe, Results of an Enquiry,
Laboratory Nacional De Engenharia Civil, Feb. 1972.

[6-13] Rijkoord, P.J.
De variatie van de windsnelheidsverdeling volgens waarnemingen op 10, 40 en 80 m hoogte aan de meteorologische meetmast te Vlaardingen.
Wetenschappelijk Rapport WR 72-4, KNMI, De Bilt, 1972.

[6-14] International Organization for Standardization,
Wind Loads on Structures, ISO-TC98/SC3/WG2, August 1981.

7 BOMEN

7.1 Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken is de aandacht voornamelijk gericht geweest op de bepaling van de kans dat een bezwijkmechanisme optreedt. De veiligheid van een technisch systeem wordt echter bedreigd door het potentiële optreden van talloze bezwijkmechanismen.
Teneinde te beoordelen in hoeverre het optreden van bepaalde grenstoestanden de veiligheid van het totale systeem in gevaar brengt, zijn de risico-analytische methoden ontwikkeld, die men wel samenvat onder de naam "bomen". Het gaat daarbij om gebeurtenissen-, foutenbomen, rekenschema's etc. als instrumenten van de risico-analyse.
De risico-analyse bestaat uit een aantal fasen, die achtereenvolgens doorlopen worden. In de eerste fase vindt een beschrijving van de constructie als systeem plaats. De mate van gedetailleerdheid van de beschrijving wordt bepaald door de vereiste diepgang van de risico-analyse. Omdat al in de eerste fase veel informatie omtrent het te analyseren systeem nodig is, kan zij pas aanvangen als het ontwerp in een vrij ver gevorderd stadium is. Bij bestaande installaties vormt dit uiteraard geen enkel probleem.
In de volgende fase tracht men door middel van brainstorm-technieken zicht te krijgen op alle mogelijke ongewenste begingebeurtenissen (het bezwijken van een component, een menselijke fout, brand etc.) die de goede werking van het systeem zouden kunnen beïnvloeden. De normale analyses van alle grenstoestanden maar ook ervaring met andere soortgelijke problemen kan een steun zijn. Geheel volledig wordt het overzicht natuurlijk niet, daarvoor zijn bepaalde oorzaken als oorlog, sabotage, etc. te ongrijpbaar.
Tevens onderzoekt men in de tweede fase alle mogelijke reakties van het systeem op elke ongewenste begingebeurtenis. Als instrument is hier de gebeurtenissenboom, die op logische wijze het verband vastlegt tussen <u>één</u> begingebeurtenis en <u>alle</u> mogelijke daaropvolgende reakties van het systeem.
In de derde fase wordt bestudeerd op welke wijzen de <u>meeste</u> ongewenste reaktie van het systeem tot stand kan komen. In feite worden de meest ongunstige takken van de gebeurtenissen verenigd tot één boom: de foutenboom is dus een schematische weergave van de logische opeenvolging van alle gebeurtenissen, die leiden tot één zeer ongewenste reaktie van het systeem (b.v. falen). Deze ongewenste reaktie staat meestal boven aan de boom en wordt de "topgebeurtenis" genoemd. Voor iedere topgebeurtenis dient dus een aparte foutenboom te worden opgesteld.
In de laatste fase van de risico-analyse tracht men de kans op het optreden van de ongewenste topgebeurtenis te berekenen. Daartoe worden eerst de kansen op het optreden van de diverse begingebeurtenissen vastgesteld. Dit gebeurt d.m.v. niveau II, III berekeningen of puttend uit databanken waarin empirische gegevens over de faalfrequentie van allerlei (meest hydraulische en elektrische) componenten zijn opgeslagen. Tot slot wordt volgens de conventies van de waarschijnlijkheidsleer de kans op falen van het gehele systeem vastgesteld.

De waarde van een risico-analyse voor de ontwerpwerkzaamheden aan een constructie is als volgt aan te geven:
- Men krijgt inzicht in de wijze waarop het systeem kan falen.
- Men krijgt inzicht in de kans op falen van het systeem.

- De foutenbomen en gebeurtenissen fungeren als communicatiemiddel en tool of management.
- Men kan de technische en de menselijke oorzaken van falen in een benadering verenigen.

7.2 Enige basiselementen

De risisco-analyse maakt gebruik van de grondslagen van de systeemleer. De beschouwde systemen kunnen meestal worden beschreven met een input-output model. De input wordt door het systeem getransformeerd in een output (fig. 7.2.1).

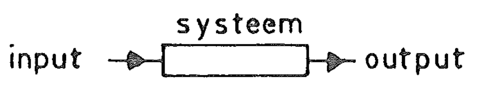


Fig. 7.2.1 Schets van een input-output systeem.

De subsystemen hebben intern dezelfde struktuur als het totale systeem. De opsplitsing van systemen in subsystemen, sub-sub systemen, enz. kan worden voortgezet tot het meest elementaire niveau (fig. 7.2.2).

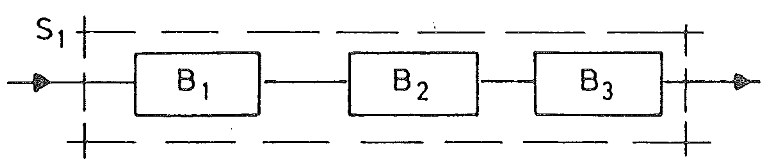


Fig. 7.2.2 Schets van de verdeling van een systeem in subsystemen (serieschakeling).

De praktijk geeft een zinvolle grens aan.

Voor de risico-analyse zijn de twee hoofdmogelijkheden van rangschikking van subsystemen binnen het hoofdsysteem van belang: serie-schakeling en parallel-schakeling.
Het verschil blijkt duidelijk, wanneer men tracht de kans op falen van het systeem vast te stellen m.b.v. gebeurtenissen- en foutenbomen.
De gebeurtenissenboom van het in fig. 7.2.2 gegeven serie-systeem ziet er als volgt uit (fig. 7.2.3).

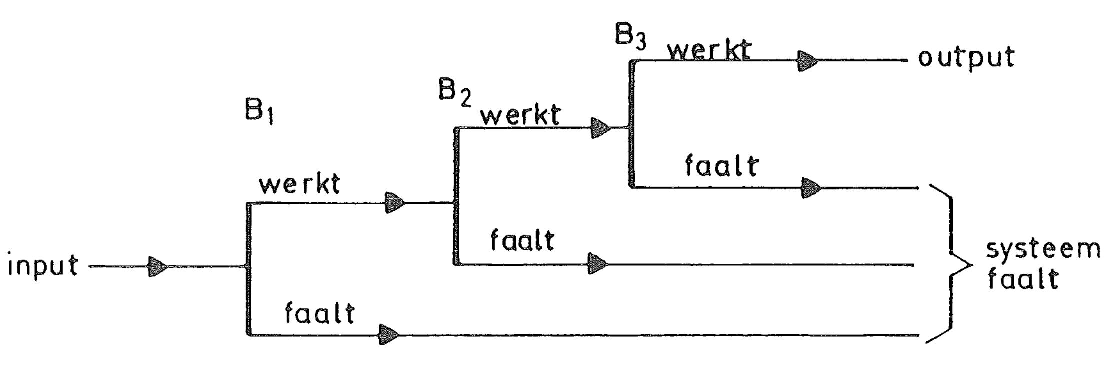


Fig. 7.2.3 De gebeurtenissenboom van het gedrag van een seriesysteem.

Men ziet dat de gebeurtenissenboom telkens speurt naar de gevolgen van één bepaalde begingebeurtenis. In de Angelsaksische literatuur wordt dit aangeduid als "forward logic".
Het is gebruikelijk in gebeurtenissenbomen "falen" met de onderste tak en werken met de bovenste tak na een knooppunt aan te geven.
In dit voorbeeld blijft het scala van reakties van het gehele systeem beperkt tot twee mogelijkheden: falen of werken.
Zoals te verwachten was bij een serie-systeem is het falen van een subsysteem voldoende om het totaal in ongerede te brengen.
In de foutenboom geeft men dit aan door een <u>of</u> poort. Het meest ongewenste gevolg, het falen van het systeem, staat daarbij bovenaan. De begingebeurtenissen vormen de voet van de boom. De foutenboom is gebaseerd op "backward logic" en speurt naar oorzaken (fig. 7.2.4).

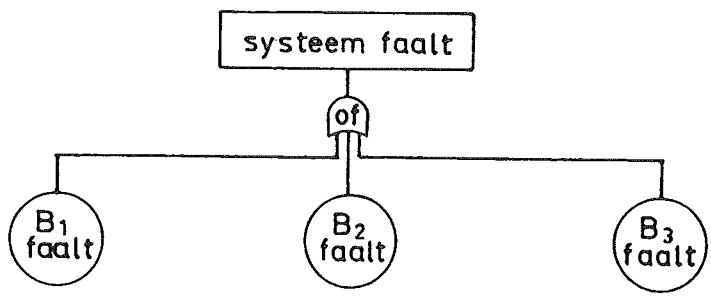


Fig. 7.2.4 Foutenboom van het gedrag van een serie-schakeling.

De kans op falen van het totale systeem kan geschreven worden als

$$P(F_1) = P(B_1 \underline{\text{ of }} B_2 \underline{\text{ of }} B_3 \; \ldots\ldots \; B_n) .$$

Indien nu de faalkans vanm de basiscomponenten bekend is

$$P(B_i) = P_{fi}$$

en er sprake is van onafhankelijkheid, dan is de faalkans van het systeem te berekenen

$$P(F) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P_{f_i})$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{f_i} \quad \text{voor kleine } P_{f_i}$$

Voor de gevallen waarin van afhankelijkheid sprake is kan men de onder- en de bovengrens voor de systeemfaalkans aangeven

$$\max_{i=1}^{n} (P_{f_i}) \leqslant P(F) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P_{f_i}$$

De analyse van een parallel-systeem is nu eenvoudig uit te voeren (fig. 7.2.5).

Uit de gebeurtenissenboom blijkt dat het systeem pas faalt als zowel B_1 en B_2 als B_3 niet werken. In de foutenboom geeft men dit aan door een <u>en</u> poort (fig. 7.2.6).

De faalkans van het systeem bestaande uit n parallel geschakelde subsystemen is:

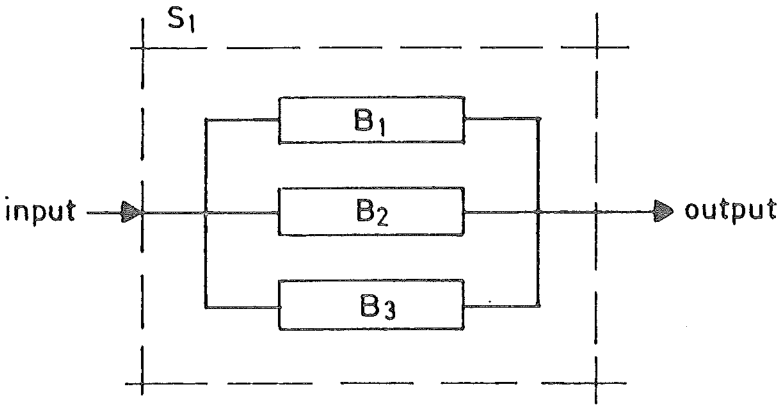
$$P(F) = P(B_1 \text{ \underline{en} } B_2 \text{ \underline{en} } B_3 \ldots\ldots B_n)$$

Of uitgedrukt in de faalkansen van de subsystemen indien de componenten onafhankelijk zijn:

$$P(F) = \prod_{i=1}^{n} P_{f_i}$$

Bij afhankelijkheid van de subsystemen zijn de volgende grenzen aan te geven voor de systeem faalkans:

$$0 \leq P(F) \leq \min (P_{f_i})$$



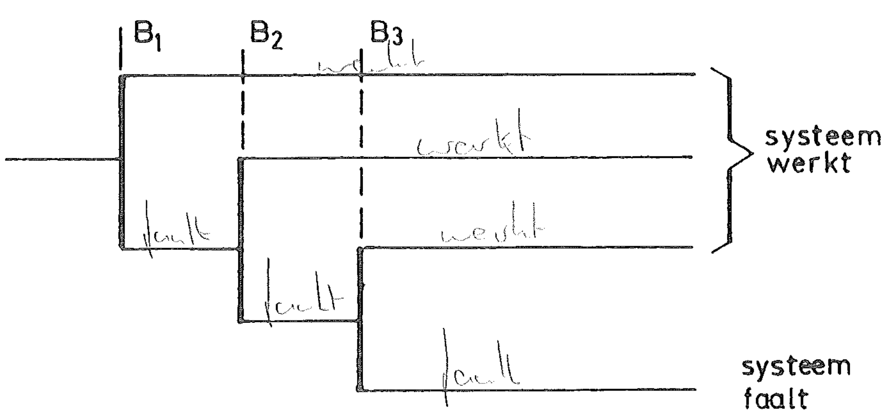


Fig. 7.2.5 De gebeurtenissenboom van een parallelsysteem.

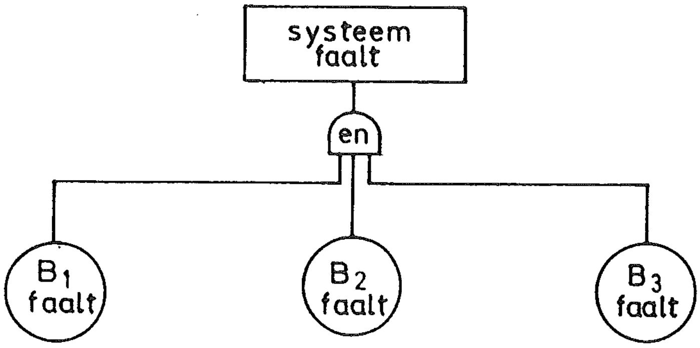


Fig. 7.2.6 De foutenboom van een parallelsysteem.

Er zijn echter ook parallelsystemen waarbij het totale systeem reeds faalt, indien m of meer subsystemen niet werken (b.v. eleltriciteit waarin tenminste twee van de drie generatoren moeten funktioneren). In dat geval geldt de bionominale verdeling:

$$P(F) = \sum_{i=m}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} P_f^{\ i} (1 - P_f)^{n-i}$$

In de foutenboom geeft men een dergelijke situatie weer met een "voting gate" (fig. 7.2.7).

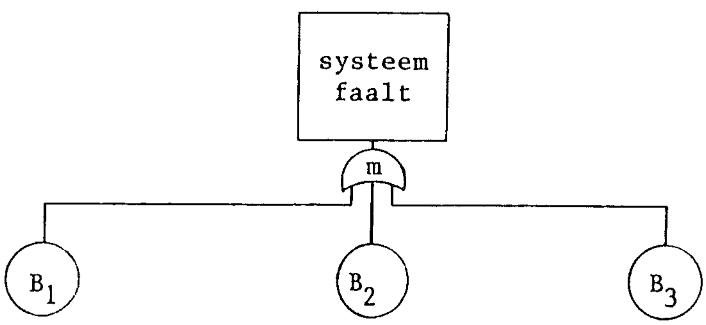


Fig. 7.2.7 Een foutenboom met een "voting gate".

Een variant op de en-poort die men in de literatuur vindt, is de "inhibit gate", die wordt aangegeven met een zeshoek (fig. 7.2.8).

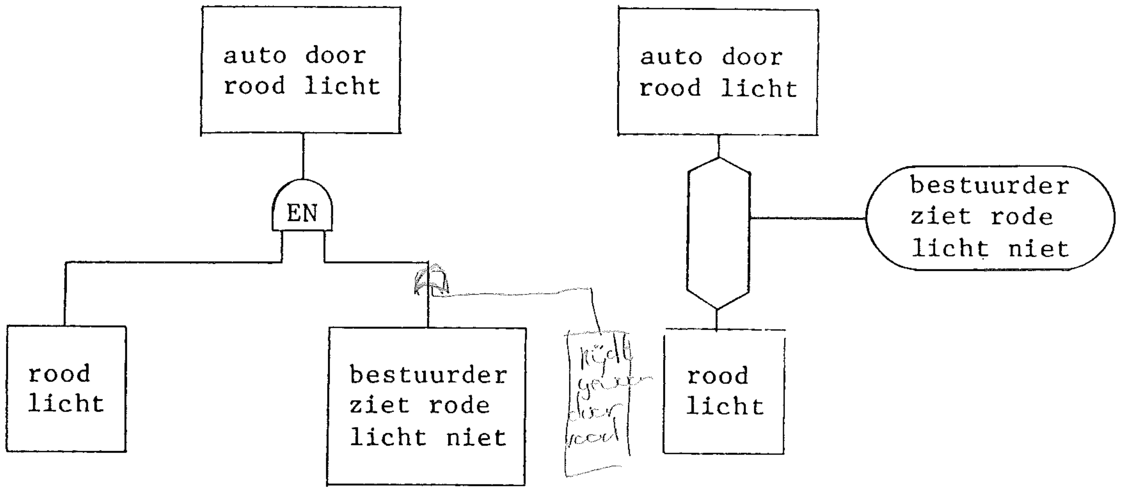


Fig. 7.2.8 Een foutenboom met een "inhibit gate".

De gebeurtenis naast de "inhibit gate" is een voorwaardelijke gebeurtenis, die alleen kan plaatsvinden als de begingebeurtenis optreedt. Om het overzicht van de mogelijke poorten te completeren worden nog de "exclusive or" poort en de "priority and" poort genoemd.

De eerste poort geeft output als één van de twee inputs optreedt, maar niet beide (fig. 7.2.9).

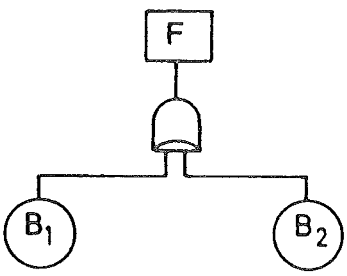


Fig. 7.2.9 De "exclusive or" poort.

Het tweede type poort geeft alleen output als alle inputs achtereenvolgens van links naar rechts optreden (fig. 7.2.10).

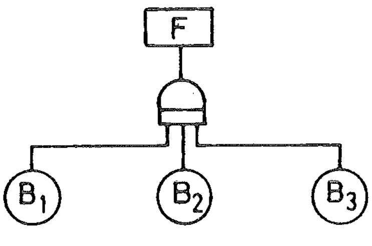
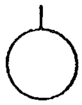
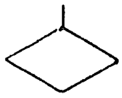
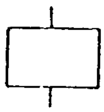
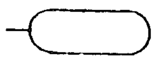
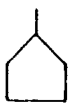


Fig. 7.2.10 De "priority and" poort.

Evenals voor de poorten bestaat voor het aangeven van gebeurtenissen een notatie. De gebruikelijke figuren zijn hieronder weergegeven.

	basisgebeurtenis
	niet verder ontwikkelde gebeurtenis
	samengestelde gebeurtenis (gevolg)
	voorwaardelijke gebeurtenis (gebruikt bij inhibit gate)
	normale gebeurtenis (house event)
	verwijs symbool

De basisgebeurtenis, die wordt aangegeven met een cirkel, is een begingebeurtenis, die zich aan de voet van de foutenboom bevindt. Een dergelijke gebeurtenis betreft meestal het falen van een systeemcomponent. De kans van optreden van een basisgebeurtenis is bekend en wordt vastgesteld m.b.v. berekeningen of databankgegevens.

Ruiten worden gebruikt om gebeurtenissen aan te geven die niet verder ontwikkeld zijn in die zin, dat een diepgaande analyse naar de onderliggende basisgebeurtenissen niet is uitgevoerd. Bij de kwantificering van de kans op falen van het totale systeem wordt de kans op de niet verder ontwikkelde gebeurtenissen soms verwaarloosd.

Gebeurtenissen, die in de foutenboom wel verder worden geanalyseerd geeft men aan met een rechthoek.

Een ovaal wordt gebruikt om in samenhang met een "inhibit gate" een conditionele gebeurtenis aan te duiden.

Het "huis" geeft een normale gebeurtenis aan, d.w.z. een gebeurtenis die altijd optreedt (kans = 1.0). Soms wil men echter een foutenboom tekenen onder de veronderstelling dat een bepaalde (niet normale) gebeurtenis optreedt. Deze gebeurtenis wordt dan aangegeven met een huis. De gehele foutenboom veronderstelt dan het optreden van de huisgebeurtenis (fig. 7.2.11).

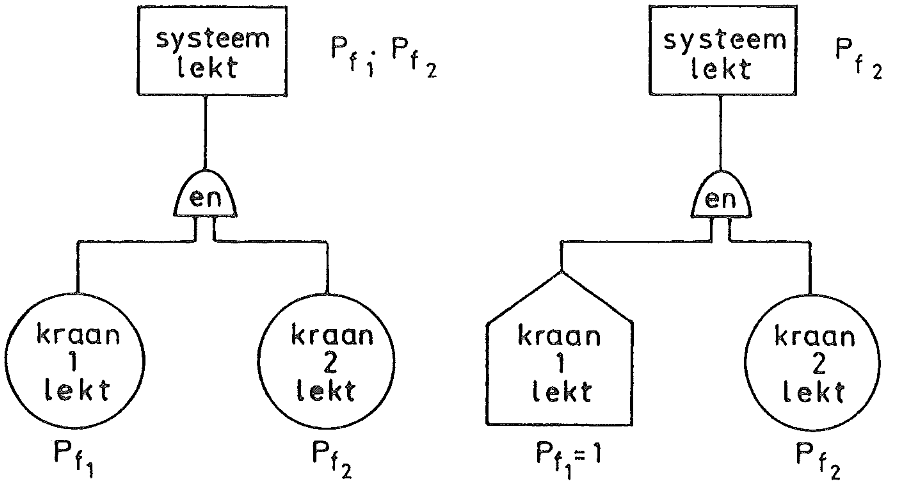


Fig. 7.2.11 Een illustratie van het gebruik van het huis in een voorwaardelijke foutenboom.

Het driehoekje wordt gebruikt om een foutenboom af te breken en te verwijzen naar een elders weergegeven deel (fig. 7.2.12).

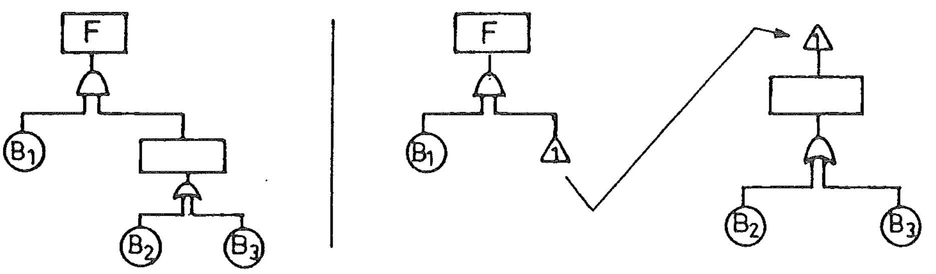


Fig. 7.2.12 Het gebruik van het verwijssymbool.

7.3 Een toepassing van de theorie op een systeem

In deze paragraaf zal de theorie van de risico-analyse worden toegepast op een fictief systeem dat is samengesteld uit vijf componenten. Het schema van het systeem is gegeven in fig. 7.3.1. In de figuur is eveneens aangegeven in welke subsystemen (I tot IV) het systeem kan worden gesplitst, voordat het niveau van de componenten is bereikt.

Met behulp van de gebeurtenissenboom (zie fig. 7.3.1) wordt geanalyseerd welke gebeurtenissen achtereenvolgens kunnen plaatsgrijpen, wanneer het systeem wordt belast.

Tevens is van het systeem de foutenboom opgesteld (fig.7.3.2). Als samengestelde gebeurtenis ziet men steeds het falen van een subsysteem verschijnen. Gaande naar de voet van de boom worden deze gebeurtenissen uiteengerafeld in basisgebeurtenissen.

Ook nu is het mogelijk uit de foutenboom de wiskundige uitdrukking voor de faalkans af te leiden. Het is het verstandigst bovenaan de boom te beginnen met de uitdrukking voor de topgebeurtenis.

$$P(F) = P(B_1 \underline{\text{OF}}\ S_{II})$$

$$= P(B_1 \underline{\text{OF}}\ (B_2 \underline{\text{EN}}\ S_{III}))$$

$$= (PB_1 \underline{\text{OF}}\ (B_2 \underline{\text{EN}}\ (B_3 \underline{\text{OF}}\ S_{IV})))$$

$$P(F) = P(B_1 \underline{\text{OF}}\ (B_2 \underline{\text{EN}}\ (B_3 \underline{\text{OF}}\ (B_4 \underline{\text{EN}}\ B_5))))$$

Aansluitend hierop is eveneens de faalkans van het systeem te bepalen indien men onafhankelijkheid veronderstelt. Daarbij rekent men van de onderzijde van de boom naar boven toe.

$$P(S_{IV}) = P_{f_4} \cdot P_{f_5}$$

$$P(S_{III}) = 1 - (1 - P_{f_3})(1 - P(S_{IV}))$$ $P_{f_3} + P_{f_4} \cdot P_{f_5} - P_{f_3} \cdot P_{f_4} \cdot P_{f_5}$

$1 - (1 - P_{f_4} P_{f_5} - P_{f_3} + P_{f_3} P_{f_4} P_{f_5})$ idem

$$P(S_{II}) = P_{f_2} \cdot P(S_{III})$$

$$P(F) = 1 - (1 - P_{f_1})(1 - P(S_{II}))$$

Indien de kansen op de basisgebeurtenissen klein zijn ($P_f < 0{,}01$ voor alle i) is de volgende benadering geoorloofd.

$$P(S_{IV}) = P_{f_4} \cdot P_{f_5}$$

$$P(S_{III}) = P_{f_3} + P_{f_4} \cdot P_{f_5}$$

$$P(S_{II}) = P_{f_2} \{P_{f_3} + P_{f_4} \cdot P_{f_5}\}$$

$$P(F) = P_{f_1} + P_{f_2} \{P_{f_3} + P_{f_4} \cdot P_{f_5}\}$$

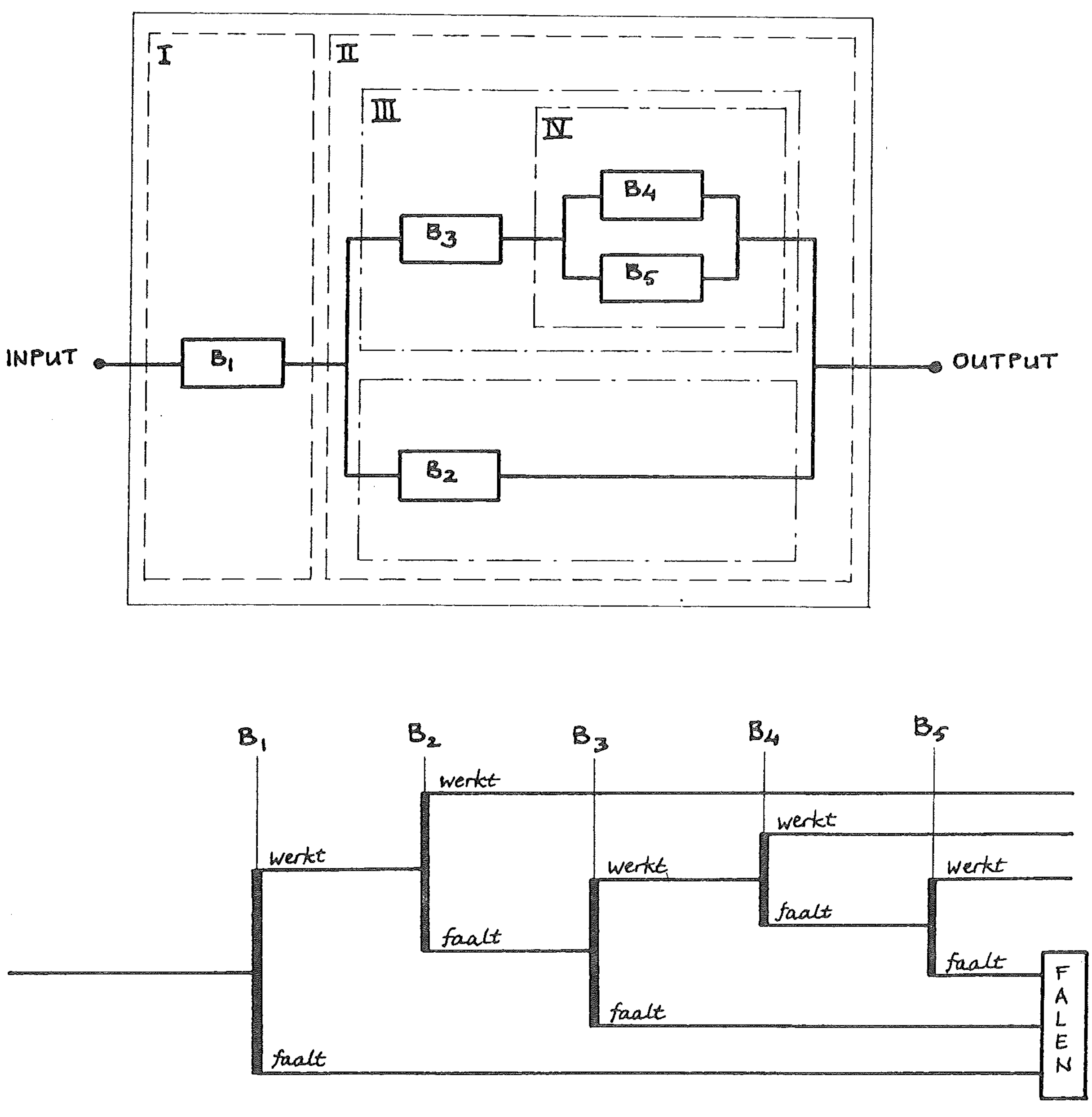


Fig. 7.3.1 De gebeurtenissenboom voor een samengesteld systeem.

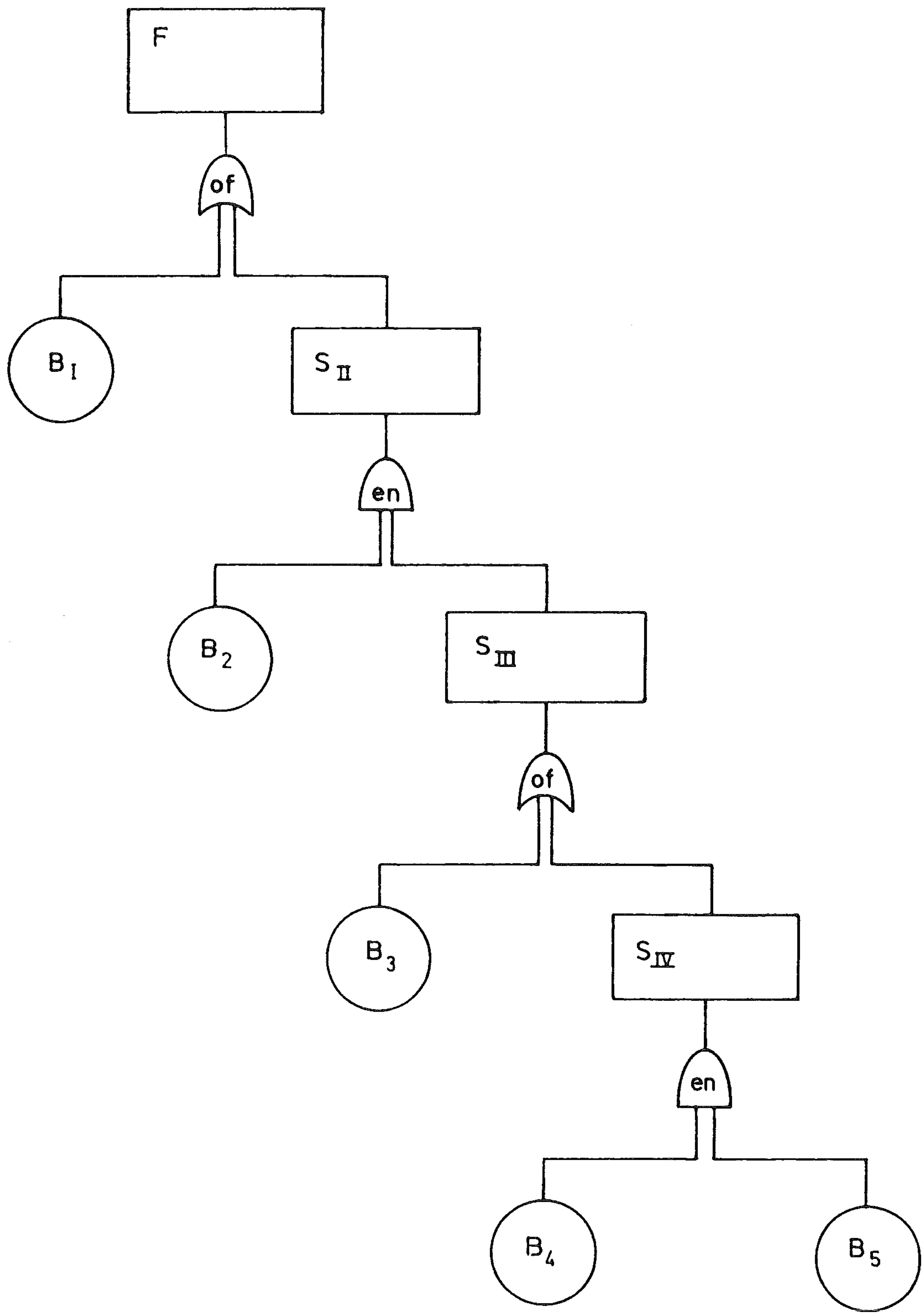


Fig. 7.3.2 De foutenboom voor het samengestelde systeem van fig. 7.3.1.

Voorbeeld 7.1

De stalen brug over de haveningang van Curacao werd van de oevers af uitgebouwd. De brughelften waren daarbij tijdelijk in de rotsen verankerd (fig. 7.3.3).

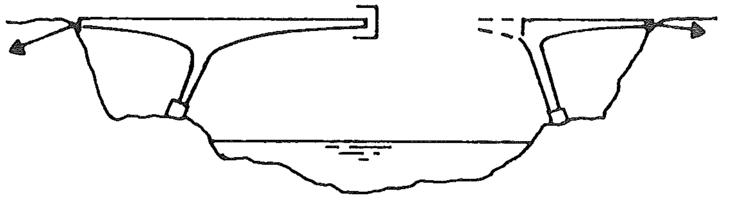


Fig. 7.3.3 Een bouwfase van de brug over de haven van Curacao.

De verankering werd uitgevoerd met hoogwaardig stalen staven, die ter verdeling van de belasting uitmondden in een evenaarconstructie (fig. 7.3.4).

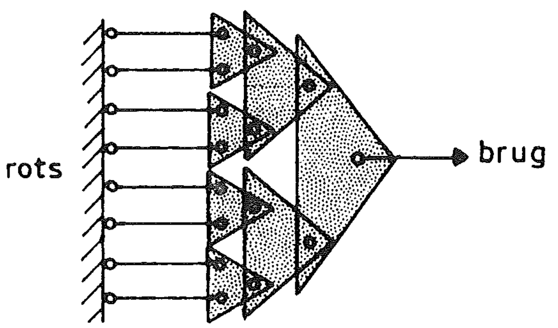


Fig. 7.3.4 De evenaarconstructie.

Op het eerste gezicht lijkt hier sprake te zijn van een parallelsysteem. Echter zodra één staaf breekt ontstaat een mechanisme en zal de constructie bezwijken (fig. 7.3.5).
Verder was de materiaalkeuze voor de staven gevallen op koudvervormd hoogwaardig staal. De staven waren in gewapend betonblokken verankerd. Het spreekt vanzelf, dat bij het stellen van de verankeringsstaven in de wapeningskorven vastlassen ontoelaatbaar is i.v.m. de achteruitgang van de eigenschappen van koudvervormd staal. Maar een vergissing is menselijk.

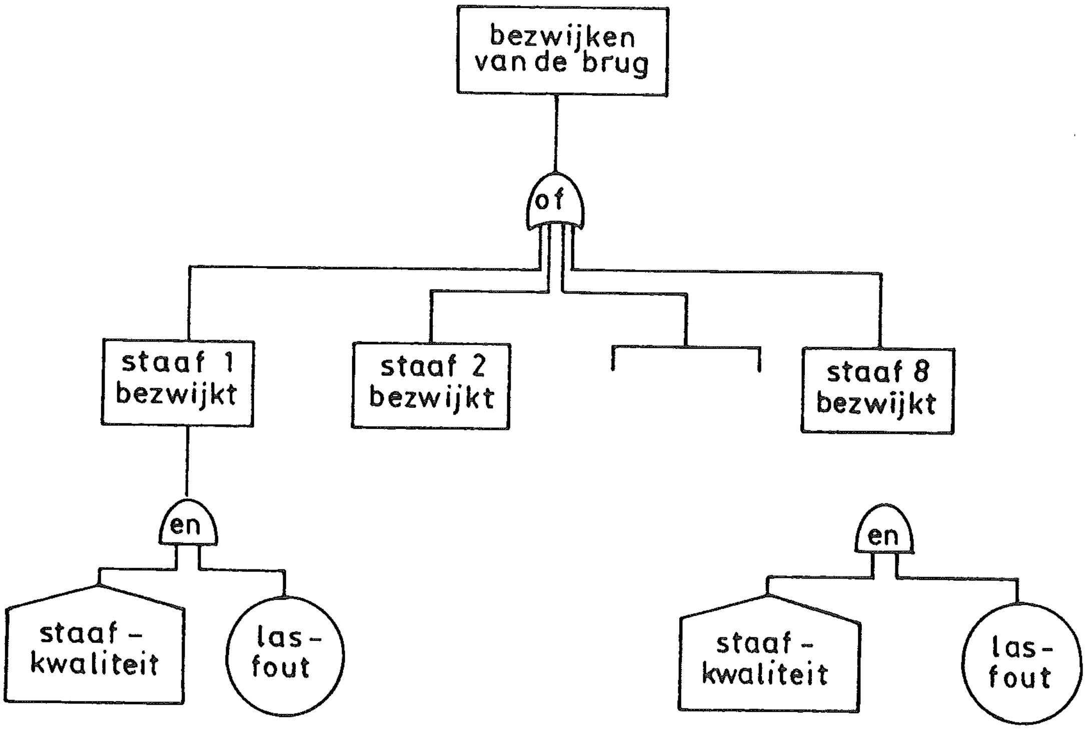


Fig. 7.3.5 De foutenboom van het verankeringssysteem.

De koudvervormde staalkwaliteit is een gegeven (P = 1), zodat een lasfout altijd leidt tot een ontoelaatbare verzwakking. Via de of-poort wordt de kans op bezwijken van de brug nu

$$P(\text{bezwijken van de brug}) = 1 - \prod_{i=1}^{8} (1 - P(\text{lasfout}))$$

Getalsmatig gedetailleerd:

P(bezwijken)	P(lasfout)
0.08	0,01
0,57	0,10
0,83	0,20

De tabel geeft aan dat veel afhangt van het inzicht van het uitvoerend personeel.

Voorbeeld 2

Op vele plaatsen in de wereld liggen haventerreinen buitendijks. Ten behoeve van de toegankelijkheid is de dijk dan meestal doorsneden (coupure).

Bij een stormwaarschuwing moeten mensen schotbalken in de coupure aanbrengen om het hoge water te keren (fig. 7.3.6 en 7.3.7).

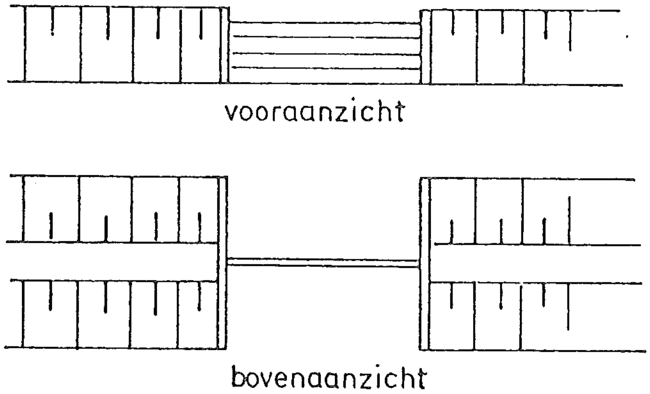


Fig. 7.3.6. Een coupure.

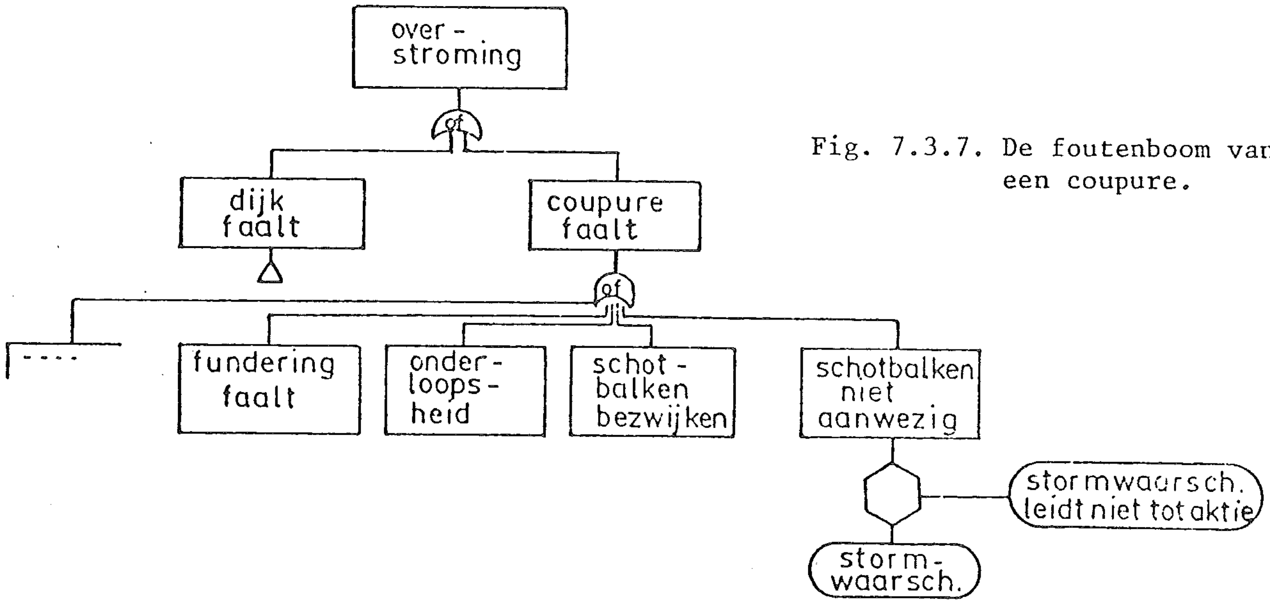


Fig. 7.3.7. De foutenboom van een coupure.

7.1 Enkele in de literatuur voorkomende begrippen

Naast de reeds behandelde begrippen zoals poorten en gebeurtenissen vindt men in de literatuur nog een aantal aanduidingen waarvan we hier twee willen behandelen, de minimale snede en de struktuurfunktie.

Onder een minimale snede verstaat men de kleinste verzameling basisgebeurtenissen, welke bij gezamenlijk optreden van de basisgebeurtenissen tot falen van het systeem leidt.
Indien één der basisgebeurtenissen van een minimale snede niet optreedt werkt het systeem.
Het vinden van minimale sneden is eenvoudig indien men zich realiseert dat een of-poort het aantal snede vergroot en een en-poort het aantal gebeurtenissen in de snede doet toenemen.
De werkwijze wordt het eenvoudigst geïllustreerd door bij wijze van voorbeeld de minimale sneden van het eerder geanalyseerd systeem (fig. 7.3.1) te bepalen.
Men begint bovenaan de foutenboom

B_1

$\downarrow$ of-poort

S_{II}

en daalt af naar de volgende poorten

B_1

B_2 S_{III} → en-poort

B_1

B_2 B_3 ↓ of-poort

B_2 S_{IV}

B_1

B_2 B_3 → en-poort

B_2 B_4 B_5

totdat het tableau uitsluitend basisgebeurtenissen bevat.
Iedere rij geeft nu een minimale snede van het bestudeerde systeem.

Het begrip minimale snede wordt onmiddellijk duidelijk, wanneer men de sneden in het principe schema van het systeem schetst (zie fig. 7.4.1). Alleen indien alle componenten in een minimale snede falen, faalt het gehele systeem.

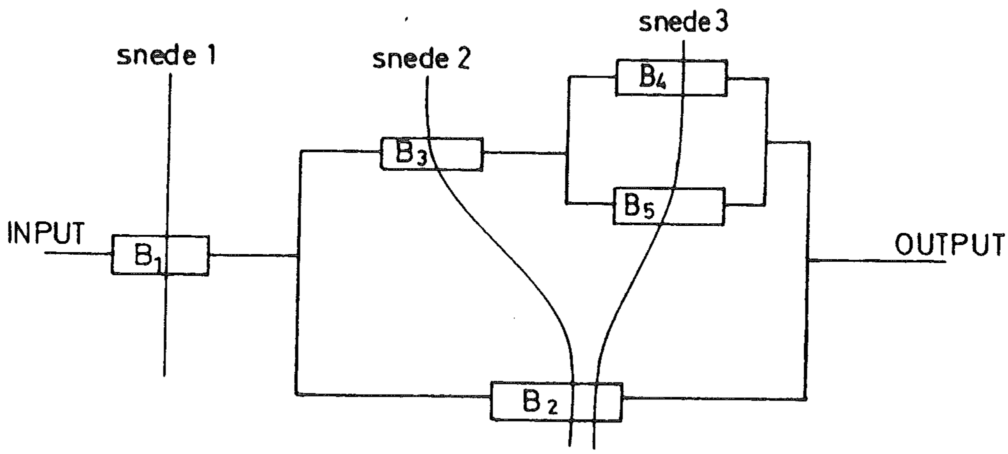


Fig. 7.4.1 De minimale sneden van het systeem. numeriek P.

Het is mogelijk een foutenboom te beschrijven met een struktuurfunktie $\psi(y)$. De waarde van de struktuurfunktie is een binaire indicator voor de werking van het systeem.

$$\psi(y) = \begin{cases} 1 & \text{wanneer het systeem faalt} \\ 0 & \text{wanneer het systeem werkt} \end{cases}$$

Hierin is $y = (y_1, y_2 \ldots. y_n)$ de vector die het al of niet optreden van de gebeurtenissen aangeeft.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{basisgebeurtenis } i \text{ treedt op} \\ 0 & \text{basisgebeurtenis } i \text{ treedt } \underline{\text{niet}} \text{ op} \end{cases}$$

De struktuurfunktie voor een en-poort is het produkt van de indicatorvariabelen y_i van de basisgebeurtenissen

$$\phi(y) = \prod_{i=1}^{n} y_i$$

De struktuurfunktie is alleen gelijk aan 1 indien alle $y_i = 1$.

Ook voor de of-poort is de struktuurfunktie eenvoudig.

$$\phi(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - y_i)$$

Zodra één der indicatorvariabelen y_i de waarde 1 krijgt, faalt het systeem ($\phi(y) = 1$).

Ter illustratie kan men nu de struktuurfunktie van het systeem in fig. 7.3.1 opstellen.

Men begint bovenaan de boom

$$\phi(y) = 1 - (1 - y_1)(1 - y_{II})$$

$$= 1 - (1 - y_1)(1 - y_2 y_{III})$$

$$\phi(y) = 1 - (1 - y_1)(1 - y_2(1 - (1 - y_3)(1 - y_{IV})))$$

$$\phi(y) = 1 - (1 - y_1)(1 - y_2(1 - (1 - y_3)(1 - y_4 y_5)))$$

Het nut van de struktuurfunktie wordt duidelijk wanneer men zich realiseert dat de verwachtingswaarde van een indicatorvariabele y_i gelijk is aan de kans op de basisgebeurtenis i, immers

$$E(y_i) = \int f_{y_i}(y_i) \cdot y_i \cdot dy_i$$

kan slechts de waarde 0 en 1 aannemen

$$= 0.(1 - P_{f_i}) + 1.P_{f_i} = P_{f_i}$$

waarin P_{f_i} = kans op basisgebeurtenis i

Aangezien hetzelfde geldt voor de verwachtingswaarde van de struktuurfunktie volgt de faalkans van het systeem uit de struktuurfunktie indien men voor de indicatorvariabelen de faalkansen van de componenten P_{f_i} invult

$$y_i = P_{f_i}$$

Daartoe is wel vereist dat de basisgebeurtenissen onafhankelijk zijn. De struktuurfunktie maakt het mogelijk snel de faalkans van het systeem te bepalen voor diverse waarden van de faalkans der componenten.

7.5 Enkele opmerkingen en nieuwe ontwikkelingen

In de voorafgaande paragrafen is getoond, dat de huidige risico-analyse een techniek met een binaire grondslag is. Iedere component kent maar twee toestanden: werken of falen, evenals het totale systeem.
De gebeurtenissenboom analyseert van één begingebeurtenis alle mogelijke gevolgen.
Voor elke gebeurtenis moet een aparte boom worden opgesteld. Het is echter wel mogelijk uit een gebeurtenissenboom een scala van gevolgen af te leiden.
Zo geeft de gebeurtenissenboom voor een koelmiddelverliesongeluk in een kerncentrale de gevolgen weer in vier gradaties (zie fig. 7.5.1).

In een foutenboom kan echter maar één gebeurtenis aan de top staan. Men kiest daarvoor meestal het meest ongewenste gevolg. Indien het gevolg echter een continue variabele is, zoals in dit geval van uitstoot, dan houdt dit de keuze van een grens (uitstoot > ....) in. Voor elke andere topgebeurtenis is een andere foutenboom vereist.

In het voorbeeld van het zeeweringssysteem (fig. 7.5.2) is een overstroming als topgebeurtenis gekozen en op een conceptueel niveau van analyse is dat heel acceptabel. Maar een overstroming heeft als continue variabele de waterstand boven het maaiveld. Het is derhalve noodzakelijk een overstroming te definiëren als (waterstand > m.v. + x (m)) zodra men streeft naar een kwantificering van de foutenboom. Verder heeft reeds het falen van de waker schade tot gevolg b.v. in de vorm van verlies van vee en verzilting van weidegrond. Een dergelijk "tussenresultaat" kan in een foutenboom niet tot uitdrukking worden gebracht.
Om aan dit laatste bezwaar tegemoet te komen is de cause-consequence chart geïntroduceerd. Dat is een versmelting van de gebeurtenissen en de foutenboom, die het mogelijk maakt meer dan één gevolg te tonen. In feite wordt de foutenboom uitgebreid met de vertakkingsmogelijkheid van de gebeurtenissen door een ja/nee-uitgang toe te voegen aan de rechthoek van de samengestelde gebeurtenis.
In fig. 7.5.3 is een cause-consequence chart getekend voor het zeeweringssysteem bestaande uit de waker, de slaper en de dromer.

Met de introduktie van de cause-consequence chart is de schamele weergave van het continuum van gevolgen door de foutenboom verbeterd. Maar het feit dat ook inputgegevens vaak variabele gegevens zijn, kan in de cause-consequence chart niet worden verwerkt.

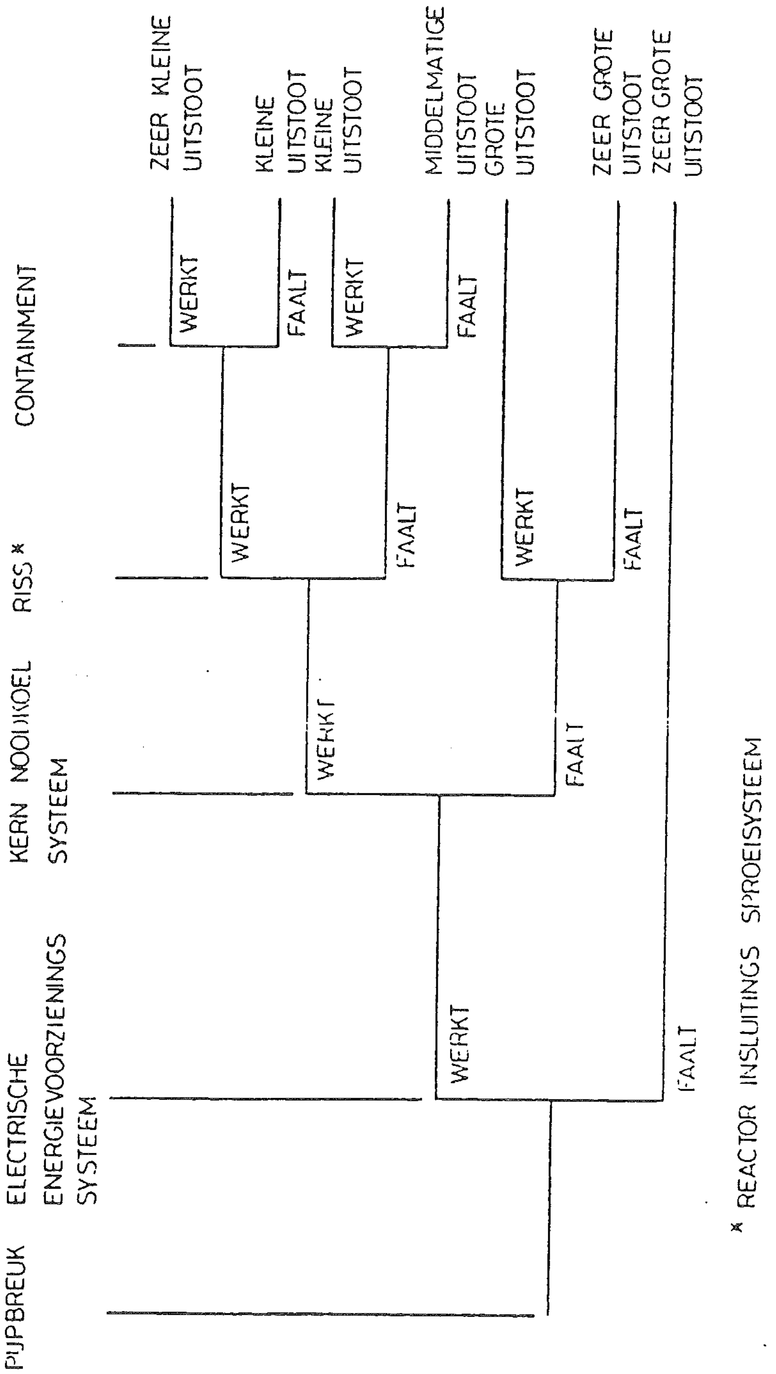
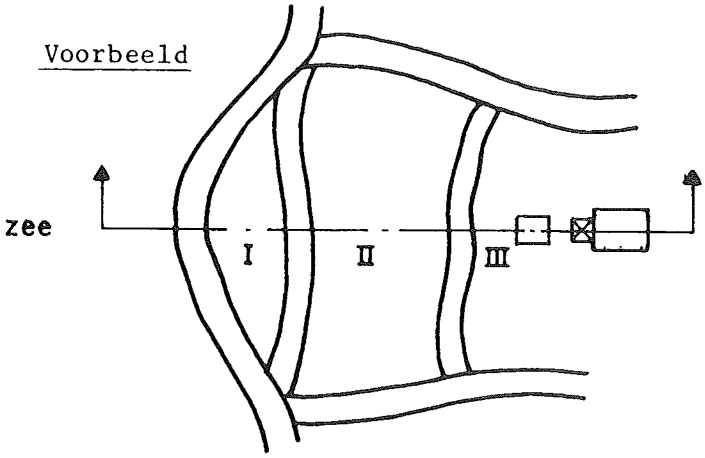


Fig. 7.5.1 Vereenvoudigde gebeurtenisboom voor een koelmiddelverliesongeluk in een kernenergiecentrale.

Voorbeeld



Op sommige plaatsen in Nederland liggen dorpen verscholen achter een systeem van dijken, dat historisch is gegroeid. De volgende risico-analyse wijst uit, dat dit de veiligheid ten goede komt.

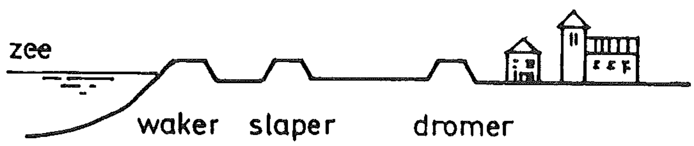


Fig. 7.5.2a Het zeeweringssysteem.

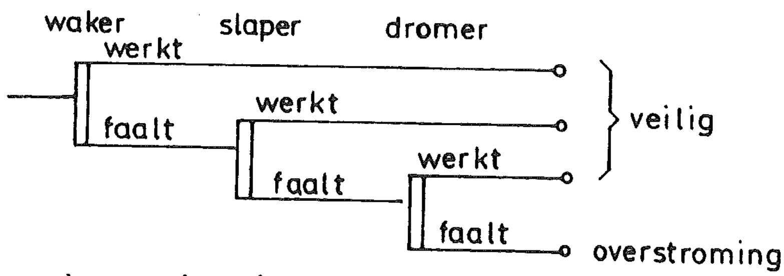


Fig. 7.5.2b De gebeurtenissenboom.

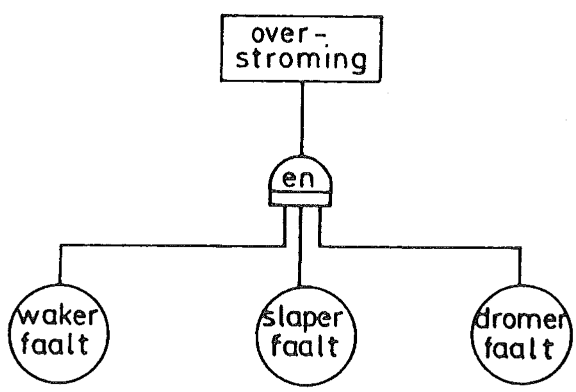


Fig. 7.5.2c De foutenboom.

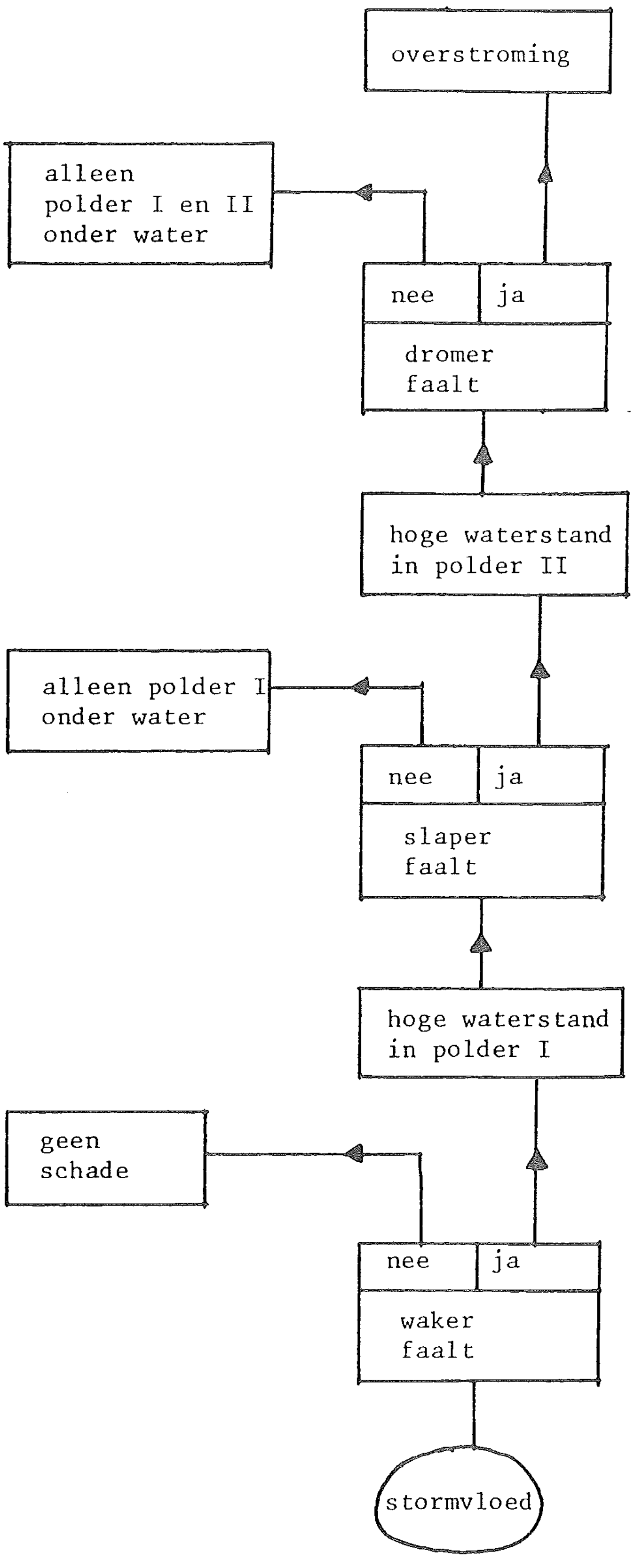


Fig. 7.5.3 Een cause-consequence chart voor het zeeweringssysteem.

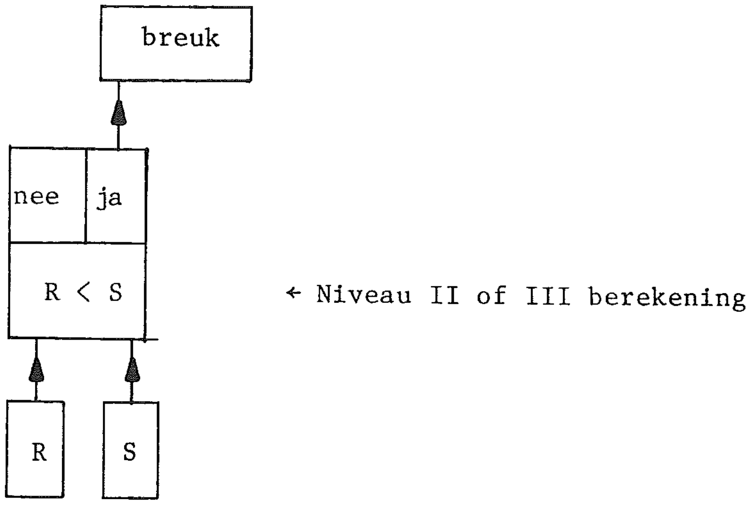


Fig. 7.5.4 Een cause-consequence chart van een grenstoestand.

Ter oplossing van dit probleem moet in de cause-consequence chart een blok worden ingevoerd, waarin de bezwijkkans wordt berekend.
Maar ook in veel andere gevallen is het binaire karakter van de standaard-analyse technieken niet voldoende om problemen tot in details kwantitatief te analyseren.
Met name daar waar het gevolg een continue funktie is van de inputvariabelen. Zo zal de schade bij overstroming afhangen van de waterstand boven het maaiveld. De exacte kwantitatieve analyse van zodanig samenhangende systemen is alleen mogelijk met rekenschema's waarin alle verbanden zijn opgenomen (zie fig. 7.5.5).
De ervaring leert echter, dat een eenvoudige risico-analyse, die slechts gebruikmaakt van de (binaire) gebeurtenissenboom en foutenboom, snel een inzicht verschaft, ook in het gedrag van complexe systemen.
Voor een kwantitatieve analyse is een aanvulling van de foutenboom met een blok, waarin de bezwijkkans van een mechanisme wordt berekend, noodzakelijk.

De meest gedetailleerde oplossing wordt bereikt door een rekenschema (als fig. 7.5.5) met niveau III methoden te analyseren.

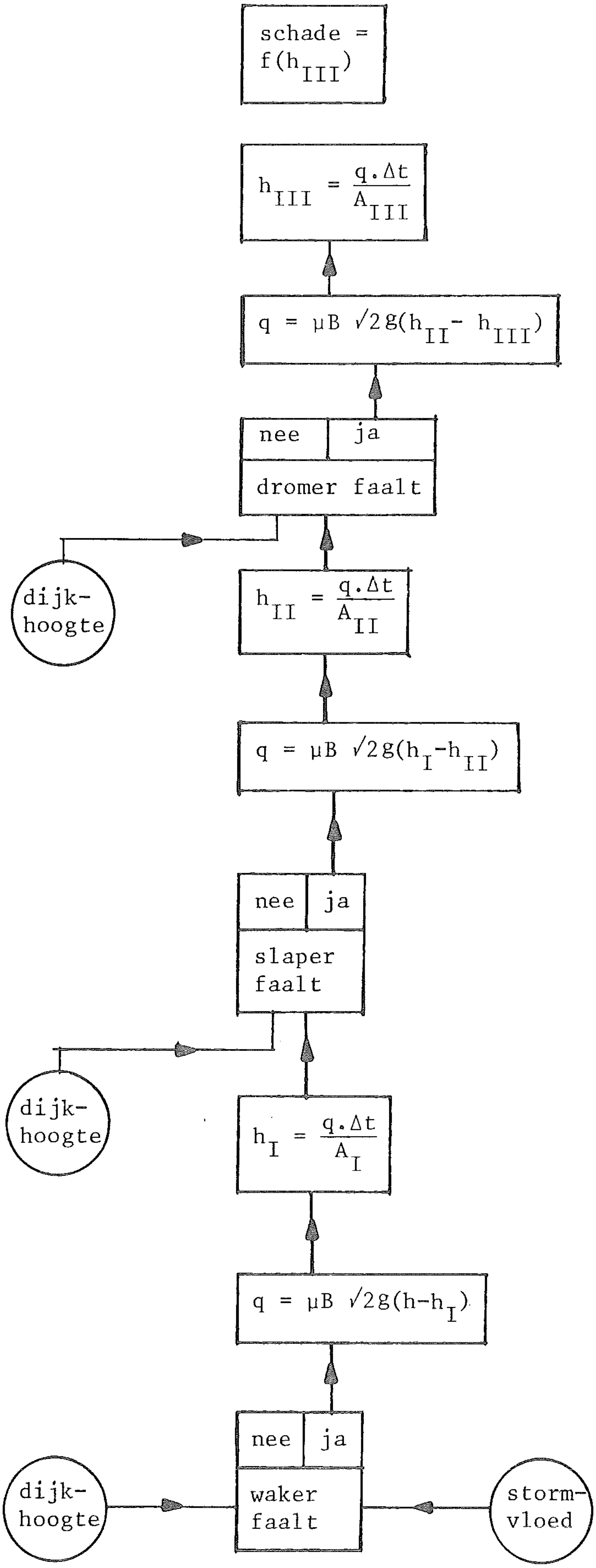


Fig. 7.5.5 Een eenvoudig rekenschema voor de analyse van het zeeweringssysteem

8. Veiligheidsfilosofie

8.1 Inleiding

In de voorafgaande hoofdstukken is aan de orde gesteld op welke wijze men de kans op bezwijken van konstrukties en konstruktie-onderdelen kan benaderen. Bovendien is aangegeven hoe met behulp van foutenbomen de kans op falen van een totaal systeem kan worden benaderd, uitgaande van de kans op bezwijken van onderdelen en zelfs van de kans op menselijke fouten.

Voor de ontwerpende ingenieur die zich realiseert, dat volstrekte veiligheid onbereikbaar is, rest echter nog één vraag: hoe veilig moet een bepaald systeem zijn?
Hoewel men hiermede eigenlijk het terrein der politieke keuzen betreedt, wordt het toch als de taak van wetenschapsmensen en technici gezien, beleidsondersteunende redeneringen aan te dragen.
Op waterbouwkundig gebied zijn de beschouwingen over de veiligheid in het Deltarapport, in de ontwerpnota's van de Stormvloedkering Oosterschelde en in de nieuwe richtlijn Duinafslag van de T.A.W. als bijdragen in deze zin op te vatten.
In dit hoofdstuk wordt de aanvaardbaarheid van risico's van uit enkele oogpunten onder de loep genomen.

8.2 De beoordeling van de risiconiveaus

8.2.1 Algemeen

Wanneer van ingenieurs gevraagd wordt bij het ontwerp van installaties voor nieuwe activiteiten zorg te dragen voor voldoende veiligheid, dan volgen onmiddellijk de tegenvragen:
- wat verstaat u onder veiligheid of risico?
- welke mate van veiligheid eist u?

In politieke discussies over de risico's van kernenergie, L.N.G.-aanvoer, etc. kan het antwoord op deze vragen lang in het midden blijven, zoals men dagelijks in de nieuwsmedia ziet. Doch voor een wetenschappelijke discussie zijn definities van begrippen, hoe tentatief ook, noodzakelijk en zodra de maatschappelijke eisen omgezet worden in concrete constructies, is een uitspraak omtrent de geëiste beperking van het risico onvermijdelijk.

Ook in wetenschappelijke kringen bestaat geen eensluidendheid over de definitie van het begrip "risico". Een viertal definities zijn echter toegankelijk voor kwantitatieve analyse. De definities, die twee begrippen gemeen hebben, de kans op een gebeurtenis met ongewenste gevolgen (kans) en de omvang van de ongewenste gevolgen (gevolg), zijn:

risico = kans (1)
risico = gevolg (2)
risico = kans x gevolg (3)
risico = kans x gevolg^n (4)

In dit college wordt de derde precisering van het risico-begrip gebruikt, tenzij anders vermeld.

Wat zijn nu de dimensies van risico? De kans is dimensieloos. Vaak wordt echter de kans vervangen door een frequentie: het aantal gebeurtenissen per tijdseenheid. In veel gevallen kiest men voor de tijdseenheid een jaar.
Het gevolg is complexer en kan bestaan uit materiële schade, verlies van toekomstig inkomen, gewonden en doden. Het gevolg is dus meerdimensionaal, hetgeen problemen geeft bij de toepassing van het risicobegrip [1]. Dit probleem van de meer-dimensionaliteit van het gevolg wordt vaak vermeden door slechts één dimensie in beschouwing te nemen.

In het rapport van de Deltacommissie [2] is op deze wijze het gevolg van een overstroming beperkt tot het directe materiële verlies uitgedrukt in guldens. Op dit type benaderingen, dat vanuit technisch wetenschappelijk oogpunt bezien zeer interessant is, zal in par. 8.2.3 dieper worden ingegaan.
Andere benaderingen beperken zich tot de aantallen doden en gewonden, die het gevolg zijn van een ongewenste gebeurtenis, omdat een in materialisme wortelende economische beschouwing van het risico door velen ethisch onverantwoord wordt geacht.

8.2.2 Een deductieve benadering van het persoonlijk geaccepteerde risiconiveau

De kleinste bouwsteen van het maatschappelijk geaccepteerde risiconiveau is de persoonlijke beoordeling van risico's door het individu.
Het leven dwingt de mens voortdurend een compromis te zoeken tussen nagestreefde voordelen en de daaraan verbonden risico's. Zolang deze afwegingen niet verder reiken dan de persoonlijke sfeer, worden ze in het algemeen snel gemaakt. De mate van risico die een individu accepteert, hangt onder meer af van zijn leeftijd en zijn persoonlijke instelling, doch ook de volgende factoren spelen een rol:
1. de mate, waarin het risico vrijwillig wordt geaccepteerd (persoonlijke vermijdbaarheid van het risico);
2. de herkenbaarheid van het risico;
3. het persoonlijk voordeel, verbonden aan het trotseren van het risico;
4. het maatschappelijk voordeel, verbonden aan het trotseren van het risico;
5. de maatschappelijke mogelijkheden om het risico te beperken;
6. de historische achtergrond van het risico (herhalingstijd).

Een poging om tot een theoretische ordening van de beoordelingsvariabelen te komen, is gegeven in fig. 8.1. Het model is gebaseerd op een objectieve mathematisch-economische afweging.
Enerzijds wordt het te behalen voordeel, dat kan bestaan uit een direct privé-voordeel of een meer diffuse maatschappelijke bate, in aanmerking genomen en anderzijds het risico in de zin van verwacht verlies (kans x gevolg).
De kanscomponent van het risico wordt door het individu afgeleid uit een schatting van de herhalingstijd van de ongewenste gebeurtenis.
Vaak ontleent hij een notie over de herhalingstijd aan zijn eigen ervaring, soms baseert bij zich op overlevering van anderen.
Wanneer het echter gaat om nieuwe activiteiten, waarbij de historische achtergrond van het risico ontbreekt, dan is een schatting van de kans van optreden van de gebeurtenis en de gevolgen moeilijk en sterk subjectief.

Theoretisch staan weliswaar de methoden der risico-analyse ter beschikking, doch het is niet te verwachten dat men in de privésfeer een dergelijke diepgaande studie uitvoert.
Veeleer zal men trachten in de praktijk te ondervinden of het voordeel van de geëntameerde activiteit tegen het risico opweegt. Via "trial and error" wordt het optimum bewust of onbewust nagestreefd.
Hiermee samenhangend, speelt de vrijwilligheid van de acceptatie van het risico (of vermijdbaarheid) een rol.
Ten eerste maakt het individu bij een vrijwillige keuze gebruik van zijn eigen waardensysteem en worden hem geen preferenties opgelegd door één of ander besluitvormend lichaam.
Ten tweede kan bij een vrijwillige keuze de in het "trial and error" concept noodzakelijke bijstelling op grond van ervaringen snel geschieden. Het bijstellen van plannen van besluitvormende lichamen via de maatschappelijke communicatiekanalen (politiek of economisch) is echter een traag proces.
Daarom zal het individu in het algemeen grote reserves hebben ten aanzien van hem opgelegde risico's.

Tot slot moet erop gewezen worden, dat het beslissingsmodel van fig. 8.1 sterk beïnvloed wordt door de wijze waarop het individu de feiten waarneemt.
De aangeboden informatie wordt als het ware gefilterd en niet alle objectieve feiten spelen mee in het beoordelingsproces.
De wijze en de mate van filtering hangt af van persoonlijke kenmerken als leeftijd, geslacht, opleiding, beroep, etc.
Bovendien vindt daarna nog een weging van de diverse factoren plaats volgens de persoonlijke preferenties.

Met deze laatste constateringen is in feite het terrein van de psychologie betreden. Er wordt op het gebied van de persoonlijke beoordeling van risico's veel psychologisch onderzoek verricht.
Van psychologen-zijde is opgemerkt, dat het in par. 8.2.1 gedefinieerde mathematische risico-begrip, en noties als nut/voordeel, te globaal, te abstract en te formeel zijn om in opinie- en besluitvormende discussies toe te laten.
Daarom zijn d.m.v. psychometrisch veldonderzoek de primaire risico-evaluatievariabelen opgespoord [3]. Een aantal hypothesen, die in een dergelijk onderzoek getoetst werden zijn:
- de geschatte ernst van een risico wordt grotendeels bepaald door de geschatte omvang van mogelijke ongevallen (en niet door de kans erop);
- de getaxeerde kans op een ongeval wordt overwegend bepaald door de mate van persoonlijke controle of door georganiseerde beveiliging (en niet door relatieve ongevalfrequenties);
- de getaxeerde kans is mede afhankelijk van de voorstelbaarheid van het ongevalsscenario;
- de (cognitieve en emotionele) voorstelbaarheid van potentiële catastrofes is gering;
- de aanvaardbaarheid van een riskante activiteit wordt overwegend bepaald door zijn voordeel (en niet door zijn risico).

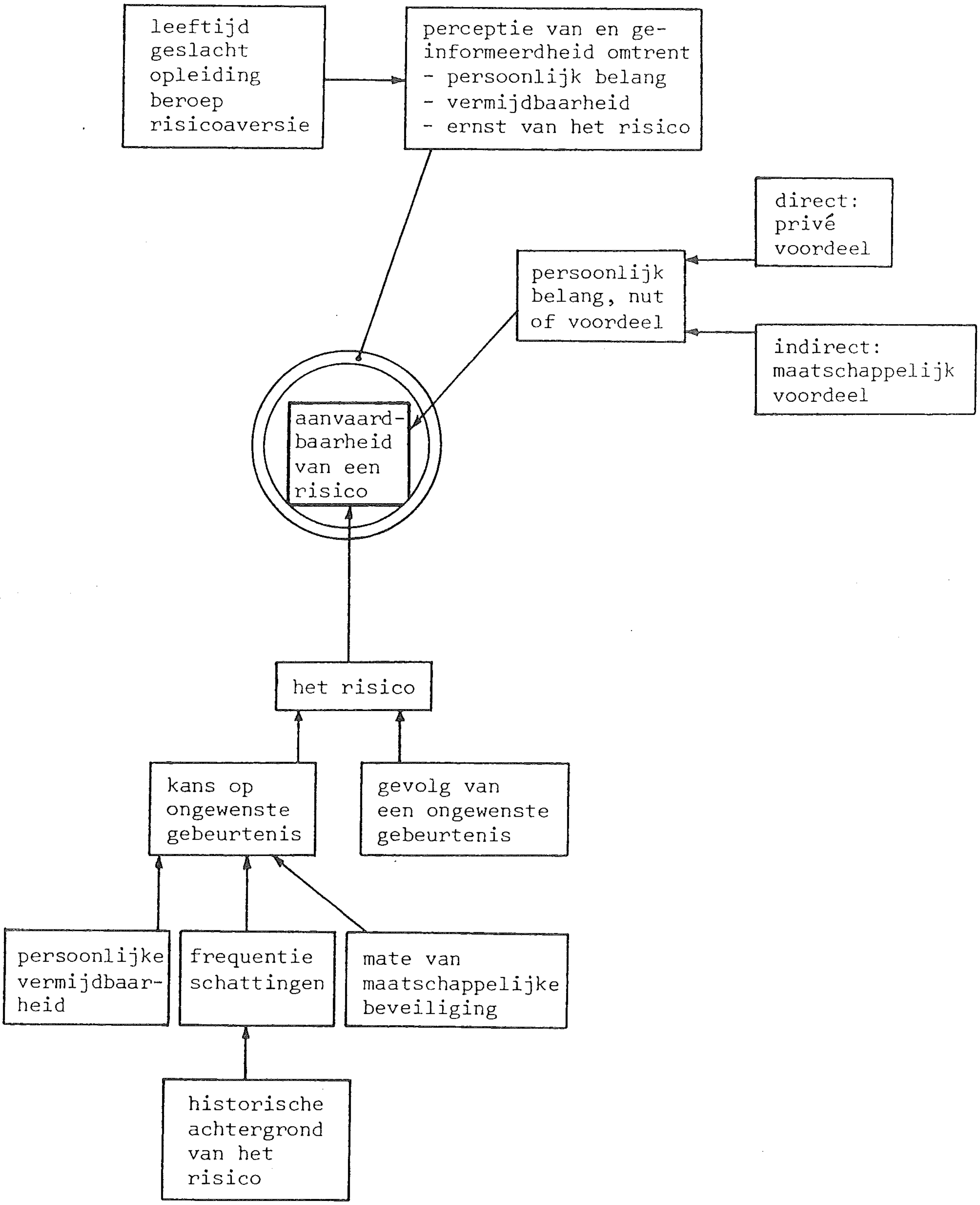


Fig. 8.1 Theoretische ordening van de beoordelingsvariabelen van de aanvaardbaarheid van risico's in de individuele sfeer.

Het resultaat van het onderzoek onder 700 respondenten was o.a. dat men zei in hoofdzaak twee risicodimensies te onderscheiden:
1. de omvang van een mogelijk ongeval;
2. mate van georganiseerde beveiliging.

Ten aanzien van de fundamentele componenten van het <u>voordeel</u> stemden de resultaten overeen met de in fig. 8.1 genoemde. Over het relatieve gewicht van persoonlijk en maatschappelijk voordeel verschilden de meningen sterk.
De samenhang tussen risico, voordeel en aanvaardbaarheid volgt minder duidelijk uit het onderzoek.
Ten dele hangt dat samen met de in het onderzoek gekozen voorbeelden van kernenergie en L.N.G. Beide paren een diffuus maatschappelijk voordeel aan een risico dat bestaat uit een zeer kleine kans op bijzonder ernstige gevolgen.
Binnen de conceptie van het in fig. 8.1 geschetste maar niet expliciet bekende mathematisch-economische beslissingsmodel, dat in de praktijk al tastend wordt opgelost, is de weerstand tegen deze nieuwe technologie goed te verklaren.
Het individu ziet de noodzaak van nieuwe energiebronnen niet in zolang de electriciteits- en gasvoorziening voorspoedig functioneert. Ten aanzien van de kans op ongelukken met de nieuwe technologieën beschikt men niet over historische gegevens, die een indruk geven van de faalfrequetie. Wel bestaat een idee over de gevolgen van een ongeval met kernenergie, een idee, dat al of niet terecht ontleend wordt aan de gebeurtenissen rond de bom op Hiroshima en de daaruit voortvloeiende genetische effecten die zich over de generaties kunnen uitstrekken.

8.2.3 <u>Een inductieve benadering van het persoonlijk geaccepteerde risiconiveau</u>

Nu is vastgesteld, dat het expliciet oplossen van het in fig. 8.1 gegeven beslissingsmodel voor persoonlijke risico-acceptatie <u>niet</u> mogelijk is, ligt het voor de hand de uitkomst van het afwegingsproces, zoals dat in het dagelijks leven van elk individu plaatsvindt, te onderzoeken. Uit de uitkomsten zou, indien ze consistent zijn, een indicatie kunnen worden gekregen van de preferenties van het individu.
Een bron, waaruit de uitkomsten van de afwegingsprocessen kunnen blijken, is de statistiek van doodsoorzaken.

Weliswaar is dan sprake van het aantal risicodimensies tot één, maar voor een eerste indruk van het gemiddelde resultaat van de afwegingsprocessen vormt de statistiek een geschikt uitgangspunt.
De gemiddelde persoonlijke risico-acceptatie voor een bepaalde activiteit blijkt door het aantal doden dat jaarlijks valt bij de beoefening van de activiteit te delen door het aantal deelnemers:

$$P_{d_i} = \frac{N_{p_i} \cdot P_{f_i} \cdot P_{d|f_i}}{N_{p_i}} = \frac{N_{d_i}}{N_{p_i}}$$

waarin:

N_{p_i} = aantal deelnemers aan activiteit i

P_{f_i} = kans op een ongeval bij activiteit i

$P_{d\,f_i}$ = kans op een dode gegeven een ongeval bij acticiteit i

N_{d_i} = aantal doden bij activiteit i

Een eerste activiteit waaraan iedereen deelneemt, is het leven zelf. Uit de statistiek blijkt nu, dat in de westelijke landen voor personen jonger dan 60 jaar, de kans om te overlijden ten gevolge van ziekte ongeveer gelijk is aan 10^{-3} [1/jaar].

Overeenkomstig hetgeen men zou verwachten, is het persoonlijke risico bij een duidelijk onvrijwillige activiteit als werken in een fabriek een orde kleiner. De kans op een dodelijk ongeval in de industrie betrokken op het aantal arbeiders is ongeveer 10^{-5} 1/jaar (zie fig. 8.2). Anderzijds is de kans op een dodelijk ongeval bij de beoefening van de bergsport aanzienlijk groter. Zij stijgt zelfs uit boven de kans te overlijden door ziekte. De activiteit autorijden, die naar huidige begrippen niet geheel vrijwillig wordt ondernomen, blijkt een kans op overlijden met zich mee te brengen van ongeveer 10^{-4} [1/jaar].

Het geheel van fig. 8.2 overziende lijkt er sprake te zijn van een consistentie in de persoonlijke risico-acceptatie.
Voor vrijwillig ondernomen activiteiten lijkt het individu gemiddeld genomen een kans op overlijden te accepteren die ongeveer gelijk is aan de sterftekans door ziekte.

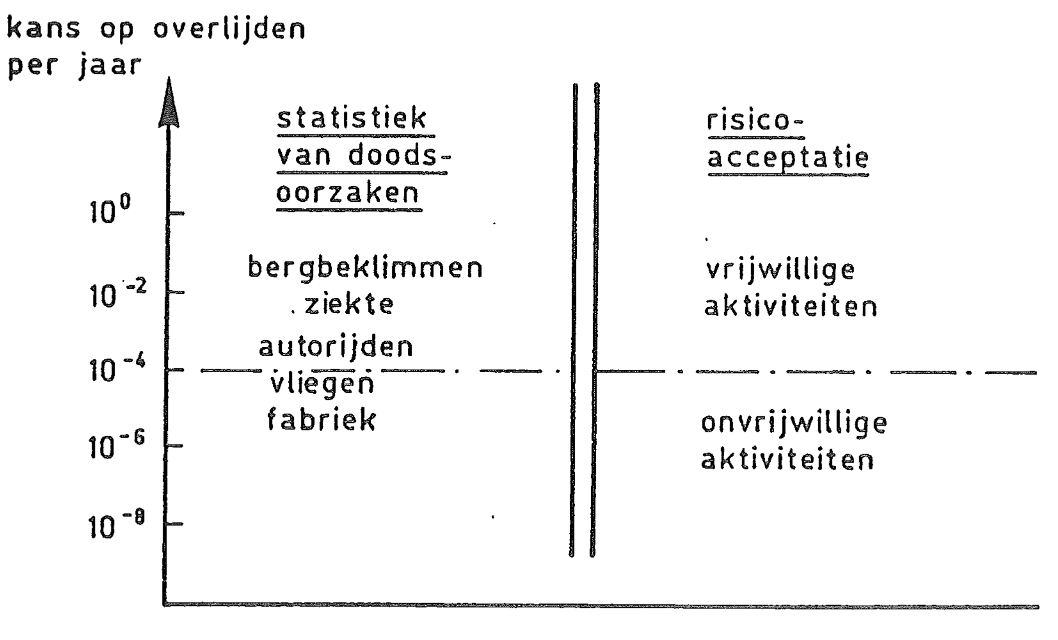


Fig. 8.2 De persoonlijke risico's in de westelijke landen afgeleid uit statistiek van doodsoorzaken, betrokken op het aantal deelnemers.

Van onvrijwillige activiteiten wordt echter een grotere veiligheid verwacht. Hier is een kans op overlijden van 10^{-4} [1/jaar] de bovengrens.

Men kan nu stellen, dat er bij het ondernemen van activiteiten de facto een afweging plaatsvindt van de te behalen voordelen tegen het risico in de vorm van de kans op overlijden en dat het resultaat van dit afwegingsproces blijkt uit de ongevallenstatistiek.

Aangezien de gepresenteerde sterftekansen stabiel zijn in de tijd en een licht dalende tendens vertonen die samenhangt met het voortschrijden van de techniek, lijkt het toegestaan er een leidraad voor beslissingen t.a.v. het acceptabele persoonlijke risiconiveau uit af te leiden.
Bezien vanuit het individu lijkt een activiteit i aanvaardbaar indien:

$$\frac{E(N_{d_i})}{N_{p_i}} = \frac{N_{p_i} \cdot P_{f_i} \cdot P_{d|f_i}}{N_{p_i}} < \beta . 10^{-4}$$

waarin:

$E(N_{d_i})$ = verwachtingswaarde van het aantal doden bij activiteit i,

β = beleidsfactor

Hieruit volgt voor de toelaatbare kans op een ongeval bij activiteit i:

$$P_{f_i} < \frac{\beta . 10^{-4}}{P_{d|f_i}}$$

De factor β varieert al naar gelang de mate van vrijwilligheid waarmede de activiteit wordt ondernomen van 10 tot 0.1.

8.2.4 Het maatschappelijk geaccepteerde risiconiveau

Hetgeen een democratische maatschappij aan risico's accepteert, is in theorie de samenvoeging van alle individuele afwegingen.
Men vindt de optimale faalkans van een activiteit door de oplossing van de geaggregeerde versie van het basismodel van fig. 8.1.
Doch ook hier maakt het feit dat het model niet expliciet bekend is een dergelijke weg onbegaanbaar.
Toch kan men stellen, dat op maatschappelijk niveau voor elk project de kosten tegenover de baten worden gezet. Misschien zou dat ruimer moeten geschieden door de sociale kosten tegenover de sociale baten te zetten, waardoor ook de risico-aspecten in de afweging worden betrokken. Gezien de complexiteit van een dergelijke afweging en het gesignaleerde gebrek aan expliciete modellen geschiedt ook de maatschappelijke optimalisering tastend.
De bestuurlijke lichamen doen een keuze en vervolgens leert de loop van het leven hoe aanvaardbaar deze keuze was.

Keuze overheid	Eén der gevolgen
Delta-cie. P(overstroming) = 10^{-4}	In sommige gevallen langs de rivieren schade aan het landschap
Cie. Becht (rivieren) P(overstroming) = 8.10^{-4}	Dat leert de toekomst
Stimulering basischemie in Nederland	Chemisch afvalprobleem

Indien voor een bepaald project een maatschappelijk acceptabel risiconiveau moet worden gedefinieerd, staan twee wegen open, die beide een sterke vereenvoudiging van het probleem inhouden.
De eerste methode gaat terug naar het mathematisch economische beslissingsmodel van fig. 8.1 en streeft naar een zodanige schematisatie van het probleem, dat het optimum voor berekening toegankelijk is.
Daartoe dienen alle dimensies van het risico in één monetaire maat te worden getransformeerd.

Het tweede spoor leidt via de in par. 8.2.2 reeds behandelde weg van de ongevallenstatistiek.

8.2.4.1 Het maatschappelijk geaccepteerde risiconiveau als resultaat van een mathematisch-economische afweging

Volgens de gekozen definitie is het risico gelijk aan de mathematische verwachtingswaarde van de verliezen die het gevolg zijn van het falen van het systeem.
Inherent aan de economische benadering is, dat de schade die het gevolg is van het falen in een monetaire maat moet worden uitgedrukt.
De totale schade bestaat uit een aantal posten van principieel verschillende aard (tabel I).

Tabel I: Een globaal overzicht van de verliezen die ontstaan door het falen van een systeem.

	ponderabel	imponderabel
direct	vervangings- of herstelkosten van het systeem vervangings- of herstelkosten van zaken die betrokken zijn bij het functieverlies van het systeem vervangings- of herstelkosten van zaken die zich in fysieke nabijheid van het systeem bevonden	verlies van mensenlevens gewonden verlies van onvervangbare zaken schade aan het milieu
indirect	productiederving die het gevolg is van het functieverlies van het systeem productiederving veroorzaakt door de fysieke nabijheid van het systeem productiederving elders in het economisch systeem doch geïnduceerd door de twee bovengenoemde productiestagnaties	leed en sociale disruptie spanning, angst en verhoogde kans op ziekte

Allereerst onderscheidt men de directe gevolgen van het falen. Deze omvatten het herstel of de vervanging van de constructie zelf en van zaken die vielen binnen het kader van de functie van het systeem.

Tot de indirecte schade rekent men het verlies aan toegevoegde waarde, dat ontstaat doordat bepaalde activiteiten geen doorgang kunnen vinden als gevolg van het niet functioneren (disfunctie) van het systeem.

Ook de verhindering van activiteiten in de nabijheid van het systeem veroorzaakt indirecte schade.
Verder plant de onderbreking van bepaalde activiteiten zich voort in het economisch systeem zodat ook elders verliezen ontstaan.
Men denke daarbij aan de stagnerende leveranties door getroffen bedrijven.

Naast de genoemde materiële verliezen, die eenvoudig in geld te waarderen zijn, zal soms ook het verlies van levens te betreuren zijn.

Ook hier onderscheidt men de directe gevolgen i.c. de doden en gewonden die rechtstreeks veroorzaakt worden door de disfunctie van het systeem en de indirecte gevolgen.
De indirecte gevolgen omvatten het leed en de sociale disruptie, die door de ramp veroorzaakt worden.

Bij toepassing van het economisch-mathematische beslissingsmodel wordt het ethisch moeilijke probleem, het verlies aan mensenlevens en het menselijk leed in geld te waarderen, veelal vermeden door de waarde van de verloren mensenlevens en het leed buiten beschouwing te laten.

Veronderstelt men nu voor het moment, dat de materiële verliezen die het gevolg zijn van het falen van het systeem een totale schade S omvatten dan mag men volgens de gekozen definitie het risico schrijven als:

$$P_{f_i} \cdot S \quad [\text{gld/jaar}]$$

waarin:

P_{f_i} = faalkans van het systeem behorend bij activiteit i [1/jaar]

Dit risico kan ook worden beschouwd als de hoogte van de verzekeringspremie, die elk jaar betaald zou moeten worden, indien men zich tegen de gevolgen van het falen van het systeem zou willen verzekeren.
Gezien de voortdurende waardedaling van het geld (inflatie) zal de verzekeringspremie toenemen volgens:

$$P_f \cdot S \cdot (1 + i)^n$$

1e jaar $P_f . S . 1+i$
2e jaar $P_f S (1+i)^2$

waarin:

i = inflatie

De gekapitaliseerde som van de gedurende de levensduur N van het systeem te betalen verzekeringspremies of de contante waarde C van het risico is:

$$C = \sum_{n=1}^{N} \frac{P_f \cdot S \cdot (1 + i)^n}{(1 + r)^n}$$

1e jaar $\frac{P_f . S . (1+i)}{1+r}$

waarin:

r = rentevoet

Voor kleine waarden van de inflatie en de rentevoet mag men de contante waarde ook schrijven als:

$$C = \sum_{n=1}^{N} \frac{P_f \cdot S}{(1 + r - i)^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{P_f \cdot S}{(1 + r')^n}$$

waarin:

r' = reële rentevoet

Deze schrijfwijze veronderstelt stilzwijgend dat de marktrente r de inflatie i overtreft, hetgeen in het recente verleden niet zo was. Over langere perioden gezien is de reële rentevoet echter positief.

Een aspect dat op dezelfde wijze te behandelen is, is de economische groei die de waarde van de zaken, die bij het falen van het systeem betrokken zijn, zal doen toenemen. Zo zal ten gevolge van de economische groei het verkeer over een brug toenemen. Ook de in een polder aanwezige gebouwen en voorzieningen zullen in aantal en waarde groeien bij een normale economische ontwikkeling.

Daardoor groeit het risico in reële termen:

$$P_f \cdot S \cdot (1 + g)^n$$

waarin:

g = groeivoet

De contante waarde van het groeiende risico wordt nu:

$$C = \sum_{n=1}^{N} \frac{P_f \cdot S}{(1 + r'-g)^n}$$

Door Von Neuman [4] is aangetoond dat alleen in een economie waarin de mensen bereid zijn met het bestaansminimum genoegen te nemen, de reële rentevoet gelijk is aan de groeivoet van de economie.
Zodra er sprake is van enige spanning tussen consumptie en investeringen, zal de rentevoet de groeivoet overtreffen.

Het risico kan uiteraard worden verkleind door het systeem veiliger te maken.
De beide beschikbare wegen, het aanbrengen van parallelsystemen en het terugbrengen van de faalkans van de samenstellende componenten, gaan gepaard met een verhoging van het totale investeringsbedrag I, dat derhalve onder andere een functie is van de faalkans van het systeem:

$$I = I\ (P_f)$$

De economische rationaliteit vereist dat de som van het investeringsbedrag en de contante waarde van het risico minimaal is. Het minimum van de totale kostenfunctie kan door differentiatie worden gevonden (zie ook fig. 8.3):

$$\frac{d\ (C + I)}{d\ F_i} = 0$$

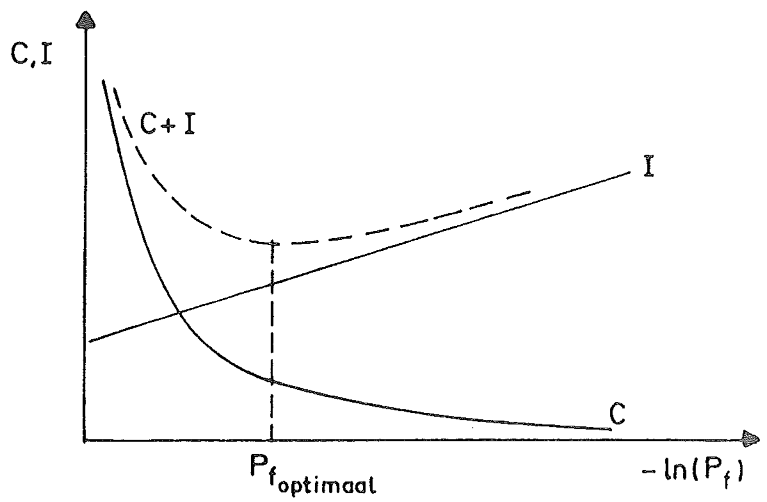


Fig. 8.3 Het economisch optimale risiconiveau: een afweging tussen investering en gekapitaliseerd risico.

De hier geschetste berekeningswijze is door Prof. van Dantzig toegepast ter bepaling van de optimale hoogte van de dijken van het Deltaplan.

Bij wijze van voorbeeld volgt nu een vereenvoudigde versie van deze berekening die volledig is weergegeven in deel 3 van het Deltarapport [2].

Voorbeeld:

<u>De bepaling van een optimale dijkverhoging</u>

Ter vereenvoudiging van het probleem wordt de hoogte van de dijk geacht een deterministische grootheid te zijn.
Verder wordt als enig bezwijkmechanisme het overlopen van de dijk in beschouwing genomen. Derhalve vindt inundatie van de polder plaats, zodra de stormvloedstand de dijkhoogte overtreft.

De kans op deze gebeurtenis kan eenvoudig worden afgeleid uit de hoogwater-overschrijdingslijn.

$$P\,(z > h) = \bar{F}_z(h) = e^{-\frac{h-\alpha}{\beta}}$$

waarin:

z = stormvloedstand
h = dijkhoogte
α, β = constanten

Als de dijk overstroomt en de polder onder loopt, bedraagt de totale schade aan gebouwen, voorraden, vee, productiemiddelen: S. Met gederfd inkomen, verlies van mensenlevens etc. hield men in eerste benadering geen rekening.

De mathematische verwachtingswaarde van dit verlies is in ieder jaar:

$$S.e^{-\frac{h-\alpha}{\beta}} \quad [\text{gld/jaar}]$$

De contante waarde van dit verwachte verlies over de gehele toekomst ($N = \infty$) is:

$$C = \sum_{n=1}^{N} \frac{S.e^{-\frac{h-\alpha}{\beta}}}{(1+r'-g)^n} = \frac{S.e^{-\frac{h-\alpha}{\beta}}}{r'-g} \quad ?$$

$$\frac{S e^{-\frac{h-\alpha}{\beta}} \cdot N}{e^{n(r'-g)}} \quad ?$$

Ter beperking van het risico kan men de dijken verhogen (zie fig. 8.4). De kosten van deze beveiligingsmaatregel zijn bij benadering evenredig met de verhoging:

$$I = I_o + I' (h - h_o)$$

$$\sum_{n=1}^{N} e^{n(r'-g)} \qquad \left|1 - (-(r'-g))\right|^{N} \qquad e^{+n(r'-g)} \qquad e^{-n(r'-g)}$$

waarin:

I_o = mobilisatiekosten

I' = kosten per meter verhoging

h_o = huidige dijkhoogte

$$\sum_{n=}^{N} \frac{1}{e^{n(r'-g)}} \qquad e^{-\infty} = 0 \qquad \frac{1}{e^{n} e^{(r'-g)}}$$

$$x^n = e^{n \ln x}$$

$$e^{n \ln(1+r'-g)}$$

$$\ln(1+x) = x \qquad x \ll 1 \qquad e^{n(r'-g)} \qquad n r' - g \ll 1$$

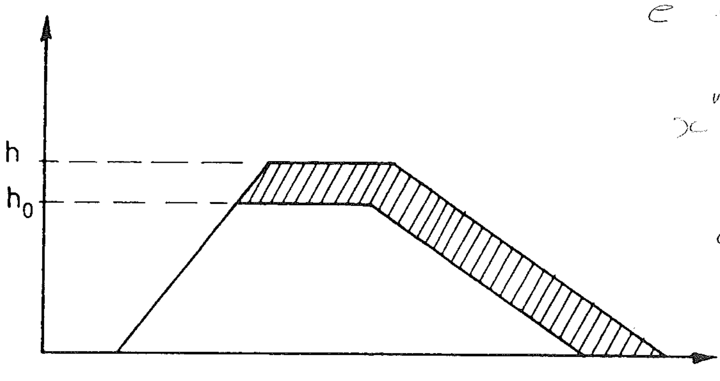


Fig. 8.4 De hoeveelheid grondverzet bij een verhoging van de dijk.

De totale kosten K zijn nu de som van de kosten van de verhoging van de dijk en de contante waarde van het verwachte verlies:

$$K = I + C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(r'-g)} \overset{?}{=} r' - g$$

Of na substitutie voluit geschreven:

$$K = I_o + I' (h - h_o) + \frac{S.e^{-\frac{h - \alpha}{\beta}}}{(r' - g)}$$

De optimale dijkhoogte (zie ook fig. 8.5) wordt bepaald door differentiatie naar de beslissingsvariabele h:

$$\frac{dK}{dh} = I' - \frac{S.e^{-\frac{h - \alpha}{\beta}}}{\beta(r' - g)} = 0$$

De optimale hoogte van de dijk kan hieruit worden opgelost evenals de optimale faalkans:

$$h_{opt} = \alpha + \beta \ln \left\{\frac{S}{I'\beta(r' - g)}\right\}; \quad P_{f_{opt}} = \frac{I'\beta(r' - g)}{S}$$

Het is merkwaardig te zien dat noch de mobilisatiekosten I_o noch de reeds aanwezige dijkhoogte h_o in de uitdrukking voor de optimale faalkans voorkomen.
Toch moet worden vastgesteld of verhoging van de dijk economisch interessant is.
Daartoe moet men de <u>totale kosten</u> van beide alternatieven vergelijken.
De totale kosten van het dijkverhoging-alternatief zijn bekend:

$$K = I_o + I' (h_{opt} - h_o) + \frac{S.e^{-\frac{h_{opt} - \alpha}{\beta}}}{(r' - g)}$$

De verhoging van de dijken zal alleen plaatsvinden indien (zie fig. 8.3):

$$K < K_o = \frac{S.e^{-\frac{h_o - \alpha}{\beta}}}{(r' - g)}$$

→ geen dijkverhoging.

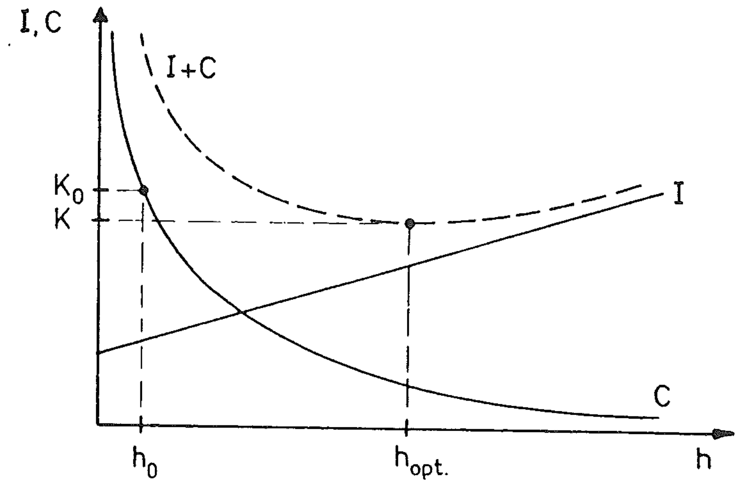


Fig. 8.5 De bepaling van de optimale dijkhoogte.

De waarde van de constanten waren voor het Deltaplan in 1954:

S	=	$24{,}2.10^9$	[gld]
$r' - g$	=	$0{,}015$	
I'	=	$40{,}1.10^6$	[gld/m]
α	=	$1{,}96$	[m]
β	=	$0{,}33$	[m]
h_o	=	$3{,}25$	[m]
I_o	=	110.10^6	[gld]

Uit deze waarden volgden een dijkhoogte en een faalkans van

$$h_{opt} = 5{,}83 \text{ m} \qquad P_{f_{opt}} = 8.10^{-6} \text{ [1/jaar]}$$

Het resultaat van het gekozen voorbeeld is van wijdere strekking dan uitsluitend een aanwijzing voor de dijkhoogten rond Centraal-Holland. In veel gevallen zijn de benodigde marginale investeringen (I') constant voor vrij grote variaties in de sterkte van de constructie en volgt de faalkans een extreme waardeverdeling [5].

De gevonden betrekking voor de optimale faalkans van het bij activiteit i betrokken systeem heeft dus binnen zekere grenzen een algemene geldigheid:

$$P_{f_{i_{opt}}} = \frac{I'\beta(r' - g)}{S}$$

Indien men nu ondanks de ethische bezwaren die daartegen bestaan, aan het verlies van een mensenleven een prijs s toekent, teneinde te onderzoeken op welke wijze de optimale faalkans daardoor beïnvloed wordt, dan dient de materiële schade S verhoogd te worden tot:

$$P_{d|f_i} \cdot N_{p_i} \cdot s + S$$

waarin:

$P_{d\,f_i}$ = kans op overlijden gegeven falen

N_{p_i} = aantal bewoners

De afgeleide uitdrukking voor de optimale faalkans wijzigt ten gevolge van deze aanpassing van het totale schadebedrag:

$$P_{f_{i_{opt}}} = \frac{I'(r' - g)}{P_{d|f_i} \cdot N_{p_i} \cdot s + S}$$

Men ziet dat de optimale faalkans een dalende tendens vertoont bij een toenemend aantal slachtoffers.

<u>Voorbeeld:</u>

Ter illustratie kan de berekening van de dijkhoogte rond Centraal-Holland worden uitgebreid met een waardeschatting voor het aantal slachtoffers. Voor de constanten worden de volgende waarden gekozen:

$P_{d|f_i} = 10^{-2}$

$N_p = 5.10^6$ [personen]

$s = 10^5$ [gld/persoon]

De optimale dijkhoogte en de faalkans zijn:

$h_{opt} = 5,89$ m $\qquad P_{f_{opt}} = 6,8.10^{-6}$ [1/jaar]

zodat in dit voorbeeld het effect van het verlies van mensenlevens beperkt blijft tot 6 cm dijkhoogte. Zelfs wanneer de waarde s van een mensenleven vertienvoudigd wordt, blijft de invloed beperkt.

$h_{opt} = 6,19$ m $\qquad P_{f_{opt}} = 2,7.10^{-6}$ [1/jaar]

In feite bestaat de formule voor de optimale faalkans uit twee gedeelten. Een startwaarde die afhankelijk is van de materiële schade:

$$P_{f_{opt}} = \frac{I'\beta(r' - g)}{S}$$

en een asymptoot waartoe de functie nadert bij een toenemend aantal slachtoffers:

$$P_{f_{opt}} = \frac{I'\beta(r' - g)}{P_{d|f}\, N_p . s}$$

Indien men de optimale faalkans als functie van het aantal slachtoffers uitzet voor de getalwaarden van het voorbeeld ontstaat fig. 8.6.

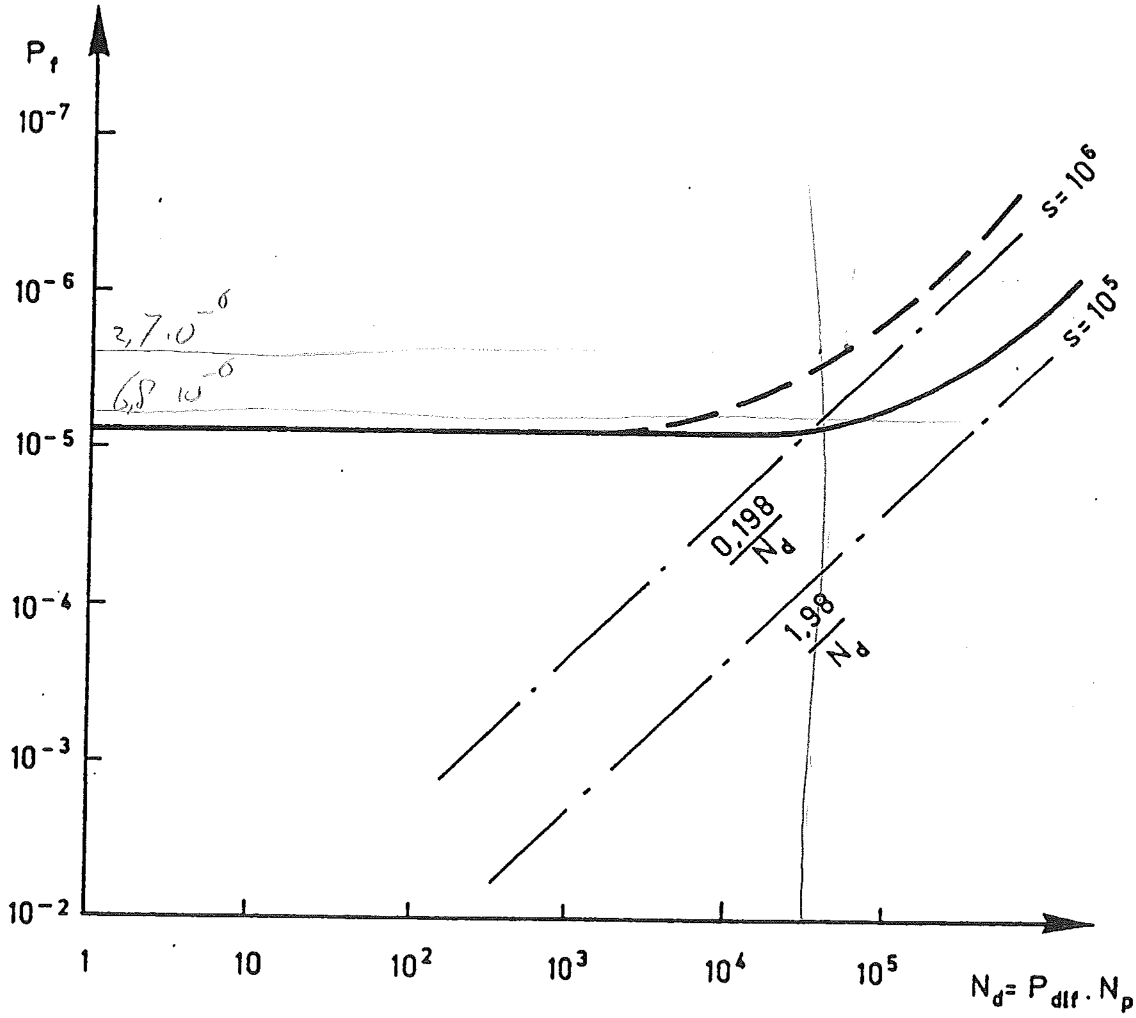


Fig. 8.6 De economische optimale faalkans als functie van het aantal slachtoffers, dat valt bij een overstroming van Centraal-Holland.

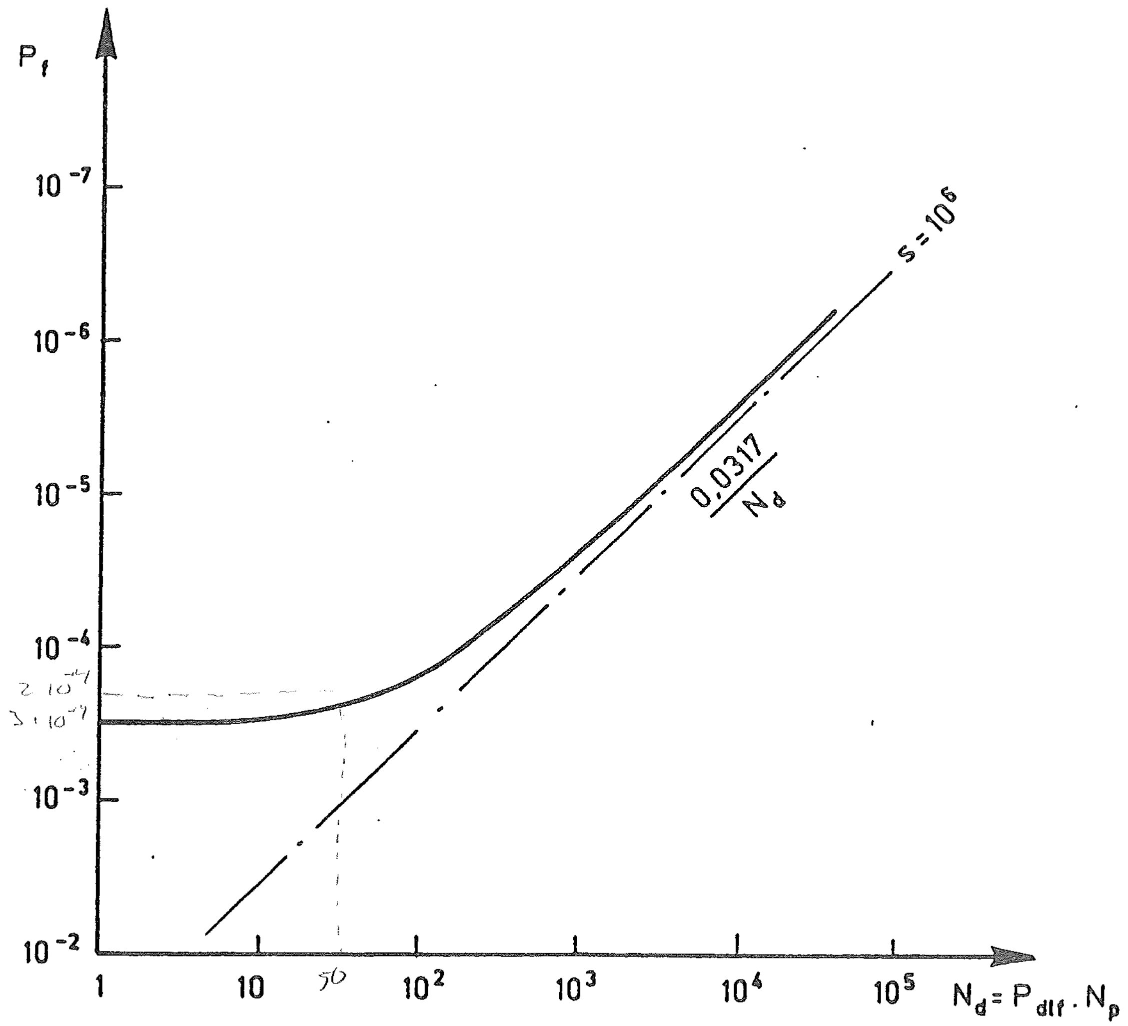


Fig. 8.7 De economisch optimale faalkans als functie van het aantal slachtoffers, dat valt bij een overstroming van het stadje Whitstable.

Ter illustratie is de berekening ook uitgevoerd voor het Engelse stadje Whitstable aan de Thames (fig. 8.7).

Inwonertal	=	5.000	[personen]
Schade	=	100.10^{+6}	[gld]
I'	=	5.10^{6}	[gld/m]

De optimale faalkans onder verwaarlozing van het dodental is:

$$P_{f_{opt}} = 3.10^{-4} \quad [1/\text{jaar}]$$

Het in rekening brengen van 50 doden verlaagt de faalkans tot:

$$P_{f_{opt}} = 2.10^{-4} \quad [1/\text{jaar}]$$

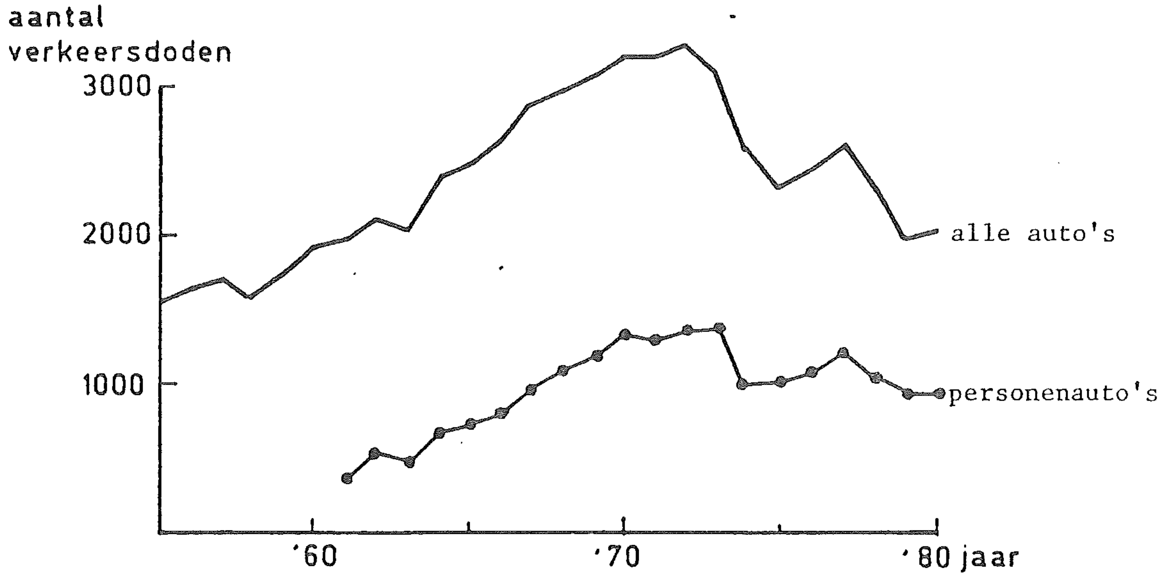
Het verschil in optimale dijkhoogte is 14 cm:
exclusief doden 5,60 m AOD en inclusief doden 5,74 m AOD.

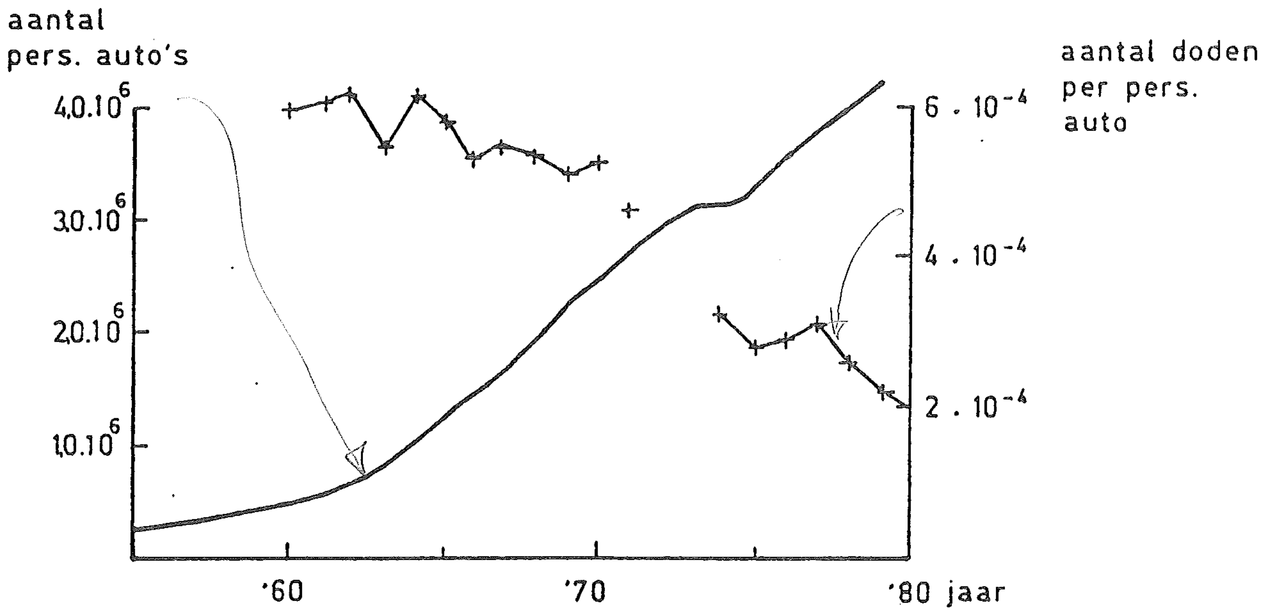
8.2.4.2 Het maatschappelijk geaccepteerd risico-niveau afgeleid uit ongevallenstatistieken en andere overwegingen

Eerder is gesteld, dat afweging van de sociale kosten en de sociale baten voor iedere activiteit in de maatschappij impliciet worden gemaakt via een tastend zoeken.
Dit tastend zoeken is noodzakelijk omdat de faalkans en de gevolgen van het falen, de twee componenten van het risico, niet precies bekend zijn, evenmin als de maatschappelijke preferenties.
De hypothese is, dat het resultaat van dit maatschappelijke zoekproces weerspiegeld wordt in de ongevallenstatistieken.
Als oppervlakkige toetsing van de hypothese is het verloop van het aantal verkeersslachtoffers in de tijd bestudeerd, aangezien het verkeer één van de belangrijkste onnatuurlijke doodsoorzaken is. In de bovenste grafiek van figuur 8.8 is het verloop van het aantal slachtoffers als functie van de tijd geschetst. Het aantal doden t.g.v. ongevallen met personenwagens is afzonderlijk weergegeven. Men ziet dat tot de 60-er jaren het aantal doden ongeveer constant is (1500 doden/jaar). Daarna neemt het aantal doden toe in gelijke tred met de penetratie van het autobezit in de Nederlandse maatschappij tot een maximum van 3.264 in 1972.
Het persoonlijke risico verbonden aan het autorijden, dat benaderd is door het aantal doden bij ongevallen met personenauto's, te betrekken op het aantal personenauto's, vertoont in de 60-er jaren een licht dalende tendens van 6.10^{-4} tot 5.10^{-4} [doden/auto].

Maatschappelijk gezien loopt het risico echter sterk op. Het totaal aantal verkeersdoden betrokken op het bevolkingsaantal stijgt van $1{,}6.10^{-4}$ tot bijna $2{,}5.10^{-4}$.

In 1971 wordt ter verhoging van de verkeersveiligheid de autogordel verplicht gesteld. Van enig effect op het aantal slachtoffers blijkt weinig. Eerst het door de oliecrisis onvrijwillig opgelegde experiment van een autoloze zondag en een snelheidsbeperking hebben invloed.





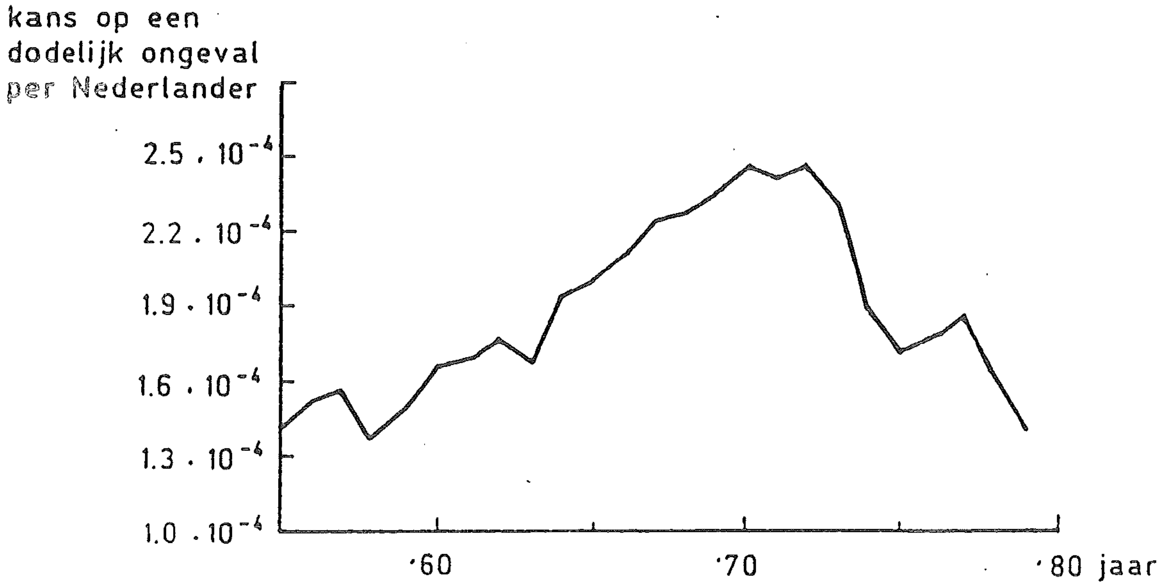


Fig. 8.8 Het verloop van enkele kentallen van het autoverkeer in de tijd.

De snelheidsbeperking blijft na dit succesvolle experiment gehandhaafd. Daarnaast leiden de hogere brandstofkosten tot een voorzichtiger autogebruik.
Het aantal verkeersdoden daalt, afgezien van een onderbreking in 1977, tot omstreeks 2.000, ondanks een nog steeds in omvang groeiend autopark.
Het persoonlijke risico voor de automobilist blijft afnemen tot een niveau van 2.10^{-4} [1/jaar].

Het maatschappelijke risico niveau daalt eveneens van $2,5.10^{-4}$ tot $1,4.10^{-4}$.

Bij het bestuderen van de figuren 8.8 dringen zich twee voorzichtige conclusies op:

1. Het persoonlijke risico daalt naarmate het "vrijwillige" karakter van autorijden vermindert, van 6.10^{-4} tot 2.10^{-4} [1/jaar].
2. De overschrijding van een bepaald acceptabel maatschappelijk risiconiveau van ongeveer $1,6.10^{-4}$ brengt een maatschappelijke reactie teweeg, die na enkele jaren tot maatregelen leidt.
   De maatregelen hebben succes en het risico daalt weer tot het oude niveau.
   Er lijkt dus sprake te zijn van een maatschappelijk afwegingsproces, dat een betrekkelijk stabiel risico-niveau tot resultaat heeft.

De iets verdergaande veronderstelling dat de risico-tolerantie van de maatschappij zich weerspiegelt in de ongevallen-statistiek wordt niet verworpen. Een korte beschouwing van de statistiek van ongevallen met dodelijke afloop (zie tabel II) geeft een indruk van het risico, dat in Nederland maatschappelijk geaccepteerd wordt.

Het blijkt dat de gevallen met dodelijke afloop in twee hoofdoorzaken uiteen vallen: ongelukken thuis en auto-ongelukken, die in 1976 elk ongeveer 2.500 doden per jaar eisten (tabel II). De kans op een ongeval in één van deze categoriën is gemiddeld per Nederlander 2.10^{-4} per jaar. De kans op een ongeval in fabrieken, aan boord van schepen, op haventerreinen en tijdens treinreizen is veel kleiner.
Indien dit aantal ongevallen tesamen betrokken wordt op de werkende beroepsbevolking, blijft het risico beperkt tot $5,5.10^{-5}$ per jaar, hetgeen in overeenstemming is met figuur 8.2.
De totale gemiddelde kans op een ongeluk met dodelijke afloop bedraagt in Nederland $4,0.10^{-4}$ [1/jaar].

Tabel II: Aantal doden t.g.v. ongevallen in Nederland in 1976.

Situatie	Aantallen doden	Kans
in huis jonger dan 70 j	808	
ouder dan 70 j	1.368	
op straat	134	
spoorwegovergang	36	
openbare gebouwen	20	
gesticht/inrichting	79	
openbaar water	377 +	
	2.822	2.10^{-4}
fabriek	106	
aan boord	2	
op zee	1	
zee- en luchthavens	8	
treinongevallen	67	
in het veld	24 +	
	208	$5,5.10^{-5}$
auto-ongevallen	2.270	
sport en vrije tijd	33 +	
	2.303	$1,65.10^{-4}$
onbekend	299	$1,64.10^{-5}$
Totaal	5.562	$4,0.10^{-4}$

Een dergelijk risiconiveau vindt men ook in de overige West-Europese landen, hetgeen de hypothese dat zij het resultaat is van een maatschappelijk afwegingsproces, ondersteunt.

In andere delen van de wereld ligt het geaccepteerde risico-niveau geheel anders. Het risico in het autoverkeer is in ontwikkelingslanden bijv. in de orde van 200.10^{-4} doden/auto.

In de internationale literatuur wordt het totale gemiddelde risico vaak beschouwd als de som van drie componenten:

1. Het basisrisico, dat is het onvermijdelijke minimum risico, dat een lid van de gemeenschap moet accepteren. Op de grootte van dit risico heeft het geen invloed en derden kunnen er niet voor aansprakelijk worden gesteld. Het is de laatste decennia de plicht van regeringsinstanties geworden dit risico op een maatschappelijk aanvaardbaar niveau te houden.

2. Het vrijwillige risico, dat alle risico's omvat die binnen de invloedsfeer van het individu vallen en waarvan hij beseft, dat ze uit zijn activiteiten voortvloeien.

3. Het aansprakelijkheidsrisico, dat van toepassing is op die gevallen waar de schuld van een verantwoordelijke instantie aanwijsbaar is.

Omdat het moeilijk is, het totale risico onaanvechtbaar over de drie componenten te verdelen, kent men aan elke component ongeveer een derde van het totale risico toe, zodat het basisrisico in Nederland ongeveer gesteld kan worden op:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\text{aantal doden door ongelukken}}{\text{bevolkingsaantal}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5562}{14.10^{6}} = 1,33.10^{-4} \text{ jaar}$$

Uit dit basisrisico leidt men vervolgens een norm af voor de faalkans van de bij activiteiten betrokken systemen:

$$P_{f_i} = \frac{\beta\ 1,33.10^{-4}}{P_{d\ f_i} . N_{p_i}} = \frac{\beta\ 1,33.10^{-4}}{N_{d_i}}$$

waarin:

β = beleidsfactor
N_d = aantal doden bij een ongeval

Het probleem met deze in de literatuur vaak gepresenteerde formule is dat de aanwezigheid van het aantal doden in de noemer niet gerechtvaardigd wordt. De ervaring dat een ongeval met 100 doden veel minder aanvaardbaar is dan een ongeval met één dode lijkt intuïtief een goed argument. Dit argument is echter niet houdbaar.

De rechtvaardiging van de deling door het aantal doden moet gezocht worden in een model voor de maatschappelijke risico-beleving. Als model-hypothese wordt verondersteld dat een individu het maatschappelijke risico-niveau beoordeelt aan de hand van de gebeurtenissen in zijn kring van bekenden.

Indien men voor het moment de gemiddelde omvang van de kring van goede bekenden op 100 personen stelt dan is de kans op een dode in de kring door natuurlijke oorzaken gelijk aan:

$$P(\text{dode}) = 10^{-2} \text{ à } 10^{-3}.100 = 1{,}0 \text{ à } 0{,}1 \ [1/\text{jaar}]$$

Evenzo is de kans op een dode onder de bekenden tengevolge van een verkeersongeval gegeven door:

$$1972 : P(\text{dode}) = \frac{3.300}{14.10^{+6}} \cdot 100 = 2{,}4.10^{-2} \sim \frac{1}{42} \ [1/\text{jaar}]$$

$$1980 : P(\text{dode}) = \frac{2.200}{14.10^{+6}} \cdot 100 = 1{,}4.10^{-2} \sim \frac{1}{72} \ [1/\text{jaar}]$$

Via het instrument van de kennissenkring zijn de bijzonder kleine kansen op een dodelijk ongeval, die maatschappelijk aanvaardbaar lijken, waarneembaar. De herhalingstijd ligt binnen de orde van een mensenleeftijd.

Indien men streeft naar een normstelling voor het acceptabele risiconiveau voor civiele constructies, sluit het meer bij de realiteit aan, het aantal doden door andere oorzaken dan het verkeer en ongevallen in huis te kiezen, dan de betrekkelijke willekeurige driedeling in vrijwillig, aansprakelijkheids- en basisrisico.
De kans op een dode in de kennissenkring t.g.v. een ongeval in de fabriek, aan boord, op zee etc. is ongeveer gelijk aan:

100 personen

$$P(\text{dode}) = \frac{200.100}{14.10^{+6}} = 1{,}4.10^{-3}$$

Indien men deze waarnemingsfrequentie tot norm verheft voor de beoordeling van de veiligheid van een onvrijwillige activiteit $\underline{i}$ dan geldt met inachtname van $\beta = 0{,}1$:

aantal   kans dood gegeven falen   waardering

falen   aantal personen

$$\frac{\Sigma N_{p_i} . P_{d|f_i} . P_{f_i} . 100}{14.10^6} \leq \beta \ 1{,}4.10^{-2}$$

Hieruit volgt na herleiding en verdeling over bijvoorbeeld 20 activiteiten-categorieën de volgende norm voor Nederlandse situaties:

$$P_{f_i} \leq \frac{\beta \ 100}{N_{p_i} . P_{d|f_i}}$$

Deze norm kan ook zo geïnterpreteerd worden, dat een activiteit toelaatbaar is, zodra zij naar verwachting minder dan $\beta.100$ doden per jaar eist.

Daarbij wordt nog geen onderscheid gemaakt tussen twee activiteiten met de volgende gevaaraspecten:

	P_{f_i}	.	N_d	$= E(N_d)$
1	1,0	.	100	= 100
2	0,001	.	100.000	= 100

De verwachtingswaarde van het aantal slachtoffers is weliswaar gelijk doch in het ene geval zijn er 10 doden te betreuren, terwijl bij het optreden van het tweede ongeval 100.000 doden vallen. Dit duidelijk invoelbare verschil komt tot uiting in de spreiding van het aantal doden.

	$E(N_d)$	$\sigma(N_d)$
1	100	0
2	100	10

Het lijkt een goede weg de aversie tegen het tweede geval weer te geven door aan de onderschrijding van de norm een betrouwbaarheidseis toe te voegen op de volgende wijze:

$$E\,(N_d) + k.\sigma\,(N_d) \leqslant \beta.100$$

Voor een goede uitwerking is het nodig, mede in aanmerking te nemen op hoeveel onafhankelijke plaatsen N_A de bestudeerde activiteit $\underline{i}$ wordt uitgevoerd.
De verwachtingswaarde en de variantie van het aantal slachtoffers per jaar zijn dan:

$$E\,(N_d) = N_A.P_{f_i}\ \{\frac{N_p}{N_A} \cdot P_{d|f_i}\}$$

$$\mathrm{Var}\,(N_d) = N_A.P_{f_i}\ (1 - P_{f_i})\ \{\frac{N_p}{N_A} \cdot P_{d|f_i}\}^2$$

Toepassing van de betrouwbaarheidseis leidt tot het volgende resultaat:

$$P_{f_i} \leqslant \{-\frac{k}{2\sqrt{N_A}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{N_A} + \frac{4\,\beta.100}{N_p.P_{d|f_i}}}\}^2$$

In de figuur 8.9 is de eis voor een aantal waarden van N_A geschetst.

De waarde van β is gelijk aan 0,1 gesteld, behalve voor de lijn aan de rechterzijde waar β = 10. Voor de betrouwbaarheidseis is uitgegaan van een waarde van 99,9% (k = 3).

Voor grote waarden van N_A ontaardt de formule in de oude norm, waarbij de acceptabele faalkans evenredig is met het omgekeerde van het aantal doden. Alleen is nu de teller veel groter (x 10^{-6}):

$$P_{f_i} \leq \frac{\beta.100}{N_p.P_{d|f_i}}$$

Voor N_A = 1 neemt de eis een strengere vorm aan:

(door standaardafwijking)

$$P_{f_i} < \frac{\beta^2.100^2}{k^2(N_p.P_{d|f_i})^2}$$

De meer dan evenredige afname van de toegestane faalkans met het aantal doden $N_p.P_{d|f_i}$ is gegrondvest in de, op risico-aversiteit gebaseerde, betrouwbaarheidseis aan het verwachte aantal doden.

Andere verklaringen voor een meer dan evenredige afname zijn:
1. Economies of scale in de bescherming van een groter aantal mensen. Ook excercities volgens de econometrische berekeningswijze zullen leiden tot kleinere faalkansen voor grotere risico's.
2. De werking van de maatschappelijke communicatie-kanalen is heviger bij 100 doden ineens dan bij 100 x 1 dode. De oorzaak ligt in economies of scale bij politiek en pers.
3. De maatschappelijke disruptie varieert met $P_{d|f_i}$.

   Indien bij een ongeval 1% van een sociale entiteit omkomt is verder functioneren mogelijk.
   Bij een trefpercentage van bijv. 50% is de sociale structuur verbroken en wordt het voortbestaan van de organisatie als geheel twijfelachtig, ook al overleeft de helft van de individuen.

Deze overwegingen zijn echter niet in het gepresenteerde model tot uitdrukking gebracht. Om het model enigszins te kunnen toetsen aan hetgeen in Nederland toelaatbaar wordt geacht, zijn in fig. 8.10 in hetzelfde assenstelsel enige activiteiten geplot. Op de verticale as is de kans op een ongeval of het falen van een systeem weergegeven terwijl op de horizontale as het aantal doden staat, dat te betreuren valt bij een kans op een ongeval gelijk aan 1,0. Zo is de kans op een overstroming van Centraal-Holland volgens de richtlijnen van de Deltacommissie van de orde 10^{-4}. Indien een overstroming optreedt zal het aantal doden in de orde van 10.000 zijn.

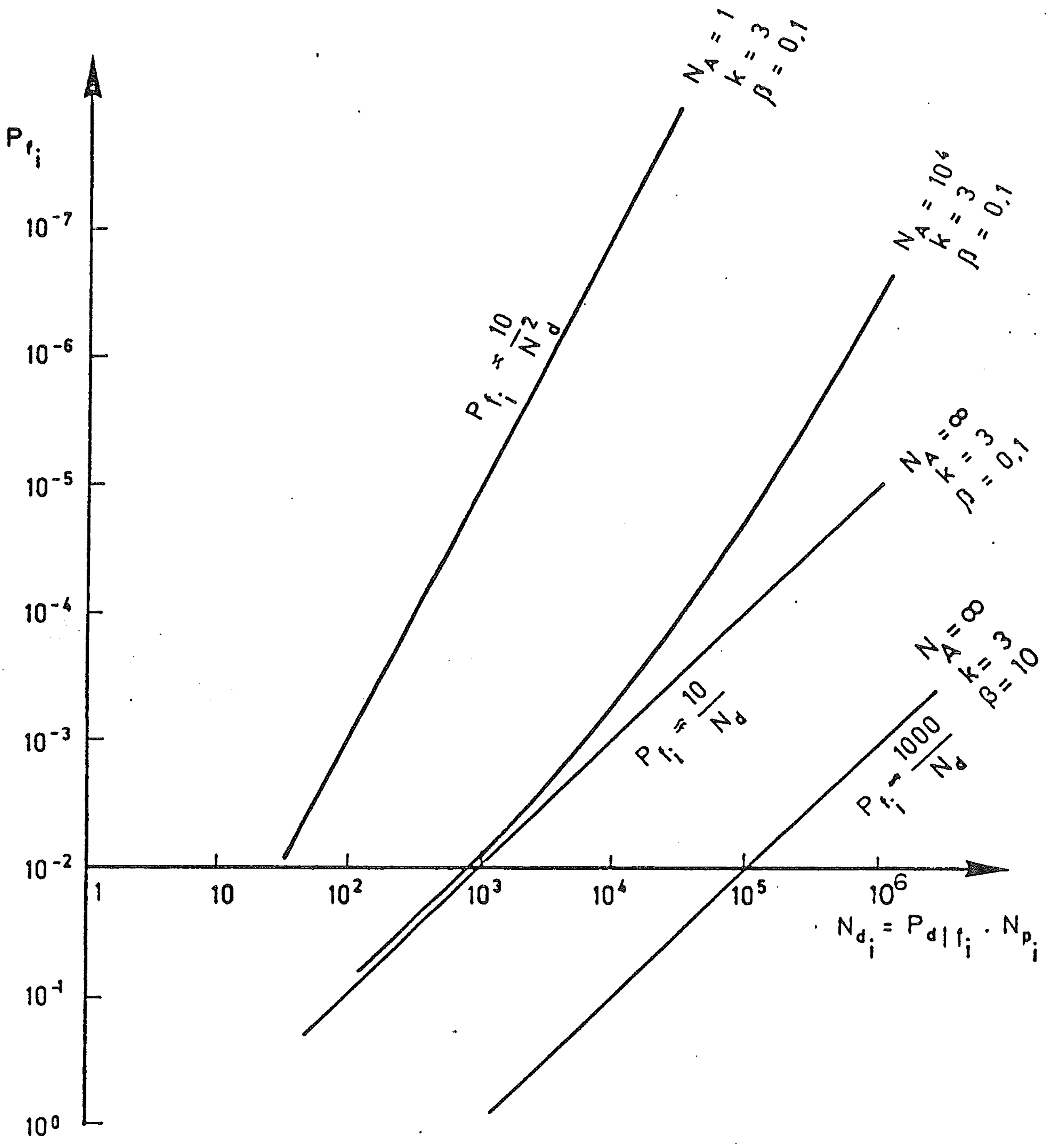


Fig. 8.9 Het verloop van de maatschappelijke veiligheidsnorm voor enkele waarden van β en N_A; op de verticale as staat de kans op een ongeval en op de horizontale as het aantal doden dat valt indien de kans op een ongeval 1,0 is.

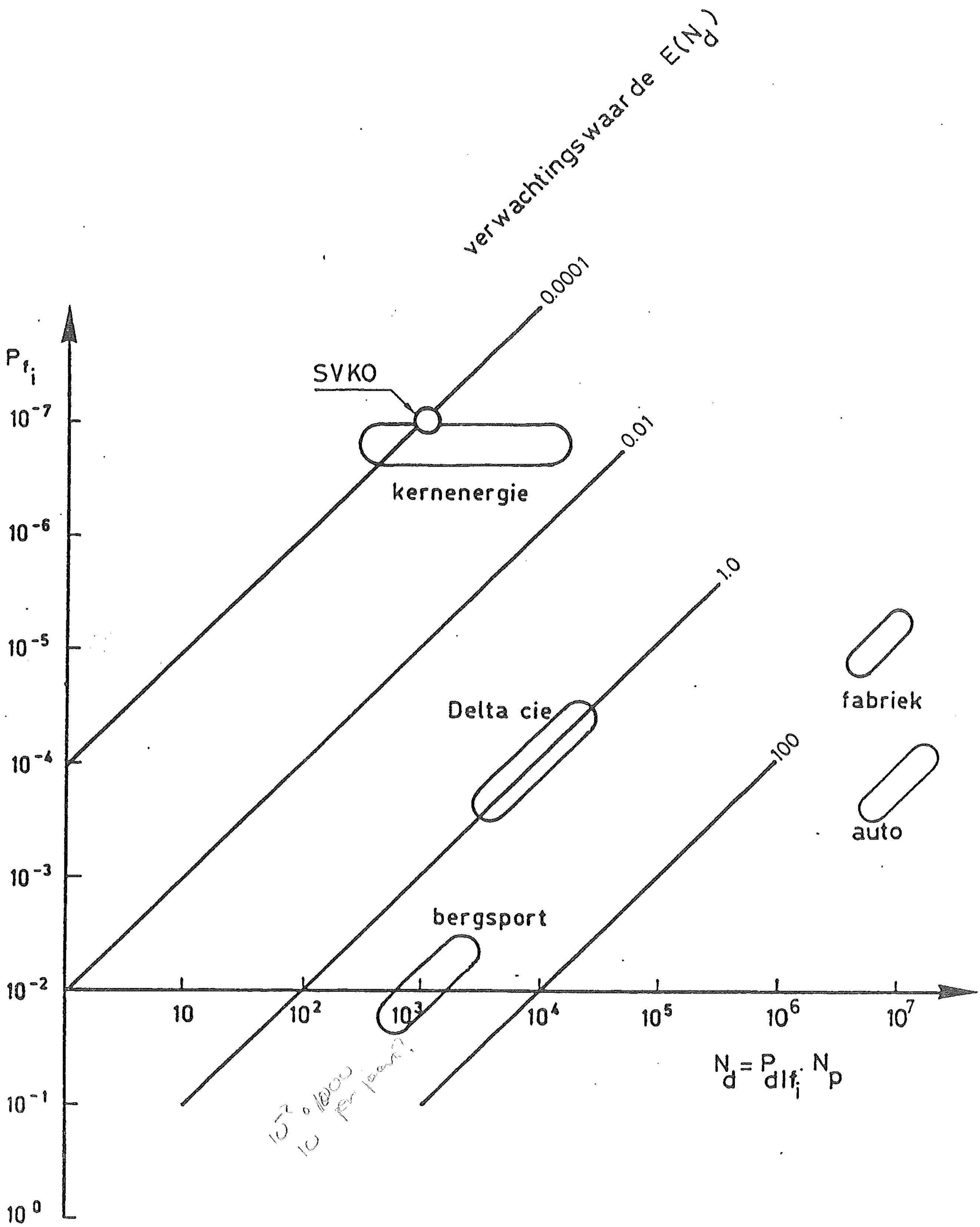


Fig. 8.10 De positie van enkele activiteiten in Nederland; op de verticale as staat de kans op een ongeval per systeem en op de horizontale as het aantal doden dat valt als de kans op een ongeval 1,0 is.

Indien alle auto's in Nederland een zwaar ongeval krijgen, dan is het aantal doden $\sim 4.10^{6}$. De kans op een ongeval is echter 2.10^{-4} per auto. De lijnen onder 45^{o} zijn lijnen van een constante verwachtingswaarde van het aantal doden. Jaarijks wordt bijvoorbeeld een honderdtal doden in de fabrieksomgeving verwacht. De verwachtingswaarde van het aantal doden t.g.v. de overstroming van Centraal-Holland is $10^{-4}.10^{4} = 1.0$. De verwachtingswaarde van het aantal doden in het autoverkeer is ~ 1.500.

Uit een vergelijking van de fig. 8.9 en 8.10 blijkt, dat het model voor een bepaalde parameterkeuze de realiteit redelijk benadert. Voor het autoverkeer geldt voor $\beta = 10$ bijvoorbeeld de volgende waarden der parameters:

$N_A = 4.10^{6}$ auto's $\qquad P_{d|f} = 1,0$

$N_p = 4.10^{6}$ pers. $\qquad k = 3,0$

Hieruit volgt een acceptabele ongevalskans van $2,26.10^{-4}$ per auto per jaar.

Een acceptabele ongevalskans voor het werken in een fabriek zou volgen uit de volgende parameterkeuze.

$N_A = 4.10^{6}$ plaatsen $\qquad P_{d|f} = 1,0$

$N_p = 4.10^{6}$ pers. $\qquad k = 3,0$

$P_{f_{acc}} = 4.10^{-6}$ per fabrieksplaats per jaar

De afgeleide norm lijkt enigszins strakker te zijn, dan hetgeen in de realiteit wordt toegestaan.

In fig. 8.11 is de maatschappelijke aanvaardbaarheid van risico's ontleend aan de milieunota van de Provincie Groningen [6] weergegeven. Deze norm voor het groepsrisico is veel strakker dan de in dit artikel ontwikkelde ideeën. Een ramp met een dodental van 10.000 is in het geheel niet toelaatbaar, zodat de waterstaatskundige situatie in Centraal-Holland volgens deze visie verbetering zou behoeven.

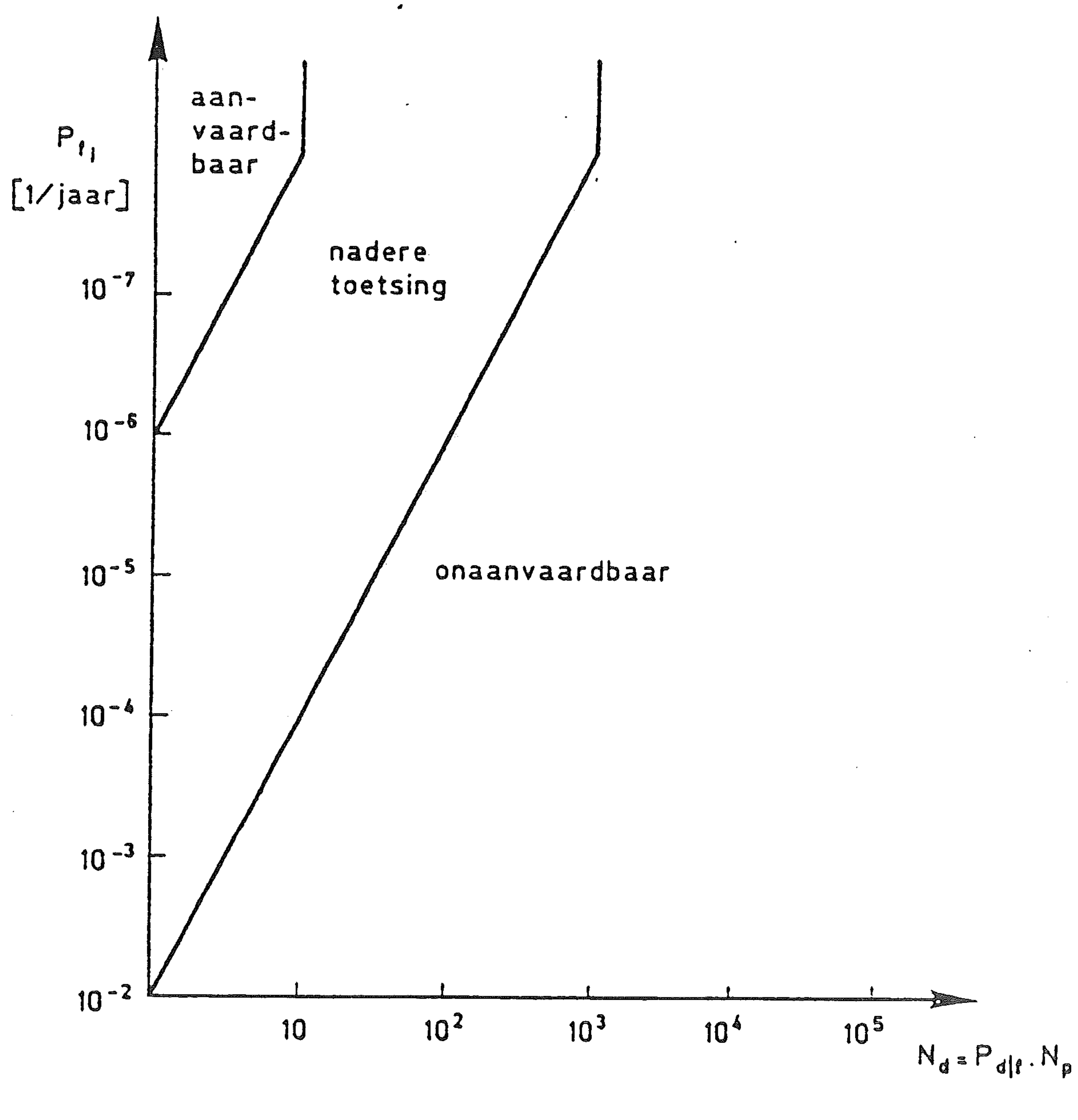


Fig. 8.11 De aanvaardbaarheid van groepsrisico's volgens de Nota Milieunormen van de Provincie Groningen; de grafiek is bedoeld voor de beoordeling van mogelijke ongevallen waarbij een groot aantal doden te betreuren is.

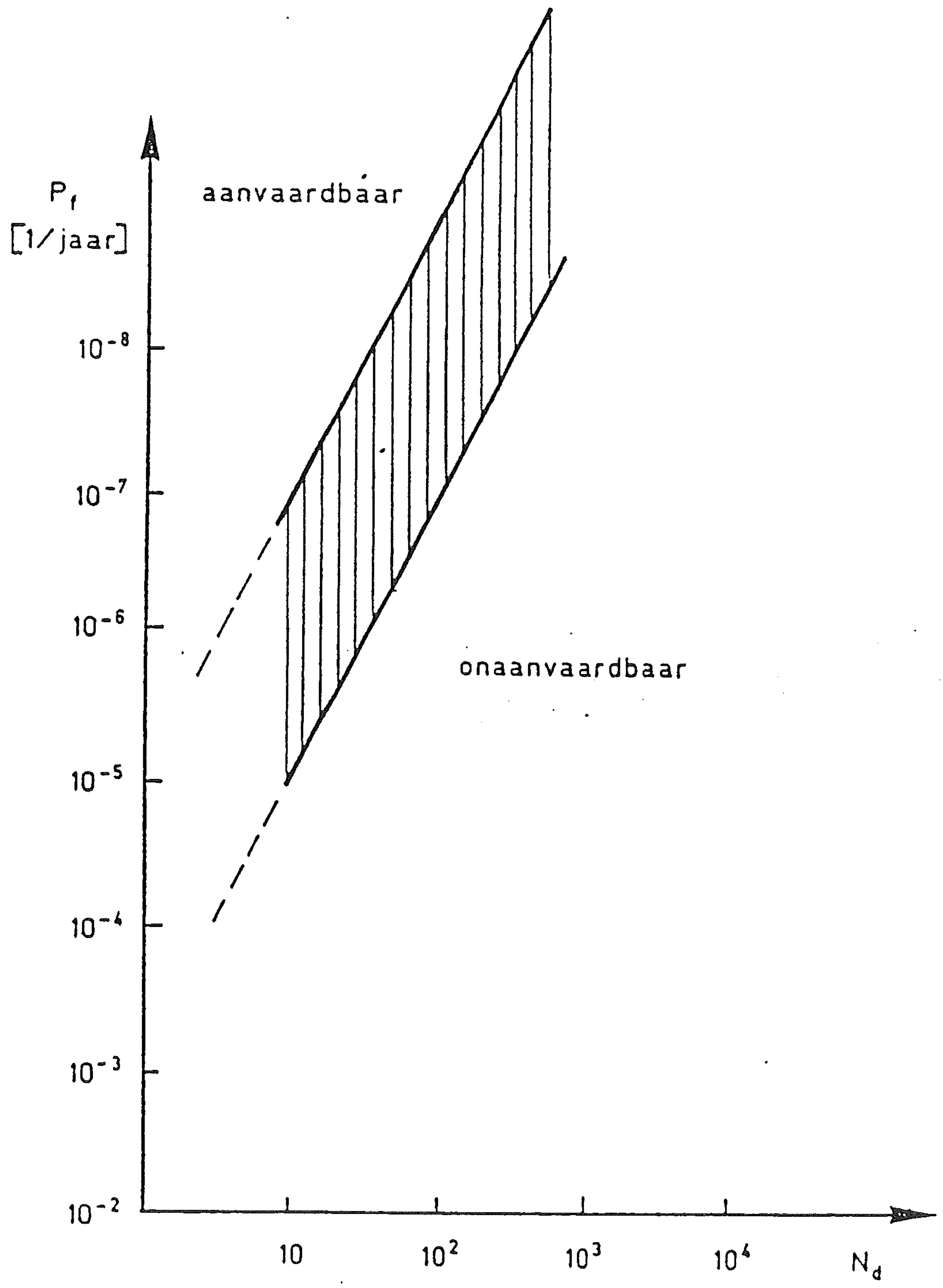


Fig. 8.12 Normstelling van dr. Ale (VROM) t.b.v. de veiligheid van L.P.G. installaties.

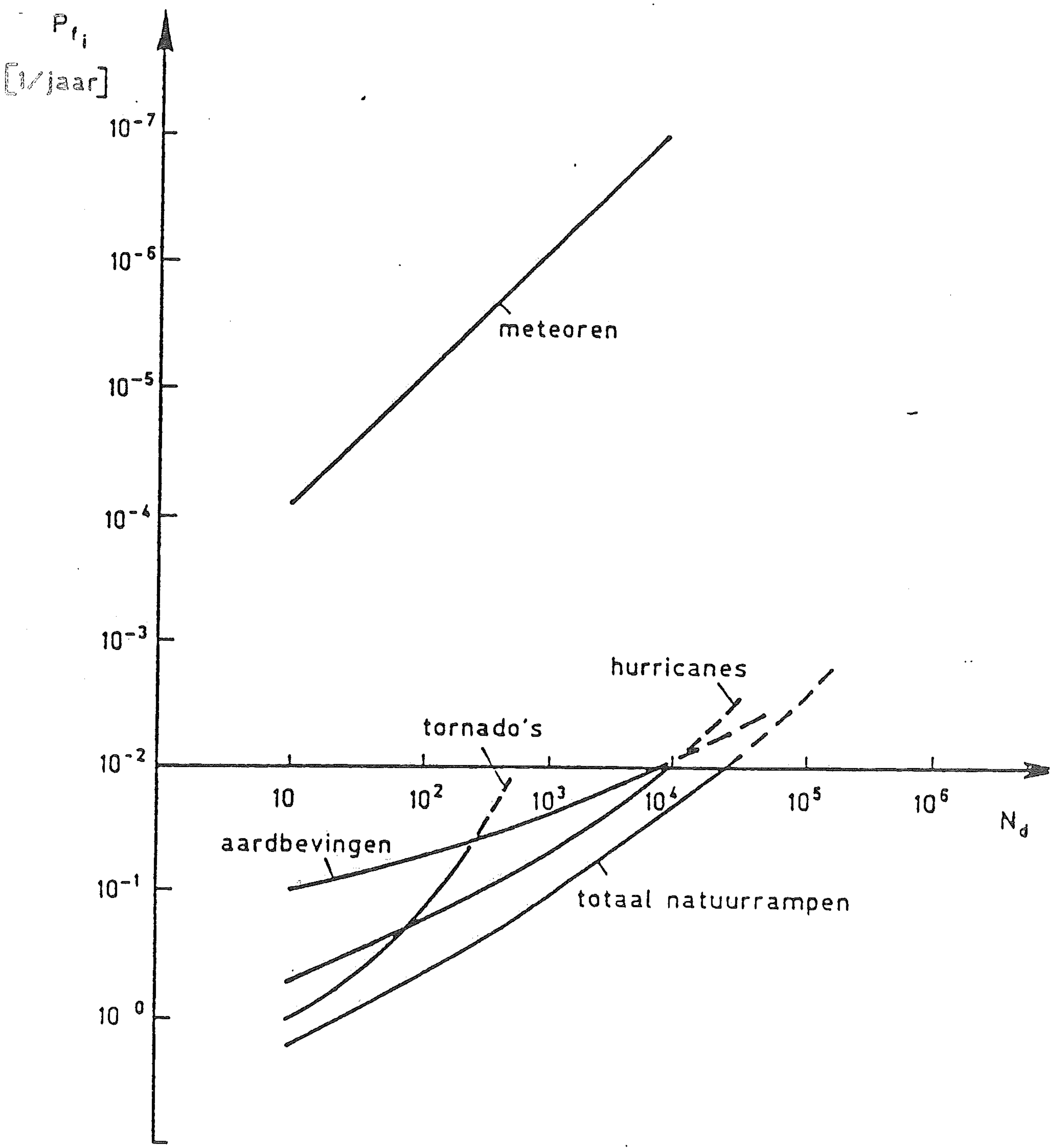


Fig. 8.13 Dodentallen en frequenties behorend bij natuurrampen (ontleend aan WASH 1400).

8.3.0 De sythese tot een totaal-visie op het aanvaardbare risico

In het voorafgaande is een visie op het aanvaardbare risiconiveau gepresenteerd. Deze visie behelst dat in een concreet geval steeds drie eisen naast elkaar worden gesteld.

- Het individueel aanvaardbare risico, dat voor een lid van de samenleving gemiddeld acceptabel is. In eenvoudige vorm wordt het aanvaardbare risico weergegeven door:

$$P_{f_i} \leqslant \frac{\beta . 10^{-4}}{P_{d|f_i}}$$

waarin:

β = de beleidsfactor variërend van 0,1 tot 10
$P_{d|f_i}$ = de kans op overlijden bij falen

- Het economisch optimale risiconiveau, waarbij de waarde van een mensenleven in aanmerking genomen moet worden. Voor de waarde van een mensenleven lijkt de contante waarde van het netto nationaal product per hoofd een objectieve maat.
  Het optimale niveau is bereikt als de marginale kosten van veiligheidsmaatregelen juist gelijk zijn aan de marginale opbrengst.
- Het maatschappelijk aanvaardbare risiconiveau, op basis van een verondersteld risico-aversie-model weer te geven als:

$$P_{f_i} \leqslant \left\{- \frac{k}{2\sqrt{N_A}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{N_A} + \frac{4\,\beta . 100}{N_p . P_{d|f_i}}}\right\}^2$$

Of eenvoudiger de hieruit af te leiden limietgevallen:

$$P_{f_i} \leqslant \frac{\beta . 100}{P_{d|f_i} . N_p} \qquad \text{voor} \quad N_A >> \frac{1}{P_{f_i}}$$

$$P_{f_i} \leqslant \frac{\beta^2 . 100^2 \; N_A}{k^2 \; (P_{d|f_i} . N_p)^2} \qquad \text{voor} \quad N_A << \frac{1}{P_{f_i}}$$

Het strengste criterium van de drie kan als maatgevend worden beschouwd.

Hierbij wordt opgemerkt, dat het uit macro-economische overwegingen geen aanbeveling verdient om in veel gevallen en in grote mate af te wijken van het economisch optimale veiligheidsniveau.

Ter illustratie is de voorgestelde procedure in de volgende figuren toegepast op Whitstable en Centraal-Holland. Beide zijn gevallen waarbij het gaat om de bescherming van polders met stedelijke bebouwing tegen de zee.

Zowel in Engeland als in Nederland ligt de lijn van het persoonlijke acceptatieniveau op 10^{-2} per jaar als de verdrinkingskans bij een overstroming gelijk $P_{d|f_i} = 10^{-2}$ wordt gesteld.

De economische optima zijn in beide gevallen reeds berekend.
Centraal-Holland 3.10^{-6} [1/jaar]
Witstable 2.10^{-4} [1/jaar]

Het maatschappelijke criterium ($N_A = 1$; $k = 3$; $\beta = 0,1$)

$$P_f = \frac{\beta^2 .100^2 .N_A}{k^2 .N_d^2}$$

eist voor de toelaatbare overstromingskans:

- Centraal-Holland $4,5.10^{-9}$ $N_d = 50.000$
- Whitstable $4,5.10^{-3}$ $N_d = 50$

Voor Centraal-Holland is het maatschappelijk criterium veruit maatgevend (zie fig. 8.14). De economische beschouwing geeft daarentegen voor Whitstable het strengste criterium (zie fig. 8.15).

Interessant is te zien welke keuze in de maatschappelijke processen is gemaakt voor het aanvaardbare risiconiveau:

- Delta Cie. Centraal-Holland: 10^{-4} - 10^{-5};
- City Council Whitstable: 10^{-3}.

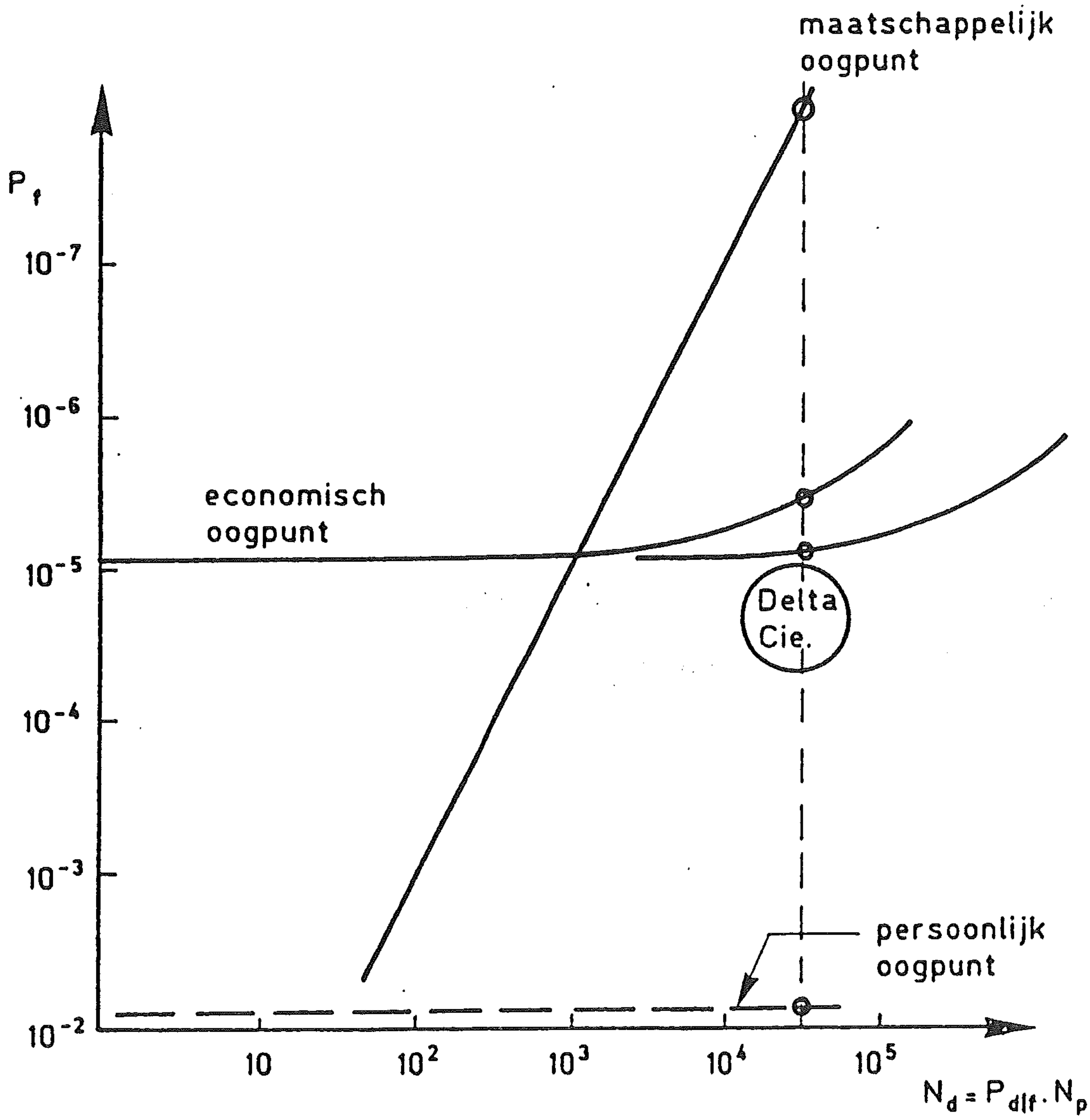


Fig. 8.14 De toepassing van de drie veiligheidseisen op Centraal-Holland.

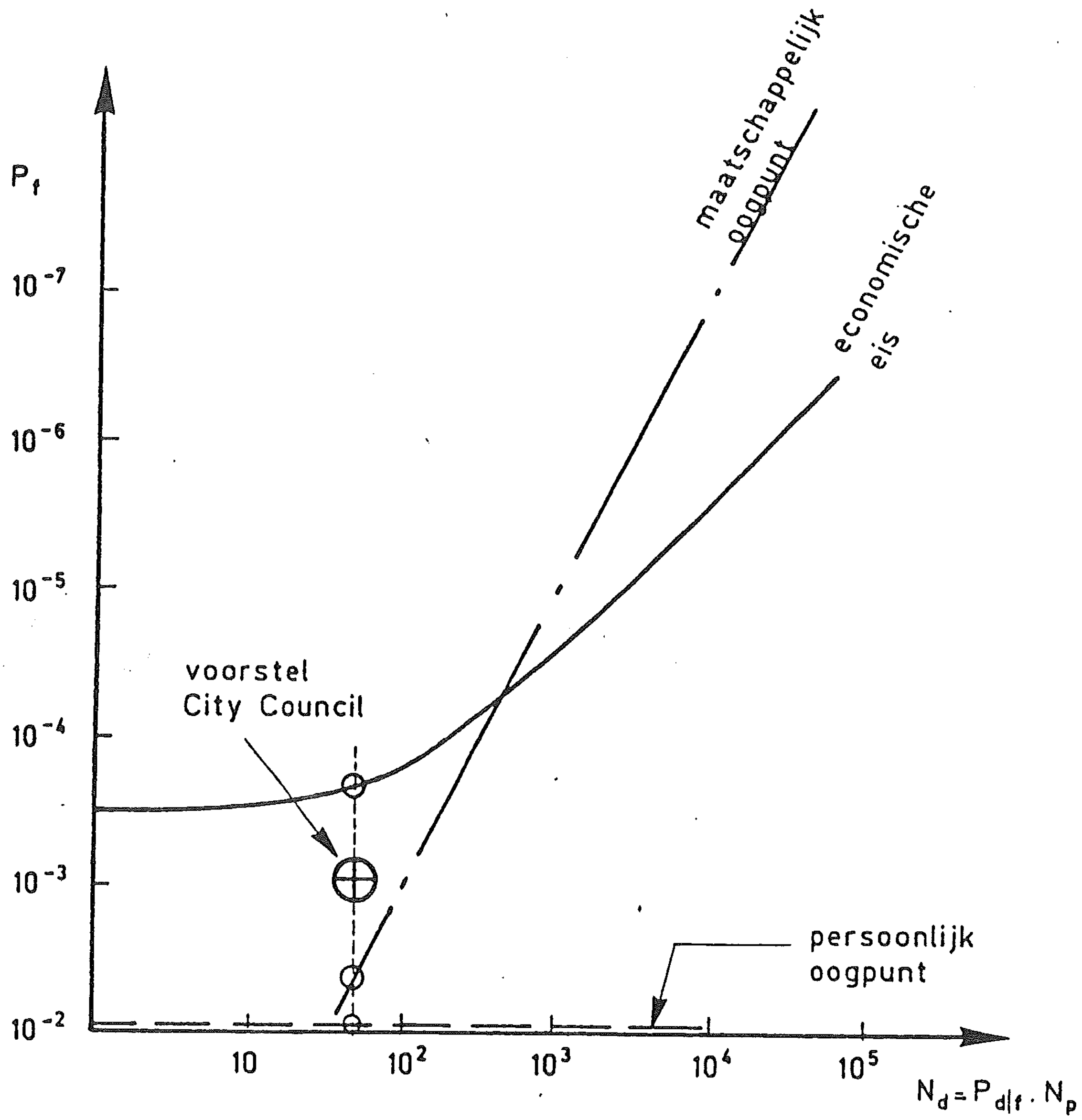


Fig. 8.15 De toepassing van de drie veiligheidseisen op de zeewering van Whitstable.

Hoewel in het voorgaande een poging is gedaan een aantal facetten van de maatschappelijke risicobeleving in één kader onder te brengen, is de problematiek zeker niet opgelost. De oplossing kan slechts geleidelijk ontstaan in technische en politieke diskussies, die gevoed worden door ervaringen in het leven.
Dat er aanleiding is voor diskussie blijkt al uit de verschillen tussen de norm voor het groepsrisico uit de Nota Milieunormen van de provincie Groningen, de voorstellen van deze studie en de realiteit (zie fig. 8.9, 8.10 en 8.12).
Dit hoofdstuk geeft een overzicht van de stand van de kennis op dit moment.
Binnen de kring van technici moet de studie worden voortgezet.

Literatuur

[1] Visser, J.P., Kwantificering van risico's. De Ingenieur, jrg. 91, 29 november 1979.

[2] v. Dantzig, D., Kriens, J., Het ecnomisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van Nederland tegen stormvloeden+ Rapport Deltacommissie, deel 3, bijdrage II.2, Den Haag, 1960.

[3] Vlek, C.A.J., Stallen, P.J.M., Beoordeling van riskante aktiviteiten: een psychometrische analyse. De ingenieur, jrg. 91, 29 november 1979.

[4] Neumann, von J., Uber ein Okonomischen Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 89, 73-83. Leipzig und Berlin, 1937.

[5] Ligtenberg, F.K., Hoe veilig moet een constructie eigenlijk zijn?

[6] Nota Milieunormen: Provincie Groningen, 1979.

9. Oosterschelde SYMPOSIUM ON HYDRAULIC ASPECTS OF COASTAL STRUCTURES

9.1 HYDRAULIC BOUNDARY CONDITIONS

by

J.K.Vrijling, J.Bruinsma, Rijkswaterstaat, Deltadienst, The Hague.

SYNOPSIS.

In the design of the Oosterschelde storm surge barrier semi-probabilistic methods have been used. The probabilistic load calculation requires knowledge of the three dimensional probability density function of storm surge level, basin level and wave energy.
However especially in the interesting regions of low probability of occurence the consequent lack of measured data prevents a reliable estimate of this function.
In this paper a combination of purely statistical models and mathematical models, based on physical laws and checked with measured data, has been used. The probability density function of the storm surge level is based on a purely statistical model. A simple mathematical model, based on physical facts, is used to derive the conditional probability density function of the basin level on the storm surge level.
The conditional probability density function of the wave energy on the storm surge level is found along the same lines. A mathematical model is developed based on the hypothesis, that the typical double peaked form of the wave spectrum is caused bij the fact, that the wave energy originates from two sources. Waves, entering the estuary from deep water via the shoals and waves, generated locally, from together the seastate at the barrier site.
The required three dimensional probability density function of storm surge level, basin level and wave energy is derived as the product of the probability density functions referred to above.

CONTENTS.

1. INTRODUCTION.

In the design of the Oosterschelde storm surge barrier semi-probabilistic methods have been used (Mulder and Vrijling, 1980). The probabilistic load calculation requires knowledge of the three dimensional probability density function of storm surge level, wave energy, and basin level. Basically there are two ways of extrapolating the measured data of these parameters and their correlations into the regions of low probability of occurence, where measured data are not available.

1. A purely statistical extrapolation
2. A statistical extrapolation supplemented by mathematical models based on physical laws and checked with measured data.

A combination of these methods has been used in finding the probability density function of the storm surge level and the conditional probability density functions of wave energy and basin level, from which the three dimensional probability function is derived. A schematic diagram for the development of this three dimensional function has been given in fig. 1.

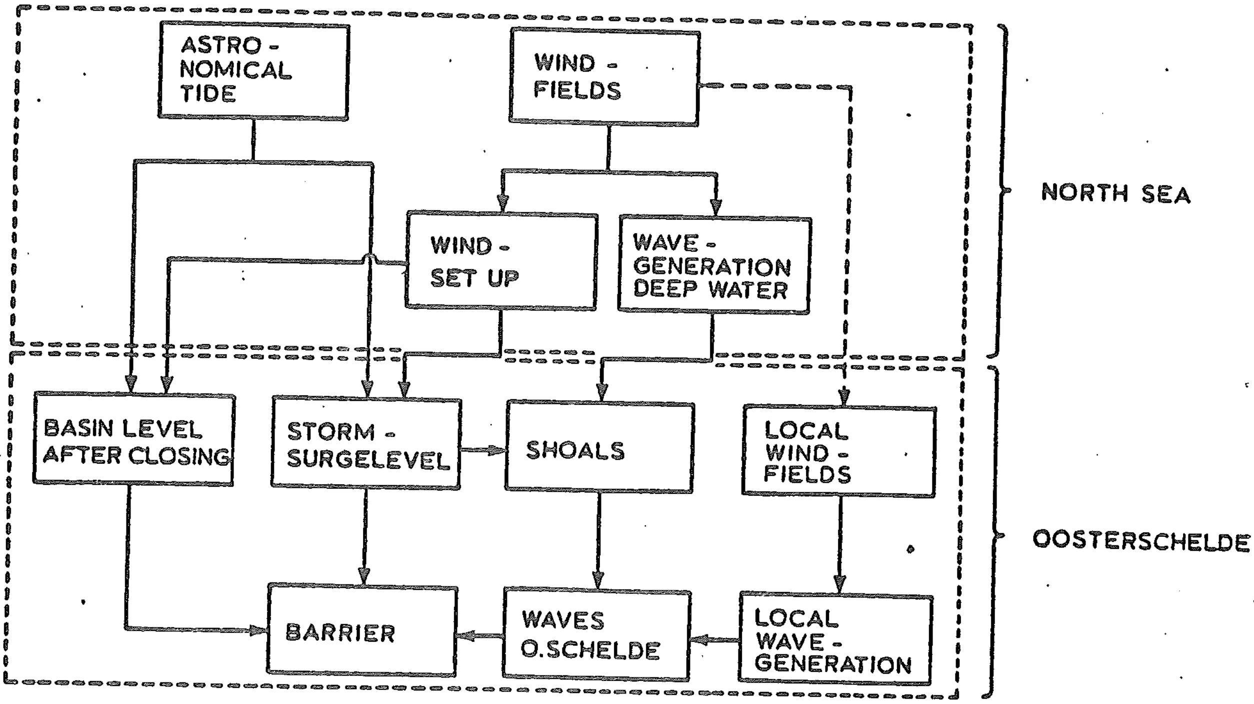


Figure 1. A schematic diagram of the physical relations used for the derivation of the three dimensional probability function of storm surge level, wave energy and basin level.

The probability density function of the storm surge level is based on 68 years of historical data; extremes are predicted by statistical extrapolation. The knowledge of the physical laws governing this phenomenon has been used to see whether predicted extremed could be reached(ch.2).

The conditional probability density function of the basin level depends at least partly on the closing strategy of the barrier during storm surges. A simple model was developed based on the fact that a storm surge is formed by a random combination of wind set up and astronomical tide (ch.2.). From this model the conditional probability density function of the basin level (conditional on storm surge level) could be derived for different closing strategies. The basin level was found to be virtually statistically independent of the wave energy.

It appeared from the data that a loose correlation exists between the storm surge level and the energy of the wave spectrum. Lack of data, however, prevented a reliable extrapolation of this two dimensional probability function by purely statistical methods. Therefore a mathematical model has been developed(ch.3.). It is based on the hypothesis that the typical double peaked form of the wave spectrum is caused by the fact, that the wave energy originates from two sources. Waves, entering the estuary from deep water via the shoals, are influenced by the processes of breaking, bottom dissipation and refraction by depth and current. The remaining wave energy reaching the barrier depends strongly on the storm surge level. In addition, waves are generated by local windfields, showing a loose relation to the general storm intensity. The model, which incorporates all these effects, is tested in a hindcast of several storms. Being in good agreement, the model is used in extrapolating the conditional two dimensional probability-density of storm surge level and wave energy.

The required three dimensional probability density function of storm surge level, wave energy and basin level is derived as the product of the probability density functions referred to above (ch.4). Is has been used as input in the calculations of the probability distribution of the hydrodynamic load on the storm surge barrier.

2. THE STILL WATER LEVELS AT BOTH SIDES OF THE BARRIER.

2.1. Introduction.

As the storm surge level, the basin level and the wave energy will be considered as stochastic entities, it is possible to construct the three dimensional probability density function of these quantities. Throughout this paper the stochastic variables will be underscored. In this chapter the still water levels at both sides of the barrier during a storm surge will be studied.

The probability density function of the maximum storm surge level has to be based on the frequency of exceedance curve of such levels published in the Delta-report (1960), regulating the design of the Dutch sea defences.However in addition a model is used, that relates the maximum storm surge level to its fundamental origins,viz. the windfield above the North Sea and the astronomical tide. It is shown that extreme storm surge levels can only be reached by North Westerly storms.

Further a model is developed that incorporates the available stochastical information on wind set up, storm duration and astronomical tide. The model is tested by comparing the calculated probability of exceedance curve of maximum storm surge levels to the empirical curve as published in the Delta report. Subsequently it is used to find the set of low waters preceding a storm surge that necessitates the closure of the barrier. This set is also gathered from historical storm surge data and shows good resemblance to the calculated set.

Finally the two dimensional probability density function of maximum storm surge level and basin level is evaluated.

2.2. The storm surge level; two models.

The probability density function of the storm surge level is based on the frequency of exceedance curve presented by the Delta-committee(1960) as a criterion for the design of the Delta works. This curve is based on historical data collected in the period 1888-1956 and corrected for influences due to the Delta works. It is given by:

$$\Pr\,(\underline{z}_m > z) = \exp\left(\frac{2.94 - z}{0.3026}\right) \tag{1}$$

where: $\underline{z}_m$ = the highest still water level during a storm in meters above reference plane (N.A.P.)

However, to see whether predicted extremes could be reached, the underlying physical phenomena have been analysed and modelled by Schalkwijk (1947) and Weenink (1958). They show, that a storm surge is the resultant of two stochastically independent phenomena, viz.:

1. wind set up
2. astronomical tide

The wind set up is caused by the windfields of a cyclone above the North Sea. If the form of the cyclone and the 9-hour uninterruptedly exceeded windspeed are known, the model of Weenink calculates the maximum wind set up (s_m) in the region of the Oosterschelde.

Applying the model for two schematised storms, the following expression can be derived.

North Westerly storm

$$s_m \approx 3.47 . 10^{-2} . W_9^2/g \qquad (2)$$

South Westerly storm

$$s_m \approx 1.5 . 10^{-2} . W_9^2/g \qquad (3)$$

where

s_m = maximum wind set up near the Oosterschelde in m.
W_9 = 9-hour uninterruptedly exceeded windspeed (m/s).
g = acceleration of gravity (m/s^2)

These expressions show that any given wind set up caused by a South Westerly storm can be equalled by the set up due to a North Westerly storm having a 1.5 x lower windspeed.

A common way to get an impression of the maximum storm surge level(z_m) is simply to add the maximum wind set up and the astronomical high water level. Analysing the historical storm surge of 1953 and the design "Delta" storm (z_m=5.50m), assuming different astronomical high waters (h_{HW}), one finds the following figures for the wind set up and the required windspeed as a function of wind direction(α).

Storm	z_m m	tide	h_{HW} m	s_m m	α	W_9 m/s
1953	4.20	neap	1.20	3.00	NW	28
Delta	5.50	neap	1.10	4.40	NW	34
Delta	5.50	average	1.50	4.00	NW	33
Delta	5.50	spring	1.90	3.60	NW	31
Delta	5.50	spring	1.90	3.60	SW	49

The table shows, that the dramatical storm surge of 1953 can be easily surpassed, if the same wind velocities coincide with spring tide.

The conclusion can also be drawn from the table, that an exceedance of the deterministic design storm level N.A.P. + 5.50 m may indeed be caused by an extreme North Westerly storm.
An exceedance of this level during a South Westerly storm seems however very improbable, given the windstatistics for the North Sea region.

By simply adding the astronomical high water and the maximum wind set up, the model developed above excludes phase shifts and interactions between the two phenomena. The effect of possible phase shifts will be studied next by treating the wind set up and the astronomical tide as independent functions of time:

The properties of the wind set up as a function of time have been studied by subtracting the astronomical tide from the still water level variations recorded during 38 selected storms in the period 1921-1970. It turned out that the variation of the wind set up with time could be roughly approximated by:

$$\underline{s}(t)=\underline{s}_m \cos^2\left(\frac{\pi t}{\underline{D}}\right) \qquad \text{for } 0 \leq t \leq \underline{D} \tag{4}$$

where $\underline{s}_m$ =the maximum wind set up during the storm

$\underline{D}$ =the duration of the wind set up

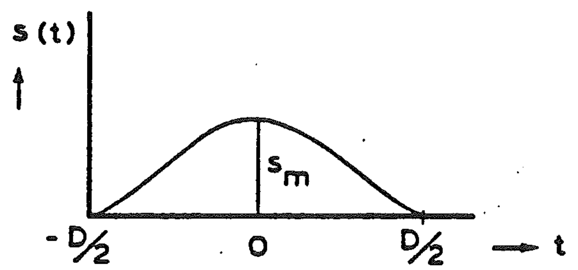


Figure 2. The wind set up as a function of time.

In this study it was found that the probability of exceedance of the maximum wind set up during a storm, after correction for the Delta works, can be given by:

$$\Pr(\underline{s}_m > s) = \exp\left(\frac{1.53 - s}{0.3026}\right) \qquad [s] = m \tag{5}$$

As already shown by Van Dantzig (1960) the probability of exceedance curve of wind set up is parallel to the probability of exceedance curve of storm surge level (compare eqs. 1 and 5).

The duration of the wind set up of the 38 storms is found to be log-normally distributed.

$$p(D)= \frac{1}{D \ln(1.4)\sqrt{2\pi}} \quad \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\ln D - \ln 51.3}{\ln 1.4}\right)^2\right) \quad [D] = \text{hrs} \tag{6}$$

Although Rijkoort (1960) proves a positive correlation between the maximum windspeed and the duration of a storm, the wind set up data show virtually no correlation between the maximum and the duration of the wind set up (r^2=0.02). Therefore it is assumed, that these two parameters are stochastically independent.

The astronomical tide is caused by the gravity forces of the celestial bodies. Thus, the astronomical tide has no causal relation with the wind set up. In this study the astronomical tide is modelled as a periodical fluctuation of the waterlevel $\underline{h}$ with a period T_o=12.4 hrs, and with a Gaussian distributed random amplitude ($\underline{h}_{HW}$). This randomness embodies the daily inequalities. The mean and standard deviation of $\underline{h}_{HW}$ are given by:

$$E\{\underline{h}_{HW}\} = 1.480 \text{ m} \qquad \sigma\{\underline{h}_{HW}\} = 0.195 \text{ m.}$$

In addition the low water level amplitude $\underline{h}_{LW}$ is found to be linearly dependent on $\underline{h}_{HW}$:

$$\underline{h}_{LW} = 0.897\, \underline{h}_{HW} - 0.22 \qquad [h] = m \tag{7}$$

A storm surge is now represented as a linear superposition of a random wind set up and a random astronomical tide, whose maxima occur at a random time shift $\underline{\Phi}$ with respect to the maximum of the wind set up (see fig.3).

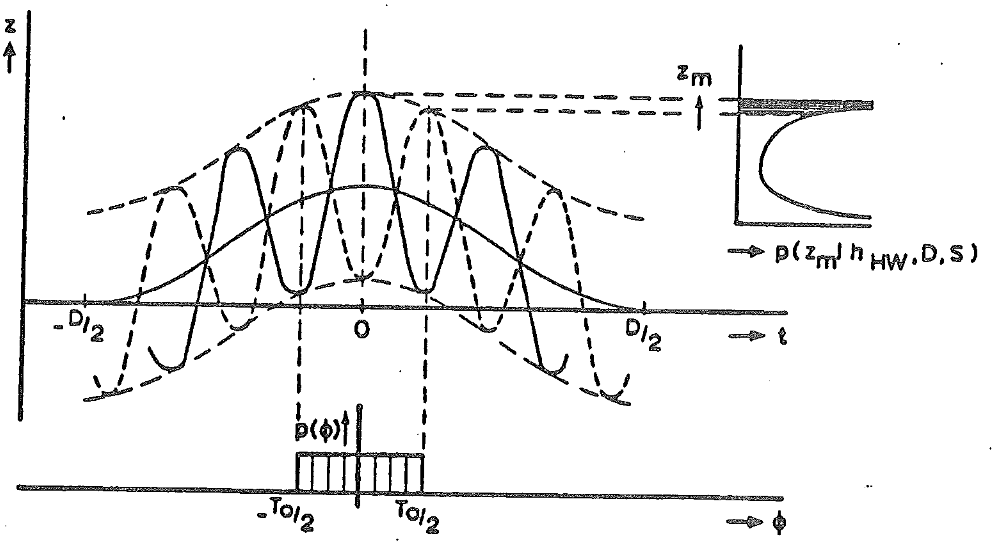


Figure 3. A storm surge level as a linear superposition of wind set up and tidal fluctuation.

$$\underline{z}(t) = \underline{h}(t) + \underline{s}(t) \qquad (8)$$

where $\underline{z}(t)$ = storm surge level in reference to N.A.P.
$\underline{h}(t)$ = astronomical tide in reference to N.A.P.
$\underline{s}(t)$ is given in eq.4.

$$\underline{h}(t) = \frac{\underline{h}_{HW} - \underline{h}_{LW}}{2} \sin \frac{2\pi}{T_o} (t + \Phi) + \frac{\underline{h}_{HW} + \underline{h}_{LW}}{2} \qquad (9)$$

As a consequence of the assumed independence of astronomical tide and wind set up in all aspects, the time shift between them has a uniform probability density function. For symmetry reasons, time shifts of T_o hrs or more are irrelevant, so the probability density function of Φ becomes (see fig.3):

$$p(\Phi) = 0 \qquad \text{for } |\Phi| > \tfrac{1}{2} T_o$$

$$p(\Phi) = \frac{1}{T_o} \qquad \text{for } |\Phi| \leq \tfrac{1}{2} T_o \qquad (10)$$

Moreover it follows that $\underline{\Phi}$, $\underline{h}_{HW}$, $\underline{D}$ and $\underline{s}_m$ are stochastically independent of each other.

The wind set up has a duration, which is much larger than the period of the astronomical tide. Therefore the maximum storm surge level z_m must occur at or very near astronomical high water. For given values of $\underline{h}_{HW}$, $\underline{D}$ and $\underline{s}_m$ the maximum storm surge level is given by:

$$\underline{z}_m(\underline{\Phi}|h_{HW}, D, s_m) = h_{hw} + s_m \cos^2 \left(\frac{\pi\Phi}{D}\right) \qquad (11)$$

Using the relation

$$p(z_m|h_{HW}, D, s_m) = p(\Phi|h_{HW}, D, s_m) \left| \frac{\partial z_m}{\partial \Phi} \right|^{-1} = p(\Phi) \left| \frac{\partial z_m}{\partial \Phi} \right|^{-1} \qquad (12)$$

and the expression (10) for $p(\Phi)$, the conditional probability density function of z_m can be calculated with the result

$$p(z_m|h_{hw}, D, s_m) = \frac{D}{\pi T_o s_m} \left[\frac{z_m - h_{HW}}{s} - \left(\frac{z_m - h_{HW}}{s}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

for z_m in the range: $h_{HW} + s_m \cos^2 (\frac{\pi}{2} \frac{T_o}{D}) \leq z_m \leq h_{HW} + s_m$ (14)

The marginal probability density function of $\underline{z}_m$ then follows from

$$p(z_m) = \iiint p(z_m | h_{HW}, D, s_m)\ p(h_{HW}, D, s_m)\ dh_{HW}\ dD\ ds_m \quad (15)$$

or in view of the independence of h_{HW}, D and s_m

$$p(z_m) = \iiint p(z_m | h_{HW}, D, s_m) \cdot p(h_{HW})\ p(D)\ p(s_m)\ dh_{HW}\ dD\ ds_m \quad (16)$$

Numerical values of $p(z_m)$ have been obtained by substitution of the respective probability density functions into the right hand side of eq.(16). The corresponding cumulative probability distribution has been plotted in fig. 4, together with the curve published by the Delta committee (1960).

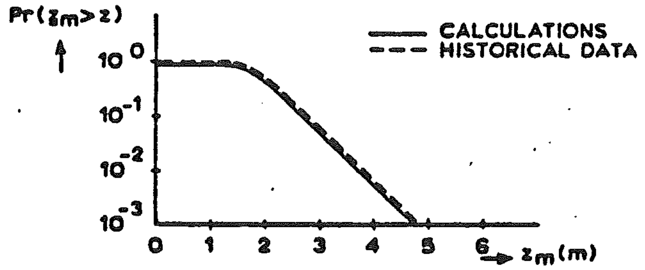


Figure 4. The comparison of the calculated and the observed exceedance curve of the maximum storm surge level.

The close resemblance of the curves supports the accuracy of the developed model. The model will next be used to calculate the low water level.

2.3. The low water level.

The closing strategy of the barrier greatly influences the basin level. In the design period a closing strategy was assumed that would cause the lowest basin level, as this basin level will yield the largest static load on the barrier. According to this strategy the barrier will be closed at the low water, preceding the first relative storm surge level maximum, which is expected to surpass a certain threshold level (see fig.5).

To find the set of low waters at which the barrier will be closed to protect the hinterland against a storm surge, the model, developed in the preceding paragraph, proves valuable.

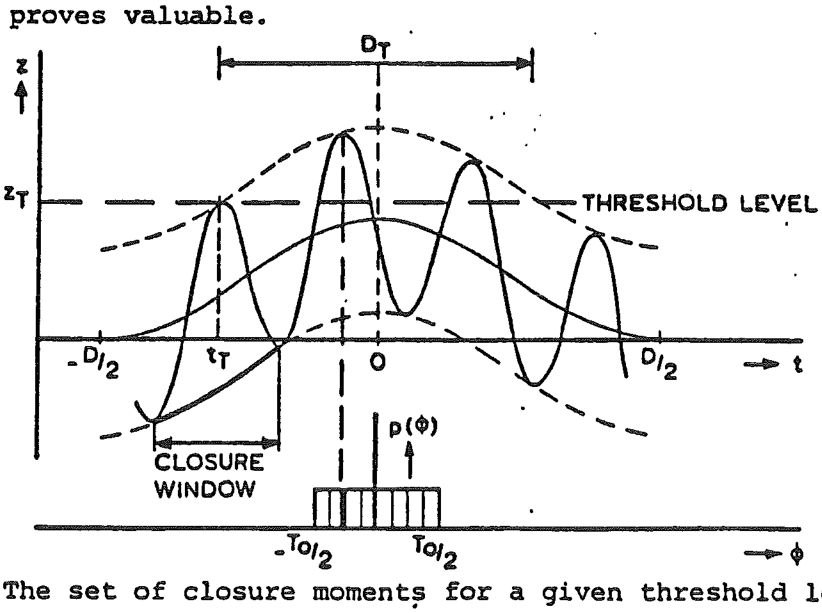


Figure 5. The set of closure moments for a given threshold level.

Studying the model it is clear, that the earliest possible moment at which the threshold level (z_T) can be surpassed by a storm surge, occurs at time $t=t_T$ such that:

$$z_T = \underline{h}_{HW} + \underline{s}_m \cos^2\left(\frac{\pi\ \underline{t}_T}{\underline{D}}\right) \qquad (17)$$

For reasons of symmetry the threshold level (z_T) can be exceeded in the interval $-t_T < t < t_T$ only. This interval has the duration of $D_T=2\ t_T$.
The earliest possible closure of the barrier occurs when the high water at t_T just exceeds the threshold level z_T. The barrier is then shut at the preceding low water:

$$t_{close} = t_T - \frac{T_o}{2}$$

The latest closure occurs when the high water at t_T just not reaches z_T. Now the barrier will be closed at the next low water:

$$t_{close} = t_T + \frac{T_o}{2}$$

So for the given closing strategy the closure takes place in the interval:

$$t_T - \frac{T_o}{2} < t_{close} < t_T + \frac{T_o}{2} \qquad (18)$$

As this paragraph aims at finding the two dimensional probability function of the basin level and the maximum storm surge level, a relation has to be established between these two parameters.

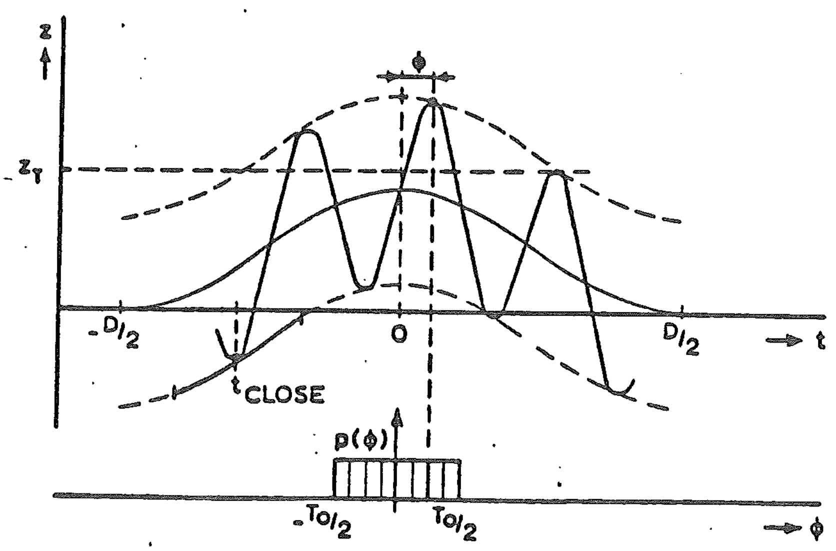


Figure 6. The relation between the maximum storm surge level and the low water level at closing.

For given values of $\underline{\phi}$, $\underline{h}_{HW}$, $\underline{s}_m$ and $\underline{D}$ the maximum storm surge level is calculated by eq.11. The closing moment for this particular storm surge (see fig.6) can be found by straightforward mathematics, which will not be explicated here.

The low water level at which the closing operation starts is

$$z_{LW}(\underline{t}_{close}, \underline{h}_{LW}, \underline{D}, \underline{s}_m) = \underline{h}_{LW} + \underline{s}_m \cos^2\{\frac{\pi\, t_{close}}{\underline{D}}\} \qquad (19)$$

Using the relations (7), (11) and (19), the two dimensional probability density function of maximum storm surge level and low water level can now be evaluated numerically by

$$p(z_m, z_{LW})\, dz_m \,.\, dz_{LW} = \iiint p(\Phi).p(h_{HW}).p(s).p(D) \,.\, J \;\; d\Phi \,.\, dh_{HW} \,.\, ds \,.\, dD \qquad (20)$$

Where J is the Jacobian of the transformation.
The result is given in fig. 7.

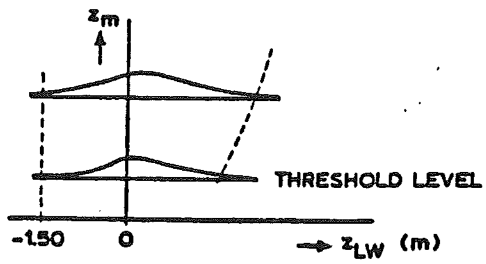


Figure 7. The two dimensional probability density function of maximum storm surge level and low water level at closing.

2.4. Empirical evidence.

The integration of the derived two dimensional probability density function of the maximum storm surge level and the low water level with respect to the maximum storm surge level above the threshold level z_T gives the set of low waters at which the barrier will be closed.
The probability density function is given by

$$p(z_{LW}) = \int_{z_T}^{\infty} p(z_m, z_{LW})\, dz_m \qquad (21)$$

The probability density function of z_{LW} at closing can also be found by applying the decision rule as mentioned above on historical data of the period 1957-1976 (17 storms; $z_m \geq$ N.A.P. + 2.75 m; z_T = N.A.P. + 2.75 m). The result of both methods is given in figure (8). The close resemblance of the probability density functions supports the accuracy of the developed model.

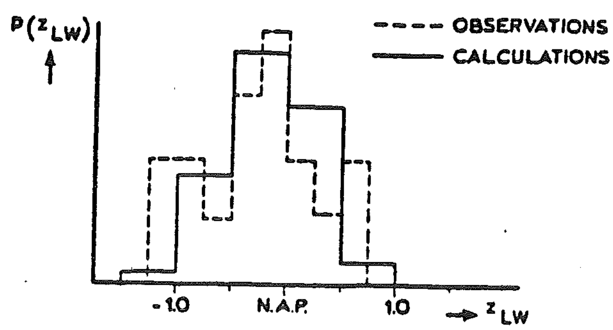


Figure 8. The probability density function of z_{LW} from observation and model for z_T = 2.75 m above N.A.P.

2.5. The transformation of the low water levels into basin levels.

In the preceding section the two dimensional probability density function of maximum storm surge level and low water at sea has been determined. However, for the load calculations the basin level at the inward side of the barrier is important. The two dimensional probability density function of maximum storm surge level and basin level can be obtained by transforming the results of eq.20. The transformation has to take into account five effects that influence the basin level.

1. Reduction of the tidal amplitude in the Oosterschelde due to the resistance of the barrier in opened position.
2. The basin oscillations induced by the sudden closing of the barrier.
3. Wind set down on the Oosterschelde caused by the North Westerly storm.
4. Leakage through the barrier and the sill.
5. Wave overtopping of the barrier during the storm surge.

The first three effects influencing the basin level have been incorporated in the model as constants.

The slow filling of the basin by leakage through the barrier and the sill is evaluated for every storm taking into account the time path of the storm surge level starting at the moment of closing until the peak level is reached and the rising basin level.

The wave overtopping is calculated as a function of the storm surge level and the wave height using a simple model.

The result is a realistic approach of the joint probability of occurrence of maximum storm surge level and coinciding basin levels. However, for the load calculation the last two effects, leakage and wave overtopping, have been discarded for safety reasons, because they raise the basin level and reduce the static load.

3. THE SURGE LEVELS AND WAVE ENERGY.

3.1. Introduction.

In this chapter the second part of the three dimensional probability density function of hydraulic boundary conditions will be developed, viz. the two dimensional probability density function of maximum storm surge level and wave energy. Due to the complexity of the bar and through pattern in the mouth of the Oosterschelde and the very restricted available research time it was only possible to use simple models.

First a hypothesis will be formulated on the general relations between wind velocities, the storm surge level and the wave energy on the North Sea and the Oosterschelde. The hypothesis also gives a clue to the typical form of the wave spectrum on the Oosterschelde.
Next the part of the hypothesis that relates the wave spectrum near the barrier to the local windspeed, the storm surge level and the wave spectrum on the North Sea is put in a mathematical form.
The mathematical model is tested in the hindcast of several storm surges.

Finally the model is expanded with a section, that describes the processes on the North Sea.
The part that deals with the storm surge level as a result of wind set up and astronomical tide is taken from the preceding chapter. A part is added, which relates the wave energy on the North Sea and the local wind speed at the Oosterschelde to the windfield of the storm.
Now concentrating on the maximum storm surge level, the expanded model is tested on historical data.
Being in good agreement, the last step is made and the two dimensional probability density function of maximum storm surge level and wave energy is

evaluated.

3.2. Foundations of the model.

The projected barrier is situated in the mouth of the Oosterschelde estuary, separated from open sea by a complex of shoals (see fig.9).

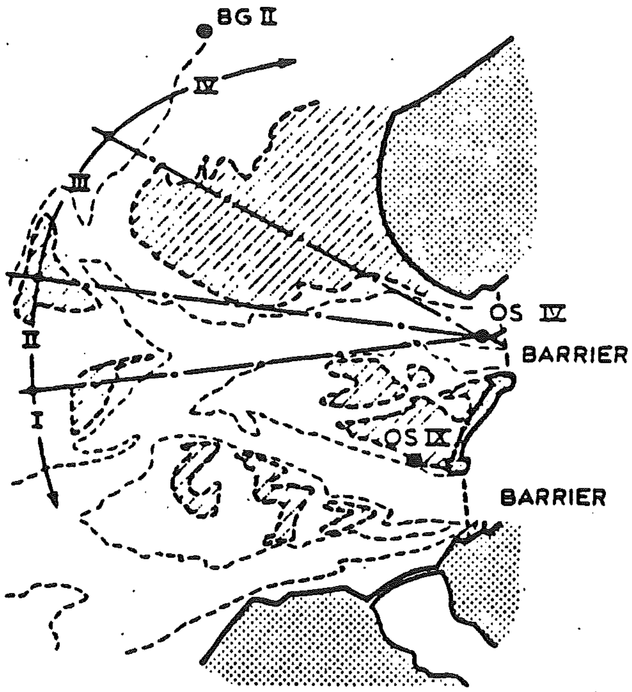


Figure 9. Sketch of the mouth of the Oosterschelde and the situation of the wave stations BG II, OS IV and OS IX.

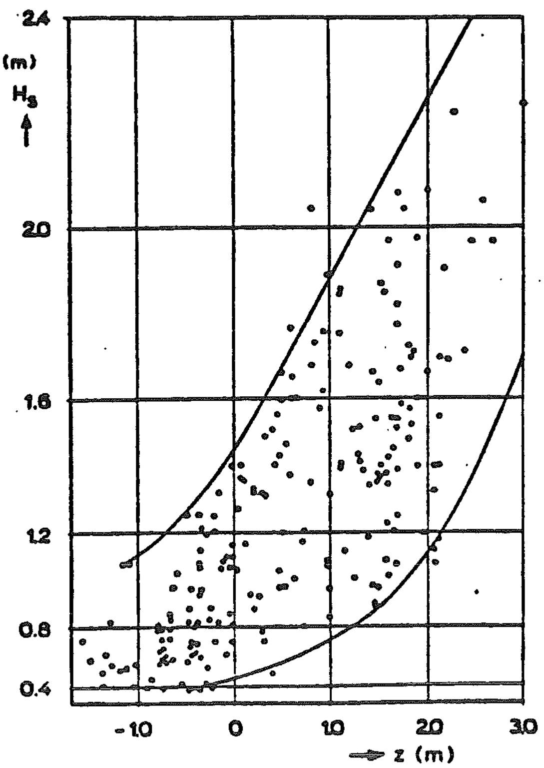


Figure 10. The relation between the storm surge level and the significant wave height (H_s) at station OS IV.

The idea arises, that wave height near the barrier site during storm surges will be governed by the phenomenon of wave breaking over the shoals. In this case the observed wave height should be a function of the waterdepth above the shoals. However, if the significant wave heights observed during storm surges are plotted against the water level the correlation is not very good (see fig. 10).

Also the local windspeed cannot explain the significant wave height near the barrier site (see fig.11).

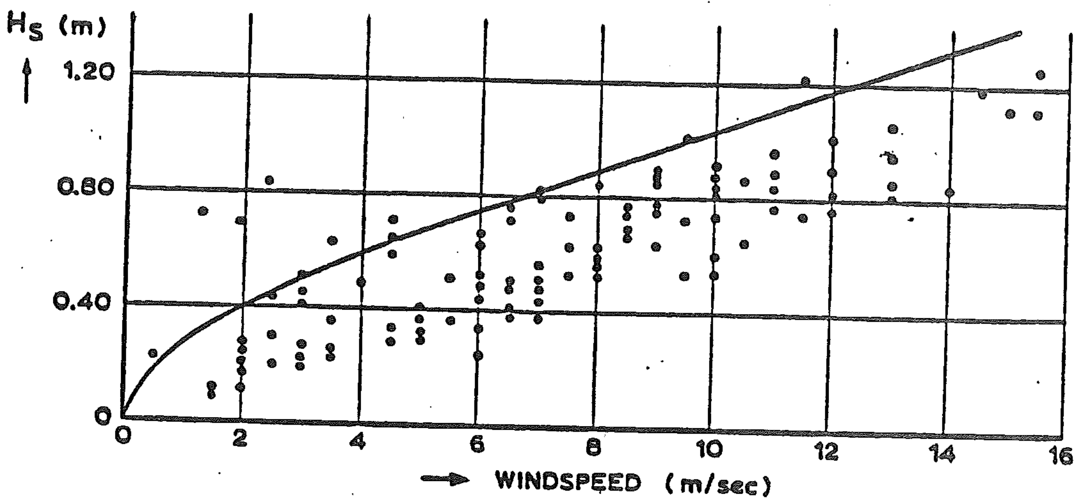


Figure 11. The relation between local windspeed and significant wave height H_s at the location OS IV.

Analyses of wave energy spectra at stations OS IV and OS IX showed, that these were generally double-peaked during storm surges.
Taken together, the analyses referred to above suggested the assumption, that the wave energy near the barrier originates from two sources:

1. Wave energy from the wave field in open sea (low frequency) penetrates, after breaking on the shoals, in the mouth of the Oosterschelde.
1. Local windfields generate wave energy (high frequency) above the shoals.

A schematic diagram showing this idea has already been given in fig. 1.

A central role is played by the windfields above the North Sea. The wind set up and the wave growth on deep water are both effects of the windfields of the cyclone. Further there is a loose correlation between the general intensity of the cyclone and the force of the local windfield above the Oosterschelde.
The model indicates, that the wave height on the Oosterschelde and the storm surge level should be correlated, as the processes of wind set up and wave growth have roughly the same time lag and the waves have to pass the filter "shoals" that is opened by the water level. The only factor that disturbes the pure correlation seems to be the local windfield.
To develop and verify these ideas a mathematical model has been formulated that calculates from the input data (wavespectrum at sea, the water level in the estuary and the local windspeed) the wavespectrum near the barrier site. The results of these calculation have been checked against measurements of recent storms.

3.3. The mathematical wave model of the Oosterschelde.

The above mentioned ideas have been translated into mathematical formulae. For the wind set up the model developed by Weenink (1958) as shown in ch.2 has been used and for the wave growth the model of Sanders (1976)was employed.

However, for the parts of the model that directly govern the wave height in the estuary, only theories are available, which describe the various sub-processes, such as shown in fig.12.

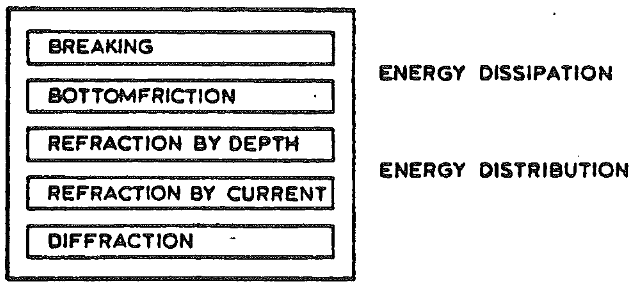


Fig.12. Building blocks of the filter "shoals".

All these processes together form the filter properties of the "shoals", but an overall description is not known. Also the process of wave generation by local windfields in the presence of broken waves is unclear. After a study of the map of the shoals it was decided to divide the filter in 4 sectors with different properties (see fig.9). Every sector is simplified to a schematized bottom profiel, that shows only significant changes in depth (see fig.13).

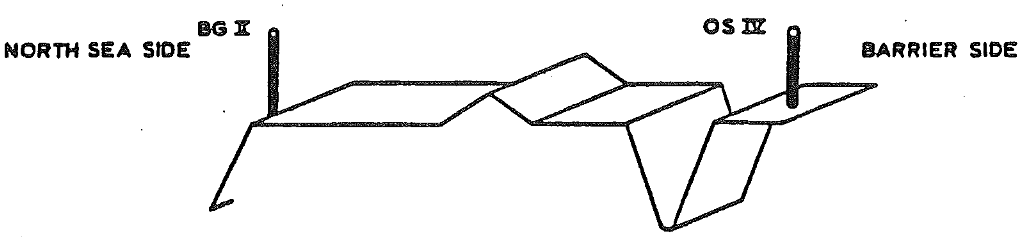


Fig.13. The schematized bottom profile of sector IV (see fig.9).

It is first assumed that the wave energy from the North Sea propagates via the shoals to the barrier without a change of direction. The sector that contains the propagation direction is chosen for the calculation of the energy-loss of the waves.
The irregular wave field at sea will be represented by a regular sine wave with an amplitude and period equal to:

$$a = \tfrac{1}{2} H_{s_{sea}} \qquad (22)$$

$$T = T_{z_{sea}} \qquad (23)$$

The propagation of this wave through water of changing depth is described by the well known energy balance equation. By including energy dissipation by bottom friction the equation can be written as:

$$\frac{\partial P}{\partial S} + \varepsilon = 0, \qquad (24)$$

where P is the energy flux per unit length:

$$P = E\,n\,c = \tfrac{1}{2}\ \rho g a^2 nc \tag{25}$$

in which

$$nc = \tfrac{1}{2}\ (1 + \frac{2\ kd}{\sinh\ 2kd})\ \frac{\sigma}{k} \tag{26}$$

$$\sigma = (\ gk\ \tanh\ kd)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

For the energy loss in the turbulent boundary layer at the bottom Bretschneider and Reid (1954) proposed

$$\varepsilon = \frac{4.10^{-2}}{3\ \pi}\ \rho\ (\frac{\sigma a}{\sin\ kd})^3\ . \tag{28}$$

Besides by bottom friction, energy loss is also caused by breaking, when the maximum steepness is exceeded. For periodic waves of constant form the criterion of Miche is valid

$$a_{max} = \frac{\beta}{k}\ \tanh\ kd \tag{29}$$

where

$$\beta = 0.14\ \pi\ \text{(theory)}$$

However if an irregular wave field is schematized to a regular wave as described above, we observed that the coefficient β can be better approximated by 0.093 π. (v.Marle,1979).

If at any point the calculated wave amplitude exceeds this breakercriterion, it is assumed to be reduced to the maximum value given by (29)

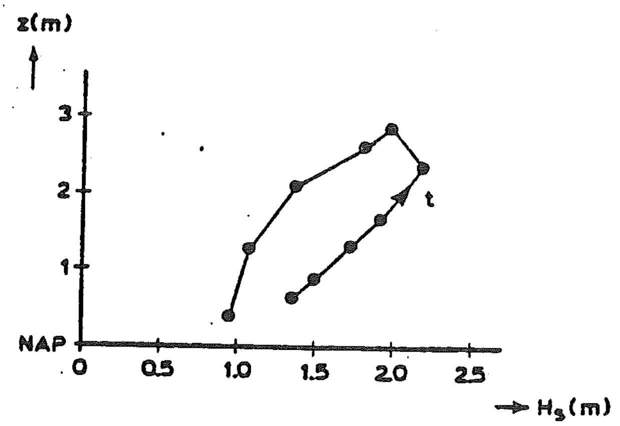


Figure 14. The significant wave height near the barrier as a function of the storm surge level and time for the April 1973 storm.

Observations show however that the time history of H_s vs. z for any surge shows a hysteresis effect. A typical example during a storm situation has been given in fig. 14. A possible explanation would be the influence of the tidal current. Using the linear theory Battjes (1977) showed that the refraction of the waves by the tidal current gives an effect which is of the same magnitude. In this paper the complex formalism of refraction by current is modelled by a simple linear relation between the breaker height and the velocity of the current v in the main gully.

$$a \leqslant a_{max}\ (1 + 0.15\ V) \qquad \boxed{a} = m,\ \boxed{v} = ms^{-1} \tag{31}$$

So far the influence of refraction by depth and diffraction on the energy propagation is neglected. Refraction-diffraction calculations were carried out separately for different water levels and different wave directions.The results of these calculations were incorporated in the simple model in the form of coefficients, partly depending on the water level.

SECTOR	REFRACTION COEFFICIENT
I	0.75 + 0.10 z
II	0.50 + 0.16 z
III	0.90
IV	0.75

N.B. The coefficients maximum value is 1.0.

Now it is possible to calculate for a sector the amount of wave energy,which penetrates from the North Sea via the shoals in the Oosterschelde. As noted before, it appeared from measurements that the wave spectra near the barrier in general show two peaks. Within statistical accuracy the low frequency peak of the Oosterschelde wave spectra is always at the peak frequency of the North Sea wave spectrum.($f_p \simeq 0.1$ Hz). This fact combined with a fit through spectral data led to the following parametrization of the spectral form for the energy penetrating from the North Sea (see fig.15).

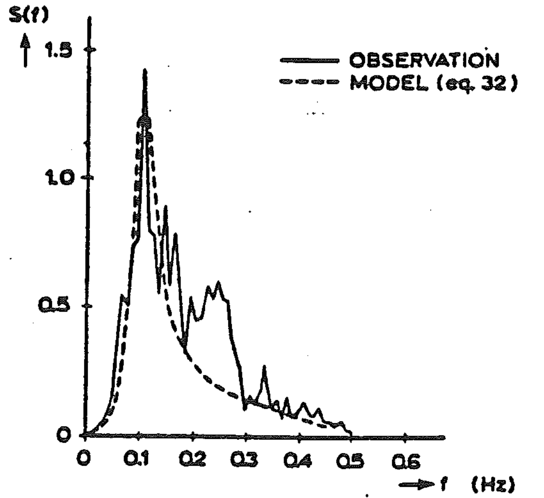


Figure 15. The spectral form for the energy penetrating from the North Sea.

$$S(f) = \gamma \cdot f_p^{-6.5} \cdot f^4 \qquad \text{for } f < f_p \tag{32}$$

$$S(f) = \gamma \cdot f^{-2.5} \qquad \text{for } f \geq f_p$$

By equating the calculated wave energy and the spectral area for given f_p, the coefficient γ is solved.
The second peak in the wave spectra is strongly correlated with the local wind speed and not due to the non-linear breaking effect. In the calculations so far attention was given only to the energy loss of the waves during their propagation over the shoals. Apparently the energy addition by local wind-fields must be taken into account.
For simplicity it is assumed that the wave growth process starts with the spectrum calculated above, and that it takes place from the windward edge of the shoals to the barrier site, over a fetch written as F_o. Further the

JONSWAP (1973) growth-curves will be applied to add the local wave generation to the calculated spectrum. From the calculated spectrum the energy density for a frequency f^* is determined. Now a fictitious fetch, that is the fetch that should be necessary to generate an energy density $S(f^*)$ at the prevailing windspeed, is calculated from the JONSWAP growth-curve. The total non-dimensional fetch ($\tilde{F}$) is found by adding the fetch available after breaking $\tilde{F}_o$ to the fictitious fetch (see fig.16).

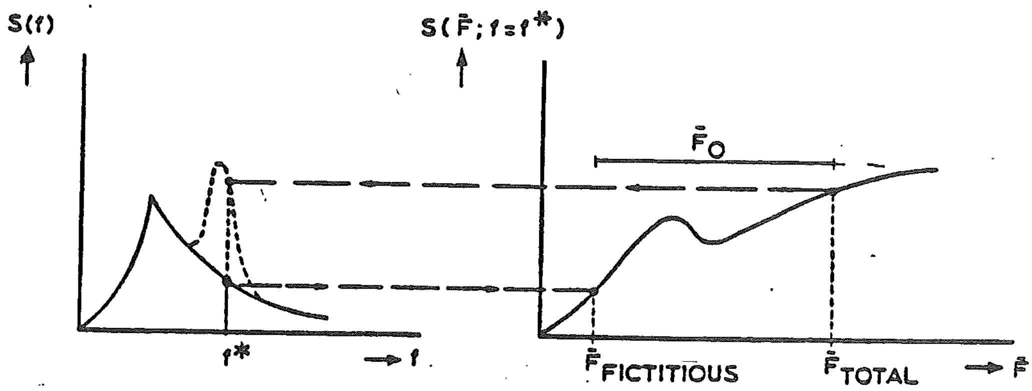


Figure 16. Calculation of wave spectra by adding local wave generation to waves coming from the North Sea and propagating over the shoals. The figure on the right hand side gives the JONSWAP growth-curve for a given frequency f^* as function of the non-dimensional fetch.

Substituting this total fetch in the JONSWAP growth-curve for a given frequency f^* the total energy density (being the result of penetration and local generation) is evaluated. By repeating this procedure for all frequencies, the high frequency peak of the wave spectrum that is generated by the local windfields, is found.

3.4. Emperical evidence.

The simple model described in the preceding paragraph is tested in a hindcast of several recent storms. During these storms hourly observations have been made of windspeed, water level and wave spectrum in the Oosterschelde. Simultaneously the wave spectra at sea (5 miles from the coast) have been measured. Using these data as input, the model predicts the wave spectra in the Oosterschelde reasonably well (see figs.17,18). The significant wave height is predicted with an accuracy of 10%.

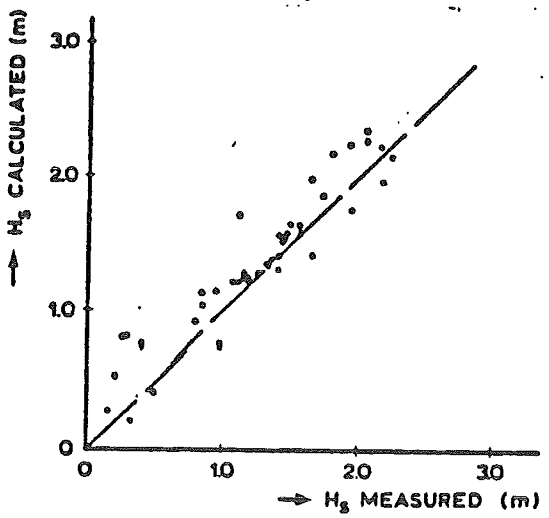


Figure 17. Comparison of observed and hindcasted significant wave heights at the barrier site (OS IV, OS IX).

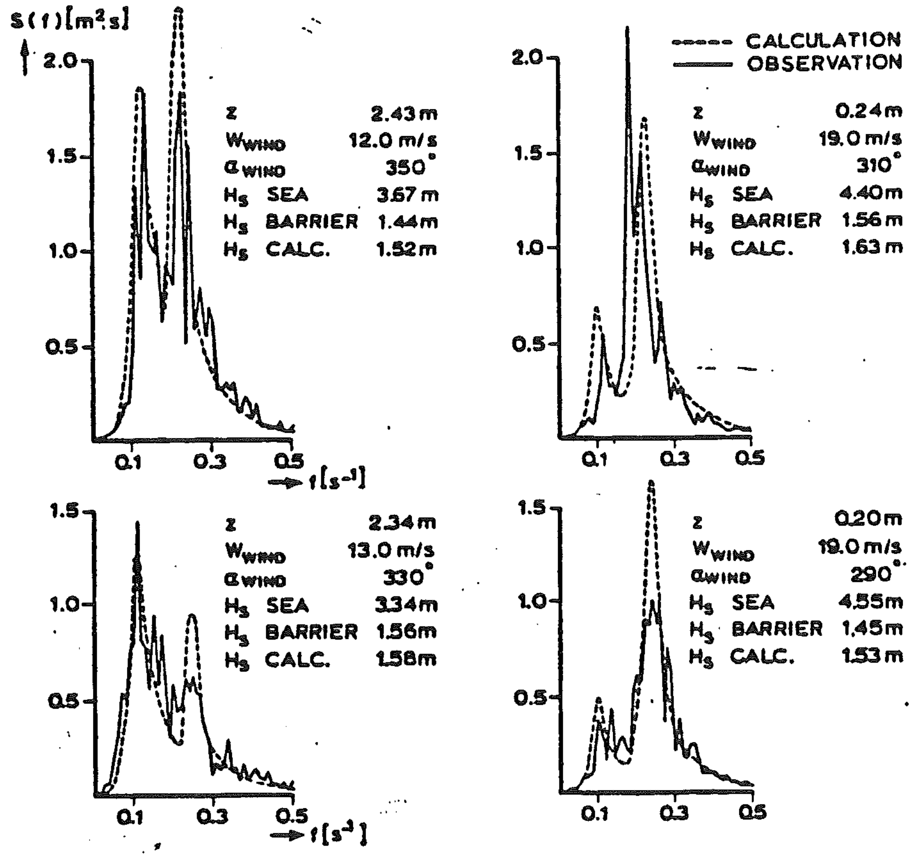


Figure 18. Comparison of observed and calculated wave spectra at the barrier site.

3.5. Wave direction.

The wave load on the barrier depends on the direction of the waves. At the design stage no technique was available to obtain the directional wave spectra. A number of methods have been used to get information about the main wave direction.
Calling to mind that the wave energy near the barrier originates from two sources, one can distinguish two main wave directions:

a) local windfields generate wave energy (high frequency) above the shoals. The main direction of these waves is the same as the local wind direction.
b) Wave energy (low frequency) coming from open sea and propagating over the shoals. Here aspects as refraction by depth and current govern the wave directions.

Various visual observations performed during storm situations confirm this hypothesis. However, as the low frequency wave energy is mainly responsible for the wave load on the barrier, all wave energy is reckoned to have the direction of the low frequency part.

Four different methods have been used to get an idea of the main direction and the short crestedness of the low frequency wave energy. With an helicopter flying at varying altitudes visual observations have been made. Further the main direction of the long period wave energy was found by heading a survey vessel to the sea. In addition stereo- and mono-photography have been performed by plane. The photographs were analysed by eye. All these methods were compared in different storms. The results are in good agreement with each other. With these methods the main wave direction is estimated with an accuracy of about 10 degrees.

By visual observation it also appeared that the length of the wave crests near the barrier was about the same as at the open sea. Therefore the same directional distribution of the wave energy was assumed near the barrier. At sea usually a $\cos^2 \theta$ distribution is assumed, where θ is the angle with the main wave direction.

As only a small amount of storm data were available an extrapolation of the main wave direction to extreme circumstances was impossible. Therefore a mathematical model (Radder, 1979) was used describing refraction and diffraction. It is based on the parabolic wave equation, derived from the Helholz equation using a parabolic approximation. This method describes the propagation of regular long crested waves. Although linear wave theory is being used two non-linear effects have been built in:

a) a non-linear dispersion relation (see eq.27)
b) the Miche breaking condition (see eq.29).

All other effects are neglected. The results of the model have been compared with the aerial photographs and visual observations in the Oosterschelde. Being in good agreement calculations have been performed for extreme circumstances.

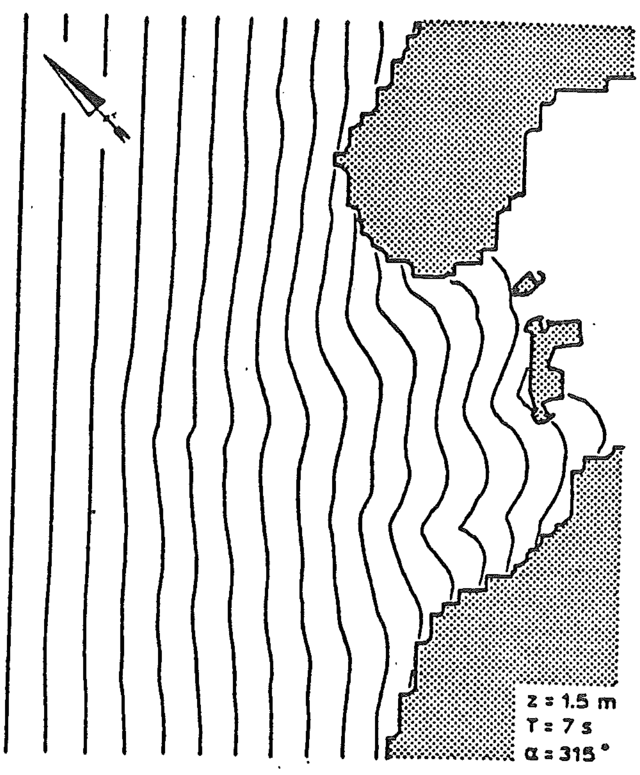


Figure 19. Wave crests for incoming waves from North West with a wave period of 7 seconds calculated with the refraction-diffraction model of Radder.

An example of a calculation has been given in fig.19. It shows the wave crests for incoming waves from North West. The main wave direction is asumed to be perpendicular to the wave crests.

3.6. The processes on the North Sea.

The wave model described in the previous sections requires the wave conditions on the seeward edge of the Oosterschelde delta, the storm surge level and the local windspeed as input.
As already shown in the introduction to this chapter a central role in the hypothetical relationship between these phenomena is played by the windfields of the cyclone. Because reliable statistics of total windfields on the North Sea are difficult to get, a reversed procedure is followed.
Using the models from the first chapter, that relate the maximum storm surge level to the windspeed and the astronomical tide, the two dimensional probability density function of maximum storm surge level and the windspeed uninterruptedly exceeded during 9-hours can be approximated. Taking only North Westerly storm directions into account the following formulation is found.

if $\underline{s}=\underline{s}_m$, $\underline{w}=\underline{w}_9$ $\underline{z}=\underline{z}_m$ and $\underline{h}=\underline{h}_{HW}$,

then using eq.2, eq.8 can by written as:

$$\underline{z} = \underline{h} + 3.7\ 10^{-2}\ \frac{\underline{w}^2}{g} \tag{33}$$

In view of the independence of h and s the following expression for the probability density function of storm surge level and windspeed may be obtained:

$$p(w,z) = p(h,s) \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial w} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial w} & \frac{\partial s}{\partial z} \end{vmatrix} = p(h,s) \left| \frac{\partial s}{\partial w} \right|$$

$$p(w \mid z) = \frac{p(w,z)}{p(z)} = \frac{p(h)\ p(s)}{p(z)} \left| \frac{\partial s}{\partial w} \right| \tag{34}$$

If this result is combined with a theory of wave growth on water of limited depth, the two dimensional probability density function of windspeed and storm surge level is transformed into the two dimensional probability density function of maximum storm surge level and significant wave height at the seaward border of the Oosterschelde.

An exact knowledge of the wave height at the seaward border of the Oosterschelde is of minor interest, as the introduction of the approximate breaker criterion for the shoals of the Oosterschelde shows, that nearly all wave fields generated on the North Sea during North Westerly storms will break on the shoals (see fig.23). Therefore the wave height at sea will not influence the energy penetrating in the Oosterschelde. The maximum storm surge level is the only parameter governing the penetration.

A very important parameter in the wave load calculation is the spectral peak period of the penetrating wave energy. This peak period,being equal to the peak period of the wave spectrum at the seaward border of the Oosterschelde, is restricted by the limited depth of the Southern part of the North Sea. For North Westerly storms, data as well as the wave growth model of Sanders give a saturation peak period of 11.5 s at the seaward border of the Oosterschelde. In the load calculations this peak period has been held constant as a safe estimate (Mulder and Vrijling 1980).
The second source of wave energy near the barrier is related to the local windspeed. To complete the model, the relation between the local windspeed and the windfields at sea characterised by w_9 must be established. Studies of the windspeed during a storm as a function of time (Rijkoort,1960) show a

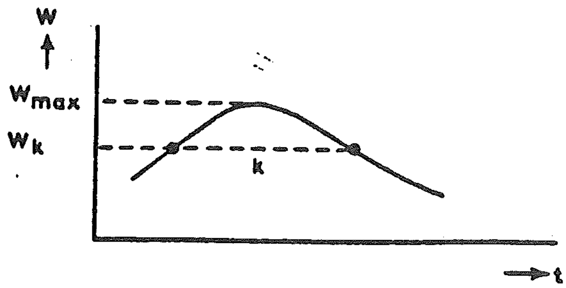


Figure 20. The windspeed during a storm.

result, which can be expressed as:

$$k = 26.8 \left(\frac{w_m}{w_k} - 1\right)^{0.83} \qquad (35)$$

where k = number of hours during which the one hour average windspeed exceeds w_k without interruption (fig.20)

w_m = maximum one hour average windspeed.

According to Weenink (1958) a time lag τ between the maximum one hour average windspeed and the maximum wind set up in the Southern North Sea amounts to 6 hours on the average. Knowing that the time shift Φ between the astronomical tide and the wind set up has a uniform probability density function (eq.10) a conclusion can be drawn concerning the windspeed accompanying the maximum storm surge level (see fig.21). The moment of the maximum storm surge level is within $\pm$ $T_o/2$ of the moment of the maximum wind set up or approximately anywhere from the time of maximum windspeed t=12 hrs to 12 hrs later, since $T_o/2 \approx \tau \approx 6$ hrs.
As the windspeed is an approximately linear, decreasing function of time over this interval, while Φ has a uniform probability density, a uniform

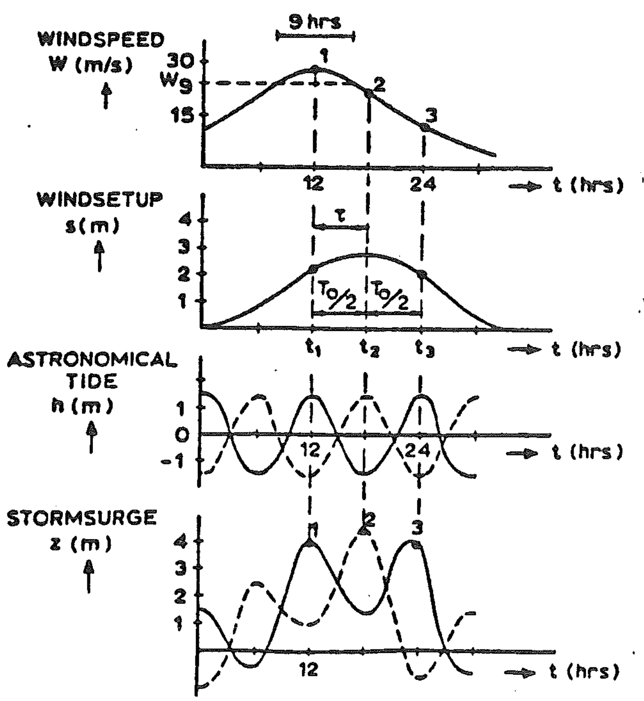


Figure 21. The relation between the maximum storm surge level and the accompanying windspeed.

distribution of windspeeds may be assumed. The maximum and minimum possible windspeeds, for given value of w_9, have to be derived by means of (eq.35), using k= 9 hrs and $k=t_3 - t_1$ = 24 hrs respectively, which gives

$$w_{max} = 1.27\ w_9 \qquad (36)$$

$$w_{min} = 0.68\ w_9$$

so that

$$p\ (w \mid w_9) = 0 \qquad \text{for } w < w_{min} \text{ and } w > w_{max} \qquad (37)$$

$$p\ (w \mid w_9) = \frac{1}{0.59\ w_9} \qquad \text{for } w_{min} \leq w \leq w_{max}$$

Having already evaluated the two dimensional conditional probability density function of w_9 and z_m (see eq.34), the conditional probability density function of the maximum storm surge level and the local windspeed coinciding with maximum storm surge level, given a maximum storm surge level, is calculated by

$$p(w \mid z_m) = \int_0^\infty p(w \mid w_9)\ p(w_9 \mid z)\ dw_9 \qquad (38)$$

The local windspeed w accompanying the maximum storm surge level z_m governs the local wave growth at the Oosterschelde.

3.7. Empirical evidence.

In the preceding paragraph two conditional probability density functions have been established (eqs34 and 38). Moreover, combining eq.(34) with the theory of wave growth on water of limited depth a relation between the maximum storm surge level and the significant wave height has been obtained (fig.22).

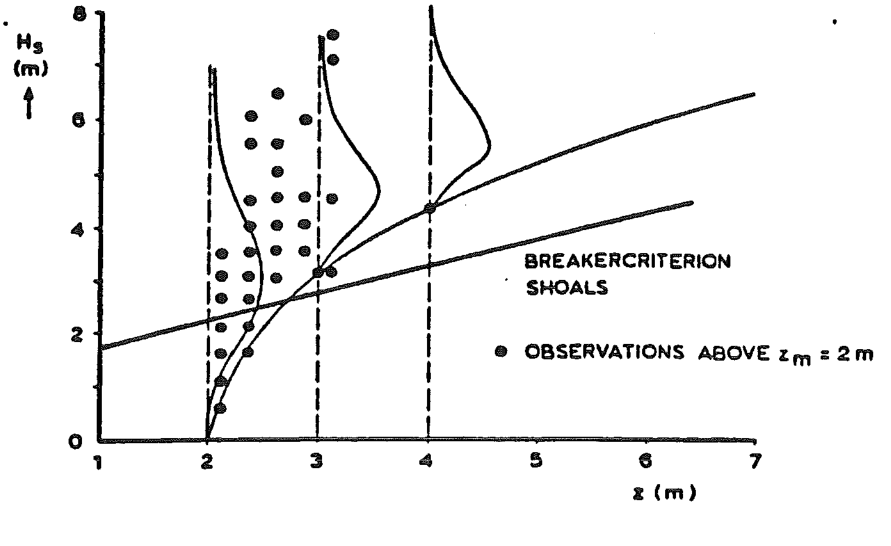


Figure 22. The relation between the maximum storm surge level and the significant wave height on the seaward edge of the shoals. The conditional probability density function of H_s has been given for z = 2m, 3m and 4m.

The historical data are certainly not in contradiction with the theoretical result, but conclusions on the extrapolation cannot be drawn on the basis of this empirical material.
The theoretical relation between the maximum storm surge level and the local windspeed (eq.38) is compared with historical data in fig.23.

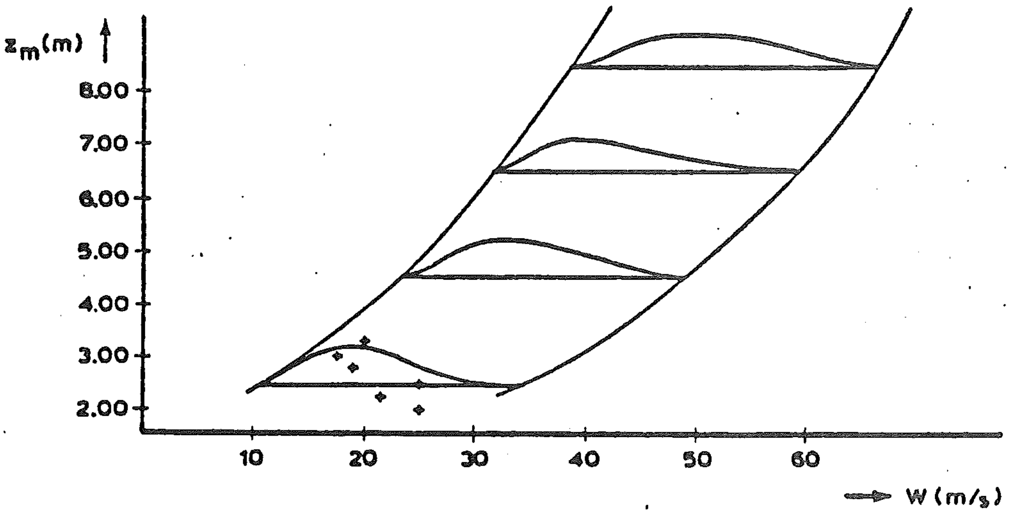


Figure 23. The relation between the maximum storm surge level and the local windspeed.

Here too agreement is seen between theory and empirical material.
The set of data is however far too small to be a reliable base for extrapolation.

3.8. The completed model.

In the preceeding paragraphs of this chapter two mathematical models have been developed and tested.
The first model calculates the wave spectrum near the barrier given the seastate at the North Sea, the storm surge level and the local windspeed.The second model evaluates the joint probability density function of the maximum storm surge level, the seastate at the North Sea and the local windspeed.

As the aim of this paper is the prediction of the future boundary conditions for the barrier, an estimate of the future geometry of the shoals in the mouth of the Oosterschelde (fig.9) has to be incorporated in the first model. If it is further realised that the barrier will be maximally loaded during the maximum storm surge level, because the difference between sea level and basin level and the amount of low frequency wave energy penetrating from the North Sea are then both maximal, the models can be joined by introducing the restriction to maximum storm surge levels.

Thus the three dimensional probability density function generated by the second model under the assumption of North Westerly wind direction is used as input for the first model.
The result is the conditional probability density function of maximum storm surge level and local windspeed (fig.23), where for every combination the wave spectrum near the barrier is known (fig.24).

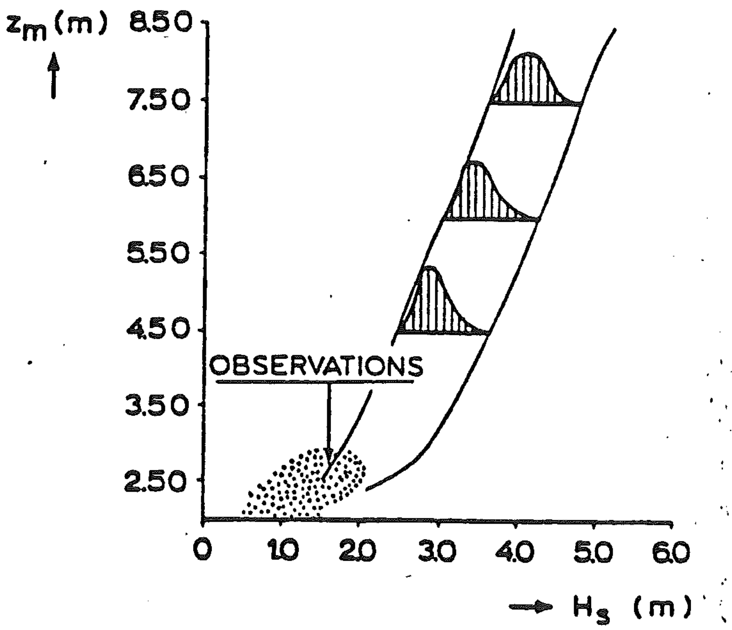


Figure 24. The relation between the storm surge level and the significant wave height. In the figure the conditional probability density function of H_s for a number of storm surge levels has been given.

4. THE THREE DIMENSIONAL PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF MAXIMUM STORM SURGE LEVEL, WAVE ENERGY AND BASIN LEVEL.

The aim of this paper was to find the three dimensional probability density function of maximum storm surge level, wave energy and basin level. The result of the work done in ch.2 is the two dimensional probability function of maximum storm surge level and basin level, written as $p(z_m,b)$. The conditional probability density function of the maximum storm surge level and the local windspeed, where in each point the wave spectrum is known, was evaluated in the third chapter. It is written as $p(w|z_m)$. Now these two functions may be joined to the desired one if the statistical independency of basin level and local windspeed of wave spectrum can be proved.

Starting from the theoretical models it is seen that the basin level shows a very weak correlation with the maximum storm surge level. The local windspeed and the wave spectrum are correlated to the surge level, but there is no obvious reason why any correlation between wave spectra and basin levels should exist. Also, historical data from significant wave heights and low waters show virtually no correlation (r=0.17). Accepting the statistical independency of the basin level and the local windspeed to be a reasonable assumption, the final step can be made, as follows

$$p(z_m,b,w)= p(z_m,b)\ .\ p(w|z_m) \qquad (39)$$

where for each combination of (w,z_m) the wave spectrum at the barrier site can be calculated by the method described in ch.3. This result has been used as input in the probabilistic load determination for the barrier (see Mulder and Vrijling, 1980).

Acknowledgement.

The authors are very grateful to Prof.dr.J.A.Battjes for clarifying and stimulating discussions and also to mr. L.A.Langendoen for translating the models into computer codes.

REFERENCES.

Battjes, J.A., The influence of currents on waves, Internal Report(1977) (in Dutch).

Bretschneider, C.L. and Reid, R.O., 1954, Changes in wave height due to bottomfriction percolation and refraction,US Army Corps of Engineers, BED, Tech. Mem. 45.

Dantzig, D.v., Extrapolation of the frequency curve of the loads of high tide at Hook of Holland by means of selected storms. Delta report,1960.

Hasselman, K. et al.,Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project,Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Reihe A(8^o)(1973) 12.

Marle, J.G.A. van, The breaker criterion for the mouth of the Oosterschelde, Rijkswaterstaat DDWT-79.031 (in Dutch).

Mulder, Th. and Vrijling,J.K., Probabilistic approach of load calculations 1980 Proceedings International Symposium on Hydraulic Aspects of Coastal Structures.

Report of the Delta Committee (1960).

Rijkoort, P.J., Statistical Investigation of North Westerly Storms, Delta report,1960.

Sanders, J.W., 1976, A growth-stage scaling model for the wind-driven sea, Deutschen Hydrographische Zeitschrift, Band 29, Heft 4, p136.

Schalkwijk,W.F., A contribution to the study of storm surgeson the Dutch coast, KNMI, Med. en Verh.B part 1,no.7,1947.

Weenink, M.P.H., 1958, A theory and method of calculation of wind-effects on sea-levels in a partly enclosed sea, with special applicationto the southern coast of the North Sea. K.N.M.I., Med. en Verh. No.73.

LIST OF SYMBOLS.

$h(t)$ = astronomical tide
$s(t)$ = wind set up
$z(t)$ = water level
$b(t)$ = basin level

HW = high water (h_{HW} = astronomical high water)
LW = low water (z_{LW} = low water)
z_m = maximum storm surge level
z_T = threshold water level

w = windspeed
α = wind direction
w_9 = 9 hours uninterruptedly exceeded windspeed

H_s = significant wave height
T = wave period
T_p = peak period
f = wave frequency
f_p = peak frequency (= the frequency at which the maximum variance spectral density occurs)
$S(f)$ = variance spectral density function
k = wave number

d = water depth
v = current velocity

SYMPOSIUM ON HYDRAULIC ASPECTS OF COASTAL STRUCTURES

9.2

PROBABILISTIC LOAD DETERMINATION.

by Th. Mulder, chief engineer, design department
Ballast-Nedam Groep.

J.K. Vrijling, project engineer, Deltadienst,
Rijkswaterstaat.

SUMMARY.

This paper deals with a probabilistic approach of the hydraulic loading conditions of the Oosterschelde storm surge barrier. The joint probability density function of the hydraulic boundary conditions (storm surge level, wave energy and water level at the Oosterschelde-basin) is used as input.
By introducing linear spectral transfer functions between the load and the hydraulic parameters, this density function can be transformed into the two-dimensional probability density function of wave- and static loads, from which the probability distribution of the total hydraulic load can be derived by integration.

The transfer functions needed were determined with the aid of a mathematical model, which has been checked by a series of hydraulic model tests.

By applying a probabilistic load determination as indicated above, the total horizontal load at the storm surge barrier was reduced by approximately 40%, as compared to the rather pessimistic outcome of a deterministic load determination, in which all unfavourable and unlikely events are assumed to coincide. The probabilistic load determination has also been used in a probabilistic approach of the behaviour of the storm surge barrier, in which the structural properties were treated as random variables, in addition to the loads. In this way a risk analysis has been executed to find the failure probabilities of several parts of the barrier, which have to be in balance.

1. INTRODUCTION.

After the storm flood disaster of February 1st. 1953, The Netherlands Delta Committee stipulated that primary sea-retaining structures have to provide full protection against storme surge levels with an excess frequency of 2.5×10^{-4} times per year. In the case of conventional defences, such as dikes, an extreme waterlevel may be used as a design criterion, because overtopping is considered to be the most important threat to dikes. In the preliminary design stage of the Oosterschelde storm surge barrier a design storm surge level was chosen in accordance with the report of the Delta Committee. This surge level was combined with a maximum extrapolated single wave and a low estimate of the inside water level to determine the hydraulic load (deterministic approach).

In fact this approach is unsuitable for a storm surge barrier. The structure consists of concrete piers, steel gates, a sill, a bed protection and a foundation. These components have to be designed on the basis of load combinations, which will give the most dangerous threat to the structural stability. These load combinations originate from waves and a difference in water level across the barrier. They are therefore only partially depending on the seawater level. Thus, in the case of the storm surge barrier, the hydraulic load has to be chosen as the "potential threat". Since the design method used is a quasi-probabilistic one, this means that a design hydraulic load was chosen with a probability of exceedance of 2.5×10^{-4} per year.

In order to be able to determine this design load for the various structural parts of the barrier a method for a probabilistic load determination has been developed.

2. HYDRAULIC BOUNDARY CONDITIONS.

The basic parameters in the determination of the hydraulic load at the storm surge barrier are:

- maximum storm surge level at sea z_m
- windspeed w
- basin level at the Oosterschelde b

In the paper "Hydraulic Boundary Conditions" the joint probability density function of these parameters $p_{\underline{z}_m,b,w}(z_m,w,b)$ is discussed.
This joint probability density function (p.d.f.) has been used as input for the calculation of the probability distribution of the hydraulic load on the storm surge barrier.

3. TRANSFER FUNCTIONS.

To transfer the hydraulic parameters into the hydraulic loads the static loads and the wave loads have to be written as functions of the parameters:

Static load $S = G\ (z_m,\ b,\ \text{geometry})$ (1)

Wave load spectrum $S_W = H\ (z_m,\ w,\ \text{geometry})$ (2)

In the case of the static load this function can be easily determined from the hydrostatic pressure distribution on both sides of the barrier and a potential flow pattern in the sill around the base of the pier.

The transfer from waves to wave loads has been done with the aid of a spectral method. To allow the application of such a method the transition from waves to wave loads has to be a linear system. In the case of the storm surge barrier this criterion was fulfilled, as has been proved by model tests. This will be shown in the paragraph 3.2 - 3.4.

For the storm surge barrier the transfer functions have been determined with the aid of a mathematical model, as will be discussed in the next paragraph.

3.1 Mathematical model.

In the mathematical model an incoming wave field with elevation η_i, is considered as a stochastic process in (x,y,t). The two-dimensional energy density spectrum of η_i, is $S_{\eta i}\ (f,\theta)$.
This spectrum is defined as follows:

$$S_{\eta i}\ (f) = S_{\eta i}\ (f,\theta) d\theta \quad ..(3) \qquad D(\theta;f) = \frac{S_{\eta i}\ (f,\theta)}{S_{\eta i}\ (f)} \quad ..(4)$$

in which $D(\theta;f)$ is a directional spectrum, giving the relative energy density for the directions in case of a fixed f. For the storm surge barrier the following function has been assumed (see [1])

$$D(\theta;f) = 2\cos^2(\theta-\bar{\theta}) \quad \text{for } |\theta-\bar{\theta}|<\frac{\pi}{2} \text{ and } o<f<\infty \qquad (5)$$

in which θ= angle between the mean direction of wave propagation and the axis perpendicular to the barrier.

The energy density spectrum $S_W(f)$ of the wave load W(t) at the structure can be determined as (see [1])

$$S_W(f) = \int_{-\pi}^{\pi} O^2(f)\, r^2(f,\theta)\, S_{\eta i}(f,\theta)d\theta \qquad (6)$$

in which O (f) = the wave load (o-top) per unit of incoming wave amplitude, as a function of the frequency f. The waves are assumed to be long crested and perpendicular to the structure.

r (f,θ) = the ratio of the total wave load on a structure of length 2 l for oblique wave attack (approach angle θ)to the total wave load for a perpendicular approach of the waves.

$$r(f,\theta) = \frac{\sin(kl\sin\theta)}{kl\sin\theta} \qquad (7)$$

k = wave number

Assuming a relatively narrow wave load spectrum $S_W(f)$, and a Rayleigh distribution of the individual wave load peaks, the traditional parameters W_s (significant wave load) and T_W (mean wave load period) can be obtained by the following relations.

$$W_s = 2\sqrt{m_o} \quad ...(8) \qquad T_W = \sqrt{\frac{mo}{m2}} \quad ...(9) \qquad m_n = \int_0^\infty f^n S_W(f)df \quad ...(10)$$

Function O(f) is determined numerically by calculating per wave frequency (wave period) the wave load per unit of wave amplitude a_i $(= \frac{H_i}{2})$.

The basis of this calculation is the following wave pressure distribution according to a linear wave theory, for partially reflected waves against a vertical wall:

- between the upper side of the sill and the sea water level (o<z<d)

$$p(x,z,t) = \rho g a \frac{\cosh kz}{\cosh kd} \sqrt{1+\alpha^2+2\alpha\cos kx} \quad \sin(\omega t+\phi) \qquad ...(11)$$

with the boundary pressures

$p_d(x,t)$ for z=d
$p_o(x,t)$ for z=o

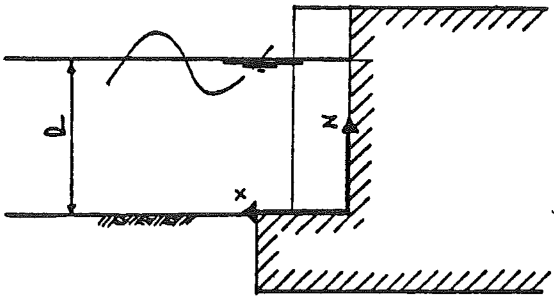
- Above the sea water level (z > d)

$$p(x,z,t) = p_d(x,t) - \rho g(z-d) \qquad ...(12)$$

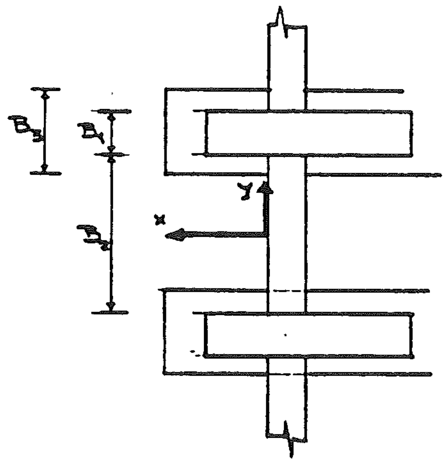
- In the sill (z < o)

$$p(x,z,t) = p_o(x,t)\exp(-kz) \qquad ...(13)$$

in which k = wave number
α = reflection coefficient
ω = angular frequency
t = time
ϕ = phase shift = $\mathrm{arctg}\left\{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \mathrm{tg}\, kx\right\}$



Cross section.



Top view.

By integration of the pressure distribution over the height of the structure the wave load at a vertical plane j with a width B_j can be determined.

$$W_j\ (t) = \int_{\text{height}} p(x_j, z, t) \cdot B_j \ dz \qquad \ldots(14)$$

By doing this for the various vertical planes of the barrier, like the gate, the front of the pier wall and the front of the pier footing the total load due to a regular wave at the barrier can be found.

$$W(t) = \sum_{j=1}^{n} W_j\ (t) \qquad \ldots(15)$$

The maximum of this wave load function W(t) divided by the incoming wave amplitude gives us the transfer value for the wave period considered.

3.2. Description of model facilities.

The hydraulic model tests have been executed in two 100 m long wind-wave flumes of the Delft Hydraulic Laboratory.

Investigations with perpendicular wave attack were executed in the 2 m wide wind wave flume, and investigations with oblique wave attack in the 8 m wide wind wave flume (see figure 1 and 2). The irregular waves applied in the investigations were generated by programmable wave boards, driven by hydraulic actuators and commanded by analogue signals.

Wave conditions characterized by the spectral shape and wave height distribution, may be generated by a proper adjustment of the input filter function and amplification. The wave form is further adjusted to the natural shape by wind.

The wave pattern has been measured by resistance type wave height meters. The tests with perpendicular wave attack were carried out using a model scale 1 : 60, with dummy sections at both sides of the measuring sections, to close the flume entirely.

The total forces are measured by strain gauges attached on a dynamometer frame. The model section is hanging free from dummy sections and the bottom.

3.3. Series of tests.

In the first place, tests with regular waves have been executed in the 2 m wide wind wave flume. A great number of H,T-combinations have been tested varying the following parameters:

- sea water level
- basin level Oosterschelde
- waterdepth

In this way it was possible to check the linearity of the transfer from waves into waveloads and to determine the reflection coefficient as a function of the above mentioned parameters (incl. the wave period). The reflection coefficients have been determined from wave height measurements in a "standing" wave in front of the structure. From a linear wave theory the reflection coefficient will be

$$\alpha = \frac{H_{max} - H_{min}}{H_{max} + H_{min}} \qquad \ldots(16)$$

in which H_{max} and H_{min} are respectively the wave height in a anti node and in a node of the "standing" wave. Secondly, tests with irregular waves have been performed to check the transfer functions determined by the mathematical model. The same parameters have been varied as in the regular tests.

The influence of an oblique wave attack has been tested in the 8 m wide wind wave flume approach angles of 30^o and 45^o.

The incoming wave spectrum $S_{\eta i}$ (f), needed for the determination of a transfer function, has been derived from the measured wave spectrum $S_{\eta m}$ (f) using the following relation

$$S_{\eta i}(f) = \frac{1}{\{1 + \alpha(f)\}^2} \cdot S_{\eta m}(f) \qquad \ldots(17)$$

in which $\alpha(f)$ is the reflectioncoefficient as a function of the wave frequency f determined from the tests with regular waves. (See [4]).

3.4. Results.

The results of the hydraulic model tests were given as:

- wave forces per unit of wave amplitude for several wave frequencies and amplitudes (check on linearity).
- reflection coefficients as function of the wave frequency
- transfer functions
- cumulative frequency distributions of wave load peaks

Some typical results are shown respectively in figures 3, 4, 5 and 6.

In general it could be concluded, that

- the transfer value "waveload per unit of wave height" is almost independent of the wave height: in other words, the wave load is almost linearly dependent on the wave height.
- The measured and calculated transfer functions are in good agreement, except that:
    - the transfer functions derived from measurements in the shallower locations show oscillations, in contrast to the calculated transfer functions. No satisfactory explanation has been found for this phenomenon. (See fig. 5).
    - In approximately 10% of the cases the measured transfer functions exceed the calculated ones. So the mathematical model is not giving the mean of the test results, but a rather conservative result.
    - In the case of high sea water levels, the results of the model tests for frequencies greater than 0.11 Hz give significantly greater transfer values than one would expect from the calculation (no explanation has been found for this difference).

- The distribution of the wave load peaks follows the Rayleigh distribution quite well. (See fig. 6)
- The reflection coefficient is a function of the sea water level, the level of the seabottom and the wave frequency. In general the reflection coefficient decreases for

  - increasing wave frequency
  - increasing sea water level
  - increasing waterdepth
    (in case of frequencies lower than 0.15 Hz)

Summarizing it can be concluded, that the modeltests support the mathematical model. Consequently this model has been used in the probabilistic load determination.

4. PROBABILISTIC LOAD DETERMINATION.

4.1. General.

Starting from the joint p.d.f. of the boundary conditions the joint p.d.f. of the static load S and the significant wave load W_s - being the characteristic value of a wave load spectrum - can be found.

Secondly, the joint p.d.f. of the static load and the wave load peaks can be determined using the distribution of the individual wave load peaks, given a wave load spectrum.

Finally, the probability of exceedance of the total load can be determined.

These three steps will be described in detail in paragraph 4.2. In view of a clear and brief notation this is done analytically. However, due to the absence of an analytical description of the wave spectra in case of the Oosterschelde storm surge barrier the determination of the load distribution has been done numerically. An impression of such a numerical transfer is given in paragraph 4.3.

4.2. The description of the method (see [6]).

Since the basin level was found to be virtually statistically independent of the wind speed, the joint probability density function of the boundary conditions can be written as:

$$p_{\underline{z_m},\underline{b},w}(z_m,b,w) = p_{\underline{b}}(b|z_m) * p_{\underline{w}}(w|z_m) * p_{\underline{z_m}}(z_m) \qquad ...(18)$$

Using the equations (1) and (2) the conditional p.d.f.'s of the static load S and the significant wave load W_s can be determined from the conditional p.d.f.'s $p_{\underline{b}}(b|z_m)$ and $p_{\underline{w}}(w|z_m)$:

$$p_w(w|z_m) = p_{\underline{Ws}}(W_s|z_m) * \frac{\delta Ws}{\delta w} \qquad ...(19)$$

$$p_{\underline{b}}(b|z_m) = p_{\underline{S}}(S|z_m) * \frac{\delta S}{\delta b} \qquad ...(20)$$

Using (19) and (20), equation (18) can be transfered in

$$p_{\underline{z_m},b,w}(z_m,b,w) = p_{\underline{Ws}}(W_s|z_m) * p_{\underline{S}}(S|z_m) * p_{z_m}(z_m) * \frac{\delta Ws}{\delta w}\,\frac{\delta S}{\delta b} \qquad (21)$$

So

$$p_{\underline{W_s},\underline{S}}(W_s,S) = p_{\underline{z_m},b,w}(z_m,b,w) * \frac{1}{\frac{\delta Ws}{\delta w}\,\frac{\delta S}{\delta b}}\, dz_m \qquad ...(22)$$

Secondly, it is now possible to transfer $p_{\underline{W}_s, \underline{S}}(W_s, S)$ in a joint p.d.f. of the static load and the wave load peaks $\underline{W}$, as follows:

$$p_{\underline{W},\underline{S}}(W,S) = \int_{W_s} p_{W_s,S}(W_s,S) \cdot \frac{\delta P_{r_i}}{\delta W} \, dW_s \qquad \ldots (23)$$

in which Pr_i represents a probability distribution, which depends on the limit state considered. In the following,three kinds of limit state are discussed.

1. In cases, where all wave load peaks are in principle important, the Rayleigh distribution will be used

   $$Pr_1 = Pr(\underline{W}>W|W_s) = \exp\left\{-2\left(\frac{W}{Ws}\right)^2\right\} \qquad \ldots (24)$$

   In case of the storm surge barrier this distribution has been used for the increasing deformations of the subsoil (see Kooman e.a. [12]).

2. If, however a model is considered in which a one time exceedance of the load leads to a collapse, than the probability distribution of the wave loads, which are exceeded at least once, has to be used.
   Starting from N independent wave load peaks within the duration of a sea state, according to the Binomial distribution the probability, that none of the wave load peaks will exceed a level W, equals

   $$\left\{1 - P_r(\underline{W} > W \mid W_s)\right\}^N$$

   The probability Pr_2 that W is exceeded at least once, equals

   $$Pr_2 = 1 - \left\{1 - Pr(\underline{W} > W \mid W_s)\right\}^N \qquad \ldots (25)$$

   In case of the storm surge barrier this probability distribution has been used in the structural design of the pier,the beams and the gate.

3. Finally, we can also look at an other model, where collapse only occurs, when a load level is exceeded several times (in case of failure of an element of the barrier due to fatigue). Based on the Binomial distribution we find for the probability Pr_3 that a load peak exceeds a given level W at least m times, out of N.

   $$Pr_3 = 1 - \left[\sum_{H=0}^{h=m-1} \frac{N!}{h!(N-h)!} \; Pr(\underline{W} > W \mid W_s)^h \left\{1 - P(\underline{W}>W \mid W_s)\right\}^{N-h}\right] \qquad \ldots (26)$$

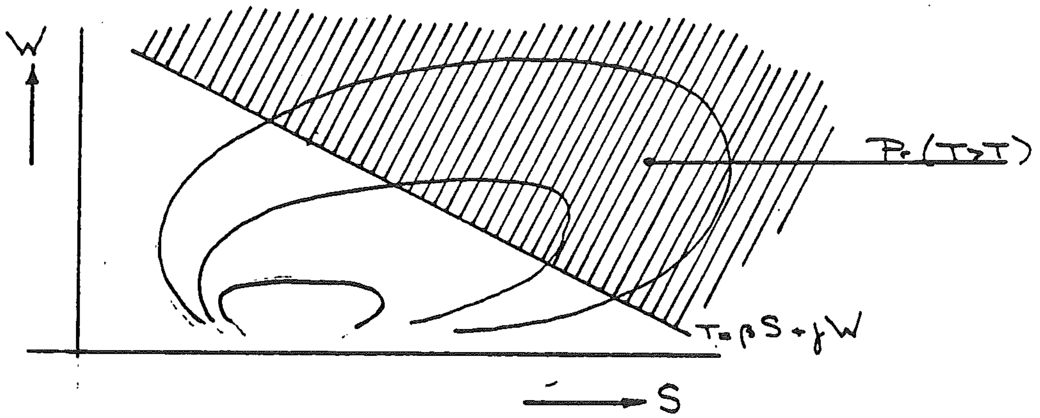
   To arrive at a probability distribution of a total load T for a specific limit state, based on the joint p.d.f. of the wave load peaks and the static load, it has to be known in which ratio the wave load and the static load contribute to this limit state.

   In general this can be defined as follows:

   $$\underline{T} = \beta \cdot \underline{S} + \gamma \cdot \underline{W} \qquad \ldots (27)$$

   Now the probability of exceedance of a specified total load $Pr\{\underline{T} > T\}$, can be determined per limit state by integrating the bidimensional probability density function $p_{\underline{W},\underline{S}}(W,S)$ over the area for which $\beta S + \gamma W > T$

   $$Pr(\underline{T} > T) = \int_{\beta S + \gamma W > T} p_{W,S}(W,S) \, dWdS \qquad \ldots (28)$$

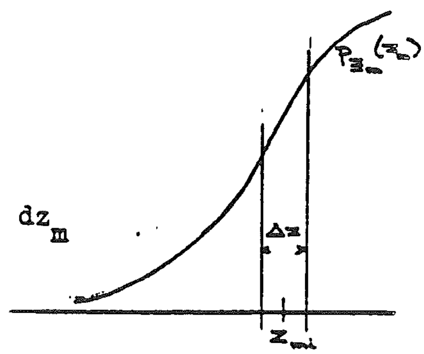


4.3. Numerical transfer (see [6]).

Since a description of the complete numerical transfer will be too extensive, only one transfer will be described, which is typical for the entire method. For this purpose the transfer from the joint p.d.f. of the basin level and the sea water level to the p.d.f. of the static load is chosen.

From the p.d.f. of the sea water level the probability of occurrence per class Δz_m can be determined as follows:

$$\Pr\left\{z_{mi} - \frac{\Delta z}{2} < \underline{z}_m < z_{mi} + \frac{\Delta z}{2}\right\} = \int_{z_{mi} - \frac{\Delta z}{2}}^{z_{mi} + \frac{\Delta z}{2}} p_{\underline{z}_m}(z_m)\, dz_m$$



In the same way for the basin level can be calculated

$$\Pr\left\{b_j - \frac{\Delta b}{2} < \underline{b} < b_j + \frac{\Delta b}{2} \,\middle|\, z_m\right\} = \int_{b_j - \frac{\Delta b}{2}}^{b_j + \frac{\Delta b}{2}} p_{\underline{b}}(b \mid z_m)\, db$$

The joint probability of occurrence $\Pr\{z_{mi}, b_j\}$ of the basin level class and the sea water class z_{mi} will be

$$\Pr\{z_{mi}, b_j\} = \Pr\left\{z_{mi} - \frac{\Delta z}{2} < \underline{z}_m < z_{mi} + \frac{\Delta z}{2}\right\} \cdot \Pr\left\{b_j - \frac{\Delta b}{2} < \underline{b} < b_j + \frac{\Delta b}{2} \,\middle|\, z_m\right\}$$

For a given geometry the static load S_{ij} for a sea water level z_{mi} and a basin level b_j can be determined.
Per definition the probability of occurrence of this static load equals the joint probability of occurrence

$$\Pr\{S = S_{ij}\} = \Pr\{z_{mi}, b_j\}$$

By dividing the complete static load range in classes S with class middle S_l it is possible to group all the static loads S_{ij} (i = 1,2...I and j = 1,2 ...J).

By adding the probabilities of occurrence of the static loads S_{ij} which belong to a static load class S_l, the probability of occurrence of S_l can be found

$$\Pr\left\{S_l - \frac{\Delta S}{2} < \underline{S} < S_l + \frac{\Delta S}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \Pr\{S = S_{ij}\} \cdot Y_{ij}$$

in which $Y_{ij} = 1$ for those combinations i j, satisfying

$$S_1 - \frac{\Delta S}{2} < S_{ij} < S_1 + \frac{\Delta S}{2}$$

$Y_{ij} = 0$ for the other combinations ij

In this way a histogram of the static load is found.

5. THE RELIABILITY OF THE METHOD.

5.1 The description of the analyses.

The probabilistic load determination as described in the previous paragraph, is based on the statistical descriptions of the hydraulic boundary conditions. After the transfer from boundary conditions into loads and executing the statistical compilations the probability distribution of the hydraulic load was found. In this method the statistical descriptions of the hydraulic boundary conditions, the assumptions with regard to the determination of wave-spectra and some assumptions in the method itself, have not been varied. Therefore the result of the method will be a probability distribution with deterministic parameters.
In reality the parameters of the probability distribution will have a stochastic character.

A study has been executed concerning this stochastic character. This has been done by means of a so called "mean value first order second moment method" [5]

This method is based on the following assumptions:

- The probability distributions Pr. can be described as a function of the parameters x_i determining this distribution. These parameters are considered to be stochastic variables.

$$\underline{Pr} = f\,(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ldots x_i \ldots\ldots\ldots x_n)$$

- The parameters x_i have a Gaussian distribution with mean μ_{xi} and a standard deviation σ_{xi}.
- A linear approximation of $f(x_1,\ x_2\ \ldots\ldots x_n)$ is obtained by expanding the relationship in a Taylor series in a point x^* and retaining the first two terms.

$$\underline{Pr} = f\,(x_1^*,\ x_2^*, \ldots\ldots,\ x_n^*\ ) + \sum_{i=1}^{n}\,(x_1 - x_i^*\ )\frac{\delta f(x^*)}{\delta x_i}$$

- The function $f(x_1,\ x_2\ \ldots x_n)$ is linearised at the mean $\underline{m} = (m_1,\ m_2\ \ldots\ m_n)$, so $\underline{x}^* = \underline{m}$.

These assumptions justify the following conclusions with regard to Pr.:

1. Pr. has a Gaussian-distribution
2. The distribution properties are $\mu_{Pr} = f(\underline{m})$

$$\sigma_{Pr} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\Delta f(\underline{m})}{\Delta x_i} \cdot \sigma_{xi}\right\}^2}$$

As an example in this paper, the reliability of the probability distribution of the total hydraulic load normal to be barrier in case of 4 piers, namely R3, R19, H9 and H15 will be discussed.

The following parameters x_i have been considered.

1. The frequency of exceedance curve of storm surge levels
2. The probability distributions of basin levels
3. Transferfunctions with regard to:

a. static load above the sill
b. static load in the sill
c. Wave load above the sill
d. wave load in the sill

4. The duration of a storm surge level
5. Wave spectrum
6. The p.d.f. of wave spectra per storm surge level class

For the parameters on which 5 and 6 have been based reference is made to Vrijling and Bruinsma [9]

An overview of the values $\frac{\Delta f(\underline{m})}{\Delta x_i} . \sigma_{x_i}$ for the various piers is given in table I.

	R 19		R 3		H 15		H 9	
Parameters	kN	%	kN	%	kN	%	kN	%
1	4250	26,7	3420	24,0	3070	30,3	3620	35,2
2	2272	7,6	1480	4,5	1423	6,5	1779	8,5
3 a, b	2146	6,8	1610	5,3	1498	7,2	1644	7,2
3 c, d	2870	12,1	2616	14,0	1915	11,8	1879	9,5
4	229	-	203	-	149	-	150	-
5,6	5636	47,0	5045	52,2	3709	44,2	3842	39,6
	8240	100	6987	100	5580	100	6106	100

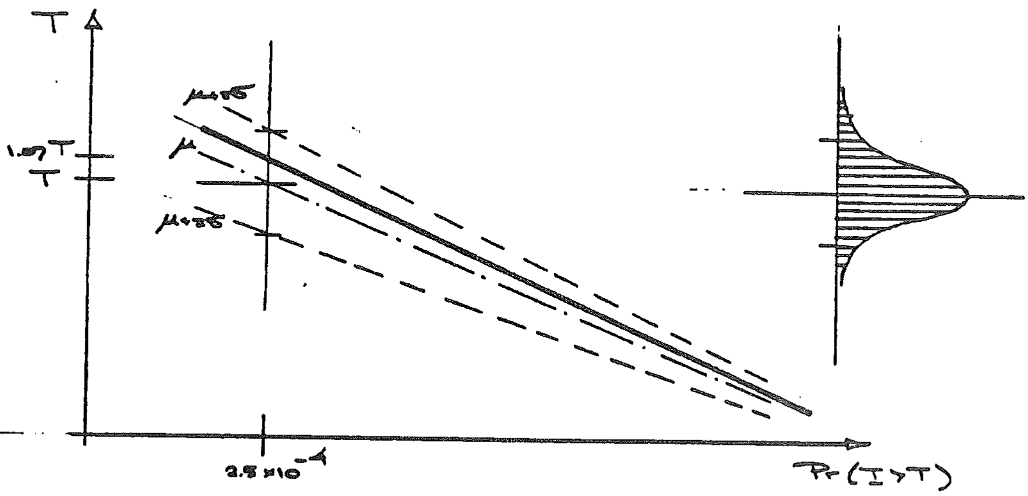
Table I

5.2. Results.

The results of the analyses, being the mean μ_{pr} the standard deviation σ_{pr} and the contribution of each parameter to the standard deviation (in percentages), are given in table I.

Comparing the results of this study with the probability distribution with deterministic parameters used in the design, it became clear that the deterministic distributions gives approximately 7% higher load values than the "mean" distribution curve of the stochastic approach. This has been caused by the fact that the by "engineering judgement" chosen constants were rather pessimistic mainly for the parameters.

- wave load above sill (see par. 3.3.)
- schematized relation H - T (see [9])
- foreshore (see [9])



Also it can be seen that the probability distribution curve with an excess frequency of 2,3% ($\mu_{Pr}+2\sigma_{Pr}$) exceeds the curve calculated with deterministic parameters only in a minor way. This exceedance has been embodied in a partial safety coefficient γ_{s3}(according to the ISO standard 2394). This coefficient is intended to allow possible adverse modification of the load effects, due to incorrect design assumptions and constructional discrepancies.

6. THE APPLICATIONS IN THE DESIGN PROCESS.

The probability distributions of the total hydraulic load have been applied in two ways, depending on the design method used. To be able to discuss the applications a brief review of the existing design methods is given first.

6.1. The design method.

The element "load greater than strength" is one of the most fundamental criteria in a design process. To ensure the fulfillment of this criterion a safety margin is introduced between the expected load and the strength pursued.

In principle there are three philosophies regarding the way of introducing a safety margin in the design.

1. the deterministic design method
2. the quasi-probabilistic method
3. the (semi-) probabilistic method

ad. 1.

In the case of a deterministic method, "safe" values are chosen for the basic variables causing the load. Usually the mean values of the strength parameters are used to determine the strength. The safety margin is guaranteed by a safety-coefficient based on engineering experience.

ad. 2.

The basis of the quasi probabilistic design method is that the parameters used in the structural design are not specified constants, but stochastic variables, whose exact magnitude is not known with certainty in the design stage and in case of the hydraulic parameters, not even after construction. Because the use of these stochastic elements is not practical for the normal design activities due to the lack of statistical information and of computerprograms for mass-production, the concept "characteristic value" has been introduced in the structural design. The safety margin will be guaranteed by partial safety coefficients.

"Load greater than strength". This plays a very important role in every part of the barrier. A state in which the external load at the structure equals the loading capacity of the structure is called a limit state. Consequently, a structure has a number of limit states equal to the number of failure mechanisms.

A last step in the risk analyses is to determine as exactly as possible the probabilities of all the elements in a fault tree, in order to determine the probability of mal-functioning of the barrier. This overall mal-functioning probability has to fulfill an acceptable level.

To be able to determine the probability of failure of a limit state of a structural part of the barrier a semi-probabilistic design method has been applied. In this method it is possible to use the full statistical description of the hydraulic load in combination with strength parameters as stochastic variables.

For those cases when

> the transferfunctions from the hydraulic parameters to the hydraulic load are available in an analytical form

and

> the theoretical models are available to determine the loading capacity of the structure from the strength parameters,

the semi-probabilistic design method can be done fully analytically. A so called "advanced first order second moment method" can be used in that case. (see 5). In the design of the storm surge barrier this has been applied to

- the main cross section of the floor slab
- the overall stability of the piers
- the main girders of the gate

7. CONCLUSIONS.

- A probabilistic load determination as discussed in this paper allows a more realistic hydraulic design load, to be used in the prevailing design methods, than the conventional deterministic methods. It avoids a too pessimistic load determination. In the case of the most heavily loaded pier this has resulted in the figures as mentioned in the table below.

	Deterministic approach	Probabilistic approach
Storm surge level	NAP + 5.50 m	$\Pr(\underline{z}_m > z_m)=\exp(-2.3\frac{z_m-2.94}{0.696})$
Wave spectrum	height = 10 m period = 12 s	$P_{\underline{S}_{\eta i}}(S_{\eta i} \mid z_m)$
Basin level	NAP - 1.70 m	$P_{\underline{b}}(b \mid z_m)$
Total hor. force	T = 173.000 kN	$P(T > 100.000\ \mathrm{kN})=2.5 \cdot 10^{-4}$

- A reliability analysis of the probabilistic method shows that a probability distribution curve with an excess frequency of 2,3% ($\mu_{Pr} + 2\sigma_{Pr}$) exceeds the curve derived from constant p.d.f.'s of the parameters only in a minor way.

- The application of a semi-probabilistic design method provides a quantitative insight into the influence of the stochastic uncertainty of the basic parameters. It thus forms an important tool in assigning priorities in study or quality control to specific parameters of theoretical models. It contributes moreover to an overall risk analyses of the system by providing the probability of failure of each element of the system.

ad. 3.

The most advanced design method is the (semi-) probabilistic method. In this method all basic variables are specified by probability density functions. With the help of theoretical models the p.d.f.'s of the strength and of the load can be derived. These two p.d.f.'s form the basis in determining the failure probability of the mechanism. By checking this failure probability against the allowable failure probability of the total system, one can determine whether or not the safety is sufficient.

6.2. The application of the load distribution.

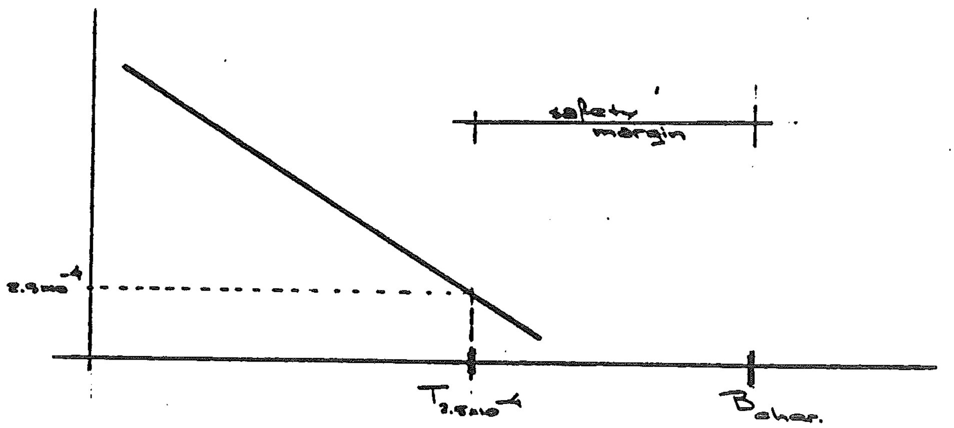
In case of the storm surge barrier two design methods have been used, the quasi-probabilistic and the semi-probabilistic one. In both of the methods the probability distribution of the hydraulic loads has been used.

6.2.1. Quasi-probabilistic design method.

In this method, which is the most practical one, a load with a certain excess frequency is chosen from the load distribution.

In the case of the storm surge barrier the design criterion is that the barrier has to withstand - with a certain safety margin - a potential threat with an excess frequency of 2.5×10^{-4}/year. Considering the task of the barrier it will be obvious that this potential threat is based on the natural boundary conditions, mainly waves and water level differences, which manifest themselves in the hydraulic load. For that reason the design loading has been defined as the total hydraulic load with an excess frequency of 2.5×10^{-4} times/year.

This hydraulic load derived from the probability distribution has been used an an extreme load, being a characteristic load multiplied by a safety coefficient of overloading. This extreme load is used in combination with a characteristic strength and the partial safety coefficients needed. So, in terms of design methods, a quasi-probabilistic design method has been applied.



6.2.2. Semi-probabilistic design method.

Simultaneously with the "everyday" design activities a risk analysis of the storm surge barrier has been executed. A first step in this risk analyses was to make an overview of all possible causes and circumstances which may lead to a mal-functioning of the storm surge barrier and from that to the inundation of several parts of SW-Netherlands.

Subsequently, the causal connection between the elements have been determined, which has been done with the aid of so called fault trees (and event trees). An ever returning element in the fault tree is the state

ACKNOWLEDGEMENTS.

The authors wish to express their thanks to Dr.Ir. J.A. Battjes for his valuable comments during the preparation of the manuscript.

REFERENCES.

1. Battjes, J.A.,-The effect of the oblique wave attack and short crestedness on the wave load (dutch), 1978.
2. Betlehem, J.G., Does, R.J.M.M., and Helmers, R. - Report of a statistical investigation with regard to a probabilistic load determination (dutch), 1978.
3. Does, v.d., Bije, de, Mazijk, A. van and Thabet, R.A.H. - Stability of the top layer of the sill. Symposium on Hydraulic aspects of coastal structures, Rotterdam, 1980.
4. Ishida, A. - Transformation of power spectra of wind generated waves caused by reflection. Coastal engineering in Japan, Vol. 15, 1972.
5. Flint, A.R., and Baker, M.J. - Rationalisation of safety and service ability factors in structural codes. CIRIA report 63, 1976.
6. Mulder, Th. - Probabilistic load determination in case of storm surge barrier Oosterschelde. Deltadienst DDWT 79.009 (dutch).
7. Mulder, Th. - The reliability of the probability distribution of the hydraulic load. Deltadienst DDWT 78.276 (dutch).
8. Mulder, Th. - The transfer functions of the hydraulic load perpendicular to the storm surge barrier. Deltadienst DDWT 79.325 (dutch).
9. Vrijling, J.K. and Bruinsma, J. - Hydraulic Boundary Conditions. Symposium on Hydraulic aspects of coastal structures, Rotterdam, 1980.
10. Probabilistic calculations. T.N.O. - IBBC report B-78-30 (dutch).
11. Risk analyses of the storm surge barrier. T.N.O. - IBBC report B-79-494 (dutch).

LIST OF SYMBOLS.

a_i	amplitude of a regular wave
B_j	width of a structure element
$B_{char.}$	characteristic strength
b	basin level Oosterschelde
d	water depth (till still water line)
D( )	directional spectrum
f	wave frequency
G( )	function (static load)
H_{max}	wave height in an anti node of a standing wave
H_{min}	wave height in a node of standing wave
H_s	significant wave height
h	binomial coefficient
k	wave number
l	dimension of the structure
m	number of load exceedances
m_o	area of wave load spectrum

m_2	second moment of wave load spectrum
m_n	n-th moment of wave load spectrum
N	number of wave loads
$O(f)$	transfer function
Pr	probability of exceedance
p	probability density
$p(x,z,t)$	wave pressure
$r(\ )$	correction factor (oblique wave attack)
S	static load
$S_{\eta i}(f)$	spectral density of incoming waves
$S_w(f)$	spectral density of wave loads
t	time
T_p	peak period of waves
$\bar{T}_w$	mean wave load period
T	total load
w	wind velocity during 1 hour
W	wave load
W_s	significant wave load
x	coordinate
x_i	basic variable hydraulic load
x_i^*	x_i in design point
y	coordinate
Y	accounting factor
z	coordinate
z_m	maximum storm surge level
$\alpha, \alpha(f)$	reflection coefficient
β	contribution factor (static load)
γ	contribution factor (wave load)
ϕ	phase shift
θ	approach angle of waves
$\bar{\theta}$	mean approach angle of waves
μ_{Pr}	mean of Pr ($\underline{T} > T$)
μ_{x_i}	mean of x_i
σ_{Pr}	standard deviation of P ($\underline{T} > T$)
σ_{x_i}	standard deviation of x_i
ω	angular frequency
ρ	specific density of water
η_i	elevation

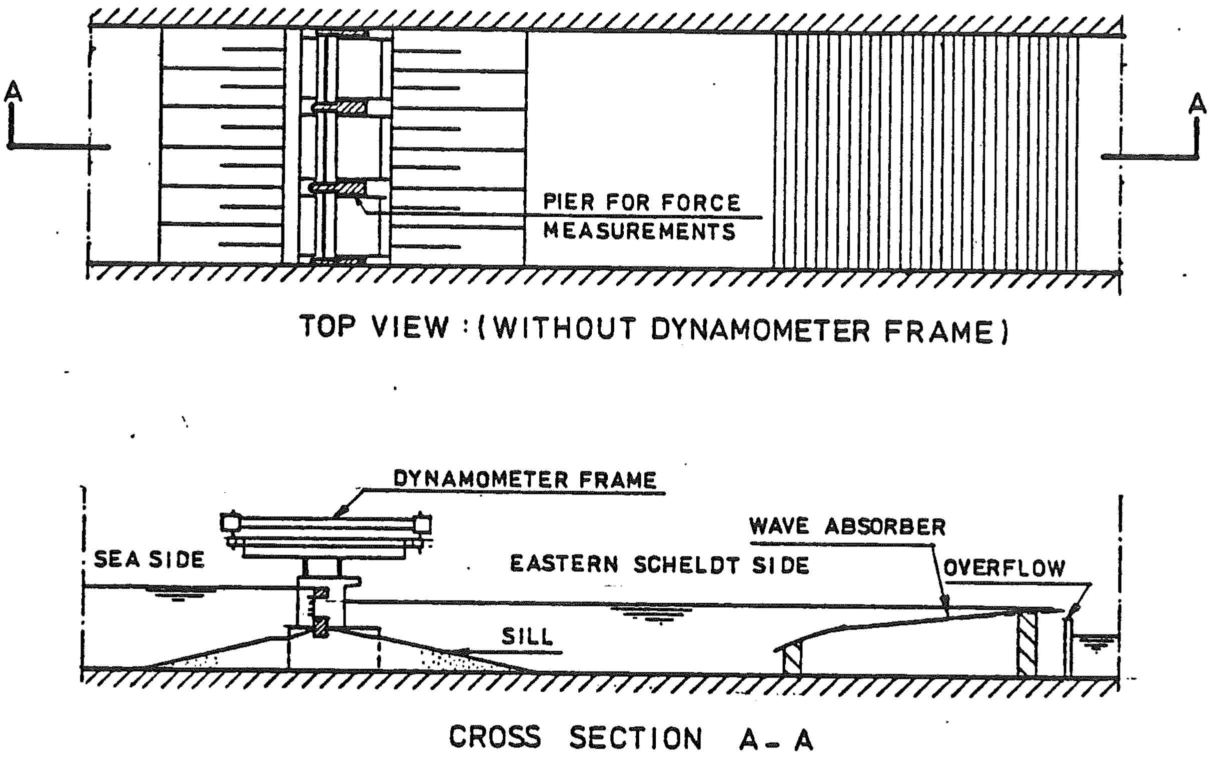


Figure 1. Model set-up in the 2 metres wide wind-wave flume.

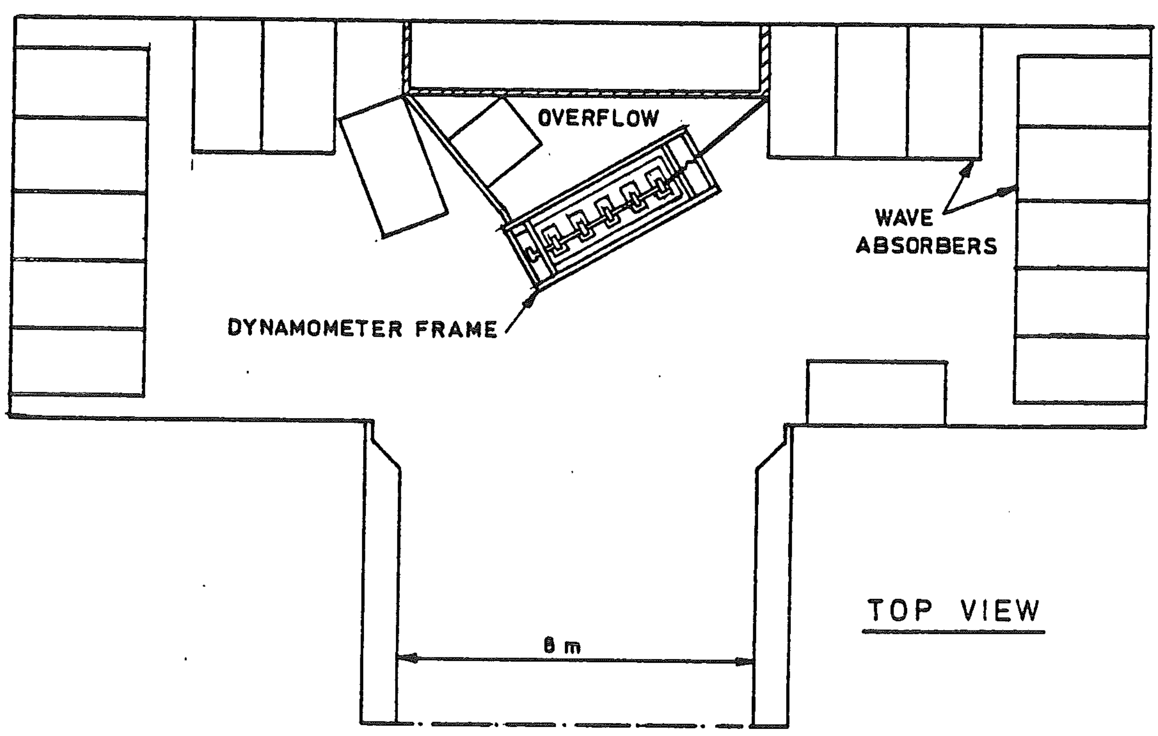


Figure 2. Model set-up in the 8 metres wide wind-wave flume.

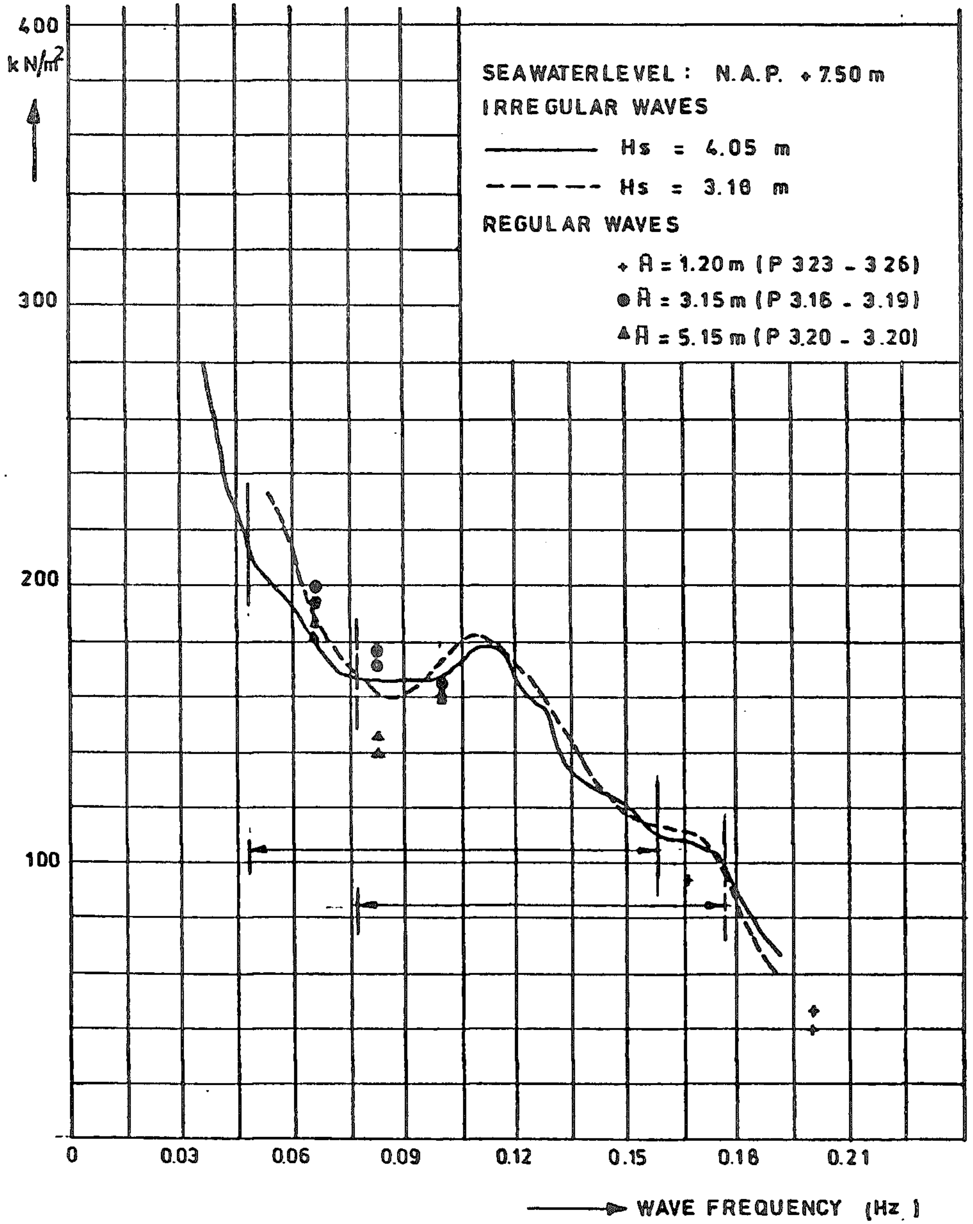


Figure 3. Wave forces per unit of wave amplitude in comparison with a continuous transfer.

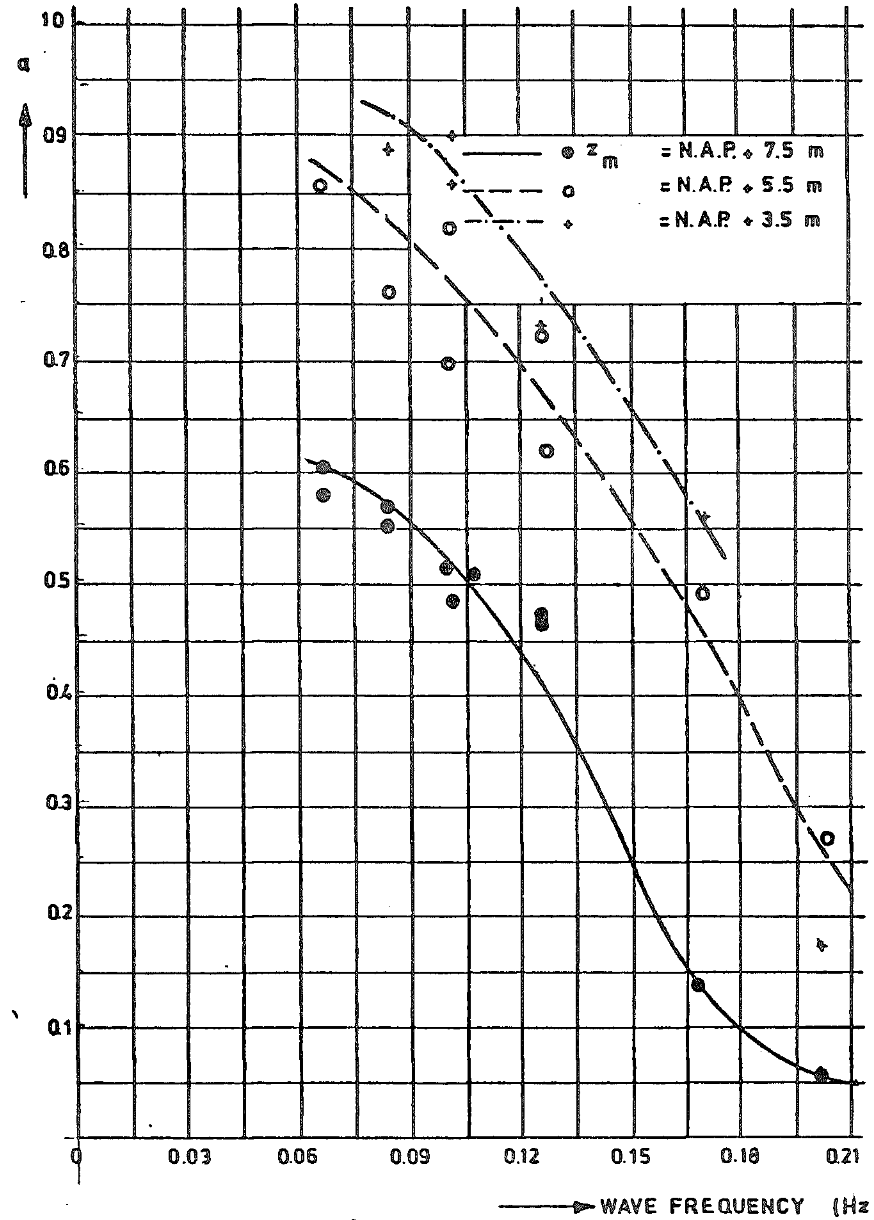


Figure 4. Reflection coefficient.

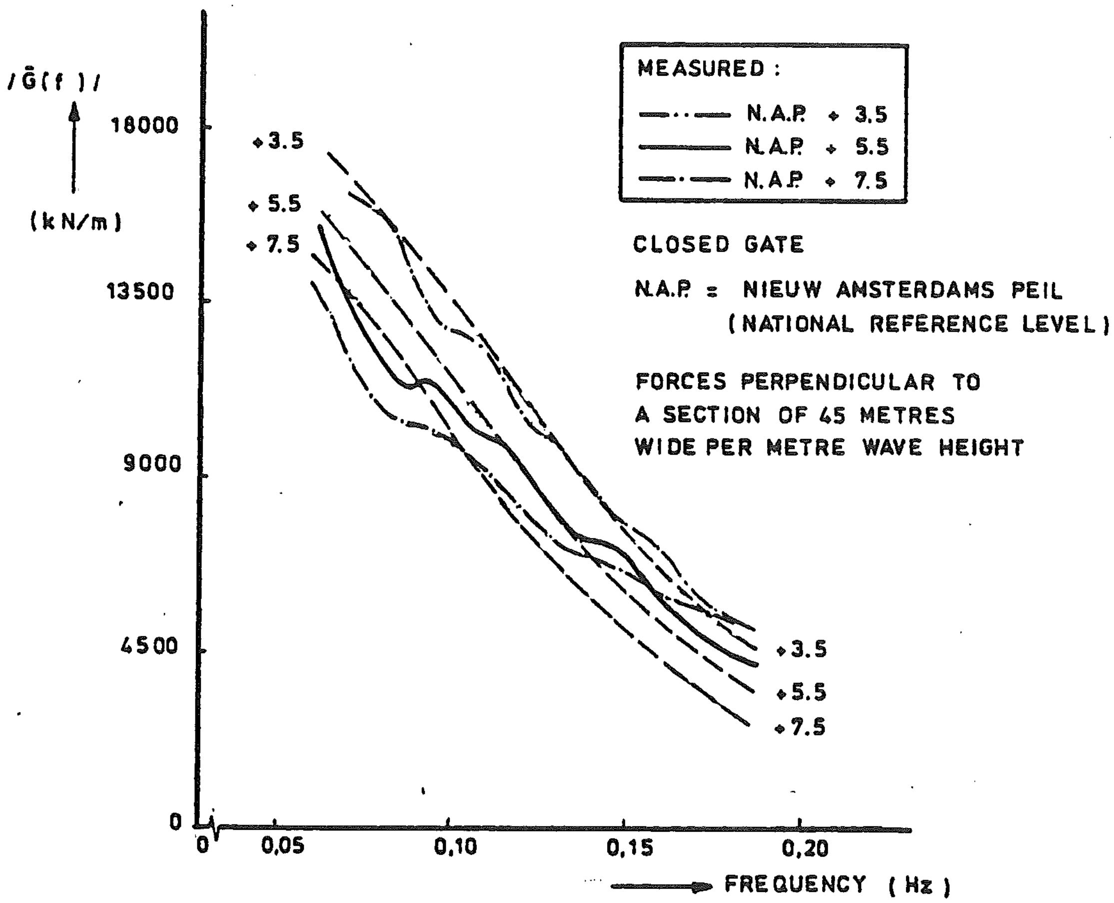


Figure 5. Comparison of calculated and measured transfer functions for different water levels at the sea side.

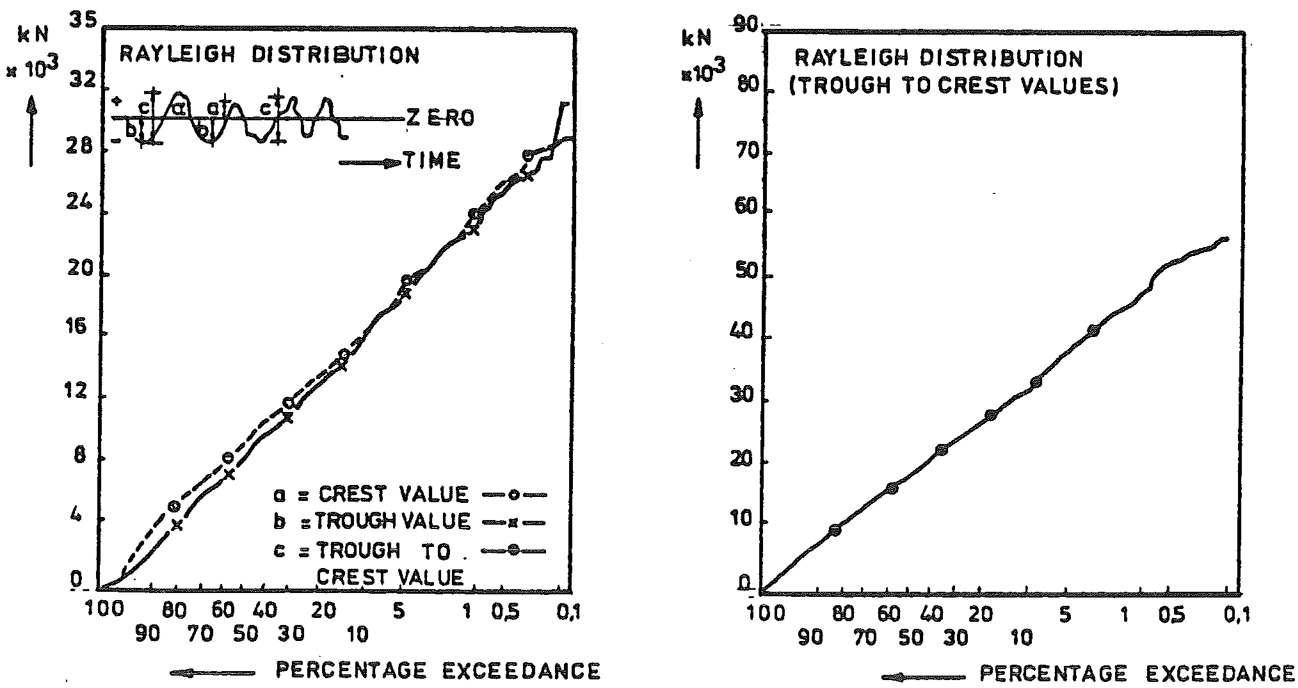


Figure 6. Cumulative frequency distributions of total force perpendicular to structure's centre-line.

10. BAYESIAANSE VERWERKING VAN STATISCHE INFORMATIE

10.1 Inleiding

Waarschijnlijkheidsrekening kan beschouwd worden als een onderdeel van de wiskunde. Een kans is dan een getal tussen 0 en 1 (een maat) dat wordt toegekend aan een verzameling. Op basis van een aantal spelregels kunnen relaties en stellingen worden afgeleid. Van een interpretatie van het begrip kans is daarbij eigenlijk geen sprake. Anders wordt dat zodra men waarschijnlijkheidsrekening toe gaat passen op praktische problemen. Twee belangrijke filosofische stromingen kunnen daarbij worden onderscheiden: de "frequentistische" en de "Bayesiaanse". De notitie heeft tot doel duidelijk te maken hoe men in praktische gevallen een Bayesiaanse analyse uitvoert en welke de verschillen zijn met de frequentistische werkwijze (literatuur 10-1, 10-2, 10-3).

10.2 Het frequentistische versus Bayesiaans kansbegrip

Het frequentistische kansbegrip stelt dat de kans op een gebeurtenis A gelijk is aan p indien de verhouding n(A)/N voor grote N tot p nadert, hierbij is N het totaal aantal malen dat een experiment wordt uitgevoerd en n(A) het aantal malen dat A als uitkomst te voorschijn komt. Symbolisch genoteerd:

$$P(A) = p \quad \text{als} \quad \lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N} = p \tag{10-1}$$

Het Bayesiaans kansbegrip stelt dat de kans op een gebeurtenis A gelijk is aan p indien men indifferent staat tegenover een weddenschap waarbij de winst bij het optreden van A evenredig is met 1/p en het verlies bij niet optreden van A evenredig is met 1/(1 - p). Formeel genoteerd (α = willekeurige constante):

$$P(A) = p \quad \text{als} \quad P(A) \left\{\frac{\alpha}{p}\right\} - P(\bar{A}) \left\{\frac{\alpha}{1 - p}\right\} = 0 \tag{10-2}$$

We merken op dat het Bayesiaans kansbegrip het frequentistische insluit. Immers als aan (10-1) wordt voldaan, staat men indifferent tegenover een weddenschap met winst (α/p) en verlies α/(1 - p).
Het wezenlijke verschil tussen beide definities is dat in de Bayesiaanse omschrijving niet wordt vermeld waarom men indifferent is. De reden daarvoor mag liggen in uitgebreide statistische informatie maar even goed in een gevoelsmatige taxatie. Het Bayesiaanse kansbegrip is in wezen dus subjectief en aan eenzelfde gebeurtenis kunnen door twee personen verschillende kansen worden toegekend. Volgens de Bayesiaanse interpretatie zegt een kans iets over de onzekerheid die iemand heeft aangaande een gebeurtenis, het weerspiegelt een "state of mind"; volgens de frequentie-interpretatie zegt de kans iets over de gebeurtenis zelf, het weerspiegelt een "state of matter".

Het merendeel van de beoefenaren van de mathematische statistiek is aanhanger van het frequentistisch kansbegrip. Subjectieve kansen horen volgens hen niet tot het domein van de wetenschap, die per definitie objectief moet zijn.

De Bayesiaan verdedigt zijn standpunt door erop te wijzen dat er in het leven nu eenmaal beslissingen moeten worden genomen, waarbij de subjectieve beoordeling in een eerder of later stadium onvermijdelijk is. Gegeven die onvermijdelijkheid wordt het Bayesiaans kansbegrip gezien als een hulpmiddel om consequent en rationeel te kunnen handelen en het subjectieve element tot een minimaal en traceerbaar aandeel te reduceren. Bayesiaanse waarschijnlijkheid mag dan ook nooit los worden gezien van Bayesiaanse besliskunde.

Alhoewel de subjectieve kanstoekenning de basis is van de Bayesiaanse kansrekening zijn natuurlijk ook statistische gegevens erg belangrijk. De wijze waarop statistische gegeven met subjectieve kanstoekenning wordt gecombineerd is schematisch weergegeven in figuur 1. Deze verwerking van de statistische informatie wordt in het Engels de "Bayesian Terminal Analysis" of "Bayesian Posterior Analysis" genoemd. De toevoeging "Terminal" houdt in dat er nog een andere analyse aan vooraf hoort te gaan, namelijk de preposterior analysis. In die analyse wordt beslist (!) of het überhaupt zinvol is gegevens te verzamelen. Soms is het namelijke voordeliger om een bepaalde situatie van onzekerheid maar te laten bestaan. Een dergelijke gedachte is kenmerkend voor de Bayesiaanse filosofie. In deze notitie houden we ons overigens alleen bezig met de verwerking van de gegevens en we duiden die kortweg aan met Bayesiaanse Analyse.

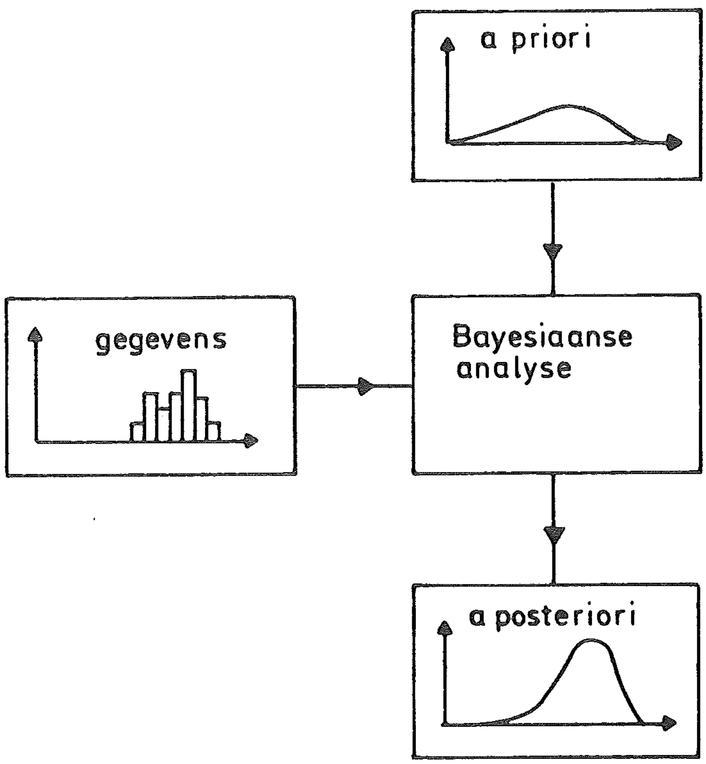


Fig. 10-1 Principe van een Bayesiaanse analyse: een subjectieve aprioriverdeling wordt gecombineerd met objectieve gegevens tot een zogenaamde a posterioriverdeling, met behulp van het theorema van Bayes.

10.3 Het theorema van Bayes

Centraal in de Bayesiaanse Analyse staat het theorema van Bayes. Opgemerkt wordt dat het theorema als zodanig een normaal wiskundig theorema is waarbij de interpretatie-problematiek geheel niet aan de orde is. Op deze problematiek komen we pas weer terug onder 10.5.

In de kansrekening is de conditionele waarschijnlijkheid op de gebeurtenis A, gegeven dat gebeurtenis B is opgetreden, gedefinieerd als:

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \text{ en } B\}}{P\{B\}} \qquad (10\text{-}3)$$

Voor de kans op B gegeven A geldt analoog:

$$P\{B|A\} = \frac{P\{A \text{ en } B\}}{P\{A\}} \qquad (10\text{-}4)$$

Als met behulp van (10-4) de kans $P\{A \text{ en } B\}$ uit (10-3) wordt geëlimineerd volgt er:

$$\boxed{P\{A|B\} = \frac{P\{B|A\}.P\{A\}}{P\{B\}}} \qquad (10\text{-}5)$$

Daarmee is het theorema van Bayes afgeleid. Dit theorema kan men zien als een regel die laat zien hoe de kanstoekenning van A (eerst P(A)) onder invloed van gegeven B gewijzigd wordt in P(A|B). Men noemt P(A) de apriorikans (prior probability) en P(A|B) de aposteriori-kans (posterior probability).

<u>Voorbeeld: Twee vazen met rode en witte ballen</u>

Gegeven zijn twee identieke vasen met (oneindig veel) rode en witte ballen. In de ene vaas, vaas A, zitten 67% rode en 33% witte ballen. De samenstelling van de tweede vaas, B, is juist andersom, 33% rood en 67% wit. Stel dat ad random een van de vazen (!) wordt gekozen en uit deze vaas, eveneens random, drie ballen worden genomen: tweemaal een rode en als derde een witte. Gevraagd: wat is de kans dat deze steekproef afkomstig is van vaas A en wat is de kans dat deze afkomstig is uit vaas B?

We voeren in:

R : er wordt een rode bal getrokken
W : er wordt een witte bal getrokken
A : de vaas is vaas A met P(R) = 2/3 en P(W) = 1/3
B : de vaas is vaas B met P(R) = 1/3 en P(W) = 2/3

We beginnen met de vaststelling van de apriori-kansen. Voor we aan het experiment beginnen zijn beide vazen even kansrijk:

$$P\{A\} = P\{B\} = 0{,}5$$

De kans op de steekproef (RRW), gegeven dat we te maken hebben met vaas A, wordt gegeven door:

$$P\{RRW|A\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

Analoog gegeven vaas B:

$$P\{RRW|B\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

Met behulp van het theorema van Bayes volgt:

$$\text{scenario 1} \left\{ \begin{aligned} P\{A|RRW\} &= \frac{P\{RRW|A\}\ P\{A\}}{P\{RRW\}} = \frac{(4/27)(0.5)}{P\{RRW\}} \\ P\{B|RRW\} &= \frac{P\{RRW|B\}\ P\{B\}}{P\{RRW\}} = \frac{(2/27)(0.5)}{P\{RRW\}} \end{aligned} \right.$$

De som van de kansen op A en B moet natuurlijk ook na de steekproef nog steeds 1 zijn. Deze eis maakt het mogelijk P(RRW) te bepalen:

$$P\{RRW\} = P\{RRW|A\}\ P\{A\} + P\{RRW|B\}\ P\{B\} \qquad (10\text{-}6)$$

$$P\{RRW\} = (4/27)(0.5) + (2/27)(0.5) = 3/27$$

En daarmee volgt als eindresultaat:

$$P\{A|RRW\} = 2/3 \qquad\qquad P\{B|RRW\} = 1/3$$

De kans dat de vaas van type A is stijgt dus als gevolg van de waarmenigingen RRW van 1/2 naar 2/3; de kans op vaas B daalt van 1/2 naar 1/3. Indien de waarnemingsreeks verder wordt doorgezet zal in beginsel de kans op een van de twee vazen naar 1 gaan en de ander naar 0.

Een interessante vraag is verder wat de kans is bijvoorbeeld een rode bal uit de (onbekende) vaas te trekken, zowel vóór als na de steekproef. Beschouw eerst de situatie vóór de steekproef. De kans op een rode bal is 2/3 in geval van vaas A, die op zich 50% kans heeft en 1/3 in geval van vaas B, die ook 50% kans heeft, derhalve:

$$P\{R\} = P\{R|A\}\ P\{A\} + P\{R|B\}\ P\{B\} \qquad (10\text{-}7)$$

$$P\{R\} = (2/3)(0.50) + (1/3)(0.50) = 1/2$$

Na de steekproef is de kans op een rode bal in geval van vaas A nog steeds (2/3), maar de kans op vaas A is nu geen 50% naar 67%; analoog is de kans op rood gegeven vaas B nog steeds (1/3), maar de kans op vaas B is gedaald naar 33%. De kans op rood gegeven de steekproef RRW wordt dus:

total probability

$$P\{R|RRW\} = P\{R|A\}\ P\{A|RRW\} + P\{R|B\}\ P\{B|RRW\} \qquad (10\text{-}8)$$

$$P\{R|RRW\} = (2/3)(0{,}67) + (1/3)(0{,}33) = 5/9$$

De kans op het trekken van een rode bal is dus onder invloed van de steekproef RRW gestegen van 1/2 naar 5/9.

10.4 Formules voor Bayesiaanse Analyse

Het voorbeeld van het twee-vazen-probleem is in feite een volledige Bayesiaanse analyse in een notendop. T.b.v. verdere toepassingen is het echter zinvol de formules nog verder te ontwikkelen.

We nemen in beschouwing een aantal gebeurtenissen A_i (i = 1 .. n) die elkaar uitsluiten (d.w.z. $P\{A_i \text{ en } A_j\} = 0$ voor $i \neq j$) en gezamenlijk de totale uitkomstenruimte van een experiment vormen ($P\{A_1$ of A_2 ... of $A_n\} = \Sigma\, P\{A_i\} = 1$). Op ieder van deze gebeurtenissen kan het theorema van Bayes worden toegepast voor verwerking van statistische informatie D (Data):

$$P\{A_i|D\} = \frac{P\{D|A_i\}\; P\{A_i\}}{P\{D\}} \tag{10-9}$$

Ook na verwerking van informatie D geldt dat de som van de kansen op A_i gelijk moet zijn aan 1: $\Sigma\, P(A_i|D) = 1$. Op grond van die eis kan P(D) worden bepaald:

$$P\{D\} = \Sigma\, P\{D|A_i\}\; P\{A_i\} \tag{10-10}$$

Formule (10-10) staat bekend als het "total probability theorem", een theorema dat bij de verdere analyse nog erg belangrijk zal blijken. Voor de bepaling van $P\{D\}$ zelf is het eigenlijk niet eens zo interessant. Uit bovenstaande blijkt dat $P\{D\}$ eigenlijk alleen een normeringsconstante is, die altijd wel (achteraf) bepaald kan worden. Het theorema wordt daarom meestal genoteerd als:

$$\boxed{P\{A_i|D\} = N\; P\{D|A_i\}\; P\{A_i\}} \qquad N = \frac{1}{P\{D\}} = \frac{1}{\Sigma P\{D|A_i\}P\{A_i\}} \tag{10-11}$$

De kans $P\{D|A_i\}$ wordt in het Engels aangeduid als de "Data likelihood". De aposterori-kans voor A_i is dus evenredig met het product van de apriorikans en de data likelihood bij gegeven A_i.

In veel gevallen betreffen statistische problemen stochastische variabelen, waarvan de verdeling bekend wordt verondersteld, maar de parameters geschat moeten worden aan de hand van statistische gegevens. T.b.v. de uitwerking van de formules voor dat probleem beschouwen we het volgende voorbeeld.

Voorbeeld: oneindig veel vazen met normale verdelingen

Gegeven is een groot aantal vazen met daarin genummerde ballen. De nummers binnen een vaas volgen een normale verdeling met gemiddelde μ_x en standaardafwijking σ_x. Elke vaas heeft dezelfde standaardafwijking, maar het gemiddelde verschilt van vaas tot vaas.

Deze gemiddelden vormen op hun beurt ook weer een normale verdeling met gemiddelde μ_μ en standaardafwijking σ_μ.

Zowel het aantal vazen als het aantal ballen per vaas is zo groot dat van continue verdelingen kan worden gesproken.

Analoog aan het 2-vazen probleem wordt eerst ad random uit de vazen gekozen en vervolgens uit deze vaas een steekproef. Gevraagd wordt met welke vaas ofwel met welk gemiddelde μ_x we te doen hebben.

Voorlopig onderzoeken we de invloed van een enkele waarneming, zeg $x = \xi$. We passen nu het theorema van Bayes toe met $A_i = m < \mu_x < m + dm$ en $D = \xi < x < \xi + d\xi$:

A_i D $P\{D \mid A_i\}\ P\{A_i\}$

$$P\{m < \mu_x < m + dm \mid x = \xi\} = N\ P\{\xi < x < \xi + d\xi \mid \mu_x = m\}\ P\{m < \mu_x < m + dm\} \qquad (10\text{-}12)$$

$$= P\{m < \mu_x < m+dm \mid x = \xi\} = \frac{P(\xi < x < \xi + d\xi \mid \mu_x = m)\ P\{m < \mu_x < m + dm\}}{P\{\xi < x < \xi + d\xi\}}$$

Achter de verticale strepen zijn $\xi < x < \xi + d\xi$ en $m < \mu_x < m + dm$ vervangen door $x = \xi$ en $\mu_x = m$. Verder wordt opgemerkt dat de intervalgrootten $d\xi$ en dm geen invloed hebben op het resultaat.

We moeten noteren (10-12) nu in de vorm van kansdichtheidsfuncties:

$$f_{\mu_x|x}(m;\xi)\ dm = N\ f_{x|\mu_x}(\xi;m)\ d\xi\ f_{\mu_x}(m)\ dm$$

De intervallen dm vallen tegen elkaar weg, het interval $d\xi$ brengen we bij N onder zonder overigens de notatie te wijzigen:

$$\boxed{f_{\mu_x|x}(m;\xi) = N\ f_{x|\mu_x}(\xi;m)\quad f_{\mu_x}(m)} \qquad (10\text{-}13)$$

De functie $f_{\mu_x}(m)$ is de apriori-kansdichtheidsfunctie voor het gemiddelde en dit is dus een normale kansdichtheidsfunctie met gemiddelde μ_{μ_x} en standaardafwijking σ_{μ_x}:

$$f_{\mu_x}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma_\mu}\,\exp\left\{-\frac{(m - \mu_\mu)^2}{2\,\sigma_\mu^2}\right\} \qquad (10\text{-}14)$$

verdeling in vaas

De data-likelihoodfunctie $f_{x|\mu_x}(\xi;m)$ is een normale verdeling met gemiddelde $\mu_x = m$ en standaardafwijking σ_x:

$$f_{x|\mu_x}(\xi;m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma_x}\,\exp\left\{-\frac{(\xi - m)^2}{2\,\sigma_x^2}\right\} \qquad (10\text{-}15)$$

Voor normale verdeling $x = \mu + u\sigma$ ∧ $\mu = \xi_1 + v\sigma$
(is Pukaarneming)

$\Rightarrow x = \xi_1 + (u+v)\sigma = \xi_1 + w\sqrt{2}\,\sigma$

n waarneming $\mu = \bar{\xi} + \frac{v\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow x = \bar{\xi} + \frac{v\sigma}{\sqrt{n}} + v\sigma = \bar{\xi} + w\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}$
(10.a)

Nadrukkelijk komt in deze kansdichtheidsfunctie de m voor en niet de μ_x; het is immers de dichtheid van x, als gegeven is $\mu_x = m$ (zie 10-12).
M.b.v. (10-14) en (10-15) kan (10-13) nu worden uitgewerkt tot (wederom constante delen onder de N schuivend):

$$f_{\mu_x|x}(m, \xi) = N \exp \left\{- \frac{(\xi - m)^2}{2\,\sigma_x^2} - \frac{(m - \mu_\mu)^2}{2\,\sigma_\mu^2}\right\} \tag{10-16}$$

De kansdichtheidsfunctie voor μ_x bij gegeven waarneming $x = \xi$ blijkt een exponent te zijn van een kwadratische vorm in m. We concluderen hieruit dat μ_x gegeven $x = \xi$ nog steeds normaal verdeeld is. Via kwadraatafsplitsing van de term tussen haken kan (10-16) herleid worden tot de standaardvorm. Geconcludeerd kan dan worden dat μ_x na de waarneming $x = \xi$ een gemiddelde en een standaardafwijking heeft volgens:

$$\mu_{\mu|x} = \frac{\mu_\mu \sigma_x^2 + \xi\,\sigma_\mu^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\mu^2} \tag{10-17}$$

$$\sigma_{\mu|x}^2 = \frac{\sigma_x^2 \cdot \sigma_\mu^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\mu^2} \tag{10-18}$$

Zonder bewijs geven we nu de formules voor het geval er meerdere waarnemingen $x_1 = \xi_1 \ldots x_n = \xi_n$ gedaan worden. Stellen we deze waarnemingen voor door de letter d dan volgt dat het gemiddelde μ_x gegeven d normaal verdeeld is met:

$$\mu_{\mu|d} = \frac{\mu_\mu\,\sigma_x^2 + n\,\bar{\xi}\,\sigma_\mu^2}{\sigma_x^2 + n\,\sigma_\mu^2} \tag{10-19}$$

$$\sigma_{\mu|d}^2 = \frac{\sigma_x^2\,\sigma_\mu^2}{\sigma_x^2 + n\,\sigma_\mu^2} \tag{10-20}$$

Hierin is $\bar{\xi}$ het gemiddelde van de steekproef. We constateren dat het aposteriori-gemiddelde $\mu_{\mu|d}$ een weging is van het apriori-gemiddelde μ_μ en het steekproefgemiddelde $\bar{\xi}$. Als $\sigma_x \gg \sigma_u$ overweegt μ_μ en omgekeerd. Voor $n \rightarrow \infty$ gaat het aposteriori-gemiddelde altijd naar het steekproefgemiddelde.

De aposteriori standaardafwijking $\sigma_{\mu|d}$ vermindert bij elke waarneming en gaat bij n = ∞ naar 0. Voor n = ∞ is $\mu_{\mu|d}$ dus een deterministische grootheid geworden met waarde $\bar{\xi}$.

Interessant is het geval dat σ_{μ} zeer groot is. Men spreekt dan van een vage of niet-informatieve apriori-verdeling. Het aposteriori gemiddelde en de aposteriori standaardafwijking voor μ_x worden dan gegeven door:

$$\mu_{\mu|d} = \bar{\xi} \text{ en } \sigma_{\mu|d} = \sigma_x/\sqrt{n} \tag{10-21}$$

Afgezien van de kansverdeling van μ_x is natuurlijk ook de kansverdeling van x zelf van belang. Voordat er sprake is van enige waarneming volgt deze uit:

$$f_x(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x|\mu_x}(\xi;m)\, f_{\mu_x}(m)\, dm \tag{10-22}$$

Formule (10-22) kan worden afgeleid uit het total probability theorem (10-10) met wederom $A_i = m < \mu < m + dm$ en $D = \xi < x < \xi + d\xi$.

De overgang van sommatie naar integratie hangt samen met het continue karakter.
Analoog kan na waarnemingen d voor de kansdichtheidsfunctie van x worden afgeleid:

$$f_{x|d}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x|\mu_d}(\xi;m)\, f_{\mu_x|d}(m;d)\, dm \tag{10-23}$$

Formule (10-22) komt overeen met formule (10-7) van het 2-vazenprobleem en (10-23) met (10-8). Via invulling van de gevonden verdelingen kan worden aangetoond dat x normaal is met:

- vóór de waarnemingen: $\mu_{x|-} = \mu_{\mu}$ $\qquad \sigma^2_{x|-} = \sigma^2_x + \sigma^2_{\mu}$ (10-24)

- ná de waarnemingen: $\mu_{x|d} = \mu_{\mu|d}$ $\qquad \sigma^2_{x|d} = \sigma^2_x + \sigma^2_{\mu|d}$ (10-25)

De grootheden $\mu_{z|-}$ en $\sigma_{x|-}$ noemt men wel de Bayesiaanse apriori-parameters; $\mu_{x|d}$ en $\sigma_{x|d}$ zijn dan de aposteriori-parameters.

We zien dat het Bayesiaans gemiddelde van x gelijk is aan het gemiddelde van het gemiddelde. De Bayesiaanse variantie is gelijk aan de som van de "gewone variantie" en de variantie van het gemiddelde. Onzekerheid in het gemiddelde leidt dus tot een toename van de standaardafwijking.

vb: Ri = ASi + Di   μGi = ?   σGi = 3 kN/m²
μDi = 0   σDi = 400 kN

3 waarnemingen + veronderstelling vage a-priori verdeling
ξ1 = 12 kN/m² $M_{s|d} = \bar{\xi}$ $\sigma_{s|d} = \sigma_s \sqrt{1+1/n}$
ξ2 = 10 " $M_{\mu|d} = \bar{\xi}$ $\sigma_{\mu|d} = \sigma_s/\sqrt{n}$
ξ3 = 15 "

Nemen we als voorbeeld tenslotte nogmaals het geval van de vage apriori-distributie. Na n waarnemingen met steekproefgemiddelde $\bar{\xi}$ is $\mu_{\mu|d} = \bar{\xi}$ en $\sigma_{\mu|d} = \sigma_x/\sqrt{n}$. (zie (10-21)). Op grond van de formules (10-24) en (10-25) heeft x dan de Bayesiaanse parameters:

$$\boxed{\mu_{x|d} = \bar{\xi} \text{ en } \sigma_{x|d} = \sigma_x \sqrt{(1 + \tfrac{1}{n})}} \qquad (10\text{-}26)$$

Na één waarneming is $\sigma_{x|d} = \sigma_x \sqrt{2} = 1.41\ \sigma_x$; de tweede waarneming brengt $\sigma_{x|d}$ reeds terug naar $1.22\ \sigma_x$ enz. Na oneindig veel waarnemingen is de Bayesiaanse spreiding gelijk aan de gewone.

10.5 Bayesiaanse versus klassieke mathematische statistiek

De voorbeelden in het voorafgaande zijn zodanig geconstrueerd dat er eigenlijk nog geen interpretatieprobleem is. De analyse is volkomen Bayesiaans maar de klassieke mathematische statisticus zal nog nergens echt bezwaren aantekenen. Om de wezenlijke verschillen boven water te krijgen bekijken we het volgende probleem.

Probleemstelling:

Gegeven is een stochastische variabele x, normaal verdeeld met gemiddelde μ_x en standaardafwijking σ_x. De standaardafwijking σ_x is precies bekend, het gemiddelde is onbekend. Gegeven is verder een steekproef van n waarnemingen met steekproefgemiddelde $\bar{\xi}$. Welke statistische conclusies kunnen worden getrokken?

In vergelijking met het vorige voorbeeld is nu het gegeven van de "normaal verdeelde vaasgemiddelden" verdwenen. Dit zal essentieel blijken.

We leggen het probleem voor aan een ingenieur, een klassiek statisticus en een Bayesiaan. Laten we aannemen dat de ingenieur begint. Hij zal zeggen dat $\bar{\xi}$ zijn beste schatting is voor het onbekende gemiddelde, maar dat rekening moet worden gehouden met mogelijke afwijkingen. In verband daarmee is het zinvol een zogenaamd betrouwbaarheidsinterval aan te geven, bijvoorbeeld een tweezijdig 90% betrouwbaarheidsinterval waarvan de onder- en bovengrens gegeven worden door:

$$\mu_o = \bar{\xi} - 1.64\ \sigma_x/\sqrt{n} \qquad (10\text{-}27)$$

$$\mu_b = \bar{\xi} + 1.64\ \sigma_x/\sqrt{n}$$

De ingenieur besluit zijn analyse met de opmerking dat er dus 90% kans is dat het gemiddelde tussen μ_o en μ_b ligt.

Deze laatste uitspraak schiet bij de klassieke statisticus in het verkeerde keelgat. Kijk, legt hij uit, in de statistiek ga je uit van een hypothese. Indien de waarnemingen onder de aanname dat de hypothese juist is, redelijk waarschijnlijk zijn, dan is er geen reden om de hypothese te verwerpen.

Zijn de waarnemingen wel erg onwaarschijnlijk, dan wordt de hypothese dus wel verworpen. Van alle hypothesen $-\infty < \mu < +\infty$ komen op die manier de hypothesen $\mu_x < \mu_o$ en $\mu_x > \mu_b$ voor verwerping in aanmerking en de hypothesen $\mu_o < \mu_x < \mu_b$ niet.

Door bij de bepaling van μ_o en μ_b uit te gaan van $\bar{\xi} \pm 1.64\ \mu_x/\sqrt{n}$ bereiken we dat de hypothesen $\mu_o < \mu_x < \mu_b$ slechts in gemiddeld één op de tien gevallen ten onrechte aanvaarden. Daaruit mag echter niet worden geconcludeerd dat de kans dat μ_x in het gegeven interval ligt 90% is. Het gemiddelde μ_x is namelijk een deterministische grootheid, waarbij het onzin is te spreken van een kans op ligging in een bepaald interval of daarbuiten. Zoiets mag alleen bij stochastische grootheden. De 90% betrouwbaarheid zegt alleen iets over het relatieve deel van alle stochastische uitspraken dat (gedaan op deze basis) juist is, het zegt verder niets over μ_x.

Verbaasd dat een onschuldig lijkende conclusie zoveel weerstand heeft opgeroepen kijkt de ingenieur naar de tweede statisticus in het gezelschap, de Bayesiaan. Deze merkt eerst op dat hij er geen bezwaar tegen heeft dat μ_x als stochastisch wordt beschouwd. Het stochastische karakter wordt volgens Bayesiaanse opvatting namelijk niet bepaald door de grootheid zelf (state of matter), maar door wat daarover bekend is. (state of mind). De uitspraak van de ingenieur is daarmee overigens nog niet zonder meer waar. Kennelijk, zo redeneert de Bayesiaan, is uitgegaan van een vage apriori normale verdeling voor μ_x, getuige de overeenkomst van de formules (10-27) en (10-21). De Bayesiaan zal dus nog aan de ingenieur vragen of deze vóór de waarnemingen echt zo weinig wist, of dat hij toch een of ander verwachtingspatroon had.
In dat laatste geval zouden bijvoorbeeld de formules (10-19) en (10-20) gebruikt kunnen worden met een dienovereenkomstige wijziging van het betrouwbaarheidsinterval.

"Daarmee worden alle uitspraken wel subjectief, terwijl het doel van de wetenschap toch moet zijn om objectieve uitspraken te doen", zal nu ongetwijfeld de reachtie van de klassieke statisticus zijn. De Bayesiaan merkt op dat objectiviteit geen doel in zichzelf moet worden. Het gaan er primair om zoveel mogelijk informatie mee te nemen tot bruikbare resultaten. In dat verband heeft de ingenieur nog een aardige vraag: wat doen we nu met x zelf? De klassieke statisticus meent dat x, gegeven de steekproef, als normaal verdeeld moet worden beschouwd, met standaardafwijking σ_x, en gemiddelde μ_o of μ_b al naar gelang wat in het beschouwde probleem een "veilige" aanname is.
De Bayesiaan zal er op wijzen dat de 90% betrouwbaarheidskans toch ook arbitrair en subjectief was. Als consequenties van een foutieve keus zeer ernstig worden bestaat de neiging om naar 95% of 99% te gaan. Criteria voor deze kansen zijn bijzonder moeilijk te formuleren. Bovendien treedt een vervelende vermenging op van kans en gevolg. De Bayesiaanse oplossing loopt wat dat betreft soepeler. D.m.v. de formules (10-23) en/of (10-25) worden de onzekerheden in μ_x en x als gelijkwaardig gecombineerd, hun onderlinge verhouding kan daarbij duidelijk aan het licht komen.

De eenmaal in het begin uitgevoerde apriori analyse t.a.v. μ_x spaart op dat moment dus een vervelende arbitraire keuze uit die bovendien vermengd is met meer aspecten (gevolgen).

10.6 Verdelingstype onbekend

De klassieke mathematische statistiek kent ook toetsen voor verdelingen. Er wordt een hypothese (H_o) gedaan dat een bepaalde grootheid een bepaalde verdeling heeft. Uitgaande van die hypothese worden vervolgens kritische waarden c_1 en c_2 voor een statistic t berekend via:

$$P\{c_1 < t < c_2 \mid H_o\} = 1 - \alpha \tag{10-28}$$

Als waargenomen waarde van de statistic (t(D)) buiten het interval ligt wordt de hypothese H_o verworpen. De betrouwbaarheid van de toets is $1 - \alpha$. De redenering is dus analoog aan die bij de parameterschatting. Wederom komt men in de verleiding om, bij voldoen van de waarnemingen aan de norm, de kans op juistheid van H_o te stellen op $1 - \alpha$. In dit geval is dat echter nog stelliger incorrect en te vergelijken met de uitspraak dat één specifieke waarde van het gemiddelde een kans heeft om juist te zijn.

Bezien vanuit de klassieke statistiek is er maar één juiste weergave: er is een kans α dat de hypothese H_o ten onrechte wordt verworpen. Acceptatie van H_o houdt eigenlijk alleen in dat er onvoldoende reden is om H_o te verwerpen. Natuurlijk kan men in een bepaald geval meerdere verdelingen toetsen. Indien al deze verdelingen een bepaalde toets overleven kan men α groter kiezen en kijken wanneer een van de hypothesen afvalt. Langs die weg zou men eventueel tot een keuze kunnen komen (maximum likehood schatting).

We zijn dan overigens al erg dicht aangeland bij de Bayesiaanse oplossing. Bij een Bayesiaanse aanpak selecteert men vooraf een aantal verdelingen, kent daaraan apriori-kansen toe en bepaalt vervolgens op grond van het waarnemingsmateriaal en het theorema van Bayes de aposteriori-kansen.

$$P\{H_i \mid D\} = N\, P\, \{D \mid H_i\}\; P\{H_i\} \tag{10-29}$$

H_i = verdeling i is juist

D = waarnemingen

Voor de variabele x kan vervolgens als dichtheidsfunctie worden genoteerd:

$$f_{x|D}\,(\xi) = \sum_i f_x^{\,i}(\xi)\; P\{H_i \mid D\} \tag{10-30}$$

waarbij $f_x^{\,i}\,(\xi)$ de dichtheidsfunctie van type i is.

Uiteraard is de selectie van verdelingstypen en de toekenning van $P(H_i \mid D)$ een subjectieve zaak.

Een alternatieve oplossing is te veronderstellen dat de verdeling van de onderzochte variabele een niet-lineaire transformatie is van een normaal verdeelde variabele:

$$x = a_o + a_1 u + a_2 u^2 \tag{10-31}$$

u is normaal met $\mu(u) = 0$ en $\sigma(u) = 1$. In wezen is het probleem nu teruggebracht tot het probleem van de parameterschatting. Bij ontwikkeling van (10-31) tot de n^e term heeft men in feite (n+1) parameters te bepalen. Eventueel zijn ook andere "meer-parameter systemen" bekend (bijv. het Pearson systeem ref. 10-4) waarmee men het verdelingskeuzeprobleem reduceert tot een parameterkeuzeprobleem. In practische gevallen lijkt zo'n werkwijze meestal aan te bevelen. Men kan daarbij zowel Bayesiaans als klassiek statistisch te werk gaan.

10.7 Conclusie

De ingenieur die gebruik wil maken van probabilistische methoden is het meest gebaat bij een Bayesiaans kansbegrip. Voor de beoordeling van zijn systeem heeft de ingenieur behoefte aan het meenemen van alle vormen van onzekerheid en het inbrengen van alle aanwezige informatie. In een Bayesiaanse analyse is dat mogelijk, zij het op een subjectieve manier. De mathematische statistiek tracht daarentegen alleen objectieve uitspraken te doen, maar kan daardoor minder informatie en minder vormen van onzekerheid meenemen.

VB 1) X_1 = normaal, $\sigma = 3$ N/mm², μ = onbekend; $n = 3$: $\xi_1 = 20$ N/mm², $\xi_2 = 24$ N/mm², $\xi_3 = 22$ N/mm² $\Rightarrow \bar{\xi} = 22$ N/mm²

Karakteristieke waarde. $X_{kar} = \mu - 1{,}28\sigma = 22 - 1{,}28 \cdot 3 = 18{,}16$ N/mm²

(1) Freq: $\mu_{veilig} = 22 - \frac{1{,}64 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 19{,}1$

$X_{kar} = \mu_{veilig} - 1{,}28 \cdot 3 = 19{,}1 - 3{,}84 = 15{,}26$ N/mm²

(2) Bayes) $X_{kar} = \bar{\xi} - 1{,}28 \times 3\sqrt{1 + 1/3} = 22 - 1{,}28 \cdot 3\sqrt{\frac{4}{3}}$

$= 17{,}75$ N/mm²

LITERATUUR

(10-1) Benjamin, J.R., Cornell, C.A.
Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers Mc Graw Hill Book Company, New York, 1969.

(10-2) Box, E.P., Tiao, G.C.
Bayesian Inference in Statistical Analysis
Addison-Wesley Publishing Company, London 1973.

(10-3) Raiffa, H., Schlaifer, R.
Applied Statistical Decision Theory
Harvard University

(10-4) Johnson, Elderton, J.
Systems of Frequency curves
Cambridge University Press 1969