

3901

# Scheepshydronechanica

Deel I: Beknopte theoretische stromingsleer t.b.v. de maritieme techniek  
Rapport nr. 481 — K (herdruk)

Prof.ir. M.C. Meijer

Collegedictaat

mt511 Scheepshydronechanica

Deel I: Inleiding tot de ruimtelijke stromingsleer ten behoeve  
van de maritieme techniek

door: Lector Ir. M.C. Meijer.

Voorwoord:

Dit college bedoelt inzicht te geven in de moderne stromingsleer, zonder diep op de verschillende zaken in te gaan. De maritieme ingenieur moet de methoden en begrippen voldoende kennen om een gesprek met specialisten te kunnen voeren ten behoeve van het in praktijk brengen van diens bevindingen.

In het verleden is wel de klacht gehoord dat het college als los zand aan elkaar zit. Om hieraan tegemoet te komen is getracht om alle begrippen en uitwerkingen daarvan in een logische volgorde, aan de hand van een concreet voorbeeld te presenteren.

Door veel studenten wordt de stromingsleer als een moeilijk vak ervaren. Toch zal er in de toekomst minder tijd beschikbaar zijn voor de colleges; mede om die reden wordt met dit college tevens getracht ervaring op te doen met een enigszins populaire presentatie, die misschien zal helpen om het begrip te stimuleren. Voor een diepere en meer exacte behandeling van de stromingsleer mag naar de meer specialistische colleges worden verwezen.

Inleiding:

Ter inleiding enige jaartallen:

285 - 212 v. C.: Archimedes: Opdrijvende kracht = gewicht van de verplaatste vloeistof.

Isaac Newton: Bewegingswetten ( $F=ma$ )

1738 Daniel Bernoulli: Energievergelijkingen

1755 Leonard Euler: Wetten van Newton toegepast op vloeistoffen

Jean le Rond d'

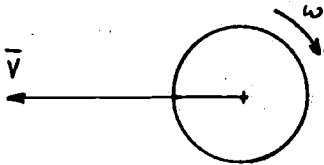
Alembert: Paradox; Euler's vergelijkingen kunnen de weerstand niet verklaren.

1827	Navier ) Bewegingsvergelijkingen met schuifkrach-
1845	Stokes ) ten.
1883	Osborne Reynolds: Onderscheid laminair-turbulent
1904	Ludwig Prandtl: Grenslaagprincipes, verdeling visceus- en wrijvingsloos deel.
	Theodor von Kàrmàn

## A Kinematica.

### 1 Voorbeeld van een stromingsprobleem.

Een oneindig lange cirkelcylinder wordt in een richting loodrecht op zijn symmetrieas door een onbegrensde ruimte bewogen die gevuld is met water.



De translatiesnelheid is  $\bar{V}$ .

Tegelijkertijd roteert de cylinder om zijn as met een hoeksnelheid  $\omega$ .

De volgende vragen zijn denkbaar:

- hoe groot is de snelheid van de vloeistof op of buiten het lichaam en wat is zijn richting,
- welke krachten werken op de cylinder,
- wanneer is er gevaar voor cavitatie en waar treedt die voor het eerst op?

#### 1.1. Vlakke stroming.

Door de oneindige lengte van de cylinder is elke doorsnede loodrecht op de as gelijk aan alle andere en kan men zich beperken tot de beschouwing van het gebied tussen twee zulke doorsneden die de eenheid van lengte van elkaar verwijderd zijn. Men kan zich voorstellen dat de beweging plaats vindt tussen twee glasplaten ("wanden"). Men spreekt van een "vlakke stroming" of ook van een "tweedimensionale (2-D) stroming".

## 1.2. Relativiteitsprincipe.

Zoals het probleem is geformuleerd staat de toeschouwer stil ten opzichte van het water en beweegt het lichaam. De toeschouwer kan zonder enig bezwaar met het lichaam meebewegen, zodat het lichaam in rust lijkt te zijn en het water in zijn geheel beweegt. Er is een met de plaats constante snelheid aan elk punt van de stroming toegevoegd. Er is geen verschil tussen de twee beschouwingwijzen; een "absolute snelheid" bestaat niet.

Men kan dus een aan het lichaam gebonden assenstelsel toepassen en de stroming ten opzichte hiervan bestuderen.

Noot: Bij de beschouwing van elementaire waterdeeltjes komen ook twee beschouwingwijzen aan de orde:

- a) Beschouwingwijze volgens Lagrange: de toeschouwer beweegt mee met het vloeistofelement.

De snelheid is een functie van beginpunt en tijd:

$$\bar{v} = f(x_0, y_0, z_0, t)$$

- b) Beschouwingwijze volgens Euler: de toeschouwer blijft in de oorsprong van het assenstelsel:

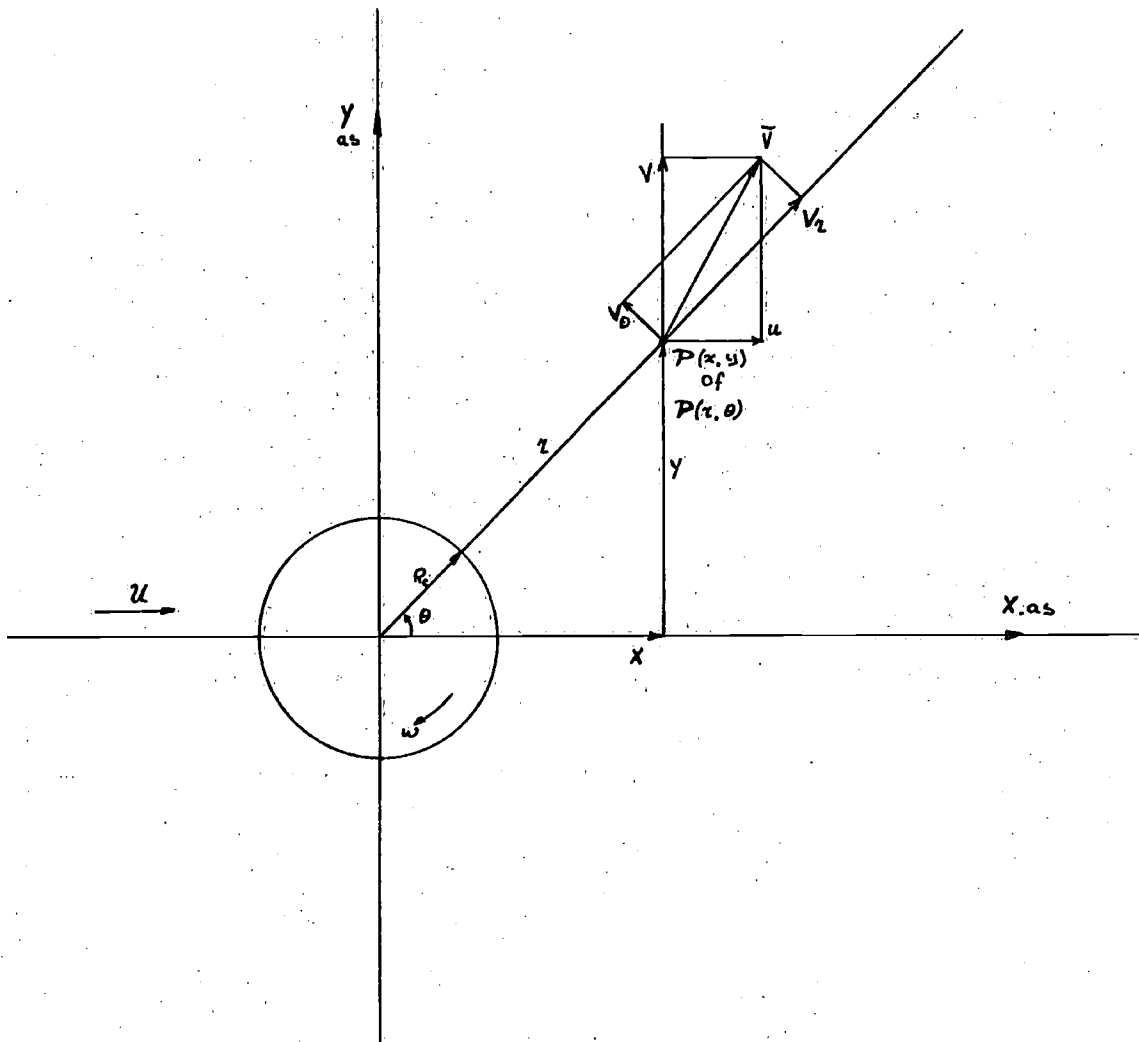
$$\bar{v} = f(x, y, z, t)$$

Deze beschouwingwijze wordt gewoonlijk gevolgd.

## 1.3. Assenstelsel.

Om plaats- en richtingsbepaling mogelijk te maken moet een assenstelsel worden gekozen. De moeilijkheidsgraad van de wiskundige behandeling hangt vaak sterk af van de keuze van de assen. Het gemakkelijkste is in het gegeven voorbeeld een stelsel met de oorsprong in de cylinderas en één der asrichtingen evenwijdig aan de bewegingsrichting.

Bij de cylinder is een polair stelsel aan te bevelen (cylindercoördinaten) die in combinatie met, of afwisselend met een cartesisch stelsel wordt gebruikt:



De plaatselijke snelheidscomponenten noemen we:  
 $u, v, w$  in respectievelijk de  $x, y, z$ -richting, of in cylinder-  
 coördinaten:  $v_r, v_\theta, w$  in  $r, \theta, z$ -richting.

Noot: De stelsels zijn gekoppeld door de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y &= r \sin \theta & \theta &= \arctan y/x \\
 v &= v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \\
 u &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\
 &\text{enz.}
 \end{aligned}$$

In het voorbeeld is de contour gegeven door:  $r = R_c$   
 de translatiesnelheid door:  $u = U$  in  $x = \pm \infty$  of  $y = \pm \infty$   
 de rotatie door:  $\dot{\theta} = -\omega$  of  $v_\theta = -\omega R_c$

## 2. Randvoorwaarden.

### 2.1. Ondoorlaatbare wanden.

Meestal zijn de wanden, of de lichaamscontouren ondoorlaatbaar; de stroming kan er alleen langs, niet er doorheen, dus:

$$\text{normaalsnelheid: } v_n = \bar{v} \cdot \bar{n} = 0 \quad (2.1.)$$

$$\text{tangentialaalsnelheid: } v_t = \bar{v} \cdot \bar{s}$$

$\bar{s}$  = eenheidsvector rakend aan de contour.

$\bar{n}$  = eenheidsvector loodrecht op de contour.

Voor de cylinder geldt in  $(R_c, \theta)$ :  $v_\theta = V$   
 $v_r = 0$  op het oppervlak

### 2.2. Slipvrije toestand ("no-slip condition")

Als wrijving in de beschouwingen wordt meegenomen, dan moet men bovendien stellen dat aan het cylinderoppervlak de snelheid van de waterdeeltjes dezelfde is als die van het oppervlak; het water slipt niet!

In het voorbeeld moet dus feitelijke gelden:  $v_\theta = -\omega R_c$   
 $v_r = 0$  in  $(R_c, \theta)$

Wrijving maakt de wiskundige behandeling erg moeilijk en wordt daarom verwaarloosd als dat maar enigszins mogelijk is. Toch is hij heel vaak nodig om bepaalde verschijnselen te verklaren. Zo is in het geval van het voorbeeld de wrijving nodig om te verklaren dat een "circulatie" ontstaat om de cylinder heen, ter grootte:

$$\Gamma = \oint v_\theta R_c d\theta = -2\pi\omega R_c^2 \quad (2.2.)$$

In het algemeen is per definitie:  $\Gamma = \oint \bar{v} \cdot d\bar{s}$   
of:  $\Gamma = \oint v_s ds$

Noot:  $\theta$  wordt altijd linksom positief aangenomen.

$\omega$  is hier rechtsom positief gesteld omdat dan blijkt dat een "liftkracht" omhoog ontstaat, hetgeen beter aanspreekt,

b.v. bij draagvleugels.

$\Gamma$  wordt soms rechtsonder, in andere boeken linksom positief genoemd. In dit college houden we ons aan dezelfde draai-richting als  $\theta$ , dus linksom.

### 2.3. Vrije oppervlakken.

Een randvoorwaarde van andere aard doet zich voor aan het vrije wateroppervlak en aan de begrenzingen van caviteiten en gasbellen. Hier wordt meestal de druk constant verondersteld. Dat dit meestal een redelijke aanname is, komt door het grote verschil in massadichtheid ( $\rho$ ) tussen water aan de ene kant en lucht, waterdamp en andere gassen aan de andere kant (factor 800).

### 3. Snelheidspotentiaal.

#### 3.1. Potentiaalbegrip.

Het zou prettig zijn als we een formule konden vinden, die voor het hele stromingsveld zou gelden en waaruit in elk punt de gevraagde eigenschappen zouden kunnen worden berekend.

Het snelheidsveld is een vectorveld en een vergelijking met andere vectorvelden ligt voor de hand. Het eenvoudigste voorbeeld is het krachtveld van de gravitatie:

In een gravitatieveld is de potentiële energie van een massa  $m$ :

$$E_{\text{pot}} = m g (z - z_0) \quad (z \text{ omhoog positief genomen})$$

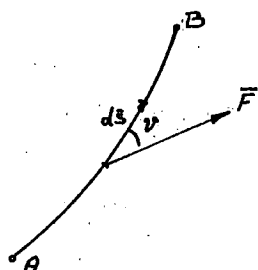
$z = z_0$  is een aangenomen referentieniveau. De potentiaal is constant als  $z = \text{constant}$  en de aequipotentiaalijnen staan overal loodrecht op de werklijn van de kracht. Per definitie neemt hier de potentiaal toe bij verplaatsing tegen de werking van de kracht in, dus als arbeid moet worden toegevoegd.

Noot: Een meer algemeen voorbeeld is het magnetische krachtveld. De analogie met het stromingsveld is frappant. Het gegeven voorbeeld van de stroming om de roterende cylinder kan worden voorgesteld met de combinatie van een homogeen veld,

een magnetische dipool en een, de cylinder vervangende stroomvoerende draad.

Algemeen geldt voor de toename van de krachtpotentiaal bij verplaatsing langs een weg  $s$  van een punt A naar een punt B:

$$P_B - P_A = - \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} \quad ( = \int F \cos \vartheta ds )$$



In de gekozen voorbeelden is de verandering van potentiaal onafhankelijk van de gekozen weg  $s$  tussen A en B. We noemen het krachtveld dan conservatief.

Een eigenschap van zo'n conservatief krachtveld is, dat in elk punt de component van de kracht in een bepaalde richting, bijvoorbeeld:

$$F_s = \text{component van } F \text{ in de richting } s,$$

bepaald is, door de potentiaal in het punt van aangrijpen, in de richting van  $s$  te differentiëren:

$$F_s = - \frac{\partial P}{\partial s}$$

In het stromingsveld (een snelheids-vectorveld) kan men zulke eigenschappen ook goed gebruiken. Daarom definieert men een snelheidspotentiaal op analoge wijze:

$$\phi = \int \bar{v} \cdot d\bar{s}$$

$$\text{of precieser: } \Delta\phi_{A \rightarrow B} = \int_A^B \bar{v} \cdot d\bar{s} \quad (3.1.)$$

$$\text{zodat: } d\phi = u dx + v dy + w dz \quad (3.1a.)$$

In tegenstelling tot de krachtpotentiaal, heeft de snelheidspotentiaal het - teken niet nodig; het heeft geen betekenis.



Noot: De potentiaaltheorie is een belangrijk wiskundig hulpmiddel met algemene geldigheid, die ook aan de stromingsleer goede diensten bewijst.

Als een snelheidspotentiaal bestaat, waarvan de waarde onafhankelijk is van de weg waarlangs hij is bepaald, dus anders gezegd: als het snelheidsveld kan worden voorgesteld door een conservatief vectorveld, dan is in elk punt  $P(x, y, z)$ :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

in cylindercoördinaten:  $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad v_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}$

in het algemeen:  $\bar{v} = \text{grad } \phi$  of:  $\bar{v} = \nabla \phi$  (3.2.)

### 3.2. Voorbeeld.

We gaan nu even terug naar ons voorbeeld en vragen ons af hoe de zaak er daarbij uitziet. We nemen voorlopig aan, dat de stroming kan worden voorgesteld door de volgende stromingspotentiaal:

$$\phi = Ux \left( 1 + \frac{R_c^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (3.3.)$$

Noot: Hier is de meest compacte schrijfwijze gebruikt, met cartesische- en cylindercoördinaten door elkaar.

Om een gemakkelijke formulering van de randvoorwaarde te krijgen ( $v_r = 0$ , als  $r = R_c$ ), gaan we werken in cylindercoördinaten (zie blz. 4):

$$\phi = U \cos \theta \left( r + \frac{R_c^2}{r} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (3.3a.)$$

radiale snelheidscomponent:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta \left( 1 - \frac{R_c^2}{r^2} \right) \quad (3.4.)$$

tangentiële snelheidscomponent:

$$v_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -U \sin \theta \left( 1 + \frac{R_c^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.5.)$$

We vinden  $v_r = 0$  als  $r = R_c$ , zodat aan de randvoorwaarde op de cylinder is voldaan. Ook zien we dat de invloed van de cylinder verdwijnt als  $r$  oneindig groot wordt. In het oneindige zijn:

$$v_r = U \cos \theta \quad \text{en} \quad v_\theta = -U \sin \theta, \quad \text{of} \quad u = U \quad \text{en} \quad v = 0$$

(zie blz. 4)

Het meest interessante is meestal de snelheidsverdeling langs de contour, dus als  $r = R_c$ . Hier is in overeenstemming met de randvoorwaarde  $v_r = 0$ , maar ook:

$$v_\theta = -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R_c} \quad (3.6.)$$

extremen treden op bij  $\theta = \frac{\pi}{2}$  en  $\theta = \frac{3\pi}{2}$

De grootste snelheid treedt op bij de combinatie:  $\theta = \frac{\pi}{2}$   
en :  $\Gamma = -\Gamma_0$

Denk bij  $\Gamma_0$  aan vergelijking (2.2.):  $\Gamma_0 = 2\pi\omega R_c^2$  (3.7.)

Dit maximum bedraagt:  $v_\theta \text{ max.} = -\left(2U + \frac{\Gamma_0}{2\pi R_c}\right)$  (3.8.)

Als  $\theta = 3\pi/2$ , is  $v_\theta = 2U - \frac{\Gamma_0}{2\pi R_c}$

Zonder circulatie zijn beide snelheden gelijk; als  $\Gamma_0 = 4\pi U R_c$ , is de snelheid onder aan de cylinder = 0 (3.9.)

In het algemeen wordt de snelheid op het cylinderoppervlak = 0, als:

$$\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi R_c U} \quad (3.10.)$$

In het voorbeeld dus, als  $\sin \theta = \frac{-\Gamma_0}{4\pi R_c U} = \frac{y_c}{R_c}$

Deze "stuwpunten" waar het water stagneert ("stagnation points") liggen in dit geval dus onder de x-as. Als er geen circulatie is, liggen ze op de x-as. Onder voorwaarde (3.9.) vallen ze samen op de y-as.

als  $\frac{\Gamma_0}{4\pi R_c U} > 1$ , verplaatst het stuwpunt zich langs de negatieve y-as, buiten de contour.

Voor een stuwpunt moet behalve  $v_\theta = 0$ , ook  $v_r = 0$  zijn. Buiten de contour kan dit alleen als  $\cos \theta = 0$ , (zie 3.4.) dus, langs de y-as.

$v_\theta = 0$  en  $\sin \theta = -1$  levert met  $\Gamma = -\Gamma_0$  in vgl. (3.5.) een vierkantsvergelijking in  $\frac{1}{r}$ , waaruit volgt dat er behalve een stuwpunt buiten de contour, ook één binnen de contour gevonden wordt. (ga dat na).

### 3.3. Gebied binnen de contour.

Vergelijking (3.3.) stelt ook binnen de cylinder een vectorveld voor, die voor het beeld van een stroming in aanmerking zou kunnen komen. We hebben evenwel gezien dat er geen water door het oppervlak heen stroomt. De twee stromingen zijn dus helemaal van elkaar gescheiden, zodat het geen verschil maakt, of één van beiden wordt genegeerd; in ons voorbeeld denken we het binnengebied vervangen door een vaste stof.

### 4. Stroomlijnen.

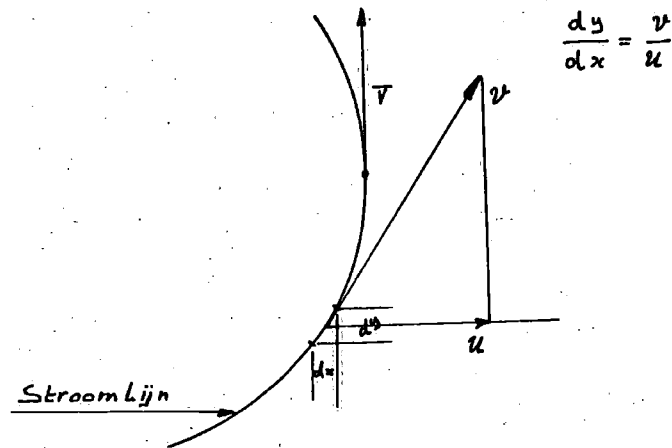
Met het opstellen van de randvoorwaarden was een begin gemaakt aan het in beeld brengen van de stroming. In elk punt van de contour valt de werklijn van de snelheidsvector samen met de raaklijn aan de contour. Dit komt overeen met de definitie van een stroomlijn. De contour vormt dus (een gedeelte van) een stroomlijn.

Stroomlijnen worden voorgesteld door:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (4.1.)$$

of, in een tweedimensionale- of vlakke stroming:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$



#### 4.1. Stationair of instationair; baan van de deeltjes.

Als de snelheid in elk punt onafhankelijk is van de tijd, heet de stroming stationair. In dat geval zijn ook de stroomlijnen constant en vormen zij de banen waarlangs de deeltjes zich verplaatsen. Is de stroming daarentegen instationair, dan is het stroomlijnenbeeld een momentopname en volgen de deeltjes andere banen.

Noot: Een inkdstreep in een waterstroom of een rooksliert in lucht, is een opeenvolging van deeltjes, die in een stationaire stroming samenvalt met een stroomlijn. In een instationaire stroming valt hij niet samen met een stroomlijn, noch met de baan van afzonderlijke deeltjes.

#### 5. Stroomfunctie $\psi$ .

##### 5.1. Stroombuizen.

Stroomlijnen zijn lijnen die niet door de waterdeeltjes worden overschreden. Vlakken die uit stroomlijnen zijn samengesteld en in zichzelf gesloten zijn, kunnen dus beschouwd worden als de wanden van een buis waar water doorheen stroomt. Door elke dwarsdoorsnede stroomt per seconde evenveel water, omdat we wel moeten veronderstellen dat de stroming continu moet zijn (wet van behoud van massa). De buizen, gevormd door stroomlijnen, noemen we "stroombuizen".

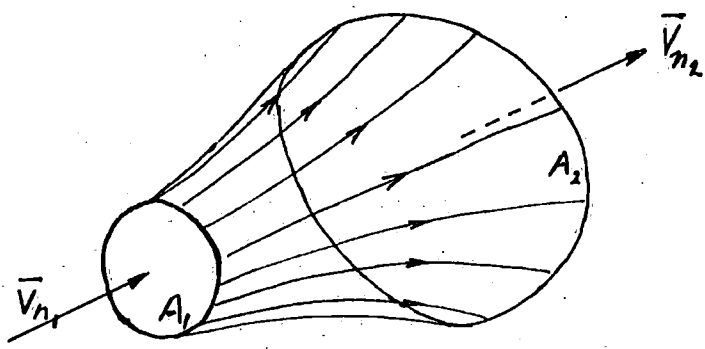


fig.5.1.1

stroombuis in het algemeen.

$$A_1 V_{n1} = A_2 V_{n2}$$

A = oppervlak van de doorsnede

$V_n$  = gemiddelde normaalcomponent van de snelheid.

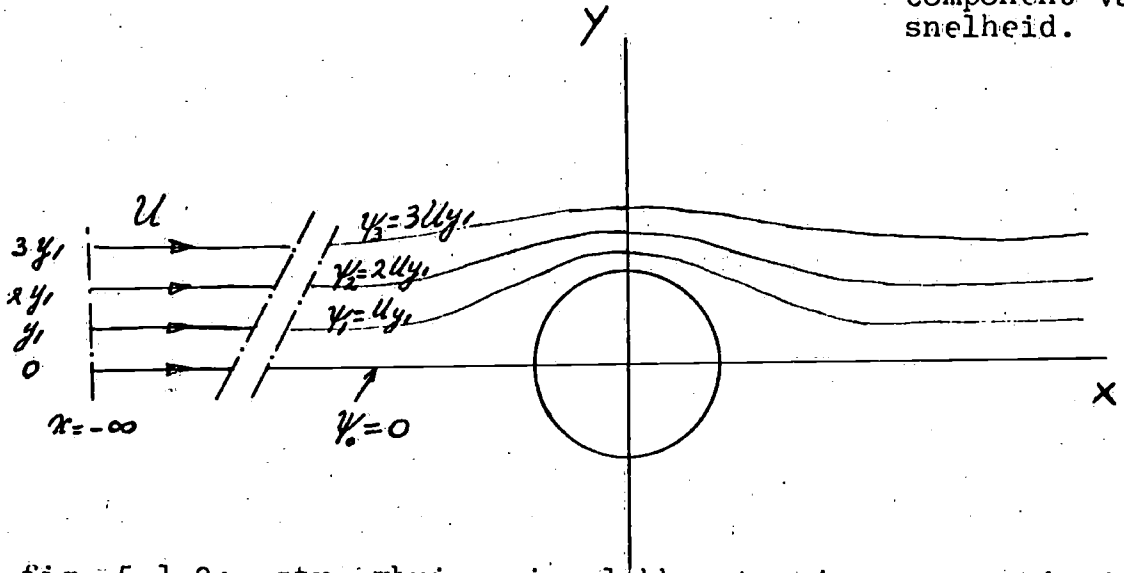


fig. 5.1.2: stroombuizen in vlakke stroming van voorbeeld.

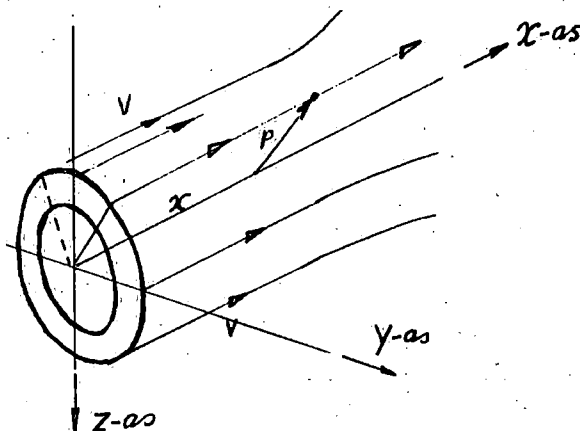
In een tweedimensionale stroming worden stroombuizen eenduidig door de stroomlijnen gedefinieerd. In fig. 5.1.2. stroomt tussen elk getekende stel stroomlijnen door elke dwarsdoorsnede een massa:  $\rho U y_1$  (met de lengte-eenheid als dikte van de stroming!).

We kunnen aan elke stroomlijn een waarde:  $\psi$  toekennen, waardoor de massa tussen deze en elke andere stroomlijn is gekarakteriseerd ( $\psi = \text{constant}$  stelt dus een stroomlijn voor).

We noemen  $\psi$  de "stroomfunctie".

Noot: In echte driedimensionale stromingen heeft  $\psi$  geen betekenis; wel bij rotatiesymmetrie. In dat geval is de stroming in feite ook twee-dimensionaal, want zij is alleen afhankelijk

van de axiale positie (langs de x-as) en van de radiale positie (afstand tot de x-as). De positie van het vlak van tekening doet niet ter zake, zolang hij maar door de x-as gaat.



De per seconde passerende hoeveelheid tussen de stroomlijnen  $\psi$  en  $\psi + d\psi$  is hier:

$$d\psi = 2\pi r \cdot dr \cdot V \quad (5.1.)$$

Bij gebruik als rekengrootheid is de fysische betekenis niet belangrijk en kan men de constante weglaten. Voor de doorstromende hoeveelheid gebruikt men dan ook meestal een ander symbool en geeft het een andere naam, b.v. het "debiet":  $Q$  of de "flux"

## 5.2. Stroomfunctie, algemeen.

Beschouw de vlakke stroming tussen twee stroomlijnen, gekarakteriseerd door de waarden  $\psi_1$  en  $\psi_2$  van de stroomfunctie en neem op elke stroomlijn een willekeurig punt aan: A op  $\psi_1$  en B op  $\psi_2$ .

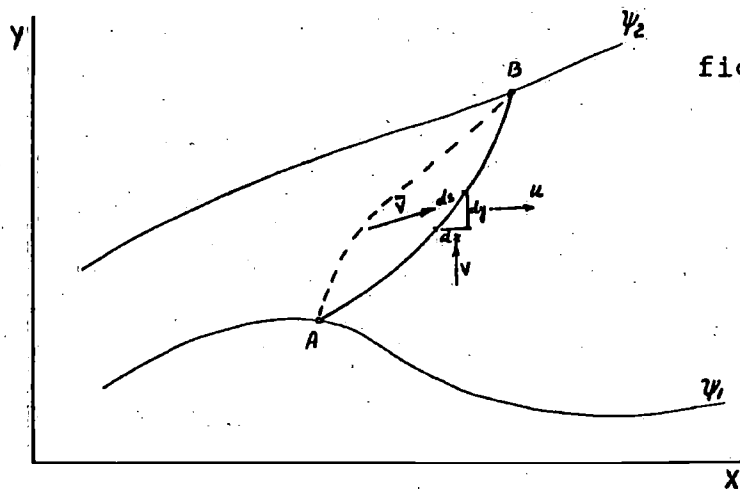
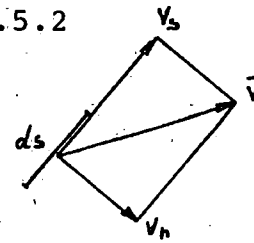


fig.5.2



Door een willekeurige kromme lijn: s, die A met B verbindt, stroomt een volume (we stellen steeds  $\rho = \text{constant}$ ) per seconde:

$$\int_A^B V_n ds, \text{ waarbij } V_n = \text{de normaalcomponent van } \bar{v}$$

zodat we kunnen definiëren:

$$\psi_B - \psi_A = \int_A^B V_n ds \quad (5.2.)$$

Door het element ds stroomt per seconde van links naar rechts (zie fig. 5.2.) het volume:

$$u dy - v dx,$$

$$\text{zodat: } d\psi = u dy - v dx \quad (5.3.)$$

$$\text{of in poolcoördinaten: } d\psi = v_r r d\theta - v_\theta dr \quad (5.3a.)$$

Noot: Bij rotatiesymmetrie spreekt men van de stroomfunctie van Stokes.

In cylindercoördinaten met de x-as als coördinaatas en r,  $\theta$  in het y-z vlak, wordt dan:

$$d\psi = 2\pi r dr u - 2\pi r dx v_r$$

Dit is de hoeveelheid die stroomt door een ring met straal r en dikte  $(dx + dr)$

$\Delta\psi$  is onafhankelijk van de gekozen weg tussen A en B omdat in elk geval dezelfde hoeveelheid water passeert.

$\Delta\psi$  is onafhankelijk van de positie van A of B op de stroomlijnen, want we kunnen de weg onbeperkt verlengen langs de stroomlijnen zonder de doorstromende hoeveelheid te veranderen.

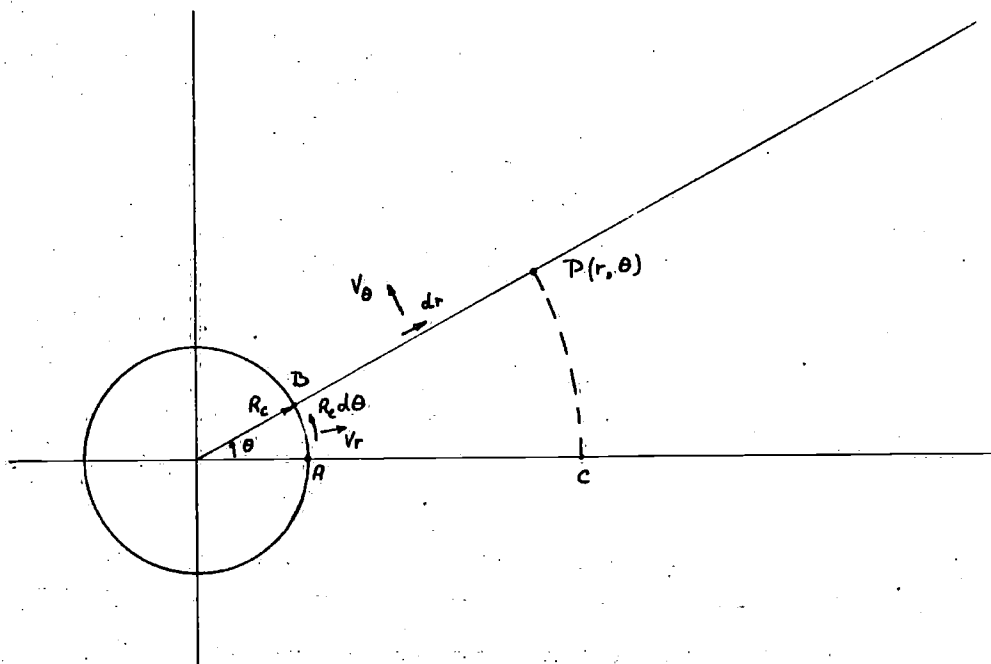
Evenals bij de snelheidspotentiaal, kunnen de snelheidscomponenten door partiële differentiatie van de stroomfunctie worden afgeleid:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (5.4.)$$

of in poolcoördinaten:

$$v_r = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta}; \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (5.4a.)$$

### 5.3. Voorbeeld.



In het voorbeeld kunnen we  $\psi = 0$  stellen op de grensstroomlijn, dus op de contour van de cylinder ( $r = R_c$ ), bijvoorbeeld in A ( $R_c, 0$ ) en we kunnen de integratieweg kiezen volgens ABP.

In P ( $r, \theta$ ) geldt dan:

$$\psi = \int_0^\theta v_r R_c d\theta - \int_{R_c}^r v_\theta dr \quad (5.5.)$$



op de contour is  $v_r = 0$ , zodat de eerste term wegvalt.

Volgens (3.5.) is:

$$v_\theta = -U \sin\theta \left(1 + \frac{R_C^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

zodat (5.5.) wordt:

$$\psi = U \sin\theta \left(r - \frac{R_C^2}{r}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad \left| \begin{array}{l} r \\ R_C \end{array} \right.$$
$$\psi = U r \sin\theta \left(1 - \frac{R_C^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R_C} \quad (5.6.)$$

De integratieweg ACP levert hetzelfde op, zij het met meer moeite.

Noot: Ter controle altijd even  $v_r$  en  $v_\theta$  terugrekenen.

Voor elke willekeurige waarde van  $\psi$  levert het verband tussen  $r$  en  $\theta$  een stroomlijn op, die kan worden getekend.

Noot: Op analoge wijze kunnen voor:  $\phi = \text{constant}$ , aequipotentiaalvlakken worden getekend. De waarde hiervan zal later worden uiteengezet.

## 6. Algemene voorwaarden.

Afgezien van drukken en krachten is er nu een vrij volledig beeld van de stroming ontstaan. Maar het is nog de vraag of dit beeld met de werkelijkheid overeen kan komen en onder welke voorwaarden. In de eerste plaats zal voldaan moeten worden aan de wet van behoud van massa, dat wil zeggen dat de stroming continu moet zijn.

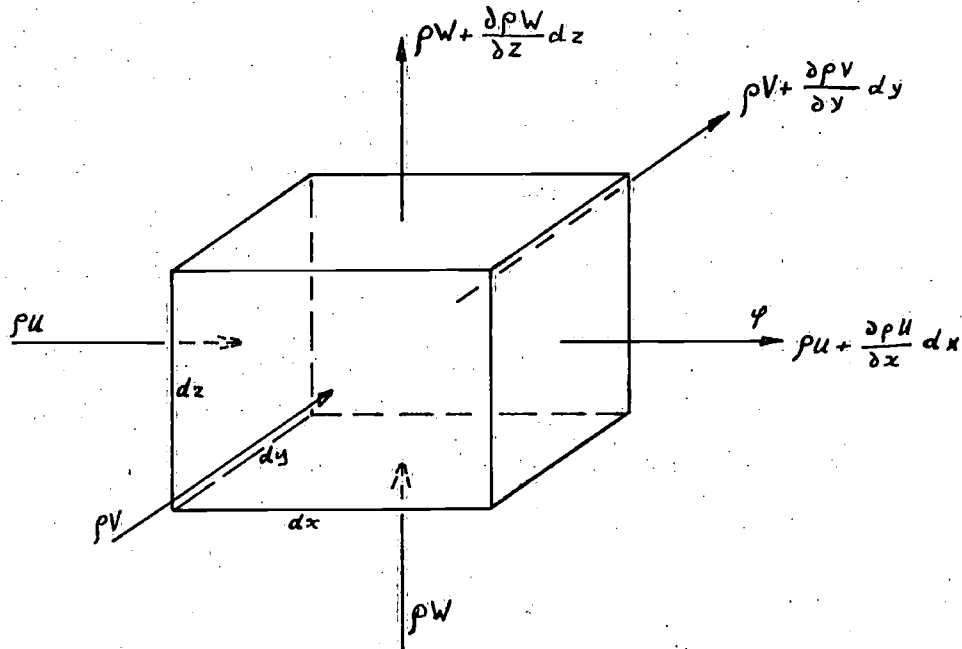
### 6.1. Continuïteitsvergelijking.

We nemen voorlopig aan dat de vloeistof samendrukbaar is en dat in de tijdseenheid de massa die zich bevindt in een vast ruimte-element ter grootte van  $dx \cdot dy \cdot dz$ , toeneemt met:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz) \quad (6.1.)$$

Aannemende dat de stroming continu is, en de vloeistof homogeen, zal per seconde door de zijvlakken toestromen:

$$\rho \cdot u \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot v \cdot dz \cdot dx + \rho \cdot w \cdot dx \cdot dy.$$



Uit het element stroomt per seconde weg:

$$(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx) dy dz + (\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy) dz dx + (\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz) dx dy$$

Resultierend neemt de massa dus af, zodat:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial \rho w}{\partial z} dx dy dz \quad (6.2.)$$

(6.1.) en (6.2.) leveren per volume-eenheid:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (6.3.)$$

Wij beperken ons tot de onsamendrukbare media, waartoe we ook lucht mogen rekenen als de snelheden ver beneden de geluidssnelheid liggen. We kunnen hierbij  $\rho = \text{constant}$  rekenen, zodat de voorwaarde voor continuïteit wordt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{of: } \text{div. } \vec{v} = 0$$

$$\text{of: } \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (6.4.)$$

In cylindercoördinaten wordt dit:

$$\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} = 0 \quad (6.4a.)$$

Noot: Hierbij behoort dus de voorwaarde dat het medium homogeen is; er mogen dus binnen het beschouwde element geen holten voorkomen, zoals cavitatie, gasbellen e.d.

Caviteiten worden behandeld als lichamen met veranderlijke vorm, met als randvoorwaarde:

constante druk ( $p_v$ ) langs de contour.

Met toepassing van de snelheidspotentiaal gaat de continuïteitsvergelijking er als volgt uitzien:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{of: } \nabla^2 \phi = 0 \quad (6.5.)$$

Dit is de vergelijking van Laplace. Oplossingen van de potentiaaltheorie bestemd voor onsamendrukbare stromingen moeten hieraan dus voldoen.

Passen we de continuïteitsvergelijking toe op de stroomfunctie (2-D), dan ontstaat:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (6.6.)$$

Dit betekent dat de stroomfunctie de voorwaarde van continuïteit in zich bergt, mits de vloeistof onsamendrukbaar is. (6.6.) is zonder meer waar voor een continue functie in x en y.

## 6.2. Rotatievrijheid.

Een tweede voorwaarde om de potentiaaltheorie te mogen toepassen volgt uit een eigenschap van de potentiaaltheorie zelf:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Ook hier geldt weer dat:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} ,$$

zodat:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (6.7.)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

De laatste twee vergelijkingen worden op dezelfde wijze gevonden; ze kunnen ook door cyclische verwisseling uit elkaar worden verkregen.

Deze vergelijkingen betekenen dat de stroming rotatievrij moet zijn, daar de vergelijkingen (6.7.) de drie rotatiecomponenten voorstellen in het cartesische assenstelsel, respectievelijk:

$$\gamma_z, \gamma_x, \gamma_y \quad (\text{zie volgende paragraaf})$$

### 6.3. Vervorming en rotatie.

De snelheidscomponent  $u$  (bijvoorbeeld) is een functie van  $x, y, z$  en  $t$  en kan volgens Taylor in de volgende reeks worden ontwikkeld:

$$u + \Delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \text{hogere orde termen.}$$

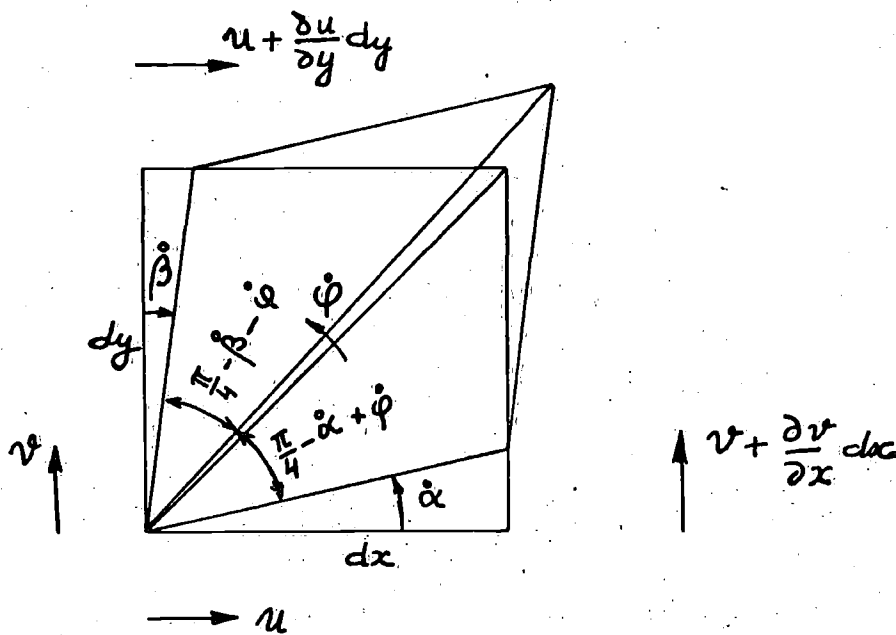
In de limietovergang, als  $\Delta u \rightarrow 0$ , kunnen de hogere orde termen worden verwaarloosd, zodat:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Hiervoor kan het volgende worden geschreven:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$\text{strekking} \quad \text{vervorming} \quad \text{rotatie} \quad (6.8.)$$



$$\frac{\partial v}{\partial x} = \tan \alpha = \alpha ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \tan \beta = \beta$$

Van een vierkant oppervlakte-elementje blijkt de diagonaal (bissectrice) te verdraaien over een hoek:

$$\phi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (\text{want: } \pi/4 - \alpha + \phi = \pi/4 - \beta - \phi)$$

de hoeksnelheid van de diagonaal is dus:

$$\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (6.9.)$$

Gemakkelijk is in te zien dat de vervormingssnelheid is te definiëren als:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (6.10.)$$

De andere rotatie- en vervormingscomponenten kunnen door cyclische verwisseling worden verkregen.

#### 6.4. Toetsing.

De voorwaarde van rotatievrijheid is uit de theorie naar voren gekomen. Om te toetsen of dit met de werkelijkheid overeenkomt, brengt men kruisvormige drijvertjes in de waterstroom. Het blijkt, dat de kruisjes niet verdraaien bij het passeren van het omstroomde lichaam, mits dit niet al te dichtbij komt. Als een drijvertje in de grenslaag terecht komt, dan verdraait het wel. In dit gebied kan de potentiaaltheorie blijkbaar niet worden toegepast.

Een andere toetsing van de waarde van de potentiaaltheorie kan worden verkregen door berekende "inkt- (of rook-) lijnen" te vergelijken met fotografisch verkregen beelden. Zulke vergelijkingen blijken in veel gevallen erg goed op te gaan.

Meestal is het feitelijke doel van de theorie, de krachten te berekenen. In dat geval ligt het voor de hand, de theorie te toetsen door vergelijking met gemeten krachten, of beter nog, met gemeten drukverdelingen.

#### 7. Dynamica.

Bij het omstromen van een lichaam ondervinden de waterdeeltjes versnellingen en vertragingen. Doordat de deeltjes massa hebben, gaat dit gepaard met het optreden van traagheidskrachten volgens de tweede wet van Newton. Deze moeten evenwicht maken met inwendige spanningen en uitwendige krachten, die hun invloed hebben op het omstroomde lichaam.

We zullen nu eerst op deze krachten ingaan.

##### 7.1. Versnellingen.

We beschouwen de beweging van een vast massa-element in x-richting; de versnellingscomponent is:

$$a_x = \frac{D}{Dt} u(x, y, z, t) \quad (\text{materiële fluxie volgens Lagrange})$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

nu zijn:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad \text{zodat we kunnen schrijven:}$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (7.1.)$$

of:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{v} \text{ grad. } u \quad (a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{v} \nabla u)$$

evenzo geldt:

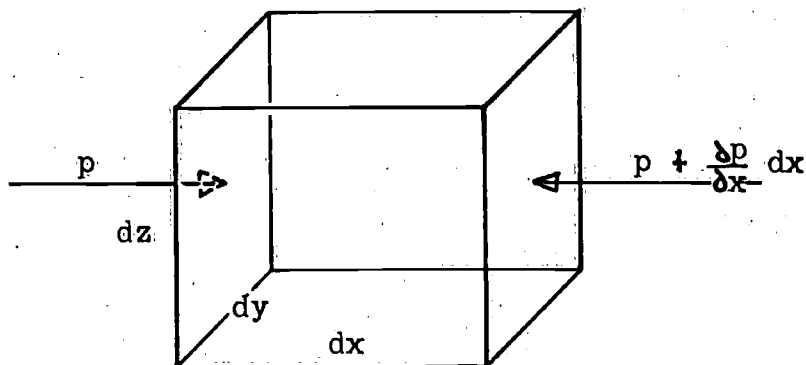
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{v} \text{ grad. } v$$

en:

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \bar{v} \text{ grad. } w$$

voor de y- en z-richtingen.

## 7.2. Drukkrachten.



Als we voorlopig wrijving verwaarlozen, hebben we van de inwendige spanningen alleen met de druk te maken, die alleen normaalkrachten op de eindvlakken van een vloeistofelement oplevert.

In positieve x-richting resulteert de kracht:

$$F_x = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

per eenheid van massa, dus in dezelfde dimensie als de versnelling:

$$F_x = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

in de andere richtingen vinden we evenzo:

$$F_y = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

en:  $F_z = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$  (7.2.)

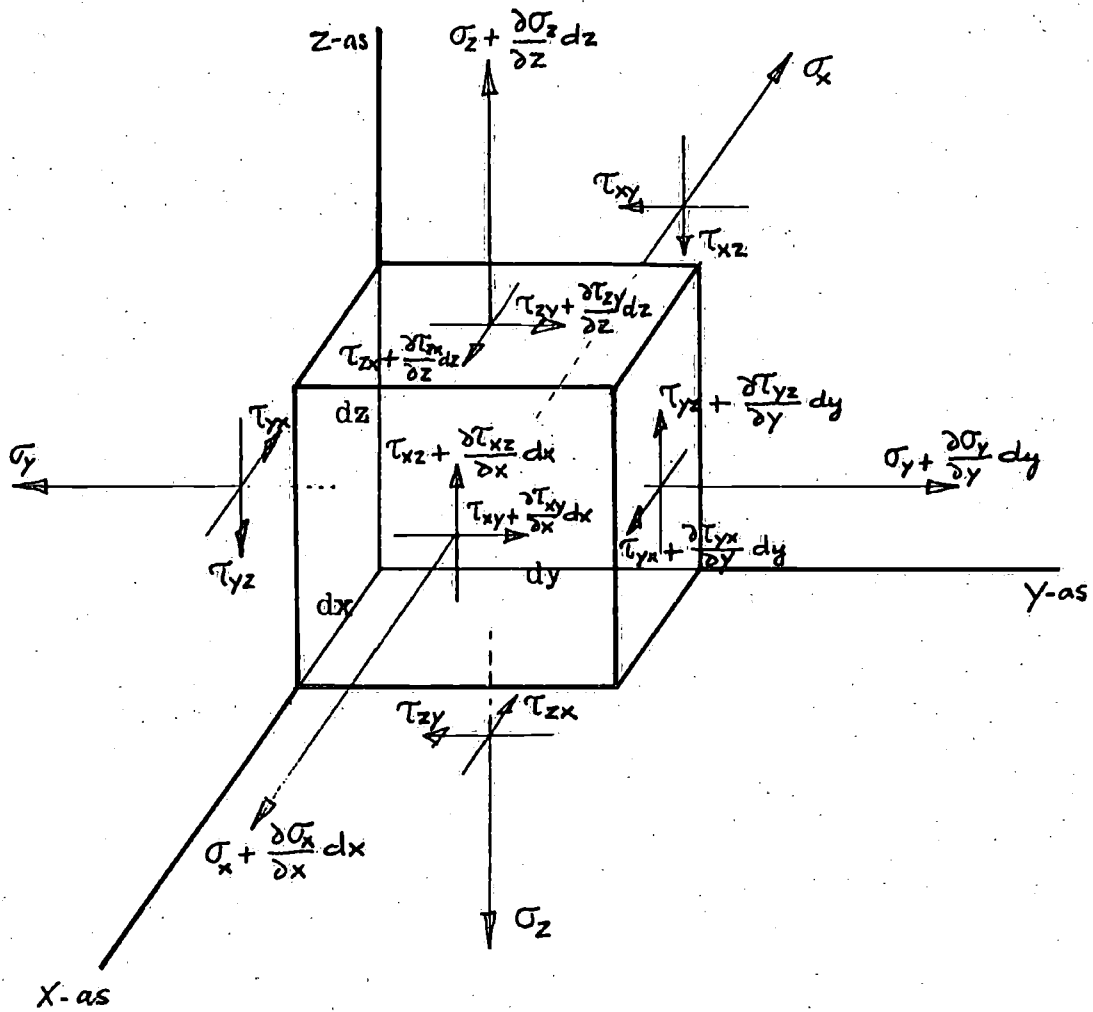
Noot: Om een meer volledig beeld te schetsen, wordt in het volgende ook de spanningstoestand met wrijving behandeld. Gedegen kennis hiervan wordt niet verlangd.

#### Spanningstoestand met wrijving (Prandtl: "Strömungslehre")

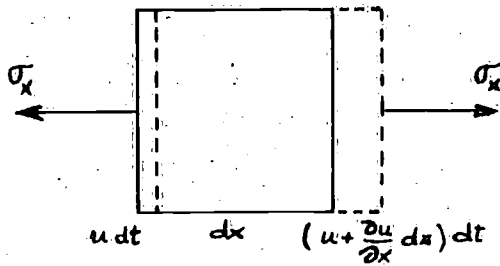
De elementaire spanningen in de vloeistof zijn evenredig aan de vervormingssnelheid. Dit in tegenstelling tot de elastische spanningen in vaste stoffen, die evenredig zijn aan de vervorming, voor zover ze de wet van Hooke volgen. Bij stromingen geldt een dergelijke voorwaarde voor de evenredigheid; hier spreken we van "Newtonse media" als de evenredigheid opgaat. De constante is de mechanische viscositeitscoëfficiënt  $\mu$ .

Bij afleidingen wordt gebruik gemaakt van de veronderstelling dat de vloeistof isotroop is, dat wil zeggen dat de eigenschappen in alle richtingen gelijk zijn.

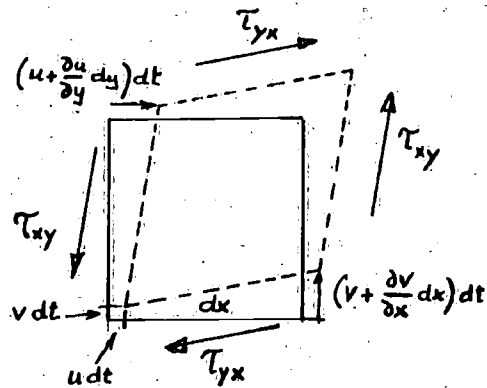




Zonder nadere uitleg worden formules gegeven voor de normaalspanningen evenredig aan de streksnelheid en voor de schuifspanningen evenredig aan de vervormingssnelheid (zie (6.8.)).



$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (7.3.)$$



$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (7.4.)$$

In x-richting werkt in totaal de kracht:

$$\begin{aligned}-\sigma_x dydz + \sigma_x dydz + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz - \tau_{yx} dx dz + \tau_{yx} dx dz + \\ + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz - \tau_{zx} dx dy + \tau_{zx} dx dy + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy\end{aligned}$$

netto per volume-eenheid werkt dus in x-richting:

$$\rho F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

substitutie van de vergelijkingen (7.3.) en (7.4.) geeft:

$$\rho F_x = 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

of, per massa-eenheid, met invoering van  $\mu/\rho = \nu$  :

$$F_x = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Om de druk er in te brengen wordt volgens Pascal gesteld:

$$-p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

zodat:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

dus,

$$F_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\}$$

de krachten in y- en z-richting kunnen door cyclische verwisseling worden beschreven.

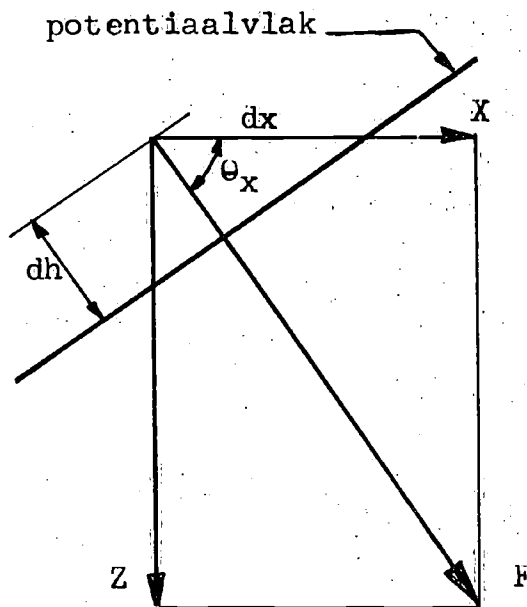
We kunnen ook schrijven:

$$F_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu (\nabla^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v}) \quad (7.5.)$$

Aangezien volgens de continuïteitsvoorwaarde voor onsamendrukbare vloeistoffen:  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  is, kunnen wij volstaan met de volgende serie vergelijkingen:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ F_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ F_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{aligned} \quad (7.6.)$$

### 7.3. Uitwendig krachtveld. (conservatief gesteld).



Neem een kracht  $F$  onder een hoek  $\theta_x$  met de  $x$ -as. Bij verplaatsing over  $dh$  in de richting van  $F$  wordt arbeid verricht:  $F \cdot dh$  per massa-eenheid.

De component  $X = F \cos \theta_x$  verricht dezelfde arbeid bij dezelfde potentiaalverandering in  $x$ -richting, want de componenten  $Y$  en  $Z$  leveren dan geen arbeid, dus:

$$\begin{aligned} X \cdot dx &= F \cdot dh \\ X &= F \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned}$$

Voor de zwaartekracht per massa-eenheid vinden we:

$$X = g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad Y = g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad Z = g \frac{\partial h}{\partial z} \quad (7.7.)$$

### 7.4. Vergelijkingen van Euler.

Voor de eenheid van massa levert het evenwicht tussen de krachten van vergelijking (7.1.) (versnellingen), (7.2.) (druk) en (7.7.) (uitwendige kracht), de vergelijkingen van Euler op:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.8.)$$

Hierin is de stroming wrijvingsloos en de vloeistof isotroop verondersteld ("ideale vloeistof").

## 7.5. Vergelijkingen van Navier-Stokes.

Als we in plaats van de drukkrachten volgens vgl. (7.2.), de totale spanningstoestand in de bewegingsvergelijkingen opnemen volgens de vergelijkingen (7.6.), dan krijgen we de vergelijkingen van Navier-Stokes.

Verkort geschreven:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad} u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad} v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g \frac{\partial h}{\partial z}\end{aligned}\quad (7.9.)$$

In dit geval gelden zij voor isotrope, homogene, onsamendrukbare vloeistoffen met wrijving.

## 7.6. Vergelijking van Bernoulli.

Integratie van de vergelijkingen van Navier-Stokes is erg moeilijk en in veel gevallen niet mogelijk. Daarom gaat men meestal uit van de veronderstelling dat men met een "ideale" wrijvingsloze vloeistof te maken heeft en beperkt zich tot de integratie van de vergelijkingen van Euler.

Om de integratie mogelijk te maken moeten we nog een veronderstelling aan de reeks toevoegen, waarvoor er twee mogelijkheden zijn:

- a. we integreren langs een stroomlijn.
- b. we nemen aan dat de stroming rotatievrij is.

### 7.6a. Langs een stroomlijn.

Hier geldt volgens (4.1.):

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

of:

$$v = u \frac{dy}{dx} \quad \text{en} \quad w = u \frac{dz}{dx}$$

gesubstitueerd in de vergelijkingen van Euler vinden we, als we voor het gemak de stroming stationair veronderstellen ( $\partial u / \partial t = 0$ )

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{dy}{dx} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{dz}{dx} \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x}, \text{ of:}$$

$$u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x}, \text{ of:}$$

$$u \frac{du}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x}, \text{ of:}$$

$$u du = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx + g \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (7.10a.)$$

evenzo:

$$v dv = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy + g \frac{\partial h}{\partial y} dy \quad (7.10b.)$$

en:

$$w dw = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz + g \frac{\partial h}{\partial z} dz \quad (7.10c.)$$

Voegen we de vergelijkingen (7.10a, b en c) samen, dan wordt:

$$u du + v dv + w dw = - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \dots\dots\dots$$

$$\text{of:} \quad u du + v dv + w dw = - \frac{1}{\rho} dp + g dh$$

met  $\rho = \text{constant}$  levert integratie:

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 = - \frac{p}{\rho} + gh + C$$

of, anders geschreven:

$$\frac{1}{2}\bar{v}^2 + \frac{p}{\rho} - gh = C$$

Dit is de vergelijking van Bernoulli, die dus geldt onder dezelfde voorwaarden als de vergelijkingen van Euler, maar wel is beperkt tot een stroomlijn. De integratieconstante C kan dus voor verschillende stroomlijnen verschillen.

Noot: Gewoonlijk wordt in het zwaartekrachtveld  $h$  naar boven positief genomen. In dit geval hebben we dezelfde richting aangehouden als  $g$ ; hierdoor is het - teken ontstaan.

### 7.6b. Bernoulli in een rotatievrije stroming.

Voorwaarde voor rotatievrijheid is onder meer dat (zie (6.7.)):

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

In de vergelijking van Euler voor de  $x$ -richting kunnen we dus  $\frac{\partial u}{\partial y}$  vervangen door  $\frac{\partial v}{\partial x}$  en  $\frac{\partial u}{\partial z}$  door  $\frac{\partial w}{\partial x}$ . Als we  $\frac{\partial u}{\partial t}$  ook

nog als een partieel afgeleide naar  $x$  kunnen schrijven en partieel afgeleiden naar  $y$  en  $z$  invoeren, overal in de vergelijkingen voor de  $y$ - en  $z$ -richtingen, dan is integratie weer gemakkelijk. Voor de instationaire termen kunnen we ons doel bereiken door de snelheidspotentiaal in te voeren, zodat:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

evenzo is:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

en:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

voor de  $x$ -richting vinden we:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x}$$

waarvan we kunnen maken, met  $\rho =$  constant gesteld:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{p}{\rho} + gh \right)$$

of ook:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - gh \right) dx = 0 \quad (\text{x-richting})$$

evenzo:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - gh \right) dy = 0 \quad (\text{y-richting})$$

en:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - gh \right) dz = 0 \quad (\text{z-richting})$$

Bij elkaar geteld en geïntegreerd geeft dit weer de vergelijking van Bernoulli, die dus ook blijkt te gelden voor het gehele stromingsveld als dit rotatievrij is. In dat geval is tevens een eenvoudige oplossing voor instationaire stromingen aanwezig:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 + \frac{p}{\rho} - gh = C \quad (7.10.)$$

Noot: h in de richting van g positief gemeten.

### 7.7. Voorbeeld; druk-coëfficiënten.

Ons voorbeeld is rotatievrij en stationair. In elk punt van het stromingsveld kan met de vergelijking van Bernoulli de druk worden bepaald, dus ook op de contour. We zullen ervaren dat het zwaartekrachtveld buiten beschouwing gelaten mag worden.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{en langs de omtrek van de cylinder is } \bar{v} = \bar{v}_\theta .$$

Vergelijking (3.6.), met  $\Gamma = -\Gamma_0$  gesteld, gaf op de contour:

$$\bar{v} = -U \left( 2 \sin \theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi R_c U} \right), \quad \text{zodat (7.10.) geeft:}$$

$$p = \rho C + \rho gh - \frac{1}{2} \rho U^2 \left( 2 \sin \theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi R_c U} \right)^2 \quad (7.11.)$$

C kunnen we bepalen als de druk in het oneindige ( $p_\infty$ ) bekend is. Hier is  $\bar{v} = U$ , zodat:

$$\rho C = p_\infty - \rho gh + \frac{1}{2} \rho U^2$$

op hetzelfde niveau h.

Substitutie hiervan in (7.11.) geeft:

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \left( 1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma_0 \sin \theta}{\pi R_c U} - \left( \frac{\Gamma_0}{2\pi R_c U} \right)^2 \right) \quad (7.12.)$$

Het is gebruikelijk om de druk in de vorm van een dimensieloze coëfficiënt weer te geven in relatie tot de druk in het oneindige:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (\text{definitie}) \quad (7.13.)$$



zodat de drukcoëfficiënten op het oppervlak van de cylinder worden:

$$C_p = 1 - 4\sin^2\theta - \frac{2\Gamma_o \sin\theta}{\pi R_c U} - \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi R_c U}\right)^2 \quad (7.14.)$$

De hoogste druk treedt op waar  $\bar{v} = 0$ , dus in de stuwpunten (zie (3.10.)). Daar is:

$$C_p = 1$$

De druk in de stuwpunten is dus:  $p_s = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2$

### 7.8. Voorbeeld; cavitatie-inceptie.

Een begin van het optreden van cavitatie moet worden verwacht als de laagste druk in het veld gelijk is aan de dampdruk van de vloeistof:  $p_v$ .

Volgens Bernoulli treedt de laagste druk op, waar de snelheid het grootste is. Dit is bij  $\sin\theta = \pi/2$  (zie ook (3.8.)), dan is:

$$p_{\min} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(-3 - \frac{2\Gamma_o}{\pi R_c U} - \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi R_c U}\right)^2\right) \quad (7.15.)$$

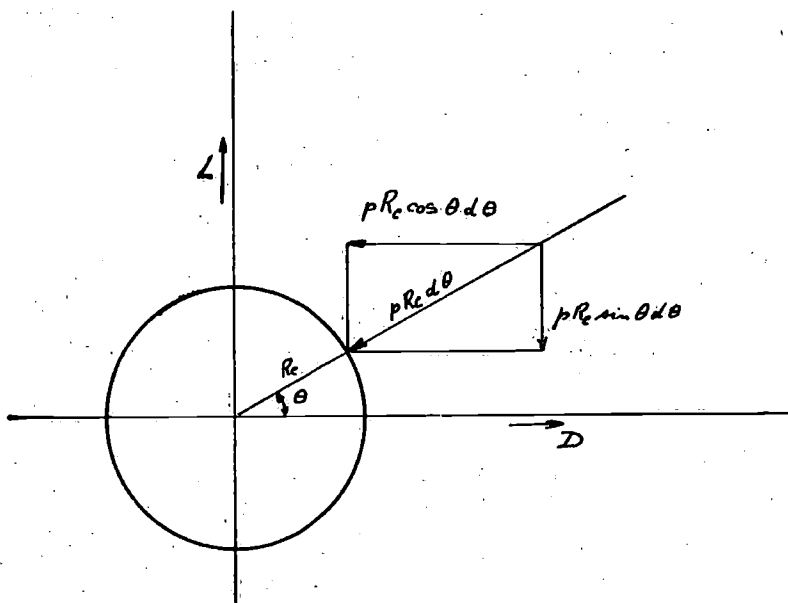
$$\text{dus: } C_p(\min) = -\left(3 + \frac{2\Gamma_o}{\pi R_c U} + \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi R_c U}\right)^2\right) \quad (7.15a.)$$

Het cavitatiegetal is gedefinieerd als  $\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}\rho U^2}$  ;  
zodat  $\sigma = -C_p$  op plaatsen waar de dampdruk heerst.

Bij de cylinder uit het voorbeeld kan dus een begin van cavitatie worden verwacht als  $C_p(\min) = -\sigma$ , dus als:

$$3 + \frac{2\Gamma_o}{\pi R_c U} + \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi R_c U}\right)^2 = \sigma \quad (7.16.)$$

7.9. Voorbeeld: Weerstand ("paradox van d'Alembert").



De drukkracht op een oppervlakte-element  $R_c d$  (dikte 1), heeft een component in de richting van de ongestoorde stroming (= weerstandscomponent):

$$dD = p R_c \cos \theta d\theta \quad (D = \text{"Drag"})$$

De totale weerstand kan worden berekend door integratie over het gehele oppervlak met  $p$  uit (7.12.):

$$D = \int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma_o \sin \theta}{\pi R_c U} - (\frac{\Gamma_o}{2\pi R_c U})^2) \right\} \cdot R_c \cos \theta d\theta \quad (7.17.)$$

Geen der termen blijkt een bijdrage tot de weerstand te leveren zodat deze nul blijkt te zijn.

Het is gebleken dat de potentiaaltheorie bij een gesloten lichaamscontour nooit weerstand oplevert. Men noemt dit feit de paradox van d'Alembert.

Op dit punt faalt de potentiaaltheorie blijkbaar, want experimenteel kan men altijd weerstand aantonen (misschien met uitzondering van stromingen van supervloeibaar helium).

### 7.10. Voorbeeld; Dwarskracht of "Lift".

Integratie van de component in y-richting van de drukkracht geeft:

$$L = - \int_0^{2\pi} \left\{ p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 \left( 1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma_0 \sin \theta}{\pi R_c U} - \left( \frac{\Gamma_0}{2\pi R_c U} \right)^2 \right) \right\} \cdot R_c \sin \theta \, d\theta \quad (7.18.)$$

Uitwerken leert dat alle termen op één na, nul worden. Overblijft:

$$\begin{aligned} L &= - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho U^2 \left( - \frac{2\Gamma_0 \sin \theta}{\pi R_c U} \right) R_c \sin \theta \, d\theta \\ \text{of:} \\ L &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \rho U \Gamma_0 \sin^2 \theta \, d\theta, \text{ wat uiteindelijk oplevert:} \\ L &= \rho \cdot U \cdot \Gamma_0 \quad (\text{per eenheid van breedte}) \quad (7.19.) \end{aligned}$$

Dit resultaat komt overeen met de wet van Kutta-Joukowski; een zijdelings ten opzichte van de richting van de ongestoorde stroming gerichte kracht hangt altijd samen met circulatie en bedraagt in een potentiaalstroming altijd:

$$L = \rho U \Gamma_0 \quad \text{per eenheid van breedte}$$

De bedoeling van de negatieve draairichting van  $\Gamma_0$  in het voorbeeld is nu duidelijk: de lift is naar boven positief uitgekomen.

### 8. Elementaire snelheidspotentialen en stroomfuncties.

Met de krachten en de drukverdeling zijn de belangrijkste oplossingen verkregen voor het stromingsprobleem van ons voorbeeld. We zijn echter uitgegaan van een gegeven-veronderstelde snelheidspotentiaal, die in de praktijk, afgezien van de weerstand, een goed beeld bleek te geven van de stroming.

In het volgende zullen we aangeven hoe een snelheidspotentiaal kan worden gevonden.

### 8.1. Superpositie van potentialen.

Een eigenschap van potentialen is de superponeerbaarheid ervan. Stel dat in een potentiaalveld in een punt  $P(x, y, z)$ , een vector  $\bar{v}_1$  heerst, die samengesteld gedacht kan worden uit de componenten  $u_1, v_1, w_1$ . Hierbij tellen we vectorisch op, een vector  $\bar{v}_2$  met de componenten:  $u_2, v_2, w_2$ .

Voor de resulterende vector geldt:

$$\bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2,$$

maar ook:

$$u_3 = u_1 + u_2$$

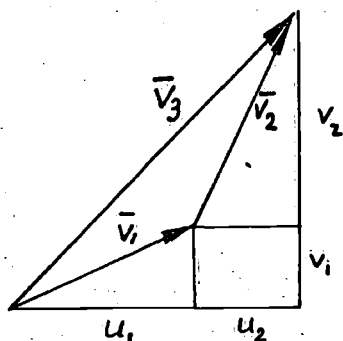
en:

$$v_3 = v_1 + v_2$$

(8.1.)

en:

$$w_3 = w_1 + w_2 \quad \text{voor de componenten in x-, y- en z-richting.}$$



Stel dat voor elk der vectoren  $\bar{v}_1$  en  $\bar{v}_2$  afzonderlijk een potentiaal functie geldt: resp.  $\phi_1$  en  $\phi_2$ , dan is:

$u_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}$  en  $u_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$ , zodat volgens (8.1.) voor de x-richting geldt:

$$u_3 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

of ook:

$$u_3 = \frac{\partial}{\partial x} (\phi_1 + \phi_2)$$

evenzo is:

$$v_3 = \frac{\partial}{\partial y} (\phi_1 + \phi_2)$$

en:

$$w_3 = \frac{\partial}{\partial z} (\phi_1 + \phi_2)$$

zodat we kunnen besluiten dat voor de resulterende vector  $\bar{v}_3$  een potentiaal geldt:  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$

De som der potentialen blijkt dus ook de potentiaal van de som der vectoren te zijn!

We kunnen nu trachten meer gecompliceerde potentialen samen te stellen met behulp van een aantal eenvoudige elementen.

### 8.2. Superpositie van stroomfuncties.

Wat in 8.1. voor potentialen is aangetoond, kan in het tweedimensionale- of rotatiesymmetrische geval ook voor stroomfuncties worden aangetoond.

Hier is echter:

$$u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad \text{en} \quad u_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} ,$$

zodat:

$$u_3 = \frac{\partial}{\partial y} (\psi_1 + \psi_2)$$

evenzo is:

$$v_3 = - \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 + \psi_2)$$

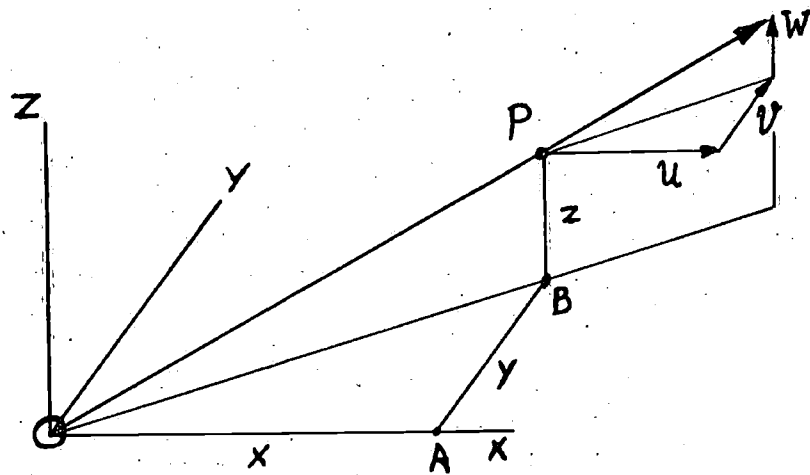
zodat ook:

$$\psi_3 = \psi_1 + \psi_2 \quad \text{moet gelden.}$$

### 8.3. Parallelstroom.

Onder een parallelstroom verstaan we een homogene stroming waarin de snelheidsvector in elk punt gelijk van grootte en gelijkgericht is.

In relatieve zin ontstaat een parallelstroom als een lichaam, vanwaaruit men de stroming beschouwt, in beweging wordt gebracht.



We stellen in de oorsprong  $\phi = 0$  en kiezen de integratieweg langs OABP om de potentiaal in P te vinden. Hetzelfde doen we voor de stroomfunctie voor het tweedimensionale geval.

De componenten van de snelheid zijn in elk punt U, V en W (constant).

$$\phi = \int_0^x U dx + \int_0^y V dy + \int_0^z W dz, \text{ of:}$$

$$\phi = Ux + Vy + Wz \quad (8.2.)$$

Tweedimensionaal is  $W = 0$ , zodat:  $\phi = Ux + Vy$  (8.3.)

Dan is:

$$\psi = \int_0^y U dy - \int_0^x V dx \text{ of: } \psi = Uy - Vx \quad (8.4.)$$

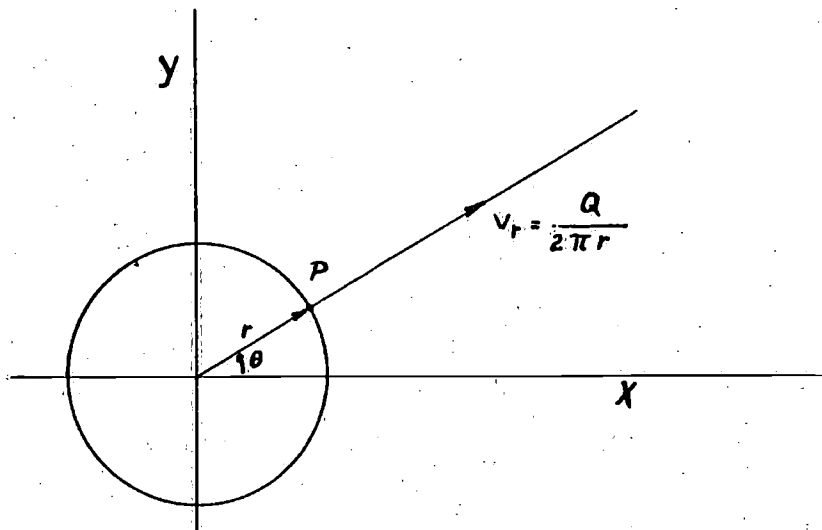
De asrichting kiest men meestal zó, dat  $V = W = 0$

#### 8.4. Vlakke bronstroom.

We nemen een vlakke stroming aan, waarbij door een willekeurig cylinderoppervlak zuiver radiaal en homogeen verdeeld, een waterhoeveelheid,  $Q$  stroomt. De straal van de cylinder laten we tot nul naderen, tot het oppervlak samenvalt met de as. Deze as gedraagt zich dan als een bron als het water naar buiten stroomt, of als een put als het naar binnen stroomt.

We noemen  $Q$  de bronsterkte en spreken van een bron als  $Q > 0$   
en van een put als  $Q < 0$

De radiale snelheid bedraagt:  $v_r = \frac{Q}{2\pi r}$   
 en:  $v_\theta = 0$



We nemen aan dat oorsprong en bron samenvallen en dat  $\phi = 0$  is als  $r = r_0$ . We kiezen de integratieweg langs de voerstraal van P

$$\phi = \int_{r_0}^r v_r dr = \int_{r_0}^r \frac{Q}{2\pi r} dr$$

$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$ ;  $r_0 = 0$  kan niet; de bron is een singulier punt. We moeten een ander beginpunt voor integratie kiezen.

In het algemeen:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C \quad (C = \text{constant}) \quad (8.5.)$$

Nemen we voor de stroomfunctie als nullijn aan:  $\theta = 0$  en de integratieweg langs  $r = \text{constant}$ , dan is:

zodat: 
$$\psi = \int_0^\theta v_r r d\theta = \int_0^\theta \frac{Q}{2\pi} d\theta$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta + C \quad (8.6.)$$

### 8.5. Ruimtelijke bronstroom.

Op dezelfde manier kunnen we de bron in één punt geconcentreerd denken, waarin een alzijdig gerichte, homogene stroom ontspringt.

Door elke willekeurige bolschil waarvan de bron het middelpunt is, stroomt dan dezelfde hoeveelheid  $Q$ , met in elk punt de radiaal gerichte snelheid:  $v_r = Q/4\pi r^2$ .

Hierin is  $4\pi r^2$  het oppervlak van de bolschil.

$$\phi = \int_{r_0}^r v_r dr = \int_{r_0}^r \frac{Q}{4\pi r^2} dr$$

$$\phi = \frac{-Q}{4\pi r} + C \quad (\text{waarin } C = \frac{Q}{4\pi r_0}) \quad (8.7.)$$

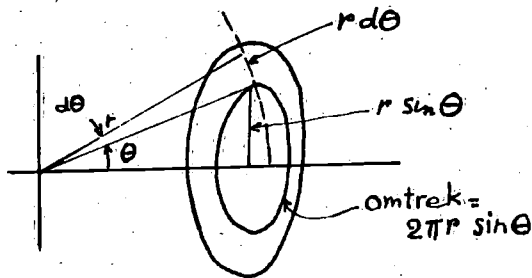
Omdat de stroming rotatiesymmetrisch is, heeft ook de stroomfunctie betekenis:

$$\psi = v_n dA ;$$

Voor  $dA$  nemen we een ringvormig oppervlakte-element ter grootte:

$$dA = 2\pi \cdot r \sin\theta \cdot r d\theta$$

terwijl  $v_n = v_r$



Uitgaande van  $\psi = 0$  in  $\theta = 0$ , vinden we:

$$\psi = \int_0^\theta \frac{Q}{4\pi r^2} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$$

$$\psi = \frac{Q}{2} (1 - \cos\theta) \quad (8.8.)$$

### 8.6. Dipool (of: doublet) in vlakke stroming.

We kunnen een bronstroom en een putstroom combineren door de potentialen, of de stroomfuncties bij elkaar op te tellen. Om een gesloten systeem te krijgen, waarbij geen water verloren gaat, of er bij komt, nemen we bron en put even sterk ( $+Q$ , resp  $-Q$ ).

We kiezen voor het gemak de oorsprong van het assenstelsel in de put en stellen dat de bron op een kleine afstand:  $\epsilon$  daarvan verwijderd ligt, in het punt  $(\epsilon, \alpha)$ , of cartesisch:  $(x_0, y_0)$ , waarvoor geldt:

$$x_0 = \epsilon \cos\alpha$$

$$y_0 = \epsilon \sin\alpha$$



Om de potentiaal in een punt P (x,y) tengevolge van de bron te vinden, moeten we in de vergelijkingen (8.5.) en (8.6.) verschoven assen toepassen, zodat:

$$r^2 = (x - \epsilon \cos \alpha)^2 + (y - \epsilon \sin \alpha)^2$$

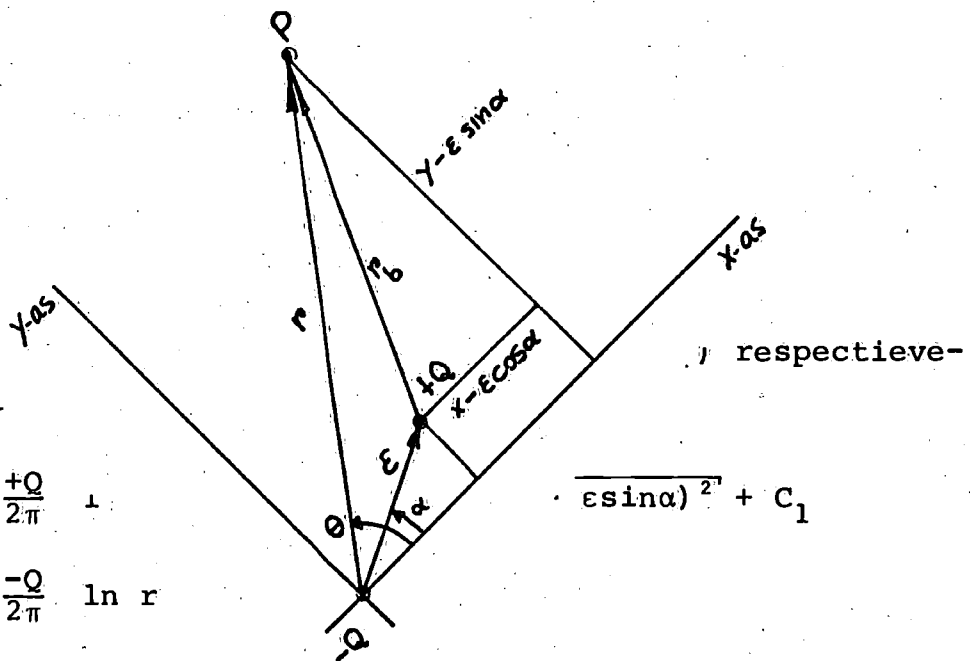
en

$$\theta = \arctan \frac{y - \epsilon \sin \alpha}{x - \epsilon \cos \alpha}$$

Tengevolge  
lijk de potent

$$\phi_b = \frac{+Q}{2\pi} +$$

$$\phi_p = \frac{-Q}{2\pi} \ln r$$



De potentiaal van het samenstel is  $(\phi_b + \phi_p)$ . De limiet van deze combinatie, als we  $\epsilon$  tot 0 laten naderen, terwijl we het product:  $\epsilon Q$  constant houden, noemen we een dipool of doublet.

Het product  $\epsilon Q = m$  noemen we het dipoolmoment.

De richting van de dipool is gedefinieerd van de put naar de bron toe (dus, zoals  $\bar{\epsilon}$  in de figuur).

De potentiaal van de dipool vinden we als volgt:

$$\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(Q\epsilon)}{2\pi} \cdot \frac{\ln \sqrt{(x - \epsilon \cos \alpha)^2 + (y - \epsilon \sin \alpha)^2} - \ln r + C}{\epsilon} + C$$

Met de regel van de l'Hospital vinden we:

$$\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2(x - \epsilon \cos \alpha) \cos \alpha - 2(y - \epsilon \sin \alpha) \sin \alpha}{(x - \epsilon \cos \alpha)^2 + (y - \epsilon \sin \alpha)^2} + C$$

Hieruit volgt:

$$\phi = \frac{-m}{2\pi} \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{x^2 + y^2} + C \quad (8.9.)$$

In poolcoördinaten kunnen we hiervan maken:

$$\phi = \frac{-m \cos(\theta - \alpha)}{2\pi r} + C$$

De stroomfunctie van de vlakke dipool is op dezelfde manier te verkrijgen:

$$\psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(Q\epsilon)}{2\pi} \frac{\arctan \frac{y - \epsilon \sin \alpha}{x - \epsilon \cos \alpha} - \theta + C}{\epsilon} + C$$

Na uitwerken wordt hiervoor gevonden:

$$\psi = \frac{-m}{2\pi} \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{x^2 + y^2} + C \quad (8.10.)$$

of:

$$\psi = \frac{m \sin(\theta - \alpha)}{2\pi r} + C$$

Dit geldt dus voor een willekeurig gerichte vlakke dipool.

### 8.7. Voorbeeld: cylinderstroming.

We combineren de parallelstroom ( $u=U$ ;  $v=0$ ) volgens vgl. (8.3.) met een tegengesteld gerichte dipool ( $\alpha = \pi$ ), waarvoor dus geldt:

$$\phi = \frac{m \cdot x}{2\pi r^2} \quad \text{en} \quad \psi = \frac{-m \cdot y}{2\pi r^2} \quad (8.11.)$$

Samenstellen geeft voor de potentiaal:

$$\phi = U \cdot x + \frac{m \cdot x}{2\pi r^2}, \text{ of in } c$$

$$\phi = u \cdot r \cdot \cos\theta \left(1 + \frac{m}{2\pi r^2 U}\right)$$

volgens (3.2.) is  $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$ , zodat:

$$v_r = U \cdot \cos\theta \left(1 - \frac{m}{2\pi r^2 U}\right)$$

We kunnen  $v_r = 0$  maken op een cirkel met straal  $R_C$  (randvoorwaarde voor de cylinderstroming), als we stellen:

$$m = 2\pi R_C^2 U$$

$$\text{zodat: } v_r = U \cdot \cos\theta \left(1 - \frac{R_C^2}{r^2}\right)$$

en:

$$\phi = U \cdot r \cdot \cos\theta \left(1 + \frac{R_C^2}{r^2}\right) \quad (8.12.)$$

Hierin herkennen we vgl. (3.3.) als we daarin de circulatie = 0 stellen.

We kunnen dus een vlakke cylinderstroming (zonder circulatie) uitbeelden door middel van superpositie van een parallelstroom en een tegengesteld gerichte dipoolstroming.

We controleren de zaak met de stroomfunctie, door samenvoegen van de  $\psi$  uit (8.4.) met  $V = 0$  en (8.11.):

$$\psi = U \cdot y - \frac{m \cdot y}{2\pi r^2}$$

of:

$$\psi = U \cdot r \cdot \sin\theta \left(1 - \frac{m}{2\pi r^2 U}\right)$$

De stroomlijn  $\psi = 0$ , verlopend langs de cirkel  $r = R_C$ , kan worden verkregen door weer te stellen:

$$m = 2\pi R_C^2 U,$$

$$\text{zodat } \psi = U \cdot r \cdot \sin\theta \left(1 - \frac{R_C^2}{r^2}\right)$$

Dit komt weer overeen met vgl. (5.6.) als  $\Gamma = 0$  is.

### 8.8. Ruimtelijke dipool.

Geheel analoog aan de vlakke dipool, kunnen we een ruimtelijke dipool definiëren, uitgaande van een puntbron en een puntput die we tot elkaar laten naderen.

Voor de bron geldt nu met verschoven assen volgens (8.7.):

$$\phi_b = \frac{-Q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x - \epsilon \cos \alpha)^2 + (y - \epsilon \sin \alpha)^2}} + C$$

zodat voor de dipool geldt:

$$\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-(Q\epsilon)}{4\pi} \cdot \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x - \epsilon \cos \alpha)^2 + (y - \epsilon \sin \alpha)^2}} - \frac{1}{r} + C \right\}$$

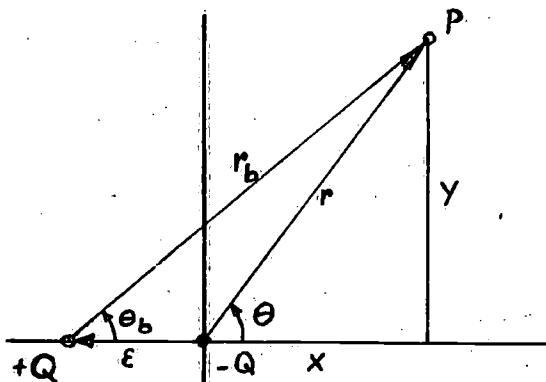
Uitwerken met behulp van de regel van de l'Hospital geeft:

$$\phi = \frac{-m}{4\pi} \cdot \frac{x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (8.13.)$$

of, in cylindercoördinaten:

$$\phi = \frac{-m \cdot \cos(\theta - \alpha)}{4\pi r^2}$$

Met betrekking tot de stroomfunctie van de ruimtelijke dipool moeten we bedenken dat rotatiesymmetrie voorwaarde is. We zullen daarom de dipoolas laten samenvallen met de x-as en wel zó, dat de bron links van de put ligt ( $\alpha = \pi$ ).



Met behulp van de vergelijking (8.8.) en de figuur kunnen we opschrijven:

$$\psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(Q\epsilon)}{2} \cdot \frac{1 - \frac{x + \epsilon}{(x + \epsilon)^2 + y^2} - 1 + \cos\theta}{\epsilon} + C$$

Dit levert met behulp van de regel van de l'Hospital:

$$\psi = \frac{-m \cdot y^2}{2 \cdot r^3} + C \quad (8.14.)$$

Bij deze, meest bekende situatie ( $\alpha = 0$ ) hoort de potentiaal:

$$\phi = \frac{m \cdot x}{4\pi r^3} + C \quad (8.15.)$$

Deze formules gelden dus voor de ruimtelijke, volgens  $-x$  gerichte dipool.

### 8.9. Enige toepassingen.

#### Stroming om een bol.

Analoog aan de cylinderstroming kunnen we de stroming om een bol beschrijven door een parallelstroming te combineren met een tegengesteld gerichte ruimtelijke dipool. (vgl. (8.3.) met  $V = W = 0$  en vgl. (8.15.)).

$$\phi = U \cdot x + \frac{m \cdot x}{4\pi r^3} + C$$

$$\phi = U \cos\theta \left( r + \frac{m}{4\pi r^2 U} \right) + C$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos\theta \left( 1 - \frac{m}{2\pi r^3 U} \right)$$

Het blijkt dat  $v_r = 0$  op een boloppervlak:  $r = R_C$  als

$$m = 2\pi R_C^3 U$$

zodat:

$$\phi = U r \cos\theta \left( 1 + \frac{R_C^3}{r^3} \right) \quad (8.16.)$$

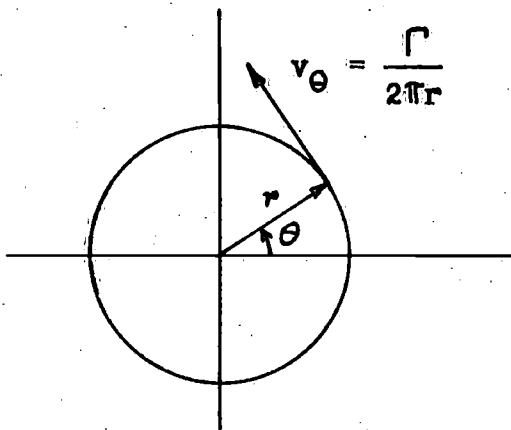
Een eventuele uitwerking van de stroomfunctie wordt aan de student overgelaten.

## Ovalen en ovoïden van Rankine.

Superpositie van een parallelstroom, een bron, en benedenstrooms daarvan, een put van gelijke (maar tegengestelde) sterkte als de bron, levert stromingen om min of meer langgerekte vormen. Bij vlakke stromen spreken we van "Rankine-ovalen", bij rotatiesymmetrische, van "Rankine-ovoïden".

Meestal worden bron en put symmetrisch ten opzichte van de y-as gegroepeerd, zodat voor beiden de potentiaal met verschoven assen moet worden opgeschreven (Cartesisch assenstelsel gebruiken).

### 8.10. Circulatiestroom of wervel.



We nemen de oorsprong van het assenstelsel in de kern van de wervel aan en stellen overal:

$$\begin{aligned}v_r &= 0 \text{ en} \\v_\theta &= \text{constant} \\&\text{langs } r = \text{const.}\end{aligned}$$

Aan de continuïteitsvergelijking wordt voldaan, want:

$$\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} = 0$$

De potentiaaltheorie kan alleen worden gebruikt als de stroming in het beschouwde gebied rotatievrij is. In cylindercoördinaten betekent dit:

$$\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} = 0$$

Dit blijkt het geval te zijn, als de circulatie overal gelijk is:

$$\Gamma = 2\pi r \cdot v_\theta = \text{constant, ook langs } \theta = \text{const.}; v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$\phi = \int \frac{\Gamma}{2\pi r} \cdot r \, d\theta \quad \text{of: } \phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} + C \quad (8.17.)$$

$$\psi = \int \frac{-\Gamma}{2\pi r} \cdot dr \quad \text{of: } \psi = \frac{-\Gamma}{2\pi} \ln r + C \quad (8.18.)$$

De wervelstroom blijkt de tegenhanger te zijn van de bronstroom;  $\phi$  en  $\psi$  hebben dezelfde vorm, maar ze zijn verwisseld.

Noot: Rotatievrijheid geldt overal in het veld behalve in de kern van de wervel zelf. Dit is een singulier punt, waar de snelheid oneindig wordt; in dit punt geldt de potentiaaltheorie niet en het mag dan ook niet in integratiewegen worden opgenomen.

### 8.11. Voorbeeld.

Vergelijking (8.17.) is toegevoegd aan (8.12.) om (3.3a.) van ons centrale voorbeeld te krijgen.

Evenzo geldt dat (5.6.) van het voorbeeld neerkomt op een superpositie van de stroomfunctie van een parallelstroom, een dipool en een wervel (8.18.).

### 8.12. Werveldoublet.

Een wervel met positieve circulatie ( $+\Gamma$ ) plaatsen we met haar kern in een punt  $(\varepsilon, \alpha)$  naast een negatieve wervel van gelijke sterkte ( $-\Gamma$ ), met zijn kern in 0.

Geheel analoog aan de stroomfunctie ( $\psi$ ) van de vlakke dipool (par. 8.6., vgl. (8.10.)), vinden we de potentiaal ( $\phi$ ) van de werveldoublet.

De stroomfunctie van de werveldoublet is op het teken na gelijk aan de snelheidspotentiaal van de gewone vlakke dipool.

Door de as van de werveldoublet  $90^\circ$  te draaien, kunnen we de gewone vlakke doublet krijgen; zij zijn dus aan elkaar equivalent.

### 8.13. Ringwervel.

Een rotatiesymmetrische analogie van de werveldoublet is de ringwervel. Deze is equivalent aan de ruimtelijke dipool.

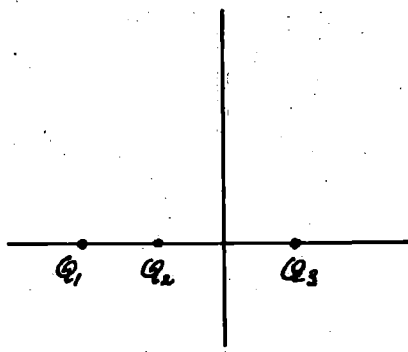
### 8.14. Lijn- en oppervlakte-beleggingen.

Superpositie kan worden toegepast met discrete bronnen, dipolen en wervels in een parallelstroom. Hierbij kunnen stroomlijnen ontstaan, die zeer verschillende lichaamsvormen voorstellen.

Behalve discrete elementen kunnen echter ook continuverdelingen worden gebruikt, of combinaties van beide.

Een discrete bron met de sterkte  $Q$  kunnen we vervangen door een element:

$q(s) \cdot ds$  van een bronverdeling langs de lijn  $s$ .



discrete verdeling van bronnen:

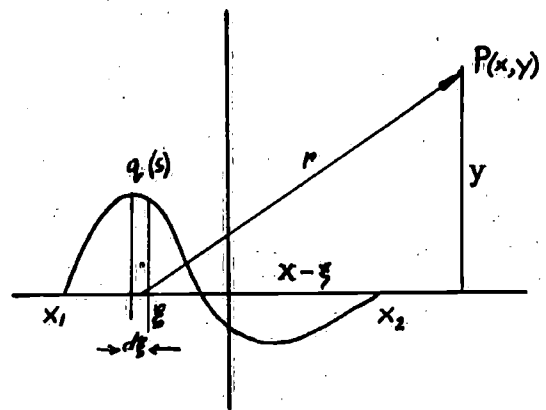
$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi} \ln r + C$$

Bij het samenstellen van wervels kunnen we op dezelfde manier de discrete wervels met de sterkte  $\Gamma_i$  vervangen door een continuverdeling  $\gamma(s)ds$ .

$ds$  kan een lijnelement, maar ook een oppervlakte-element voorstellen.

### 9. Draagvleugel-profiel.

Gebleken was dat de stroming uit ons voorbeeld een kracht oplevert die loodrecht op de richting van de parallelstroom staat, mits er een circulatie om de cylinder aanwezig is. Dit verschijnsel staat bekend als "het Magnus-effect".



continu verdeling van bronnen:

$$\phi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{q(\zeta) d\zeta}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \zeta)^2 + y^2}$$



Zoals reeds eerder is gesteld, ontstaat de circulatie als gevolg van het optreden van wrijving bij het roteren van de cylinder.

Het verschijnsel van de zijdelingse- of lift-kracht is ook bekend van de vliegtuigvleugel, het roer, het schroefblad en van andere toepassingen.

Het blijkt mogelijk om de potentiaal-theoretische cylinderstroming te transformeren in stromingen, waarin de randstroomlijn de vorm van een draagvleugel aanneemt. Langs die contour kan dan op de bekende manier de drukverdeling worden berekend, waarna integratie de wet van Kutta-Joukowsky bevestigt. (Het gaat hier dus niet om de kracht, maar om de drukverdeling).

Bij dit proces wordt de circulatie bepaald door de voorwaarde van Joukowsky (ook bekend als de "Kutta-conditie"), die stelt dat de stroming aan de scherpe achterkant tangentieel moet verlopen (dat wil zeggen geen oneindige snelheid op de rand).

Voor dit transformatieprobleem wordt gebruik gemaakt van de functietheorie. We beschouwen alleen vlakke stromen.

### 9.1. Complexe potentiaal.

Volgens (3.1a.) is:  $d\phi = u dx + v dy$

Voor een aequipotentiaallijn geldt  $d\phi = 0$ , zodat  $\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}$

Volgens (5.3.) is:  $d\psi = u dy - v dx$

Dit volgde uit  $d\psi = 0$  voor de stroomlijn:  $\frac{dy}{dx} = +\frac{v}{u}$

Hieruit blijkt dat aequipotentiaallijnen en stroomlijnen loodrecht op elkaar staan; ze vormen een orthogonaal stelsel lijnen.

Deze orthogonaliteit maakt het mogelijk om een stroming niet alleen te beschrijven door middel van  $\phi$  of  $\psi$  in een x-y-vlak, maar ook door middel van een complexe potentiaal in een complex vlak:

$$\text{potentiaal: } \chi = \phi + i\psi \quad (9.1.)$$

$$\text{in het vlak: } z = x + iy \quad (9.2.)$$

De complexe snelheid moet de afgeleide zijn van de potentiaal in de richting van de coördinaat:

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + i(\frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy)}{dx + idy}$$

Om zinvol te zijn, moet het niet uitmaken of hierbij  $dx = 0$ , of  $dy = 0$  gesteld wordt:

$dy = 0$  geeft:

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial y} = u - iv$$

$dx = 0$  geeft:

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{1}{i} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = -iv + u$$

Voor de complexe snelheid kunnen we dus schrijven:

$$w = u - iv \quad (9.3.)$$

In herinnering wordt gebracht, dat we ook schrijven kunnen:

$$z = r e^{i\theta}$$

De elementaire vlakke stromingen kunnen in complexe vorm als volgt geschreven worden:

Parallelstroom evenwijdig aan de x-as:

$$\chi = Uz \quad (9.4.)$$

Bron in de oorsprong:

$$\chi = \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (9.5.)$$

Dipool in de oorsprong met de as langs de x-as:

$$\chi = \frac{m}{2\pi z} \quad (9.6.)$$

Wervel in de oorsprong:

$$\chi = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R_c} \quad (9.7.)$$

## 9.2. Voorbeeld.

De complexe potentiaal van de stroming om de cirkelcylinder met circulatie is de som van (9.4.), (9.6.) en (9.7.):

$$= U \left( z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R} \quad (9.8.)$$

## 9.3. Conforme transformatie.

Een potentiaalfunctie  $\chi = f(z)$

die in het vlak:  $z = x + iy$

een mogelijke stroming voorstelt, kan worden omgevormd tot

een functie  $\chi = g(\zeta)$

in een vlak  $\zeta = \xi + i\eta$

door een betrekking tussen  $z$  en  $\zeta$  aan te nemen.

In beide vlakken zijn de stelsels aequipotentiaallijnen en stroomlijnen orthogonaal, zodat een rechthoekig element uit het ene vlak, terug is te vinden als een eveneens rechthoekig element in het andere vlak op de plaats, waar dezelfde potentiaal heerst, dus waar:  $f(z) = g(\zeta)$ .

Hoewel de vorm van de aequipotentiaallijnen en stroomlijnen in de twee vlakken sterk kunnen verschillen, blijft de vorm van elk elementaire deeltje bij de omvorming gelijk. We spreken daarom van "conforme transformatie".

Als eenvoudig voorbeeld het volgende:

Voor de stroming om een cirkel in het  $z$ -vlak geldt:

$$\chi = U \left( z + \frac{R^2}{z} \right) ;$$

voor een parallelstroming in het  $\zeta$ -vlak:

$$\chi = U\zeta$$

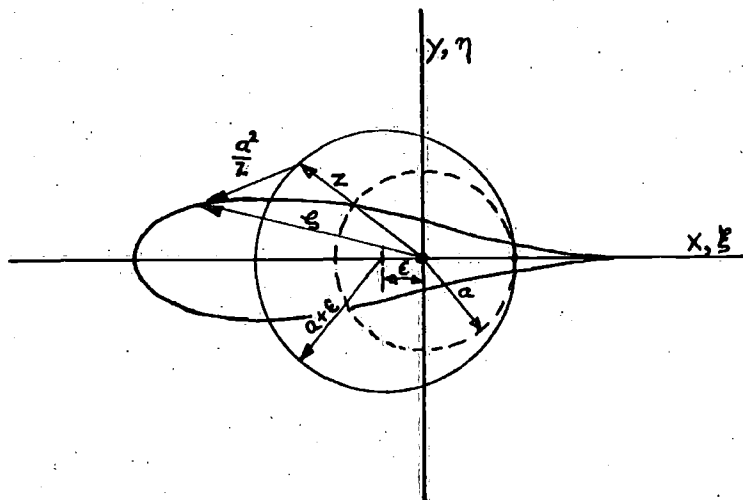
Om de cylinderstroming in een parallelstroom te transformeren moeten we dus stellen:

$$\zeta = z + \frac{R^2}{z} \quad (9.9.)$$

De snelheden in het  $\zeta$ -vlak zijn:  $\frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{d\chi}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}$  (9.10.)

#### 9.4. Het vleugelprofiel.

We substitueren de vergelijking:  $\zeta = z + \frac{a^2}{z}$  in de uitdrukking voor de stroming om een cirkelcylinder, waarvan de straal een klein beetje groter is dan  $a$ . We zorgen er voor dat de cirkelomtrek door  $x = a$  gaat.



We verschuiven de cirkel dus over een afstand  $\epsilon$  langs de  $x$ -as om een symmetrisch profiel te krijgen;  $\epsilon$  is reëel. Om een invalshoek  $\alpha_0$  te krijgen draaien we het stromingsveld door die hoek. In vergelijking (9.8.) moeten we daarom  $z$  vervangen door:

$(z + \epsilon) e^{i\alpha_0}$ , zodat we krijgen:

$$= U (z + \epsilon) e^{-i\alpha_0} + \frac{(a + \epsilon)^2}{(z + \epsilon) e^{-i\alpha_0}} + \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z + \epsilon) e^{-i\alpha_0}}{(a + \epsilon)} \quad (9.11.)$$

voor de verschoven en gedraaide cylinderstroming.

Voor de transformatie is nodig:

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

Substitutie leidt tot een erg ingewikkelde vergelijking, zodat aan een berekening punt voor punt de voorkeur wordt gegeven.

In de berekende punten geldt dan voor de snelheid:

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{d\chi}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \left\{ U(e^{-i\alpha_0} - \frac{(a + \epsilon)^2}{(z + \epsilon)^2} e^{i\alpha_0}) + \frac{-i\Gamma}{2\pi(z + \epsilon)} \right\} \left( \frac{z^2}{z^2 - a^2} \right)$$

Hieruit blijkt dat de snelheid oneindig wordt voor  $z = a$ , tenzij het gedeelte tussen accolades, nul is.

Het punt  $z=a$  komt overeen met de scherpe achterrand van de vleugel.

Bij de aanzet van een stroming om een draagvleugel die onder een hoek ten opzichte van de ongestoorde stroming is ingesteld, zal de snelheid om de achterrand erg groot worden. Door de invloed van de wrijving, zal de stroming echter loslaten en tangentieel aan het profiel gaan verlopen, wat leidt tot de voorwaarden van Kutta-Joukowski:

De circulatie moet zodanig worden gekozen, dat de stroming langs de achterrand tangentiaal verloopt.

$$U(e^{-i\alpha_0} - \frac{(a + \epsilon)^2}{(a + \epsilon)^2} e^{i\alpha_0}) + \frac{-i\Gamma}{2(a + \epsilon)} = 0$$

$$-i\Gamma = 2\pi(a + \epsilon)U(e^{i\alpha_0} - e^{-i\alpha_0})$$

waaruit volgt:

$$-\Gamma = 4\pi(a + \epsilon)U \sin\alpha_0$$

De lift bedraagt:  $L = -\rho U \Gamma$  ,

zodat:  $L = 4\pi\rho U^2 (a + \epsilon) \sin\alpha_0$

De voorrand van het profiel ligt op het punt:

$$\zeta = -a - 2\epsilon - \frac{a^2}{a + 2\epsilon}$$

of:

$$\zeta = -2a \quad , \quad \text{als machten van } \epsilon \text{ hoger dan 1, worden verwaarloosd.}$$

De uittredende rand ligt op:

$$\zeta = 2a$$

zodat de lengte van de koorde is:  $c = 4a$ .

De liftcoëfficiënt wordt:

$$C_L = 2\pi \left(1 + \frac{\epsilon}{a}\right) \sin \alpha_0$$

Voor dunne profielen, waarvoor  $\frac{\epsilon}{a} \ll 1$ , en kleine invalshoeken geldt:

$$C_L = 2\pi \alpha_0$$

## 10. Wervels.

Aan de hand van het voorbeeld van de vlakke cylinderstroming hebben we geleerd een draagvleugelstroming te beschrijven; eveneens tweedimensionaal. Kenmerkend voor die stroming bleek de circulatie ( $\Gamma$ ) te zijn. Die circulatie heeft alle eigenschappen van een wervel, die we trouwens ook als basis voor de stroming hebben gebruikt.

Tot nu toe hebben we de draagvleugelstroming zuiver tweedimensionaal beschouwd, dat wil zeggen dat we de vleugel als oneindig breed mogen beschouwen. Om tot de eindige vleugel te komen moeten we eerst meer van wervels weten.

### 10.1. Wet van Thomson (Lord Kelvin).

De wet van Thomson (ook genoemd: de wet van Kelvin), is de basis van de werveltheorieën. Zij luidt als volgt:

In een wrijvingsloze, onsamendrukbare vloeistof die alleen onderworpen is aan conservatieve krachtvelden, zal de circulatie langs een gesloten, met de stroom meegevoerde kromme, niet met de tijd veranderen.

In formulevorm:  $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$  (10.1.)

$$\Gamma = \oint (u dx + v dy + w dz)$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{D}{Dt} (u dx + v dy + w dz) \quad \text{hiervan is:}$$

$$\frac{D}{Dt} (u dx) = u du + \frac{Du}{Dt} dx \quad (\text{analoog voor de andere richtingen})$$

Volgens Euler geldt:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x}, \text{ zodat}$$

$$\frac{D}{Dt} (u dx) = d\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx$$

Completeren met de y- en z-richtingen levert:

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint & \left[ d\left(\frac{1}{2}u^2\right) + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + d\left(\frac{1}{2}w^2\right) \right. \\ & - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \\ & \left. + g \left( \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{of: } \frac{D\Gamma}{Dt} = 0,$$

want u, v, w, p en h zijn aan het begin en aan het eind van de rondgang langs de (in zichzelf gesloten) integratieweg gelijk.

Voor dit laatste geldt de eis dat het krachtveld conservatief moet zijn; voor het overige zijn de voorwaarden voor toepasbaarheid van de vergelijkingen van Euler van kracht: vloeistof isotroop, geen wrijving, dichtheid constant (of barotroop).

De circulatie verandert dus niet langs een kromme die steeds uit dezelfde deeltjes bestaat.

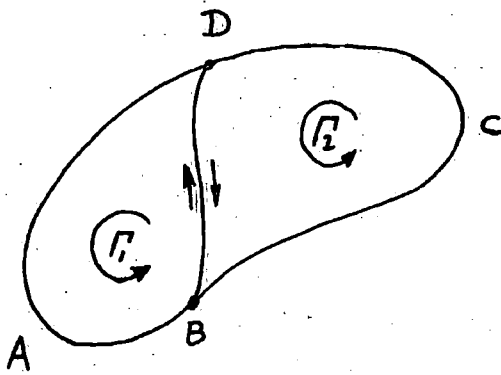
## 10.2. Stelling van Stokes.

De circulatie langs een gesloten kromme is gelijk aan de oppervlakte-integraal van de normaalcomponent van de rotatievector over het door de kromme omsloten oppervlak:

$$\Gamma = \iint_A \gamma_n dA \quad (10.2.)$$

De circulatie is te beschouwen als een wervelflux.

fig.1



Uit fig. 1 blijkt:

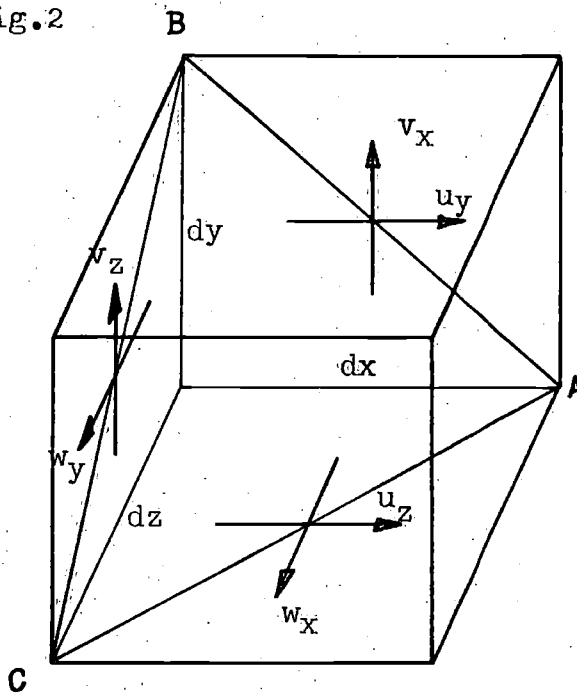
$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

want  $\overline{BD}$  wordt bij de integratie in tegengestelde zin doorlopen

$$(\Gamma = \oint v_s ds)$$

Hieruit volgt:  $\Gamma = \int d\Gamma$

fig.2



Langs de contour  $\overline{ABCA}$  heersen gemiddeld snelheden met de volgende componenten:

langs  $\overline{AB}$ :

$$u_y = u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$v_x = v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

langs  $\overline{BC}$ :

$$v_z = v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

$$w_y = w + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

langs  $\overline{CA}$ :

$$w_x = w + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$u_z = u + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$d\Gamma = \Gamma_{ABCA}$$

$$d\Gamma = \oint (u dx + v dy + w dz)$$

$$d\Gamma = -u_y dx + v_x dy - v_z dy + w_y dz - w_x dz + u_z dx$$

$$d\Gamma = (u_z - u_y) dx + (v_x - v_z) dy + (w_y - w_x) dz$$

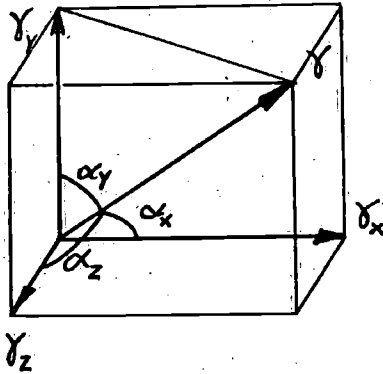


Substitutie en hergroepering van de gemiddelde snelheden geeft:

$$d\Gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy dz$$

$$d\Gamma = \frac{1}{2} \gamma_y dx dz + \frac{1}{2} \gamma_z dx dy + \frac{1}{2} \gamma_x dy dz \quad (10.3.)$$

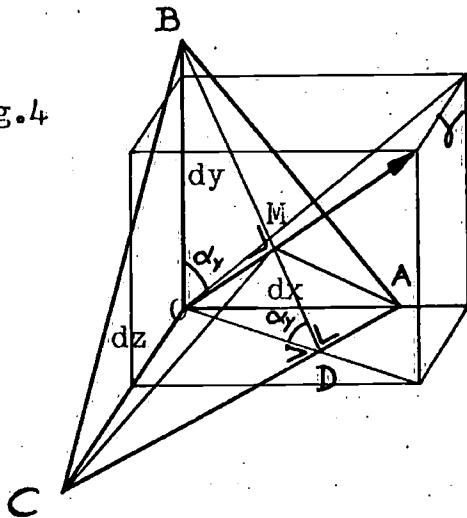
fig.3



In  $\bar{\gamma}$  herkennen we de rotatievector. Met  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  als hoeken tussen  $\bar{\gamma}$  en de as-richtingen, blijkt uit fig. 3, dat:

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \gamma \cos \alpha_x \\ \gamma_y &= \gamma \cos \alpha_y \\ \gamma_z &= \gamma \cos \alpha_z \end{aligned} \quad (10.4.)$$

fig.4



In fig. 4 is een oppervlak-teëlement ABC loodrecht op  $\bar{\gamma}$  getekend. Daar OB en OM loodrecht op AC staan, staat AC loodrecht op BD en OD. Verder is:

$$\text{opp. AMC} = \text{opp. AOC} \cos \alpha_y$$

We vinden hiermee:

$$\text{opp. AMC} = \frac{1}{2} dx dz \cos \alpha_y$$

evenzo:

$$\text{opp. BMA} = \frac{1}{2} dy dx \cos \alpha_z$$

$$\text{opp. CMB} = \frac{1}{2} dz dy \cos \alpha_x$$

$$(10.5.)$$

Substitutie van de vergelijkingen (10.4.) en (10.5.) in (10.3.) geeft:

$$d\Gamma = \gamma \cdot \text{opp. AMC} + \gamma \cdot \text{opp. BMA} + \gamma \cdot \text{opp. CMB}$$

$$\text{of: } d\Gamma = \gamma \cdot \text{opp. ABC}$$

$$\text{of: } d\Gamma = \gamma_n dA, \text{ waaruit volgt: } \Gamma = \iint \gamma_n dA$$

$$\text{Dit is de stelling van Stokes} \quad (10.6.)$$

### 10.3. Wervellijnen en combinaties daarvan.

De stelling van Stokes laat zien, dat we een oppervlak, waaromheen de circulatie bekend is, doorsneden kunnen denken door wervels, die tezamen voor de circulatie verantwoordelijk zijn.

$\bar{\gamma}$ , de rotatievector heet in het Engels: "vorticity", in het Duits: "wirbelung", in het nederlands meestal: "wervelsterkte".

$\Gamma$ , de circulatie, wordt in Engeland en Duitsland meestal gebruikt om de wervelsterkte aan te duiden (vortex-strength).

De "wervellijn" is de kromme die overal raakt aan  $\bar{\gamma}$  (overeenkomstig de stroomlijn aan  $\bar{v}$ ).

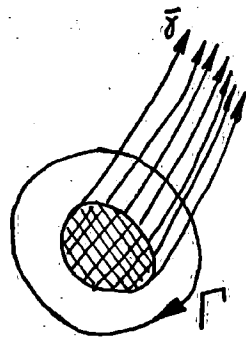
Een "wervelbuis" wordt gevormd door een bundel wervellijnen.

Een "werveldraad" is een dunne wervelbuis ("concentrated vortex").

Een "wervelvlak" is een verzameling van wervellijnen die tezamen een vlak vormen.



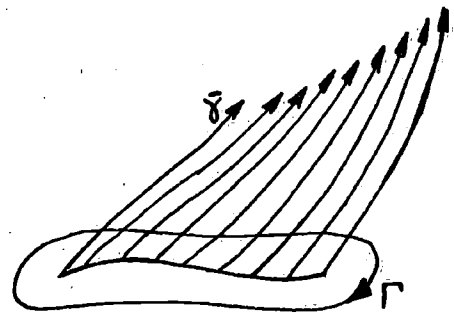
wervellijn



wervelbuis



werveldraad

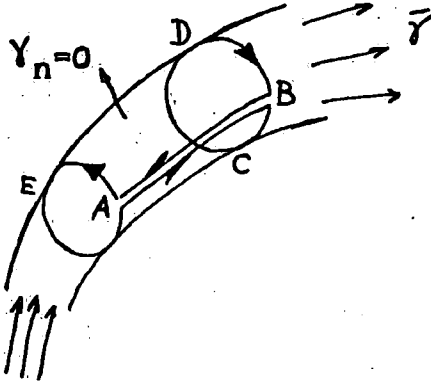


wervelvlak

#### 10.4. Stellingen van Helmholtz.

##### Eerste stelling van Helmholtz:

De circulatie om een wervelbuis is op alle doorsneden gelijk.



Beschouw het buitenoppervlak om de wervelbuis tussen twee doorsneden en maak dit als het ware "afschilbaar" door de doorsneden met een snede:  $\overline{AB}$  te verbinden. Pas op dit "afschilbare" "controlvlak" de stelling van Stokes toe.

Het oppervlak bestaat uit stroomlijnen, dus  $\gamma_n = 0$  in elk punt.

Volgens Stokes moet dus ook langs de omtrek (ABCDBAEA):

$\Gamma = 0$  zijn. Bij de integratie  $\Gamma = \oint v_s ds$ , wordt het lijnstuk AB tweemaal in tegengestelde zin doorlopen, zodat het dus geen aandeel heeft in  $\Gamma$ . De som van de aandelen van de doorsneden A en B moet dus nul zijn.

Hieruit volgt:  $\Gamma_A = \Gamma_B$  als we in beide doorsneden de integratieweg in dezelfde richting doorlopen.

##### Tweede stelling van Helmholtz:

Een wervel kan binnen de vloeistof geen einden hebben.

Bij verplaatsing van doorsnede B bijvoorbeeld, zou deze over het einde van de wervel af geschoven kunnen worden, waar

$\Gamma_B = 0$  zou moeten zijn. Dit is in strijd met de eerste stelling, zodat er geen einde kan bestaan.

### Derde stelling van Helmholtz:

Deeltjes die eenmaal tot een wervel behoren,  
blijven tot die wervel behoren.

Volgens de wet van Thomson blijft de circulatie met de tijd constant, als het gaat om een met de vloeistof meebewegende kromme. Dit gaat ook op met betrekking tot een zeer kleine kromme om een vloeistofelement.

(Een werveldraad heeft de vorm van een inktlijn).

#### 10.5. Gevolgen van de wervelwetten.

1. De wervelwetten gelden voor een ideale (wrijvingsloze) stroming. Het ontstaan van een wervel heeft altijd met wrijving te maken, het gebeurt meestal in een grenslaag.
2. Een wervelbuis is in zichzelf gesloten (b.v. een ringwervel) of verbindt begrenzingen met elkaar (wateroppervlak met de bodem bijvoorbeeld).
3. Als een wervel ontstaat binnen een gesloten kromme in een aanvankelijk rustende vloeistof, dan zal op dezelfde plaats een tweede wervel ontstaan met gelijke sterkte, ( $\Gamma$ ) maar tegengesteld gerichte rotatie, opdat de circulatie langs de gegeven kromme nul blijft.
4. Als we een vlak beschouwen, dat een werveldraad op één plaats doorsnijdt en we beschouwen de circulatie langs een gesloten kromme door een willekeurig punt P, die de werveldraad omvat, dan blijkt in elk punt P een snelheidscomponent aanwezig te zijn, die met de werveldraad samenhangt.

We noemen deze snelheidscomponent de door de wervel geïnduceerde snelheid.

Noot: De wervelwetten zijn grotendeels afkomstig uit de electro-dynamica, waar een stroomvoerende geleider een magnetisch

krachtveld induceert, dat mathematisch vrijwel volledig overeenstemt met het stromingsveld dat met een wervel gepaard gaat.

Het begrip "inductie" is in de werveltheorie overgenomen.

### 10.6. Wet van Biot-Savart.

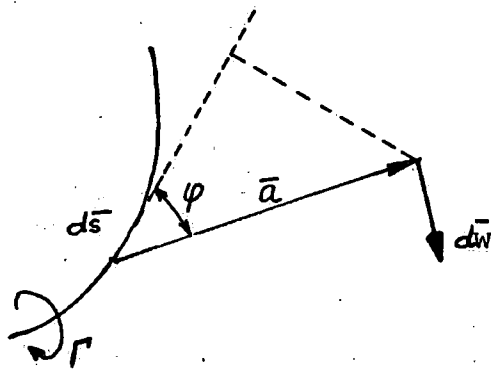
Door een lengte-element  $d\vec{s}$  van een werveldraad met circulatie  $\Gamma$ , wordt in een punt P op afstand  $\vec{a}$ , een snelheidsaandeel geïnduceerd, dat kan worden berekend met behulp van de formule van Biot-Savart:

$$d\vec{w} = \frac{\Gamma}{4\pi a^3} d\vec{s} \times \vec{a}$$

of:

$$|d\vec{w}| = \frac{\Gamma}{4\pi a^2} ds \sin \varphi \quad (10.7.)$$

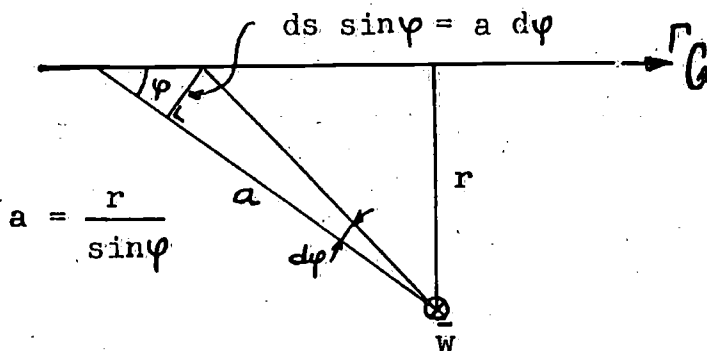
De richting van  $d\vec{w}$  volgt uit de kurketrekker-regel.



### 10.7. Oneindig lange rechte werveldraad.

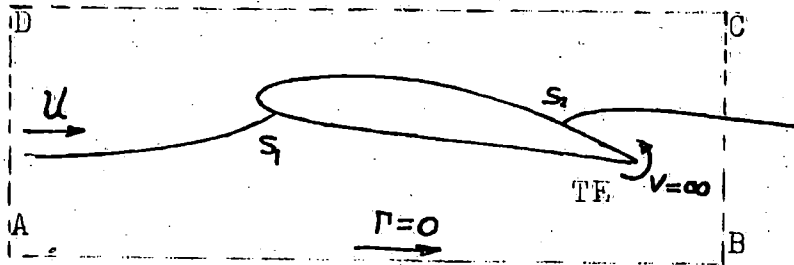
$$|w| = \int_0^\pi \frac{\Gamma}{4\pi a^2} a \, d\varphi = \int_0^\pi \frac{\Gamma}{4\pi r} \sin\varphi \, d\varphi$$

$$|w| = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (10.8.)$$

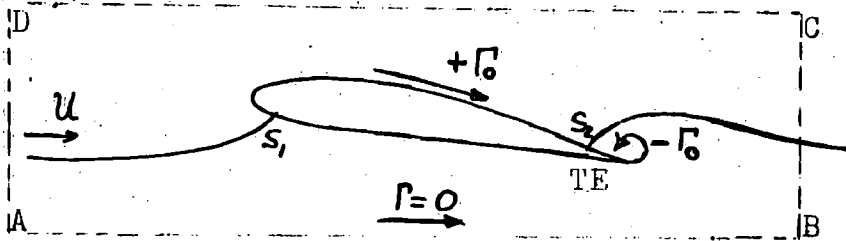


# 11 Theorie voor eindige draagvleugels

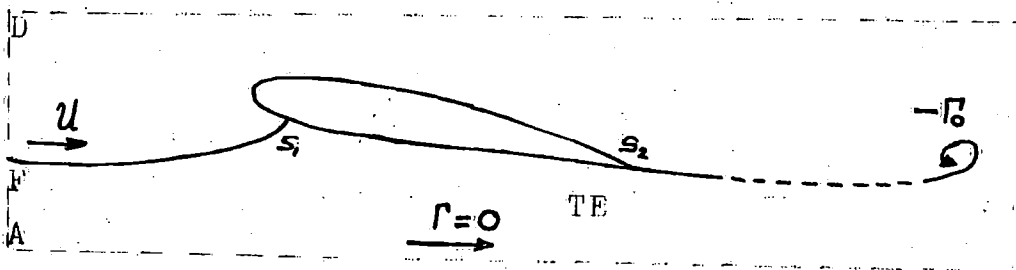
## 11.1 Startwervel



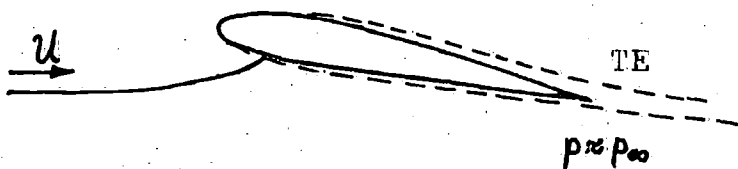
Start:  $\Gamma_{ABCD} = 0$   
 stuwpunten  $S_1$  en  $S_2$   
 te hoge snelheid bij  
 TE ("trailing edge")



Loslatingswervel  $-\Gamma_0$   
 bij TE; Volgens  
 Kelvin blijft  
 $\Gamma_{ABCD} = 0$ , dus moet  
 $+\Gamma_0$  binnen ABCD om  
 vleugel ontstaan



Startwervel en BC  
 gaan naar  
 oneindig  
 F stagneert  
 in  $S_1$   
 $+\Gamma_0$  blijft



$-\Gamma_0$  is gevolg van  
 wrijving, daardoor  
 gaat  $S_2$  naar TE.

In werkelijkheid  
 gaat de stuwdruk  
 verloren in de grens-  
 laag.

Bij de uittredende kant (TE) zal in de werkelijkheid de druk  
 ongeveer gelijk zijn aan de druk in de ongestoorde stroming.

## 11.2. Hoefijzerwervel.

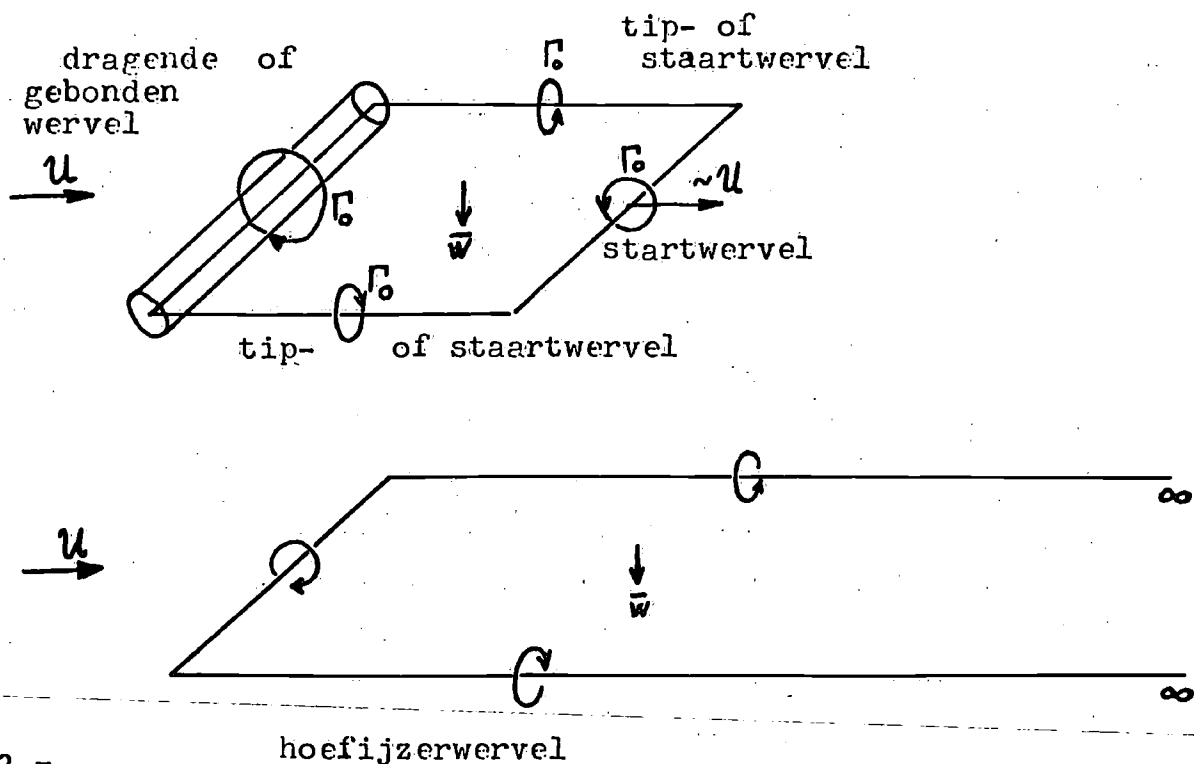
De cylinderstroming uit het voorbeeld en de daaruit afgeleide draagvleugelstroming waren tweedimensionaal, of eventueel: oneindig breed aangenomen.

Het magnus-effect is in de praktijk toegepast, o.a. door Flettner, die grote cilindrische rotors, door lichte motoren aangedreven, op schepen heeft toegepast in de plaats van zeilen.

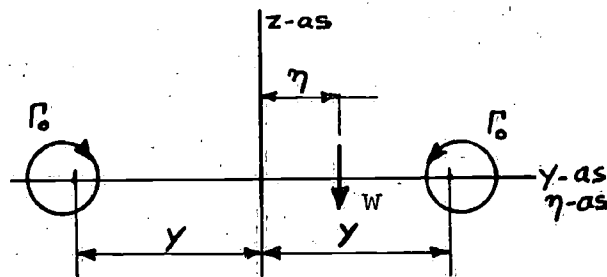
Een dergelijke rotor heeft natuurlijk een eindige lengte en we mogen wel aannemen dat de circulatie over die hele lengte constant is.

De startwervel die ook bij de rotor ontstaat (maar hier secundair), heeft dezelfde lengte. Daar de wervels geen einden in de vloeistof mogen hebben, moeten ze zich naar het oneindige voortzetten, of ze moeten samen deel uitmaken van een enkele in zichzelf gesloten wervel. Omdat de startwervel op het oppervlak van de rotor ontstaat, ligt het voor de hand, het laatste als juist aan te nemen.

Terwijl de startwervel stroomafwaarts wordt meegevoerd, worden de "tipwervels" of "staartwervels" die verbinding maken met de "dragende wervel" (om rotor of vleugel) steeds langer, waarbij steeds meer waterdeeltjes in de grenslaag in rotatie worden gebracht. Tenslotte kan men de startwervel in het oneindige "verdwenen" veronderstellen, waardoor een "hoefijzervormige" wervel is ontstaan van half-oneindige lengte.



Met de hoofijzerwervel hangt een geïnduceerd snelheidsveld samen, dat we voor het gemak alleen in het vlak van de wervel beschouwen. De geïnduceerde snelheid staat loodrecht op dit vlak en kan worden berekend met Biot-Savart.



Als de hier getekende doorsnede ligt in het hart van de gebonden wervel (=dragende wervel), dan wordt  $w$  geïnduceerd door twee half-oneindig lange wervels:

$$w = \frac{\Gamma_0}{4\pi(y - \eta)} + \frac{\Gamma_0}{4\pi(y + \eta)} = \frac{\Gamma_0 y}{2\pi(y^2 - \eta^2)}$$

In het symmetrievlak midden tussen de wervels vinden we door  $\eta = 0$  te stellen:

$$w = \frac{\Gamma_0}{2\pi y}$$

De wervels induceren in elkaar een snelheid

$$w = \frac{\Gamma_0}{8\pi y}$$

N.B.: Dit geldt in de dragende wervel.

Oneindig ver achter de dragende wervel zijn beide staartwervels oneindig lang, zodat alle geïnduceerde snelheden tweemaal zo groot zijn als in de dragende wervel.

### 11.3. Circulatieverdeling, wervelvlak.

Bij de draagvleugel blijkt de circulatie nabij de vleugeleinden niet even groot te zijn als in het midden van de breedte; er blijkt een circulatieafval naar de toppen toe, op te treden.



Een mogelijk fisisch model hiervoor is afkomstig van Lanchaster en Prandtl: de dragende wervel wordt opgebouwd verondersteld uit een oneindig groot aantal werveldraden die ieder op zichzelf deel uitmaken van een hoefijzerwervel, van verschillende breedte. De van de vleugel afgaande staartwervels vormen samen een wervelvlak waarin de wervelsterkte-verdeling gelijk is aan de circulatie-afval langs de dragende wervel:

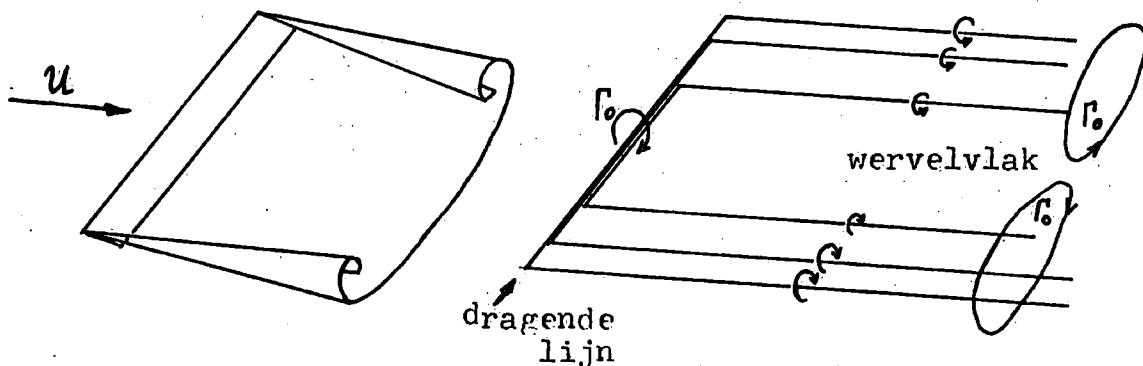
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y} dy$$

In een punt  $(0, \eta)$  van de dragende lijn wordt een normaalsnelheid geïnduceerd:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} dy \frac{1}{y - \eta}$$

als  $b$  de breedte van de vleugel voorstelt.

De geïnduceerde snelheid  $\bar{w}$  staat loodrecht op het wervelvlak, dat zelf door deze snelheid ten opzichte van de ongestoorde stromingsrichting wordt afgebogen, waardoor de zijden zelfs worden opgerold.



Voor praktische doeleinden is alleen de inductie in de buurt van de vleugel interessant, waar de invloed van het oprollen weinig merkbaar is. Als we bovendien aannemen dat de vleugel "zwakbelast" is, dat wil zeggen dat de circulatie relatief klein is, dan mogen we in eerste benadering aannemen dat de geïnduceerde snelheid loodrecht staat op de ongestoorde stroming (bewegingsrichting van de

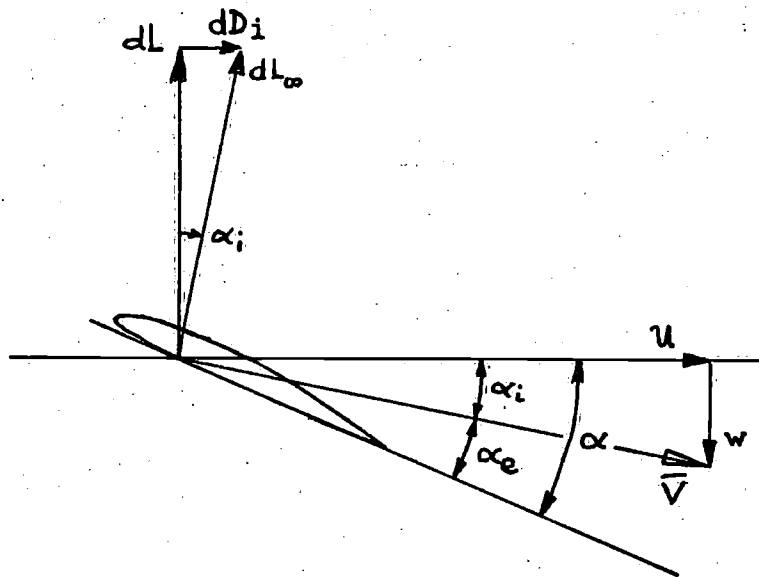
vleugel).

De geïnduceerde dwarsstroming noemt men "downwash" of "crossflow".

#### 11.4. Geïnduceerde weerstand.

We nemen dus aan dat ter plaatse van de gebonden wervel die in de plaats van de vleugel wordt aangenomen,  $w/U$  klein is, zodat in deze lijn de stroming wordt afgebogen over een hoek:

$$\alpha_i = \frac{w}{U}$$



De draagvleugel, die onder een hoek  $\alpha$  ingesteld staat ten opzichte van de ongestoorde snelheid  $U$ , "voelt" de wind ( $\bar{V}$ ) dus onder een "effectieve" invalshoek:

$$\alpha_e = \alpha - \alpha_i$$

We nemen weer aan dat de stroming wrijvingsloos is, zodat blijkens de "paradox van d'Alembert", geen kracht optreedt in de richting van de aanstroomsnelheid  $\bar{V}$ ; De kracht, die overeenkomt met de "lift" van het oneindig brede profiel ( $L_\infty$ ), staat dus loodrecht op  $\bar{V}$ .

Deze kracht is dus een hoek  $\alpha_i$  verdraaid ten opzichte van de richting loodrecht op  $\bar{U}$  en kan dus samengesteld gedacht worden uit een component loodrecht op  $\bar{U}$ , die we per definitie de "lift"

en een component in de richting van  $\bar{U}$ , die we de "geïnduceerde weerstand" ( $D_i$ ) noemen.

voor een strip met breedte  $dy$ :  $dD_i = \alpha_i dL = \frac{w}{U} dL$

terwijl :  $dL = dL_\infty$

(alleen voor kleine  $\alpha_i$ , dus zwakbelaste vleugels!)

Noot: In de scheepsbouwkunde kunnen de begrippen "lift" en "geïnduceerde weerstand" verwarring geven, wegens de gecompliceerdheid van de aanstroomrichtingen ten opzichte van de schroefbladelementen. We moeten bij de definities bedenken dat bij een vliegtuigvleugel in beginsel de aanstroomrichting horizontaal en de richting van de dragende kracht vertikaal is.

Geïntegreerd over de totale breedte van de vleugel ( $b$ ), blijkt de geïnduceerde weerstand minimaal te zijn, als de circulatie elliptisch verdeeld is over de breedte. In dat geval vindt men een neerstroming ("downwash") die constant is over de breedte, met de waarde:

$$w = \frac{\Gamma_0}{4b} \quad (\Gamma_0 = \text{circulatie bij } y=0)$$

volgens Kutta-Joukowski is:

$$L = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \rho U \Gamma(y) dy = \rho U \Gamma_0 \frac{\pi b}{4}$$

zodat:

$$\Gamma_0 = \frac{4L}{\pi \rho U b} \quad \text{en } w = \frac{2L}{\pi \rho U b^2}$$

stel:

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 A,$$

dan is:

$$\alpha_i = \frac{w}{U} = \frac{C_L A}{\pi b^2}$$

en als:

$$D_i = C_{Di} \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

$$C_{Di} = \frac{C_L^2 A}{\pi b^2}$$

De verhouding:  $\frac{b^2}{A}$  noemen we de aspectverhouding

(b = vleugelbreedte of "vlucht")

(A = planoppervlak )

De geïnduceerde weerstand is in hoge mate afhankelijk van de belasting (=  $C_L$ ) en van de aspectverhouding.

#### 11.5. Draagvleugeltheorieën.

In het vorige hoofdstuk is in het kort een "dragende lijn theorie" besproken. Met de "dragende lijn" wordt bedoeld, de, tot één wervellijn samengetrokken gebonden wervels. Deze theorie is goed bruikbaar voor meer algemene berekeningen met betrekking tot krachten en stromingen rond draagvlaksystemen, zoals b.v. schroeven.

Voor meer gedetailleerde berekeningen over de vorm en drukverdeling van de draagvlakken zelf, zijn "dragende vlak"-theorieën in ontwikkeling. Hierbij wordt in principe het gehele dragende vlak (continu of discreet) belegd met gebonden wervels, die allemaal hun eigen afgaande wervelsysteem bezitten.

De wervelsystemen worden hierbij mathematisch vaak vervangen door systemen van aequivalente dipolen.

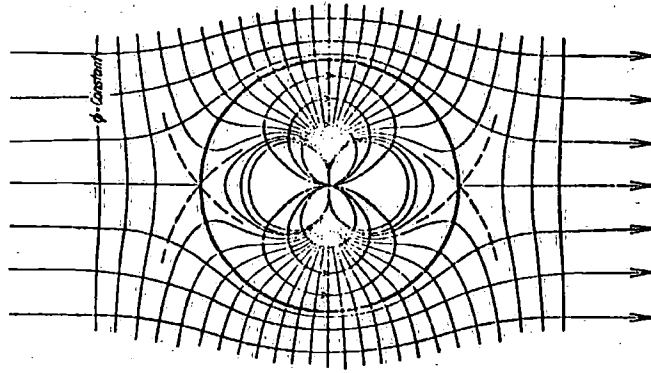


FIG. 82.—Superposition of a dipole flow and a parallel flow from left to right.

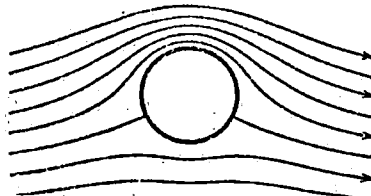


FIG. 105.—Flow round a cylinder with circulation.

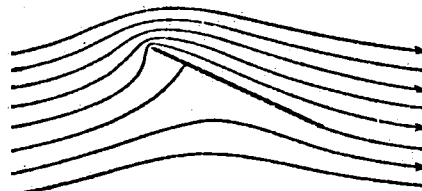


FIG. 106.—Combination of parallel flow and circulation round plate inclined to the stream. The circulation is so chosen that the streamline flows smoothly off the trailing edge.

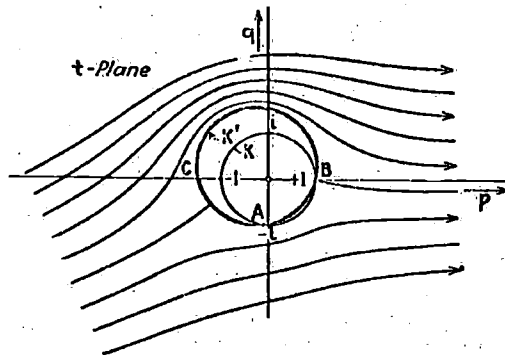


FIG. 107.—Flow round a circle eccentric to the unit circle.

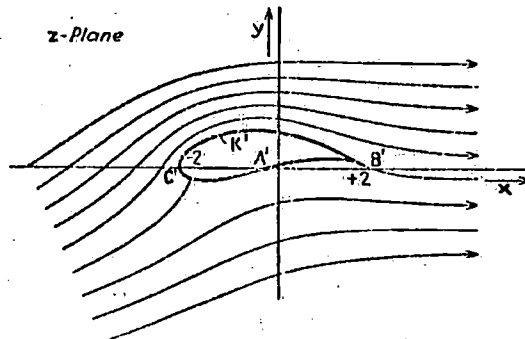


FIG. 108.—Flow round a Joukowski profile. Conformal transformation from the  $t$ -plane of Fig. 107 into a  $z$ -plane in which the unit circle of the  $t$ -plane is transformed into a straight line from  $-2$  to  $+2$ .

uit: Prandtl & Tietjens: "Fundamentals of Aero- and Hydro mechanics"