**Technische Universiteit Delft**
**Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica**
**Delft Institute of Applied Mathematics**

# Niet-standaard analyse

## (Engelse titel: Non-standard analysis)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute for Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE**
**in**
**TECHNISCHE WISKUNDE**

**door**

**Sander van Dijk**

**Delft, Nederland**
**Juni 2011**

**BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE**

# Niet-standaard analyse
**(Engelse titel: Non-standard analysis)**

Sander van Dijk

**Technische Universiteit Delft**

**Begeleider**

Dr. E. Coplakova

**Overige commissieleden**

Dr.ir. W.G.M. Groenevelt

Dr. J.A.M. de Groot

Dr. G.F. Ridderbos

Juni, 2011 Delft

# Hoofdstuk 1

# Inleiding

Dit verslag gaat over niet-standaard analyse. Simpel gezegd breidt niet-standaard analyse de standaard analyse uit met oneindig grote en oneindig kleine getallen. Gottfried Leibniz (1646-1716) en Isaac Newton (1643-1727) gebruikten al oneindig kleine getallen ofwel infinitesimalen. Er was echter geen onderbouwde theorie voor, waardoor deze getallen werden afgedaan alsof ze niet bestonden. De berekeningen die ermee werden uitgevoerd bleken echter wel te kloppen. In 1960 wist Abraham Robinson (1918-1974) een oplossing voor dit probleem. Hij ontwikkelde de niet-standaard analyse met axioma's die voortkwamen uit de logica.

Robinson was geboren in het toenmalige Duitsland en is opgevoed in een Joodse familie. Hij werd bekend door zijn wiskundige aanpak. Hij probeerde analytische problemen op te lossen met behulp van logica. Vooral richting de niet-standaard analyse had dat groot succes.

De niet-standaard analyse is goed toepasbaar in problemen waar limieten en continuïteit in voorkomen. Met een limiet probeer je bijvoorbeeld nul te benaderen, maar je komt er niet precies. Je beschouwt alleen wat er vlakbij nul gebeurt. Infinitesimalen bieden hier uitkomst. Een infinitesimaal is zo'n getal dat oneindig dicht bij nul ligt. Nul zelf is ook een infinitesimaal, maar met een iets andere rol. Ook oneindig grote getallen kunnen uitkomst bieden. Door een interval in oneindig veel kleine deelintervallen te verdelen kun je alle standaard punten van het interval apart beschouwen.

In het eerste hoofdstuk wordt beschreven hoe we via de logica een structuur $\mathfrak{R}^*$ kunnen maken uit de standaard structuur $\mathfrak{R}$. Dit gaat analoog met de afleiding in [1]. Hieronder volgt eerst een wat minder formele afleiding die wellicht wat beter een beeld geeft van wat er gebeurt. Met de standaardstructuur voor de reëele getallen bedoelen we eigenlijk gewoon de analyse zoals we die kennen. Aan de logische eerste-orde taal worden eigenschappen meegegeven dusdanig dat de stellingen en definities die we kennen waar zijn in de structuur.
De niet-standaard structuur geeft hier een uitbreiding op door oneidig grote getallen toe te laten. Deze structuur is elementair equivalent met de standaard structuur. Dat houdt in dat alles wat waar is binnen de standaard structuur ook waar moet zijn in de niet-standaard structuur, mits het geformuleerd kan

worden in een gesloten eerste-orde logische formule. Andersom moet hetzelfde gelden. Onder een gesloten eerste-orde logische formule (later geformuleerd als gesloten formule) verstaan we een goed geformuleerde formule in de eerste-orde logica waarvan alle variabelen gekwantificeerd zijn.

Noem de verzameling van alle formules in $\mathfrak{R}$ die waar zijn $Th\mathfrak{R}$. We bekijken nu de verzameling van formules $\Gamma = Th\mathfrak{R} \cup \{c_r A_< v_1 \mid r \in \mathbb{R}\}$ waarbij $c_r$ een symbool voor een constante, $A_<$ een symbool voor een predikaat en $v_1$ een symbool voor een variabele in de logische taal is.
Elke eindige deelverzameling van $\Gamma$ is waar in $\mathfrak{R}$ als we $v_1$ maar kiezen als een voldoende groot reëel getal. Uit de compactheidsstelling (zie [1]), volgt nu dat de verzameling $\Gamma$ vervulbaar is in een structuur $\mathfrak{A}$ waarbij $v_1$ de waarde $a$ krijgt voor een $a \in |\mathfrak{A}|$. Een verzameling van formules is vervulbaar als met één waardetoekenning aan alle symbolen alle formules uit de verzameling waar zijn. $\mathfrak{A}$ is een model voor $Th\mathfrak{R}$ (dit betekent dat alle formules van $Th\mathfrak{R}$ ook waar zijn in $\mathfrak{A}$). We noemen dit elementaire equivalentie en schrijven $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{R}$.

We maken nu een isomorfe kopie van $\mathfrak{R}$ binnen $\mathfrak{A}$, zodat we een structuur $\mathfrak{R}^*$ kunnen vinden die isomorf is met $\mathfrak{A}$, dusdanig dat $\mathfrak{R}$ een deelstructuur van $\mathfrak{R}^*$ is. Beschouw het injectieve homomorfisme $h$ als functie met domein $\mathbb{R}$ en codomein $|\mathfrak{A}|$. We definiëren: $h(r) = a_r$, waarin $a_r$ een constante uit $\mathfrak{A}$ is. Dat dit een bijectie is, zien we aan de hand van de volgende gesloten formule. Hierin zijn $c_1$ en $c_2$ symbolen voor constanten.
$\models_{\mathfrak{R}} c_1 \neq c_2$ dus $\models_{\mathfrak{A}} c_1 \neq c_2$ want $\mathfrak{A}$ is elementair equivalent met $\mathfrak{R}$ ($\models_{\mathfrak{B}} \sigma$ betekent dat $\sigma$ waar is in $\mathfrak{B}$)
Als twee constanten $r_1$,$r_2$ niet gelijk zijn in $\mathfrak{R}$ dan zijn de bijbehorende constanten $a_1, a_2$ niet gelijk in $\mathfrak{A}$.

Op eenzelfde manier kunnen we laten zien dat relaties behouden blijven. Dit zullen we wederom in het volgende hoofdstuk formeel bewijzen. Een voorbeeld van het behoud van een relatie is $c_1 < c_2$. Net als hierboven is dit een gesloten formule die waar is in $\mathfrak{R}$. Er volgt dus weer via de elementaire equivalentie dat $c_1 < c_2$ ook waar is in $\mathfrak{A}$. Ook functies blijven behouden want als $F(r, s) = t$ in $\mathfrak{R}$ dan geldt via de equivalentie ook $F(r, s) = t$ in $\mathfrak{A}$.
Relaties en functies blijven dus behouden bij dit homomorfisme $h$. De constanten waarmee relaties en functies gevormd worden leven alleen in een andere wereld. De vertaling van de relaties of functies kan dus ook anders zijn.

Nu kunnen we gewoon een structuur $\mathfrak{R}^*$ isomorf met $\mathfrak{A}$ kiezen zodat $|\mathfrak{R}| = \mathbb{R}$ bevat is in $|\mathfrak{R}^*| = \mathbb{R}^*$. Voor $r \in \mathbb{R}$ geldt dus $r \in \mathbb{R}^*$. Omdat $\mathfrak{R}^*$ isomorf is met $\mathfrak{A}$ geldt dat er een $b \in \mathbb{R}^*$ bestaat zodat $\mathfrak{R}^*$ voldoet aan $\Gamma$ als $v_1$ de waarde $b$ krijgt. Hieruit volgt dus dat $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}^*$.

Met deze structuur $\mathfrak{R}^*$ kunnen we niet-standaard definities van bekende begrippen zoals continuïteit en de afgeleide geven en vervolgens laten zien dat die definities equivalent zijn met de standaard definities. De niet-standaard definities bieden hulp bij het bewijzen van stellingen in de analyse. In sommige gevallen is een niet-standaard bewijs voor die stellingen veel eenvoudiger dan een standaard bewijs. De bekende $\epsilon, \delta$ bewijzen worden met behulp van de niet-standaard analyse een stuk eenvoudiger.

# Hoofdstuk 2

# De constructie van $\mathfrak{R}^*$

We gaan de standaard structuur $\mathfrak{R}$ uitbreiden naar de niet-standaard structuur $\mathfrak{R}^*$. Deze afleiding gaat bijna geheel analoog aan die in *A mathematical introduction to logic* van *Enderton* [1]. Allereerst hebben we een grote eerste orde logische taal. Dit wil zeggen dat er voldoende symbolen zijn voor de relaties en operaties die we willen gebruiken en dat er voldoende symbolen voor constanten zijn. Formeel gezien houdt dat dus het volgende in:

1. Voor elk reëel getal $r$ is er een symbool voor constante $c_r$.
2. Voor elke $n$-aire operatie $\varphi$ is er een symbool voor de functie $f_\varphi$.
3. Voor elke $n$-aire relatie $\Phi$ is er een symbool voor het predicaat $A_\Phi$.

We hebben nu de standaard structuur $\mathfrak{R}$ voor deze taal. Deze structuur houdt in dat $|\mathfrak{R}| = \mathbb{R}$ en verder hebben we alle bekende operaties en relaties uit de standaard analyse. We kiezen dus: $c_r^{\mathfrak{R}} = r$, $f_\varphi^{\mathfrak{R}} = \varphi$ en $A_\Phi^{\mathfrak{R}} = \Phi$. Met $c_r^{\mathfrak{R}}$ bedoelen we de vertaling in $\mathfrak{R}$ van het symbool voor de constante. Evenzo voor het symbool voor een relatie

We vormen nu een niet-standaard structuur door gebruik te maken van de compactheidsstelling voor eerste orde logica. We gebruiken hiervoor:

$$\Gamma = Th\mathfrak{R} \cup \{c_r A_< v_1 \mid r \in \mathbb{R}\}$$

Voor een $r \in \mathbb{R}$ betekend de gesloten formule $c_r A_< v_1$ dus: voor een reële $r$ geldt dat $r$ kleiner is dan $v_1$ en $Th\mathfrak{R}$ is de verzameling van alle formules die waar zijn in $\mathfrak{R}$. Aan elke eindige deelverzameling van $\Gamma$ kan in $\mathfrak{R}$ worden voldaan door $v_1$ groot genoeg te kiezen. Een eindige deelverzameling van $\Gamma$ geeft namelijk formules uit $Th\mathfrak{R}$ die sowieso al waar zijn in $\mathfrak{R}$ en eindig veel elementen die kleiner moeten zijn dan $v_1$. Er is in $\mathfrak{R}$ altijd een groter element dat groter is dan de elementen uit een eindige deelverzameling van $\mathbb{R}$. We zullen nu de compactheidsstelling gaan gebruiken.

**Stelling 2.1.** *Laat $\Delta$ een verzameling van formules zijn. Als elke eindige deelverzameling $\Delta_0$ van $\Delta$ vervulbaar is, dan is $\Delta$ vervulbaar.*

Voor een bewijs zie [1].

Er is een waardetoekenning zodat alle formules van een eindige deelverzameling van $\Gamma$ waar zijn. Volgens de compactheidsstelling is er dus een structuur $\mathfrak{A}$ zodat alle formules van $\Gamma$ waar zijn. Voor deze structuur is er dus een $a \in \mathfrak{A}$ zodat $v_1^{\mathfrak{A}} = a$.

**Definitie 2.2.** Twee structuren $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ zijn elementair equivalent als elke gesloten formule die waar is in $\mathfrak{A}$ ook waar is in $\mathfrak{B}$ en andersom. We schrijven $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Omdat $\mathfrak{A}$ een model is van $Th\mathfrak{R}$, hebben we $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{R}$.

**Definitie 2.3.** Laat $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ twee structuren zijn. Een homomorfisme van $\mathfrak{A}$ naar $\mathfrak{B}$ is een functie $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ met de eigenschap dat:

1. de afbeelding $h$ behoudt elke $n$-aire relatie.
2. de afbeelding $h$ behoudt elke $n$-aire functie.
3. de afbeelding $h$ behoudt elke constante.

Met 'behoudt een relatie' bedoelen we hier dat een relatie bij de vertaling van de ene structuur naar de andere hetzelfde blijft betekenen.

We maken nu een afbeelding $h$ die een element uit $\mathfrak{R}$ afbeeld in $h(\mathfrak{R})$ met $h(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}$. Met $h(\mathfrak{R})$ bedoelen we hier de verzameling van punten waar $\mathfrak{R}$ op wordt afgebeeld. Er geldt dus $h(r) = a_r$ met $r \in \mathfrak{R}$ en $a_r \in \mathfrak{A}$. Voor elke reëele $r$ is er een constante in $\mathfrak{A}$. Het is een afbeelding naar een deel van $\mathfrak{A}$ omdat $\mathfrak{A}$ groter is dan $\mathfrak{R}$. Er is daar namelijk op z'n minst een oneindig groot getal meer. We laten nu zien dat $h$ een isomorfisme is. Een isomorfisme is een bijectief homomorfisme.

Hiervoor gebruiken we dat $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{R}$. Kies $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ met $r_1 \neq r_2$. De formule $c_{r_1} \neq c_{r_2}$ is waar in $\mathfrak{R}$. Wegens de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{A}$ geldt dus ook dat $a_{r_1} \neq a_{r_2}$ waar is in $\mathfrak{A}$. Hieruit concluderen we dus dat $h$ bijectief is van $\mathbb{R}$ naar $h(\mathbb{R})$.

Om aan te tonen dat $h$ een homomorfisme is, laten we zien dat hij relaties, functies en constanten behoudt.
Voor een $n$-aire relatie $R = P_R^{\mathfrak{R}}$ geldt: $(r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\langle r_1, r_2, \ldots, r_n \rangle \in P_R^{\mathfrak{R}} \quad & \text{desda} \quad \models_{\mathfrak{R}} P_{\mathfrak{R}} a_{r_1} a_{r_2} \cdots a_{r_n} \\
& \text{desda} \quad \models_{\mathfrak{A}} P_{\mathfrak{R}} a_{r_1} a_{r_2} \cdots a_{r_n} \\
& \text{desda} \quad \langle a_{r_1}^{\mathfrak{A}} a_{r_2}^{\mathfrak{A}} \cdots a_{r_n}^{\mathfrak{A}} \rangle \in P_R^{\mathfrak{A}} \\
& \text{desda} \quad \langle h(r_1), h(r_2), \ldots, h(r_n) \rangle \in P_R^{\mathfrak{A}}
\end{aligned}$$

Voor n-aire relaties met getallen in $\mathfrak{R}$ bestaan er dus constanten in de logische taal die aan deze relaties voldoen. Omdat $\mathfrak{R}$ elementair equivalent is met $\mathfrak{A}$ geldt dat er ook aan de relatie in $\mathfrak{A}$ voldaan wordt. Onze afbeelding $h$ stuurt dus de betreffende constanten uit $\mathbb{R}$ naar die in $|\mathfrak{A}|$ met behoud van hun relatie.

Neem nu aan dat $F = f_F^{\mathfrak{R}}$ een $n$-aire functie is. Laat $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ zijn en noem $t = F(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. We gebruiken dat de formule $a_t = f_F a_1 a_2 \cdots a_n$ waar is in $\mathfrak{R}$ en dus in $\mathfrak{A}$. Er geldt nu:

$$\begin{aligned} h(f_F^{\mathfrak{R}}(r_1, r_2, \ldots, r_n)) &= h(F(r_1, r_2, \ldots, r_n)) \\ &= h(t) \\ &= a_t^{\mathfrak{A}} \\ &= f_F^{\mathfrak{A}}(a_{r_1}^{\mathfrak{A}}, a_{r_2}^{\mathfrak{A}}, \ldots, a_{r_n}^{\mathfrak{A}}) \\ &= f_F^{\mathfrak{A}}(h(r_1), h(r_2), \ldots, h(r_n)) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat de afbeelding $h$ ook een functie $f$ behoudt. Dit maakt compleet dat $h$ een isomorfisme is.

We hebben dus een isomorfe kopie van $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{A}$. Over de structuur $\mathfrak{A}$ is echter bijna niets gedefinieerd. Zo hoeven de elementen van $\mathfrak{A}$ niet (voor een deel) gelijk te zijn aan die van $\mathfrak{R}$ en de functies kunnen een totaal andere betekenis hebben. We kiezen nu een structuur $\mathfrak{R}^*$ die isomorf is met $\mathfrak{A}$ maar zodat $\mathfrak{R}$ een deelstructuur is van $\mathfrak{R}^*$. Dat houdt in dat de elementen van $\mathfrak{R}$ ook bevat zijn in $\mathfrak{R}^*$ en dat de relaties tussen die elementen dus ook in $\mathfrak{R}^*$ gelden. De relaties van $\mathfrak{R}$ blijven wegens de elementaire equivalentie ook behouden in $\mathfrak{A}$ maar kunnen een heel andere betekenis hebben omdat de elementen niet (voor een deel) overeenkomen. Een getal $r \in \mathbb{R}$ is in $\mathfrak{A}$ gekoppeld aan $a_r$, maar we weten niets van $a$. In $\mathfrak{R}^*$ wordt $r$ gewoon afgebeeld naar hetzelfde getal, maar dan in $\mathfrak{R}^*$. De formule $a < b$ betekent zowel in $\mathfrak{R}$ als in $\mathfrak{R}^*$ dat: getal $a$ is kleiner dan getal $b$. In $\mathfrak{A}$ kan het net zo goed persoon $a$ gooit een bal naar persoon $b$ betekenen.

Omdat $\mathfrak{R}^*$ isomorf is met $\mathfrak{A}$, is er een element $b \in |\mathfrak{R}^*|$ zodat $\mathfrak{R}^*$ voldoet aan $\Gamma$ als $v_1 = b$. Er volgt dus dat $\mathfrak{R}^*$ elementair equivalent is met $\mathfrak{R}$.

De elementen uit $\mathfrak{R}$ zitten dus ook in $\mathfrak{R}^*$. Daarnaast zitten in $\mathfrak{R}^*$ ook nog elementen die expliciet groter zijn dan de elementen van $\mathfrak{R}$. Deze getallen zijn dus oneindig groot. Als nu $x \in \mathbb{R}^*$ oneindig groot is, dan is $\frac{1}{x}$ oneindig klein. We noemen de verzameling van oneindig kleine getallen $\mathfrak{I}$ en de verzameling van getallen die niet oneindig groot zijn $\mathfrak{F}$. De expliciete definities volgen in het volgende hoofdstuk.

# Hoofdstuk 3

# Eigenschappen van het niet-standaard model

## 3.1 Eindige en oneindig kleine getallen

In dit hoofdstuk zullen we wat eigenschappen van getallen uit ons niet standaard model beschouwen. We kijken eerst naar de verzamelingen $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{F}$ en wat eigenschappen daarvan. De verzameling $\mathfrak{I}$ is de verzameling van oneindig kleine getallen. Deze wordt geconstrueerd door 1 te delen door oneindig grote getallen en ook 0 zit in de verzameling. De definitie is als volgt:

**Definitie 3.1.** $i \in \mathfrak{I}$ dan en slechts dan als voor alle $r \in \mathbb{R}$ met $r \neq 0$ geldt $|i| < |r|$.

Er geldt dat $\mathfrak{I}$ gesloten is onder vermenigvuldiging en optelling. Neem $i, j \in \mathfrak{I}$. Als $|i + j| \geq |r_0|$ voor een $r_0 \in \mathbb{R}$, dan ofwel $|i| \geq |r_0|/2$ ofwel $j \geq |r_0|/2$ (want anders $|i|+|j| < |r_0|$ en vanwege de driehoeksongelijkheid $|i+j| < |r_0|$) en dat is in tegenspraak met dat $|i| < |r|$ en $|j| < |r|$ voor alle $r \in \mathbb{R}$ behalve 0 ($r_0/2 \in \mathbb{R}$). Tevens geldt $|ij| < |i| < |r|$ want zeker $|j| < 1$. Binnen de verzameling $\mathfrak{I}$ zijn ook additieve inversen. Voor elke $i \in \mathfrak{I}$ geldt dat $-i \in \mathfrak{I}$, want $|-i| = |i| < |r|$ voor alle $r \in \mathbb{R}$ behalve 0. Er bestaat dus voor elk element een additieve inverse. Multiplicatieve inversen voor $j \in \mathfrak{I}$ zijn oneindig groot en dus niet uit $\mathfrak{I}$.

De verzameling van getallen die niet oneindig groot zijn is de verzameling $\mathfrak{F}$. Deze is als volgt gedefinieerd:

**Definitie 3.2.** $x \in \mathfrak{F}$ dan en slechts dan als voor een $r \in \mathbb{R}$ geldt $|x| < |r|$.

De verzameling $\mathfrak{F}$ is te beschouwen door bij een element uit $\mathfrak{I}$ een element uit $\mathbb{R}$ op te tellen. Een element $x \in \mathfrak{F}$ is dan ook te schrijven als $x = r + i$ met $r \in \mathbb{R}$ en $i \in \mathfrak{I}$. Als $r = 0$, dan $x \in \mathfrak{I}$ en als $i = 0$, dan $x \in \mathbb{R}$. De verzamelingen $\mathbb{R}$ en $\mathfrak{I}$ zijn dus deelverzamelingen van $\mathfrak{F}$. Alle elementen uit $\mathfrak{F}$ hebben een additieve inverse en de verzameling is gesloten onder optelling en vermenigvuldiging. Kies $x, y \in \mathfrak{F}$, dan is er een $r_1$ zodat $|x| < |r_1|$ en een $r_2$ zodat $|y| < |r_2|$. Maar dan $|x + y| \leq |x| + |y| < |r_1| + |r_2|$ en $|r_1| + |r_2|$ is weer uit $\mathbb{R}$. Evenzo geldt $|xy| = |x||y| < |r_1||r_2| = |r_1 r_2|$ en $r_1 r_2$ is weer uit $\mathbb{R}$. Voor de additieve inverse geldt $x - x = 0$ en $|-x| = |x| < |r_1|$. Niet alle elementen hebben multiplicatieve inversen in $\mathfrak{F}$, zo geldt voor $i \in \mathfrak{I}$ (oneindig klein) dat $1/i$ oneindig groot is en dus niet uit $\mathfrak{F}$. $|i|$ is namelijk kleiner dan $|1/r|$ voor alle $r \in \mathbb{R}$, en dus is $|1/i| > |r|$ voor alle $r \in \mathbb{R}$.

Neem nu $x \in \mathfrak{F}$ en $i \in \mathfrak{I}$. Stel $|x| \leq 1$, dan geldt $|x||i| = |xi| \leq |i| < r$ voor alle $r \in \mathbb{R}$. Als $|x| > 1$ dan moeten we eerst $x$ schrijven als $x = x_0 + j$ met $x_0 \in \mathbb{R}$ en $j \in \mathfrak{I}$. We vinden dan $xi = x_0 i + ji$ en $ji$ is duidelijk uit $\mathfrak{I}$. Er geldt $|x_0 i| = |x_0||i| < |x_0||r| = |x_0 r|$ voor alle $r \in \mathbb{R}$. Kies nu $s = rx_0$. Hier is $s$ (net als $r$) ook willekeurig uit $\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat $x_0 i$ ook uit $\mathfrak{I}$ is en dus $xi$ is uit $\mathfrak{I}$.

Het element 0 blijft een speciale rol spelen. Anders dan voor andere elementen uit $\mathfrak{I}$, kunnen we nog steeds niet door 0 delen. Ook geldt dat wanneer we met 0 vermenigvuldigen er altijd 0 uit komt. Als we oneindig kleine met oneindig grote getallen vermenigvuldigen, kan het resultaat oneindig klein, eindig of oneindig groot worden. Kies bijvoorbeeld een $i \in \mathfrak{I}$. Uit $i \cdot \frac{1}{i}$ komt 1 en $i$ is oneindig klein en $\frac{1}{i}$ is oneindig groot. Het getal $\frac{1}{i^2}$ is echter ook oneindig groot en $i \cdot \frac{1}{i^2} = \frac{1}{i}$ is dat ook. Evenzo is $i^2 \frac{1}{i}$ oneindig klein. Als we een oneindig groot getal met 0 vermenigvuldigen, komt er nog steeds 0 uit. Dit kunnen we bewijzen via de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$. De formule $\forall x(x \cdot 0 = 0)$ is gesloten want $x$ is de enige variabele en die wordt gekwantifiseerd. De formule zegt in $\mathfrak{R}$ dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt $x \cdot 0 = 0$. Dit is waar in $\mathfrak{R}$, dus moet het ook waar zijn in $\mathfrak{R}^*$. Het geldt dus ook voor alle $x \in \mathbb{R}^*$.

Beschouw nu de gesloten formule: $\neg\exists x \exists a(x/0 = a)$. Deze formule zegt in $\mathfrak{R}$ dat er geen getallen $x, a \in \mathbb{R}$ zijn zodat $a = x/0$. Omdat $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ elementair equivalent zijn, is deze formule dus ook waar in $\mathfrak{R}^*$. Er geldt dus dat er geen elementen in $\mathbb{R}^*$ zijn met $a = x/0$. Oftwel, het ezelsbruggetje 'delen door 0 is flauwekul' gaat ook op in $\mathfrak{R}^*$.

## 3.2 Het standaarddeel

We bekijken nu de functie $f$ van $\mathfrak{F}$ naar $\mathbb{R}$ met $f = st(x)$ voor een getal $x \in \mathfrak{F}$. Deze functie geeft een $x_0 \in \mathbb{R}$ die het dichtst bij $x$ ligt. Merk eerst op dat iedere $x \in \mathfrak{F}$ te schrijven is als $x = x_0 + i$ met $x_0 \in \mathbb{R}$ en $i \in \mathfrak{I}$ omdat $x$ niet oneindig groot is. We definiëren het standaarddeel dus als volgt:

**Definitie 3.3.** Als we $x \in \mathfrak{F}$ schrijven als $x = x_0 + i$ met $x_0 \in \mathbb{R}$ en $i \in \mathfrak{I}$, dan $st(x) = x_0$.

Het standaard deel is zo goed gedefinieerd want de schrijfwijze van $x = x_0 + i$ met $x_0 \in \mathbb{R}$ en $i \in \mathfrak{I}$ is uniek. Stel dat we schrijven $x = y_0 + j$ met $y_0 \in \mathbb{R}$ en $j \in \mathfrak{I}$, dan vinden we $0 = x - x = x_0 + i - (y_0 + j) = x_0 - y_0 + i - j$. Hierin is $x_0 - y_0$ standaard en $i - j$ is infinitesimaal. De enige infinitesimaal die ook uit $\mathbb{R}$ is, is 0. We concluderen dus dat $x_0 = y_0$ en $i = j$.

Ten eerste is duidelijk dat voor $i \in \mathfrak{I}$ geldt dat $st(i) = 0$. Voor een $i \in \mathfrak{I}$ geldt namelijk $i = 0 + 1$, waardoor 0 dus het standaard deel is. Andersom weten we dat als $st(x) = 0$ dan moet gelden $x \in \mathfrak{I}$.

De functie $st$ behoudt de commutatieve en associatieve eigenschappen voor de bekende additieve en multiplicatieve operaties. Neem $x, y, z \in \mathfrak{F}$, en schrijf $x = x_0 + i, y = y_0 + j, z = z_0 + k$ met $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ en $i, j, k \in \mathfrak{I}$.

- $st(x+y) = st(x_0+i+y_0+j) = x_0+y_0 = st(x_0+i)+st(y_0+j) = st(x)+st(y)$
- $st(x)st(y) = st((x_0+i)(y_0+j)) = st(x_0y_0+x_0j+y_0i+ij) = x_0y_0 = st(xy)$
- $st(x + y) = st(x) + st(y) = st(y) + st(x) = st(y + x)$
- $st(xy) = st(x)st(y) = st(y)st(x) = st(yx)$

Met behulp van het standaarddeel, bewijzen we veel makkelijker dat als $x \in \mathfrak{F}$ en $i \in \mathfrak{I}$ dan $xi \in \mathfrak{I}$. Als we het standaard deel nemen vinden we namelijk $st(xi) = st(x)st(i) = st(x) \cdot 0 = 0$. Hieruit volgt direct $xi \in \mathfrak{I}$.

We beschouwen nu de relatie $\simeq$. Deze relatie zegt dat twee getallen uit $\mathfrak{R}^*$ oneindig dicht bij elkaar liggen.

**Definitie 3.4.** Als geldt $x = y + i$ met $x, y \in \mathbb{R}^*$ en $i \in \mathfrak{I}$, dan schrijven we $x \simeq y$.

**Stelling 3.5.** *De relatie $\simeq$ is een equivalentierelatie.*

*Bewijs*: een relatie is een equivalentierelatie als hij voldoet aan reflexiviteit, symmetrie en transiviteit. Voor reflexiviteit moet gelden $x \simeq x$. Omdat $x = x + 0$ en $0 \in \mathfrak{I}$ is, voldoen we hier inderdaad aan. Voor symmetrie moet gelden $x \simeq y$ dan $y \simeq x$. We weten $x = y + i$ voor een $i \in \mathfrak{I}$ en dus $y = x - i$. Omdat $\mathfrak{I}$ gesloten onder optelling is, geldt $-i \in \mathfrak{I}$. Transitiviteit houdt in dat als $x \simeq y$ en $x \simeq z$ dan ook $y \simeq z$. Schrijven we $x = y + i$ en $x = z + j$ dan vinden we $y + i = z + j$ en dus $y = z + k$ met $k = j - i$ en dus $k \in \mathfrak{I}$. We concluderen dus dat $\simeq$ een equivalentierelatie is.

Als geldt dat $x \simeq y$ met $x, y$ eindig, dan volgt hieruit dus dat $x = y+i$ met $i \in \mathfrak{I}$. Nemen we hier het standaard deel van, dan krijgen we: $st(x) = st(y+i) = st(y)$. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ geldt dat als $x \simeq y$ dan $x = y$. Dit volgt uit dat $x = y + i$ met $i \in \mathfrak{I}$ en dus $i = x - y$ en omdat $x, y \in \mathbb{R}$ geldt $i \in \mathbb{R}$. Het enige element in $\mathfrak{I}$ dat ook uit $\mathbb{R}$ is, is 0. Hierdoor geldt $x = y$.

Neem nu $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Als $x + y \simeq z$ dan geldt $x + y = z + i$ en dus $x = z - y + i$. Hieruit volgt dat $x \simeq y - z$.
Als $y \notin \mathfrak{I}$ kunnen we hetzelfde doen bij een product. Als $xy \simeq z$, dan hebben we $xy = z + i$. Delen we nu door $y$ dan krijgen we $x = z/y + i/y = z/y + j$ met $j \in \mathfrak{I}$, en dus $x \simeq z/y$. Als $y \in \mathfrak{I}$ dan kunnen we niets zinnigs zeggen over de grootte van $i/y$.

# Hoofdstuk 4

# Niet-standaard definities

In dit hoofdstuk zullen we ingaan op de niet-standaard definities van verdichtingspunt, limiet, continuïteit, afgeleiden en uniforme continuïteit. We zullen laten zien dat de standaard en de niet-standaard definities equivalent zijn. In het volgende hoofdstuk zullen we voor een aantal eenvoudige stellingen laten zien hoe we die niet-standaard kunnen bewijzen en daar maken we gebruik van deze niet-standaard definities.

## 4.1 Verdichtingspunt

Kies $S \subseteq \mathbb{R}$, en $a$ een punt in $\mathfrak{R}$.
We geven eerst de standaard definitie, in dit geval de definitie zoals hij staat in [3].

**Definitie (standaard) 4.1.** Het punt $a$ heet een verdichtingspunt van $S$ als voor elke $\delta \in \mathbb{R}$ met $\delta > 0$ geldt: Er is een $x \in S$ met $x \neq a$ en $|x - a| < \delta$.

De niet standaard definitie is als volgt:

**Definitie (niet-standaard) 4.2.** Het punt $a$ heet een verdichtingspunt van $S$ als er een $x \neq a$ ($x \in \mathbb{R}^*$) bestaat met $x \in S^*$ en $x \simeq a$.

In de niet-standaard definitie is $S^*$ de vertaling van $S$ in $\mathfrak{R}^*$. De deelverzameling $S$ van $\mathbb{R}$ wordt uitgebreid naar $S^*$ dat een deelverzameling is van $\mathbb{R}^*$.
We zullen eerst bewijzen dat de standaard definitie de niet standaard definitie impliceert en vervolgens andersom. Als beide gelden zijn de definities equivalent.

### Standaard naar niet-standaard

Neem aan dat $a$ een verdichtingspunt is van $S$ volgens de standaard definitie. Aan de hand van een gesloten formule gaan we deze eigenschappen beschrijven. Via de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}*$, vertalen we deze formule in $\mathfrak{R}^*$. Hieruit kunnen we dan de niet-standaard definitie afleiden.

Beschouw de volgende gesloten formule $\sigma$:
$\forall\delta(\delta > 0 \rightarrow \exists x(x \in S \wedge x \neq a \wedge |x - a| < \delta))$
Deze formule is waar in $\mathfrak{R}^*$ want dit is een directe vertaling van de standaard

definitie. Gebruik makend van de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$, volgt dus dat $\sigma$ waar is in $\mathfrak{R}^*$.

In $\mathfrak{R}^*$ betekent $\sigma$:
Voor alle $\delta > 0$ ($\delta \in \mathbb{R}^*$) is er een $x$ met $x \in S^*, x \neq a$ en $|x - a| < \delta$.
De formule geldt voor alle $\delta > 0$, dus ook voor $\delta \in \mathfrak{I}$ ($\delta$ is oneindig klein). Kies dus $\delta \in \mathfrak{I}$ vast. Nu volgt uit de definitie van $\simeq$ dat $x - a \simeq 0$ en dus $x \simeq a$. We wisten al dat $x \neq a$ en $x \in S^*$, waarmee we aan alle voorwaarden van de niet-standaard definitie voldoen.

We concluderen nu dus dat $a$ een verdichtingspunt is volgens de niet-standaard definitie.

## Niet-standaard naar standaard

Neem aan dat $a$ een verdichtingspunt is van $S^*$ volgens de niet-standaard definitie. Neem $r \in \mathbb{R}$ willekeurig, maar vast en groter dan 0.

Beschouw de volgende gesloten formule $\tau$ (hierin is $\in S$ is een predikaat en $a$ een constante):
$\exists x(x \in S \wedge x \neq a \wedge |x - a| < r))$

Uit de niet-standaard definitie volgt dat er een $x \in S^*$ bestaat met $x \simeq a$ terwijl $x \neq a$. $x \simeq a$ betekent $|x - a| < r$ voor elke $r \in \mathbb{R}$ met $r > 0$. De formule $\tau$ is dus waar in $\mathfrak{R}^*$. We concluderen weer, via de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ en dat de formule $\tau$ gesloten is, dat de formule $\tau$ ook waar is in $\mathfrak{R}$.

Nu we weten dat de formule $\tau$ waar is in $\mathfrak{R}$, hoeven we alleen nog een geschikte $\delta$ te vinden zodat we voldoen aan de standaard definitie. De formule $\tau$ is waar voor onze willekeurig gekozen $r \in \mathbb{R}$. Nemen we dus $\delta = r$, dan volgt de standaar definitie uit de formule $\tau$. Voor elke $\delta \in \mathbb{R}$ met $\delta > 0$ is er een $x \in S$ met $x \neq a$ en $|x - a| < \delta$. Het punt $a$ is dus ook een verdichtingspunt volgens de standaard definitie.

De standaard definitie en de niet-standaard definitie zijn dus equivalent.

## 4.2 Limiet

Met behulp van het verdichtingspunt zullen we nu een niet-standaard definitie voor de limiet geven. We beginnen eerst met de standaard definitie.

**Definitie (standaard) 4.3.** $\lim_{x \to a} f(x) = b$ met a een verdichtingspunt van het domein van een functie $f$ desda:
Voor alle $\varepsilon > 0$, er is een $\delta > 0$ zodat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt: Als $x \neq a$ en $|x - a| < \delta$ dan $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Met de standaard definitie blijft het altijd gepuzzel om de juiste delta en epsilon te vinden. In de niet-standaard definitie hebben we die niet meer nodig. Hier gebruiken we dat getallen oneindig dicht bij elkaar liggen.

**Definitie (niet-standaard) 4.4.** $\lim_{x \to a} f(x) = b$ met a een verdichtingspunt van het domein van $f$ desda:
Voor elke eindige $x \in \mathbb{R}^*$ zodat $x \simeq a$ maar $x \neq a$ geldt $f^*(x) \simeq b$.

We zullen nu de equivalentie bewijzen.

### Standaard naar Niet-standaard

Onze $a$ is een constante uit het domein van $f$. Kies $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ willekeurig, maar vast. Kies $\delta$ zodat als $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$ dan $|f(x) - b| < \varepsilon$. Dit volgt uit de standaard definitie.

Beschouw nu de volgende gesloten formule $\sigma$:
$\forall x \; ((x \neq a \wedge |x - a| < \delta) \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$

De formule $\sigma$ is dus waar in $\mathfrak{R}$ met voor $\varepsilon$ en $\delta$ de hierboven gedefinieerde constanten. Wegens de equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$, vinden we dat $\sigma$ waar is in $\mathfrak{R}^*$. Vertalen we de formule $\sigma$ in $\mathfrak{R}^*$, dan krijgen we: Voor elke $x \in \mathbb{R}^*$ geldt, als $x \neq a$ en $|x - a| < \delta$ dan $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Neem nu aan: $x \simeq a$ en $x \neq a$. Uit de definitie van $\simeq$ volgt nu $|x - a| \in \mathfrak{I}$. Dit betekent dus dat voor elke $r \in \mathbb{R}$ geldt dat $|x - a| < r$. Onze $\delta$ was ook uit $\mathbb{R}$ en dus hebben we ook $|x - a| < \delta$. Uit $\sigma$ volgt nu dat $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Omdat $\varepsilon$ willekeurig was, kunnen we dit doen voor iedere $\varepsilon > 0$ en $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Hieruit concluderen we $|f(x) - b| \in \mathfrak{I}$ en dus $f(x) \simeq b$.

Uit de standaard definitie volgt dus de niet-standaard definitie.

### Niet-standaard naar Standaard

We hebben weer een constante $a$ uit het domein van $f$. We kiezen eerst $\delta \in \mathfrak{I}$ met $\delta > 0$. We nemen aan dat de niet-standaard definitie waar is. Voor alle $x \in \mathbb{R}^*$ met $|x - a| < \delta$ geldt $x \simeq a$ dus volgens de niet-standaard definitie $f(x) \simeq b$. Uit dit laatste volgt dat $|f(x) - b| < \varepsilon$, voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ (Dit volgt direct uit de definitie van $\simeq$).
Dit gaan we nu gebruiken om een gesloten formule te maken die waar is in $\mathfrak{R}^*$. Daartoe kiezen we eerst een $\varepsilon$ constant.

Kies $\varepsilon > 0$ (met $\varepsilon \in \mathbb{R}$) willekeurig, maar vast. We beschouwen nu de volgende gesloten formule $\tau$:
$\exists \delta\ (\delta > 0 \wedge \forall x\ ((x \neq a \wedge |x - a| < \delta) \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon))$

De formule $\tau$ is waar in $\mathfrak{R}^*$ omdat we hierboven een $\delta$ hadden gevonden die het voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ deed. Wegens de elementaire equivalentie en omdat $\tau$ gesloten is, is $\tau$ dus ook waar in $\mathfrak{R}$.
Omdat de formule $\tau$ zegt dat we een $\delta > 0$ kunnen vinden en onze $\varepsilon$ willekeurig was gekozen, voldoen we dus aan de standaard-definitie.

Uit de niet-standaard definitie volgt dus de standaard definitie. Omdat het omgekeerde ook gold, zijn de definities dus equivalent.

## 4.3 Continuïteit

**Definitie (standaard) 4.5.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}$, en $f : D \to \mathbb{R}$. Laat $c \in D$. $f$ heet continu in $c$ als er voor iedere $\varepsilon > 0$, een $\delta > 0$ bestaat, zodat voor elke $x \in D$ geldt: Als $|x - c| < \delta$ dan $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

**Definitie (niet-standaard) 4.6.** Zij $D^* \subseteq \mathbb{R}^*$, en $f : D^* \to \mathbb{R}^*$. Laat $c \in D$. $f$ heet continu in $c$ als voor elke $x \in \mathbb{R}^*$ met $x \simeq c$ geldt $f^*(x) \simeq f^*(c)$.

### Standaard naar Niet-standaard

Kies $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ willekeurig maar vast. Uit de standaard definitie weten we nu dat er een $\delta > 0$ ($\delta \in \mathbb{R}$) bestaaat, zodat als $|x-c| < \delta$ dan $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$. Deze gevonden $\delta$ is nu dus ook vast.

Beschouw nu de volgende gesloten formule $\sigma$:
$\forall x \; (|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$

Wegens de keuze van $\delta$ en $\varepsilon$ voldoen we in $\mathfrak{R}$ aan deze formule. De formule $\sigma$ is gesloten want $\varepsilon$ en $\delta$ zijn constanten. Wegens de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ is de formule $\sigma$ dus ook waar in $\mathfrak{R}^*$. Voor elke $x \in \mathbb{R}^*$ geldt dus: als $|x - c| < \delta$ dan $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Neem nu aan: $x \simeq c$.
Hieruit volgt dat $|x - c| \in \mathfrak{I}$ en daarom geldt $|x - c| < \delta$ want $\delta$ was uit $\mathbb{R}$. Uit de formule $\sigma$ volgt nu $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Nu gebruiken we dat we aan het begin $\varepsilon$ willekeurig gekozen hadden. Dat betekent dus dat voor elke $\varepsilon \in \mathbb{R}$ geldt $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Dit is precies de definitie voor een infinitesimaal. We hebben dus $|f(x) - f(c)| \in \mathfrak{I}$ en hieruit concluderen we $f(x) \simeq f(c)$. Hiermee voldoen we dus aan de niet-standaard definitie.

### Niets-standaard naar Standaard

We kiezen eerst $\delta \in \mathfrak{I}$ met $\delta > 0$. We nemen aan dat de niet-standaard definitie waar is. Voor alle $x \in \mathbb{R}^*$ met $|x - c| < \delta$ geldt $x \simeq c$ dus volgens de niet-standaard definitie $f(x) \simeq f(c)$. Uit dit laatste volgt dat $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$, voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ (Dit volgt direct uit de definitie van $\simeq$). Dit gaan we nu gebruiken om een gesloten formule te maken die waar is in $\mathfrak{R}^*$. Daartoe kiezen we eerst een $\varepsilon$ constant.

Kies $\varepsilon > 0$ (met $\varepsilon \in \mathbb{R}$) willekeurig, maar vast. We beschouwen nu de volgende gesloten formule $\tau$:
$\exists \delta \; (\delta > 0 \land \forall x \; (|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon))$

De formule $\tau$ is waar in $\mathfrak{R}^*$ omdat we hierboven een $\delta$ hadden gevonden die het voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ deed. Wegens de elementaire equivalentie en omdat $\tau$ gesloten is, is $\tau$ dus ook waar in $\mathfrak{R}$.

Voor elke willekeurige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ is de formule dus waar in $\mathfrak{R}$. We kunnen dus voor elke $\varepsilon$ een $\delta \in \mathbb{R}$ vinden zodat: als $|x-c| < \delta$ dan $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$.

## 4.4 Afgeleide

Voor de afgeleide maken we in de standaard definitie gebruik van de limiet. We laten een element $h$ nul benaderen. In de niet-standaard definitie hebben we geen limiet nodig. Daar kunnen we gewoon expliciet een oneindig klein getal kiezen.

**Definitie (standaard) 4.7.** Voor een functie $f$ geldt:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$$

mits deze limiet bestaat.

We zien hier dat de afgeleide alleen bestaat als de limiet bestaat. In het niet-standaard geval hebben we een standaarddeel nodig. Hierdoor is de eis dat $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ eindig is.

**Definitie (niet-standaard) 4.8.** voor een functie $f$ geldt:

$$f'(a) = st(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}) = b$$

voor alle $h \in \mathfrak{I} \setminus \{0\}$ mits $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ eindig is.

De equivalentie is hier wat eenvoudiger te bewijzen en kunnen we direct doen. Het omschrijven van de elementen geeft ons bijna direct de equivalentie tussen de definities.

### Bewijs equivalentie

We gaan uit van de standaard definitie. De limiet bestaat dus $f'(a) = b$. Substitueer hierin $h = x - a$.

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Naar de standaard definitie voor de limiet betekent dit: Voor alle $\varepsilon > 0$, er is een $\delta > 0$ zodat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt: Als $x \neq a$ en $|x-a| < \delta$ dan $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - b| < \varepsilon$.

Dit is equivalent met de niet-standaard definitie van de limiet: Voor elke eindige $x \in \mathbb{R}^*$ zodat $x \simeq a$ maar $x \neq a$ geldt $\frac{F(x)-F(a)}{x-a} \simeq b$.

We substitueren weer terug met $x = a + h$

$a + h \simeq a$ en $a + h \neq a$ dan $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq b$.

$h \simeq 0$ en $h \neq 0$ dan $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq b$.

$h \in \mathfrak{I}/\{0\}$ dan $st(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}) = b$ want $b \in \mathbb{R}$ dus $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ is eindig.

Al de bovenstaande regels zijn equivalent dus zijn de standaard en de niet-standaard definitie voor de afgeleiden ook equivalent.

## 4.5 Uniforme continuïteit

We zullen tot slot ook nog kijken naar uniforme continuïteit. Dit lijkt veel op gewone continuïteit. Het bewijs van de equivalentie lijkt dan ook op elkaar.

**Definitie (standaard) 4.9.** Een functie $f$ heet uniform continu op $D \subseteq \mathbb{R}$ als voor alle $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is en voor alle $x, y \in D$ geldt als $|y - x| < \delta$ dan $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

**Definitie (niet-standaard) 4.10.** Een functie $f^*$ heet uniform continu als voor alle $x, y \in D^*$ geldt als $x \simeq y$ dan $f(x) \simeq f(y)$.

### Standaard naar niet standaard

We gaan uit van de standaard definitie. Kies $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ willekeurig maar vast, en vind een bijbehorende $\delta \in \mathbb{R}$ met $\delta > 0$.

Beschouw de volgende gesloten formule $\sigma$:
$\forall x\, \forall y\, ((x \in D \wedge y \in D \wedge |y - x| < \delta) \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$

Uit de standaard definitie volgt dat $\sigma$ waar is in $\mathfrak{R}$. Omdat $\mathfrak{R}$ equivalent is met $\mathfrak{R}^*$ en $\sigma$ gesloten is, volgt dat $\sigma$ ook waar is in $\mathfrak{R}^*$. Als we deze formule vertalen in $\mathfrak{R}^*$ krijgen we: voor elke $x, y \in D^*$ met $|y - x| < \delta$ geldt $|f^*(y) - f^*(x)| < \varepsilon$.

We moeten bewijzen dat voor $x, y \in D^*$ met $x \simeq y$ geldt dat $f^*(y) \simeq f^*(x)$. Kies dus nu $x, y \in D^*$ zodat $x \simeq y$. Dan $|y - x| \in \mathfrak{I}$ dus $|y - x| < \delta$ want $\delta \in \mathbb{R}$. Volgens $\sigma$ geldt nu $|f^*(y) - f^*(x)| < \varepsilon$. Omdat $\varepsilon$ willekeurig was (alhoewel vast), geldt dus voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dat $|f^*(y) - f^*(x)| < \varepsilon$. Uit de definitie van $\simeq$ volgt nu dus $f^*(y) \simeq f^*(x)$.

### Niet standaard naar standaard

We nemen nu aan dat de niet-standaard definitie waar is. We weten dat als er een $\delta \in \mathfrak{I}$ is zodat $|y - x| < \delta$, dan zeker $|y - x| < r$ voor elke $r \in \mathbb{R}$ met $r$ groter dan nul. Dit is precies de definitie voor $x \simeq y$.

Kies nu $\varepsilon \in \mathbb{R}$ willekeurig maar groter dan 0. Als $f^*(x) \simeq f^*(y)$ dan $|f^*(y) - f^*(x)| < \varepsilon$ want $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dit gaan we nu schrijven als een gesloten formule.

Beschouw de gesloten formule $\tau$:
$\exists \delta\, (\delta > 0 \wedge \forall x\, \forall y\, ((x \in D \wedge y \in D \wedge |y - x| < \delta) \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$
De formule $\tau$ is ook gesloten want $D$ is een predikaat en $\epsilon$ was vast, dus een constante. Dat de formule $\tau$ waar is in $\mathfrak{R}^*$, is een combinatie van het bovenstaande. Er is een $\delta \in \mathbb{R}^*$ (kies namelijk maar $\delta \in \mathfrak{I}$) zodat als $|y - x| < \delta$ dan $y \simeq x$. Uit de niet-standaard definitie volgt dan dus $f(x) \simeq f(y)$, en daar volgt dan weer uit dat $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ (omdat $\varepsilon$ uit $\mathbb{R}$ was). Omdat $\tau$ dus waar is in $\mathfrak{R}$ is hij dat wegens elementaire equivalentie ook in $\mathfrak{R}^*$.

We vertalen nu de formule $\tau$ in $\mathfrak{R}$. Voor onze willekeurig gekozen $\varepsilon$ geldt:
Voor elke $x, y \in D$ is er een $\delta \in \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ met $|y - x| < \delta$ zodat $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Dit is precies de standaard definitie voor uniforme continuteit.
Beide definities zijn dus equivalent.

**Opmerkingen:**

We zullen nog even kijken naar de functie $f(x) = x^2$. We weten uit de standaard analyse dat deze functie niet uniform continu is. Dat kunnen we ook zien aan de hand van de niet-standaard definitie. Neem $x, y \in \mathbb{R}^*$ zodanig dat $x \simeq y$. Voor uniforme convergentie moet gelden $f(x) \simeq f(y)$. Met de notatie voor $y = x + i$, moet dus gelden $x^2 \simeq (x+i)^2$. Dit is hetzelfde als $x^2 \simeq x^2 + 2xi + i^2$. De term $i^2$ levert geen probleem want die is duidelijk infinitesimaal. De term $2xi$ kan echter wel voor problemen zorgen. Als $x$ begrensd is, is er geen probleem want dan is $2xi$ infinitesimaal. Kiezen we echter $x = H$ en $y = H + \frac{1}{H}$, dan hebben we $x \simeq y$ want $\frac{1}{H}$ is infinitesimaal als $H$ oneindig groot is. We vinden echter $|x^2 - y^2| = |H^2 - (H^2 + 2 + (\frac{1}{H})^2)| = 2 + (\frac{1}{H})^2 > 2$, en is dus zeker niet infinitesimaal. In paragraaf 5.4 zullen we hier een stelling over geven.

## 4.6 Open en gesloten verzamelingen

Tot nog toe hebben we het nog niet gehad over wanneer we een verzameling (of een interval) open of gesloten noemen. Daar gaan we nu een niet-standaard definitie voor geven. We zullen ons voor het gemak beperken tot een begrensde (met eindige grenzen) verzameling $I$. We geven alleen een definitie van een open verzameling. We noemen vervolgens een verzameling gesloten als zijn complement open is. In de standaard definitie hebben we weer te maken met een $\varepsilon$. Deze gaan we in de niet-standaard definitie dus weer vervangen door een infinitesimaal.

**Definitie (standaard) 4.11.** We noemen een verzameling $I$ open, als voor alle $x \in I$ geldt dat er een $\varepsilon$ bestaat zodat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I$.

**Definitie (niet-standaard) 4.12.** We noemen een verzameling $I^*$ open, als voor alle $x \in I^* \cap \mathbb{R}$ geldt: Voor alle $y \in \mathbb{R}^*$ met $y \simeq x$ geldt $y \in I^*$.

We zullen weer de equivalentie van de definities aantonen.

#### Standaard naar niet-standaard

We gaan uit van de standaard definitie en laten zien dat die de niet-standaard definitie impliceert. We kiezen eerst $x \in I$ willekeurig maar vast. Er is dus een $\varepsilon$ zodat $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset I$. Ons element $x$ was vast en daardoor een bijbehorende $\varepsilon$ ook. Wegens de elementaire equivalentie tussen $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ is de gesloten formule $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I$ dus ook waar in $\mathfrak{R}^*$. We vinden dat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I^*$.
Voor alle $y \in \mathbb{R}^*$ met $y \simeq x$ geldt $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ want $\varepsilon \in \mathbb{R}$. We concluderen dus dat $y \in I^*$ en daarom volgt uit de standaard definitie de niet-standaard definitie.

#### Niet-standaard naar standaard

We gaan nu uit van de niet-standaard definitie. Kies weer een $x \in I^*$ met $x \in \mathbb{R}$ willekeurig maar vast. Voor $\varepsilon \in \mathfrak{I}$ (dus $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$) volgt uit de niet-standaard definitie dat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I^*$. Beschouw nu de gesloten formule $\sigma$:
$\exists\varepsilon((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I)$ Deze formule is waar in $\mathfrak{R}^*$ en hij is gesloten omdat de enige variable $\varepsilon$ gekwantificeerd wordt. Omdat de structuren $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ elementair equivalent zijn is de formule $\sigma$ dus ook waar in $\mathfrak{R}$. We concluderen dus dat er voor een willekeurig $x \in I$ een $\varepsilon$ bestaat zodat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I)$. De niet-standaard definitie impliceert dus de standaard definitie.
Beide defınties zijn dus equivalent.

### Gesloten verzameling

We definiëren nu een gesloten verzameling als volgt:

**Definitie 4.13.** We noemen een verzameling $A$ gesloten als $\mathbb{R} \setminus A$ open is.

In het niet-standaard geval vervangen we dus $\mathbb{R}$ door $\mathbb{R}^*$.

# Hoofdstuk 5

# Bewijzen van stellingen

In dit hoofdstuk zullen we wat eenvoudige stellingen uit de analyse op een niet-standaard manier bewijzen. We zullen daar dan ook de niet-standaard definities voor gebruiken. We hebben al bewezen dat die definities equivalent zijn.
We kunnen in een niet-standaard bewijs gebruik maken van oneindig kleine en oneindig grote getallen. Hierdoor kunnen we soms een eenvoudiger bewijs vinden dan een standaard bewijs.

## 5.1 Maximum

We beginnen met de stelling dat een continue reële functie op een gesloten en begrensd interval altijd een maximum heeft. We geven een niet-standaard bewijs voor deze stelling, maar dat betekent dat de functie nog steeds een standaard functie is. We vinden dus alleen een standaard maximum. In het niet-standaard bewijs delen we het interval op in oneindig veel kleine deelintervallen. Deze intervallen worden dan oneindig klein zodat er nog maximaal één reëel punt in dat interval ligt.

**Stelling 5.1.** *Als $f$ continu is op $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, met $[a, b]$ gesloten en begrensd, dan heeft $f$ een maximum $M$ op $[a, b]$.*

**Bewijs:**

We verdelen het interval in $n$ stukjes met breedte $\frac{b-a}{n}$. Als we de waarden op deze punten bepalen kunnen we kijken welke het grootste is. Er is dus een $k$ zodat $f(a+k\frac{(b-a)}{n}) \geq f(a+i\frac{(b-a)}{n})$ voor alle $i \in [0, n]$. Hierbij is $n \in \mathbb{N}$ willekeurig en kunnen we die dus zo groot kiezen als we willen. Deze bewering gaan we nu schrijven als een gesloten formule. Hierdoor kunnen we hem vertalen in $\mathfrak{R}^*$.
Beschouw de volgende gesloten formule $\sigma$:
$\forall n \exists k \forall i \Big( \big(0 \leq i \wedge i \leq n\big) \rightarrow \big(f(a + k\frac{(b-a)}{n}) \geq f(a + i\frac{(b-a)}{n})\big)\Big).$

Deze formule is gesloten want $a, b$ zijn constanten en de rest wordt gekwantificeerd. Deze formule is wegens de bovenstaande redenatie waar in $\mathfrak{R}$. Wegens de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ moet de formule $\sigma$ dus ook waar zijn in $\mathfrak{R}^*$.

Kies nu een $n \in \mathbb{N}^*$ die oneindig groot is. Kies deze $n$ dus zodanig dat de breedte van de intervallen oneindig klein worden en er dus hooguit één $r \in \mathbb{R}$ binnen elk interval past. Kies nu de $k$ die zorgt dat $f^*(a + k\frac{(b-a)}{n}) \geq f^*(a + i\frac{(b-a)}{n})$ voor alle $i \in [0, n]^*$. We gebruiken nu de continuïteit van $f^*$. Als $x \in \mathbb{R}^*$ met $x \simeq r$, dan geldt $f^*(x) \simeq f^*(r)$. Neem nu $r = st(a + k\frac{(b-a)}{n})$, dit standaarddeel bestaat want ons interval was begrensd. Er geldt nu $st(f^*(a + k\frac{(b-a)}{n})) = f(r)$ en deze $f(r)$ geeft nu het maximum. Het maximum van de functie $f$ zit dus in het punt $r$ en we noemen $f(r) = M$.

**Opmerkingen:**

We hebben de stelling nu bewezen voor een gesloten en begrensd interval. Hetzelfde geldt echter ook voor een gesloten en begrensde verzameling $D$. Merk ook op dat hetzelfde geldt voor het minimum van een functie. Het bewijs gaat geheel analoog met dat van het maximum.

Dat een interval gesloten moet zijn, is omdat we anders te maken kunnen hebben met een asymptoot op de rand van het interval. De functie $f(x) = 1/x$ op het interval $(0, 1]$ heeft bijvoorbeeld geen maximum. Hoe kleiner we $x$ kiezen hoe groter $f(x)$ wordt. De functie heeft op dit interval geen maximum omdat hij in 0, dus op de rand van het interval, niet gedefiniëerd is.
Dat een interval begrensd moet zijn, kunnen we zien aan de hand van de functie $f(y) = y$. Deze functie heeft geen maximum op het interval $[0, \infty)$.
Niet-standaard zien we dat ook eenvoudig. Neem weer de functie $f = 1/x$ op het interval $(0, 1]$. Neem nu $i \in \mathfrak{I}$ met $i > 0$. We vinden nu dat $f^*(i) = 1/i$ oneindig groot is. We kunnen dan dus niet het standaarddeel nemen om een maximum te vinden. Hetzelfde zien we bij $f(y) = y$. Kiezen we $y$ oneindig groot, dan kunnen we wederom geen standaarddeel nemen.

## 5.2 Nulpuntstelling

In deze paragraaf beschouwen we de nulpuntstelling.

**Stelling 5.2.** *Als $F : A \to B$ met $A, B \subseteq \mathbb{R}$ continu is op $A$, $a, b \in A$ met $a < b$ en $F(a) < 0$ en $F(b) > 0$ dan is er een $c \in A$ met $a < c < b$ en $F(c) = 0$.*

**Bewijs:**

Voor dit bewijs gebruiken we een gesloten formule die vertelt dat we het interval kunnen opdelen in kleinere intervallen, zodat bij een interval de linkergrens kleiner is dan nul en de rechtergrens groter is dan nul. Deze gesloten formule ($a$ en $b$ zijn constanten) noemen we $\sigma$:
$\forall n\ \exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge F(a + \frac{(b-a)k}{n}) < 0 \wedge F(a + \frac{(b-a)(k+1)}{n}) \geq 0)$

Deze formule is wegens de continuïteit van $F$ en de aanname waar in $\mathfrak{R}$. Omdat $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ elementair equivalent zijn, is de formule $\sigma$ dus ook waar in $\mathfrak{R}^*$.

Neem $n \in \mathbb{N}^*$ nu oneindig groot, er bestaat een $k \in \mathbb{N}^*$ zodat

$$F^* \underbrace{\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)}_{x} < 0 \quad \text{en} \quad F^* \underbrace{\left(a + \frac{(b-a)(k+1)}{n}\right)}_{y} \geq 0$$

We weten dat $y - x = \frac{b-a}{n} \simeq 0$ want $b - a$ is gewoon reëel en $n$ is oneindig groot.
We vinden dan met behulp van continuïteit dat $F^*(x) \simeq F^*(y)$.
$F^*(x) < 0$, dus $st(F^*(x)) \leq 0$.
$F^*(y) \geq 0$, dus $st(F^*(y)) \geq 0$.
$st(F^*(x)) = st(F^*(y))$ dus we concluderen dat $st(F^*(x)) = 0$.
Kies nu $c = st(x) = st(y)$. We vinden dat $F$ een nulpunt moet hebben in $c$.

## 5.3 Middelwaardestelling (Rolle)

We zullen nu kijken naar de middelwaardestelling. Deze stelling zegt dat er een punt binnen een interval is, waar de afgeleiden van een functie nul is.

**Stelling 5.3.** *Als $f$ continu is op $[a,b]$ en differentieerbaar is op $(a,b)$ en $f(a) = f(b)$, dan is er een $c \in (a,b)$ met $f'(c) = 0$.*

Het bewijs lijkt erg op dat van de nulpuntstelling, maar hier maken we gebruik van afgeleiden.

**Bewijs:**

Differentieerbaar op $(a,b)$ betekent dat de afgeleide bestaat in alle punten uit $(a,b)$.

Stel dat $f^*(x) = f^*(a)$ voor alle $x \in (a,b)^*$, dan:

$$f'(x) = st(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}) = st(\frac{0}{h}) = st(0) = 0$$

want $h$ was een infinitesimaal ongelijk aan 0.

Stel $f^*(x) > f(a)$ voor een $x \in (a,b)^*$ (als niet, dan gaat het bewijs evenzo maar dan met minimum).
Kies $c$ zodat $f(c) = M$ met $M$ het maximum van $f$ op $[a,b]$. Dan vinden we voor een $h \in \mathfrak{I}$ dat $f(c+h) \leq f(c)$.
Onze $h$ kan groter dan nul zijn of kleiner dan nul. In het eerste geval krijgen we:

$$f'(c) = st(\frac{f(c+h) - f(c)}{h}) \leq st(\frac{0}{h}) = st(0) = 0$$

In het tweede geval hebben we $h < 0$. We kiezen nu $k = -h$ zodat $k > 0$.

$$f'(c) = st(\frac{f(c+h) - f(c)}{h}) = -st(\frac{f(c-k) - f(c)}{k}) \geq -st(\frac{0}{k}) = st(0) = 0$$

We vinden dus $f'(c) \leq 0$ en $f'(c) \geq 0$. Hieruit kunnen we concluderen dat er een $c$ in $(a,b)$ moet zijn waarvoor de afgeleiden nul is.

**Opmerkingen:**

Net als in de standaard analyse kunnen we deze stelling gemakkelijk uitbreiden naar $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ voor een $c \in [a,b]$. We vinden dan dus dat de afgeleide ergens de waarde aanneemt van de helling van de lineaire verbinding tussen $f(a)$ en $f(b)$.

## 5.4 Continu en uniform continu

Een bekende stelling met betrekking tot continuïteit is de stelling die ons wat vertelt over wanneer een continue functie uniform continu is. Die stelling luidt als volgt.

**Stelling 5.4.** *Elke continue functie op $D \subset \mathbb{R}$, met $D$ een gesloten en begrensd interval, is uniform continu op $D$.*

**Bewijs:**

We nemen dus aan dat $f$ continu is op $D$. We gebruiken hier de niet-standaard definitie, dus voor $c \in D$ geldt: $\forall x \in D^*$ met $c \simeq x$ geldt $f(c) \simeq f(x)$

Kies nu $x, y \in D^*$ willekeurig, maar met $x \simeq y$.
Beschouw $c = st(x) = st(y)$, dan $x \simeq c$ en $y \simeq c$.
**Opmerking:** *Hier gebruiken we dus dat het inteval $D$ begrensd is. Het standaard deel is alleen gedefiniëerd voor elementen uit $\mathfrak{F}$. Omdat het interval $D$ gesloten en begrensd is, weten we dat er aan beide kanten van het interval een reëel getal de grens aangeeft. Omdat $x$ en $y$ binnen het interval liggen, ligt hun standaard deel dus ook binnen het interval of op de rand. Dat is in dit geval geen probleem. Bij een open interval kan dit wel een probleem zijn. Dan kan $x$ wel binnen het interval liggen, maar zijn standaard deel precies niet meer.*
Wegens de continuïteit van $f$ geldt nu $f(x) \simeq f(c)$ en $f(y) \simeq f(c)$ en dus $f(x) \simeq f(y)$. Dit was namelijk één van de eigenschappen van dat $\simeq$ een equivalentierelatie is.
Hieruit kunnen we dus concluderen dat $f$ ook uniform continu is op $D$.

**Wortelfunctie**

Als voorbeeld van hoe we de definities met behulp van wat stellingen op een expliciet probleem kunnen toepassen zullen we uniforme continuïteit van de wortelfunctie aantonen. We bewijzen op een niet-standaard manier de volgende stelling.

**Stelling 5.5.** *De funtie $f = \sqrt{x}$ is uniform continu op $[0, \infty)$.*

We bewijzen eerst dat de functie continu is op $D = [0, 2]$. Dan kunnen we namelijk concluderen dat de functie daar ook uniform continu is want $[0, 2]$ is gesloten en begrensd.
Kies een $c \in D^*$ willekeurig, maar vast.
Neem aan dat $x \simeq c$, we moeten nu volgens de niet-standaard definitie bewijzen dat $\sqrt{x} \simeq \sqrt{c}$.
Stel $c = 0$, dan $x = i$ met $i \in \mathfrak{I}$. Er geldt dan $\sqrt{x} = \sqrt{i}$. Omdat geldt dat $i \in \mathfrak{I}$ moet ook gelden dat $\sqrt{i} \in \mathfrak{I}$. Als dit namelijk niet zo is, dan is er een $r \in \mathbb{R}$ zodat $\sqrt{i} > r$. Maar dan is $i > r^2$ en dat is in tegenspraak met dat $i$ infinitesimaal was.
We vinden dus $\sqrt{x} \simeq \sqrt{0} = 0$.
Stel $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ en dus $\sqrt{c} \in \mathbb{R}$ met $\sqrt{c} \neq 0$. Uit $x \simeq c$ volgt $|x - c| = i$ voor een $i \in \mathfrak{I}$.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = i \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = j$$

Omdat $\sqrt{c} \in \mathbb{R}$ en $\sqrt{c} > 0$ geldt dat $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}$ eindig is. Hieruit kunnen we concluderen dat $j$ ook infinitesimaal is wegens de eigenschappen van $\mathfrak{I}$. We vinden dus $\sqrt{x} \simeq \sqrt{c}$ en daarmee is de wortelfunctie dus continu op $D$. Wegens stelling 5.4 is $f$ dus ook uniform continu op $[0, 2]$. Merk op dat we voor de rechtergrens elk willekeurig eindig getal hadden kunnen kiezen.

We bekijken nu het interval $[1, \infty)$. We gaan bewijzen dat $f$ uniform continu is op het niet standaard interval $E = [1, a]$ met $a$ oneindig groot. Als $f$ op $E$ uniform continu is, dan is hij dat zeker ook op $[1, \infty)$. Het interval $E$ is welliswaar gesloten, maar niet meer begrensd. We kunnen hier dus niet stelling 5.4 gebruiken.
Kies $x, y \in E$ willekeurig maar vast, en zó dat $x \simeq y$. Uit $x \simeq y$ volgt dat $|y - x| = i$ voor een $i \in \mathfrak{I}$.

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \frac{|y - x|}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}|y - x| \leq |y - x| = i$$

Hieruit volgt dat $\sqrt{y} \simeq \sqrt{x}$. De breuk $\frac{1}{2}$ in de vergelijking hierboven volgt uit dat $\sqrt{x} \geq 1$ en $\sqrt{y} \geq 1$ doordat we in het interval $[1, a]$ zitten. Uit $\sqrt{y} \simeq \sqrt{x}$ volgt dat $f$ uniform continu is op $E$ en dus ook op $[1, \infty)$.

De functie $f = \sqrt{x}$ is dus uniform continu op $[0, \infty)$.

# Hoofdstuk 6

# Rijen en reeksen

De wiskundige Euler gebruikte ook al infinitesimale getallen in zijn theoriën over reeksen. Er was veel argwaan over zijn gebruik hiervan, want er waren nog geen axioma's die het gebruik van infinitesimalen konden verantwoorden. Zijn berekeningen bleken echter wel te kloppen. In dit hoofdstuk zullen we naar reeksen in de niet-standaard analyse kijken.

## 6.1 Rijen

We zullen een reeks definiëren met behulp van een rij. We beschouwen alleen rijen met standaard elementen. Een standaard rij is gedefinieerd als een functie.

**Definitie (standaard) 6.1.** Een standaard rij is een functie $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, en we schrijven $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, waarbij $a_n = a(n)$.

Niet-standaard zullen we de rij definiëren op de oneindige verzameling van natuurlijke getallen $\mathbb{N}^*$. Daarbij sturen we deze natuurlijke getallen naar niet-standaard reële getallen. We spreken dan dus van een niet-standaard uitbreiding van een standaard rij. We maken dus een isomorfe kopie van de standaard rij in de niet-standaard structuur. Hier kan deze uitgebreid worden voor oneindig grote $n$.

**Definitie (niet-standaard) 6.2.** De niet-standaard uitbreiding van een rij is een functie $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^*$, en we schrijven $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

We gaan er hierbij dus vanuit dat $n$ een geheel getal groter of gelijk aan nul is. Niet-standaard kan dat getal dus oneindig groot worden. $\mathbb{N}$ veranderd naar niet-standaard in $\mathbb{N}^*$, omdat $\mathbb{N}$ een deelverzameling is van $\mathbb{R}$. Dat kunnen we beschrijven met een gesloten formule en dat wordt dus vertaald naar $\mathbb{N}^*$ dat een deelverzameling van $\mathbb{R}^*$ is met dezelfde eigenschappen.

We zullen nu kijken naar convergente rijen. Daartoe zullen we weer een niet-standaard definitie gebruiken en laten zien dat die equivalent is met de standaard definitie. We gebruiken hierbij de definitie zoals in [3].

**Definitie (standaard) 6.3.** We noemen een rij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent wanneer er een $a \in \mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschap: voor iedere reële $\varepsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{voor alle} \qquad n \geq N.$$

We noemen $a$ de limiet van de rij $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; notatie:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Een niet convergente rij noemen we divergent.

In de niet-standaard definitie zullen we de $\varepsilon$ weer vervangen door gebruik te maken van oneindig dicht bij elkaar liggende getallen.

**Definitie (niet-standaard) 6.4.** We noemen een rij $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent wanneer er een $a \in \mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschap: voor iedere $H \in \mathbb{N}^*$ oneindig groot geldt $a_H \simeq a$. We noemen $a$ weer de limiet van de rij $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ en noemen een niet convergente rij weer divergent.

De niet-standaard definitie houdt dus eigenlijk in, dat een rij (met niet-standaard uitbreiding) convergeert als alle elementen met een oneindig grote index oneindig dicht bij de limiet liggen. De limiet is dus ook uniek omdat twee standaard getallen die oneindig dicht bij elkaar liggen gelijk zijn. We geven nu een bewijs van de equivalentie.

## Standaard naar niet-standaard

We kiezen eerst een $H \in \mathbb{N}^*$ oneindig groot. We gaan uit van de standaard definitie. Er bestaat dus voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ met de gewenste eigenschap. Kies nu een $\varepsilon$ willekeurig maar vast. We vinden een bijbehorende $N$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|a_n - a| < \varepsilon$. Hieruit volgt de volgende gesloten formule $\sigma$.

$$\forall n((n \in \mathbb{N} \wedge n \geq N) \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Omdat $\sigma$ dus waar is in $\mathfrak{R}$ en gesloten is ($N$ en $a$ kunnen we opvatten als constanten en $a_n$ is alleen afhankelijk van $n$), is deze formule dus (wegens de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$) waar in $\mathfrak{R}^*$.
Omdat $N$ een standaard getal is, geldt zeker $H > N$. Uit $\sigma$ volgt nu dat $|a_H - a| < \varepsilon$. Omdat $\varepsilon$ willekeurig was (en we die dus willekeurig klein kunnen kiezen), geldt dus $|a_H - a| \in \mathfrak{I}$. Hieruit volgt $a_H \simeq a$ zoals gevraagd.

## Niet-standaard naar standaard

We gaan dus uit van de niet-standaard definitie en we kiezen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ willekeurig maar groter dan nul. We weten dat voor elke $H \in \mathbb{N}^*$ oneindig groot geldt $a_H \simeq a$. We hebben dus zeker $|a_H - a| < \varepsilon$. Dit geldt voor elke $H$ oneindig groot, dus is er een $N \in \mathbb{N}^*$ zodat voor alle $n \in \mathbb{N}^*$ met $n > N$ geldt $|a_n - a| < \varepsilon$. Kies $N$ namelijk maar oneindig groot.
Beschouw nu de volgende formule $\tau$:

$$\exists N\Big(N \in \mathbb{N} \wedge \forall n\big((n \in \mathbb{N} \wedge n \geq N) \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\big)\Big)$$

Deze formule is weer gesloten, want $\varepsilon$ en $a$ zijn weer constanten. Wegens bovenstaande redenering is $\tau$ waar in $\mathfrak{R}^*$. Wegens de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}^*$ en $\mathfrak{R}$ is $\tau$ dus ook waar in $\mathfrak{R}$.
Omdat voor elke willekeurig gekozen $\varepsilon$ de formule $\tau$ waar is in $\mathfrak{R}$ voldoen we aan de standaard definitie.

## 6.2 Reeksen

Nu we hebben gekeken naar niet-standaard rijen en de convergentie daarvan, gaan we ons focussen op reeksen. Een reeks kunnen we definiëren aan de hand van partiële sommen. Neem een reële rij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is de $n$-de partiële som gegeven door $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. De functie $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ is dus alleen afhankelijk van de rij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Net als de rij heeft de partiële som ook een niet-standaard uitbreiding. Omdat in $\mathfrak{R}$ geldt:

$$\forall n \left( n \in \mathbb{N} \to s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \right),$$

$\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ elementair equivalent zijn en bovenstaande formule gesloten is, geldt dit ook in $\mathfrak{R}^*$. We hebben dus voor alle $n \in \mathbb{N}^*$: $s_n^* = \sum_{i=0}^{n} a_i^*$.

**Definitie (niet-standaard) 6.5.** Gegeven een rij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, is de functie $S : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ gedefinieerd als $S_H = \sum_{i=0}^{H} a_i$. Hierin kan $H \in \mathbb{N}^*$ dus oneindig groot zijn.

We zullen kijken wanneer een reeks convergeert. Dit is het geval als de som niet oneindig groot of oneindig negatief wordt. Dat is dus hetzelfde als zeggen dat de rij van partiële sommen convergeert. Daar hadden we al een definitie voor. Niet-standaard geldt hiervoor hetzelfde. Een niet-standaard reeks is een oneindige rij van partiële sommen. Als die rij convergeert, (dus voor elke oneindige $K \in \mathbb{N}^*$ geldt $s_K \simeq L$) dan convergeert de reeks ook.

**Definitie 6.6.** De reeks $S_H = \sum_{n=0}^{H} a_n$ convergeert naar $S$ als voor alle oneindig grote $H \in \mathbb{N}^*$ geldt $S_H \simeq L$ waarbij $L \in \mathbb{R}$ de limiet van de rij $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (de rij van partiële sommen) is. We schrijven:

$$L \simeq a_0 + a_1 + \ldots + a_H = \sum_{n=0}^{H} a_n$$

We zullen nu kijken naar de meetkundige reeks. In de standaard analyse is dat de volgende reeks: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. In de niet-standaard analyse wordt dat dus de reeks: $\sum_{n=0}^{H} a^n$ waarbij $H$ oneindig groot en uit $\mathbb{N}^*$ is. We zullen niet-standaard bewijzen dat deze reeks convergent is voor $|a| < 1$ .

**Stelling 6.7.** *De meetkundige reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ (met $a \in \mathbb{R}$) convergeert, dan en slechts dan als $|a| < 1$. Daarnaast geldt dan voor de som: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.*

Neem aan $|a| < 1$. We gebruiken de niet-standaard definitie van een reeks en schrijven dus $\sum_{n=0}^{H} a^n$ met $H$ oneindig groot. Voor convergentie naar $L \in \mathbb{R}$ hebben we nodig dat voor elke $H \in \mathbb{N}^*$ geldt $S_H \simeq L$. We nemen dus $H \in \mathbb{N}^*$ willekeurig, maar wel oneindig groot.

$$\sum_{n=0}^{H} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^H = \frac{a^{H+1} - 1}{a - 1} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{H+1}}{1-a}$$

We wilde aantonen dat de reeks naar $\frac{1}{1-a}$ convergeert, daarvoor moet $\frac{a^{H+1}}{1-a}$ infinitesimaal zijn. De noemer is zeker niet infinitesimaal omdat $a$ gewoon standaard was en strikt kleiner dan 1. Om aan te tonen dat $a^{H+1}$ infinitesimaal is, gebruiken we de standaard analyse. Daar weten we dat we voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ kunnen vinden zodat $|a^N| < \varepsilon$. Kies nu $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ willekeurig en vind de bijbehorende $N$. Dan is de volgende gesloten formule dus waar in $\mathfrak{R}$.

$$\forall n\big((n \in \mathbb{N} \wedge n > N) \to a^n < \varepsilon\big)$$

Wegens de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ is deze formule dus ook waar in $\mathfrak{R}^*$. Omdat $H+1$ oneindig groot is, geldt zeker $H+1 > N$ en we vinden dus dat $a^{H+1} < \varepsilon$ voor elke $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dat is hetzelfde als zeggen dat $a^{H+1}$ infinitesimaal is. Het standaard deel van $\frac{a^{H+1}}{1-a}$ is dus gelijk aan nul (want $1-a \neq 0$ was uit $\mathbb{R}$).

Als geldt dat $a \geq 1$ dan worden de partiële sommen duidelijk oneindig groot.

$$\sum_{n=0}^{H} a^n \geq \sum_{n=0}^{H} 1^n = H + 1$$

De volgende stelling zegt iets over het convergeren van reeksen en de elementen $a_H$ met $H$ oneindig groot.

**Stelling 6.8.** *(i) De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent dan en slechts dan als: Voor alle $H, K \in \mathbb{N}^*$ met $H$ en $K$ oneindig groot en $H \leq K$ geldt*

$$\sum_{n=H}^{K} a_n = a_H + a_{H+1} + \cdots + a_K \simeq 0.$$

*(ii) Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert, dan geldt: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Voor het bewijs van *(i)* nemen we eerst aan de de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is. We hebben dus een $L \in \mathbb{R}$ die de limiet van de partiële sommen is. We kiezen nu $H, K \in \mathbb{N}^*$ willekeurig maar oneindig groot met $H \leq K$. Uit de niet-standaard definitie van convergentie volgt dat voor $H-1$ geldt $S_{H-1} = \sum_{n=0}^{H-1} \simeq L$ want $H-1$ is ook oneindig groot. Dit geldt echter ook voor onze $K$ want die is ook oneindig groot. We vinden nu $S_{H-1} \simeq S_K$ en dus $0 \simeq S_K - S_{H-1} = a_H + a_{H+1} + \cdots + a_K$.

We nemen nu aan dat voor elke oneindig grote $H \in \mathbb{N}^*$ en oneindig grote $K \in \mathbb{N}^*$ met $H \leq K$ geldt dat $\sum_{n=H}^{K} a_n \simeq 0$. We moeten aantonen dat voor elke $N \in \mathbb{N}^*$ met $N$ oneindig groot geldt $S_N \simeq S$ voor een $S \in \mathbb{R}$. Beschouw de volgende gesloten formule $\sigma$:

$$\exists h \forall k \Big(h \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge h < k) \to (|\sum_{n=h}^{k} a_n| < 1)\Big)$$

Door voor $h$ een oneindig grote $H$ te kiezen volgt uit de aanname dat $S_H - S_K \simeq 0$ en dus zeker $S_H - S_K < 1$ voor alle $K > H$. Hiermee is $\sigma$ dus waar in $\mathfrak{R}^*$. De formule $\sigma$ is ook gesloten omdat de variabelen $h$ en $k$ gekwantificeerd worden ($n$ is hier een hulpvariable die vast ligt tussen $h$ en $k$). Wegens elementaire equivalentie moet $\sigma$ dus ook waar zijn in $\mathfrak{R}$. Er is dus een $h \in \mathbb{N}$ zodat voor alle

$k \in \mathbb{N}$ met $k > h$ geldt $|\sum_{n=h}^{k} a_n| < 1$. Kies nu die $h$ vast. Met de volgende gesloten formule $\tau$ gaan we weer over naar de niet-standaard analyse.

$$\forall k \Big( k \in \mathbb{N} \wedge h < k) \rightarrow (|\sum_{n=h}^{k} a_n| < 1) \Big)$$

Deze formule is duidelijk waar in $\mathfrak{R}$ want uit $\sigma$ wisten we dat er zo'n $h$ was en die hadden we vast gekozen. Wegens elementaire equivalentie moet $\tau$ ook waar zijn in $\mathfrak{R}^*$. De formule $\tau$ is ook waar voor alle $k \in \mathbb{N}^*$, dus ook voor $N$ oneindig groot. $N$ is dan zeker groter dan $h$ dus uit $\tau$ volgt $|\sum_{n=Nh}^{H} a_n| < 1$ en dus $|S_N - S_h| < 1$. Omdat $h$ standaard is (en dus eindig) is $S_h$ dat ook. Hieruit volgt dat $S_N$ ook eindig moet zijn. We concluderen dus dat voor oneindig grote $N$ de som $S_N$ eindig is. Uit de aanname $\sum_{n=H}^{K} a_n \simeq 0$ volgt dat $S_K \simeq S_H$ voor alle $H, K$ oneindig groot. We concluderen dus dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent moet zijn.

Voor het bewijs van *(ii)* gebruiken we *(i)*. We nemen eerst aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert. Er geldt dan dus voor alle oneindig grote $H, K \in \mathbb{N}^*$ met $H \leq K$ dat $a_H + a_{H+1} + \cdots + a_K \simeq 0$. Kiezen we nu $H = K$, dan vinden we $a_K \simeq 0$ voor elke oneindig grote $K$. Dit is precies de niet-standaard definite voor de limiet van een rij.

# Hoofdstuk 7

# De integraal

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar de integraal. We bekijken een continue functie $f$ op een gesloten en begrensd interval $[a, b]$. We weten uit de standaard analyse dat $f$ dan Riemann-integreerbaar is op $[a, b]$. Uiteraard is de Riemann-integraal voor meer functies gedefinieerd dan alleen continue functies. Niet standaard kunnen we dat ook, maar door alleen naar continue functies te kijken kunnen we de Riemann-integraal wat eenvoudiger definiëren en wat daarop toepasbare stellingen bewijzen.

## 7.1 De definities

We beginnen met het definiëren van de Riemann-som. Deze som hebben we nodig bij de definitie van de integraal. We delen het interval $[a, b]$ op in $n$ deelintervallen met breedte $\Delta x$. We hebben dan dus $\Delta x = \frac{b-a}{n} > 0$. We definiëren de Riemann-som als volgt.

**Definitie 7.1.**

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Met $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$.

Voor de rechtergrens geldt: $b = a + n\Delta x$. We sommeren dus over de linkergrensen. Omdat we $\Delta x$ oneindig klein gaan nemen maakt het niet uit of we de linker- of de rechtergrenzen nemen.
Deze Riemann-som is dus alleen afhankelijk van de gekozen $\Delta x$. Nemen we de limiet van $\Delta x$ naar 0, dan gaat $n$ naar oneindig. In dat geval schrijven we $\Delta x = dx$ en kunnen we de integraal dus als volgt definiëren in de standaard analyse.

**Definitie (standaard) 7.2.** Voor een continue functie $f$ op $[a, b]$ definiëren we (mits deze limiet bestaat):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

Op deze manier hebben we een standaard definitie van de integraal. In de niet-standaard definitie vervangen we de limiet weer door een standaard-deel. De niet-standaard definitie is dan als volgt.

**Definitie (niet-standaard) 7.3.** Voor een continue functie $f$ op $[a, b]$ definiëren we (mits deze limiet bestaat):

$$\int_a^b f(x)dx = st\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x\right)$$

Hierin is willekeurig $\Delta x$ maar wel infinitesimaal, zodat $n \in \mathbb{N}^*$ oneindig groot wordt. Voor$n$ geldt weer $n = \frac{b-a}{\Delta x}$.

We zullen hier nu eerst laten zien dat het standaard-deel bestaat. Daarvoor moet $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$ eindig zijn. Om dit aan te tonen gebruiken we de elementaire equivalentie tussen $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$.

We weten uit stelling 5.1 dat $f$ een standaard maximum en een standaard minimum heeft op $[a, b]$. In $\mathfrak{R}$ noemen we $M$ het maximum van $f$ op $[a, b]$ en $m$ het minimum. We krijgen $m(b-a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \leq M(b-a)$. Hieruit volgt dat $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$ begrensd is. Dit geldt voor elke $\Delta x$ groter dan nul. Beschouw nu de volgende formule $\sigma$:

$$\forall \Delta x\big((\Delta x > 0) \rightarrow \big(m(b-a) \leq \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \wedge \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \leq M(b-a)\big)\big)$$

Hierin geldt: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ en zijn $a, b, m, M$ en de waarden van $f$ constanten. Deze formule is waar in $\mathfrak{R}$ en hij is gesloten omdat $n$ gekwantificeerd wordt en de rest constanten zijn. Uit de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ volgt nu dat $\sigma$ ook waar is in $\mathfrak{R}^*$. Als we $\sigma$ vertalen in $\mathfrak{R}^*$ vinden we dat voor $n \in \mathbb{N}^*$ geldt dat $m(b-a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \leq M(b-a)$. Ook Voor $\Delta x \in \mathfrak{I}$ geldt dat $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$ begrensd wordt door $m(b-a)$ en $M(b-a)$. Omdat $m(b-a)$ en $M(b-a)$ eindig zijn is $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$ dat dus ook.

Omdat het standaard deel uniek is, is de integraal dat dus ook. We hebben nu aangetoont dat de integraal dus inderdaad goed gedefinieerd is. We zullen nu aantonen dat de niet-standaard definitie equivalent is aan de standaard definitie.

De standaard definitie geeft $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$. Dat betekent dus (via de niet-standaard definitie voor de limiet) dat voor alle $\Delta x \in \mathbb{R}^*$ moet gelden: als $\Delta x \simeq 0$ dan $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \simeq \int_a^b f(x)dx$.
Kiezen we nu dus een $\Delta x \in \mathfrak{I}$ willekeurig, dan hebben we $\Delta x \simeq 0$ en dus $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \simeq \int_a^b f(x)dx$. De integraal $\int_a^b f(x)dx$ is een standaard getal dus we vinden dat $st\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x\right) = \int_a^b f(x)dx$.

Andersom volgt uit $st\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x\right) = \int_a^b f(x)dx$, dat $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \simeq \int_a^b f(x)dx$ voor een willekeurige $\Delta x \in \mathfrak{I}$ en $\Delta x > 0$. Er geldt dus ook voor die $\Delta x$ dat $\Delta x \simeq 0$. Doordat $\Delta x$ willekeurig kon zijn voldoen we aan de niet-standaard definitie van de limiet, en dus ook de standaard definitie. Hieruit volgt de standaard definitie van de integraal.

De bekende rekenregels van de integraal zijn ook toepasbaar in de niet-standaard analyse. Omdat ze waar zijn in de standaard analyse zijn ze dat door de elementaire equivalentie ook in de niet-standaard analyse. Het enige dat we moeten doen is de regels formuleren als gesloten formules, maar omdat ze altijd gelden is kwantificeren geen probleem.
We zullen als voorbeeld niet-standaard een eenvoudige integraal uitrekenen. We gaan laten zien dat nog steeds geldt:

$$\int_0^a xdx = \frac{a^2}{2}$$

met $a \in \mathbb{R}$ en $a > 0$.
Volgens de niet-standaard definitie geldt $\int_0^a xdx = st\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x\right)$ omdat de functie $f(x) = x$ zeker continu is. Hierin is $n$ oneindig groot en $\Delta x$ infinitesimaal. We weten hierbij dat $x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \ldots, x_n = n\Delta x = a$.
We bepalen nu eerst de som $\sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x = \Delta x^2 \sum_{i=0}^{n-1} i = \Delta x^2 \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\Delta x^2 n^2 - \Delta x^2 n\right)$$

Nu gebruiken we dat $n\Delta x$ gelijk moet zijn aan $a$.

$$\frac{1}{2}\left(\Delta x^2 n^2 - \Delta x^2 n\right) = \frac{a^2}{2} - \Delta x \frac{a}{2}$$

Omdat $a$ gewoon een standaard getal is, is de laatste term infinitesimaal klein. Nemen we dus het standaarddeel van deze som, dan valt dat deel weg en vinden we

$$st\left(\frac{a^2}{2} - \Delta x \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

## 7.2 De hoofdstelling van de Integraalrekening

In deze paragraaf zullen we kijken naar de hoofdstelling van de integraalrekening met behulp van de niet-standaard definitie van de afgeleide en continuïteit. We noemen een functie continu differentieerbaar op $[a, b]$ als hij differentieerbaar is in elk punt van $[a, b]$ en zijn afgeleide ook continu is op $[a, b]$. De stelling is zoals hij geformuleerd staat in [3], en het bewijs gaat ook analoog. We gebruiken alleen de niet-standaard definities.

**Stelling 7.4.** *Zij $f$ een continue functie op $[a, b]$. Defineer de functie $F$ op $[a, b]$ door*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

*Dan is $F$ continu differentieerbaar en voor alle $x \in [a, b]$ geldt $F'(x) = f(x)$.*

Kies $c \in [a, b]$ willekeurig, maar uit $\mathbb{R}$. Wegens de continuïteit van $f$ weten we dat als $x \simeq c$ dan $f(x) \simeq f(c)$ (mits $x \in [a, b]^*$). Neem $x = c + h$ met $h \in \mathfrak{I}$ en

$h \neq 0$, dan geldt:

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c) = \left(\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)dt\right) - f(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \big(f(t)-f(c)\big)dt$$

Omdat $c+h \simeq c$ geldt voor alle $t$ tussen $c+h$ en $c$ dat $t \simeq c$. Wegens continuïteit krijgen we $f(t) \simeq f(c)$ en dus $f(t) - f(c) = i$ voor een $i \in \mathfrak{I}$. We hebben dus $|f(t) - f(c)| < |r|$ voor alle $r \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt $|\int_c^{c+h} \big(f(t)-f(c)\big)dt| \leq h|r|$ en dus $|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)| \leq |r|$ voor alle $r \in \mathbb{R}$.
Hieruit kunnen we concluderen dat $\frac{F(c+h)-F(c)}{h} \simeq f(c)$. Omdat $c$ standaard is, is $f(c)$ dat ook en vinden we

$$st\left(\frac{F(c+h)-F(c)}{h}\right) = f(c)$$

Dit is de gezochte definitie van de afgeleide. De functie $F$ is dus differentieerbaar en voor alle $c \in [a,b]$ geldt $F'(c) = f(c)$. Omdat $f$ continu is, is $F$ dus niet alleen differentieerbaar maar ook continu differentieerbaar.

Nu we deze stelling hebben bewezen bekijken we nog een stelling die ons helpt om integralen ook daadwerkelijk uit te rekenen. Het bewijs gaat weer bijna analoog aan het bewijs in [3], pas aan het eind gebruiken we wat niet-standaard definities.

**Stelling 7.5.** *Zij $f$ een continue functie van $[a,b]$ naar $\mathbb{R}$. Laat $F$ een functie zijn met als afgeleide $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in (a,b)$. Dan geldt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

.

Het bewijs gaat dus op een standaard manier. Definiëer een functie $G$ als $G(x) = F(x) - F(a) - \int_a^x f(t)dt$. De functie $G$ heeft als domein $[a,b]$ en is daar ook continu omdat $F$ continu is. We gaan aantonen dat $G(b) = 0$. Uit de hierboven genoemde hoofdstelling en de differentieerbaarheid van $F$ op $(a,b)$ volgt dat $G$ differentieerbaar is op $(a,b)$ met afgeleide

$$G'(x) = F'(x) - f(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad x \in (a,b).$$

Hieruit concluderen we dat $G$ constant is op $[a,b]$. Als dat niet zo is, dan volgt namelijk uit de middelwaardestelling dat de afgeleide ergens ongelijk aan nul moet zijn.
We bepalen nu eerst $G(a)$.

$$G(a) = F(a) - F(a) - \int_a^a f(t)dt = 0$$

Hieruit volgt dus dat ook moet gelden $G(b) = 0$ en daarom $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, wat hetzelfde is als het gestelde.

Met behulp van deze hoofdstelling kunnen we meer stellingen over integralen op een niet-standaard manier bewijzen. Als geldt $F'(x) = f(x)$, dan noemen we $F(x)$ een primitieve van $f(x)$.

## 7.3 De tweede hoofdstelling

Er kunnen meer functies zijn met dezelfde afgeleiden. De volgende stelling zegt dat er een verzameling van primitieven van een functie zijn die slechts een constante van elkaar verschillen. Kies vanaf nu een open interval in $I$ in $\mathbb{R}$.

**Stelling 7.6.** *Zij $F(x)$ een primitieve van $f(x)$. De verzameling van functies die slechts een constante $c \in \mathbb{R}^*$ van $F(x)$ verschillen, is de verzameling van alle primitieven van $f(x)$.*

Hiertoe bewijzen we eerst dat de afgeleiden van $K(x) = F(x) + c$ gelijk is aan $f(x)$.

$$\begin{aligned} K'(x) = st\left(\frac{K(x+h) - K(x)}{h}\right) &= st\left(\frac{F(x+h) + c - (F(x) - c)}{h}\right) \\ &= st\left(\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right) = F'(x) = f(x) \end{aligned}$$

.
Neem nu aan dat $G(x)$ ook een primitieve van $f(x)$ is. Kies $H(x) = F(x) - G(x)$, we zullen aantonen dat $H$ constant is.

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

De afgeleide van $H$ is dus overal gelijk aan nul. We gebruiken nu de middelwaarde stelling om aan te tonen dat $H$ dan constant moet zijn.
Stel dat $H(b) \neq H(a)$ voor een $a, b \in I$ (met $a < b$). Dan volgt uit de middelwaarde stelling dat voor een $k \in [a, b]$ geldt:

$$0 = H'(k) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}$$

Dit is echter in tegenspraak met dat $H(b) \neq H(a)$.

De volgende stelling wordt ook wel de tweede hoofdstelling van de integraalrekening genoemd. Deze stelling helpt bij het bepalen van primitieve functies.

**Stelling 7.7.** *Neem een $a \in I$ en definieer $F(x)$ voor elke $x \in I$ als: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Dan geldt:*
*(i) $F$ is continu.*
*(ii) $F$ is een primitieve van $f$ binnen $I$.*

We bewijzen eerst dat $F$ continu is. Neem $c \in I$ willekeurig, maar vast. We moeten voor continuïteit aantonen dat $F(c + i) \simeq F(c)$ voor een willekeurige $i \in \mathfrak{I}$.
We nemen voor nu aan dat $i > 0$ (Als $i = 0$ is het triviaal en voor $i < 0$ gaat het ongeveer hetzelfde). Uit de stelling 5.1 weten we dat $f$ een maximum en een minimum heeft op een gesloten interval. Kies een $b \in I$ zó dat $c < c + i < b$. Op het gesloten interval $[c, b]$ heeft $f$ dus een minimum $m$ en een maximum $M$.

neem nu een standaard $u$ met $0 < u < b - c$ willekeurig. Uit de definitie van $F$ volgt dat $F(c+u) - F(c) = \int_c^{c+u} f(t)dt$. Omdat $m$ het minimum en $M$ het maximum is, geldt ook: $mu \leq \int_c^{c+u} f(t)dt \leq Mu$. Deze twee samen levert ons:

$$mu \leq F(c+u) - F(c) \leq Mu$$

Merk op dat we hier nog niets niet-standaard hebben gedaan. De getallen $a$, $b$ en $c$ (en dus $u$) waren uit $I$ en dus standaard. Beschouw nu de volgende gesloten formule $\sigma$.

$$\forall u \left( \left(0 < u \wedge u < b - c\right) \rightarrow \left(mu \leq F(c+u) - F(c) \wedge F(c+u) - f(c) \leq Mu\right)\right)$$

Deze formule is wegens bovenstaande redenering waar in $\mathfrak{R}$. We gebruiken weer de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ om te concluderen dat $\sigma$ ook waar moet zijn in $\mathfrak{R}^*$.

Omdat $b-c$ gewoon standaard is, geldt dat $i < b-c$. We hadden al aangenomen dat $i > 0$ is, dus uit $\sigma$ volgt:

$$mi \leq F(c+i) - F(c) \leq Mi$$

De waarden $m$ en $M$ waren standaard dus $mi$ en $Mi$ zijn infinitesimaal. Hieruit volgt dat $F(c+u) \simeq F(c)$, waarmee deel (i) bewezen is.

Het bewijs van (ii) begint hetzelfde. We nemen weer $c \in I$ willekeurig maar vast. We nemen weer aan $i \in \mathfrak{I}$ groter dan nul is. We kiezen $b \in I$ weer zo dat $c < c + i < b$. Voor een willekeurige $u \in [a, b]$ heeft $f$ een maximum en een minimum op het interval $[a, u]$. We noemen $y$ het punt waar $f$ een minimum heeft en $z$ het punt waar $f$ een maximum heeft. De volgende gesloten formule $\tau$ is hierdoor waar in $\mathfrak{R}$.

$$\forall u \exists y \exists z \left( \left(0 < u \wedge u < b - c\right) \rightarrow \left(f(y)u \leq F(c+u) - F(c) \wedge F(c+u) - f(c) \leq f(z)u\right)\right)$$

Wegens de elementaire equivalentie van $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}^*$ is $\tau$ dus ook waar in $\mathfrak{R}^*$. Kiezen we nu $u = i$ dan vinden we dat er een $y \in [c, c+i]^*$ en een $z \in [c, c+i]^*$ zijn, zodat:

$$f(y)i \leq F(c+i) - F(c) \leq f(z)i$$

Als we nu delen door $i$ dan vinden we:

$$f(y) \leq \frac{F(c+i) - F(c)}{i} \leq f(z)$$

Doordat $y$ en $z$ beiden in het interval $[c, c+i]$ liggen geldt wegens continuïteit $f(y) \simeq f(z) \simeq f(c)$. Er geldt dan dus ook $\frac{F(c+i)-F(c)}{i} \simeq f(c)$. Hieruit volgt dat $st\left(\frac{F(c+i)-F(c)}{i}\right) = f(c)$ wat precies de definitie van de afgeleide is. Omdat we in het begin $c$ willekeurig hadden gekozen is de afgeleide van $F$ dus gelijk aan $f$ binnen $I$.

# Bibliografie

[1] Herbert B. Enderton: *A mathematical introduction to logic* (second edition), Academic Press (2001), ISBN 0-12-238452-0

[2] R.A. Adams: *Calculus, a complete course* (fifth edition), Addison Wesley Longman (2003), ISBN 0-201-79131-5.

[3] E. Coplakova: Wiskundige structuren, Dictaat TU Delft (2006)

[4] H. Jerome Keisler: *Foundations of infinitesimal calculus* (2007)

[5] Piet van Oostrum: *Handleiding* LaTeX