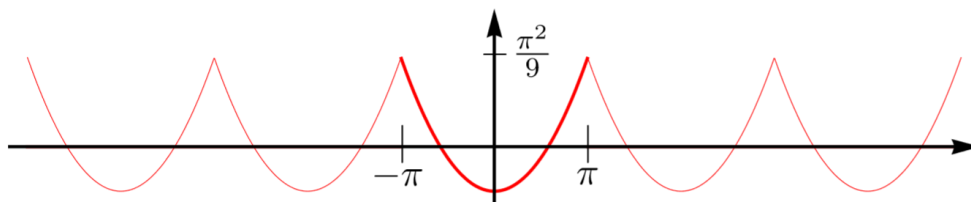


BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

Modelleren van Puntgolven in de Ostrovsky
Vergelijking
Met behulp van numerieke methoden

Modelling Peaked Waves in the Ostrovsky Equation
Using numerical methods



Anouk Zandbergen

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Anna Geyer

Co-begeleider

Fred Vermolen

Commissielid

Emiel van Elderen

Juli, 2019

Delft

Samenvatting

De gereduceerde Ostrovsky Vergelijking omschrijft watergolven. Wanneer wij met de golven meebewegen, krijgen wij de zogenaamde lopende golfoplossingen van de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking. Een oplossing hiervan is de Puntgolf. Het bijzondere van de Puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking is het feit dat wij analytisch niet het verloop van de golf kunnen voorspellen. Zal de golf breken en omvallen, of valt de golf terug naar een gladde golf?

Met behulp van numerieke wiskunde proberen wij de oplossing van de Puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking zo goed mogelijk te benaderen, met als doel het voorspellen van het verloop van de Puntgolven. Hierbij beginnen wij met de Burgers Vergelijking, wat overeenkomt met de Ostrovsky Vergelijking minus de inverse-afgeleideterm. Wanneer wij de Burgers Vergelijking goed gediscretiseerd hebben, gaan wij verder met de Ostrovsky Vergelijking door de inverse-afgeleideterm te discretiseren en toe te voegen.

Het numerieke model voldeed aan de eigenschappen van de Ostrovsky Vergelijking. Hieruit volgt dat het numerieke model het gedrag van de Puntgolf in de Ostrovsky Vergelijking representeert. Er bleek dat de Puntgolf terugvalt naar een gladde periodieke golf.

Dit is echter de beginfase van dit onderzoek. De eigenwaarden van het numerieke model zullen nog vergeleken moeten worden met de bekende eigenwaarden van de Puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking. Het spectrum waarin de eigenwaarden van de Puntgolven zitten zorgt namelijk voor onstabieleit. Met behulp van de Stelling van Gershgorin kan het spectrum van de eigenwaarden van het numerieke model bepaald worden. Dan kunnen deze beide eigenwaarden vergeleken worden, zodat er met meer zekerheid bepaald kan worden hoe het verloop van de Puntgolven zullen zijn. Verder zullen er nog nauwkeurigere discretisatiemethoden toegepast kunnen worden, voor het beter representeren van de punt in de puntgolf. Ook kan de invloed van het numerieke model voor de verspreiding van de oplossing bepaald kunnen worden, zodat eventueel uitgesloten kan worden dat het model zelf voor een verspreidend karakter zorgt.

Voorwoord

In het kader van mijn Bachelorproject aan de TU Delft voor de studie Technische Wiskunde heb ik het verloop van de Puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking onderzocht. Hierbij zijn numerieke methoden toegepast om de oplossing van de Puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking te benaderen. Van maart 2019 tot en met juli 2019 heb ik gewerkt aan het onderzoek en het schrijven van het verslag.

Het maken van een wiskundig model van een hedendaags verschijnsel, wat in dit geval een watergolf is, vind ik erg interessant. Daarnaast ben ik fanatiek zwemmer, waardoor ik altijd al geïnteresseerd was in de mathematische en fysische eigenschappen van water. Dit project overkoepelt mijn interesses, waardoor ik met veel plezier en enthousiasme heb gewerkt aan dit project.

Dit project kwam tot stand door een eerder onderzoek van mijn begeleidster Anna Geyer. Toen ik mijn interesse voor numerieke wiskunde en mathematische fysica deelde, kwamen wij samen tot dit onderzoek. Hierbij heeft zij mij met volle enthousiasme geholpen. Bij het numerieke deel van het onderzoek ben ik erg geholpen door co-begeleider Fred Vermolen. Ik wil jullie graag bedanken voor de fijne samenwerking, het enthousiasme en de prettige sfeer tijdens het Bachelorproject.

Anouk Zandbergen

Delft, 13 juli 2019

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
2	Wrijvingsloze Burgers Vergelijking	6
2.1	Methode van Karakteristieken	6
2.2	Discretisatie in de plaats	9
	Centrale Differenties	10
	Upwind Differenties	11
2.3	Discretisatie in de tijd	12
	Euler Voorwaarts	12
	Euler Modified	14
2.4	Conclusie	16
3	Ostrovsky Vergelijking	18
3.1	Eigenschappen	19
	Oplossing puntgolven	19
	Nul Gemiddelde	19
	Voorspellen gedrag beginvoorwaarde	20
3.2	Numerieke Integratie	20
3.3	Controleren numerieke benadering	21
	Richardson Extrapolatie	22
	Nul Gemiddelde	22
	Gedrag beginvoorwaarde	23
	Vergelijking met puntgolf	25
3.4	Resultaten numerieke model	27
4	Conclusie	30
5	Discussie en aanbevelingen	31
	Referenties	33
A	Korteweg-de Vries Vergelijking	34
B	Euler Voorwaarts met Centrale Differenties	35
C	Upwind en Downwind	36
D	Richardson Extrapolatie	37
E	Herleiding lopende golven in Ostrovsky	38
F	Code in Matlab	43

1 Inleiding

De gereduceerde Ostrovsky Vergelijking omschrijft watergolven met kleine amplitude op het oppervlak van ondiep water, [2], [3]. Het is herleid uit de Korteweg-de Vries Vergelijking, zie Bijlage A. De gereduceerde Ostrovsky Vergelijking heeft de vorm

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \partial_x^{-1}u, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Dit is een partiële differentiaalvergelijking. Hierbij is u_0 een 2π -periodieke functie en is $\partial_x^{-1}u$ de inverse-afgeleideterm, beide met gemiddelde nul, [1].

$$\partial_x^{-1}u = \int_0^z u(z') \, dz' - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z u(z')(d)z' \, dz$$

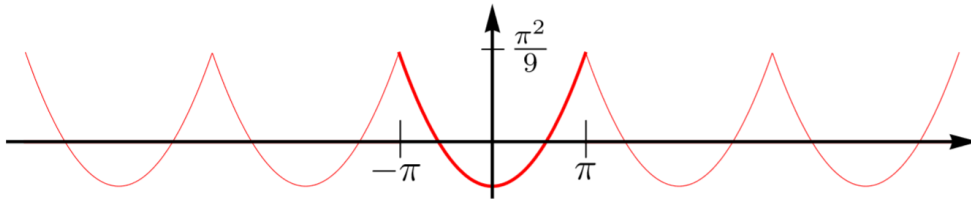
Nu geldt voor een u_0 klein genoeg dat de lokale oplossing zich voor alle tijd zal voortzetten. Voor een u_0 voldoende groot zal de lokale oplossing in eindige tijd breken. Hierbij houdt breken in, dat voor een breektijd $T_b > 0$, de golf begrensd blijft maar de helling onbegrensd wordt, [6]. Dat is

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T)} \{|u(x,t)|\} < \infty \quad \text{en} \quad \limsup_{t \uparrow T_b} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x(x,t)| \right\} = \infty$$

Wij gaan kijken naar lopende golfoplossingen van de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking. Deze nemen de vorm aan $u(x,t) = U(x - ct)$, waarbij $z = x - ct$ aangeeft dat wij als het ware met de golf meebewegen met snelheid c . Dit geeft ons de vergelijking van de vorm

$$\begin{cases} (c - U(z))U'(z) + (\partial_x^{-1}U)(z) = 0, & z \in (-\pi, \pi), \quad U(z) \neq c \\ U(-\pi) = U(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} U(z) \, dz = 0 \end{cases}$$

Nu voldoet $U(z) = (z^2 - 3c)/6$ aan bovenstaande randwaardeprobleem. Dit is een parabolisch profiel, waarbij de parabool wordt voortgezet voorbij $[-\pi, \pi]$, [1]. Hierbij wordt aan de Nul Gemiddelde eigenschap voldaan wanneer de golfsnelheid gelijk is aan $c = c_* = \pi^2/9$, wat ons de puntgolven geeft, [1]. Wanneer wij deze c invullen, dan volgt dat deze gelijk is aan $U_*(z) = (3z^2 - \pi^2)/18$. Deze golven zijn weergegeven in Figuur 1, waarbij de parabool wordt voortgezet voorbij $[-\pi, \pi]$. Nu weten wij niet of de oplossing van deze puntgolven in eindige tijd zullen breken, of dat ze zich voortzetten als gladde golf.



Figuur 1: Periodieke puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking, [1]

Dit komt door een bepaalde eigenschap van de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking. Als de beginvoorwaarde u_0 glad is, dan weten wij dat de oplossing zich zal voortzetten als gladde golf als $m_0(x) := 1 - 3u_0''(x) > 0$ voor alle x , zie [2]. Wanneer het teken voor m_0 niet bepaald kan worden, dan zal de golf breken. Wanneer wij $U_x(z)$ invullen, dan is m_0 overal gelijk aan 0 behalve in de top van de punt. Wij weten dus niet wat het verloop van deze puntgolf zal zijn.

Om erachter te komen wat het verloop van de puntgolf in de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking is, gaan wij de oplossing numeriek benaderen. Hierbij beginnen wij bij de wrijvingsloze Burgers Vergelijking, zie Sectie 2. Vervolgens breiden wij dit numerieke model uit met de aïntegratieterm, om zo weer tot de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking te komen. Hierbij controleren wij of dit model voldoet aan enkele eigenschappen van de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking, waarna wij kunnen bepalen wat het verloop van de puntgolf zal zijn. In het vervolg laten wij de kwalificatie ‘gereduceerd’ weg als we spreken over de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking.

2 Wrijvingsloze Burgers Vergelijking

Voordat de Ostrovsky Vergelijking verder onderzoeken, gaan wij eerst de wrijvingsloze Burgers Vergelijking analyseren. Wij noemen dit verder de Burgers Vergelijking, terug te zien in Vergelijking (1).

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= U_*(x) \\ u(x + 2k\pi, t) &= u(x, t), & k \in \mathbb{Z} \\ U_*(x + 2k\pi, t) &= U_*(x), & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

Deze vergelijking lijkt erg op de Ostrovsky Vergelijking, het enige verschil is dat hier de term $\partial_x^{-1}u$ ontbreekt. Het doel van het analyseren van de Burgers Vergelijking is dan ook om te kijken hoe wij een goede numerieke oplossing kunnen maken. Wij kunnen namelijk met de Methode van Karakteristieken de exacte oplossing bepalen, die wij weer kunnen vergelijken met de numerieke benadering. Wanneer wij een goede numerieke oplossing hebben van de Burgers Vergelijking, hoeven wij alleen nog de numerieke benadering van de inverse-afgeleide term toe te voegen aan de vergelijking om zo de Ostrovsky Vergelijking te krijgen.

De Burgers Vergelijking is een hyperbolische partiële differentiaalvergelijking, te zien in (1), die vooral wordt gebruikt bij de modellering van gasdynamica en verkeersstroming [8]. Hierbij gebruiken wij als beginvoorwaarde $U_*(x) = \frac{1}{18}(3x^2 - \pi^2)$. Deze voorwaarde is herleid van de Ostrovsky Vergelijking, die de puntgolven representeren. Dit is verder uitgewerkt in Hoofdstuk 3. Verder beperken wij ons tot het domein $x \in (-\pi, \pi)$ en is t positief. Merk hierbij op dat het domein een weergave is van één puntgolf. Wij hebben hier te maken met een parabolische functie als beginvoorwaarde. Om de puntgolven te maken, plakken wij als het ware steeds het profiel van deze golf achter elkaar. Er is hier sprake van periodiciteit: wanneer wij een domein hebben van $(-\pi, 3\pi)$, dan hebben wij twee puntgolfprofielen.

Deze partiële differentiaalvergelijking zullen wij exact oplossen met behulp van de Methode van Karakteristieken. Daarna zullen wij deze oplossing numeriek benaderen met verschillende discretisatiemethoden in de tijd en in de plaats. Zo kunnen wij de exacte oplossing vergelijken met de numerieke benadering om zo te kijken of wij het gedrag van deze oplossing kunnen benaderen door middel van numerieke methoden.

2.1 Methode van Karakteristieken

Bij de Methode van Karakteristieken gaan wij op zoek naar de karakteristieken van Differentiaalvergelijking (1). Hiervoor maken wij een parametrisatie. Daarvoor beschouwen wij de snelheid van verandering van $u(s, x(s))$, waarbij $x(s, x_0)$ met de vergelijking meebeweegt, [9]. Hierbij zetten wij s voor de tijd t , zodat wij niet twee keer dezelfde notatie gebruiken. De kettingregel geeft ons

$$\frac{d}{ds}u(s, x(s)) = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Wij zien dat in het geval van de Burgers Vergelijking $du/ds = 0$ en $dx/ds = u$. Aangezien $dt/ds = 1$, krijgen wij de kromme gedefinieerd door:

$$\begin{cases} \frac{dt(s, x_0)}{ds} = 1 \\ \frac{dx(s, x_0)}{ds} = u \\ \frac{du(s, x_0)}{ds} = 0 \end{cases}$$

Als deze kromme één punt gemeen heeft met de oplossing van de partiële differentiaalvergelijking, dan ligt de gehele kromme op het oplossingsoppervlak. Merk op dat wij de partiële differentiaal vergelijking oplossen door drie gewone differentiaalvergelijkingen op te lossen, namelijk $t(s, x_0)$, $x(s, x_0)$ en $u(s, x_0)$. Dit zijn de zogenaamde karakteristieken van de differentiaalvergelijking. Hierbij zijn de beginvoorwaarden $t = 0, x = x_0$ en $u = U_*(x_0)$. Wanneer wij de differentiaalvergelijkingen oplossen met deze beginvoorwaarden, krijgen wij de volgende oplossingen

$$\begin{aligned} t(s, x_0) &= s + c_3(x_0) \longrightarrow t = s \\ u(s, x_0) &= c_1(x_0) \longrightarrow u = U_*(x_0) \\ x(s, x_0) &= u(s, x_0) \cdot s + c_2(x_0) \longrightarrow x = U_*(x_0) \cdot t + x_0 = u \cdot t + x_0 \end{aligned}$$

Wij hebben nu dus $t = s$, $u = U_*(x_0)$ en $x = ut + x_0$. Deze oplossingen willen wij combineren, om x_0 te beschrijven. Wij willen x_0 beschrijven om deze in te vullen in $u = U_*(x_0)$, waarna wij uiteindelijk de exacte oplossing kunnen bepalen.

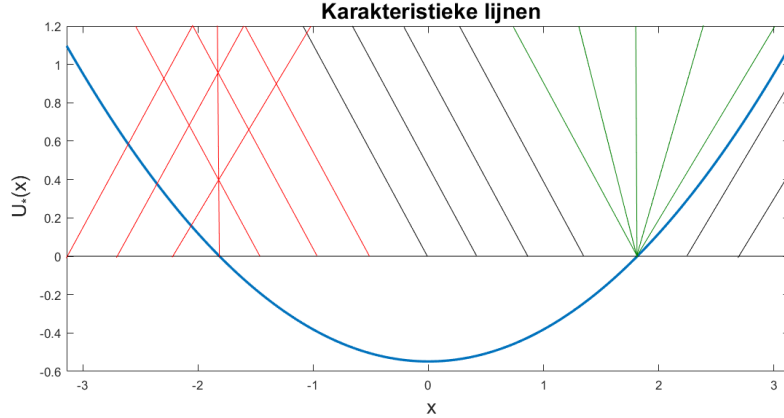
$$\begin{aligned} x &= u \cdot t + x_0 \iff \\ x_0 &= x - u \cdot t \end{aligned}$$

Deze x_0 vullen wij in, in $u = U_*(x_0)$, zodat wij de oplossing van de partiële differentiaalvergelijking kunnen bepalen. De oplossing is in de vorm $u(x, t) = U_*(x - ut)$, wat in het algemeen tot een impliciete oplossing zorgt. In dit geval is U_* een kwadratische functie en kunnen wij expliciet de oplossing bepalen. Bij het oplossen van de kwadratische functie krijgen wij twee oplossingen, namelijk een ‘+’ en een ‘-’ oplossing. Dit staat voor het teken wat voor de wortel in de oplossing staat. Alleen de ‘-’ oplossing is een oplossing van Vergelijking (1), die is terug te zien in Formule (2).

$$u(x, t) = \frac{3tx + 9 - \sqrt{3\pi^2 t^2 + 54tx + 81}}{3t^2} \quad (2)$$

Wanneer wij namelijk van beide oplossing de limiet $t \rightarrow 0$ nemen, bestaat deze niet bij de ‘+’ oplossing en geeft het bij de ‘-’ oplossing onze beginvoorwaarde $U_*(x)$. Dit geeft ons dus de oplossing gegeven in Formule (2). Merk hierbij op dat wanneer $x > \pi$, wij vanwege periodiciteit 2π van de x kunnen aftrekken. Dan plak je als het ware de achterkant aan de voorkant.

Nu wij met behulp van de Methode van Karakteristieken de oplossing $u(x, t)$ hebben gevonden, kunnen wij naar enkele eigenschappen van deze oplossing kijken. Zo zal bij een negatieve helling de oplossing steeds steiler wordt. Dit komt doordat bij grote waarden van u de oplossing relatief snel beweegt ten opzichte van kleinere waarden. Hierdoor ontstaat een ‘ophoping’ en dus een steeds steilere oplossing. Dit heeft te maken met de vorm van onze vergelijking, namelijk $x_0 = x - ut$, waarbij u in dit geval de snelheid aangeeft. Verder beweegt een positieve oplossing naar rechts en een negatieve oplossing naar links.



Figuur 2: De karakteristieke lijnen behorende bij $U_*(x)$ in het blauw, schematisch weergegeven. Hierbij is in het rood de schokgolf en in het groen de expansiegolf

Dit houdt dus in dat wij in het interval $(-\pi, 0)$ een schokgolf verwachten en in het interval $(0, \pi)$ een expansiegolf. In Figuur 2 is terug te zien dat een negatieve oplossing naar links beweegt en een positieve oplossing naar recht. Verder is de schokgolf in het rood terug te zien en de expansiegolf in het groen.

Om te bepalen wanneer de golf gaat breken, gebruiken wij een stelling uit [7], Hoofdstuk 3.3 bladzijde 25. Daar staat dat voor een gladde beginvoorwaarde $u_0(x)$ waarbij $u'_0(x)$ op een punt negatief is, de golf breekt op tijdstip

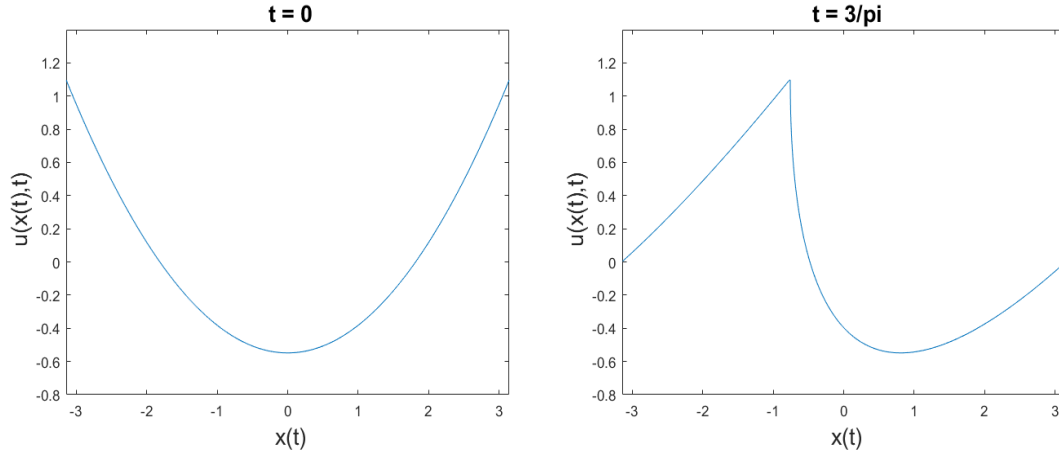
$$T_b = -\frac{1}{\min u'_0(x)} \quad (3)$$

In ons geval is $u_0(x) = U_*(x) = (3x^2 - \pi^2)/18$. Dat geeft ons $U'_*(x) = x/3$, dus volgt dat $T_b = 3/\pi$. Dit betekent dus dat de golf na $3/\pi$ seconden zal breken. Breken houdt in, dat voor een breektijd $T_b > 0$, de golf begrensd blijft maar de helling onbegrensd wordt, [6]. Dat is

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T)} \{|u(x,t)|\} < \infty \quad \text{en} \quad \limsup_{t \uparrow T_b} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x(x,t)| \right\} = \infty \quad (4)$$

Dus op een bepaalde tijd T_b is de afgeleide u_x onbegrensd, maar u zelf is begrensd in een bepaald punt x_b . Dit bijbehorende punt, het breekpunt, is $x_b = -2\pi/3$. De tijd berekend uit Formule (3) en het bijbehorende breekpunt $x_b = -2\pi/3$ komt overeen met het breekpunt en breektijd van de oplossing die wij bepaald hebben met de Methode van Karakteristieken.

Met al deze informatie kunnen wij dus het verloop van de golf voorspellen. Wij weten dat na $3/\pi$ seconden de golf gaat breken, dat zal gebeuren in het interval $(-\pi, 0)$, aangezien de helling daar negatief is en de oplossing uiteindelijk ook van positieve naar negatieve waarden gaat. Omdat hier een ophoping ontstaat, zal in het interval $(0, \pi)$ een expansiegolf ontstaan. De golf zal daar dus verspreiden. Aangezien wij de oplossing van $u(x, t)$ hebben, kunnen wij de oplossing op verschillende tijdstippen bekijken. In Figuur 3 is de oplossing van u op de tijdstippen $t = 0$ en $t = T_b = 3/\pi$ te zien. Er is inderdaad te zien dat de oplossing zich ‘ophoopt’ aan de linkerkant, en zich verspreidt aan de rechterkant. Op



Figuur 3: De exacte oplossing van u op begintijd $t = 0$ en breektijd T_b

tijdstip $t = 3/\pi$ is te zien dat de helling aan de linkerkant van de oplossing oneindig groot is en de golf zal breken. Na dit tijdstip is de golf ‘gebroken’ en is de oplossing niet meer een goed gedefinieerde functie.

2.2 Discretisatie in de plaats

Nu wij de exacte oplossing hebben verkregen met behulp van de Methode van Karakteristieken, gaan wij vervolgens de oplossing numeriek benaderen. Hierbij discretiseren wij in de plaats en in de tijd. Wij behandelen eerst de discretisatie in de plaats. Merk op dat Vergelijking (1) nog niet in conservatieve vorm staat. Hierbij herschrijven wij de term uu_x , waardoor wij de term $(\frac{u^2}{2})_x$ krijgen en staat de vergelijking in conservatieve vorm. Deze term zullen wij discretiseren. Dat doen wij allereerst met behulp van Centrale Differenties, te zien in Vergelijking (5). Hier wordt een nieuwe notatie geïntroduceerd: w_j^τ . Hierbij zal w de numerieke benadering zijn van de oplossing u , waarbij de foutterm $\mathcal{O}(h^2)$ genegeerd wordt. Verder is j het j^e gridpunt en τ geeft het tijdstip aan, dus $t^\tau = \tau \cdot \Delta t$. Kortom, j geeft de plaats van de oplossing aan en τ het tijdstip.

$$\begin{aligned}
 u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x &= \\
 u_t + \frac{1}{2h} (u^2(t, x_{j+1/2}) - u^2(t, x_{j-1/2})) + \mathcal{O}(h^2) &\approx \\
 w_t + \frac{1}{2h} ((w_{j+1/2}^\tau)^2 - (w_{j-1/2}^\tau)^2) &= 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

In deze vergelijking staan de termen $w_{j+1/2}^\tau$ en $w_{j-1/2}^\tau$. Deze termen vallen als het ware tussen de gridpunten, waardoor wij deze nog zullen moeten schatten. Dat kan op twee manieren, namelijk door Centrale Differenties en door Upwind Differenties. Wij gaan beide manieren toepassen en gaan ze met elkaar vergelijken. Hieruit zal blijken dat de Upwind Differenties de voorkeur heeft, ondanks de hogere nauwkeurigheid van Centrale Differenties.

Centrale Differenties

Een mogelijkheid om te discretiseren is Centrale Differenties. Het komt erop neer dat wij $w_{j+1/2}^\tau$ benaderen door het gemiddelde te nemen van w_j^τ en w_{j+1}^τ . Hetzelfde idee geldt voor $w_{j-1/2}^\tau$. Het uitschrijven van deze termen geeft ons het volgende:

$$\begin{aligned}(w_{j+1/2}^\tau)^2 &= \left(\frac{w_j^\tau + w_{j+1}^\tau}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} ((w_j^\tau)^2 + 2w_j^\tau w_{j+1}^\tau + (w_{j+1}^\tau)^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(w_{j-1/2}^\tau)^2 &= \left(\frac{w_j^\tau + w_{j-1}^\tau}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} ((w_j^\tau)^2 + 2w_j^\tau w_{j-1}^\tau + (w_{j-1}^\tau)^2)\end{aligned}$$

Wij hebben nu de termen $w_{j+1/2}^\tau$ en $w_{j-1/2}^\tau$ bepaald. Het verschil tussen deze waarden is weergegeven in Vergelijking (6). Wanneer wij dit invullen in Vergelijking (5), is de uitkomst van de discretisatie te zien in Vergelijking (7).

$$(w_{j-1/2}^\tau)^2 - (w_{j+1/2}^\tau)^2 = \frac{1}{4} (2w_j^\tau(w_{j-1}^\tau - w_{j+1}^\tau) + (w_{j-1}^\tau)^2 - (w_{j+1}^\tau)^2) \quad (6)$$

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x \approx w_t + \frac{1}{8h} (2w_j^\tau(w_{j-1}^\tau - w_{j+1}^\tau) + (w_{j-1}^\tau)^2 - (w_{j+1}^\tau)^2) \quad (7)$$

Centrale Differenties heeft een relatief goede nauwkeurigheid, namelijk $\mathcal{O}(h^2)$, [4]. Helaas kan de monotoniciteit van de oplossing verloren gaan, de oplossing zal erg oscilleren. Dat zal gebeuren in de buurt van een schokgolf. In dit geval hebben wij inderdaad te maken met een schokgolf, wat terug te lezen is in Hoofdstuk 2.1. Rond het punt $x = -\frac{2\pi}{3}$ zal een schok ontstaan, waardoor de numerieke oplossing erg gaat oscilleren. Omdat er geen behoud van monotoniciteit is bij Centrale Differenties en wel bij Upwind Differenties, zullen wij zien dat de voorkeur gaat naar Upwind Differenties bij de Burgers Vergelijking.

Verder geldt dat de combinatie Euler Voorwaarts met Centrale Differenties niet stabiel is, zie Bijlage B. Een methode is stabiel als een kleine verstoring in de parameters een klein verschil maakt voor de oplossing. Niet stabiel houdt dus in dat een kleine verstoring grote fouten veroorzaakt. Wanneer wij al Centrale Differenties toepassen, dan doen wij dit dus niet in combinatie met Euler Voorwaarts. Maar zoals eerder is vermeld, hebben wij in het geval van de Burgers Vergelijking te maken met een schokgolf. Aangezien er geen behoud is van monotoniciteit bij Centrale Differenties, zal de numerieke benadering rondom de schokgolf erg oscilleren. Hierdoor wordt het toepassen van Centrale Differenties uitgesloten voor dit probleem in de Burgers Vergelijking. Wij zullen Upwind Differenties gebruiken voor de plaatsdiscretisatie. Deze is in combinatie met Euler Voorwaarts stabiel én zorgt voor behoud van monotoniciteit. Vooral de laatste eigenschap is erg belangrijk, aangezien wij met een schokgolf te maken hebben.

Upwind Differenties

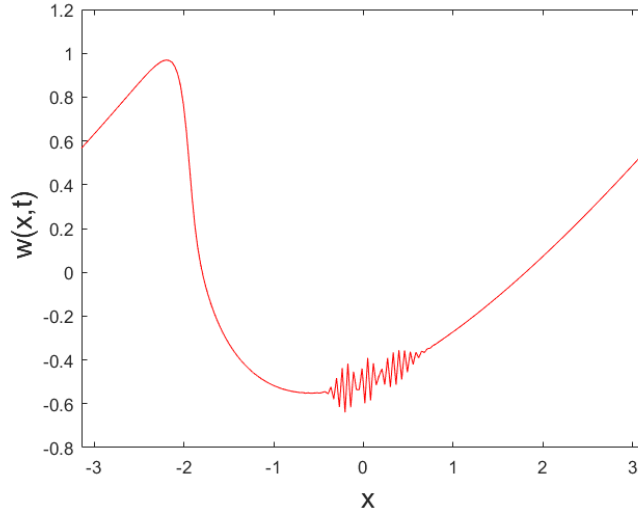
Bij Upwind Differenties of Upwinding, gebruik je eenzijdige differenties, [4]. In dit soort discretisatie is $w(t, x_{j+1/2})$ benaderd door:

$$w(t, x_{j+1/2}) \approx \begin{cases} w(t, x_j) & \text{als } w \geq 0 \\ w(t, x_{j+1}) & \text{als } w < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Hierbij geeft de numerieke benadering w de golfsnelheid aan. Bij de Burgers Vergelijking is u de golfsnelheid, wat te herleiden is uit de Methode van Karakteristieken in Sectie 2.1. Daarbij zagen wij dat $dx/ds = u$, wat de golfsnelheid inhoudt. Wanneer wij gaan discretiseren doormiddel van Upwinding, vervangen wij u door de numerieke benadering w . Voor de term $w(t, x_{j+1/2})$ kan je een zelfde soort schema maken als in (8). Wanneer wij dit doen en dit toepassen op de Burgers Vergelijking, dan krijgen wij de discretisatie in Vergelijking (9).

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x \approx \begin{cases} w_t + \frac{1}{2h}(w^2(t, x_j) - w^2(t, x_{j-1})) = 0 & \text{als } w \geq 0 \\ w_t + \frac{1}{2h}(w^2(t, x_{j+1}) - w^2(t, x_j)) = 0 & \text{als } w < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Wanneer wij geen rekening houden met het teken van w , dan ontstaan er oscillaties bij de numerieke benadering. Dit heeft te maken met de karakteristieke vergelijking. Zoals wij in Sectie 2.1 op pagina 6 hebben gezien, zullen de karakteristieken naar rechts gaan als w positief is en naar links als w negatief is. Dit houdt in dat bij positieve waarden de oplossing naar rechts beweegt en bij negatieve waarden de oplossing naar links beweegt. Wanneer wij alleen de afschatting van Vergelijking (8) gebruiken als $w \geq 0$, dan zullen er oscillaties ontstaan als $w < 0$. Dit komt doordat wij nu Upwinding uitvoeren in dezelfde richting als de oplossing. In Bijlage C tonen wij aan dat het behoud van monotoniciteit verloren gaat wanneer wij hier geen rekening mee houden. Dit gedrag is ook terug te zien



Figuur 4: Er ontstaan oscillaties wanneer er geen rekening gehouden wordt met het teken van w bij Upwinding

in Figuur 4, waarbij wij alleen Vergelijking (8) gebruiken als $w \geq 0$. Dit is een numerieke benadering van Vergelijking (1) na 1.05 seconden, waarbij wij Upwinding gebruiken zonder rekening te houden met het teken van w en Euler Voorwaarts gebruiken voor de tijdsdiscretisatie. De tijdsdiscretisatie wordt behandeld in Sectie 2.3.

Een groot voordeel van Upwinding ten opzichte van Centrale Differenties is juist het feit dat er behoud is van monotoniciteit. Daarom is het ook erg belangrijk dat er goed rekening gehouden wordt met het teken van u . Een nadeel is wel dat er een orde nauwkeurigheid wordt verloren, Upwinding is namelijk $\mathcal{O}(h)$ nauwkeurig ten opzichte van Centrale Differenties met $\mathcal{O}(h^2)$ nauwkeurigheid. Om ervoor te zorgen dat Upwinding wel nog nauwkeurig is, is het belangrijk dat de stapgrootte h klein gekozen wordt. Tevens is Upwinding de enige methode die toegepast kan worden in de buurt van een schokgolf, door het behoud van monotoniciteit [5]. Wij zullen dan ook de discretisatie in de plaats uitvoeren met behulp van Upwinding. Wel moet men in het achterhoofd houden dat de oplossing erg wordt afgevlakt door Upwind Differenties, dus de puntige vorm van de exacte oplossing gaat verloren wanneer de stapgrootte h te groot gekozen wordt.

2.3 Discretisatie in de tijd

Wij hebben de afgeleide in de plaats nu gediscrètiseerd. Hierbij ging onze voorkeur uit naar Upwinding. Nu wij deze stap gedaan hebben, gaan wij vervolgens de afgeleide in de tijd discretiseren. Dat gaan wij doen door middel van Euler Voorwaarts en Euler Modified. Allereerst gaan wij echter onze Burgers Vergelijking (1) herschrijven, wat terug te zien is in Vergelijking (10). Wij hebben de rechterzijde van deze vergelijking in Sectie 2.2 gediscrètiseerd en zullen dat nu toepassen op onze tijdsdiscretisatie.

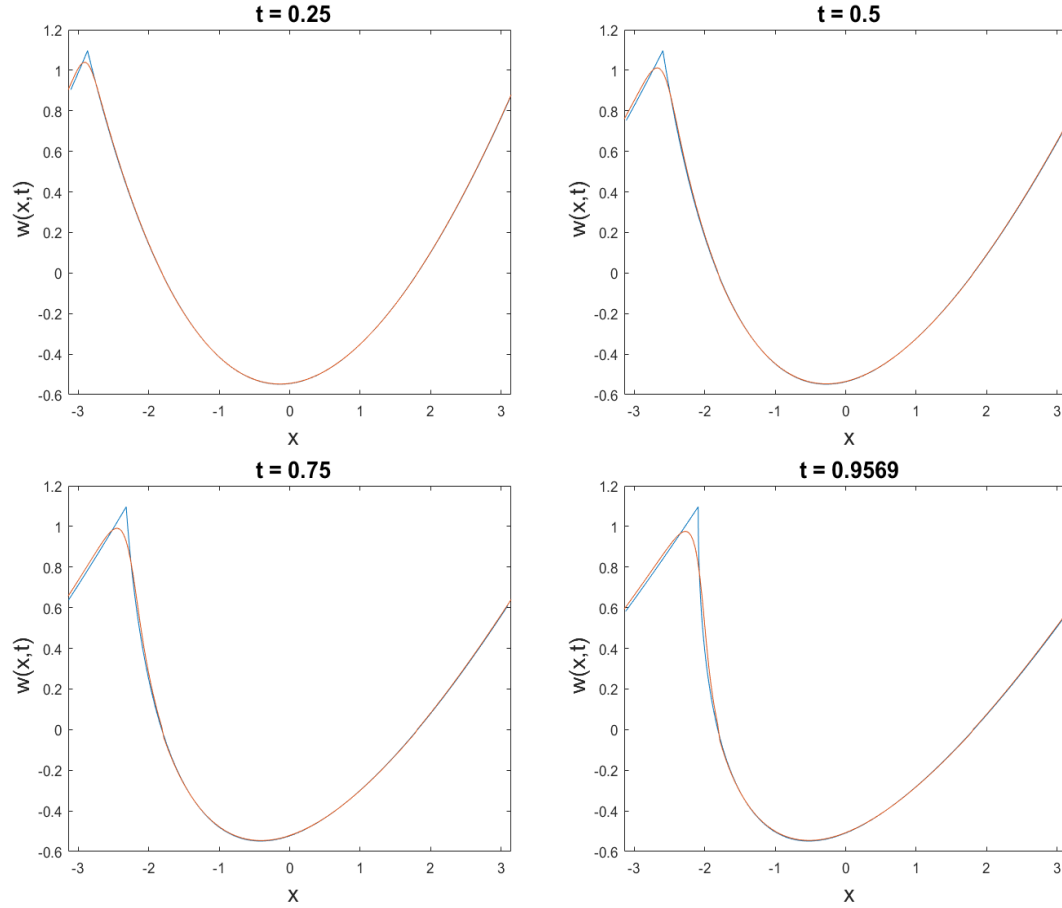
$$u_t = -uu_x \tag{10}$$

Merk hierbij wel het teken op van de rechterzijde van de vergelijking. Deze vergelijking gaan wij gebruiken voor de tijdsdiscretisatie. Wij beginnen met Euler Voorwaarts, waarna wij deze gaan uitbreiden tot Euler Modified. Deze twee methoden willen wij graag vergelijken, dus gaan wij kijken naar de hoeveelheid berekeningen. Dat houdt in dat wij bij beide methoden evenveel berekeningen willen, dus dat wij uiteindelijk de tijdstap en de grootte van het grid zullen aanpassen afhankelijk van de gebruikte methode. Het aantal berekeningen wordt bepaald door $\#c = n \cdot nt \cdot M$, met n het aantal gridpunten, nt het aantal tijdstappen en M een constante afhankelijk van de gebruikte numerieke discretisatiemethode. Hierbij staat $\#c$ voor het aantal calculaties en is $nt = t/dt$.

De tijdstap is afhankelijk van de grootte van het grid, dus daar zal rekening mee gehouden worden. Wij controleren met Richardson Extrapolatie of de gekozen tijdstap en gridgrootte voor een stabiele oplossing zorgt. Daarnaast hangt het aantal berekeningen af van de gekozen tijdsdiscretisatiemethode. Euler Modified kost meer rekentijd per tijdstap dan Euler Voorwaarts, aangezien dit een predictor-corrector-methode is.

Euler Voorwaarts

Euler Voorwaarts is de meest eenvoudige en meest bekende discretisatiemethode. Deze methode is expliciet, wat inhoudt dat de nieuwe waarde van de numerieke benadering w alleen afhangt van tijdstappen ervoor. Dit zorgt ervoor dat een expliciete methode weinig rekenwerk per tijdstap kost. Deze methode heeft echter wel een redelijk lage nauwkeurigheid, namelijk $\mathcal{O}(\Delta t)$, [4]. Het grote voordeel van deze methode is dus dat



Figuur 5: Numerieke benadering (rood) met Euler Voorwaarts en Upwinding
Exacte oplossing (blauw) van Methode van Karakteristieken

het weinig rekenwerk kost, maar het gaat wel ten koste van de nauwkeurigheid. Hierbij is $M = 1$, voor de berekening van het aantal calculaties. De discretisatiemethode in het algemeen is

$$w_j^{\tau+1} = w_j^\tau + \Delta t f(t^\tau, w_j^\tau) \quad (11)$$

Hierbij is $f(t^\tau, w_j^\tau)$ de rechterzijde van Vergelijking (10). Deze rechterzijde hebben wij al gediscretiseerd, dus zal f eruit zien als in Vergelijking (12). Wanneer wij deze vergelijking combineren met Vergelijking (11), zullen wij de discretisatie in de tijd hebben voor de Burgers Vergelijking.

$$f(t^\tau, w_j^\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2h}((w_{j-1}^\tau)^2 - (w_j^\tau)^2) & \text{als } u \geq 0 \\ \frac{1}{2h}((w_j^\tau)^2 - (w_{j+1}^\tau)^2) & \text{als } u < 0 \end{cases} \quad (12)$$

De uitkomst van de discretisatie is grafisch weergegeven in Figuur 5. Hierbij is in het blauw de exact bepaalde oplossing van de Methode van Karakteristieken weergegeven en in het rood de numerieke benadering van de oplossing. Er is goed te zien dat de numerieke

oplossing meer afgevlakt is dan de exacte oplossing. De exacte oplossing heeft nog een punt, maar bij de numerieke oplossing is die punt duidelijk afgevlakt en glad geworden. Dit komt door de Upwind Differenties. Verder zien wij dat de numerieke oplossing fysisch correct gedrag vertoont door het behoud van monotoniciteit dat geldt bij Upwinding. Gedurende de tijd tot het breektijdstip T_b volgt de numerieke oplossing de exacte oplossing goed en zien wij tevens dat het breektijdstip hetzelfde is als bij de exacte oplossing.

Zoals eerder vermeld heeft Euler Voorwaarts een nauwkeurigheid van $\mathcal{O}(\Delta t)$, wat een vrij lage nauwkeurigheid is vergeleken met andere discretisatiemethoden. Wanneer wij dit controleren door Richardson Extrapolatie¹ wordt deze nauwkeurigheid bevestigd. Hierbij hebben wij $n = 200$ gridpunten gekozen, wat inhoudt dat de stapgrootte gelijk is aan $h = 2\pi/200$. De tijdstap is gelijk aan $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$. Deze combinatie geeft dus een stabiele oplossing, met een totaal van $\#c = 1913800$ berekeningen tot T_b . Naast het bevestigen van de nauwkeurigheid, is de gemiddelde fout van de numerieke benadering ook van belang. Dit doen wij door middel van Formule (13).

$$e^\tau = \frac{|\mathbf{u}^\tau - \mathbf{w}^\tau|}{n} \quad (13)$$

Hierbij zijn n , $\mathbf{u}^\tau$ en $\mathbf{w}^\tau$ respectievelijk het aantal gridpunten, de exacte oplossing op tijdstip t^τ en de numerieke oplossing op tijdstip t^τ . Wanneer wij dit doen op $t = T_b$, komt er een gemiddelde fout van $e = 0.017442$ per gridpunt. Deze fout wordt voornamelijk veroorzaakt door de discretisatie in de plaats. De nauwkeurigheid was $\mathcal{O}(h)$, wat betekent dat de fout in de plaatsdiscretisatie gelijk is aan $e_x = D \cdot 10^{-2}$. Wanneer wij namelijk naar de fout in de tijdsdiscretisatie kijken, dan is die heel veel kleiner. Dit komt doordat $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$, dus is de fout in de tijdsdiscretisatie gelijk aan $e_\tau = C \cdot 10^{-8}$. We gaan kijken naar de totale fout $e_{\text{tot}} = e_\tau + e_x$, wat dus gelijk is aan:

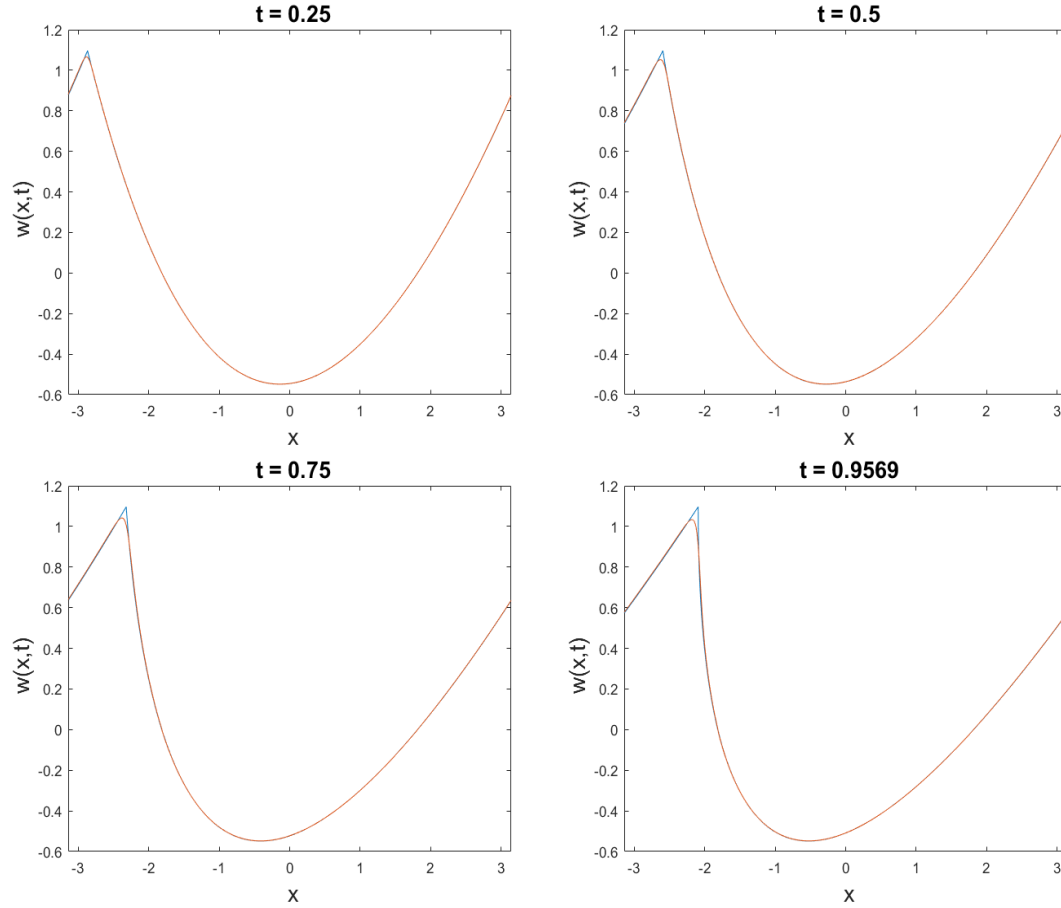
$$e_{\text{tot}} = C \cdot 10^{-8} + D \cdot 10^{-2}$$

Wij zien hier dat de fout in de tijdsdiscretisatie verwaarloosbaar is ten opzichte van de fout die wij maken in de plaatsdiscretisatie. Wij gaan deze uitkomsten vergelijken met Euler Modified, wat een nauwkeurigere discretisatiemethode is.

Euler Modified

Een veelgebruikte discretisatiemethode is Euler Modified. Dit is ook een expliciete methode, maar heeft een hogere nauwkeurigheid, namelijk $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, [4]. Deze methode kost dan wel meer rekenwerk ten opzichte van Euler Voorwaarts, maar als nog relatief weinig rekenwerk ten opzichte van andere methoden. Denk hierbij aan bijvoorbeeld impliciete discretisatiemethoden. Bij Euler Modified werken wij met een zogenaamde predictor-correctorformule, wat een $M = 2$ oplevert bij de berekening van het aantal calculaties. Je moet namelijk zowel de predictor als de corrector berekenen. De predictor berekenen wij met behulp van Euler Voorwaarts, waarna wij deze uiteindelijk invullen in de correctorformule die is afgeleid uit de (impliciete) Trapeziummethode. De discretisatiemethode in het algemeen is

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}_j^{\tau+1} &= \mathbf{w}_j^\tau + \Delta t f(t^\tau, \mathbf{w}_j^\tau) && \text{Predictor} \\ \mathbf{w}_j^{\tau+1} &= \mathbf{w}_j^\tau + \frac{\Delta t}{2} (f(t^\tau, \mathbf{w}_j^\tau) + f(t^\tau, \bar{\mathbf{w}}_j^{\tau+1})) && \text{Corrector} \end{aligned}$$



Figuur 6: Numerieke benadering (rood) met Euler Modified en Upwinding
Exakte oplossing (blauw) van Methode van Karakteristieken

Hierbij is $f(t^\tau, w_j^\tau)$ wederom herleidt uit de rechterzijde van Vergelijking (10), die is terug te zien in Vergelijking (12). Wij hebben hier een tijdstap $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ en $h = 1000$ gridpunten. Dit geeft ons $\#c = 1913800$ berekeningen, hetzelfde als bij Euler Voorwaarts. Wij kunnen bij deze methode een grotere tijdsstap kiezen, aangezien Euler Modified één orde nauwkeuriger is dan Euler Voorwaarts. Door de grotere grotere tijdsstap konden wij weer het grid verfijnen, zodat wij weer op hetzelfde aantal berekeningen zouden komen. De uitkomst van de discretisatie is grafisch weergegeven in Figuur 6. Wederom hier weer in het blauw de exacte oplossing tegenover de numerieke benadering in het rood. Ook in dit figuur is te zien dat Upwind Differenties voor monotoniciteit zorgt, maar ook voor afvlakking van de oplossing. Ook is duidelijk te zien dat het verfijnen van het grid ervoor zorgt dat de puntform meer wordt behouden dan bij Euler Voorwaarts. De benadering ziet er nauwkeuriger uit en wanneer wij de gemiddelde fout berekenen wordt dit vermoeden bevestigd. Wanneer wij wederom de fout bepalen door middel van Formule (13), krijgen wij $e = 0.0077862$. Deze foutreductie is te danken aan het verfijnen van het grid,

¹Zie bijlage D

aangezien $h = 2\pi/1000$ een orde nauwkeuriger is dan bij Euler Voorwaarts. Verder vertelt de Richardson Extrapolatie ons dat er een nauwkeurigheid is van $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, zoals uit de literatuur bleek². De gekozen tijdstap en gridgrootte zorgt dus voor een stabiele oplossing.

Met deze gekozen tijdstap Δt en gridgrootte h kunnen wij kijken wat de totale fout e_{tot} wordt. Wij hebben met Euler Modified een orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, dus is de fout in de tijdsdiscretisatie $e_\tau = C \cdot 10^{-6}$. Hierbij is $C \in \mathbb{R}$ en groter dan 1. Verder hebben wij met Upwinding een orde $\mathcal{O}(h)$, dus geldt dat de fout in de plaatsdiscretisatie gelijk is aan $e_x = D \cdot 10^{-3}$, wederom met $D > 1$ een reëel getal. Hierdoor wordt is de totale fout gelijk aan

$$e_{\text{tot}} = C \cdot 10^{-6} + D \cdot 10^{-3}$$

Wij zien dat de grootste fout wordt veroorzaakt door Upwinding. Wij kunnen deze fout verkleinen door een fijner grid te nemen, maar wanneer wij dit doen moeten wij ook de tijdstap Δt verkleinen om voor een stabiele oplossing te zorgen. Wel is deze totale fout kleiner dan bij Euler Voorwaarts.

Wij kunnen nu concluderen dat de discretisatie door Euler Modified een stuk nauwkeuriger is dan wanneer wij Euler Voorwaarts toepassen. Dit komt doordat wij een nauwkeuriger grid konden nemen bij het toepassen van Euler Modified. Wij waren hiertoe in staat, aangezien wij een grotere tijdstap konden kiezen. Door de nieuwe combinatie van de tijdstap en grid grootte hadden wij even veel berekeningen als met Euler Voorwaarts, maar een nauwkeurigere numerieke benadering. Verder geldt dat wij Centrale Differenties kunnen combineren met Euler Modified. Dit komt misschien van pas bij de Ostrovsky Vergelijking, aangezien wij nog niet weten of er wel of geen schokgolf zal optreden. Wanneer dit niet het geval is, dan kunnen wij deze combinatie toepassen, met als resultaat een nauwkerigere numerieke benadering.

2.4 Conclusie

Met als doel om uiteindelijk de Ostrovsky Vergelijking numeriek te benaderen, zijn wij begonnen met het numeriek benaderen van de Burgers Vergelijking met de puntgolven als beginvoorwaarde. Allereerst hebben wij met de Methode van Karakteristieken de exacte oplossing bepaald van deze vergelijking. Deze exacte oplossing hebben wij vervolgens vergeleken met de Numerieke Oplossingen, verkregen door Upwind Discretisatie in de plaats en Euler Voorwaarts en Euler Modified in de tijd. De twee discretisatiemethoden in de tijd hebben wij met elkaar vergeleken, waarbij beide methoden hetzelfde aantal berekeningen hadden. Daarnaast hebben wij de uitkomst met Richardson Extrapolatie gecontroleerd.

Uit de literatuur volgt dat Euler Modified nauwkeuriger is. Dit wordt ook bevestigd door ons onderzoek. Bij eenzelfde aantal berekeningen is Euler Modified nauwkeuriger ten opzichte van Euler Voorwaarts. Dit is voornamelijk te danken aan het feit dat wij door de hogere orde nauwkeurigheid van Euler Modified het grid konden verfijnen. Door het fijnere grid werd de totale fout van Euler Modified kleiner dan van Euler Voorwaarts.

Naast deze genoemde voordelen van Euler Modified ten opzichte van Euler Voorwaarts, heeft Euler Modified nóg een voordeel. Wij kunnen namelijk Euler Modified combineren met Centrale Differenties. In het geval van de Burgers Vergelijking had dit geen nut,

²Zie bijlage D

aangezien er een schokgolf ontstaat bij de Burgers Vergelijking. Maar bij de Ostrovsky Vergelijking weten wij nog niet of er wel of geen schokgolf zal optreden. Wanneer dit niet het geval is, dan kunnen wij bovenstaande combinatie toepassen om zo tot een nauwkeurigere oplossing te komen. Wanneer wij numeriek de Ostrovsky Vergelijking willen benaderen, dan zullen wij dit met Euler Modified doen. Dit geeft een nauwkeurigere oplossing en wij kunnen eventueel Centrale Differenties toepassen als blijkt dat er geen sprake is van een schokgolf. Dit zullen wij uiteraard eerst onderzoeken met de combinatie Euler Modified en Upwind Differenties.

3 Ostrovsky Vergelijking

Wij hebben nu van de Burgers Vergelijking numeriek benaderd hoe de puntgolf zal voortbewegen. Echter, voor ons echte probleem moeten wij de voortbeweging numeriek bepalen van de Ostrovsky Vergelijking (14). Hierbij zien wij dat de inverse-afgeleide $\partial_x^{-1}u$ is toegevoegd aan de rechterkant van de vergelijking, ten opzichte van de Burgers Vergelijking (1). Dit is een verspreidingsterm, wat de kracht ondervonden van de rotatie van de aarde representeerd, [3].

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= \partial_x^{-1}u, & x \in (-\pi, \pi), & t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0, \end{cases} \quad (14)$$

De periodieke lopende golfbewegingen van de Ostrovsky Vergelijking zijn gegeven door $u(x, t) = U(x - ct)$, met $z = x - ct$. Hierbij is c de golfsnelheid en is U een begrensde 2π -periodieke golf met een gemiddelde gelijk aan nul³, [1]. De herleiding van lopende golven is uitgewerkt in Bijlage E, waarin ook het fasevlak staat van dit probleem. Wij krijgen het volgende grenswaardeprobleem

$$\begin{cases} [c + U(z)]U'(z) + (\partial_z^{-1}U)(z) = 0 & \text{Voor elke } z \in (-\pi, \pi) \text{ zodanig dat } U \neq c \\ U(-\pi) = U(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} U(z) dz = 0 \\ U(z + 2k\pi) = U(z), & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (15)$$

Hierbij is de integratieterm $(\partial_z^{-1}U)(z)$ weergegeven in Formule (16). Dit is een verspreidingsterm, die eventueel vermijdt dat een schokgolf zal ontstaan.

$$(\partial_z^{-1}U)(z) = \int_0^z U(z') dz' - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z U(z') dz' dz \quad (16)$$

Hierbij hebben wij de beginvoorwaarde $U_*(x) = \frac{1}{18}(3x^2 - \pi^2)$, die de puntgolven representeren. De golfsnelheid is gelijk aan $c = \pi^2/9$, zodat aan de Nul Gemiddelde eigenschap wordt voldaan. De beginvoorwaarde $U_*(z)$ is bovendien een oplossing van de Ostrovsky Vergelijking³. Dat wil zeggen dat dit soort golven wiskundig gezien bestaan. Wij weten alleen niet hoe het verloop van deze golven zal zijn. Zal de golf breken of wordt het een gladde periodieke golf?

Wij weten het verloop van de golf niet door een eigenschap van de Ostrovsky Vergelijking. Uit een Stelling uit Verslag [2], bladzijde 3, volgt dat wanneer de beginvoorwaarde u_0 glad is, de globale oplossingen bestaan als

$$m_0(x) := 1 - 3u_0''(x) > 0 \quad (17)$$

voor elke x . De golf breekt wanneer het teken van $m_0(x)$ onbepaald is. Wanneer wij $u_0 = U_* = (3z^2 - \pi^2)/18$ invullen, dan volgt $U_*''(z) = 1/3$. Dit houdt in dat $m_0 = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$ voor alle $z \in (-\pi, \pi)$. Hieruit volgt voor de puntgolven dat $m_0 = 0$, behalve in de punt. Hierdoor kunnen wij niet analytisch het verloop van de golf bepalen.

Wij willen wel graag het verloop van deze golf weten. Een manier om hier achter te komen, is om de oplossing van Vergelijking (14) numeriek te benaderen. Wanneer wij numeriek de oplossing van de Ostrovsky Vergelijking benaderen, hebben wij het meeste werk al gedaan bij de Burgers Vergelijking in Hoofdstuk 2. Wij moeten alleen nog de

³Dit behandelen wij in Sectie 3.1

inverse-afgeleide $\partial_x^{-1}u$ discretiseren. Dat gaan wij doen met de Trapeziumregel. Dit is een methode met orde $\mathcal{O}(h^2)$ nauwkeurigheid. Wij kunnen ook Simpson's regel gebruiken om de integraal te bepalen. Dit is een nauwkeurigere methode, namelijk met orde $\mathcal{O}(h^4)$. Nu is de Trapeziumregel al een methode met redelijke nauwkeurigheid en dus beperken wij ons tot deze methode.

3.1 Eigenschappen

Zoals eerder genoemd heeft de Ostrovsky Vergelijking meerdere eigenschappen. Door middel van deze eigenschappen zullen wij uiteindelijk kijken of het gedrag van onze numerieke benadering ook aan deze eigenschappen voldoet. Allereerst tonen wij aan dat de puntgolven daadwerkelijk een oplossing is van de Ostrovsky Vergelijking. Dit doen wij door simpelweg $U_*(z)$ in te vullen in Vergelijking (15). Daarna gaan wij kijken naar eigenschappen die wij nodig zullen hebben voor het controleren van onze numerieke benadering. Dat zijn de Nul Gemiddelde eigenschap en het voorspellen van het gedrag wat een beginvoorwaarde $u_0(x)$ vertoont op basis van $m_0(x)$ uit Formule (17).

Oplossing puntgolven

De oplossing van de Ostrovsky vergelijking voor de puntgolven is gelijk aan $U(z) = (3z^2 - \pi^2)/18$. Wij gaan aantonen dat dit ook daadwerkelijk een oplossing is voor de vergelijking door de oplossing in te vullen in Vergelijking (15).

$$\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{3z^2 - \pi^2}{18}\right) \frac{z}{3} + (\partial_z^{-1}U)(z) = -\frac{z^3}{18} + \frac{\pi^2 z}{18} + (\partial_z^{-1}U)(z)$$

Wij willen nu dus dat $z^3/18 - \pi^2 z/18 = (\partial_z^{-1}U)(z)$. Dit gaan wij controleren door $U(z) = (3z^2 - \pi^2)/18$ in te vullen in $(\partial_z^{-1}U)(z)$.

$$\begin{aligned} (\partial_z^{-1}U)(z) &= \int_0^z \frac{3(z')^2 - \pi^2}{18} dz' - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z \frac{3(z')^2 - \pi^2}{18} dz' dz \\ &= \frac{z^3}{18} - \frac{\pi^2 z}{18} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z')^3 - \pi^2 z'}{18} dz' \\ &= \frac{z^3}{18} - \frac{cz}{2} \end{aligned} \tag{18}$$

Wij zien in (18) dat dit inderdaad waar is, dus kunnen wij concluderen dat $U(z) = (3z^2 - \pi^2)/18$ een oplossing is van de Ostrovsky vergelijking, die ook aan onze beginvoorwaarde voldoet.

Nul Gemiddelde

Wij zien in de Ostrovsky Vergelijking (15) terug dat $U(z)$ een gemiddelde gelijk aan nul heeft, dus dat $\int_{-\pi}^{\pi} U(z) dz = 0$. De inverse-afgeleide term $\partial_x^{-1}U$, terug te zien in Vergelijking (16), moet ook voldoen aan deze eigenschap. De inverse-afgeleide is de primitieve van $U(z)$, dus $\int_0^z U(z') dz'$. Een primitieve is uniek op een constante na, dus om de inverse-afgeleide uniek te maken moeten wij deze aanpassen aan de Nul Gemiddelde eigenschap. Dit doen wij door $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z U(z') dz' dz$ van deze primitieve af te trekken. Hierdoor is ook het gemiddelde van de inverse-afgeleideterm gelijk aan nul. Dit tonen wij aan. Daarvoor gaan wij de integraal nemen over z in het interval $[-\pi, \pi]$. Daarbij tonen wij aan dat de

totale oppervlakte onder de functie gelijk is aan 0. De berekening daarvan is terug te zien in (19).

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\partial_z^{-1} U)(z) \, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z U(z') \, dz' \, dz - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z U(z') \, dz' \, dz \, dz \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z U(z') \, dz' \, dz - \frac{2\pi}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z U(z') \, dz' \, dz \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z U(z') \, dz' \, dz - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z U(z') \, dz' \, dz = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Voorspellen gedrag beginvoorwaarde

Uit de literatuur bleek dat wij het gedrag van het verloop van de puntgolven niet kunnen voorspellen. Een Stelling uit Verslag [2], bladzijde 3, volgt dat wanneer de beginvoorwaarde u_0 glad is, de globale oplossingen bestaan als

$$m_0 := 1 - 3u_0''(x) > 0$$

voor elke x . Wanneer het teken van m_0 onbepaald is, dan zal de golf na verloop van tijd breken. Aangezien voor de beginvoorwaarde van de puntgolven, $U_*(z)$, volgt dat $m_0 = 0$ behalve in de punt, kunnen wij niet het verloop van de golf voorspellen. Wij kunnen echter wel het gedrag van andere gladde, periodieke golven bestuderen, met als doel het controleren van de numerieke benadering van de Ostrovsky Vergelijking.

Hierbij kijken wij naar $f_1(x) = \cos(x)$ en $f_2(x) = \cos(x)/4$. Beide zijn dit gladde functies die 2π -periodiek zijn en een gemiddelde gelijk aan nul hebben. Wij krijgen hierdoor dat voor $u_0 = f_1$ geldt dat het teken van m_0 onbepaald is, en voor $u_0 = f_2$ dat $m_0 > 0$. Dat houdt dus in dat de golven van f_1 na verloop van tijd zullen breken en dat de golven van f_2 glad blijven en wegzakken. Wij zullen deze bevinding uiteindelijk controleren bij de numerieke benadering, om meer zeker te zijn over het uiteindelijke verloop van de puntgolven.

3.2 Numerieke Integratie

Om de stap van de Burgers Vergelijking naar de Ostrovsky Vergelijking te maken, moeten wij de inverse-afgeleide term toevoegen. Deze term is weergegeven in Formule (16). Hierbij is te zien dat er drie integralen uitgerekend moeten worden. Deze integralen gaan wij numeriek bepalen door middel van de Trapeziumregel in (20).

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{2} (f(b) + f(a)) \tag{20}$$

Deze regel heeft een fout van $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, waarbij $\Delta x = b - a$, [4]. Wij gaan eerst numeriek $I_1(z) = \int_0^z u(z') \, dz'$ bepalen, aangezien die term ook in de rechter integraal van Formule (16) staat. Merk hierbij op dat wanneer $z < 0$, het teken voor de integraal verandert. Dat houdt in dat de integraal wordt vermenigvuldigd met -1 . Dit zorgt ervoor dat wij uiteindelijk deze integraal kunnen opdelen in twee verschillende integralen, namelijk wanneer $z < 0$ en wanneer $z \geq 0$. Het principe is hetzelfde, behalve dat het teken verschilt. Wij behandelen eerst het geval wanneer $z > 0$.

Wanneer wij de Trapeziumregel toepassen, krijgen wij $\int_0^z u(z') dz' \approx z/2 \cdot (u(z) + u(0))$. Deze benadering wordt echter onnauwkeurig wanneer z te ver weg ligt van 0. De orde van de fout is namelijk $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, dus een te grote Δx , geeft te grote fouten. Om dit op te lossen gebruiken wij de samengestelde integratieregels, waarbij wij de integraal bepalen door het interval $(0, z)$ onder te verdelen in subintervallen. Wij bepalen met de Trapeziumregel de integraal van elk subinterval, om deze integralen uiteindelijk bij elkaar op te tellen om de gehele integraal terug te krijgen. Wij zullen hierbij gebruik maken van ons bestaande grid, waarbij alle gridpunten op gelijke afstand staan. Dat houdt in dat $b - a = h$ voor elke integraal. Deze nieuwe benadering is terug te zien in Formule (21). Hierbij is z_i de x -coördinaat tot waar je integreert en geeft k de eerste $z \geq 0$ aan. Merk hierbij op dat $i \geq k$. Zo krijgen wij alleen de positieve z .

$$\int_0^{z_i} u(z') dz' \approx \frac{h}{2} \sum_{j=k}^i (u(z_{j-1}) + u(z_j)) \quad (21)$$

Echter, z kan ook negatief zijn. Zoals eerder vermeld moeten wij dan letten op het teken van de integraal. Deze wordt nu $-\int_{z_i}^0 u(z') dz'$. Wij behandelen deze integraal op dezelfde manier als wanneer $z \geq 0$. Het resultaat is terug te zien in Formule (22). Merk hierbij op dat $i < k$ en dat $z_0 = z_n$ door periodiciteit.

$$-\int_{z_i}^0 u(z') dz' \approx -\frac{h}{2} \sum_{j=i}^{k-1} (u(z_{j-1}) + u(z_j)) \quad (22)$$

Nu wij numeriek $I_1(z) = \int_0^z u(z') dz'$ hebben bepaald, gaan wij door met $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} I_1(z) dz$. Ook hierbij maken wij gebruik van de samengestelde Trapeziumregel. Hier integreren wij over het gehele grid, dus van z_1 tot en met z_n . Merk wederom op dat $z_0 = z_n$ door periodiciteit. Dit geeft ons de integraal I_2 , weergegeven in Formule (23). Deze integraal is een constante, dus is voor elk punt op het grid hetzelfde.

$$\int_{-\pi}^{\pi} I_1(z) dz \approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n (I_1(z_{j-1}) + I_1(z_j)) \quad (23)$$

Wij hebben nu met de samengestelde Trapeziumregel de inverse-afgeleide term $\partial_x^{-1} u$ numeriek benaderd. Deze numerieke benadering voegen wij toe aan de al reeds gediscrètiseerde Burgers Vergelijking, om zo tot de Ostrovsky Vergelijking te komen. Van (de oplossingen van) de Ostrovsky Vergelijking weten wij enkele eigenschappen, zie Sectie 3.1. Door middel van deze eigenschappen kunnen wij controleren of de inverse-afgeleide term goed numeriek is benaderd, zodat wij weten of de Ostrovsky Vergelijking goed is benaderd. Hierbij gebruiken wij voor de discretisatie in de tijd Euler Modified. Voor de discretisatie in de plaats passen wij eerst Upwinding toe. Als blijkt dat er geen sprake is van een schokgolf, dan passen wij Centrale Differenties toe voor de plaatsdiscretisatie. Dit is namelijk een nauwkeurigere methode dan Upwinding. Met behulp van Richardson kijken wij wederom of de gekozen tijdsstap en gridgrootte voor een stabiele oplossing zorgt.

3.3 Controleren numerieke benadering

Het is belangrijk om te controleren of de numerieke benadering wel klopt. Je kan er niet vanuit gaan dat je geen fouten hebt gemaakt bij de implementatie. Bij de Burgers Vergelijking hebben wij met behulp van de Methode van Karakteristieken kunnen kijken of

deze goed geïmplementeerd is. Dit is het linker deel van de Ostrovsky Vergelijking (14). Wij weten dus dat dit deel goed is gediscrètiseerd. Echter, voor de Ostrovsky Vergelijking voegen wij de inverse-afgeleide term $\partial_x^{-1}u$ toe. Wij moeten dus controleren of dit correct gediscrètiseerd en geïmplementeerd is. Dit kunnen wij helaas niet met de Methode van Karakteristieken doen. De quasilineaire Ostrovsky Vergelijking in combinatie met de beginvoorwaarde U_* zorgt voor zeer ingewikkelde analyse. In volgend onderzoek zal hier meer aandacht aan besteed kunnen worden, waarbij meer ingegaan kan worden op de zeer ingewikkelde analyse. Wij zullen dus op andere manieren moeten controleren of de numerieke benadering klopt.

Eerder hebben wij enkele eigenschappen van de Ostrovsky Vergelijking en de puntgolven gezien. Dit zijn de Nul Gemiddelde eigenschap en het feit dat wij met behulp van m_0 , in (17) gedefinieerd, de voortbeweging kunnen voorspellen. Naast deze eigenschappen kunnen wij met behulp van Richardson Extrapolatie kijken of de gekozen tijdstap en gridgrootte voor stabiliteit zorgt. Tenslotte kunnen wij de numerieke oplossing vergelijken met de puntgolf die wij laten meebewegen.

Richardson Extrapolatie

Zoals wij ook al bij de Burgers Vergelijking hadden gedaan, gaan wij nu Richardson Extrapolatie⁴ toepassen op de puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking. Hierbij kijken wij naar de numerieke benadering op $T = 1$ seconden. Dit doen wij met als doel te kijken voor welke combinatie van tijdsstap Δt en gridgrootte h de numerieke benadering stabiel is en de gewenste nauwkeurigheid heeft. Wij willen namelijk niet een te grote Δt en h kiezen, want dan is de oplossing niet zo nauwkeurig. Wij willen ook niet een te kleine Δt en h , want dat kost veel rekentijd. Wij zoeken dus een tijdsstap en gridgrootte die een voldoende nauwkeurige oplossing geeft, zonder dat het al te veel rekenvermogen kost.

Wij bekijken Euler Modified met Upwinding. Voor een tijdsstap $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ en $h = 2\pi/600 \approx 1 \cdot 10^{-2}$ geldt dat $p = 2.0015$ na 1 seconde, of 1000 tijdsiteraties. De geschatte fout $y(t) - w_N^{\Delta t} = 4.5 \cdot 10^{-5}$. Deze geschatte fout komt overeen met de orde van $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

Bij Euler Modified weten wij dat deze methode een orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ heeft, dus zal de fout in de tijd $e_\tau = C \cdot 10^{-6}$ zijn. Verder weten wij van Upwind Differenties en de Trapeziumregel dat deze respectievelijk orde $\mathcal{O}(h)$ en $\mathcal{O}(h^2)$ hebben. Dat houdt dus in dat $e_x = D_1 \cdot 10^{-2} + D_2 \cdot 10^{-4}$ is. De totale fout wordt dan

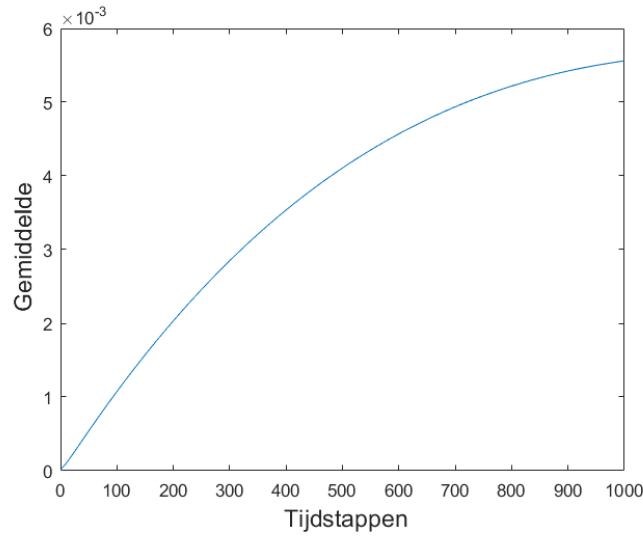
$$e_{\text{tot}} = C \cdot 10^{-6} + D_1 \cdot 10^{-2} + D_2 \cdot 10^{-4}$$

Wij zien dus dat de grootste fout wordt veroorzaakt door Upwinding. Wanneer blijkt dat er geen schokgolf zal ontstaan bij het verloop van de puntgolven, dan kunnen wij Centrale Differenties toepassen in plaats van Upwind Differenties. Deze methode heeft een hogere orde, namelijk $\mathcal{O}(h^2)$, waardoor de discretisatie nauwkeuriger zal worden.

Nul Gemiddelde

Voor periodiek bewegende golven in de Ostrovsky Vergelijking geldt dat er een Nul Gemiddelde eigenschap is. Deze eigenschap is terug te zien in Vergelijking (15), waarbij moet

⁴Zie bijlage D



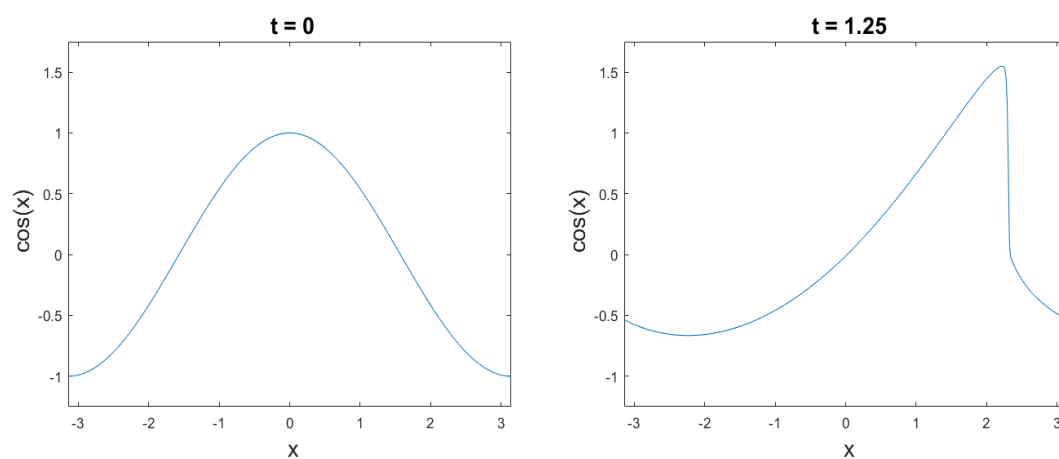
Figuur 7: Het gemiddelde van de numerieke oplossing w van de puntgolven

gelden $\int_{-\pi}^{\pi} U(z) dz = 0$. Wij gaan controleren of het numerieke model van de puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking voldoet aan deze eigenschap. Dit doen wij met het numerieke model waar wij voor de tijdsdiscretisatie Euler Modified toepassen en voor de plaatsdiscretisatie Upwind Differenties. Uit Richardson Extrapolatie bleek dat voor $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ en $h = 2\pi/600 \approx 1 \cdot 10^{-2}$ de benadering stabiel is. Wij zullen de integraal $\int_{-\pi}^{\pi} U(z) dz$ gaan bepalen met behulp van de samengestelde Trapeziumregel, terug te lezen in Sectie 3.2, in combinatie met deze Δt en h .

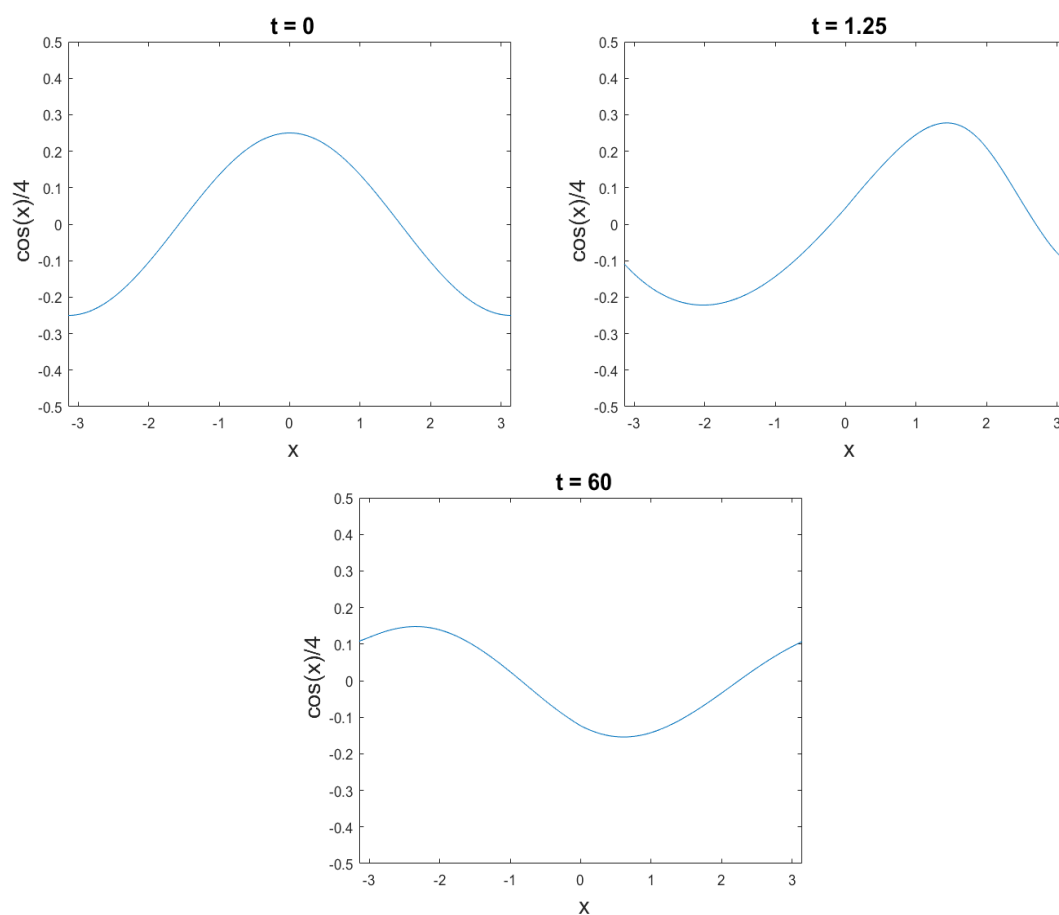
Wij berekenen het gemiddelde van de numerieke oplossing w voor de eerste 1000 tijdstappen, wat gelijk staat aan 1 seconde. Dit is weergegeven in Figuur 7. Hierbij is te zien dat het gemiddelde in de eerste seconde beneden de $6 \cdot 10^{-3}$ blijft. Dit is een mooi resultaat voor de gekozen stapgrootte h en tijdstap Δt . Bij het numeriek integreren en discretiseren in de plaats en tijd ontstaan er altijd fouten. Het gemiddelde is dan niet gelijk aan nul, maar dat is te verklaren door de afbreekfout ontstaan door het numeriek benaderen van de oplossing.

Gedrag beginvoorwaarde

Wanneer wij een gladde, periodieke beginvoorwaarde hebben met een Nul Gemiddelde eigenschap, dan kunnen wij het verloop van deze golf voorspellen. Hierbij maken wij gebruik van m_0 , gedefinieerd in Formule (17). Zoals eerder is toegelicht in Sectie 3.1, weten wij van $f_1(x) = \cos(x)$ dat deze zal breken, en weten wij van $f_2(x) = \cos(x)/4$ dat dit een gladde golfbeweging blijft. Wij vullen f_1 en f_2 in als beginvoorwaarden, waarna wij kijken of het numerieke model het voorspelde gedrag vertoont. Dit doen wij met Euler Modified en Upwinding, aangezien wij eventueel te maken hebben met een schokgolf. Merk op dat alleen Upwinding gebruikt kan worden in de buurt van een schokgolf, door het behoudt van monotoniciteit.



Figuur 8: Het verloop van $\cos(x)$, waarbij de golf breekt



Figuur 9: Het verloop van $\cos(x)/4$. Na 1 minuut is de golf nog steeds glad

Wij bekijken eerst $f_1 = \cos(x)$. Het verloop is terug te zien in Figuur 8. Wij zien dat er na $t = 1.25$ seconden aan de rechter kant een steile helling vormt. Dit houdt in dat de golf is gebroken, zoals te verwachten was uit de literatuur.

Vervolgens bekijken wij $f_2 = \cos(x)/4$, waarvan wij verwachtten dat de golf glad blijft. Hiervoor bekijken wij de golf op $t = 1.25$ seconden, waar f_1 brak, en bekijken wij de oplossing na $t = 60$ seconden. Als de golf dan nog geen breekpatroon vertoont, oftewel een zeer steile negatieve helling, dan gaan wij ervan uit dat deze golf glad blijft. Het verloop is terug te zien in Figuur 9. Hierin is inderdaad terug te zien dat de golf glad blijft. Verder is te zien dat de amplitude afneemt, waarschijnlijk veroorzaakt door de inverse-afgeleidederm. Deze term heeft een gladstrijkend, ofwel dispersief, karakter. Er volgt dus dat de dispersie sterker is dan de niet-lineaire term uu_x , die het samenbrengen van het water omschrijft⁵. Nu is het echter zo dat de oplossingen van de lopende golven in de Ostrovsky Vergelijking gladde periodieke golven zijn, die niet afnemen in amplitude. Een verklaring is dat de numerieke model een kunstmatige dispersie kan veroorzaken. Verder komt het gedrag van de beginvoorwaarden overeen met de voorspelling.

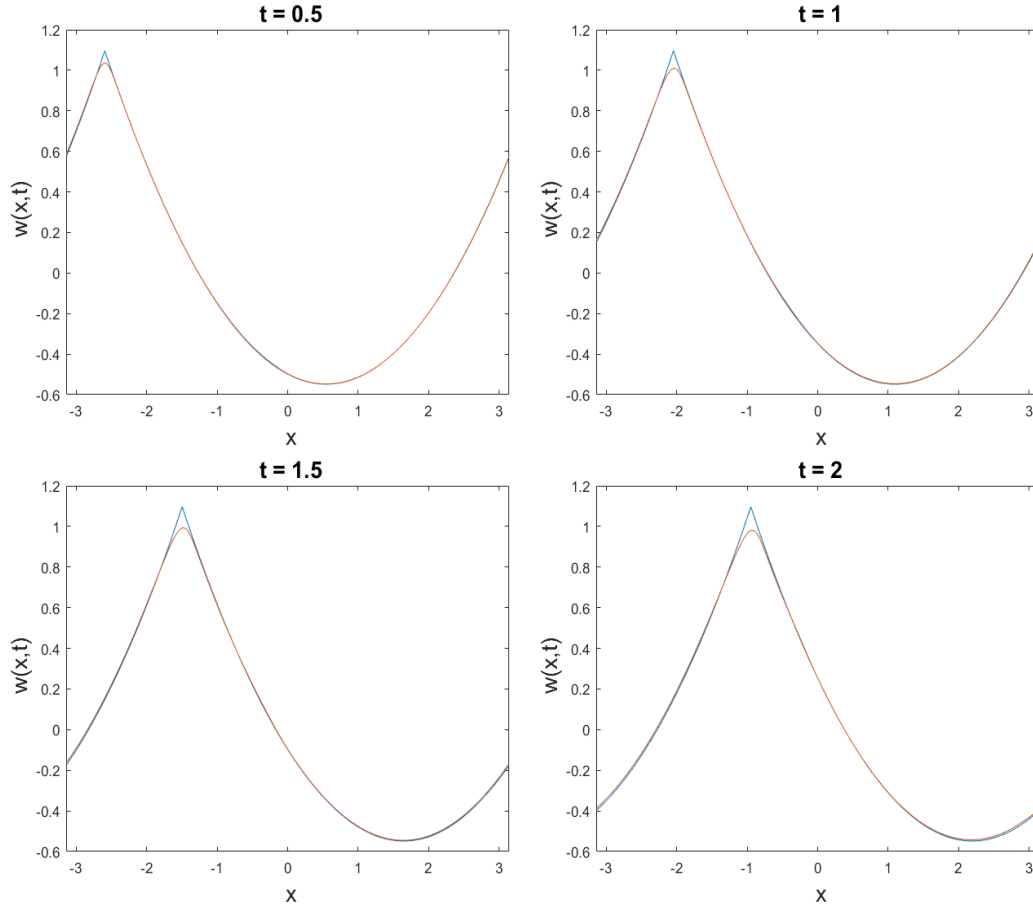
Doordat de twee beginvoorwaarden f_1 en f_2 hetzelfde gedrag vertonen in de numerieke benadering als wat de literatuur voorspelt, wordt de verwachting dat het numerieke verloop van de puntgolven het correcte verloop zal zijn versterkt. Wij hebben natuurlijk maar twee beginvoorwaarden gecontroleerd. Toch is de bevestiging dat deze beginvoorwaarden het juiste gedrag vertonen van nut. Wanneer ze niet de juiste voortbeweging hadden, dan was er zeker iets mis met het numerieke model. De bevestiging dat de voortbewegingen overeenstemmen met de literatuur, bekrachtigt het numerieke model en het idee dat de voortbeweging van de puntgolven goed voorspeld kan worden. Verder concluderen wij hieruit dat de implementatie van de numerieke methode tot dusver van deze belangrijke modeltesten succesvol heeft doorstaan.

Vergelijking met puntgolf

In tegenstelling tot de Burgers Vergelijking, kunnen wij bij de Ostrovsky Vergelijking niet de Methode van Karakteristieken toepassen. Om toch een beeld te krijgen of het verloop van de numerieke benadering enigszins overeenkomt met die van de puntgolf, verplaatsen wij deze puntgolf met bijbehorende snelheid. Wij kunnen dit doen, aangezien de oplossing van de puntgolf in de vorm $U_*(x - ct) = u_*(x, t)$ is. Hierbij is $z = x - ct$ en is de snelheid van de golf $c = \pi^2/9$. Wij kunnen deze puntgolf dus verplaatsen door elke tijdstap elk gridpunt x_i te verplaatsen: $x_i = \bar{x}_i - ct$. Hierbij is $\bar{x}$ het grid die wij gebruiken bij de numerieke discretisatie.

Wij gaan deze verplaatsing van de puntgolf vergelijken met de numerieke benadering. Hierdoor kunnen wij zien hoe goed de puntvorm wordt benaderd en of de numerieke benadering dezelfde voortbewegingssnelheid heeft als de puntgolf. In Figuur 10 is deze vergelijking te zien. Hierbij is in het rood de numerieke benadering weergegeven en in het blauw de verplaatsing van de puntgolf. Wij zien hierbij dat de snelheid van de numerieke benadering overeenstemt met die van de verplaatsing van de puntgolf, dus de snelheid $c = \pi^2/9$. Verder zien wij dat de puntvorm van de numerieke benadering in de loop van de tijd meer afzwakt. In het begin heeft de numerieke benadering nog meer een puntvorm

⁵Merk op dat de Ostrovsky Vergelijking is herleidt uit de Korteweg-de Vries Vergelijking, zie Bijlage A



Figuur 10: Het verloop van de numerieke benadering w in het rood vergeleken met de verplaatsing van de puntgolf in het blauw

dan in verloop van de tijd. Dit heeft te maken met de inverse-afgeleide term, die werkt als dispersieterm. Dit zorgt voor afvlakking van de oplossing. Het ziet er dus uit dat de numerieke oplossing goed het gedrag aanneemt van de daadwerkelijke oplossing. Merk hierbij op dat de blauwe puntgolf in Figuur 10 de exacte oplossing is van de lopende golven in Ostrovsky, met snelheid $c = \pi^2/9$. Verder zien wij dat er géén schokgolf ontstaat. Dit betekent dat wij in plaats van Upwind, Centrale Differenties kunnen toepassen. Dit zorgt voor een hogere orde nauwkeurigheid, namelijk $\mathcal{O}(h^2)$, wat ervoor zorgt dat de numerieke benadering nauwkeuriger is dan wanneer wij Upwinding toepassen. Wij zullen dan de resultaten bekijken van de Centrale Differenties en Euler Modified. Dit geeft ons een beter beeld van het verloop van de puntgolf dan wanneer wij Upwinding gebruiken.

Wij hebben nu op verschillende manieren gecontroleerd of het numerieke model van de puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking correct is. Uit Richardson Extrapolatie bleek dat de gekozen tijdsstap $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ en stapgrote $h = 2\pi/600 \approx 1 \cdot 10^{-2}$ voor een stabiele oplossing zorgt. Daarbij kwam wel de opmerking dat Centrale Differenties voor

een kleinere fout zorgt ten opzichte van Upwinding. Wij kunnen echter pas Centrale Differenties gebruiken wanneer wij zeker weten dat er geen sprake zal zijn van een schokgolf bij het verloop van de puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking. Vervolgens hebben wij gecontroleerd of het numerieke model voldoet aan de Nul Gemiddelde eigenschap. Het gemiddelde van de numerieke benadering bleef onder $6 \cdot 10^{-3}$, wat redelijk goed 0 benaderd wanneer je kijkt naar de gebruikte tijdsstap en gridgrootte. Daarnaast vertoonde het numerieke model hetzelfde gedrag als uit de literatuur volgt, wanneer wij bepaalde beginvoorwaarden invulden. Tenslotte vergeleken wij de verplaatsing van de puntgolf met de numerieke benadering. Hieruit bleek dat de numerieke benadering dezelfde snelheid heeft als de puntgolf en dat het puntprofiel afzwakt gedurende de tijd. Dit is te verklaren door de inverse-afgeleide wat een verspreidingsterm is of door het numerieke model die voor afvlakking zorgt.

Wij kunnen concluderen dat het numerieke model, met tijdsstap $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ en stapgrootte $h \approx 1 \cdot 10^{-2}$, een voldoende nauwkeurige representatie is van het verloop van de puntgolf. Hierbij is dus de verwachting dat de puntgolf vervormt naar een gladde golf en dan verder afvlakt in de tijd. Wij zullen Upwinding vervangen door Centrale Differenties, zodat wij een nauwkeurigere benadering krijgen.

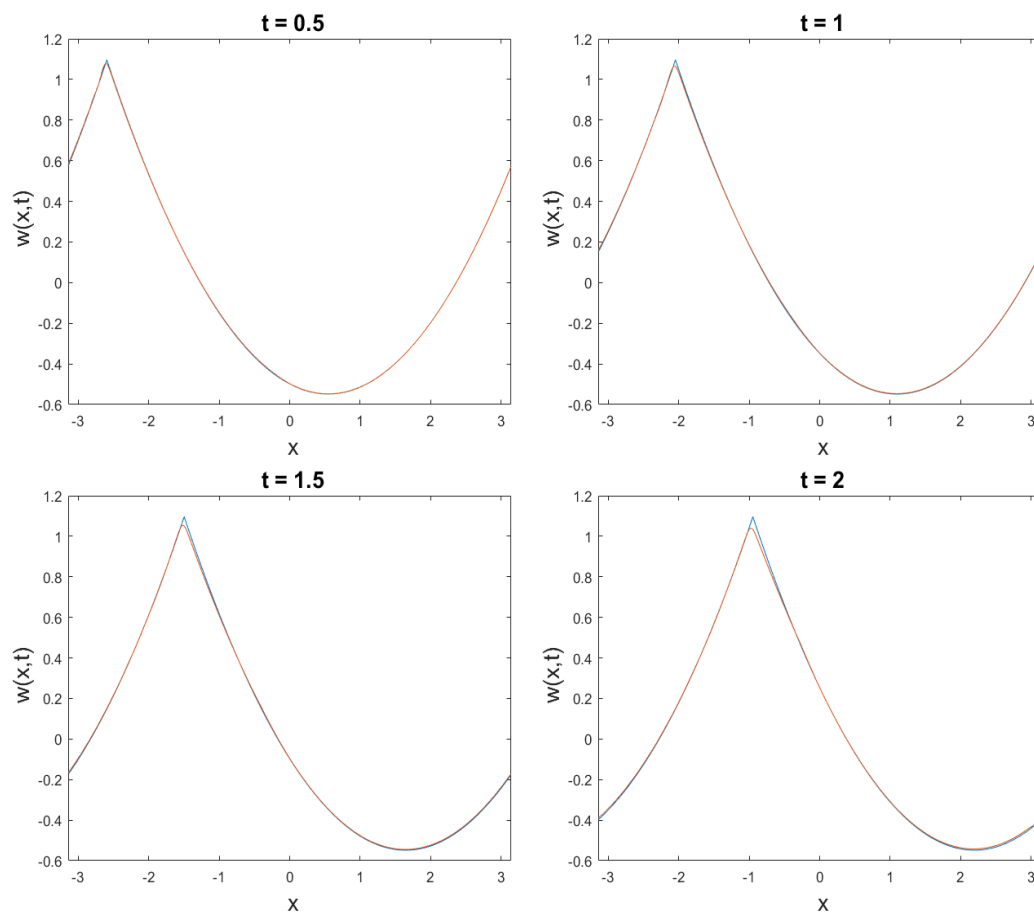
3.4 Resultaten numerieke model

Wij hebben nu de stap van de Burgers Vergelijking naar de Ostrovsky Vergelijking gemaakt. Hierbij hebben wij de inverse-afgeleide term ∂_x^{-1} numeriek benaderd met de Trapeziumregel. Het numerieke model van de Ostrovsky Vergelijking hebben wij niet kunnen controleren met behulp van de Methode van Karakteristieken. Toch hebben wij met behulp van bepaalde eigenschappen van de puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking kunnen controleren of het gedrag van het numerieke model overeenkomt met dat van de exacte oplossing. Hierbij hebben wij Upwinding gebruikt bij de plaatsdiscretisatie en Euler Modified bij de tijdsdiscretisatie. Toen wij de numerieke benadering gingen vergelijken met de verplaatsing van de puntgolf, zijn wij erachter gekomen dat de benadering mooi meebeweegt en dat er geen schokgolf optreedt. Doordat er geen sprake is van een schokgolf, kunnen wij Upwinding vervangen door Centrale Differenties als plaatsdiscretisatie. Hiermee winnen wij een orde nauwkeurigheid. Upwinding heeft namelijk een nauwkeurigheid $\mathcal{O}(h)$ en Centrale Differenties $\mathcal{O}(h^2)$. Hierdoor is bij hetzelfde grid en dezelfde tijdsstap de oplossing nauwkeuriger. Wij gebruiken dus $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ en $h = 2\pi/600$. Wij controleren met Richardson Extrapolatie of deze tijdsstap en grid zorgen voor een stabiele oplossing. Hierin zien wij terug dat de geschatte orde van nauwkeurigheid van Euler Modified gelijk is aan $p = 2.0523$ na 1 seconde. De geschatte fout $y(t) - w_N^{\Delta t} = 3.4 \cdot 10^{-4}$. Dit komt overeen met de orde van Euler Modified, namelijk $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

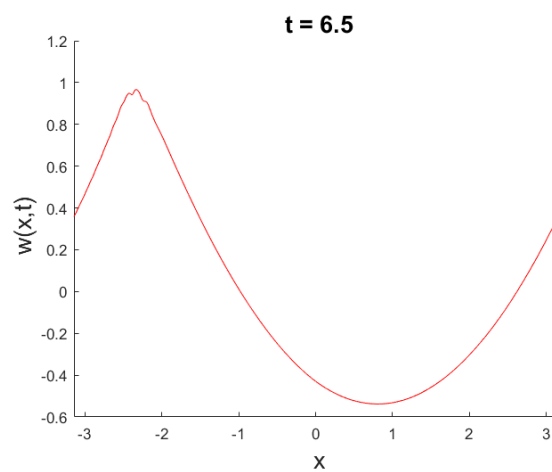
Bij het analyseren van de eventuele fouten, kijken wij naar de gebruikte methoden. Wij gebruiken Euler Modified, Centrale Differenties en de Trapeziumregel, die respectievelijk orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\mathcal{O}(h^2)$ en $\mathcal{O}(h^2)$ hebben. Hieruit volgt dat de totale fout gelijk zal zijn aan

$$e_{\text{tot}} = C \cdot 10^{-6} + D \cdot 10^{-4}$$

Hierbij zijn $C, D > 1$. Aangezien Centrale Differenties en de Trapeziumregel dezelfde orde hebben, is er maar één constante nodig om de fout te omschrijven, namelijk D . Wij zien dat de algehele fout kleiner zal zijn dan wanneer wij Upwinding gebruiken voor de plaatsdiscretisatie.



Figuur 11: Het verloop van de numerieke benadering w in het rood vergeleken met de verplaatsing van de puntgolf in het blauw



Figuur 12: De numerieke benadering na 1 periode of 6.5 seconden

In Figuur 11 is terug te zien dat de benadering nauwkeuriger is wanneer wij Centrale Differenties gebruiken in plaats van Upwinding. Er is goed te zien dat de puntvorm in het begin meer behouden blijft dan wanneer wij Upwinding toepassen. Dat heeft te maken met het feit dat Upwinding een lagere orde nauwkeurigheid heeft. Hierdoor wordt de numerieke benadering rondom punten met een grote helling afgevlakt. Dit is dus ook het geval bij de punt van de puntgolf. Wanneer wij dus een discretisatiemethode met een hogere nauwkeurigheid toepassen, zal de punt van de puntgolf beter worden gerepresenteerd. Merk verder op dat het gedrag van de golf in de verbeterde numerieke benadering hetzelfde is als wanneer wij Upwinding toepassen. De puntgolf valt terug naar een gladde golf en zal met de tijd afnemen in amplitude. Verder is in Figuur 12 de numerieke benadering van de puntgolf na 6.5 seconden te zien. Hierbij is de golf één periode verplaatst. Merk op dat de numerieke benadering na 6.5 seconden minder nauwkeurig is dan in het begin. Zo is er is er rondom de top van de golf te zien dat er geen behoud van monotoniciteit meer is.

4 Conclusie

Om het onbekende verloop van de Puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking te bepalen, is een numeriek model opgesteld die het gedrag van de Puntgolven moet representeren. Hierbij hebben wij eerst de meer eenvoudige Burgers Vergelijking gediscrètiseerd. Wij kunnen eenvoudig de stap van de Burgers Vergelijking naar de Ostrovsky Vergelijking maken door de gediscrètiseerde inverse-afgeleideterm toe te voegen aan het model.

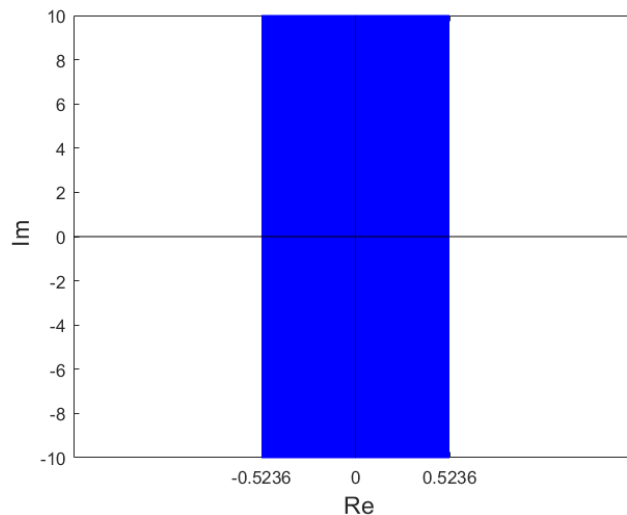
Bij de Burgers Vergelijking zagen wij dat Centrale Differenties bij de plaatsdiscrètisatie problemen opleverden. Dit komt doordat deze manier van discrètiseren niet kan omgaan met de schokgolf die bij de Burgers Vergelijking optreedt. Upwind Differenties was de oplossing, maar dit is wel een minder nauwkeurige methode dan Centrale Differenties. Verder vergeleken wij Euler Voorwaarts met Euler Modified voor de tijdsdiscrètisatie. Hieruit bleek dat Euler Modified bij hetzelfde aantal berekeningen nauwkeuriger was dan Euler Voorwaarts. Onze voorkeur gaat uit naar de combinatie Euler Modified en Upwinding voor de discrètisatie van de Burgers Vergelijking. Dit model hebben wij gecontroleerd met de exacte oplossing verkregen uit de Methode van Karakteristieken, waaruit bleek dat de fout gelijk is aan $e = 0.007786$. Dit kwam overeen met de foutanalyse. De grootste fout werd veroorzaakt door Upwinding. Het liefste willen wij bij de discrètisatie van de Ostrovsky Vergelijking dus Centrale Differenties toepassen, voor een foutreductie. Voor de tijdsdiscrètisatie gebruiken wij Euler Modified.

Met de Trapeziumregel is de inverse-afgeleide gediscrètiseerd, waarna wij deze hebben toegevoegd aan het model van de Burgers Vergelijking. Het nieuwe model, gebruikmakende van Euler Modified en Upwinding, hebben wij gecontroleerd met behulp van een aantal eigenschappen van de Ostrovsky Vergelijking. Hieruit bleek dat het gedrag van de Puntgolf gerepresenteerd werd én dat er géén schokgolf ontstond. Daardoor kon Centrale Differenties worden toegepast, wat tot een foutreductie leidde. Hierbij is een geschatte fout $e_{\text{tot}} = C \cdot 10^{-6} + D \cdot 10^{-4}$. Dit model, gebruikmakende van de Trapeziumregel, Euler Modified en Centrale Differenties, toonde aan dat de Puntgolf verandert in een gladde, periodieke golf.

5 Discussie en aanbevelingen

Bij dit onderzoek hebben wij verschillende numerieke methoden toegepast voor het benaderen van de oplossing van de Puntgolven in de Ostrovsky Vergelijking. Nu is Centrale Differenties toegepast voor de plaatsdiscretisatie. Deze methode heeft orde $\mathcal{O}(h^2)$, wat een orde nauwkeuriger is dan Upwinding. Dit zal zorgen voor een betere representatie van de puntgolf, dan wanneer Upwinding toegepast zou worden. Daarnaast is de Trapeziumregel toegepast voor de discretisatie van de inverse-afgeleideterm. Deze methode heeft orde $\mathcal{O}(h^2)$. Tenslotte hebben wij Euler Modified toegepast voor de tijdsdiscretisatie, met orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Nu zouden wij voor de discretisatie van de inverse-afgeleideterm ook Simpsons's regel [4] kunnen toepassen, met orde $\mathcal{O}(h^4)$. Verder kon de RK4 [4] tijdsdiscretisatie gebruikt worden in plaats van Euler Modified. Deze methode heeft een nauwkeurigheid van orde $\mathcal{O}(\Delta t^4)$. Deze methoden zijn nauwkeuriger dan de gebruikte methoden en zal zorgen voor een betere benadering van de oplossing van de Puntgolf.

Echter, het model in dit verslag is een redelijke goede representatie van het verloop van de Puntgolf. Het voldoet aan elke eigenschap van de Ostrovsky Vergelijking en de Puntgolf. Voor het bepalen van het verloop zou dit model dus voldoende nauwkeurig moeten zijn.



Figuur 13: Schematische weergave van de band om de complexe as (blauw), waarin de eigenwaarden zich bevinden

Bovendien is er nog ruimte voor verder onderzoek, om het resultaat uit dit onderzoek te bevestigen. Zo zijn de eigenwaarden van de linearisatie rondom de Puntgolf bekend, zie [2]. Deze eigenwaarden bevinden zich in een band rondom de complexe as tussen $-\pi/6$ en $\pi/6$, wat schematisch is weergegeven in Figuur 13. Er zijn hierbij eigenwaarden waarvan het reële deel positief is en eigenwaarden die zuiver imaginair zijn. Dit zorgt ervoor dat de Puntgolf niet stabiel is. Hierdoor zorgen kleine verstoringen voor een grote verstoring in verloop van tijd. Wij kunnen controleren of eigenwaarden die bij het numerieke model horen overeenkomen met de eigenwaarden van dit probleem uit de literatuur. Dit kunnen wij bijvoorbeeld doen met de stelling van Gershgorin. Hierbij wordt de discretisatie in

matrix-vectorvorm gezet, waarop wij de stelling van Gershgorin kunnen toepassen. Aangezien de Ostrovsky Vergelijking niet lineair is én een integratieterm heeft, is het lastig om de vergelijking in deze vorm te zetten. Nader onderzoek is nodig om uiteindelijk de stelling van Gershgorin toe te passen en de eigenwaarden te bepalen. Wanneer de eigenwaarden ook daadwerkelijk een positief reëel deel hebben, kan de Trapeziummethode toegepast worden voor de tijdsdiscretisatie [4]. Dit is een impliciete methode en dus stabiel voor elke tijdsstap Δt . Daarnaast heeft de Trapeziummethode een versterkingsfactor gelijk aan

$$Q(\lambda\Delta t) = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t}$$

Hieruit volgt dat het teken van de eigenwaarden λ geen verschil maakt in de versterkingsfactor. Met andere woorden, het teken van de eigenwaarden maakt geen verschil voor de stabiliteit van het numerieke model, wanneer wij de Trapeziummethode toepassen.

Ook kan dieper ingegaan worden op de Nul-Gemiddelde eigenschap bij de numerieke benadering. Er was te lezen in Sectie 3.3 dat het gemiddelde van de numerieke oplossing niet precies gelijk is aan nul. Er kan nog onderzocht worden of het gemiddelde naar nul convergeert als bijvoorbeeld de tijdsstap of stapgrootte kleiner worden gekozen. Het kan misschien zo zijn dat het gemiddelde van de numerieke oplossing onder bepaalde voorwaarden pas gelijk is aan nul.

Verder zijn er nog mogelijkheden om de puntstructuur van de Puntgolf beter te representeren. In dit onderzoek is gebruik gemaakt van gridpunten die op gelijke afstand lagen van elkaar. Doordat de nauwkeurigheid van de numerieke oplossing afhangt van de afstand tussen twee gridpunten, is het logisch om deze afstand te verkleinen. Echter, dit zorgt voor meer rekenwerk en is dus niet geheel wenselijk. Een oplossing is om het grid te verfijnen rondom de punt. Het gladde gedeelte van de golf heeft dus een minder fijn grid, dan het gedeelte rondom de punt. Je krijgt hierdoor wel een onregelmatig grid.

Tenslotte kan ook nog afgevraagd worden in welke mate het numerieke model voor verspreiding in de oplossing zorgt. Als dit het geval is, dan moet ervoor gezorgd worden dat deze invloed op de oplossing zo klein mogelijk wordt. Verder zijn er wellicht numerieke methoden die er meer voor zorgen dat er een breekpatroon optreedt bij de puntgolf. Deze gevallen kunnen nog onderzocht worden.

Referenties

- [1] A. Geyer and D.E. Pelinovsky, "Linear Instability and Uniqueness of the Peaked Periodic Wave in the Reduced Ostrovsky Equation", arXiv:1804.03788v2 (2019).
- [2] A. Geyer and D.E. Pelinovsky, "Spectral Instability of the Peaked Periodic Wave in the Reduced Ostrovsky Equations", arXiv:1903.09660v1 (2019).
- [3] R.H.J. Grimshaw, K. Helfrich, and E.R. Johnson, "The Reduced Ostrovsky Equation: Integrability and Breaking", *Stud. Appl. Math* *129* (2012), 414-436.
- [4] Vuik, C. Vermolen, F.J. Van Gijzen, M.B. Vuik, M.J. (2015) *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Delft: Delft Academic Press.
- [5] Van Kan, J. Segal, A. Vermolen, F. (2005) *Numerical Methods in Scientific Computing*. Delft: Delft Academic Press.
- [6] A. Constantin, *Nonlinear Water Waves with Applications to Wave-Current Interactions and Tsunamis*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 81, SIAM Philadelphia, 2011
- [7] LeVeque, R.J. (1992) *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel: Birkhäuser Basel.
- [8] Shearer, M. Levy, R (2015) *Partial Differential Equations, An Introduction to Theory and Applications*. Princeton: Princeton University Press.
- [9] Haberman, R. (2014) *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Harlow: Pearson Education Limited.
- [10] Dumortier, F. Llibre, J. Artés, J.C. (2006) *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Heidelberg: Springer Verlag.
- [11] Braun, M. (1975) *Differential Equations and their Applications*. Heidelberg: Springer Verlag.

Bijlage

A Korteweg-de Vries Vergelijking

De Korteweg-de Vries [3] Vergelijking wordt gebruikt bij het mathematisch modelleren van de golven op het oppervlak van ondiep water. De Korteweg-de Vries Vergelijking is weergegeven in Vergelijking (24).

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{24}$$

Hierbij is u_{xxx} een dispersieterm, die zorgt dus voor verspreiding. Deze wordt veroorzaakt door de oppervlaktespanning van het water en de zwaartekracht. De niet-lineaire term uu_x zorgt juist voor het samenbrengen van water. Een combinatie van deze termen zorgt er dus voor dat een periodieke golf kan voortbewegen zonder van vorm te veranderen.

Van de Korteweg-de Vries Vergelijking kunnen wij de stap maken naar de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking. Wij vervangen de dispersieterm u_{xxx} door de inverse-afgeleideterm $\partial_x^{-1}u$. Dit is ook een verspreidingsterm, maar dan veroorzaakt door de rotatie van de aarde (Coriolis), of in het algemeen veroorzaakt door rotatie van het water. Wij gaan er in dit geval van uit dat de inverse-afgeleideterm een veel grotere term is dan u_{xxx} , waardoor deze verwaarloosbaar klein wordt en weggestreept kan worden. Wij zien dus dat ook de Ostrovsky Vergelijking een model is voor golven op het oppervlak van ondiep water, waarbij rekening gehouden wordt met Coriolis.

B Euler Voorwaarts met Centrale Differenties

Wanneer wij een partiële differentiaalvergelijking discretiseren met Euler Voorwaarts in de tijd en Centrale Differenties in de plaats, dan gaat het mis. Wij gaan aantonen dat deze waarneming klopt en uitleggen waarom het misgaat.

Wij gaan dit aantonen voor Vergelijking $u_t + u_x = 0$. De discretisatie is als volgt:

$$\frac{1}{\Delta t}(w_k^{\tau+1} - w_k^\tau) + \frac{1}{2\Delta x}(w_{k+1}^\tau - w_{k-1}^\tau) = 0$$

Nu wij deze Vergelijking hebben gediscrètiseerd met Euler Voorwaarts en Centrale Differenties, vullen wij nu in $w_k^\tau = e^{\tau\lambda\Delta t + imkx}$. Hieruit bepalen wij de versterkingsfactor $e^{\lambda\Delta t}$. Deze factor geeft aan of fouten wel of niet naar nul gaan als Δt naar nul gaat. Invullen geeft ons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}e^{\tau\lambda\Delta t + imkx}(e^{\lambda\Delta t} - 1) + \frac{1}{2\Delta x}e^{\tau\lambda\Delta t + imkx}(e^{imx} - e^{-imx}) \\ &= \frac{1}{\Delta t}(e^{\lambda\Delta t} - 1) + \frac{1}{2\Delta x}(e^{imx} - e^{-imx}) \\ &= e^{\lambda\Delta t} - 1 + i\frac{\Delta t}{\Delta x}(\sin(mx)) = 0 \\ &\longrightarrow \\ &e^{\lambda\Delta t} = 1 - i\frac{\Delta t}{\Delta x}(\sin(mx)) \end{aligned}$$

Hierbij maken wij gebruik van het feit $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Wij hebben nu de versterkingsfactor $e^{\lambda\Delta t}$ gevonden. Hiermee kunnen wij nagaan of het discretisatieschema stabiel is. Daarvoor moet $|e^{\lambda\Delta t}| \leq 1$. Als deze groter is dan 1, dan volgt dat dit schema onstabiel is. Merk hierbij op dat $\sin^2(mx) \in [0, 1]$, dus dat $|1 - i\frac{\Delta t}{\Delta x}(\sin(mx))|^2 = 1 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(mx) \geq 1$. Verder geldt dat $\Delta t, \Delta x > 0$. Wij kunnen hiermee het volgende concluderen:

$$|e^{\lambda\Delta t}| = \left|1 - i\frac{\Delta t}{\Delta x}(\sin(mx))\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(mx)} \geq 1$$

Wij zien dus dat de versterkingsfactor altijd groter of gelijk is aan 1, wat betekent dat dit schema onvoorwaardelijk onstabiel is. Dat houdt in dat de fout van deze oplossing niet naar 0 gaat, wanneer de tijd t oneindig lang loopt. Dit veroorzaakt fouten in de numerieke benadering van deze vergelijking. Hierdoor is het niet verstandig om Euler Voorwaarts te combineren met Centrale Differenties.

C Upwind en Downwind

Wanneer je discretiseert met behulp van Upwinding, zorg je ervoor dat je numerieke oplossing niet oscilleert. Dat houdt in dat er behoud is van monotoniciteit. Wij tonen deze eigenschap aan en gebruiken daarbij de confectie-diffusievergelijking.

$$v \frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Hierbij zijn de randvoorwaarden $u(0) = 0$ en $u(1) = 1$. Neem aan dat $v \geq 0$, dan discretiseren wij de eerste afgeleide naar de plaats met $\frac{1}{\Delta x}(w_j - w_{j-1})$. Hierdoor krijgen wij de discretisatie:

$$v \frac{w_j - w_{j-1}}{\Delta x} - \epsilon \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\Delta x^2} = 0$$

Wij passen de proefoplossing $w_j = r^j$ toe en herschrijven de oplossing.

$$\begin{aligned} & \frac{v}{\Delta x}(r^j - r^{j-1}) - \frac{\epsilon}{\Delta x^2}(r^{j+1} - 2r^j + r^{j-1}) \\ &= v \Delta x(r^j - r^{j-1}) - \epsilon(r^{j+1} - 2r^j + r^{j-1}) \\ &= v \Delta x(r - 1) - \epsilon(r^2 - 2r + 1) \\ &= v \Delta x(r - 1) - \epsilon(r - 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

De laatste uitdrukking herschrijven wij tot $\frac{v \Delta x}{\epsilon}(r - 1) = (r - 1)^2$. Deze kwadratische vergelijking heeft de oplossingen

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= 1 + \frac{v \Delta x}{\epsilon} \end{aligned}$$

Hierbij zijn $v, \epsilon > 0$, dus volgt dat $r_2 > 0$. De oplossing van de convectie-diffusievergelijking is te herschrijven in de vorm $w_j = ar_1^j + br_2^j$, waarbij a en b de randvoorwaarden zijn. Dan wordt de numerieke oplossing [4]

$$w_j = \frac{1 - r_2^j}{1 + r_2^{n+1}}$$

Omdat in ons geval $r_2 > 0$, volgt dat de numerieke oplossing niet oscilleert. Wanneer $r_2 < 0$, dan zou r_2^j positief zijn voor even j en negatief voor oneven j . Dan ontstaan oscillaties.

Wij nemen nu $v < 0$ en passen nog steeds de discretisatie van de eerste afgeleide naar de plaats toe als $\frac{1}{\Delta x}(w_j - w_{j-1})$. Dan zijn de oplossingen nog steeds :

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= 1 + \frac{v \Delta x}{\epsilon} \end{aligned}$$

Nu is het echter niet meer vanzelfsprekend dat r_2 positief is, aangezien $v < 0$. Hieruit volgt dat r_2 negatief is als geldt $v < -\frac{\epsilon}{v}$. In dit geval ontstaan oscillaties in de numerieke oplossing. Hieruit kunnen wij concluderen dat het belangrijk is om zowel Upwinding als Downwinding toe te passen (op het juiste moment), zodat er behoudt van monotoniciteit is.

D Richardson Extrapolatie

Om te controleren of onze tijdsstap klein genoeg is én het schatten van de fout kunnen wij Richardson Extrapolatie toepassen [4]. Wij nemen aan dat de fout de volgende vorm aanneemt.

$$y(t) - w_N^{\Delta t} = c_p \Delta t^p + \mathcal{O}(\Delta t^{p+1})$$

Hierbij is $y(t)$ de exacte oplossing en w de numerieke benadering met tijdsstap Δt en N het aantal tijdstappen. Wij nemen Δt klein genoeg, zodat $y(t) - w_N^{\Delta t} \approx c_p \Delta t^p$. De p in deze formule is gelijk aan de orde van de fout. Deze orde weten wij uit de literatuur, namelijk 1 voor Euler Voorwaarts en 2 voor Euler Modified. Wij hebben drie numerieke benaderingen nodig om de orde te schatten en te controleren of onze tijdsstap Δt klein genoeg is en wij hebben twee numerieke benaderingen nodig om de globale fout te schatten. Voor Δt klein genoeg krijgen wij

$$\begin{aligned} y(t) - w_N^{\Delta t} &= c_p(t)(\Delta t)^p \\ y(t) - w_{N/2}^{2\Delta t} &= c_p(t)(2\Delta t)^p \\ y(t) - w_{N/4}^{4\Delta t} &= c_p(t)(4\Delta t)^p \end{aligned}$$

Wanneer wij dit herschrijven krijgen wij

$$\frac{w_{N/2}^{2\Delta t} - w_{N/4}^{4\Delta t}}{w_N^{\Delta t} - w_{N/2}^{2\Delta t}} = 2^p$$

Met bovenstaande formule kunnen wij de orde van de fout p schatten. Aangezien wij weten wat de orde moet zijn, gebruiken wij deze formule om te controleren of de gebruikte tijdsstap Δt klein genoeg is. Wanneer p namelijk niet overeenkomt of te weinig overeenkomt met de orde van de fout, dan moeten wij tijdsstap Δt kleiner nemen. Nu wij deze controle gedaan hebben, gaan wij verder met het schatten van de fout. Herschrijven van $y(t) - w_N^{\Delta t}$ en $y(t) - w_{N/2}^{2\Delta t}$ geeft ons de formule die de fout schat:

$$y(t) - w_N^{\Delta t} = \frac{w_N^{\Delta t} - w_{N/2}^{2\Delta t}}{2^p - 1}$$

E Herleiding lopende golven in Ostrovsky

De Puntgolven is een oplossing van de lopende golven in de Ostrovsky Vergelijking. Populair gezegd beweeg je met de golven mee, waardoor ze ten opzichte van jou stilstaan. Wij gaan deze lopende golven in beeld brengen met behulp van een fasevlak. In dit fasevlak zal goed te zien zijn welke beginvoorwaarden voor een gladde, periodieke golf zal zorgen, maar ook zullen de Puntgolven goed weergegeven zijn. Om tot de lopende golven in de Ostrovsky Vergelijking te komen, moeten wij eerst de Ostrovsky Vergelijking herschrijven. Hieronder herschrijven wij de gereduceerde Ostrovsky Vergelijking.

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= \partial_x^{-1} u \\(u_t + uu_x)_x &= u \\u_{tx} + uu_{xx} + (u_x)^2 &= u\end{aligned}$$

De lopende golven in de Ostrovsky Vergelijking zijn gegeven door $u(x, t) = U(x - ct)$ [1]. Hierbij is $c > 0$ de golfsnelheid en is U de 2π periodieke golf met Nul Gemiddelde. Dit vullen wij in, zodat wij van een partiële differentiaalvergelijking overgaan op een gewone differentiaalvergelijking.

$$-cU'' + UU'' + (U')^2 = U$$

Herschrijven geeft ons:

$$U'' = \frac{U - (U')^2}{U - c}$$

Wij gaan hier een stelsel van twee eerste orde gewone differentiaalvergelijkingen van maken. Hierdoor krijgen wij de afgeleiden naar de tijd van zowel U als $U' = V$. Dit geeft dus een snelheidsvector aan, die aangeeft hoeveel verandering er is in zowel de U als de U' richting. Het stelsel ziet er als volgt uit:

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = (U - V^2)/(U - c) \end{cases}$$

Wij zien dat wanneer $U = c$, dat wij een singulariteit hebben bij V' . Wij willen dit zien te voorkomen, dus gaan wij een transformatie in de tijd uitvoeren. Zet $\frac{\partial s}{\partial t} = U - c$, dan volgt

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = U'(U - c) = V(U - c) \\ \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = V'(U - c) = (U - V^2)\end{aligned}$$

Wij krijgen met deze transformatie in de tijd een nieuw stelsel, zonder de singulariteit bij $U = c$. Wanneer $U = c$, dan zal volgen dat $\dot{U} = 0$. Dit zal nog steeds hetzelfde fasevlak geven, dus zullen de oplossingen ook hetzelfde zijn. Het nieuwe stelsel ziet er als volgt uit:

$$\begin{cases} \dot{U} = V(U - c) \\ \dot{V} = U - V^2 \end{cases} \quad (25)$$

Wij gaan nu de Jacobiaan van dit stelsel bepalen. Vervolgens zoeken wij de fixpunten en vullen deze in, in de bijbehorende Jacobiaan. Hierbij verkrijgen wij de eigenschap van elk punt. De Jacobiaan van dit stelsel is te zien in Matrix (26).

$$J(U, V) = \begin{bmatrix} V & U - c \\ 1 & -2V \end{bmatrix} \quad (26)$$

Nu wij de Jacobiaan [11] hebben gevonden, gaan wij de zogenaamde fixpunten van dit stelsel bepalen. Wanneer wij deze fixpunten hebben gevonden, dan kunnen wij deze invullen in de Jacobiaan, om zo erachter te komen welke eigenschap elk punt heeft. Om de fixpunten te zoeken, moeten wij $\dot{U} = 0$ en $\dot{V} = 0$ zetten. Wanneer wij dat doen, krijgen wij de volgende vergelijkingen:

$$0 = V(U - c) \quad \quad \quad = \dot{U} \quad (27)$$

$$0 = U - V^2 \quad \quad \quad = \dot{V} \quad (28)$$

Als wij Vergelijking (27) oplossen dan krijgen wij $V = 0$ of $U = c$. Wanneer wij Vergelijking (28) oplossen, dan krijgen wij $V = \sqrt{U}$ of $V = -\sqrt{U}$. Hierdoor verkrijgen drie fixpunten, namelijk $(0, 0)$, $(c, \sqrt{c})$ en $(c, -\sqrt{c})$. Nu gaan wij bepalen wat voor een soort punten dit zijn. Daarvoor gaan wij ze één voor één invullen in de Jacobiaan (26) van de bijbehorende vergelijking. Hierbij beginnen wij bij het punt $(0, 0)$. In (29) is te zien dat de eigenwaarden van de Jacobiaan complex zijn en verschillen van teken. Dit houdt dan ook in dat het punt $(0, 0)$ een centrum is.

$$J(0, 0) \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -c \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} \lambda^2 + c = 0 & \lambda = i\sqrt{c} \\ \lambda^2 = -c & \lambda = -i\sqrt{c} \end{matrix} \quad (29)$$

Vervolgens vullen wij $(c, \sqrt{c})$ in, in de Jacobiaan. De oplossing is te zien in (30). Hierbij zien wij dat er een verschil in teken is van de eigenwaarden. Dit houdt dus in dat het punt $(c, \sqrt{c})$ een zadelpunt is. Dit is dus een onstabiel punt.

$$J(c, \sqrt{c}) \rightarrow \begin{vmatrix} \sqrt{c} - \lambda & 0 \\ 1 & -2\sqrt{c} - \lambda \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} (\sqrt{c} - \lambda)(-2\sqrt{c} - \lambda) = 0 & \lambda = \sqrt{c} \\ -2\sqrt{c} - \lambda = 0, \sqrt{c} - \lambda = 0 & \lambda = -2\sqrt{c} \end{matrix} \quad (30)$$

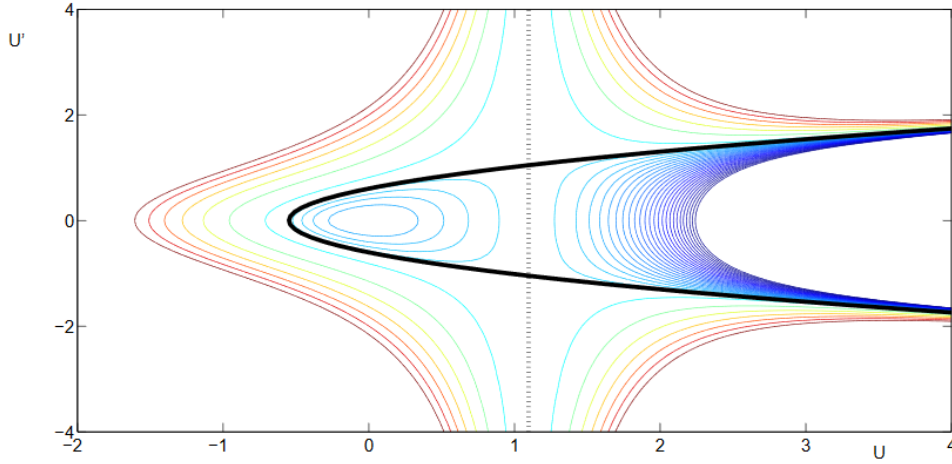
Tenslotte vullen wij $(c, -\sqrt{c})$ in. De oplossing is te zien in (31). Ook hier is weer te zien dat de bijbehorende eigenwaarden reëel zijn en verschillen van teken, wat inhoudt dat dit een zadelpunt is.

$$J(c, -\sqrt{c}) \rightarrow \begin{vmatrix} -\sqrt{c} - \lambda & 0 \\ 1 & 2\sqrt{c} - \lambda \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} (-\sqrt{c} - \lambda)(2\sqrt{c} - \lambda) = 0 & \lambda = -\sqrt{c} \\ 2\sqrt{c} - \lambda = 0, -\sqrt{c} - \lambda = 0 & \lambda = 2\sqrt{c} \end{matrix} \quad (31)$$

Wij hebben nu bepaald wat voor een type elk fixpunt is. Uit de analyse volgt voor de drie fixpunten

- $(0, 0)$ is een centrum
- $(c, \sqrt{c})$ is een zadelpunt
- $(c, -\sqrt{c})$ is een zadelpunt

Het resultaat is terug te zien in het fasevlak in Figuur 14, verkregen uit [1]. In dit Figuur is goed terug te zien dat $(0, 0)$ een centrum is en $(c, \sqrt{c})$, $(c, -\sqrt{c})$ twee zadelpunten. Wat ook opvalt in Figuur 14, is de dikgedrukte zwarte lijn. Dit is de puntgolf, die door de twee zadelpunten gaat. Verder is de stippellijn $U = c$, wat dus een lijn singulariteiten is. Verder bevinden zich rondom het centrum lichtblauwe curven, die staan voor de gladde periodieke golven. Deze kunnen bepaald worden door de Hamiltoniaan te bepalen.



Figuur 14: Fasevlak verkregen uit Stelsel (25) voor een $c > 0$. Hierbij is de dikke zwarte lijn de puntgolf. [1]

Hamiltoniaan

Met behulp van het Stelsel Vergelijkingen (25) kunnen wij een fasevlak maken. Om zo een fasevlak te maken, hebben wij ook oplossingskrommen nodig. Deze oplossingskrommen kunnen wij bepalen door de Hamiltoniaan [10] van het stelsel te bepalen. De Hamiltoniaan $H(U, V)$ voldoet aan Vergelijkingen (32) en (33). Het is dus een functie van U en de afgeleide van U .

$$\dot{U} = \frac{\partial H}{\partial V} \quad (32)$$

$$\dot{V} = -\frac{\partial H}{\partial U} \quad (33)$$

Echter, het Stelsel (25) is geen Hamiltoniaans stelsel, oftewel het stelsel voldoet niet aan Vergelijkingen (32) en (33). In plaats van de Hamiltoniaan, bepalen wij nu de eerste integraal X [10]. Hiervoor moeten wij een zogenaamde integratiefactor R bepalen. Het systeem met integratiefactor R moet voldoen aan Vergelijking (34), waarbij $\dot{U} = P$ en $\dot{V} = Q$.

$$\frac{\partial RP}{\partial U} = -\frac{\partial RQ}{\partial V} \quad (34)$$

Vergelijking (34) is equivalent aan $\text{div}(RP, RQ) = 0$. Met behulp van deze eigenschap gaan wij de integratiefactor R bepalen. Hierbij hopen wij dat dit een functie is van enkel U .

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(RP, QR) &= 0 \\
VR(U) + V(U - c)R'(U) - 2VR(U) &= 0 \\
-VR(U) + V(U - c)R'(U) &= 0 \\
VR(U) &= V(U - c)R'(U) \\
\frac{1}{U - c} &= \frac{R'(U)}{R(U)} \\
\int \frac{1}{U - c} dU &= \int \frac{R'(U)}{R(U)} dU \\
\log(U - c) &= \log(R(U)) \\
R(U) &= U - c
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat inderdaad geldt dat R een functie is van enkel U . Wij weten nu dat $R(U) = U - c$. Vervolgens moeten wij met deze integratiefactor de bijbehorende eerste integraal X van Vergelijking (34) bepalen. Deze is gelijk aan $X(U, V) = \int RP \, dV + h(U)$. Hierbij wordt $h(U)$ bepaald door $\frac{\partial X}{\partial V} = -RQ$ op te lossen.

$$\begin{aligned}
X(U, V) &= \int RP \, dV + h(U) \\
&= \int V(U - c)^2 \, dV + h(U) \\
&= \frac{1}{2}V^2(U - c)^2 + h(U)
\end{aligned}$$

Nu wij weten wat $X(U, V)$ is, moeten wij alleen $h(U)$ bepalen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial U} &= -RQ \\
V^2(U - c) + h'(U) &= (V^2 - U)(U - c) \\
h'(U) &= Uc - U^2 \\
h(U) &= \frac{U^2c}{2} - \frac{U^3}{3}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt nu dat de eerste integraal gelijk is aan

$$X(U, V) = \frac{1}{2}V^2(U - c)^2 + \frac{U^2c}{2} - \frac{U^3}{3}$$

Wij gaan nu de niveaукrommen bepalen: $X(U, V) = E$, met E constant. Dit komt omdat $x(U, V)$ constant is langs de oplossingen:

$$\frac{d}{dt}X(U, V) = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Wij gaan controleren of dit daadwerkelijk ook voor $X(U, V)$ geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X(U, V) &= (V^2(U - c) + cU - U^2)V(U - c) + V(U - c)^2(U - V^2) \\
&= (U - c)(V^3(U - c) + VUc - U^2V + V(U - c)(U - V^2)) \\
&= (U - c)(V(U - c)(V^2 + U - V^2) + VUc - U^2V) \\
&= (U - c)(VU^2 - VUc + VUc - U^2V) = 0
\end{aligned}$$

Wij zien dat $X(U, V)$ constant is langs de oplossingen. Wij kunnen nu $X(U, V) = E$ herschrijven:

$$V = \pm \sqrt{\frac{2 \left(E - c \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} \right)}{(U - c)^2}}$$

Nu kan je voor elke E de niveaukromme tekenen. Door het invullen van verschillende niveau's krijg je de krommen in Figuur 14. In het bijzonder voor $E = X(c, \pm\sqrt{c})$, het niveau van de zadelpunten, krijgt je de dikke zwarte curve in Figuur 14 die overeenkomt met de Puntgolf.

F Code in Matlab

Methode van Karakteristieken

```
n = 500;
x0 = linspace(-pi,pi,n);
x = linspace(-pi,pi,n);
dt = 1/(n*pi.^2);
t = 0;
x = x.';
x0 = x0.';
u = U(x0);
A = [x u];
B = A;

an = animatedline;
axis([-pi,pi,-0.6,1.2])
sum = 1;
while t < 1
    sum = 0;
    for i = 1:n
        x(i) = x0(i) + u(i)*t;
    end
    A(:,1) = x;
    for i = 1:n
        if x(i) > pi
            x(i) = x(i) - 2*pi;
            A(i,1) = x(i);
            sum = sum + 1;
        end
    end
    B = circshift(A,[sum,0]);
    if x(1) > x(2)
        disp(num2str(x(sum)))
        disp(num2str(t))
        break
    end
    t = t + dt;
    addpoints(an,B(:,1),B(:,2))
    drawnow limitrate
    clearpoints(an)
end

figure(1)
plot(B(:,1),B(:,2))
axis([-pi pi -0.8 1.4])
title(' \fontsize{16} t=0 ')
xlabel(' \fontsize{16} x(t) ')
ylabel(' \fontsize{16} u(x(t),t) ')
```

Upwind Differentials

```
function [fun] = f(wold,n,h)
    w = wold;
    for i = 1:n
        if wold(i) < 0 %downwinding
            if i == n
                w(n) = ((wold(n)).^2 - (wold(1).^2))/(2*h);
            else
                w(i) = ((wold(i)).^2 - (wold(i+1)).^2)/(2*h);
            end
        else %upwinding
            if i == 1
                w(1) = ((wold(n)).^2 - (wold(1)).^2)/(2*h);
            else
                w(i) = ((wold(i-1)).^2 - (wold(i)).^2)/(2*h);
            end
        end
    end
    fun = w;
end
```

Centrale Differentials

```
function [fun] = g(wold,n,h)
    w = wold;
    for i = 1:n
        if i == 1
            w(i) = (2*wold(1)*(wold(n)-wold(2))+
                    wold(n).^2 - wold(2).^2)/(8*h);
        elseif i == n
            w(i) = (2*wold(n)*(-wold(1)+wold(n-1))-
                    wold(1).^2 + wold(n-1).^2)/(8*h);
        else
            w(i) = (2*wold(i)*(-wold(i+1)+wold(i-1))-
                    wold(i+1).^2 + wold(i-1).^2)/(8*h);
        end
    end
    fun = w;
end
```

Euler Voorwaarts + Burgers

```
function [wnum] = EulerForward(n,w0,dt,nt)
    x = linspace(-pi,pi,n);
    h = x(2) - x(1);
    w = w0.';
    for t = 1:nt
        wold = w; %Om ervoor te zorgen dat hij niet de nieuwe waarden pakt
        fun = f(wold,n,h); %De plaatsdiscretisatie
        for i = 1:n
            w(i) = wold(i) + dt*fun(i);
        end
    end
    wnum = w;
end
```

Euler Modified + Burgers

```
function [wnum] = EulerModified(n,w0,dt,nt)
    x = linspace(-pi,pi,n);
    h = x(2) - x(1);
    w = w0.';
    for t = 1:nt
        wold = w; %Om ervoor te zorgen dat hij niet de nieuwe waarden pakt
        pred = zeros(n,1); %Predictor
        fold = f(wold,n,h); %De plaatsdiscretisatie
        for i = 1:n
            pred(i) = wold(i) + dt*fold(i);
        end

        %Corrector
        fw = f(w,n,h);
        fpred = f(pred,n,h); %De plaatsdiscretisatie
        for i = 1:n
            w(i) = wold(i) + (dt/2)*(fw(i) + fpred(i));
        end
    end
    wnum = w;
end
```

Foutanalyse en Richardson + Burgers

```
%BURGERS EQUATION
n = 200;
x = linspace(-pi,pi,n);
w0 = (3*x.^2-pi.^2)/18;
%w0 = 0.5 - cos(x);
dt = 1e-04;
nt = 9600;
tstop = nt*dt;
disp(['Time_', num2str(tstop)]);

disp(' ');

%-----Euler Voorwaarts-----%
EV = EulerForward(n,w0,dt,nt);
disp('-----Euler_Forward-----');
%-----Richardson-----%
EV2 = EulerForward(n,w0,2*dt,nt/2);
EV4 = EulerForward(n,w0,4*dt,nt/4);
pEV = log2(norm(EV2-EV4)/(norm(EV-EV2)));
disp(['Estimated_order_of_accuracy_Euler_Forward_', num2str(pEV)]);
avEV = norm(EV - EV2);
disp(['Estimated_error_Euler_Forward_', num2str(avEV)]);

%-----Error-----%
mocEV = MOC(n,x,w0.',tstop);
errEV = norm(EV-mocEV(:,2))/(n);
disp(['Average_Error_', num2str(errEV)]);

figure(1)
plot(mocEV(:,1),mocEV(:,2));

axis([-pi pi -0.6 1.2])
title(['\fontsize{16}_t_', num2str(tstop)])
xlabel(['\fontsize{16}_x'])
ylabel(['\fontsize{16}_u(x,t)'])

hold on
plot(x,EV);
hold off

disp(' ')

n = 1500;
x = linspace(-pi,pi,n);
w0 = (3*x.^2-pi.^2)/18;
dt = 1e-03;
nt = 960;
```

```

%-----Euler Modified-----%
EM = EulerModified(n,w0,dt,nt);
disp('-----Euler Modified-----');
%-----Richardson-----%
EM2 = EulerModified(n,w0,2*dt,nt/2);
EM4 = EulerModified(n,w0,4*dt,nt/4);
pEM = log2(norm(EM2-EM4,'fro')/(norm(EM-EM2,'fro')));
disp(['Estimated_order_of_accuracy_Euler_Modified=', num2str(pEM)]);
avEM= norm(EM - EM2)/3;
disp(['Estimated_error_Euler_Modified=', num2str(avEM)]);

%-----Error-----%
mocEM = MOC(n,x,w0.',tstop);
errEM = norm(EM-mocEM(:,2))/(n);
disp(['Average_Error=', num2str(errEM)]);

figure(2)
plot(mocEM(:,1),mocEM(:,2));

axis([-pi pi -0.6 1.2])
title(['\fontsize{16}t=', num2str(tstop)])
xlabel('\fontsize{16}x')
ylabel('\fontsize{16}u(x,t)')

hold on
plot(x,EM);
hold off

```

Trapeziumregel

```

function [int] = trap(w,n,x)
    intp = w*0; %Maak een vector voor de integraal
    intt = w*0;
    SOM = w*0; %Maak een vector voor de sommatie
    k = 0;
    h = x(2) - x(1);

    for i = 1:n-1 %Kijk waar grid positief/negatief is
        if x(i+1)>=0
            if x(i)< 0
                k = i;
            end
        end
    end

    for i = 1:n %Maak de sommen
        if i > 1
            SOM(i) = h/2 * (w(i) + w(i-1));
        else
            SOM(i) = h/2 * (w(i) + w(i+1));
        end
    end

    for i = 1:n
        INT = 0;
        if x(i) >=0
            for j = k+1:i
                INT = INT + SOM(j);
            end
        else
            for j = i:k
                INT = INT - SOM(j);
            end
        end
        intp(i) = INT;
    end

    SUM = 0;
    for i = 2:n %Maak de tweede integraal
        SUM = SUM + (intp(i-1) + intp(i));
    end

    for i = 1:n %Maak de primitieve van u
        intt(i) = intp(i) - h/(4*pi) * SUM;
    end

    int = intt;

```

end

Euler Modified + Upwinding + Ostrovsky

[language = Matlab]

```
function [wnum, vec, time] = EMUpwind(n,w0,dt,nt)
    x = linspace(-pi,pi,n);
    h = x(2) - x(1);
    w = w0.';

    vec = zeros(0,n-1);
    time = zeros(0,n-1);

    for t = 1:nt
        wold = w; %Om ervoor te zorgen dat hij niet de nieuwe waarden pakt
        pred = zeros(n,1); %Predictor
        int = trap(wold,n,x); %Maak een vector voor de integraal
        fold = f(wold,n,h); %De plaatsdiscretisatie

        %-----Predictor-----
        for i = 1:n
            pred(i) = wold(i) + dt*(fold(i) + int(i));
        end

        %-----Corrector-----
        pint = trap(pred,n,x); %Maak een vector voor de integraal
        fpred = f(pred,n,h);
        for i = 1:n
            w(i) = wold(i) + (dt/2)*(fold(i) + fpred(i) + pint(i) + int(i));
        end

        CON = 0; %controleren zero mean
        for i = 2:n
            CON = CON + h/2*(w(i)+w(i-1));
        end
        time(t) = t;
        vec(t) = CON;
    end

    wnum = w;
end
```

Euler Modified + Centrale Differenties + Ostrovsky

```

function [wnum, vec, time] = EMCentral(n,w0,dt,nt)
    x = linspace(-pi,pi,n);
    h = x(2) - x(1);
    w = w0.';

    vec = zeros(0,n-1);
    time = zeros(0,n-1);

    for t = 1:nt
        wold = w; %Om ervoor te zorgen dat hij niet de nieuwe waarden pakt
        pred = zeros(n,1); %Predictor
        int = trap(wold,n,x); %Maak een vector voor de integraal
        gold = g(wold,n,h); %De plaatsdiscretisatie Centrale Differenties

        %—————Predictor—————
        for i = 1:n
            pred(i) = wold(i) + dt*(gold(i) + int(i));
        end

        %—————Corrector—————
        pint = trap(pred,n,x); %Maak een vector voor de integraal
        gpred = g(pred,n,h); %De plaatsdiscretisatie Centrale Differenties

        for i = 1:n
            w(i) = wold(i) + (dt/2)*(gold(i) + gpred(i) + int(i) + pint(i));
        end

        CON = 0; %controleren zero mean
        for i = 2:n
            CON = CON + h/2*(w(i)+w(i-1));
        end
        time(t) = t;
        vec(t) = CON;

    end

    wnum = w;

end

```

Verplaatsing Puntgolven

```
function [move] = Ustar(n,x0,u,tstop)
    t = 0;
    x = x0.';
    x0 = x0.';
    u = u.';
    A = [x u];
    B = A;
    dt = 1e-3;

    an = animatedline;
    axis([-pi,pi, -0.6,1.2])
    while t < tstop
        SUM = 0;
        for i = 1:n
            x(i) = x0(i) + (pi^2 / 9)*t;
        end

        A(:,1) = x;

        for i = 1:n
            if x(i) > pi
                x(i) = x(i) - 2*pi;
                A(i,1) = x(i);
                SUM = SUM + 1;
            end
        end

        B = circshift(A,[SUM,0]);

        t = t + dt;
        addpoints(an,B(:,1),B(:,2))
        drawnow limitrate
        clearpoints(an)

    end
    move = B;
end
```

Richardson + Ostrovsky

%OSTROVSKY EQUATION

`n = 600;`

`x = linspace(-pi,pi,n);`

`w0 = (3*x.^2-pi.^2)/18;`

%w0 = cos(x)/4;

`dt = 1e-03;`

`nt = 1000;`

`tstop = nt*dt;`

`disp(' ');`

`disp(['Time=', num2str(tstop)]);`

`disp(' ');`

%-----Centrale Differenties-----%

`[EMC, vec1, time1] = EMCentral(n,w0,dt,nt);`

`disp('-----Central Differences-----');`

*%disp(['Number of calculations = ', num2str(2*n*nt)]);*

%-----Richardson-----%

`[EMC2, vec2, time2] = EMCentral(n,w0,2*dt,nt/2);`

`[EMC4, vec4, time4] = EMCentral(n,w0,4*dt,nt/4);`

`pEM = log2(norm(EMC2-EMC4)/(norm(EMC-EMC2)));`

`disp(['Estimated_order_of_accuracy_Central_Differences=', num2str(pEM)]);`

`avEM= norm(EMC - EMC2)/3;`

`disp(['Estimated_error_Central_Differences=', num2str(avEM)]);`

%-----Error-----%

`mocEM = Ustar(n,x,w0,tstop);`

`errEM = norm(EMC-mocEM(:,2))/(n);`

`disp(['Average_Error=', num2str(errEM)]);`

`figure(1)`

`plot(mocEM(:,1),mocEM(:,2));`

`axis([-pi pi -0.6 1.2])`

`title(['\fontsize{16}_t=', num2str(tstop)])`

`xlabel('\fontsize{16}_x')`

`ylabel('\fontsize{16}_w(x,t)')`

`hold on`

`plot(x,EMC);`

`hold off`

`disp(' ');`

```

%————Upwind Differenties————%
[EMU, veci, timei] = EMUpwind(n,w0,dt,nt);
disp('————Upwind_Differenties————');
%disp(['Number of calculations = ', num2str(2*n*nt)]);
%————Richardson————%
[EMU2, vecii, timeii] = EMUpwind(n,w0,2*dt,nt/2);
[EMU4, veciv, timeiv] = EMUpwind(n,w0,4*dt,nt/4);
pEMU = log2(norm(EMU2-EMU4)/(norm(EMU-EMU2)));
disp(['Estimated_order_of_accuracy_Upwind_Differences= ', num2str(pEMU)]);
avEMU= norm(EMU - EMU2)/3;
disp(['Estimated_error_Upwind_Differences= ', num2str(avEMU)]);

%————Error————%
mocEMU = Ustar(n,x,w0,tstop);
errEMU = norm(EMU-mocEMU(:,2))/(n);
disp(['Average_Error= ', num2str(errEMU)]);

figure(2)
plot(mocEMU(:,1),mocEMU(:,2));

axis([-pi pi -0.6 1.2])
title(['\fontsize{16}_t= ', num2str(tstop)])
xlabel(['\fontsize{16}_x'])
ylabel(['\fontsize{16}_w(x,t)'])

hold on
plot(x,EMU);
hold off

```