

**Consolidatietheorieontwikkeling
ten behoeve van verticale en hori-
zontale afstroming in combinatie
met kruip
definitief**

CO-710402/40 versie 1

13-dec-2000

**Consolidatietheorieontwikkeling ten be-
hoeve van verticale en horizontale afstro-
ming in combinatie met kruip**

CO-710402/40

13-dec-2000

\\GD-

Opgesteld in opdracht van:

DELFT CLUSTER

POSTBUS 69

2600 AB DELFT

AFDELING SWG

Projectleider : Dr. Ir. J.B. Sellmeijer

Projectbegeleider: Ir. A.R. Koelewijn

GeoDelft

Stieltjesweg 2, 2628 CK DELFT

Postbus 69, 2600 AB DELFT

Telefoon (015) 269 35 00

Telefax (015) 261 08 21

Postbank 234342

Bank MeesPierson NV

rapportnr: CO-710402/40		datum rapport: 13-dec-2000			
titel en subtitel: Consolidatietheorieontwikkeling ten behoeve van verticale en horizontale afstroming in combinatie met kruip		behandelende afdeling: Swg			
		projectnaam: Samengestelde constructies			
projectleider(s): Dr. Ir. J.B. Sellmeijer		projectbegeleider(s): Ir. A.R. Koelewijn			
naam en adres opdrachtgever: Delft Cluster Postbus 69 2600 AB Delft		referentie opdrachtgever: 01.04.02			
		verzenden in: 9-voud			
		type rapport: definitief			
<p>samenvatting rapport:</p> <p>Het Isotachen kruipmodel van Den Haan in MSettle is uitgebreid met de invloed van verticale drainage. Hiervoor is zowel een twee- als een ééndimensionale aanpak mogelijk. Beide zijn in dit rapport beschreven. De ééndimensionale aanpak is uiteindelijk geïmplementeerd. Verder wordt nader ingegaan op de randvoorwaarden bij diverse vormen van drainage zoals die in de praktijk worden toegepast.</p>					
opmerkingen:					
trefwoorden: Kruip, Drainage		verspreiding: DC 2, DWW 1, TU 1, TNO 1, GD 5			
opgeslagen op: onder titel: \\GD- FS\KLW\projecten.gd\710000\710402\grond\Rapport\710402_40_SLDrainage All_a.doc				aantal blz.: 33	
versie:	datum:	opgesteld door:	paraaf:	gecontroleerd door:	paraaf:
1	13 december 2000	Dr. Ir. J.B. Sellmeijer		Ir. A.R. Koelewijn	

Report no.: CO-710402/40	Date of report: 13-dec-2000				
Title: Consolidatietheorieontwikkeling ten behoeve van verticale en horizontale afstroming in combinatie met kruip	Department: Swg				
	Project: Samengestelde constructies				
Project manager: Dr. Ir. J.B. Sellmeijer	Project supervisor: Ir. A.R. Koelewijn				
Name and adress of client: Delft Cluster Postbus 69 2600 AB Delft	Reference client: 01.04.02				
	Copies sent: 9				
	Type of report definitive				
Summary of report: The Isotache creep model of Den Haan in MSettle has been extended with the influence of vertical drainage. Both a two-dimensional and a one-dimensional approach are possible. These are both described in this report. The one-dimensional approach has been implemented. Further, the boundary conditions for various types of drainage as encountered in practice are discussed.					
Comments:					
Key words: Creep, Drainage	Distribution: DC 2, DWW 1, TU 1, TNO 1, GD 5				
Saved as: \\GD-FS\KLW\projecten.gd\710000\710402\grond\Rapport\710402_40_SLDrainage All_a.doc				No. of pages: 33	
version:	date:	Prepared by:	Signature:	Checked by:	Signature:
1	13 december 2000	Dr. Ir. J.B. Sellmeijer		Ir. A.R. Koelewijn	

INHOUDSOPGAVE

1	Inleiding	1
2	Aanpak met 2D stroming	3
3	Horizontale stroming als lekterm	13
4	Stijghoogte in de drain	23
5	Samenvatting en conclusies	25

1 Inleiding

Met behulp van het programma MSettle worden één-dimensionale kruipberekeningen gemaakt. Tot voor kort was hiervoor alleen de empirische regel van Buisman-Koppejan beschikbaar. Recentelijk is het fundamentele kruipmodel van den Haan geïmplementeerd. Berekeningen worden in een raai uitgevoerd, waar belasting en grondeigenschappen zijn gespecificeerd.

Via het principe van spanningsspreiding worden twee- en drie- dimensionale effecten van het verloop van de bovenbelasting naar de diepte gesimuleerd. De stroming van het grondwater is echter zuiver verticaal. Dit betekent dat afstroming alleen berekend kan worden naar drainerende lagen aan de boven- en onderkant.

Om het consolidatieproces te versnellen wordt soms een systeem van verticale drains toegepast. Hierbij zal ook horizontale afstroming van het water plaats vinden. Het effect ervan kan alleen maar worden vastgesteld, indien deze stroming opgenomen wordt in het rekenproces. Dit betekent dat de één-dimensionale MSettle aanpak moet worden aangepast.

Het is niet de bedoeling om van MSettle een twee- of drie- dimensionaal programma te maken. Daar is PLAXIS al voor ontwikkeld. De meerwaarde van MSettle moet gericht blijven op eenvoud en gemakkelijke bediening. Daarom wordt gekeken welke processen essentieel 2D zijn en welke nog als 1D mogen worden benaderd.

De horizontale stromingscomponent is van groot belang om de waterspanningen versneld af te voeren. De stroming dient dan ook volledig twee dimensionaal in rekening gebracht te worden. De vervormingen zijn echter voornamelijk verticaal gericht. De netto horizontale vervorming is nul. Er is hooguit enige herverdeling. Daarom wordt de vervorming als één-dimensionaal beschouwd.

De twee-dimensionale stroming kan numeriek gediscretiseerd worden. Dit leidt niet tot een andere numerieke opzet. Alleen de shape-functies worden twee-dimensionaal. Dit heeft een grotere matrix tot gevolg met navenant langere rekestijden.

Een andere manier om de horizontale stromingscomponent in rekening te brengen is het afleiden van een lekterm, die alleen van de diepte afhangt. Aldus blijft de gehele aanpak één-dimensionaal. De matrix hoeft dan slechts uitgebreid te worden met de lekterm. Deze aanpak heeft de voorkeur.

2 Aanpak met 2D stroming

Uitgangspunten

Bij de verticale drains gaat het erom om het water zo snel mogelijk horizontaal af te voeren. Het is duidelijk dat deze component ruime aandacht moet krijgen. Dit wordt volledig gerealiseerd door de stroming 2D te modelleren.

Anders ligt het bij de vervormingen. Aan de beide verre zijden treedt geen vervorming op. Gemiddeld zal er dus geen horizontale vervorming zijn. Er treedt hooguit een geringe herverdeling op van de horizontale positie. Het ligt dan ook voor de hand om de horizontale rekken te verwaarlozen. Indien ook nog het ontstaan van schuifspanningen verwaarloosd wordt, hoeft er alleen rekening gehouden te worden met verticale rekken.

Om nu MSettle te verzekeren van voldoende eenvoud, zal het zakkingspatroon 1D verondersteld blijven, terwijl de waterspanningen essentieel 2D gekozen zullen worden. Deze paragraaf beschrijft wat ervoor nodig is om dit te verwezenlijken.

Aanpak

In rapport *MSettle: één-dimensionale zetting met kruip en consolidatie* is de set van vergelijkingen opgesteld, waarmee kruip één-dimensionaal is beschreven. Deze set luidt:

$$p - \gamma'_g z + \gamma_w \varphi = \sigma_b + \gamma_w \phi_b \quad v_0 d\zeta = v dz$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) + \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \varphi = \frac{w}{\gamma_w} - \zeta$$

De vergelijking boven links beschrijft evenwicht; boven rechts bepaalt de gewijzigde verticale positie. De vergelijking onder links houdt de waterbalans in; onder rechts definieert de stijghoogte, die algemeen geldig is. Voor de kruip is de relatie toegepast, die de belastfase beschrijft:

$$\left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{1}{c}} = 1 + \frac{e_0}{c} \int_0^t \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{b}{c}} dt$$

In de toekomst zal deze vergelijking uitgebreid worden met een ontlast en herbelastfase. Voor onze huidige numerieke beschouwing is dit niet van wezenlijk belang.

Nu willen we deze beschrijving uitbreiden met horizontale stroming. In principe moet dan rekening gehouden worden met het ontstaan van schuifspanningen. Deze worden geacht niet van groot belang te zijn en worden verwaarloosd. Daarnaast wordt het optreden van horizontale rekken verwaarloosd. Op deze wijze blijven de kruipvergelijking, de evenwichtsvergelijking en de relatie die de verticale positie regelt in tact.

De vraag moet gesteld worden in hoeverre de horizontale gronddruk van invloed zal zijn op het kruipproces. In feite is stiekem verondersteld dat deze grootheid gelijk zal zijn aan de verticale gronddruk.

Dit zal niet het geval zijn. Dit betekent dat het voor de hand ligt dat de p in de kruipvergelijking wat lager uitvalt dan die in de evenwichtsvergelijking. Om toch de huidige eenvoud te handhaven, kan de waarde van de initiële kruipsnelheid e_0 worden bijgesteld.

De enige vergelijking, die aangepast moet worden aan de twee-dimensionale stroming blijkt de waterbalans te zijn. Hierbij worden twee gevallen onderscheiden: vlakke en cilinder symmetrische stroming. Gecombineerd kunnen we schrijven:

$$p - \gamma'_g z + \gamma_w \varphi = \sigma_b + \gamma_w \phi_b \quad \varphi = \frac{w}{\gamma_w} - \zeta \quad v_0 d\zeta = v dz$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) + \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{vlak}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \frac{v_0}{v} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) + \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{axiaal}$$

Voor de volledigheid is de horizontale doorlatendheid onderscheiden van de verticale.

L₂-norm

Om de vergelijking numeriek op te lossen wordt het stromingsvlak opgedeeld in een aantal vlakjes. Hierop worden shape-functies opgespannen. De grootheden, die een rol spelen in het proces, worden hierin uitgedrukt. Als voorbeeld wordt de stijghoogte uitgeschreven:

$$\varphi(x, z, t) = \bar{\varphi}_{i,j}(t) f_{i,j}(x, z) \quad i = 1 \dots I \quad j = 1 \dots J$$

In een latere sectie zullen de shape-functies worden vastgelegd. De uitdrukking moet zowel over de index i als j worden gesommeerd.

Op deze wijze is de dichtheid van onbekenden tot een eindig aantal teruggebracht. Natuurlijk houdt dit in, dat de geconstrueerde oplossing niet volledig juist kan zijn. Er ontstaan afwijkingen. Het numerieke rekenproces streeft ernaar om deze afwijkingen zo klein mogelijk te maken. Dit wordt verwezenlijkt via de techniek van de L₂-norm.

Het principe hiervan gaat aldus. In de vergelijking, die moet worden opgelost, worden alle termen naar de linker zijde gebracht. De som van deze termen is dan nul. Echter, na invulling van de shape-functies blijft er een residu R over:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) - \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} = R \quad \text{vlak}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \frac{v_0}{v} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) - \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} = R \quad \text{axiaal}$$

Dit residu wordt nu geminimaliseerd via de L₂-norm. Hierbij wordt dit residu achtereenvolgens vermenigvuldigd met alle shape-functies, waarna het product wordt uitgeïntegreerd over het gehele stromingsvlak. Hierbij ontstaat een set van vergelijkingen. De numerieke oplossing wijkt minimaal af van de werkelijke oplossing als de hele set van vergelijkingen gelijk gesteld wordt aan nul:

$$\int_0^b \int_0^d R f_{i,j} dz dx = 0 \quad \text{vlak}$$

$$\int_0^b \int_0^d R f_{i,j} dz 2\pi r dr = 0 \quad \text{axiaal}$$

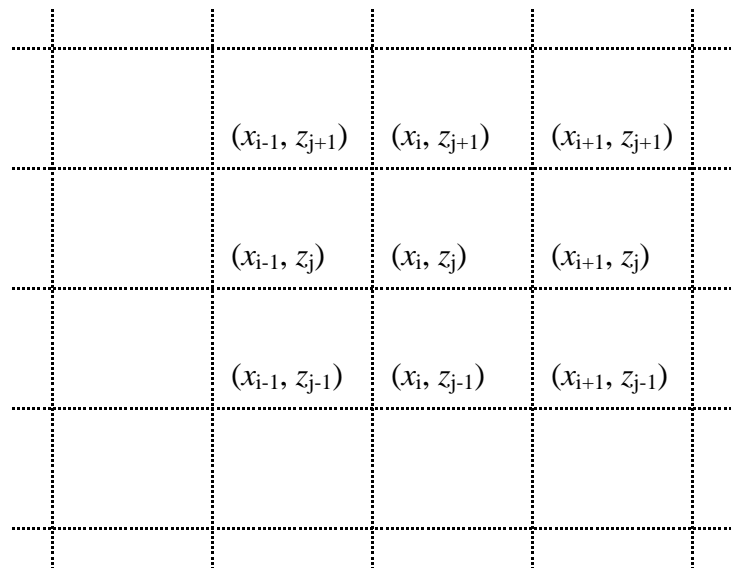
De breedte of straal van het stromingsvlak is aangegeven met b , de dikte met d . Let er hierbij op dat in het geval van cilinder symmetrie vermenigvuldigd moet worden met $2\pi r$ om het oppervlak juist in rekening te brengen. De factor 2π kan worden weggedeeld.

Shape Functies

Om voor de opgestelde vergelijking een oplossing te vinden wordt een numerieke aanpak met Eindige Elementen gevolgd. Elk element wordt voorzien van shape-functies om de oplossing vorm te geven. De elementen mogen in principe willekeurig van vorm zijn. Hier geven we de voorkeur aan een regelmatig opbouw in rechthoeken.

In de figuur zijn deze rechthoeken geschetst. De coördinaten van de hoekpunten zijn aangegeven met indices i en j . Dit kan zowel vlak als cilinder symmetrisch worden uitgevoerd. Elke shape-functie omspant vier elementen. Buiten deze elementen is de waarde ervan 0. In het midden van de vier elementen is de waarde ervan 1. Op de x -as en de z -as is het verloop lineair.

Dit betekent dat in elk element ook vier shape-functies beschreven moeten worden. Het is voldoende één ervan te definiëren. De andere hebben een eendere vorm, die verkregen wordt door spiegeling. Het element rechtsboven het punt x_i, z_j zal worden beschouwd.



Het verloop van de shape-functie is op de assen vastgelegd tussen 0 en 1. In de rest van het veld is de keuze in principe nog vrij. Hierbij zijn twee serieuze mogelijkheden aan de orde. Er kan een vloeiend hyperbolisch verloop gekozen worden, of een geknikt lineair verloop. Beide zullen worden toegelicht.

Het hyperbolische verloop is het meest algemeen en wordt ook wel vierknoopsinterpolatie genoemd. In formulevorm luidt het:

$$f_{i,j} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad z_j \leq z \leq z_{j+1}$$

In de volgende figuur is dit verband ruimtelijk weergegeven. De shape-functie is over alle vier de elementen uitgetekend. Buiten deze elementen is de waarde 0. In de x en z richtingen is de vorm van het oppervlak vlak. In de diagonaalrichtingen is de vorm van het oppervlak parabolisch.

Door alle mogelijke shape-functies samen te stellen ontstaat een bepaald oppervlak in de ruimte. Dit oppervlak bestaat uit zadelvormige vlakjes. Dit is het gevolg van de keuze voor een zeer eenvoudige shape-functie.

Ofschoon een zadelvorm in het algemeen niet nagestreefd wordt, wordt dit niet als tekortkoming beschouwd. Er zijn geen nadelen aan verbonden en het voordeel van eenvoudige shape-functies weegt zwaar. Daarom is dit ook de algemene aanpak bij rekenen met Eindige Elementen.

Voor de gekozen regelmatige opbouw in rechthoeken komt er echter nog een tweede eenvoudige beschrijving in aanmerking. Deze geldt in de segmenten tussen de diagonalen en is volledig lineair. In het segment op de positieve x as luidt deze shape-functie:

$$f_{i,j} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad \frac{z_{j-1} - z_j}{x_{i+1} - x_i} \leq \frac{z - z_j}{x - x_i} \leq \frac{z_{j+1} - z_j}{x_{i+1} - x_i}$$

In de figuur is dit verband ruimtelijk weergegeven. De shape-functie is over alle vier de elementen uitgetekend. Buiten deze elementen is de waarde 0. De figuur heeft de vorm van een tetraëder.

Door alle mogelijke shape-functies samen te stellen ontstaat een bepaald oppervlak in de ruimte. Dit oppervlak bestaat uit rechte vlakjes. De zadelvorming is voorkomen door van rechthoekjes over te gaan op driehoeken.

In principe is een discretisatie met platte vlakjes ietwat netter dan die met zadelpunten. Bij de laatste veroorzaakt en kromming in diagonale richting altijd een lichte tegenkromming in de andere diagonale richting. Maar de prijs van extra driehoeken is hoger. Er moeten nu functieverbanden gedefinieerd worden in vier driehoeken, in plaats van een enkel verband in de rechthoek. Moeilijk is dit niet, maar wel beduidend meer werk met een grotere kans op fouten.

De keus die hier gemaakt wordt valt

op de mathematisch eenvoudigere vierknoopsinterpolatie.

Basis Integraties

Voor het onderhavige probleem zijn vier basis integraties van belang. Deze volgen uit het beschouwen van de geminimaliseerde differentiaalvergelijking. Voor beide toestanden worden de vergelijkingen apart uitgeschreven, waarbij die voor cilinder symmetrie door 2π wordt gedeeld.:

$$\int_0^b \int_0^d \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) - \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} \right] f_{i,j} dz dx = 0$$

$$\int_0^b \int_0^d \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \frac{v_0}{v} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) - \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} \right] f_{i,j} dz r dr = 0$$

Hierin worden de tweede afgeleiden via partiële integratie omgewerkt naar eerste afgeleiden:

$$\int_0^b \int_0^d \left[k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z} + k_x \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) f_{i,j} + \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} f_{i,j} \right] dz dx = 0$$

$$\int_0^b \int_0^d \left[k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z} + k_r \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) f_{i,j} + \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} f_{i,j} \right] dz r dr = 0$$

De vorm van de beide toestanden komt heel goed overeen. Het enige verschil is de factor r .

Omdat de betrokken grootheden uitgeschreven moeten worden in de shape-functies, ontstaan er drie basis integralen met het kwadraat van de shape-functie zelf en zijn afgeleide in x of r en z richting. Deze vier typen moeten nu apart bepaald worden. Van belang hierbij is dat de grondeigenschappen per rechthoek kunnen verschillen. Daarom worden er algemene parameters $\lambda^1_{i,j}$ t/m $\lambda^3_{i,j}$ geïntroduceerd om deze te onderscheiden. In formulevorm luiden dan de integralen voor vlakke stroming:

$$F_1(\lambda) = \int_0^b \int_0^d \lambda^1_{m,n} \frac{\partial f_{m,n}}{\partial z} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z} dz dx \quad F_3(\lambda) = \int_0^b \int_0^d \lambda^3_{m,n} f_{m,n} f_{i,j} dz dx$$

$$F_2(\lambda) = \int_0^b \int_0^d \lambda^2_{m,n} \frac{\partial f_{m,n}}{\partial x} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} dz dx$$

Ter onderscheid zijn indices m en n gebruikt.

Voor cilinder symmetrie gelden eendere vergelijkingen met een extra factor r :

$$G_1(\lambda) = \int_0^b \int_0^d \lambda^1_{m,n} \frac{\partial f_{m,n}}{\partial z} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial z} dz r dr \quad G_3(\lambda) = \int_0^b \int_0^d \lambda^3_{m,n} f_{m,n} f_{i,j} dz r dr$$

$$G_2(\lambda) = \int_0^b \int_0^d \lambda^2_{m,n} \frac{\partial f_{m,n}}{\partial r} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial r} dz r dr$$

Uitwerking voor vlakke stroming

De uit te werken integralen vertegenwoordigen een set vergelijkingen voor de hoekpunten met index i, j . De shape-functie rond deze index betreft vier rechthoekjes. Hierbuiten is de waarde van de shape-functie 0. Dit betekent dat alleen het product van om dit punt heen liggende shape-functies iets oplevert. Er liggen 8 punten omheen. Er zijn dus, inclusief het punt zelf, 9 bijdragen te verwachten.

De shape-functies bestaan uit twee gescheiden termen: een afhankelijk van de diepte z en een afhankelijk van de horizontale afstand x of r . Dit heeft tot gevolg dat de integraties gescheiden kunnen worden uitgevoerd. Elke integratie leidt tot 1 of 2 termen. De bijdragen bestaan dus uit 1, 2 of 4 termen.

Een shape-functie is gedefinieerd op de vier rechthoeken rond het beschouwde punt. Algemeen geldt voor er voor vlakke stroming:

$$f_{i,j} = \begin{array}{cc} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i & \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} & x_{i-1} \leq x \leq x_i & \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & z_{j-1} \leq z \leq z_j & \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & z_{j-1} \leq z \leq z_j \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} & z_j \leq z \leq z_{j+1} & \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} & z_j \leq z \leq z_{j+1} \end{array}$$

Buiten dit gebied is de waarde van de shape-functie 0. Voor cilinder symmetrie wordt x vervangen door r .

Nu moet de oplossing, die bestaat uit de som van alle bijdragen van de shape-functies, met een shape-functie vermenigvuldigd worden en uitgeïntegreerd worden over het hele domein. Per richting moeten er dan drie integraties bepaald worden. Voor $m = i-1, i, i+1$; en voor $n = j-1, j, j+1$. Er moeten dan vier integralen bepaald worden:

$$I_1 = \int_{z_{j+1}}^{z_j} \frac{z_j - z}{z_j - z_{j-1}} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} dz \quad I_2 = \int_{z_{j+1}}^{z_j} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} dz$$

$$I_4 = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{z - z_j}{z_{j+1} - z_j} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} dz \quad I_3 = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} dz$$

De bijdrage in $n = j-1$ is I_1 ; die in j is I_2 plus I_3 ; die in $j+1$ is I_4 . Deze integralen betreffen de shape-functies zelf. Integratie leidt tot:

$$I_1 = \frac{1}{6}(z_j - z_{j-1}) \quad I_2 = \frac{1}{3}(z_j - z_{j-1}) \quad I_3 = \frac{1}{3}(z_{j+1} - z_j) \quad I_4 = \frac{1}{6}(z_{j+1} - z_j)$$

In het geval van de afgeleide is de integrant een constante. In dat geval leidt integratie tot:

$$DI_1 = \frac{-1}{z_j - z_{j-1}} \quad DI_2 = \frac{1}{z_j - z_{j-1}} \quad DI_3 = \frac{1}{z_{j+1} - z_j} \quad DI_4 = \frac{-1}{z_{j+1} - z_j}$$

Voor de x richting geldt een analoge beschouwing.

Nu kunnen de bijdragen aan een vergelijking voor punt i, j worden uitgeschreven. Het duidelijkst is een ruimtelijke notatie rond het beschouwde punt. Deze bestaat uit negen cellen. In de systeemmatrix staan deze cellen natuurlijk alle in dezelfde rij. Voor de intervallen wordt een afkorting gebruikt:

$$\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i) \quad \text{en} \quad \Delta z_j = (z_{j+1} - z_j)$$

Voor de afgeleide in de z -richting moeten de uitdrukkingen volgens de uitgewerkte integralen I voor de x richting gecombineerd worden met DI voor de z richting. Het resultaat is:

$$F_1(\lambda)_{i,j} = \begin{array}{llll} -\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j-1}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_{j-1}} & -\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j-1}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_{j-1}} - \frac{1}{3}\lambda_{i,j-1}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_{j-1}} & -\frac{1}{6}\lambda_{i,j-1}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_{j-1}} & \\ +\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j-1}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_{j-1}} & +\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j-1}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_{j-1}} + \frac{1}{3}\lambda_{i,j-1}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_{j-1}} & +\frac{1}{6}\lambda_{i,j-1}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_{j-1}} & \\ +\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_j} & +\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_j} + \frac{1}{3}\lambda_{i,j}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_j} & +\frac{1}{6}\lambda_{i,j}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_j} & \\ -\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_j} & -\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_j} - \frac{1}{3}\lambda_{i,j}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_j} & -\frac{1}{6}\lambda_{i,j}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_j} & \end{array}$$

De eerste kolom cellen betreft $i-1$, de middelste een combinatie van $i-1$ en i , de laatste alleen i . Dit is analoog het geval voor de j in de rijen. Door de visuele wijze van notatie kan gemakkelijk gecontroleerd worden of er geen vergissingen in de uitwerking gemaakt zijn.

Voor de afgeleide in de x -richting moeten de uitdrukkingen volgens de uitgewerkte integralen DI voor de x richting gecombineerd worden met I voor de z richting. Het resultaat is:

$$F_2(\lambda)_{i,j} = \begin{array}{llll} -\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} & +\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{6}\lambda_{i,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_i} & -\frac{1}{6}\lambda_{i,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_i} & \\ -\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} & +\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{3}\lambda_{i,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_i} & -\frac{1}{3}\lambda_{i,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_i} & \\ -\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_{i-1}} & +\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{3}\lambda_{i,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_i} & -\frac{1}{3}\lambda_{i,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_i} & \\ -\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_{i-1}} & +\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{6}\lambda_{i,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_i} & -\frac{1}{6}\lambda_{i,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_i} & \end{array}$$

Voor de shape-functies zelf moeten de uitdrukkingen volgens de uitgewerkte integralen I voor de x richting gecombineerd worden met I voor de z richting. Het resultaat is:

$$F_3(\lambda)_{i,j} = \begin{array}{llll} +\frac{1}{36}\lambda_{i-1,j-1}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_{j-1} & +\frac{1}{18}\lambda_{i-1,j-1}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_{j-1} + \frac{1}{18}\lambda_{i,j-1}^3 \Delta x_i \Delta z_{j-1} & +\frac{1}{36}\lambda_{i,j-1}^3 \Delta x_i \Delta z_{j-1} & \\ +\frac{1}{18}\lambda_{i-1,j-1}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_{j-1} & +\frac{1}{9}\lambda_{i-1,j-1}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_{j-1} + \frac{1}{9}\lambda_{i,j-1}^3 \Delta x_i \Delta z_{j-1} & +\frac{1}{18}\lambda_{i,j-1}^3 \Delta x_i \Delta z_{j-1} & \\ +\frac{1}{18}\lambda_{i-1,j}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_j & +\frac{1}{9}\lambda_{i-1,j}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_j + \frac{1}{9}\lambda_{i,j}^3 \Delta x_i \Delta z_j & +\frac{1}{18}\lambda_{i,j}^3 \Delta x_i \Delta z_j & \\ +\frac{1}{36}\lambda_{i-1,j}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_j & +\frac{1}{18}\lambda_{i-1,j}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_j + \frac{1}{18}\lambda_{i,j}^3 \Delta x_i \Delta z_j & +\frac{1}{36}\lambda_{i,j}^3 \Delta x_i \Delta z_j & \end{array}$$

Hiermee is de discretisatie voor het geval van vlakke stroming uitgewerkt. De variabele $\lambda_{i,j}$ vertegenwoordigt de grondeigenschappen op het traject Δx_i , Δz_j . Alle cellen moeten nog vermenigvuldigd worden met een nog onbekende sterkte (bijvoorbeeld van de stijghoogte) of een bekende sterkte (bijvoorbeeld van de reksnelheid). Deze sterkte heeft dezelfde index als de beschouwde cel.

Uitwerking voor cilinder symmetrie

Voor cilinder symmetrie is de aanpak analoog. Wat betreft de verticale richting is de aanpak zelfs gelijk. Voor de horizontale richting is het enige verschil dat er een extra factor r in de integrant zit. De shape-functie wordt identiek gekozen aan het geval van vlakke stroming:

$$f_{i,j} = \begin{array}{llll} \frac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} \frac{z-z_{j-1}}{z_j-z_{j-1}} & r_{i-1} \leq r \leq r_i & \frac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i} \frac{z-z_{j-1}}{z_j-z_{j-1}} & r_i \leq r \leq r_{i+1} \\ \frac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} \frac{z_{j+1}-z}{z_{j+1}-z_j} & r_{i-1} \leq r \leq r_i & \frac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i} \frac{z_{j+1}-z}{z_{j+1}-z_j} & r_i \leq r \leq r_{i+1} \end{array}$$

Er moet dus een iets ingewikkelder type integraal worden bepaald:

$$I_1 = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{r_i-r}{r_i-r_{i-1}} \frac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} r dr \quad I_2 = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} \frac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} r dr$$

$$I_4 = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{r-r_i}{r_{i+1}-r_i} \frac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i} r dr \quad I_3 = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i} \frac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i} r dr$$

Om hiervoor de oplossing te vinden maken we gebruik van het resultaat van de eerdere integratie. Deze wordt aan beide zijden van het gelijk teken in mindering gebracht:

$$I_1 - \frac{1}{6}(r_i-r_{i-1})r_{i-1} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{r_i-r}{r_i-r_{i-1}} \frac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} (r-r_{i-1}) dr \quad I_2 - \frac{1}{3}(r_i-r_{i-1})r_{i-1} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} \frac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} (r-r_{i-1}) dr$$

$$I_4 - \frac{1}{6}(r_{i+1}-r_i)r_{i+1} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{r-r_i}{r_{i+1}-r_i} \frac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i} (r-r_{i+1}) dr \quad I_3 - \frac{1}{3}(r_{i+1}-r_i)r_{i+1} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i} \frac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i} (r-r_{i+1}) dr$$

Nu zijn de integralen rechttoe rechtaan uit te werken:

$$I_1 = \frac{1}{12}(r_i+r_{i-1})(r_i-r_{i-1}) \quad I_2 = \frac{1}{12}(3r_i+r_{i-1})(r_i-r_{i-1}) = \frac{1}{6}(r_i+r_{i-1})(r_i-r_{i-1}) + \frac{1}{12}(r_i-r_{i-1})^2$$

$$I_4 = \frac{1}{12}(r_{i+1}+r_i)(r_{i+1}-r_i) \quad I_3 = \frac{1}{12}(r_{i+1}+3r_i)(r_{i+1}-r_i) = \frac{1}{6}(r_{i+1}+r_i)(r_{i+1}-r_i) - \frac{1}{12}(r_{i+1}-r_i)^2$$

De afgeleide van de shape-functie is constant. In dat geval leidt integratie tot:

$$DI_1 = -\frac{1}{2} \frac{r_i+r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} \quad DI_2 = \frac{1}{2} \frac{r_i+r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}} \quad DI_3 = \frac{1}{2} \frac{r_{i+1}+r_i}{r_{i+1}-r_i} \quad DI_4 = -\frac{1}{2} \frac{r_{i+1}+r_i}{r_{i+1}-r_i}$$

We zien dat in radiale richting de afstand tot de oorsprong een rol gaat spelen. Deze bepaalt het typische cilinder symmetrische karakter. De factor is vrij homogeen en van de orde gemiddelde afstand van een cel tot de oorsprong. Alleen bij het product van de shape-functies zelf ligt de nadruk op de binnenste node.

De bijdragen aan de stromingsmatrix zien er net zo uit als die al bepaald zijn voor vlakke stroming. De x wordt vervangen door r . Daarnaast moet de radiale factor worden toegevoegd. Deze is per verticale kolom gelijk. Om de overeenkomst in de uitdrukkingen zichtbaar te maken en om ze niet te gecompliceerd te laten lijken, zullen we de factor onder aan de kolommen zetten. De kolommen moeten hier dus nog mee vermenigvuldigd worden.

Voor de afgeleide in de z -richting moeten de uitdrukkingen volgens de uitgewerkte integralen I voor de r richting gecombineerd worden met DI voor de z richting:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j-1}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_{j-1}} & -\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j-1}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_{j-1}} - \frac{1}{3}\lambda_{i,j-1}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_{j-1}} & -\frac{1}{6}\lambda_{i,j-1}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_{j-1}} \\
& +\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j-1}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_{j-1}} & +\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j-1}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_{j-1}} + \frac{1}{3}\lambda_{i,j-1}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_{j-1}} & +\frac{1}{6}\lambda_{i,j-1}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_{j-1}} \\
F_1(\lambda)_{i,j} = & +\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_j} & +\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_j} + \frac{1}{3}\lambda_{i,j}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_j} & +\frac{1}{6}\lambda_{i,j}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_j} \\
& -\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_j} & -\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j}^1 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta z_j} - \frac{1}{3}\lambda_{i,j}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_j} & -\frac{1}{6}\lambda_{i,j}^1 \frac{\Delta x_i}{\Delta z_j} \\
& \hline
& * \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) & * \frac{1}{4}(3r_i + r_{i-1}) & * \frac{1}{4}(r_{i+1} + 3r_i) & * \frac{1}{2}(r_{i+1} + r_i)
\end{aligned}$$

Voor de afgeleide in de x -richting moeten de uitdrukkingen volgens de uitgewerkte integralen DI voor de r richting gecombineerd worden met I voor de z richting. Het resultaat is:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} & +\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{6}\lambda_{i,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_i} & -\frac{1}{6}\lambda_{i,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_i} \\
& -\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} & +\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{3}\lambda_{i,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_i} & -\frac{1}{3}\lambda_{i,j-1}^2 \frac{\Delta z_{j-1}}{\Delta x_i} \\
F_2(\lambda)_{i,j} = & -\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_{i-1}} & +\frac{1}{3}\lambda_{i-1,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{3}\lambda_{i,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_i} & -\frac{1}{3}\lambda_{i,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_i} \\
& -\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_{i-1}} & +\frac{1}{6}\lambda_{i-1,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{6}\lambda_{i,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_i} & -\frac{1}{6}\lambda_{i,j}^2 \frac{\Delta z_j}{\Delta x_i} \\
& \hline
& * \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) & * \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) & * \frac{1}{2}(r_{i+1} + r_i) & * \frac{1}{2}(r_{i+1} + r_i)
\end{aligned}$$

Voor de shape-functies zelf moeten de uitdrukkingen volgens de uitgewerkte integralen I voor de r richting gecombineerd worden met I voor de z richting. Het resultaat is:

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{36}\lambda_{i-1,j-1}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_{j-1} & +\frac{1}{18}\lambda_{i-1,j-1}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_{j-1} + \frac{1}{18}\lambda_{i,j-1}^3 \Delta x_i \Delta z_{j-1} & +\frac{1}{36}\lambda_{i,j-1}^3 \Delta x_i \Delta z_{j-1} \\
& +\frac{1}{18}\lambda_{i-1,j-1}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_{j-1} & +\frac{1}{9}\lambda_{i-1,j-1}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_{j-1} + \frac{1}{9}\lambda_{i,j-1}^3 \Delta x_i \Delta z_{j-1} & +\frac{1}{18}\lambda_{i,j-1}^3 \Delta x_i \Delta z_{j-1} \\
F_3(\lambda)_{i,j} = & +\frac{1}{18}\lambda_{i-1,j}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_j & +\frac{1}{9}\lambda_{i-1,j}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_j + \frac{1}{9}\lambda_{i,j}^3 \Delta x_i \Delta z_j & +\frac{1}{18}\lambda_{i,j}^3 \Delta x_i \Delta z_j \\
& +\frac{1}{36}\lambda_{i-1,j}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_j & +\frac{1}{18}\lambda_{i-1,j}^3 \Delta x_{i-1} \Delta z_j + \frac{1}{18}\lambda_{i,j}^3 \Delta x_i \Delta z_j & +\frac{1}{36}\lambda_{i,j}^3 \Delta x_i \Delta z_j \\
& \hline
& * \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) & * \frac{1}{4}(3r_i + r_{i-1}) & * \frac{1}{4}(r_{i+1} + 3r_i) & * \frac{1}{2}(r_{i+1} + r_i)
\end{aligned}$$

Hiermee is de discretisatie voor het geval van cilinder symmetrie uitgewerkt. De variabele $\lambda_{i,j}$ vertegenwoordigt de grondeigenschappen op het traject Δr_i , Δz_j . Alle cellen moeten nog vermenigvul-

digd worden met een nog onbekende sterkte (bijvoorbeeld van de stijghoogte) of een bekende sterkte (bijvoorbeeld van de reksnelheid). Deze sterkte heeft dezelfde index als de beschouwde cel. Daarnaast moeten de kolommen nog vermenigvuldigd worden met de radiale factor.

3 Horizontale stroming als lekterm

Uitgangspunten

In de vorige paragraaf is de invloed van de ruimtelijke stroming op een 2D wijze uitgevoerd. Omdat het zakkingspatroon benaderd is via een 1D aanpak, bleef de ingewikkeldheid van de numerieke discretisatie beperkt. In feite bleek het resultaat niet essentieel anders dan in het geval van de 1D situatie zonder drainage. Zij het, dat de matrix veel groter en ingewikkelder wordt.

Het behaalde resultaat gaat ons echter nog niet ver genoeg. Het is niet zozeer het feit dat de code belangrijk moet worden uitgebreid, dat ons tegen staat, maar het feit dat de aanpak halfwas is. Aan de ene kant is het net voldoende 1D gehouden, om de discretisatie niet al te moeilijk te doen lijken, aan de andere kant zijn we toch echt 2D bezig. De charme van MSettle was juist het 1D karakter.

Er is een elegante benadering voorhanden in de vorm van een lekterm. In het geval van lek uit een waterremmend pakket is zo'n lekterm gebruikelijk en van een grote eenvoud. Maar daar is de doorlatendheid van het waterremmende pakket veel kleiner dan die van de watervoerende laag. Hier is de drain veel doorlatender.

Toch heeft het zin een poging te wagen, om een lekterm voor de drainage te definiëren. Deze paragraaf beschrijft wat ervoor nodig is om dit te verwezenlijken.

Aanpak

In de notitie 'Verticale Drainage' is het op te lossen stelsel aangegeven. Dit stelsel is hieronder gekopieerd. De vergelijking boven links beschrijft evenwicht; boven midden definieert de stijghoogte, die algemeen geldig is; boven rechts bepaalt de gewijzigde verticale positie. De vergelijkingen onder vertegenwoordigen de waterbalans. Hierbij zijn twee toestanden beschouwd, vlakke stroming en axiaal symmetrische stroming. Het stelsel luidt:

$$p - \gamma'_g z + \gamma_w \varphi = \sigma_b + \gamma_w \phi_b \quad \varphi = \frac{w}{\gamma_w} - \zeta \quad v_0 d\zeta = v dz$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) + \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{vlak}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \frac{v_0}{v} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{v_0} \right) + \frac{v - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{axiaal}$$

Alleen de waterbalans in dit stelsel is twee-dimensionaal. Op deze vergelijking richten we ons. De horizontale stromingsterm hierin heeft de meeste belangstelling. De overige termen worden schematisch met behulp van een operator weergegeven:

$$O(\varphi, v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad \text{vlak}$$

$$O(\varphi, v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \frac{v_0}{v} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad \text{axiaal}$$

Op dit stelsel passen we nu middeling toe. In het rechterdeel van de vergelijking moet de operator O dan worden toegepast op de gemiddelde grootheden. Maar in het linkerdeel levert de middeling een debiet op:

$$O(\bar{\varphi}, \bar{v}) = \frac{-k_x}{x_1 - x_0} \frac{v_0}{v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x_0} \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \, dx \quad \text{vlak}$$

$$O(\bar{\varphi}, \bar{v}) = \frac{-2k_r}{r_1^2 - r_0^2} \frac{v_0}{v} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r_0} \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{\pi(r_1^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^{r_1} 2\pi r \varphi \, dr \quad \text{axiaal}$$

Deze vergelijking moet nu over de diepte worden opgelost. Daartoe moet eerst het debiet naar de drain vastgelegd worden. Door het uitmiddelen is de detaillering in de horizontaal verloren geraakt.

We zullen dus terug moeten keren naar de oorspronkelijke twee-dimensionale formulering. Hierin moeten we proberen in de horizontale richting te integreren met als doel het debiet naar de drain expliciet uit te schrijven. Bij de eerste directe integratie wordt een integratieconstante Q onderscheiden.

$$\begin{aligned} k_x \frac{v_0}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \int O(\varphi, v) dx + Q && \text{vlak} \\ &= (x - x_0) O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + Q + \int \{O(\varphi, v) - O(\bar{\varphi}, \bar{v})\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi k_r \frac{v_0}{v} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \int O(\varphi, v) 2\pi r dr + Q && \text{axiaal} \\ &= \pi(r^2 - r_0^2) O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + Q + \int \{O(\varphi, v) - O(\bar{\varphi}, \bar{v})\} 2\pi r dr \end{aligned}$$

Een ophoging heeft doorgaans wel enige stijfheid. De vervorming zal dan niet al te veel in de horizontaal variëren. Dit betekent dat een gemiddelde waarde voor de vervorming een goede aanname is. Dit is niet het geval voor de stijghoogte. De overgebleven integraal in het rechter deel is dus niet a priori nul.

Over het gehele horizontale gebied genomen levert deze integraal wel nul op, vanwege de definitie van gemiddelde stijghoogte en vervorming. Omdat in de uiteindelijke uitwerking het gehele gebied betrokken wordt, zal de invloed van de integraal niet erg groot zijn. Daarom wordt de integraal verwaarloosd:

$$k_x \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (x - x_0) O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + Q \quad \text{vlak}$$

$$2\pi k_r \frac{v_0}{\bar{v}} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \pi(r^2 - r_0^2) O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + Q \quad \text{axiaal}$$

De constante Q vertegenwoordigt het specifiek debiet naar de drain.

De verkregen uitdrukking is weliswaar genoteerd als debiet, maar nog niet geschikt om de gewenste informatie te leveren. In feite staat er slechts dat het debiet naar de drain gelijk is aan het debiet naar de drain. Om een uitdrukking voor de stijghoogte te verkrijgen wordt nogmaals geïntegreerd:

$$k_x \frac{v_0}{v} (\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{2} (x - x_0)^2 O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + Q (x - x_0) \quad \text{vlak}$$

$$2\pi k_r \frac{v_0}{v} (\varphi - \varphi_0) = \pi \left\{ \frac{1}{2} (r^2 - r_0^2) - r_0^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right\} O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + Q \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad \text{axiaal}$$

Hier is een integratieconstante φ_0 ingevoerd, die overeenkomt met de stijghoogte in de drain.

Nu zijn we al een heel eind verder op weg. Het debiet naar de drain Q is uitgedrukt in de operator O en een lekbijdrage evenredig met het stijghoogteverschil. Het enige wat nog te doen staat, is het uitmiddelen van de vergelijking om het geheel te noteren in de gemiddelde stijghoogte. Daartoe wordt de stijghoogte over het gehele gebied uitgemiddeld:

$$k_x \frac{v_0}{v} (\bar{\varphi} - \varphi_0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{2} (x - x_0)^2 O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + Q (x - x_0) \right] \frac{dx}{x_1 - x_0} \quad \text{vlak}$$

$$2\pi k_r \frac{v_0}{v} (\bar{\varphi} - \varphi_0) = \int_{r_0}^{r_1} \left[\pi \left\{ \frac{1}{2} (r^2 - r_0^2) - r_0^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right\} O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + Q \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \frac{2r dr}{r_1^2 - r_0^2} \quad \text{axiaal}$$

De integraties worden uitgevoerd. Na deling door de oppervlakte-term volgt er:

$$k_x \frac{v_0}{v} (\bar{\varphi} - \varphi_0) = \frac{1}{6} (x_1 - x_0)^2 O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + \frac{1}{2} Q (x_1 - x_0) \quad \text{vlak} \quad \text{axiaal}$$

$$2\pi k_r \frac{v_0}{v} (\bar{\varphi} - \varphi_0) = \pi \left[\frac{1}{4} (r_1^2 - r_0^2) - r_0^2 \left\{ \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) - \frac{1}{2} \right\} \right] O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + \left\{ \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) - \frac{1}{2} \right\} Q$$

Nu is het beoogde resultaat bereikt: een expliciete uitdrukking voor het debiet naar de drain. Deze wordt expliciet geschreven:

$$Q = k_x \frac{v_0}{v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x_0} = 2k_x \frac{v_0}{v} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{x_1 - x_0} - \frac{1}{3} (x_1 - x_0) O(\bar{\varphi}, \bar{v}) \quad \text{vlak} \quad \text{axiaal}$$

$$Q = 2\pi k_r \frac{v_0}{v} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r_0} = 2\pi k_r \frac{v_0}{v} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) - \frac{1}{2}} - \pi \left[\frac{\frac{1}{4} (r_1^2 - r_0^2)}{\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) - \frac{1}{2}} - r_0^2 \right] O(\bar{\varphi}, \bar{v})$$

Dit is een mooi moment om te controleren of er goed gecijferd is. Als het verschil tussen r_1 en r_0 relatief klein is, dan komt dit redelijk overeen met een vlakke stroming. De beide uitdrukkingen voor vlakke en axiaal symmetrische stroming moeten dan naar elkaar toe groeien. Om te zien of dit zo is, ontwikkelen we de logaritme in een Taylor-reeks:

$$\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \ln \left(1 + \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} \right) - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_0^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} \right)^2 \right\} - \frac{1}{2}$$

Het is voldoende om drie termen mee te nemen. Verdere uitwerking leidt tot:

$$\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_0^2} + \frac{1}{3} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} \right\} \sim \frac{1}{4} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} \right\}$$

In de laatste stap is een hogere orde weggelaten. Substitutie van deze benadering in de formule voor het debiet voert tot:

$$\lim_{r_1 \rightarrow r_0} Q = 2\pi k_r \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{\frac{1}{4} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2}} - \pi \frac{1}{3} (r_1^2 - r_0^2) O(\bar{\varphi}, \bar{v})$$

Of te wel:

$$\lim_{r_1 \rightarrow r_0} \frac{Q}{2\pi r_0} = 2k_r \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{r_1 - r_0} - \frac{1}{3} (r_1 - r_0) O(\bar{\varphi}, \bar{v})$$

De overeenkomst met de vlakke vervorming is perfect. Dit boezemt voldoende vertrouwen in dat er tijdens de afleiding geen fouten gemaakt zijn.

De gewenste gemiddelde stromingsvergelijking ontstaat door het substitueren van het bepaalde horizontale debiet:

$$O(\bar{\varphi}, \bar{v}) = \frac{1}{3} O(\bar{\varphi}, \bar{v}) - 2k_x \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{(x_1 - x_0)^2} \quad \text{vlak} \quad \text{axiaal}$$

$$O(\bar{\varphi}, \bar{v}) = \left[\frac{\frac{1}{4}(r_1^2 - r_0^2)}{r_1^2 \ln(r_1/r_0) - \frac{1}{2}(r_1^2 - r_0^2)} - \frac{r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \right] O(\bar{\varphi}, \bar{v}) - 2k_r \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{r_1^2 \ln(r_1/r_0) - \frac{1}{2}(r_1^2 - r_0^2)}$$

Behalve het controleren van fouten moet er ook gekeken worden of het resultaat fysisch zin heeft. De stromingsvergelijking vertelt het volgende verhaal.

De operator O stelt het debiet voor dat bij gemiddelde verticale afstroming overblijft. Voor een deel veroorzaakt dit directe infiltratie in de poriën. Voor vlakke stroming is dit $1/3$ deel van het overblijvende debiet, voor axiaal symmetrische stroming is dit minder. De rest komt via weerstandsstroming in de drain terecht. Indien de drain ontbreekt, blijkt er alleen maar verticale stroming te zijn.

Tenslotte wordt het resultaat compact geschreven:

$$O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + 3k_x \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{(x_1 - x_0)^2} = 0 \quad \text{vlak}$$

$$\left[\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{\frac{1}{4}(r_1^2 - r_0^2)}{r_1^2 \ln(r_1/r_0) - \frac{1}{2}(r_1^2 - r_0^2)} \right] O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + 2k_r \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{r_1^2 \ln(r_1/r_0) - \frac{1}{2}(r_1^2 - r_0^2)} = 0 \quad \text{axiaal}$$

Er blijkt sprake te zijn van een heuse leklengte, die als volgt gedefinieerd is:

$$O(\bar{\varphi}, \bar{v}) + k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{\lambda^2} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{3} \frac{k_z}{k_x} (x_1 - x_0)^2 \quad \text{vlak}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \frac{k_z}{k_r} r_1^2 \left[\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} \right] = \quad \text{axiaal}$$

Horizontale afstroming naar een verticale drain wordt dus in rekening gebracht door het introduceren van een eenvoudige lekterm in de differentiaal vergelijking voor de gemiddelde stijghoogte en vervorming.

Numerieke aanpak

Door een handig middelingproces is het twee-dimensionale stromingsprobleem teruggebracht tot een één-dimensionale beschrijving. Hierin speelt het begrip ‘lek lengte’ een rol, die afhangt van geometrie en de verhouding tussen horizontale en verticale doorlatendheid. De op te lossen differentiaal vergelijking reduceert hierdoor tot:

$$\bar{p} - \gamma'_g z + \gamma_w \bar{\varphi} = \sigma_b + \gamma_w \phi_b \quad v_0 d\zeta = \bar{v} dz$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{v}}{v_0} \right) + \frac{\bar{v} - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{\lambda^2} \quad \bar{\varphi} = \frac{\bar{w}}{\gamma_w} - \zeta$$

Omdat het kruipmodel niet-lineair is en omdat de samendrukbare ondergrond gelaagd is, is het lastig om deze vergelijking analytisch aan te pakken. Een numerieke aanpak ligt voor de hand. Gekozen wordt voor een variatie principe volgens de zogenaamde L2-norm.

Hierbij wordt in de z -richting een zogenaamde shape-functie geïntroduceerd. Dit is een bijdrage aan het uiteindelijke resultaat via een zekere vorm in een gebiedje. De sterkte van de bijdrage is een functie van de tijd. Buiten dit gebiedje is de bijdrage nul. Alle gebiedjes tezamen vormen het gehele gebied.

Aldus is het aantal onbekenden teruggebracht tot een eindig aantal. Echter, dit eindige aantal is onvoldoende om een exacte oplossing te formeren. Er zal een kleine fout gemaakt worden. Deze fout wordt zo klein mogelijk gemaakt door het variatieprincipe van de L2-norm. Hierbij wordt de fout vermenigvuldigd met de afzonderlijke shape-functies en uitgeïntegreerd over het gehele gebied. Elke integratie afzonderlijk wordt nul gesteld.

Aldus worden er evenveel vergelijkingen verkregen als onbekende sterkten. Zij zijn dan bepaald. Weliswaar is het stelsel nog niet expliciet geformuleerd, omdat er nog een afgeleide naar de tijd aanwezig is. Deze wordt eenvoudigweg gelineariseerd.

In het rapport MSettle: één-dimensionale zetting met kruip en consolidatie, CO-374240/51 en SE-59729, december '99, is dit allemaal al uitgelegd en uitgewerkt. Omdat er nu een extra lekterm is toegevoegd, zal hier opnieuw de volledige uitwerking gegeven worden.

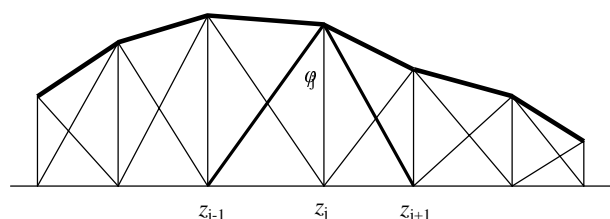
Uitwerking

De shape-functies worden aangegeven met $f_j(z)$. De diverse sterkten krijgen dezelfde notatie als de variabele zelf, onderscheiden met een ‘dakje’ en voorzien van een index. Voor de stijghoogte, water-spanning, effectieve gronddruk en het volume geldt:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(z,t) &= \hat{\varphi}_j(t) f_j(z) & \bar{p}(z,t) &= \hat{p}_j(t) f_j(z) \\ \bar{w}(z,t) &= \hat{w}_j(t) f_j(z) & \bar{v}(z,t) &= \hat{v}_j(t) f_j(z) \end{aligned} \quad j = 1 \dots J$$

Op de notatie is de Einstein conventie van toepassing: sommatie over alle j .

Er zijn vele soorten shape-functies. In de figuur is een voorbeeld gegeven van een lineaire verdeling. De shape-functie f_j is overal nul, behalve op het traject z_{j-1} tot z_{j+1} . Daar heeft deze de vorm van een hoedje. De waarde van de shape-



functie f_j in punt z_j is genormeerd op 1. De tijdsafhankelijke factor regelt de werkelijke waarde van de gewenste functie af. Na optelling van alle bijdragen ontstaat er een lineaire benadering per gebiedje.

In plaats van een lineaire vorm, worden ook gladde curven toegepast, zoals een parabool. Deze hebben een extra vrijheidsgraad om een betere aansluiting af te dwingen. Echter, zo'n aansluiting hoeft per definitie niet glad te zijn. Indien geëist wordt dat de shape-functie glad is in punt z_j , dan zijn de aansluitingen op de beide andere punten veel slechter. In de discretisatie zullen bulten en bobbelts zich spontaan ontwikkelen. Een lineaire benadering is eenvoudig en zeker.

Door de introductie van de shape-functies kan niet meer helemaal voldaan worden aan de gestelde differentiaal vergelijking. Er ontstaat een afwijking aan te geven met de R van residu:

$$R = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\bar{p}^a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{v}}{v_0} \bar{p}^a \right) + \frac{a}{\bar{p}} \frac{\bar{v}}{v_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\bar{v} - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{\lambda^2}$$

Merk op dat de reksnelheid is gesplitst in de seculaire en directe reksnelheid. Dit kan eenvoudig wiskundig gecontroleerd worden.

Om het residu zo klein mogelijk te houden wordt een minimalisatietechniek aangewend. Het is gebruikelijk de zogenaamde L_2 -norm te hanteren. Hierbij wordt het residu vermenigvuldigd met elke shape-functie apart en over het gehele gebied geïntegreerd. Door te eisen dat het resultaat van integratie nul is worden er net zoveel voorwaarden verkregen als er onbekende factoren zijn:

$$\int_0^d R f_i dz = 0$$

Omdat de shape-functie f_j alleen op het traject z_{i-1} tot z_{i+1} een waarde heeft, is het integratiegebied dus beperkt. De set vergelijkingen heeft de volgende algemene vorm:

$$\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\bar{p}^a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{v}}{v_0} \bar{p}^a \right) + \frac{a}{\bar{p}} \frac{\bar{v}}{v_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\bar{v} - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{\lambda^2} \right] f_i dz = 0$$

Er is nog even gewacht met het invullen van de linearisaties van de diverse grootheden. Dit geeft enerzijds de kans om de vergelijking nog iets verder uit te werken. Anderzijds is de vergelijking niet-lineair, zodat nog niet duidelijk is, welke grootheden gelineariseerd moeten worden en welke gemiddeld zullen worden meegenomen.

Bij lineaire shape-functies verdwijnt de tweede afgeleide. Dit leidt tot een impasse. Daarom wordt de eerste term van de integraal partieel geïntegreerd. Omdat f_i op beide randen nul is volgt er:

$$\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \left[k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} f_i' + \left\{ \frac{1}{\bar{p}^a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{v}}{v_0} \bar{p}^a \right) - \frac{a}{\bar{p}} \frac{\bar{v}}{v_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\bar{v} - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + k_z \frac{v_0}{\bar{v}} \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{\lambda^2} \right\} f_i \right] dz = 0$$

In de vergelijking onderscheiden we eerst de verticale stromingsterm, vervolgens de seculaire en directe reksnelheid, dan de samendrukbaarheid van het water en tenslotte de horizontale lek. De seculaire reksnelheid volgt direct uit het kruimodel, dat beschreven is in rapport MSettle: één-dimensionale zetting met kruip en consolidatie, CO-374240/51 en SE-59729, december '99. Er geldt:

$$\frac{1}{\bar{p}^a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{v}}{v_0} \bar{p}^a \right) = -\varepsilon_0 \left(\frac{v}{v_0} \right)^{c+1} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{b}{c}}$$

Deze reksnelheid is geen ‘vrije’ afgeleide naar de tijd. De waarde is bepaald door de rek en effectieve spanning van het moment. Uit numeriek oogpunt is dit vervelend, omdat een vrije afgeleide nodig is om numerieke ruis uit te dempen. Hiervoor zijn nu alleen de directe reksnelheid en de samendrukbaarheid van het water beschikbaar.

Directe invulling van de linearisaties leidt tot een ongewenste complicering van de uitdrukking. Er zal iets scherper geschematiseerd moeten worden. Een quotiënt van stijghoogte en rek is bijvoorbeeld in de knopen bekend, φ_j / v_j , maar in het veld enigszins afwijkend van precies linear. Maar er wordt geen grote fout gemaakt door dit toch aan te nemen. Dit betekent dat in het deel tussen accolades onder de integraal alle grootheden vervangen kunnen worden door de optelling van hun sterkte maal de shape-functie.

Bij de eerste term onder de integraal mag dit niet, omdat hier de afgeleide van de stijghoogte voorkomt. De afgeleide naar de diepte is constant per element. Dit betekent dat bij benadering met de gemiddelde vervorming (per element) gerekend mag worden. Elke integratie bestaat uit twee aansluitende elementen. Er wordt ervoor gekozen om de gemiddelde waarde van twee elementen te nemen. Dit is iets minder precies, maar veel eenvoudiger en daardoor misschien ook wel iets stabielier.

De set met vergelijkingen komt er nu aldus uit te zien:

$$\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \left[k_z \frac{v_0}{\hat{v}_i} \hat{\varphi}_j f_j' f_i' + \left\{ \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) - \frac{a}{\hat{p}_j} \frac{\hat{v}_j}{v_0} \frac{d\hat{p}_j}{dt} + \frac{\hat{v}_j - (1-n)v_0}{v_0 K_w} \frac{d\hat{w}_j}{dt} + k_z \frac{v_0}{\hat{v}_j} \frac{\hat{\varphi}_j - \varphi_0}{\lambda^2} \right\} f_j f_i \right] dz = 0$$

De partiële differentiaties zijn vervangen door gewone, omdat de sterkten slechts van één variabele afhangen. Enigszins verwarrend is het dat de Einstein conventie hier niet opgaat voor de index i in de eerste term. We kunnen beter stellen dat er over j gesommeerd moet worden. Voor i staan er J-2 afzonderlijke vergelijkingen. Er zijn geen voorwaarden voor $i = 0$ en $i = J-1$, omdat daar de randvoorwaarden van kracht zijn.

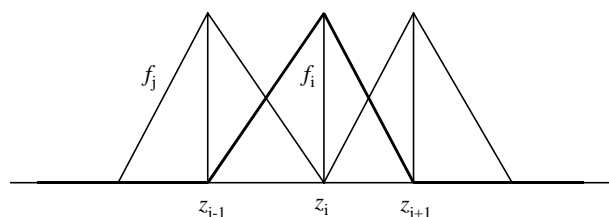
De merites van de aanpak beginnen al zichtbaar te worden. De integratie naar z kan nu in zijn geheel worden uitgevoerd en is in het gehele tijdsdomein geldig. Het resultaat hangt nog wel af van de vorm van de shape-functie. Zoals al gesteld, is deze het eenvoudigst voor een lineair verloop. De oplossing is dan een curve, die bestaat uit schoksgewijs aaneengesloten lijnen. Een hogere orde familie shape-functies hoeft zo'n verloop niet noodzakelijkerwijs gladder te maken. Onze keus valt op een lineaire aanpak.

Na integratie naar z kan het stelsel uitgeschreven worden in de vorm van een tridiagonale matrix. Deze is opgebouwd uit de som van de afzonderlijke termen onder de integraal. In algemene vorm zullen we zo'n bijdrage met de volgende notatie aangeven:

$$F_{ij}'(\beta) = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \beta_{i-1} f_j' f_i' dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} \beta_i f_j' f_i' dz \quad F_{ij}(\beta) = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \beta_{i-1} f_j f_i dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} \beta_i f_j f_i dz$$

β is een parameter, bijvoorbeeld de doorlatendheid, die constant is in een element. Uitwerking van de integralen is eenvoudig, we gaan als volgt te werk.

De shape-functies f_i hebben overal een waarde nul, behalve op het traject $z_{i-1} - z_{i+1}$. In z_i is de waarde van f_i gelijk aan 1. De vorm bestaat uit twee rechte lijnen (hoedje). In de figuur is dit duidelijk gemaakt. f_i is vet aangegeven en enkele willekeurige shape-functies f_j zijn met een dunne lijn aangegeven.



Vanwege het karakter van f_i levert integratie alleen iets op voor de waarden van j gelijk aan $i-1$, i en $i+1$. De afgeleide van een rechte lijn is constant. Let hierbij wel op het teken van de afgeleiden en bedenk dat de helling van de lijn een factor $1/(z_{i+1}-z_i)$ op het traject $z_i \dots z_{i+1}$ introduceert. Integratie van de afgeleide term is dus triviaal: $(z_{i+1}-z_i)$.

Het product van twee lineaire shape-functies op een traject $z_i \dots z_{i+1}$ levert een parabool op. Bij tegengestelde helling zit de top in het midden van het gebied en is de maximale waarde $1/4$. Het oppervlak onder zo'n parabool is standaard: $1/6 (z_{i+1}-z_i)$. Bij gelijke helling zit het minimum 0 op de ene rand en is de waarde op de andere rand 1 . Het oppervlak onder zo'n parabool is standaard: $1/3 (z_{i+1}-z_i)$.

Integratie levert aldus het volgende op:

$$\begin{array}{ccc}
 & j = i - 1 & j = i & j = i + 1 \\
 F'_{ij}(\beta) = & \frac{-\beta_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} & \frac{\beta_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} + \frac{\beta_i}{z_{i+1} - z_i} & \frac{-\beta_i}{z_{i+1} - z_i} \\
 F_{ij}(\beta) = & \frac{1}{6} \beta_{i-1} (z_i - z_{i-1}) & \frac{1}{3} \beta_{i-1} (z_i - z_{i-1}) + \frac{1}{3} \beta_i (z_{i+1} - z_i) & \frac{1}{6} \beta_i (z_{i+1} - z_i)
 \end{array}$$

Het resultaat is een tri-diagonale matrix. De nullen zijn hieruit weggelaten, waarna er drie kolommen resulteren.

We gaan nu weer terug naar de integraalvorm. Daarin substitueren we voor de integraties de geïntroduceerde afkortingen F' en F . Voor de volledigheid nemen we de vergelijking voor de seculaire rek op, want die is nodig bij het oplossingsproces. Er volgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) &= -\varepsilon_0 \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \right)^{\frac{1}{c}+1} \left(\frac{\hat{p}_j}{p_0} \right)^{\frac{b}{c}} - \frac{v_0}{\hat{v}_i} F'_{ij}(k_z) \hat{\phi}_j = \\
 F_{ij}(1) \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) &- F_{ij}(a) \frac{1}{\hat{p}_j} \frac{\hat{v}_j}{v_0} \frac{d\hat{p}_j}{dt} + \frac{1}{K_w} \left\{ F_{ij}(1) \frac{\hat{v}_j}{v_0} - F_{ij}(1-n) \right\} \frac{d\hat{w}_j}{dt} + F_{ij} \left(\frac{k_z}{\lambda^2} \right) \frac{v_0}{\hat{v}_j} (\hat{\phi}_j - \phi_0)
 \end{aligned}$$

De vergelijkingen zijn uitgeschreven in de stijghoogte, waterdruk en effectieve spanning. De waterdruk is direct om te werken in de stijghoogte en de plaatshoogte. Omdat er alleen problemen doorge-rekend zullen worden, waarbij een belastingverhoging instantaan plaats heeft, is de som van effectieve spanning en stijghoogte maal soortelijk gewicht van water constant. Wat de vrije tijdsafgeleiden betreft, wordt er overgegaan op een notatie in de stijghoogte alleen en de stijghoogte incrementen worden bij elkaar geplaatst:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) &= -\varepsilon_0 \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \right)^{\frac{1}{c}+1} \left(\frac{\hat{p}_j}{p_0} \right)^{\frac{b}{c}} \left[F_{ij}(a) \frac{\gamma_w}{\hat{p}_j} \frac{\hat{v}_j}{v_0} + \frac{\gamma_w}{K_w} \left\{ F_{ij}(1) \frac{\hat{v}_j}{v_0} - F_{ij}(1-n) \right\} \right] \frac{d\hat{\phi}_j}{dt} = \\
 - F_{ij}(1) \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) &- \frac{\gamma_w}{K_w} \left\{ F_{ij}(1) \frac{\hat{v}_j}{v_0} - F_{ij}(1-n) \right\} \frac{d\hat{\zeta}_j}{dt} - F_{ij} \left(\frac{k_z}{\lambda^2} \right) \frac{v_0}{\hat{v}_j} (\hat{\phi}_j - \phi_0) - \frac{v_0}{\hat{v}_i} F'_{ij}(k_z) \hat{\phi}_j
 \end{aligned}$$

Voor de eenvoud gaan we nu over op enkele steno-grootheden, die elke tijdstap opnieuw moeten worden uitgerekend:

$$A_{ij} = F_{ij}(a) \frac{\gamma_w}{\hat{p}_j} \frac{\hat{v}_j}{v_0} + C_{ij} \quad B_{ij} = \frac{v_0}{\hat{v}_i} F'_{ij}(k_z) + D_{ij}$$

$$C_{ij} = \frac{\gamma_w}{K_w} \left[F_{ij}(1) \frac{\hat{v}_j}{v_0} - F_{ij}(1-n) \right] \quad D_{ij} = F_{ij} \left(\frac{k_z}{\lambda^2} \right) \frac{v_0}{\hat{v}_j} \quad E_{ij} = F_{ij}(1)$$

Hierdoor worden de vergelijkingen iets eenvoudiger van vorm:

$$\frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) = -\varepsilon_0 \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \right)^{1+c} \left(\frac{\hat{p}_j}{p_0} \right)^{\frac{b}{c}} \quad A_{ij} \frac{d\hat{\phi}_j}{dt} + B_{ij} \hat{\phi}_j = -C_{ij} \frac{d\hat{\zeta}_j}{dt} + D_{ij} \varphi_0 - E_{ij} \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right)$$

A_{ij} bevat de instantane stijfheid van de grond en de samendrukbaarheid van het water. Deze treedt dus op als een soort consolidatiecoëfficiënt. B_{ij} bestaat uit de stromingsterm en de lekterm. Aan de rechterkant van de vergelijking staan twee bergingstermen: vervorming door kruip met coëfficiënt E_{ij} en de samendrukbaarheid van het water door de zettingen met coëfficiënt C_{ij} . D_{ij} regelt de lek af op de stijghoogte in de drains.

De uitwerking van de vergelijking gebeurt numeriek. Er wordt een tijdsincrement Δt beschouwd en de afgeleide wordt vervangen door een secans modulus. De overige termen worden ergens op het traject $t \dots t+\Delta t$ beschouwd:

$$\frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) = -\varepsilon_0 \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \right)^{1+c} \left(\frac{\hat{p}_j}{p_0} \right)^{\frac{b}{c}}$$

$$A_{ij} \frac{(\hat{\phi}_j)_{t+\Delta t} - (\hat{\phi}_j)_t}{\Delta t} + B_{ij} (\hat{\phi}_j)_{t+\alpha\Delta t} = - \left\{ C_{ij} \frac{d\hat{\zeta}_j}{dt} + D_{ij} \varphi_0 + E_{ij} \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) \right\}_{t+\alpha\Delta t}$$

Voor $\alpha = 1/2$ wordt het beste resultaat verkregen, omdat afgeleide en secans modulus dan redelijk overeenstemmen; dit wordt Heun impliciet genoemd. $\alpha = 0$ heet expliciet en $\alpha = 1$ impliciet. Expliciet rekenen is direct, maar is meestal instabiel. Impliciet rekenen is degelijk, maar onderwaardeert de afgeleide, zodat precisie alleen met kleine tijdstappen bereikt wordt. Heun impliciet volgt de afgeleide met grotere precisie en is vaak voldoende stabiel.

Onder verwaarlozing van een tweede orde bijdrage kan de vergelijking nu herschikt worden tot:

$$\frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) = -\varepsilon_0 \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \right)^{1+c} \left(\frac{\hat{p}_j}{p_0} \right)^{\frac{b}{c}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \right) + \frac{\hat{v}_j}{v_0} \frac{a}{\hat{p}_j} \frac{d\hat{p}_j}{dt}$$

$$\left(\frac{A_{ij}}{\Delta t} + \alpha B_{ij} \right) \left\{ (\hat{\phi}_j)_{t+\Delta t} - (\hat{\phi}_j)_t \right\} + B_{ij} (\hat{\phi}_j)_t = - \left\{ C_{ij} \frac{d\hat{\zeta}_j}{dt} + D_{ij} \varphi_0 + E_{ij} \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) \right\}_{t+\alpha\Delta t}$$

De seculaire reksnelheid is nog verder uitgewerkt, om uit de afgeleide van de totale reksnelheid gemakkelijk de rek te kunnen bepalen. Er is nu een vergelijking ontstaan, waarmee het increment van de stijghoogte is vastgelegd. Helaas is het rechterdeel nog niet bekend op het (halve) tijdsincrement. Er moet dus via een iteratiestap een schatting van gemaakt worden.

Overwegingen ter voorkoming van oscillaties

Op dit moment is er een zo nauwkeurig mogelijke discretisatie gemaakt van de op te lossen differentiaalvergelijking. Het is echter nog de vraag, of het systeem zal convergeren en numerieke ruis niet de overhand zal krijgen. Na een belastingverhoging ontstaat er een plotselinge wateroverspanning. Op drainerende randen ligt de stijghoogte vast, zodat aanvankelijk grote sprongen kunnen ontstaan in stijghoogte en ook rek. Dit brengt de stabiliteit van de berekening in gevaar.

Nu is het mogelijk de invloed van die sprongen af te vlakken. We hebben al gezien dat bij de stromingsterm gewerkt wordt met de gemiddelde rek over twee aaneengesloten elementen. Dit was gedaan vanwege praktische redenen. In feite moest gewerkt worden met de gemiddelde rek per element. Behalve het voordeel van een eenvoudige uitdrukking, onderdrukt deze aanname ook ruis.

Immers, de rek op de rand, die aanvankelijk sterk afwijkt van die in het veld, wordt aldus uit de berekening weggelaten. Alleen de rekken in het veld spelen mee. Die op de rand is slechts een gevolg van de berekening. Hierdoor is de kans dat het rekenproces gladjes verloopt groter. Voor de andere termen dan de stromingstermen hebben we dit achterwege gelaten.

Het is een goed idee dit alsnog te doen. In het veld zal de invloed ervan nauwelijks opgemerkt worden, terwijl de - letterlijk - scherpe kantjes er af zijn. Het enige dat we hiervoor moeten doen is de index j in de rektermen van de afkortingen te vervangen door een index i :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= F_{ij}(a) \frac{\gamma_w}{\hat{p}_j} \frac{\hat{v}_i}{v_0} + C_{ij} & B_{ij} &= \frac{v_0}{\hat{v}_i} F'_{ij}(k_z) + D_{ij} \\ C_{ij} &= \frac{\gamma_w}{K_w} \left[F_{ij}(1) \frac{\hat{v}_i}{v_0} - F_{ij}(1-n) \right] & D_{ij} &= F_{ij} \left(\frac{k_z}{\lambda^2} \right) \frac{v_0}{\hat{v}_i} & E_{ij} &= F_{ij}(1) \end{aligned}$$

Maar het kan nog beter. Het rechter deel van de vergelijking bevat de op de rand explosieve seculaire reksnelheid. Voorts de veel minder explosieve zettingsnelheid en de constante stijghoogte in de drain. Ook hier is middeling een voorzorg tegen oscillaties:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{p}_j^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \hat{p}_j^a \right) &= -\varepsilon_0 \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \right)^{1+c} \left(\frac{\hat{p}_j}{p_0} \right)^b = \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_j}{v_0} \right) + \frac{\hat{v}_j}{v_0} \frac{a}{\hat{p}_j} \frac{d\hat{p}_j}{dt} \\ \left(\frac{A_{ij}}{\Delta t} + \alpha B_{ij} \right) \left\{ (\hat{\phi}_j)_{t+\Delta t} - (\hat{\phi}_j)_t \right\} + B_{ij} (\hat{\phi}_j)_t &= - \left\{ C_{ij} \frac{d\hat{\zeta}_i}{dt} + D_{ij} \varphi_0 + E_{ij} \frac{1}{\hat{p}_i^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{v}_i}{v_0} \hat{p}_i^a \right) \right\}_{t+\alpha\Delta t} \end{aligned}$$

Ook hier doen (in het rechterlid) de randen tijdens de berekening niet mee. In het linkerlid speelt de rand natuurlijk de rol van randvoorwaarde.

De matrices C , D en E mogen nu direct over hun drie kolommen gesommeerd worden volgens:

$$\sum_j F_{ij}(\beta) = \frac{1}{2} \beta_{i-1} (z_i - z_{i-1}) + \frac{1}{2} \beta_i (z_{i+1} - z_i)$$

De berekening zal volgens het veiliger afgevlakte schema worden uitgevoerd.

4 Stijghoogte in de drain

Uitgangspunten

De invloed van de horizontale afstroming is nu op twee manieren uitgewerkt. Onafhankelijk van de keuze, welke aanpak de voorkeur heeft, zal de stijghoogte in de drain erin verwerkt moeten worden. Het is dus van belang om de stijghoogte in de drain in detail te kennen.

Deze volgt uit het oppomp scenario en voorwaarden als het aanbrenge van onderdruk. Het eenvoudigste scenario is het aanbrenge van een onderdruk in de drains op maaiveld. Omdat de drains veel doorlatender zijn dan de compressibele lagen, mag de stijghoogte in de drain redelijk constant verondersteld worden. Door de onderdruk ontstaat er vanzelf een uittree debiet op maaiveld, dat afgevoerd moet worden.

In de praktijk worden methoden toegepast, die hier enigszins op lijken. In deze notitie wordt dit op een rij gezet.

Cilinder symmetrische stroming

In het geval van cilinder symmetrische stroming bestaan de drains uit slanke strippen van een goed doorlatende kunststof. Deze worden met speciale apparatuur in de ondergrond ingebracht. Eerst wordt op het maaiveld een zandlaag aangebracht van ongeveer 0.5 m, waarna de drains geplaatst worden. In sommige gevallen komt op de zandlaag nog een folie. Op het geheel komt de ophoging.

Het doel van de folie is het aan kunnen brengen van een onderdruk om het afstromen te versnellen. Aan de randen van het folie wordt de luchtdruk dan verlaagd. Hierdoor wordt water aangezogen uit de drains, dat op zal stromen tot op de folie en horizontaal zal worden afgevoerd. Indien de ophoging gerealiseerd wordt door opspuiten, dan kan het waterniveau oplopen tot meters boven het oorspronkelijke maaiveld. De effectiviteit van de drains loopt hierdoor fors terug.

Natuurlijk zijn voor de drainage verhangen nodig. Maar het aanbod van water uit het massief is relatief zeer gering, waardoor ook de vereiste verhangen zeer gering blijven. Er worden geen grote fouten gemaakt door (voorlopig) deze verhangen te verwaarlozen. Dit betekent, dat de stijghoogte in de drains constant verondersteld mag worden.

Voor een berekening maakt het weinig uit of er al dan niet gewerkt wordt met een folie. Van belang zijn de hoogte tot waarop het water opstijgt en de onderdruk van de lucht. Indien een folie wordt toegepast, is het waterniveau gelijk aan de positie van de folie op de randen. Indien een folie ontbreekt, is het waterniveau gelijk aan de waterspiegel en blijft de luchtdruk onveranderd. Het oppompscenario voor deze situatie is als volgt.

De stijghoogte in de drain staat als volgt in verband met de onderdruk Δp_L van de lucht en positie van het waterniveau D_F (de index F slaat op folie of freatisch):

$$\varphi_0 = D_F - \frac{\Delta p_L}{\gamma_w}$$

Let erop dat onderdruk positief is aangegeven. De positie van het folie wordt gewijzigd door de zettingen. Deze kunnen op maaiveld groot worden. Echter, het is niet de positie van het folie ter plaatse van de verticaal, die bepalend is, maar de positie aan de randen. Daar zijn de zettingen veel geringer en aanpassing lijkt daarom weinig zinvol.

De waterspiegel van een opspuiting en ook de onderdruk van de lucht kunnen natuurlijk in de tijd variabel zijn.

Vlakke stroming

In het geval van vlakke stroming bestaan de drains uit strippen van een goed doorlatend granulaair materiaal. Deze worden vanaf het oorspronkelijke maaiveld in de ondergrond aangebracht. Helemaal onderin de strip ligt een drainagebuis. De ophoging komt direct op het maaiveld.

Het oppomp scenario voor deze situatie is als volgt. In de drainagebuis onder in de strip wordt de waterdruk verlaagd. Hierdoor wordt water aangezogen uit de drains en afgevoerd. In de drain stelt zich een waterniveau in. Boven dit niveau wordt de luchtdruk nog eens extra verlaagd. Natuurlijk ontstaan er verhangen in de drain en is er een intredeverlies naar de drainagebuis. Maar het aanbod van water uit het massief is relatief zeer gering, waardoor ook de vereiste verhangen zeer gering blijven.

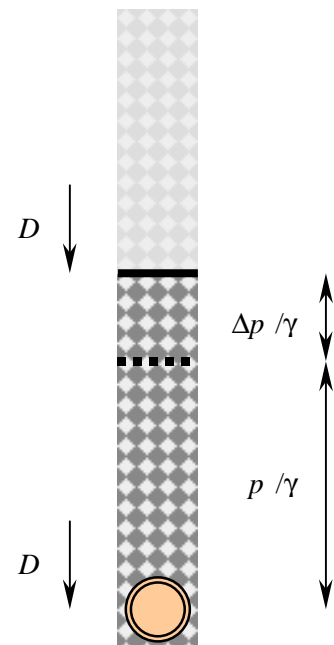
Er worden geen grote fouten gemaakt door (voorlopig) deze verhangen te verwaarlozen. Dit betekent, dat het waterniveau in de drain constant verondersteld mag worden. Een waarde hiervoor volgt uit gegevens voor de drainage: onderdruk van de lucht en druk in de drainagebuis.

In de figuur is dit toegelicht. Er volgt:

$$\varphi_0 = z - \frac{\Delta p_L}{\gamma_w} \quad z > D_L$$

$$\varphi_0 = D_L - \frac{\Delta p_L}{\gamma_w} \quad z < D_L$$

$$D_L = D_B + \frac{p_B}{\gamma_w} + \frac{\Delta p_L}{\gamma_w}$$



Let erop dat onderdruk positief is aangegeven. Boven de waterlijn is de stijghoogte op de wanden van de drain gelijk aan de plaatshoogte verminderd met de onderdruk van de lucht. Onder de waterlijn is de stijghoogte constant.

Zowel de onderdruk van de lucht als de druk in de drainagebuis kunnen natuurlijk in de tijd variabel zijn.

5 Samenvatting en conclusies

De invloed van horizontale drainage naar verticale drains is bestudeerd in dit rapport. De complicatie hiervan is het verstoren van de unieke één-dimensionale kruipberekening in MSettle. De berekening kan in essentie één-dimensionaal blijven door te veronderstellen dat de invloed van horizontale vervormingen te verwaarlozen is. Dit is redelijk, omdat de netto horizontale vervorming nul is.

Er zijn twee manieren om de horizontale stroming mee te nemen. Enerzijds kan de shape-functie uitgebreid worden. Dit leidt tot een grotere matrix. Anderzijds kan de horizontale stroming omgewerkt worden naar een lekterm. Aan de bestaande matrix hoeft dan alleen de lekbijdrage te worden toegevoegd. De laatste methode heeft de voorkeur en is uitgevoerd.

De randvoorwaarde van de stijghoogte in de drain is nader in kaart gebracht. Deze blijkt voor beide stromingstypen, vlakke en cilinder symmetrische stroming, gelijklopend. Onder de waterlijn is deze constant en gelijk aan het waterniveau min de onderdrukhoogte. Erboven gelijk aan de plaatshoogte min de onderdrukhoogte. Bij vlakke stroming ligt de waterlijn boven de grondlagen.

Bij vlakke stroming wordt de positie van de waterlijn opgegeven. Bij cilinder symmetrische stroming wordt deze bepaald uit de positie en de druk in de drainagebuis en de onderdruk van de lucht.

