

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
Afdeling der Weg- en Waterbouwkunde
Vloeistofmechanica

"ENKELE ASPECTEN VAN HET INSTABILITEITS-
VERSCHIJNSEL BIJ PERMANENT EENPARIGE
STROMINGEN EN DE DAARMEE VERBAND HOUDEN-
DE VORMING VAN ROLGOLVEN"

Deel B: Hoofstuk V en Appendix.

H.L. Fontijn
Jacoba van Beierenlaan 57
Delft.

INHOUDSOPGAVE VAN DEEL B

HOOFDSTUK V: ENKELE ASPECTEN EN EIGENSCHAPPEN VAN ROLGOLVEN.	V-1
V-A: Inleiding.	V-1
V-B: De algemene basisvgl. voor het pro- fiel van het wateroppervlak.	V-4
V-B.a: De vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van per- manente stroming.	V-11
V-B.b: De vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van niet- permanente stroming.	V-15
V-C: De schokvoorwaarden voor stroming met weerstand in een hellende pris- matische leiding met willekeurige dwarsdoorsnede.	V-27
V-C.a: De wet van behoud van massa.	V-28
V-C.b: De wet van behoud van impuls.	V-28
V-C.c: De uitdrukking voor de mate van energieverandering.	V-29
V-D: De speciale oplossing.	V-39
V-D.a: De speciale oplossing in geval van tweedimensionale laminaire stroming.	V-46
V-D.b: De speciale oplossing in geval van tweedimensionale turbulente stroming.	V-56
V-E: De constructie van discontinue oplos- singen.	V-66
V-F: Het criterium voor het bestaan van rolgolven.	V-79
V-F.a: Het criterium voor het ontstaan van rolgolven in geval van laminaire stroming.	V-80
V-F.b: Het criterium voor het ontstaan van rolgolven in geval van turbulente stroming.	V-82
V-G: Enkele kwantitatieve resultaten.	V-88
V-H: Enkele opmerkingen.	V-95
Resumé.	V-102
Figuren V-1 t/m. V-10.	V-104

APPENDIX:

	A-1
I - Inleiding.	A-1
II- Algemene beschouwing betreffende de stabiliteit van de stroming ener onsamendrukbare vloeistof.	A-2
II-a: Inleiding.	A-2
II-b: De mathematische formulering van het stabiliteitsprobleem in een onsamendrukbare vloeistof, c.q. een vlakke Poiseuille stroming.	A-2
III-De stabiliteit van een laminaire vloeistofstroming langs een hellend vlak.	A-8
III-a:De basisstroming.	A-8
III-b:Het stabiliteitsprobleem.	A-10
III-c:De randvoorwaarden.	A-16
III-d:De uitwerking.	A-22
IV- De stabiliteit van een laminaire vloeistofstroming tussen twee evenwijdige hellende vlakken.	A-41
IV-a: De basisstroming.	A-41
IV-b: Het stabiliteitsprobleem.	A-44
IV-c: De randvoorwaarden.	A-45
IV-d: De uitwerking.	A-46
Figuren A-1 t/m. A-3.	A-54

GERAADPLEEGDE LITERATUUR.

HOOFDSTUK V: Enkele aspecten en eigenschappen van rolgolven.

V-A: Inleiding.

In het voorgaande Hoofdstuk IV hebben we het criterium bepaald voor het ontstaan van instabiliteiten (c.q. golfverschijnselen) van de permanent eenparige stroming in een prismatische, hellende open leiding met willekeurige dwarsdoorsnede, door de toe- of afname in de tijd te beschouwen van een infinitesimale verstoringsgolf welke gesuperponeerd is gedacht op het vloeistofoppervlak van de oorspronkelijke stroming. Het behoeft geen betoog dat de theorie, zoals we deze daar ontwikkeld hebben, alleen maar van toepassing is op de allereerste fase in de ontwikkeling van de golfverschijnselen, met name op de situatie waarin de amplitudines van de golven nog zeer klein zijn. Is de permanent eenparige stroming eenmaal gevoelig voor het ontstaan van instabiliteiten, en is de golfvorming t.g.v. een of andere buiten het verschijnsel staande bron tot stand gekomen, dan zal de watermassa in de golftoppen de neiging vertonen om voorover te storten en de golfdalen a.h.w. in te halen, te overvleugelen, totdat tenslotte het gehele vloeistofoppervlak als uiteindelijk resultaat veranderd is in een reeks "schokgolven", welke zich stroomafwaarts bewegen. Dit hier in het kort aangeduide fenomeen zullen we kwalitatief nog wat nader toelichten.

Beschouwen we een permanent eenparige stromingstoestand welke gevoelig is voor het ontstaan van instabiliteiten, c.q. golfverschijnselen, en onderstellen we dat er op een of andere wijze een kleine verstoring ontstaat, of aanwezig is, dan kan deze kleine verstoringsgolf uitgedrukt worden als een combinatie van sinussen en cosinussen van veelvouden van x ; voor een dergelijke min of meer regelmatige sinusoidale verstoring van een instabiele permanent eenparige stroming, geldt, dat de perturbaties (i.e. verstoringen)-t.g.v. de instabiliteit van de stroming- zullen gaan groeien. Hoe we ons dit aangroeien en toenemen van de perturbaties moeten voorstellen, zullen we schetsen aan de hand van een artikel van J.C. Schönfeld (18). Onderstellen we daartoe dat we te maken hebben met een lopende golf in een zeer brede leiding met flauw hellende of horizon-

tale bodem ($\theta \approx 0$), zoals aangegeven is in fig.V-1.a. Wordt de wrijving verwaarloosd en is het water aan de voorzijde van de golf in rust, dan geldt volgens de St. Venant voor de stroomsnelheid U in een dwarsdoorsnede met waterdiepte H :

$$U = 2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gH_0},$$

en voor de voortplantingssnelheid c :

$$c = 3\sqrt{gH} - 2\sqrt{gH_0}.$$

Hieruit volgt dat de stroomsnelheid toeneemt met de verheffing van het wateroppervlak, m.a.w. hoger gelegen delen van de golf hebben een grotere voortplantingssnelheid dan lager gelegen delen. Dit verschijnsel wordt door J.C. Schönfeld (18) "autokarakteristieke dispersie" genoemd, en heeft een zodanige vervorming van de golf tot gevolg dat met het voortschrijden van de tijd de voorwaartse helling voortdurend steiler en de achterwaartse helling voortdurend flauwer wordt (aangegeven door ---- in fig.V-1). De voorwaartse helling wordt tenslotte zo steil dat deze zich ontwikkelt tot een lopende watersprong (of bore; de verticale versnellingen zijn dan niet meer te verwaarlozen). Nemen we nu ook de weerstand in de beschouwing op, dan zien we dat de golf verzwakt, en wel zodanig dat de golf-top voortdurend lager wordt en de steilheid van zowel voor- als achterwaartse helling afneemt. Derhalve is de voorwaartse helling van de golf onderworpen aan twee invloeden: de autokarakteristieke dispersie welke de helling steiler, en de verzwakking welke de helling flauwer wil maken (zie fig.V-2.a).

De vraag is nu welke van deze twee invloeden het grootst is. Daartoe beschouwen we de verheffing op een afstand l achter de teen van de golf; stel nu voor de helling i van het wateroppervlak aan het front van de golf:

$$i = \frac{H - H_0}{l};$$

dan is de mate van verandering hiervan met de tijd:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{l} \left\{ i \left(-\frac{dl}{dt} \right) - \left(-\frac{dH}{dt} \right) \right\};$$

$-\frac{dH}{dt}$ geeft de invloed van de verzwakking weer, en $-\frac{dl}{dt}$ de invloed van de dispersie ($\frac{dH}{dt}$ en $\frac{dl}{dt}$ zijn beide negatief).

Is de helling i dus groot dan overheerst de dispersie en wordt het golffront steiler, en ontwikkelt dit zich tenslotte tot een lopende watersprong; is de helling i klein dan overheerst de verzwakking en wordt het golffront flauwer tot het tenslotte verdwijnt. De achterzijde van de beschouwde golf wordt altijd flauwer aangezien er ter plaatse samenwerking is tussen dispersie en

verzwakking. Voor een golf ("verdieping") zoals weergegeven is in fig. V-1.b geldt dat er samenwerking is van dispersie en verzwakking aan het golffront (i.e. de achterwaartse helling) welke de steilheid kleiner maakt; er is tegenwerking aan de achterzijde (i.e. de voorwaartse helling) en er zal zich een lopende watersprong ontwikkelen als de achterzijde steil is. Bovenstaande geldt alleen voor horizontale of flauw hellende open leidingen, omdat er alleen dan sprake is van een echte verzwakking, tengevolge van het feit dat de weerstand toeneemt met de stroomsnelheid en dienovereenkomstig met de verheffing van het wateroppervlak. De weerstand is echter bovendien nog bij benadering omgekeerd evenredig met de waterdiepte en zal derhalve kleiner willen worden als de waterdiepte toeneemt. Deze tendens overheerst in steile leidingen, en daar hebben we dan te maken met een versterking, i.e. een opslinging (dus een negatieve verzwakking) van de golven. Een voorwaartse helling zal dan altijd steiler worden, en zich tenslotte ontwikkelen tot een watersprong, maar bij een achterwaartse helling hebben we weer tegenwerking: de dispersie wil de achterwaartse helling flauwer, en de versterking wil deze steiler maken (zie fig. V-2.b). Een steile achterwaartse helling zal zodoende flauwer, en een flauwe achterwaartse helling steiler willen worden, en derhalve zal de achterwaartse helling de neiging vertonen een definitieve vorm aan te nemen. Keren we nu terug tot voornoemde min of meer regelmatige sinusoidale perturbatie van de instabiele permanent eenparige stroming in een hellende open leiding (zie fig. V-3.a), dan is het m.b.v. bovenstaande aan een artikel van J.C. Schönfeld (18) ontleende beschouwing niet moeilijk om in te zien dat de voorwaartse hellingen van de perturbatiegolven steiler zullen worden t.g.v. de samenwerkende invloeden van dispersie en versterking (opslinging), met als onvermijdelijk gevolg de ontwikkeling tot lopende watersprongen (bores), maar dat de achterwaartse hellingen daarentegen slechts steiler zullen worden totdat de dispersie in evenwicht is met de versterking, m.a.w. het is duidelijk dat de permanent eenparige stroming zich zal ontwikkelen tot een (rol-)golfpatroon zoals aangegeven is in fig. V-3.b, (zie ook Hoofdstuk I, fig. I-3). Als de watersprongen nu alle dezelfde hoogte hebben, dan zijn de afstanden tussen de watersprongen gelijk en is het (rol-)golfpatroon periodiek. (Voor een diepergaande behandeling van het evenwicht en de stabiliteit van (rol-)golven in een steile hellende leiding, zij verwezen naar het reeds genoemde en aange-

haalde artikel van J.C. Schönfeld (18)).

In Hoofdstuk I hebben we onderscheid gemaakt tussen z.g. natuurlijke rolgolven en periodieke permanente rolgolven, waarbij we al opgemerkt hebben dat het periodieke permanente rolgolfpatroon te beschouwen is als de laatste en definitieve vorm van de golfverschijnselen, welke bij voldoende leidinglengte in een instabiele permanent eenparige stroming zullen ontstaan. De natuurlijke rolgolven zijn dan op te vatten als een tussenfase bij de tot standkoming van een periodiek permanent rolgolfpatroon.

In Hoofdstuk III, p. III-7 is de opmerking geplaatst dat een volledige en complete theorie voor het beschrijven van zowel natuurlijke rolgolven als periodieke permanente rolgolven, in staat zal moeten zijn om de frequentieverdeling van de geometrische eigenschappen als functie van de afgelegde afstand te voorspellen, voor alle schokgolven met welke amplitudo dan ook. Gemakshalve zullen we in dit Hoofdstuk V echter de aanname doen van periodiciteit, d.w.z. we beschouwen alleen periodieke permanente rolgolven. Als gevolg van deze aanname moet het voorbehoud gemaakt worden dat het heel goed mogelijk is, dat de hier te ontwikkelen theorie en de weer te geven resultaten de z.g. natuurlijke rolgolven niet goed meer dekken.

In hetgeen nu volgt zullen we enkele eigenschappen en aspecten onderzoeken van de stromingswijze welke aangeduid wordt met de benaming "rolgolven"; o.a. zal nagegaan worden welke de vorm van de profielvgl. is, hoe de gedaante van het periodieke permanente rolgolfpatroon wordt en welke de noodzakelijke voorwaarde is voor het tot stand komen van de rolgolfvorming.

V-B: De algemene basisvgl. voor het profiel van het wateroppervlak

Als algemene basisvgl. voor het profiel van het wateroppervlak, welke van toepassing zijn op de beschouwde situatie, zullen we weer gebruiken vgl. (1), de continuïteitsvgl. voor de gemiddelde stroming in een open leiding:

$$\frac{\partial}{\partial x} (VA) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1^a)$$

of

$$V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1^b)$$

en vgl. (2), de vgl. voor de gemiddelde stroming in een prismatische leiding met vrije waterspiegel:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = g \sin \theta - g \cos \theta \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho R} \quad (2)$$

De vgln. (1) geven de continuïteitsvoorwaarde voor de gemiddelde stroming in een open leiding, en de vgl. (2) is de hydraulische bewegingsvgl. (c.q. impulsvgl.) voor de geleidelijk veranderende niet-permanente (i.e. quasi-permanente) stroming in een prismatische leiding met vrije waterspiegel. Zoals reeds in Hoofdstuk II is vermeld, verstaat men onder geleidelijk veranderende niet-permanente of quasi-permanente stroming een stromingstoestand waarvoor geldt dat de tweede afgeleiden van de dwarsdoorsnede A en de gemiddelde stroomsnelheid U, benevens de producten en kwadraten van de eerste afgeleiden van U en/of A verwaarloosbaar klein zijn t.o.v. de eerste afgeleiden, en dat de overheersende snelheidscomponent die in de x-richting is. Dit zal in het algemeen vereisen dat de helling van de leidingwanden niet te flauw is, dat de helling van het golfprofiel klein is t.o.v. 1 en de kromming van het golfprofiel klein is, t.o.v. $\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x}$ of $\frac{1}{U^2} \frac{\partial U}{\partial t}$. Met betrekking tot de afleiding van vgl. (2) resulteerde dit in een gemiddelde stroomsnelheid welke onafhankelijk is van de z-coördinaat en een hydrostatische drukverdeling. De watersnelheden genoemd in de voorgaande vgln. hebben betrekking op snelheden welke gemiddeld zijn over een voldoende groot tijdsinterval, zodat in geval van turbulentie, het fluctuerende deel van de snelheden gelijk is aan nul. Zoals reeds in Hoofdstuk II, p.II-10 is vermeld, komen de vgln. (1) en (2) qua vorm overeen met de vgln. voor de z.g. niet-lineaire ondiepwater theorie. Voor verdere opmerkingen t.a.v. de verwaarlozingen en aannamen gedaan bij de afleiding van vgl. (1) en vgl. (2) en het gebied waarin deze vgln. geldig zijn, zij verwezen naar Hoofdstuk II.

Wat de wrijvingsterm $\frac{\tau}{\rho R}$ in vgl. (2) betreft, zij opgemerkt dat we de hierin voorkomende gemiddelde schuifspanning langs bodem en wanden, τ , zullen ontwikkelen uit een beschouwing van de permanent eenparige stromingstoestand, waarbij als uitgangspunt wordt genomen een schuifspanning die recht evenredig is met zekere macht van de gemiddelde stroomsnelheid U, en zekere macht van de hydraulische straal R. Als we voor de permanent eenparige stromingstoestand nu, evenals in Hoofdstuk IV, p.IV-39, uitgaan

van een weerstandswet met algemene gedaante:

$$U_o^a = kR_o^{1+b} \cdot \sin^m \theta,$$

waarin k , de z.g. wandruwheid, een constante met zekere dimensies, onafhankelijk van andere hydraulische grootheden is, dan kan m.b.v. deze laatste relatie voor de gemiddelde schuifspanning langs bodem en wanden $\tau_o = \rho g R_o \sin \theta$ na eliminatie van $\sin \theta$ geschreven worden:

$$\tau_o = \rho g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} U_o^{\frac{a}{m}} R_o^{1 - \frac{1+b}{m}}$$

Alhoewel deze formule strikt genomen alleen geldig is voor de permanent eenparige stromingstoestand, zullen we hier de aanname doen, dat eenzelfde soort relatie ook geldig is voor niet-permanente geleidelijk veranderende (i.e. quasi-permanente) stroming, er van uitgaande dat deze relatie voldoende nauwkeurig is als de gemiddelde stroming langzaam verandert t.o.v. de plaats x en de tijd t ; uiteraard wordt dan de index o , die alleen is toegevoegd om de permanent eenparige stromingstoestand aan te duiden, weggelaten, zodat de wrijvingsterm $\frac{\tau}{\rho R}$ dan overgaat in:

$$\frac{\tau}{\rho R} = g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} U^{\frac{a}{m}} R^{-\frac{1+b}{m}}$$

Voor het geval van niet-permanente geleidelijk veranderende laminaire stroming levert dit dan m.b.v. (zie Hoofdstuk IV, p.IV-47):

$$a=1, b=1, m=1 \text{ en } k = \frac{g}{3V}$$

voor de wrijvingsterm op:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{3vU}{R^2}$$

Voor het geval van niet-permanente geleidelijk veranderende turbulente stroming, houdt dit in dat de turbulente fluctuaties op de hoofdstroom in ieder punt een weerstands-volumekracht uitoefenen van:

$$\frac{\tau}{\rho R} = g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} U^{\frac{a}{m}} R^{-\frac{1+b}{m}}$$

de weerstandseffecten t.g.v. de dynamische viscositeit van het water worden verondersteld van een veel kleinere orde van grootte te zijn, en zijn derhalve verwaarloosd. Gaan we nu uit van de weerstandswet van de Chezy, welke (met weglating van de index

o) luidt:

$$U^2 = C^2 R \sin \theta,$$

dan geldt voor de wrijvingscoëfficiënt C (zie Hoofdstuk IV, p.IV-40):

$$C = k^{\frac{1}{2}} R^{\frac{2(b+1)-a}{2a}} (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{2a}};$$

eliminatie van de wandruwheid k uit de formule voor C en de wrijvingsterm $\frac{\tau}{\rho R}$ geeft na enige herleiding:

$$\frac{\tau}{\rho R} = g \left\{ C^{-a} U^a R^{-\frac{a}{2}} (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{2}} \right\}^{\frac{1}{m}}$$

Nu is (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53):

$$a=2, \text{ en } m=1,$$

zodat de wrijvingsterm wordt:

$$\frac{\tau}{\rho R} = g C^{-2} U^2 R^{-1} = g C^{-2} U |U| R^{-1}$$

Gaan we uit van de weerstandswet van Manning, welke (met weglating van de index 0) luidt:

$$U^2 = n^{-2} R^{\frac{4}{3}} \sin \theta,$$

dan geldt voor de wrijvingscoëfficiënt n (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53):

$$n = k^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{2a-3(b+1)}{2a}} (\sin \theta)^{\frac{a-2m}{2a}};$$

eliminatie van de wandruwheid k uit de formule voor n en de wrijvingsterm $\frac{\tau}{\rho R}$ geeft dan weer na enige herleiding:

$$\frac{\tau}{\rho R} = g \left\{ n^a U^a R^{-\frac{2a}{3}} (\sin \theta)^{\frac{a-2m}{2}} \right\}^{\frac{1}{m}}$$

Nu is, (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53):

$$a=2 \text{ en } m=1,$$

zodat de wrijvingsterm wordt:

$$\frac{\tau}{\rho R} = g n^2 U^2 R^{-\frac{4}{3}} = g n^2 U |U| R^{-\frac{4}{3}}$$

Voor de wrijvingsterm in zijn algemene gedaante $\frac{\tau}{\rho R}$ geldt (zie Hoofdstuk II) dat de gemiddelde schuifspanning langs bodem en wanden τ , voor stroming in de positieve x-richting positief, en voor stroming in de negatieve x-richting negatief is, m.a.w. keert de stroming van richting om, dan verandert $\frac{\tau}{\rho R}$ van teken. In geval van turbulente stroming blijkt de weerstandsterm recht evenredig te zijn met het kwadraat van de gemiddelde stroomsnel-

heid; teneinde ook nu te bewerkstelligen dat de weerstandsterm van teken verandert als de stroming van richting omkeert zijn absolute waarde strepen toegevoegd: $U|U|$.

Uit het bovenstaande volgt dat op grond van de gedane aannamen gesteld kan worden dat in geval we te maken hebben met een niet-permanente geleidelijk veranderende (i.e. quasi-permanente) stromingstoestand de wrijvingsterm $\frac{\tau}{\rho R}$ in vgl. (2) in zijn meest algemene gedaante gelijk is aan:

$$\frac{\tau}{\rho R} = f\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot U^{\frac{a}{m}} \cdot R^{-\frac{1+b}{m}}$$

Is de quasi-permanente stroming laminair, dan geldt (zie Hoofdstuk IV, p.IV-47):

$a=1$, $b=1$, $m=1$ en $\frac{1}{K} = \frac{3V}{8g}$,
zodat de wrijvingsterm wordt:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{3VU}{R^2}$$

Is de quasi-permanente stroming turbulent, en wordt deze beheerst door een weerstandswet van het Chezy-type, dan geldt (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53 en p.IV-58):

$$a=2, m=1 \text{ en } b = \frac{2R}{C} \cdot \frac{dC}{dR},$$

en volgt met behulp hiervan uit de formule voor de wrijvingscoëfficiënt C (zie Hoofdstuk IV, p.IV-40):

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{C^2} R^b$$

zodat de wrijvingsterm wordt:

$$\frac{\tau}{\rho R} = gC^{-2}U^2R^{-1} = gC^{-2}U|U|R^{-1};$$

Voor een constante wrijvingscoëfficiënt van de Chezy C , is $b=0$.

Is de quasi-permanente stroming turbulent, en wordt deze beheerst door een weerstandswet van het Manning-type, dan geldt (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53 en p.IV-59):

$$a=2, m=1 \text{ en } b = \frac{1}{3} - \frac{2R}{n} \cdot \frac{dn}{dR},$$

en volgt met behulp hiervan uit de formule voor de wrijvingscoëfficiënt n (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53):

$$\frac{1}{K} = n^2 \cdot R^{b-\frac{1}{3}}$$

zodat de wrijvingsterm wordt:

$$\frac{\tau}{\rho R} = gn^2U^2R^{-\frac{2}{3}} = gn^2 \cdot U|U|R^{-\frac{2}{3}};$$

Voor een constante wrijvingscoëfficiënt van Manning n , is $b = \frac{1}{3}$.

Opmerking

De in het bovenstaande voor de wrijvingsterm $\frac{\tau}{\rho R}$ afgeleide relaties, zijn recht evenredig met zekere macht van de gemiddelde stroomsnelheid en omgekeerd evenredig met zekere macht van de hydraulische straal R , en brengen dus tot uitdrukking dat de weerstand groter zal zijn in gebieden, met kleinere waterdiepte, aangezien daar alle vloeistof zich dicht bij de (ruwe) begrenzing bevindt.

De formules welke voor de wrijvingsterm $\frac{\tau}{\rho R}$ zijn afgeleid in geval van een turbulente stromingstoestand, sluiten qua vorm aan bij de in de vloeistofmechanica veel gebruikte standaardmethode om min of meer "empirische" weerstandsformules (van b.v. het Chezy-of Manningtype) te gebruiken, wat voortkomt uit het feit dat er met name voor de niet-eenparige turbulente stroming geen "goede" turbulente weerstandsformule voorhanden is. Overigens wijst R.F. Dressler (11) er reeds op dat voor niet-permanente turbulente stroming de "empirische" weerstandsformules het effect van de turbulente weerstand tot dezelfde lage orde van benadering uitdrukken als gegeven wordt door de z.g. "ondiep-water vgln.", en dat het derhalve consequent is deze te gebruiken in combinatie hiermede. In geval van een niet-permanente laminaire stroming is de visceuze wrijving volledig bekend en invoering van een "complete" visceuze wrijvingsweerstand derhalve mogelijk; nochtans is een visceuze wrijvingsterm van bovenstaande vorm ingevoerd, aangezien de vgln. anders in mathematisch opzicht te gecompliceerd worden voor ons doel.

T.a.v. de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal, zij opgemerkt dat deze, evenals bij de bepaling van het instabiliteitscriterium voor de permanent eenparige stroming is gedaan, als constante, i.e. als onafhankelijk van x en t , wordt beschouwd; alhoewel de correctiecoëfficiënt α , zoals reeds in Hoofdstuk IV, p.IV-62 e.v. is aangegeven; wellicht geen constante grootte is -zeker niet in geval van een zeer sterk turbulente stroming- zal ook in dit Hoofdstuk V als uitgangspunt, gemakshalve, een niet-variabele α -waarde worden aangenomen, enerzijds om een zekere gelijkkluidendheid met het voorgaande Hoofdstuk IV te behouden, anderzijds omdat het niet geheel duidelijk is hoe de functie α variëert in geval van quasi-permanente stroming -hoe met name de invloed van een variabele α is op b.v. de weerstandsterm-, en omdat de tendens die door

invoering van een constante α -waarde aan het gehele fenomeen wordt gegeven toch hetzelfde blijft als bij invoering van een variabele α -waarde (kwantitatief zullen de resultaten niet geheel juist zijn, kwalitatief echter wel). Voor de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal, zullen we dus in geval van quasi-permanente stroming, de waarden behorende bij "zekere" permanent eenparige stromingstoestand kiezen, aannemende dat deze benadering voldoende nauwkeurig is. Dan is α voor quasi-permanente laminaire stroming volgens vgl. (15):

$$\alpha = 1,2$$

en voor quasi-permanente turbulente stroming volgens vgl. (21^a):

$$1,0 \leq \alpha \leq 1,1,$$

welke laatste α -waarde nader gepreciseerd wordt door vgl. (21):

$$\alpha = 1 + 6,25 \frac{\tau_0}{\rho U_0^2} ;$$

de index (o) duidt nu op "zekere" permanent-eenparige stromingstoestand; bovenstaande vgl. is uitgaande van de resp. weerstandswetten van de Chezy en Manning te herschrijven in de gedaante van resp. vgl. (21^b) en vgl. (21^c).

In Hoofdstuk IV, p. IV-2 hebben we aangenomen dat zowel de dwarsdoorsnede A als de hydraulische straal R functies zijn van de waterdiepte H; dus $A=A(H)$ en $R=R(H)$. Aangezien $H=H(x,t)$, betekent dit dat voor $\frac{\partial A}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial A}{\partial t}$ geschreven kan worden:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dH} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dH} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} ,$$

Resumerend hebben we nu als fundamentele basisvgn.:

$$\frac{\partial}{\partial x} (UA) + \frac{dA}{dH} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1^{a'})$$

of

$$U \frac{dA}{dH} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dA}{dH} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1^{b'})$$

en

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{A} \frac{dA}{dH} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho R} \quad (2')$$

Hierin is:

$$\frac{\tau}{\rho R} = g \left(\frac{1}{K} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot U^{\frac{m}{m}} R^{-\frac{1+m}{m}}$$

in geval van quasi-permanente laminaire stroming geldt dan dat:

$$\alpha = 1,2 \quad \text{en} \quad \frac{\tau}{\rho R} = \frac{3\nu U}{R^2} ;$$

in geval van quasi-permanente turbulente stroming geldt dan dat, uitgaande van een weerstandswet van het Chezy-type:

$$1,0 \leq \alpha \leq 1,1,$$

nader gepreciseerd door:

$$\alpha = 1 + 6,25 \frac{\tau}{\rho U^2} ,$$

en

$$\frac{z}{\rho R} = gC^{-2}U^2R^{-1} = gC^{-2}U|U|R^{-1},$$

en uitgaande van een weerstandswet van het Manning-type:

$$1,0 \leq \alpha \leq 1,1, \text{ nader gepreciseerd door: } \alpha = 1 + 6,25 \frac{g n^2}{R^{1/3}},$$

en

$$\frac{z}{\rho R} = gn^2U^2R^{-4/3} = gn^2U|U|R^{-4/3}$$

V-B.a: De vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van permanente stroming.

Hebben we te maken met een permanente gemiddelde stroming in een prismatische leiding met vrije waterspiegel, dan worden de fundamentele basisvgn. (1') en (2') resp.:

$$\frac{d}{dx}(UA) = 0 \quad (31^a)$$

of

$$U \frac{dA}{dH} \frac{dH}{dx} + A \frac{dU}{dx} = 0 \quad (31^b)$$

en

$$\alpha U \frac{dU}{dx} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{dH}{dx} - \frac{z}{\rho R} \quad (32)$$

Voor de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal en de wrijvingsterm $\frac{z}{\rho R}$, zij verwezen naar het voorgaande. In deze vgl. (31) en (32) zijn de gemiddelde stroomsnelheid U en de waterdiepte H functies van alleen de plaats x ; de dwarsdoorsnede van de leiding, A , en de hydraulische straal R zijn weer te beschouwen als functies van de waterdiepte H . Vgl. (31^a) is direct te integreren, en levert dan op:

$$UA = \text{constant} = K,$$

waarin K de constante afvoer is. Deze betrekking is te schrijven als:

$$U = \frac{K}{A},$$

waaruit volgt:

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{K}{A^2} \frac{dA}{dx} = -\frac{K}{A^2} \frac{dA}{dH} \frac{dH}{dx}$$

Substitutie van de voor U en $\frac{dU}{dx}$ verkregen relaties in vgl. (32) geeft:

$$-\alpha \frac{K^2}{A^3} \frac{dA}{dH} \frac{dH}{dx} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{dH}{dx} - \frac{z}{\rho R},$$

wat na enige herleiding geschreven kan worden als:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{z}{\rho R}}{g \cos \theta - \alpha \frac{K^2}{\rho^3} \frac{dA}{dH}} \quad (33)$$

Is de permanente gemiddelde stroming laminair, dan geldt (zie boven) voor α :

$$\alpha = 1,2$$

en voor de wrijvingsterm:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{3\nu U}{R^2}$$

welke laatste betrekking m.b.v. $U = \frac{K}{A}$ oplevert:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{3\nu K}{AR^2} = \frac{3\nu |K|}{AR^2}$$

zodat aan de hand hiervan vgl. (33) voor de beschouwde stromingstoestand overgaat in:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{3\nu |K|}{AR^2}}{g \cos \theta - 1,2 \frac{K^2}{R^3} \frac{dR}{dH}} \quad (33^a)$$

Is de permanente gemiddelde stroming turbulent en wordt deze beheerst door een weerstandswet van het Chezy-type, dan geldt (zie boven) voor α :

$$1,0 \leq \alpha \leq 1,1, \text{ nader gepreciseerd door:}$$

$$\alpha = 1 + 6,25 \frac{f}{C^2}$$

en voor de wrijvingsterm:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{g U^2}{C^2 R} = \frac{g U |U|}{C^2 R}$$

welke laatste betrekking m.b.v. $U = \frac{K}{A}$ oplevert:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{g K^2}{C_A^2 R} = \frac{g K |K|}{C_A^2 R}$$

zodat aan de hand hiervan vgl. (33) voor de beschouwde stromingstoestand overgaat in:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{g K |K|}{C_A^2 R}}{g \cos \theta - \alpha \frac{K^2}{R^3} \frac{dR}{dH}} \quad (33^b)$$

Is de permanente gemiddelde stroming turbulent en wordt deze beheerst door een weerstandswet van het Manning-type dan geldt (zie boven) voor α :

$$1,0 \leq \alpha \leq 1,1, \text{ nader gepreciseerd door: } \alpha = 1 + 6,25 \frac{g n^2}{R^{1/3}}$$

en voor de wrijvingsterm:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{g n^2 U^2}{R^{1/3}} = \frac{g n^2 U |U|}{R^{1/3}}$$

welke laatste betrekking m.b.v. $U = \frac{K}{A}$ oplevert:

$$\frac{z}{\rho R} = \frac{\text{sn}^2 K^2}{A^2 R^{\frac{2}{3}}} = \frac{\text{sn}^2 K |K|}{A^2 R^{\frac{2}{3}}},$$

zodat aan de hand hiervan vgl. (33) voor de beschouwde stromingstoestand overgaat in:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{gn^2 K |K|}{R^{\frac{2}{3}}}}{g \cos \theta - \alpha \frac{K^2}{R^3} \cdot \frac{dH}{dH}} \quad (33^c)$$

In de vgl. (33^a), (33^b) en (33^c) zijn de dwarsdoorsnede A, de hydraulische straal R (en $\frac{dA}{dH}$) functies van de waterdiepte H.

Vgl. (33^a) is de vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval we te maken hebben met een permanente driedimensionale laminaire stromingstoestand; de resp. vgl. (33^b) en (33^c) zijn de vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval we te maken hebben met een permanente driedimensionale turbulente stromingstoestand, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type, resp. het Manning-type.

Is de leidingbreedte zeer groot t.o.v. de waterdiepte, m.a.w. is de stroming tweedimensionaal, dan is het niet moeilijk in te zien, dat de vgl. (33^a), (33^b) en (33^c) overgaan in resp.:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{3r |K|}{H^3}}{g \cos \theta - 1,2 \frac{K^2}{H^3}} \quad (33^a)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{g K |K|}{C^2 H^3}}{g \cos \theta - \alpha \frac{K^2}{H^3}} \quad (33^b)$$

en

$$\frac{dH}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{gn^2 K |K|}{H^3}}{g \cos \theta - \alpha \frac{K^2}{H^3}} \quad (33^c)$$

Met name vgl. (33^{b'}) staat in de vloeistofmechanica bekend als de z.g. vgl. van Bresse voor het profiel van het wateroppervlak in geval van permanente (turbulente) stroming; doorgaans worden de vgl. van het type (33) op een ietwat andere

manier afgeleid, zie hiervoor b.v. H.A. Thomas (1).

Is in geval van driedimensionale stroming de vorm van de dwarsdoorsnede bekend, dan kunnen vgl. (33^a), vgl. (33^b) en wellicht ook vgl. (33^c) direct analytisch geïntegreerd worden, indien tenminste voor de twee laatstgenoemde vgln. de wrijvingscoëfficiënten C en n als constanten worden beschouwd; zijn deze wrijvingscoëfficiënten niet constant, dan is altijd numerieke integratie mogelijk als de randvoorwaarden bekend zijn. Hetzelfde kan gezegd worden van de vgln. (33^{a'}), (33^{b'}) en (33^{c'}), dus in geval we te maken hebben met permanente tweedimensionale stroming. Wordt de integratie voor het beschouwde geval van permanente stroming uitgevoerd, dan leidt dit, in principe, tot twaalf verschillende typen voor het profiel van het wateroppervlak. Deze typen worden gedetailleerd beschreven door B.A. Bakhmeteff (31), met name voor het geval van de permanente turbulente stromingstoestand; achtereenvolgens onderscheidt hij drie oppervlakteprofielen bij z.g. "flauwe" leidinghelling, drie oppervlakteprofielen bij z.g. "steile" leidinghelling, twee oppervlakteprofielen voor de z.g. "(eerste) critieke" leidinghelling, twee oppervlakteprofielen voor horizontale leidingbodem, en twee oppervlakteprofielen bij z.g. "negatieve" leidinghelling. Geen enkele van deze profielen voor het wateroppervlak in geval van permanente stroming is periodiek.

Tot slot zij nog opgemerkt, dat het hier niet mogelijk is om, uitgaande van vgl. (33), een oplossing voor stroming met lopende golven te vinden, door eerst de oplossing te bepalen voor het geval van permanente stroming en dan op het gehele systeem een (constante golf-) snelheid te superponeren. Deze werkwijze kan niet gevolgd worden omdat de weerstandsterm afhankelijk is van de relatieve snelheid tussen de vloeistof en de begrenzing, en toevoeging van een constante grootte aan alle vloeistofsnelheden dit zou veranderen. Om vgl. (33) te gebruiken voor lopende golfoplossingen, zoals b.v. rolgolven, zou het noodzakelijk zijn om de gemiddelde stroomsnelheid U in de weerstandsterm (zie de vgln. (33)) te vervangen door een term waarin de relatieve snelheid tussen vloeistof en begrenzing voorkomt, een term dus van de gedaante $(U-c)$, waarin c dan de constante golfsnelheid is. Deze methode is toegepast door H.A. Thomas(1) bij de analysering van het gedrag van zijn "lopende band model". Hier nu zullen we deze werkwijze niet volgen; wel zullen we de fundamentele basisvgl. zodanig transformeren

dat deze te gebruiken zijn voor stroming met lopende golven, en daaruit een vgl. voor het profiel van het wateroppervlak is af te leiden.

V-B.b: De vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van niet permanente stroming.

Is er sprake van stroming met lopende golven (b.v. rolgolven) dan is het gebruikelijk om de vgl'n. welke het genoemde stromingsverschijnsel beschrijven, vanuit het oorspronkelijke coördinatenstelsel te transformeren op een nieuw meebewegend coördinatenstelsel.

Ook in het geval van de hier te beschouwen stroming met rolgolven in een prismatische hellende leiding, zullen we de fundamentele basisvgl'n. (1') en (2') -die de rolgolfoplossing bevatten- vanuit het oorspronkelijke, stilstaande, rechthoekige x, y, z -coördinatenstelsel transformeren op een met snelheid c in de x -richting bewegend rechthoekig ξ, η, ζ -coördinatenstelsel; hierbij zullen we aannemen dat de snelheid van bewegen, c , constant is.

Deze aanname van een constante snelheid van bewegen c , wordt in feite opgelegd door het volgende. Een coördinatenstelsel waarin de fundamentele vgl'n. van Newton gelden, wordt in de Theoretische Mechanica een z.g. inertiestelsel genoemd; tevens is uit de Theoretische Mechanica bekend dat alle assenstelsels (ook als deze een hoek maken met het oorspronkelijke) die t.o.v. een inertiestelsel eenparig bewegen, ook inertiestelsels zijn; dit houdt in dat voor een met het bewegende stelsel meebewegende waarnemer de tweede wet van Newton geldig is, zoals deze in het stilstaande stelsel geldt. Is het bewegende coördinatenstelsel eenparig versneld dan bemerkt de meebewegende waarnemer een kracht, welke voor een waarnemer in het stilstaande stelsel een z.g. "schijnkracht" is (de Theoretische Mechanica leert dat deze "kracht" ook aanwezig is als de bewegende massa in rust is t.o.v. het bewegende stelsel). Welnu: het oorspronkelijke, stilstaande x, y, z -coördinatenstelsel is een z.g. inertiestelsel, omdat aangenomen is dat in dit assenstelsel de fundamentele vgl'n. van Newton geldig zijn; het nieuwe bewegende ξ, η, ζ -coördinatenstelsel beweegt eenparig (met constante snelheid c) t.o.v. het oorspronkelijke coördinatenstelsel, en derhalve is het ξ, η, ζ -systeem ook een inertiestelsel: de fundamentele vgl'n. van Newton zijn hierin dus toe te passen, zonder dat er "schijnkrachten" worden ingevoerd of verwaarloosd.

Zoals uit bovenstaande nu is in te zien, is de transformatie vanuit het stilstaande x,y,z-assenstelsel op het eenparig bewegende ξ,η,ζ-assenstelsel tot stand te brengen, d.m.v. de volgende formules (i.e. de z.g. Galilei-transformatie):

$$x = \xi + ct', \quad y = \eta, \quad z = \zeta \quad \text{en} \quad t = t',$$

waarin c onafhankelijk is van ξ, η, ζ en t'.

Als F=F(x,y,z,t) nu de te transformeren grootheid voorstelt, en de afhankelijke variabele grootheden in het nieuwe assenstelsel worden aangeduid met een accent, F=F'(ξ,η,ζ,t'), dan geldt:

$$\frac{\partial F'}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \zeta} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \zeta}$$

en

$$\frac{\partial F'}{\partial t'} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t'} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'}$$

Uit deze vier lineaire, niet-homogene vgl. zijn de onbekenden $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ en $\frac{\partial F}{\partial t}$ op te lossen, mits de functionaaldeterminant of determinant van Jacobi:

$$\frac{\partial(x,y,z,t)}{\partial(\xi,\eta,\zeta,t')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial t}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial t}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial t}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial t'} & \frac{\partial y}{\partial t'} & \frac{\partial z}{\partial t'} & \frac{\partial t}{\partial t'} \end{vmatrix}$$

ongelijk is aan nul. M.b.v. de transformatieformules gaat de determinant van Jacobi over in:

$$\frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ;$$

ontwikkeling hiervan naar de eerste rij geeft na enige herleiding:

$$\frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')} \cong 1 \neq 0$$

Aangezien de functionaaldeterminant van het inverse systeem van functies het omgekeerde is van die van het oorspronkelijke systeem, geldt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial(F', y, z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')}{\partial(x, y, z, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F'}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F'}{\partial \eta} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F'}{\partial \zeta} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial F'}{\partial t'} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 = \frac{\partial F'}{\partial \xi} ;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(x, F', z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')}{\partial(x, y, z, t)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial F'}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F'}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F'}{\partial \zeta} & 1 & 0 \\ c & \frac{\partial F'}{\partial t'} & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 = \frac{\partial F'}{\partial \eta} ;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial(x, y, F', t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')}{\partial(x, y, z, t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial F'}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\partial F'}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F'}{\partial \zeta} & 0 \\ c & 0 & \frac{\partial F'}{\partial t'} & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 = \frac{\partial F'}{\partial \zeta} ,$$

en

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial(x, y, z, F')}{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, t')}{\partial(x, y, z, t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\partial F'}{\partial \xi} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial F'}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial F'}{\partial \zeta} \\ c & 0 & 0 & \frac{\partial F'}{\partial t'} \end{vmatrix} \cdot 1 = \frac{\partial F'}{\partial t'} - c \frac{\partial F'}{\partial \xi}$$

Resumerend hebben we nu dus:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F'}{\partial \zeta} \quad \text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F'}{\partial t'} - c \frac{\partial F'}{\partial \xi}$$

In de fundamentele basisvgl. (1') en (2') betekent dit dat:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u'}{\partial t'} - c \frac{\partial u'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial \xi}$$

en

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H'}{\partial t'} - c \frac{\partial H'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H'}{\partial \xi};$$

substitutie hiervan in vgl. (1^b) en vgl. (2') levert op resp.:

$$U \left(\frac{dA}{dH} \right)' \cdot \frac{\partial H'}{\partial \xi} + A' \cdot \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \left(\frac{dA}{dH} \right)' \cdot \left(\frac{\partial H'}{\partial t'} - c \frac{\partial H'}{\partial \xi} \right) = 0$$

en

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t'} - c \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \alpha U' \cdot \frac{\partial u'}{\partial \xi} + (1-\alpha) \frac{U'}{A'} \cdot \left(\frac{dA}{dH} \right)' \cdot \left(\frac{\partial H'}{\partial t'} - c \frac{\partial H'}{\partial \xi} \right) + g \sin \vartheta \frac{\partial H'}{\partial \xi} = \\ = g \sin \vartheta - \frac{\tau'}{\rho R'}; \end{aligned}$$

indien de accenten nu in het navolgende, om verwarring te voorkomen, gemakshalve worden weggelaten, is dit na rangschikking der termen te schrijven als:

$$A \frac{\partial u}{\partial \xi} + (U-c) \frac{dA}{dH} \cdot \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{dA}{dH} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{34}$$

resp.:

$$\begin{aligned}
 (\alpha U - c) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t'} + \left\{ g \cos \theta - (1 - \alpha) c \frac{U}{H} \frac{dH}{dH} \right\} \frac{\partial H}{\partial \xi} + (1 - \alpha) \frac{U}{H} \frac{dH}{dH} \frac{\partial H}{\partial t'} = \\
 = g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} \quad (35')
 \end{aligned}$$

Het is nu zaak om de eenparige snelheid c van het bewegende ξ, η, ζ -assenstelsel zodanig te bepalen dat alle afgeleiden naar t' gelijk aan nul zijn, zodat t.o.v. het bewegende assenstelsel een permanente beweging ontstaat. Hiertoe zullen we er vanuit gaan dat c de voortplantingssnelheid van de golf is (beschouwd t.o.v. de vaste begrenzingen voor de stroming), en dat het golfpatroon z.g. periodiek permanent is, m.a.w. de golfformatie is periodiek in afstand en de afmetingen van alle golven zijn gelijk. Door ons uitgangspunt, gebaseerd op waarnemingen van V. Cornish (2), aldus te kiezen, sluiten we aan bij hetgeen reeds gezegd is in de Inleiding van dit Hoofdstuk V, dat we ons n.l. uitsluitend zullen bezighouden met periodieke permanente rolgolven, welke te beschouwen zijn als de laatste en definitieve vorm van de golfverschijnselen, welke bij voldoende leidinglengte in een instabiele permanent eenparige stroming zullen ontstaan (de z.g. natuurlijke rolgolven zijn op te vatten als een tussenfase bij het tót stand komen van een periodiek permanent rolgolfpatroon). Nemen we nu ook aan dat het water in de prismatische hellende leiding zich in de positieve x -richting (i.e. "stroomafwaarts") beweegt, en dat de rolgolven progressief zijn (d.w.z. zij bezitten zowel t.o.v. de vloeistof als t.o.v. de begrenzingen een snelheid in de positieve x -richting) -wat weer bevestigd wordt door de waarnemingen van V. Cornish (2)-, dan houdt een en ander in dat zowel de voortplantingssnelheid c van de rolgolf, als de gemiddelde stroomsnelheid U positief is, dat c groter is dan U , en dat in de basisvgl. (2') de gemiddelde schuifspanning τ in de wrijvingsterm positief is. We komen zodoende vanzelf terecht op de reeds in Hoofdstuk I vermelde, aan het werk van R.F. Dressler (11) ontleende definitie van rolgolven: onder periodieke permanente rolgolven verstaat men elke golfformatie, periodiek in afstand, welke ontstaat als een vloeistof in een hellende open leiding naar beneden stroomt, waarbij het golfprofiel zich stroomafwaarts beweegt als een progressieve

golf met constante snelheid en zonder vervorming, en zodanig dat de werkelijke snelheden van de waterdeeltjes overal kleiner zijn dan de golfsnelheid.

Op grond van het bovenstaande gaan de fundamentele basisvgn. (34') en (35'), die nu getransformeerd zijn op een in ons geval met het periodieke permanente rolgolfpatroon "meebewegend" ξ, η, ζ -assenstelsel, over in:

$$A \frac{dU}{d\xi} + \frac{dA}{dH} (U-c) \cdot \frac{dH}{d\xi} = 0 \quad (34)$$

en

$$(\alpha U - c) \frac{dU}{d\xi} + \left\{ g \cos \theta - (1 - \alpha) c \frac{U}{A} \frac{dA}{dH} \right\} \frac{dH}{d\xi} = g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} \quad (35)$$

Tot dit resultaat kan men sneller komen door direct uit te gaan van bovenstaande definitie voor periodieke permanente rolgolven, en rechtstreeks te transformeren op een met de constante golfsnelheid c meebewegend coördinatensysteem $\xi = x - ct$; dan geldt n.l.:

$U(x, t) = U'(x - ct) = U'(\xi)$ en $H(x, t) = H'(x - ct) = H'(\xi)$,
waaruit volgt:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU'}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{dU'}{d\xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU'}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dU'}{d\xi}$$

en

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH'}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{dH'}{d\xi}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dH'}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dH'}{d\xi}$$

Substitutie hiervan in de fundamentele basisvgn. (1^{b'}) en (2') geeft dan weer, zoals eenvoudig is in te zien, de vgn. (34) en (35); de accenten zijn wederom gemakshalve, om verwarring te voorkomen, in het navolgende weggelaten.

Opmerking

In werkelijkheid mag de voortplantingssnelheid van een golf in een leiding met onregelmatige dwarsdoorsnede niet als een constante grootte beschouwd worden; de behandeling van de analyse van het probleem echter is hier opgezet vanuit een macroscopisch gezichtspunt voor gemiddelde stromingen, zodat de aanname van een constante voortplantingssnelheid als voldoende nauwkeurig beschouwd kan worden.

Uit vgl. (34) en vgl. (35) zullen we nu eerst de twee grootheden $\frac{dU}{d\xi}$ en $\frac{dH}{d\xi}$ oplossen; de vgn. (34) en (35) zijn te beschou-

wen als een stelsel van twee lineaire, niet homogene vgl'n. met twee onbekenden, $\frac{dU}{d\xi}$ en $\frac{dH}{d\xi}$, en derhalve geldt:

$$\frac{dU}{d\xi} = \begin{vmatrix} 0 & (U-c) \frac{dA}{dH} \\ (g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R}) & \left\{ g \cos \theta - (1-\alpha) c \frac{U}{H} \cdot \frac{dA}{dH} \right\} \end{vmatrix} ;$$

$$: \begin{vmatrix} A & (U-c) \frac{dA}{dH} \\ (\alpha U - c) & \left\{ g \cos \theta - (1-\alpha) c \frac{U}{H} \cdot \frac{dA}{dH} \right\} \end{vmatrix} ,$$

wat na uitwerking en rangschikking der termen oplevert:

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{(U-c) \frac{dA}{dH} \left\{ g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} \right\}}{\frac{dA}{dH} \left\{ (U-c)(\alpha U - c) + (1-\alpha) c U \right\} - g A \cos \theta} ; \quad (36^a)$$

benevens:

$$\frac{dH}{d\xi} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ (\alpha U - c) & (g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R}) \end{vmatrix} ;$$

$$: \begin{vmatrix} A & (U-c) \frac{dA}{dH} \\ (\alpha U - c) & \left\{ g \cos \theta - (1-\alpha) c \frac{U}{H} \cdot \frac{dA}{dH} \right\} \end{vmatrix} ,$$

wat na uitwerking en rangschikking der termen oplevert:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{-A \left\{ g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} \right\}}{\frac{dA}{dH} \left\{ (U-c)(\alpha U - c) + (1-\alpha) c U \right\} - g A \cos \theta} \quad (36^b)$$

Wordt vgl. (36^b) door vgl. (36^a) gedeeld, dan krijgen we direct:

$$\frac{dH}{dU} = - \frac{A}{(U-c) \frac{dA}{dH}} ,$$

wat na enige uitwerking overgaat in:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dU}{c-U} ;$$

integratie geeft dan onmiddellijk:

$$\ln |A| = -\ln |c-U| + \ln |K| ,$$

oftewel:

$$A(c-U) = K$$

De willekeurige constante K is in absolute waarde gelijk aan de schijnbare afvoer t.o.v. het meebewegende coördinatenstelsel, en wordt de z.g. progressieve mate van afvoer genoemd. De werkelijke afvoer door een t.o.v. de leidingbodem gefixeerde dwarsdoorsnede zal voor stroming met lopende golven een variabele grootte zijn.

In vgl. (36^b) bevat de wrijvingsterm de grootheden U en R; wordt nu de gemiddelde stroomsnelheid U uit vgl. (36^b) geëlimineerd, m.b.v. vgl. (37) dan wordt het rechterlid van vgl. (36^b) een functie van de waterdiepte H alleen, immers de dwarsdoorsnede A en de hydraulische straal R zijn functies van de waterdiepte. We kunnen nu dus zeggen dat vgl. (36^b) tezamen met vgl. (37) de algemene vgl. weergeeft voor het profiel van het wateroppervlak in geval van (driedimensionale) stroming met lopende golven in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel. (Wordt in het vervolg gesproken over "stroming met lopende golven", dan houdt dit geenszins in dat er sprake behoeft te zijn van meerdere golven achter elkaar; deze uitdrukking kan n.l. net zo goed van toepassing zijn op stroming met b.v. slechts één lopende golf).

Is de beschouwde (niet-permanente) stroming met lopende golven laminair, dan geldt voor de op het meebewegende ξ, η, ζ -assenstelsel getransformeerde wrijvingsterm, onder weglating van de accenten (zie p.V-6):

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{3vU}{R^2}$$

en voor de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal (zie p.V-10):

$$\alpha = 1, 2;$$

uit vgl. (37) volgt:

$$U - c = -\frac{K}{A}, \quad \text{en} \quad U = \frac{Ac - K}{A},$$

met behulp waarvan de wrijvingsterm overgaat in:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{3v|Ac - K|}{AR^2};$$

vgl. (36^b) gaat nu door substitutie van de voor $\frac{\tau}{\rho R}$ en U afgeleide formules, na enige herleiding over in:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{-H \{ g \sin \theta - \frac{3v|Ac - K|}{AR^2} \}}{\frac{dA}{dH} \left\{ \alpha \frac{K^2}{A^2} + (1 - \alpha)c^2 \right\} - gA \cos \theta}, \quad (36^b - a)$$

waarin: $\alpha=1,2$.

Is de beschouwde (niet-permanente) stroming met lopende golven turbulent, dan geldt voor de op het meebewegende ξ, η, ζ -coördinatenstelsel getransformeerde wrijvingsterm (onder weglating weer van de accenten), indien wordt uitgegaan van de weerstandswet van de Chezy (zie p.V-7):

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{gU|U|}{C^2 R},$$

en voor de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal (zie p.V-10):

$1,0 \leq \alpha \leq 1,1$, nader gepreciseerd door vgl. (21^b);

m.b.v. de uit vgl. (37) afgeleide formule voor U gaat de wrijvingsterm over in:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{g(Ac-K)|Ac-K|}{C^2 A^2 R}$$

Vgl. (36^b) gaat nu door substitutie van de voor $\frac{\tau}{\rho R}$ en U afgeleide formules, na enige herleiding over in:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{-gA \left\{ \sin \theta - \frac{(Ac-K)|Ac-K|}{C^2 A^2 R} \right\}}{\frac{dA}{dH} \left\{ \alpha \frac{K^2}{R^2} + (1-\alpha)c^2 \right\} - gA \cos \theta} \quad , \quad (36^b - b)$$

waarin:

$1,0 \leq \alpha \leq 1,1$ nader gepreciseerd door vgl. (21^b).

Is de beschouwde (niet-permanente) stroming met lopende golven turbulent, dan geldt voor de op het meebewegende ξ, η, ζ -coördinatenstelsel getransformeerde wrijvingsterm (onder weglating weer van de accenten), indien wordt uitgegaan van de weerstandswet van Manning (zie p.V-7):

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{gn^2 U |U|}{R^{\frac{2}{3}}},$$

en voor de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal (zie p.V-11):

$1,0 \leq \alpha \leq 1,1$ nader gepreciseerd door vgl. (21^c);

m.b.v. de uit vgl. (37) afgeleide formule voor U gaat de wrijvingsterm over in:

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{gn^2 (Ac-K) |Ac-K|}{A^2 R^{\frac{2}{3}}};$$

Vgl. (36^b) gaat nu door substitutie van de voor $\frac{\tau}{\rho R}$ en U afgeleide formules, na enige herleiding, over in:

$$\frac{dH}{d\zeta} = \frac{-gH \sin \vartheta - \frac{n^2 (Ac - K) / Ac - Kl}{R^2 R^{\frac{2}{3}}}}{\frac{dB}{dH} \left\{ \alpha \frac{K^2}{H^2} + (1-\alpha)c^2 \right\} - gH \cos \vartheta} \quad , \quad (36^b - c)$$

waarin:

$1,0 \leq \alpha \leq 1,1$, nader gepreciseerd door vgl. (21^c).

In de vgl. (36^b-a), (36^b-b) en (36^b-c) zijn de dwarsdoorsnede A, de hydraulische straal R (en $\frac{dA}{dH}$) functies van de waterdiepte H.

Vgl. (36^b-a) is de vgl. voor het profiel van het wateroppervlak, in geval we te maken hebben met (niet-permanente) driedimensionale laminaire stroming met lopende golven in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel; de resp. vgl. (36^b-b) en (36^b-c) zijn de vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval we te maken hebben met een (niet-permanente) driedimensionale turbulente stroming met lopende golven in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type resp. het Manning-type.

Is de leidingbreedte zeer groot t.o.v. de waterdiepte, m.a.w. is de stroming tweedimensionaal, dan is het niet moeilijk om in te zien dat de vgl. (36^b-a), (36^b-b) en (36^b-c) overgaan in resp.:

$$\frac{dH}{d\zeta} = \frac{-H \left\{ g \sin \vartheta - \frac{3r / Hc - Kl}{H^3} \right\}}{\alpha \frac{K^2}{H^2} + (1-\alpha)c^2 - gH \cos \vartheta} \quad , \quad (36^b - a')$$

$$\frac{dH}{d\zeta} = \frac{-gH \left\{ \sin \vartheta - \frac{(Hc - Kl) / Hc - Kl}{C^2 H^3} \right\}}{\alpha \frac{K^2}{H^2} + (1-\alpha)c^2 - gH \cos \vartheta} \quad (36^b - b')$$

en

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{-gH \{ \sin \theta - n^2 \frac{(Hc-k) |Hc-k|}{H^{\frac{3}{2}}} \}}{\alpha \frac{k^2}{H^2} + (1-\alpha)c^2 - gH \cos \theta} \quad (36^b - c')$$

Opmerking

Aangezien de weerstandswet van de Chezy in theoretisch opzicht beter gefundeerd is, en ook een breder toepassingsgebied heeft dan de weerstandswet van Manning, zullen we in het navolgende de vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van stroming met lopende golven (in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel) welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Manning-type, i.e. vgl. (36^b-c) resp. vgl. (36^b-c') voorlopig buiten beschouwing laten, en ons uitsluitend bepalen tot de gevallen van laminaire stroming met lopende golven, resp. turbulente stroming met lopende golven met als uitgangspunt de weerstandswet van de Chezy; oftewel we zullen alleen beschouwen vgl. (36^b-a) resp. vgl. (36^b-a') en vgl. (36^b-b) resp. vgl. (36^b-b').

Bepalen we ons dus tot vgl. (36^b-a) resp. vgl. (36^b-a') en vgl. (36^b-b) resp. vgl. (36^b-b') dan is het niet moeilijk om in te zien dat volledige integratie van deze resp. vgl'n. een buitengewoon uitgebreide zaak is, gezien de vele gevallen die te onderscheiden zijn en de aard van de integrand. Hierbij komt trouwens nog dat deze vgl'n. voor het profiel van het wateroppervlak, voor algemene gevallen niet analytisch geïntegreerd kunnen worden; alleen in het geval dat we te maken hebben met het laminaire stromingsgeval, resp. het turbulente stromingsgeval met als kenmerkende eigenschap een constante wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy, in een prismatische hellende leiding met rechtehoekige, driehoekige of andere eenvoudige doorsnedevorm, kunnen voornoemde vgl'n. wel analytisch geïntegreerd worden. Het behoeft geen betoog dat, indien de vorm van de dwarsdoorsnede bekend is, numerieke integratie altijd, in alle gevallen mogelijk is.

Het ligt nu voor de hand om eerst na te gaan of vgl. (36^b-a) resp. vgl. (36^b-a') en vgl. (36^b-b), resp. vgl. (36^b-b') oplossingen bevatten, welke continue periodieke functies van ξ zijn, aangezien dit het algemene type beweging is dat we zoeken.

H.A. Thomas (1) geeft bij de analysering van zijn "bewegende band model" aan dat er, voor de door hem beschouwde (niet-permanente) tweedimensionale turbulente stroming met lopende golven (gebaseerd op de wrijvingswet van de Chezy met constante C-waarde) zestig mogelijke oplossingen zijn voor golven met constante vorm; in tabelvorm geeft hij een overzicht van de voornaamste eigenschappen van elk van deze gevallen, door de differentiaalvgl. te bestuderen, die het verschijnsel bepaalt, zonder deze echt te integreren. Bij een grafisch onderzoek van de quasi-permanente turbulente stromingstoestand in een hellende prismatische leiding met willekeurige dwarsdoorsnede, vindt A. Craya (16), ook weer uitgaande van de weerstandswet van de Chezy met constante C-waarde, bij een systematische classificatie van de golven met constante vorm, nog enkele supplementaire oplossingsgevallen. Zowel uit het werk van H.A. Thomas (1), als uit dat van A. Craya (16) blijkt, dat er geen periodieke en continue oplossingen zijn voor de desbetreffende vgl'n. (hetzelfde zal gelden als men uitgaat van een quasi-permanente laminaire stromingstoestand). Dit is ook in te zien als we voor het profiel van het wateroppervlak gemakshalve b.v. uitgaan van vgl. (36^b-b'): het rechterlid van deze vgl. kan n.l. uitgedrukt worden als het quotiënt van derde graads polynomen in H , derhalve zullen de functies welke door integratie worden opgeleverd bestaan uit lineaire combinaties van de machten, de logaritme en de arcustangensfunctie, en men kan nauwelijks verwachten periodieke functie te vinden bij het bepalen van de inverse oplossingen $\xi(H)$ van dit type. Dit feit nu, dat er geen continue oplossingen te verkrijgen zijn uit de resp. vgl'n. voor het profiel van het wateroppervlak - tezamen met de waarnemingen aan rolgolven (zie b.v. V. Cornish (2))-, leidt tot de vraag of er geen discontinue periodieke oplossingen kunnen bestaan, met discontinuïteiten in de vorm van bores (i.e. lopende watersprongen) die dan zo aan elkaar geschakeld moeten worden, dat voldaan wordt aan de z.g. "schokvoorwaarden". R.F. Dressler (11) toont aan dat dit inderdaad het geval is.

Opmerking

Trouwens, om continue oplossingen te krijgen is het noodzakelijk om te werken met hogere approximaties dan die welke geleverd worden door de z.g. ondiepwater-theorie.

R.F. Dressler (11) leidt nog, uitgaande van een perturbatiemethode voor de stroming langs een helling, hogere benaderingen

af voor de basisvgl., waarbij wrijvingseffecten alleen beschouwd worden in de laagste approximatie; op basis hiervan verkrijgt hij een continue periodieke oplossing voor rolgolven in de vorm van elliptische (zg. cn-) functies van Jacobi, als de tweede orde oplossing van de ondiep-water theorie. Het werkelijke golfpatroon, dat waargenomen is in hellende leidingen in de natuur en bij experimenten, vertoont echter veel meer gelijkenis met de discontinue periodieke rolgolfoplossing dan met de continue periodieke rolgolfoplossing, reden waarom we ons hier uitsluitend zullen beperken tot de z.g. discontinue periodieke oplossingen van het rolgolfprobleem.

Ons voornaamste doel zal zijn discontinue rolgolfoplossingen te construeren door geschikte oplossingen voor de vgl. (36^b-a) resp. vgl. $(36^b-a')$ en vgl. (36^b-b) resp. vgl. $(36^b-b')$ aan elkaar te passen, te schakelen, d.m.v. z.g. "schokken". We zullen daarom nu overgaan tot de afleiding van de z.g. schokvoorwaarden, in een zodanige vorm dat deze van toepassing zijn op de hier beschouwde situatie.

V-C: De schokvoorwaarden* met weerstand in een hellende prismatische leiding met willekeurige dwarsdoorsnede.

In Hoofdstuk I, de Inleiding, is reeds vermeld dat elke discontinuïteit welke in de waterspiegel van stromend water voorkomt, aangeduid wordt met de naam "schok"; zo noemt men een bewegende discontinuïteit "bore" en een stationaire "watersprong". We zullen hier nu de drie z.g. "schokvoorwaarden" afleiden voor het geval van een prismatische leiding met (continue) constant hellende bodem, en aantonen dat deze opgaan voor elke willekeurige volumekracht welke op de vloeistof werkt; in de literatuur (zie b.v. J.J. Stoker (32)) worden de schokvoorwaarden n.l. steeds afgeleid uitgaande van een horizontale leidingbodem en afwezigheid van een weerstandskracht. De weerstandsterm $\frac{\tau}{\rho R}$ heeft de dimensie $[N.kg.^{-1}]$, i.e. kracht per eenheid van massa, en kan derhalve beschouwd worden als een speciaal soort volumekracht.

Beschouwen we nu een discontinuïteit met abscis $x=\delta(t)$, welke met de vloeistof meebeweegt. Aangezien we steeds zijn uitgegaan van de gemiddelde snelheid in de verticaal, i.p.v. de snelheid als functie van de waterdiepte, zullen we hier aannemen, dat alle vloeistofdeeltjes in een verticaal dezelfde (gemiddelde) snelheid bezitten, zodat alle deeltjes die zich in zeker vlak

* voor stroming

loodrecht op de x-as (resp. ξ -as) bevinden, daar ook blijven; daardoor is het mogelijk om het water te beschouwen in een gebied begrensd door twee normaalvlakken met abscissen $x=a_0(t)$ en $x=a_1(t)$, terwijl het gehele gebied beweegt (zie fig. V-4); de index 0 zullen we nu gebruiken om grootheden "links", en de index 1 om grootheden "rechts" van de discontinuïteit aan te duiden. Achteraf zullen we dan de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal aanbrengen.

De wet van behoud van massa en de wet van behoud van impuls kunnen nu toegepast worden op het ingesloten vloeistofgebied, terwijl dit gehele gebied beweegt in de tijd; ook de uitdrukking voor de mate van energieverandering kan bepaald worden.

V-C.a: De wet van behoud van massa.

De wet van behoud van massa luidt voor de beschouwde situatie:

$$\frac{d}{dt} M' = 0, ,$$

waarin M' de mate van opeenhoping van massa binnen de beschouwde vloeistofkolom is.

De massa van een volume-elementje $dx dy dz = dA \cdot dx$ is:

$$\rho dA dx ;$$

voor een vloeistofkolom met breedte dx wordt dit (termen welke oneindig klein zijn van de tweede en hogere orde, worden nu en in het volgende verwaarloosd):

$$\int \rho dA dx = \rho A dx ;$$

de mate van opeenhoping van massa binnen het beschouwde vloeistofgebied, M' , is:

$$M' = \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho A dx, ,$$

zodat de wet van behoud van massa oplevert:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho A dx = 0 \quad (38^a)$$

V-C.b: De wet van behoud van impuls.

De wet van behoud van impuls luidt voor de beschouwde situatie:

$$\sum F = \frac{M'_{x_1} - M'_{x_0}}{dt} = \frac{dm_x}{dt} ,$$

waarin $\frac{dm_x}{dt}$ de mate van opeenhoping van impuls binnen de beschouwde vloeistofkolom is.

De impuls van een volume-elementje $dx dy dz = dA \cdot dx$ is:

$$\rho u dA dx ;$$

voor een vloeistofkolom met breedte dx wordt dit:

$$\int \rho u dA dx = \rho U A dx ,$$

zodat $\frac{dm_x}{dt}$ wordt:

$$\frac{dm_x}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \rho U dx$$

De uitwendige kracht op een volume-elementje $dx dy dz = dA \cdot dx$ t.g.v. de zwaartekracht is:

$$\rho g \sin \theta \cdot dA \cdot dx;$$

voor een vloeistofkolom met breedte dx wordt dit:

$$\int \rho g \sin \theta \cdot dA \cdot dx = \rho g A \sin \theta dx,$$

zodat voor het gehele beschouwde gebied geldt:

$$F_g = \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \rho g A \sin \theta dx.$$

Op analoge wijze kan voor de uitwendige kracht op het beschouwde gebied t.g.v. het drukverval, worden afgeleid:

$$F_{\Delta p} = \int_{H_2-H(a_2,t)}^{H_1-H(a_1,t)} p dA - \int_{H_2-H(a_2,t)}^{H_1-H(a_1,t)} p_1 dA;$$

We zullen nu invoeren de gemiddelde druk p_{gem} , welke zodanig is gedefiniëerd dat de totale drukkraft gelijkblijft;

$$\int p dA = p_{gem} \cdot A = \rho g \cos \theta \cdot (H - H_{cont}) \cdot A,$$

waarin H_{cont} de afstand is van de bodem tot het zwaartepunt van de dwarsdoorsnede A ; we krijgen dan (N.B. De druk is aangenomen als zijnde hydrostatisch):

$$F_{\Delta p} = \rho g A_0 \cos \theta \cdot (H_0 - H_{cont}) - \rho g A_1 \cos \theta \cdot (H_1 - H_{cont})$$

De wrijvingsterm heeft de dimensie kracht per massa, en wordt beschouwd als een speciaal soort volume kracht; derhalve is eenvoudig in te zien dat we kunnen stellen:

$$F_f = - \rho \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \int \frac{z}{\rho R} dA dx$$

ΣF wordt nu:

$$\Sigma F = \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \rho g A \sin \theta dx + \rho g A_0 \cos \theta \cdot (H_0 - H_{cont}) - \rho g A_1 \cos \theta \cdot (H_1 - H_{cont}) +$$

$$- \rho \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \int \frac{z}{\rho R} dA dx \quad (39^a)$$

$\Sigma F = \frac{d}{dt} m_x$ geeft nu:

$$\frac{d}{dt} \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \rho U dx = \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \rho g A \sin \theta dx + \rho g A_0 \cos \theta \cdot (H_0 - H_{cont}) - \rho g A_1 \cos \theta \cdot (H_1 - H_{cont}) +$$

$$- \rho \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \int \frac{z}{\rho R} dA dx$$

V-C.c: De uitdrukking voor de mate van energie verandering.

De wet van behoud van energie luidt voor de beschouwde situatie:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{E_2 - E_1}{dt} + \frac{dW}{dt};$$

hierin is Q de energie in de vorm van warmte, geluid, etc. welke door het controle-oppervlak aan het systeem wordt toegevoegd,

$\frac{E_2' - E_1'}{dt}$ de toename van de inwendige energie van de massa binnen het beschouwde gebied, en W de arbeid overgedragen vanuit het systeem. De inwendige energie van de massa in het beschouwde gebied bestaat uit de kinetische energie plus de potentiële energie. De kinetische energie van een elementje $dx dy dz = dA \cdot dx$ is:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 dA dx;$$

voor een vloeistofkolom met breedte dx wordt dit:

$$\int_A \frac{1}{2} \rho u^2 dA dx = \frac{1}{2} \rho U^2 A dx,$$

zodat voor het beschouwde gebied geldt:

$$\int_{z(t)}^{z_2(t)} \frac{1}{2} \rho U^2 A dx$$

De potentiële energie van een vloeistofkolom met breedte dx is:

$$\rho g A dx \cdot (H_{centr} + s) \cos \theta,$$

waarin s de afstand, gemeten in de z -richting, is tot een horizontaal referentie-vlak; nu geldt voor het beschouwde gebied:

$$\int_{z(t)}^{z_2(t)} \rho g A (H_{centr} + s) \cos \theta dx$$

Voor de opeenhoping (i.e. veranderingen) van inwendige energie in het beschouwde gebied kan nu geschreven worden:

$$\frac{E_2' - E_1'}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{z(t)}^{z_2(t)} \left\{ \frac{1}{2} \rho U^2 A + \rho g A (H_{centr} + s) \cos \theta \right\} dx$$

De arbeid welke door het systeem in een tijdsinterval Δt verricht wordt, t.g.v. het drukverschil is:

$$\Delta W_{Ap} = + \frac{\Delta t}{R_0} \int_{R_0}^{R_1} u_0 dA \cdot \int_{R_0=R(z,t)}^{R_1} p_0 dR - \frac{\Delta t}{R_1} \int_{R_1}^{R_2} u_1 dA \cdot \int_{R_2=R(z,t)}^{R_1} p_1 dR ;$$

de mate van energieverandering van het beschouwde systeem, t.g. hiervan is dan:

$$\frac{dW}{dt}_{Ap} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}_{Ap} = \rho g \cos \theta \cdot (H_1 - H_{1centr}) A_1 U_1 - \rho g \cos \theta \cdot (H_0 - H_{0centr}) A_0 U_0,$$

als weer ingevoerd wordt de gemiddelde druk p_{gm} (zie boven).

De arbeid die het systeem in een tijdsinterval Δt verricht t.g.v. de wrijving is:

$$\Delta W_z = - \rho \int_{z(t)}^{z_2(t)} \int_A \left\{ \frac{z}{\rho R} \cdot \frac{\Delta t}{R} \int_A u dA \right\} dA dx ;$$

de mate van energieverandering van het beschouwde systeem t.g. hiervan is dan:

$$\frac{dW}{dt} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = + \rho \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \int_{\eta} \frac{zU}{\rho R} dA dx$$

We krijgen nu dus voor $\frac{dQ}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \left\{ \frac{1}{2} \rho U^2 A + \rho g A (H_{cont} + s) \cdot \cos \theta \right\} dx + \rho g \cos \theta (H_1 - H_{cont}) A_1 U_1 + \\ - \rho g \cos \theta (H_0 - H_{cont}) A_0 U_0 + \rho \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \int_{\eta} \frac{zU}{\rho R} dA dx \end{aligned} \quad (40^a)$$

We zullen nu aannemen dat A naar beneden begrensd groter dan nul is, en dat U niet oneindig wordt. Laten we a_0 nu naderem tot a_1 , dan nadert de enkelvoudige integraal in het rechterlid van vgl. (39^a) tot nul, terwijl ook de dubbelintegraal in het rechterlid van vgl. (39^a), resp. vgl. (40^a) tot nul nadert: immers het beschouwde gebied nadert tot nul terwijl de integrand eindig blijft. Derhalve is het duidelijk dat de volumekracht geen invloed heeft op de schokvoorwaarden.

Vervolgens zullen we de afgeleiden naar de tijd bepalen van de overige integralen. Beschouwen we daartoe de integraal:

$$I = \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \phi(x, t) dx,$$

waarvan $\phi(x, t)$ een discontinuïteit bezit in $x = \sigma(t)$ en $\phi(x, t)$ de primitieve is van $\varphi(x, t)$; dan geldt:

$$I = \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \phi(x, t) dx = \int_{z_0}^{\sigma} \phi(x, t) dx + \int_{\sigma}^{z_1} \phi(x, t) dx = \phi(x, t) \Big|_{z_0(t)}^{\sigma(t)} + \phi(x, t) \Big|_{\sigma(t)}^{z_1(t)}$$

De suffices - en + duiden de grootheden aan zoals deze ontwikkeld zijn resp. links en rechts van de discontinuïteit.

Differentiatie naar t geeft:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial \phi(\sigma_-, t)}{\partial \sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial \phi(\sigma_-, t)}{\partial t} - \frac{\partial \phi(\sigma_+, t)}{\partial \sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} - \frac{\partial \phi(\sigma_+, t)}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial \phi(z_1, t)}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial \phi(z_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \phi(z_0, t)}{\partial z_0} \cdot \frac{dz_0}{dt} - \frac{\partial \phi(z_0, t)}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi(\sigma_-, t) - \phi(\sigma_+, t) + \phi(z_1, t) - \phi(z_0, t) \right\} + \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \phi(\sigma_-, t) + \end{aligned}$$

$$-\frac{da_0}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial a_0} \phi(a_0, t) + \frac{da_1}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \phi(a_1, t) - \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \phi(s, t);$$

met $\frac{da_0}{dt} = U_0$ en $\frac{da_1}{dt} = U_1$ wordt dit:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + \left\{ \phi(s, t) \frac{ds}{dt} - \phi(a_0, t) U_0 \right\} + \left\{ \phi(a_1, t) U_1 - \phi(s, t) \frac{ds}{dt} \right\};$$

$$\begin{aligned} \lim_{a_0 \rightarrow a_1} \frac{dI}{dt} &= \left\{ \phi(a_0, t) \frac{ds}{dt} - \phi(a_0, t) U_0 \right\} + \left\{ \phi(a_1, t) U_1 - \phi(a_0, t) \frac{ds}{dt} \right\} = \\ &= -\phi(a_0, t) \left\{ U_0 - \frac{ds}{dt} \right\} + \phi(a_1, t) \left\{ U_1 - \frac{ds}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

Met $\frac{ds}{dt} = c$ levert dit dan op:

$$\lim_{a_0 \rightarrow a_1} \frac{dI}{dt} = \phi_1(U_1 - c) - \phi_0(U_0 - c),$$

waarin $U_i - c$ de stroomsnelheid is t.o.v. de bewegende schok.

Limietovergang volgens bovenstaande formule levert voor vgl. (38^a) op:

$$\rho A_1 (U_1 - c) - \rho A_0 (U_0 - c) = 0,$$

wat m.b.v. vgl. (37) ook geschreven kan worden als:

$$\rho A_1 (U_1 - c) = \rho A_0 (U_0 - c) = \phi_M = -\rho K, \quad (38^b)$$

waarin ϕ_M de z.g. "massaflux" voorstelt; deze stroomt per definitie van de voorzijde (i.e. het "front") naar de achterzijde (i.e. de "rug") van de schok en is dus, uitgaande van fig. V-4 positief, aangezien de positieve x-as naar rechts wijst.

Limietovergang volgens bovenstaande formule levert voor vgl. (39^a) op:

$$\rho A_1 U_1 (U_1 - c) - \rho A_0 U_0 (U_0 - c) = \rho g \cos \theta \cdot A_0 (H_0 - H_{0, \text{centr}}) - \rho g \cos \theta \cdot A_1 (H_1 - H_{1, \text{centr}}).$$

Wordt hieraan nu toegevoegd de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal, gedefiniëerd als

$$\alpha U^2 A = \int u^2 dA,$$

en nemen we aan dat deze constant is, dan gaat deze vgl. over in:

$$\rho A_1 U_1 (\alpha U_1 - c) - \rho A_0 U_0 (\alpha U_0 - c) = \rho g \cos \theta \cdot \left\{ A_0 (H_0 - H_{0, \text{centr}}) - A_1 (H_1 - H_{1, \text{centr}}) \right\} \quad (39^b)$$

Limietovergang volgens bovenstaande formule, levert voor vgl. (40^a) op:

$$\lim_{a_0 \rightarrow a_1} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \rho U_1^2 (U_1 - c) A_1 + \rho g (U_1 - c) A_1 (H_{1, \text{centr}} + s_1) \cos \theta - \frac{1}{2} \rho U_0^2 (U_0 - c) A_0 +$$

$-\rho g(U_0 - c)A_0 \cdot (H_{0cont} + s_0) \cos \theta + \rho g \cos \theta \cdot \{A_1 U_1 (H_1 - H_{1cont}) - A_0 U_0 (H_0 - H_{0cont})\}$,
 met de opmerking dat $s_0 = s_1$.

Wordt hieraan nu toegevoegd de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal, benevens een analoog gedefiniëerde correctiecoëfficiënt α' :

$$\alpha' U^3 A = \int u^3 dA,$$

stellen we dat $\alpha \alpha_x = \alpha'$, en nemen we aan dat deze correctiecoëfficiënten constanten zijn, dan geldt:

$$\lim \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \rho \alpha \{U_1^2 (\alpha_x U_1 - c) A_1 - U_0^2 (\alpha_x U_0 - c) A_0 +$$

$$+ g \cos \theta \{ \rho A_1 (U_1 - c) (H_{1cont} + s) - \rho A_0 (U_0 - c) (H_{0cont} + s) \} +$$

$$+ \rho g \cos \theta \{ A_1 U_1 (H_1 - H_{1cont}) - A_0 U_0 (H_0 - H_{0cont}) \}$$

Voeren we nu nog de massaflux ϕ_M in m.b.v. vgl. (38^b), dan is s uit de tweede term van het rechterlid te elimineren en krijgen we:

$$\lim \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \rho \alpha \{U_1^2 (\alpha_x U_1 - c) A_1 - U_0^2 (\alpha_x U_0 - c) A_0\} + \phi_M g \cos \theta (H_{1cont} - H_{0cont}) +$$

$$+ \rho g \cos \theta \{A_1 U_1 (H_1 - H_{1cont}) - A_0 U_0 (H_0 - H_{0cont})\} \quad (40^b)$$

Opmerking

Bovenstaande vgl. (38^b), (39^b) en (40^b) zijn ook sneller af te leiden. Daartoe zullen we onderstellen dat het schokfront een eindige lengte, L , heeft, gemeten langs de leidingbodem, en dat de stroming met schokgolf te beschouwen is als een geval van permanentie, door op het gehele systeem de voortplantings-snelheid c van de schokgolf te superponeren. We zullen dan de wet van behoud van massa, de wet van behoud van impuls en de wet van behoud van energie toepassen op het controle-volume dat gevormd wordt door de vloeistof tussen golftop en golfdal (zie fig. V-5, gearceerde gedeelte). Om dan vervolgens op de bedoelde vgl. terecht te komen, zullen we de schokdikte (in longitudinale richting gemeten) laten naderen tot nul (zie fig. V-5)

a- De wet van behoud van massa.

Deze luidt in zijn algemene gedaante:

$$0 = \frac{dM'}{dt} + \frac{dm_o - dm_i}{dt};$$

hierin is $\frac{dM'}{dt}$ de mate van ophoping van massa binnen het controle-volume, en $\frac{dm_o - dm_i}{dt}$ de netto hoeveelheid massa die het controle-volume verlaat.

Voor de hier beschouwde situatie is: $\frac{dM'}{dt} = 0$, en derhalve geldt:

$$0 = \frac{dm_o - dm_i}{dt} = \rho \int (u_1 - c) dA - \rho \int (u_0 - c) dA,$$

waaruit volgt:

$$\rho A_1 (U_1 - c) - \rho A_0 (U_0 - c) = 0$$

Voeren we weer het begrip "massaflux", ϕ_m , in, dan krijgen we:

$$\rho A_1 (U_1 - c) = \rho A_0 (U_0 - c) = \phi_m; \tag{38^b}$$

omdat de massaflux per definitie van het front van de schok naar de achterzijde stroomt, is ϕ_m nu negatief (zie fig.V-5).

b- De wet van behoud van impuls.

Deze luidt in zijn algemene gedaante:

$$\sum F_x = \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{dM_{x_0} - dM_{x_i}}{dt};$$

hierin is $\frac{\partial m_x}{\partial t}$ de mate van impulsoppeenhoping in de x-richting binnen het controle-volume en $\frac{dM_{x_0} - dM_{x_i}}{dt}$ de mate waarin de impuls in de x-richting door het controle-oppervlak naar buiten stroomt.

Voor de hier beschouwde situatie is: $\frac{\partial m_x}{\partial t} = 0$.

De netto impulsflux door de oppervlakte van het controle-volume is:

$$\frac{dM_{x_0} - dM_{x_i}}{dt} = \int_{\frac{1}{2}} \rho (u_1 - c)^2 dA - \int_{\frac{1}{2}} \rho (u_0 - c)^2 dA;$$

voeren we in de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal, gedefiniëerd als:

$$\alpha U^2 A = \int u^2 dA,$$

en nemen we aan dat dit een constante is, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x_0} - dM_{x_i}}{dt} &= \rho (\alpha U_1^2 A_1 - 2U_1 A_1 + c^2 A_1) - \rho (\alpha U_0^2 A_0 - 2c U_0 A_0 + c^2 A_0) = \\ &= \rho \{ U_1 A_1 (\alpha U_1 - c) - A_1 c (U_1 - c) - U_0 A_0 (\alpha U_0 - c) + A_0 c (U_0 - c) \}. \end{aligned}$$

M.b.v. de continuïteitsvgl.:

$$(U_0 - c) A_0 = A_1 (U_1 - c) = \text{constant} = -K$$

levert dit op:

$$\frac{dM_{x_0} - dM_{x_i}}{dt} = \rho A_1 U_1 (\alpha U_1 - c) - \rho A_0 U_0 (\alpha U_0 - c)$$

Als we wederom werken met de gemiddelde druk p_{gem} , als $\bar{\tau}$ de schuifspanning is gemiddeld over de schokdikte L, en G het gewicht van het water in de controle ruimte, dan is het niet moeilijk om in te zien dat:

$$\sum F_x = \rho g \cos \theta \{ A_0 (H_0 - H_{0centr}) - A_1 (H_1 - H_{1centr}) \} + \frac{G \sin \theta - \bar{\tau} L}{\rho} \rho;$$

reduceren we de schokdikte L nu tot nul, dan is $\sum F_x$, omdat G en L naderen tot nul:

$$\sum F_x = \rho g \cos \theta \{ A_0 (H_0 - H_{0centr}) - A_1 (H_1 - H_{1centr}) \},$$

zodat de wet van behoud van impuls wordt:

$$\rho A_1 U_1 (\alpha U_1 - c) - \rho A_0 U_0 (\alpha U_0 - c) = \rho g \cos \theta \{ A_0 (H_0 - H_{0centr}) - A_1 (H_1 - H_{1centr}) \}. \tag{39^b}$$

c- De wet van behoud van energie.

Deze luidt in zijn algemene gedaante:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{E_2' - E_1'}{dt} + \frac{dE_o - dE_i}{dt} + \frac{dW}{dt};$$

hierin is Q de energie die in de vorm van warmte etc., aan het beschouwde systeem wordt toegevoegd, $\frac{E_2' - E_1'}{dt}$ de toename van de inwendige energie van de massa binnen het controle-volume, $\frac{dE_o - dE_i}{dt}$ de netto inwendige energieflex door het controle-oppervlak en W de arbeid overgedragen vanuit het controle-oppervlak. Voor de hier beschouwde situatie is, als de schokdikte L nadert tot nul, $\frac{E_2' - E_1'}{dt} = 0$.

Voor de inwendige energieflex door het controle-oppervlak naar buiten geldt:

$$\frac{dE_o}{dt} = \int_2^1 \rho(u_1 - c)u_1^2 \cdot dA + (H_{1cont} + s_1) \cos \theta \cdot \int_2^1 \rho g(u_1 - c) dA;$$

evenzo geldt voor de inwendige energieflex door het controle-oppervlak naar binnen:

$$\frac{dE_i}{dt} = \int_1^2 \rho(u_o - c)u_o^2 \cdot dA + (H_{ocont} + s_o) \cos \theta \cdot \int_1^2 \rho g(u_o - c) dA.$$

Voeren we nu weer in de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal, benevens de analoog gedefiniëerde correctiecoëfficiënt α' :

$$\alpha' U^3 A = \int u^3 dA,$$

en stellen we dat $\alpha \alpha_* = \alpha'$, dan geldt onder de aanname dat deze correctiecoëfficiënten constant zijn:

$$\begin{aligned} \frac{dE_o - dE_i}{dt} &= \frac{1}{2} \rho \alpha U_1^2 (\alpha_* U_1 - c) A_1 + \rho g (H_{1cont} + s_1) \cos \theta \cdot A_1 (U_1 - c) + \\ &= \frac{1}{2} \rho \alpha U_o^2 (\alpha_* U_o - c) A_o - \rho g (H_{ocont} + s_o) \cos \theta \cdot A_o (U_o - c); \end{aligned}$$

Voor een tot nul gereduceerde schokdikte L is $s_o = s_1$; door invoering van de massaflux ϕ_M m.b.v. vgl. (38^b) is s dan te elimineren uit de tweede en vierde term van het rechterlid, en krijgen we:

$$\frac{dE_o - dE_i}{dt} = \frac{1}{2} \rho \alpha \left[U_1^2 (\alpha_* U_1 - c) A_1 - U_o^2 (\alpha_* U_o - c) A_o \right] + g \cos \theta \cdot \phi_M (H_{1cont} - H_{ocont}).$$

$\frac{dW}{dt}$ is te splitsen in een term t.g.v. de wrijving, $\frac{dW}{dt}_{\Delta p}$, die tot nul nadert als de schokdikte L gereduceerd wordt tot nul, en een term t.g.v. het drukverval, $\frac{dW}{dt}_{\Delta p}$, die onder invoering van de gemiddelde drukspanning p_{gem} (zie boven) wordt:

$$\frac{dW}{dt}_{\Delta p} = \rho g \cos \theta \cdot (H_1 - H_{1cont}) A_1 U_1 - \rho g \cos \theta \cdot (H_o - H_{ocont}) A_o U_o$$

I.p.v. $\frac{dQ}{dt}$ krijgen we nu, als de schokdikte L nadert tot nul, $\lim \frac{dQ}{dt}$, dus:

$$\lim \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \rho \alpha \left[U_1^2 (\alpha_* U_1 - c) A_1 - U_o^2 (\alpha_* U_o - c) A_o \right] + \phi_M g \cos \theta (H_{1cont} - H_{ocont}) +$$

$$+\rho g \cos \theta \{A_1 U_1 (H_1 - H_{1cent}) - A_0 U_0 (H_0 - H_{0cent})\} \quad (40^b)$$

Beschouwen we nu vgl. (39^b) dan is het duidelijk dat door de aanwezigheid van de correctiecoëfficiënt α de grootheden U en c niet m.b.v. vgl. (37) geëlimineerd kunnen worden, m.a.w. het is niet mogelijk om uit deze beide vgl'n. het verband te vinden tussen de grootste en de kleinste waterdiepte van de golf. Evenmin kunnen uit vgl. (40^b) de grootheden U en c geëlimineerd worden m.b.v. vgl. (37), t.g.v. de aanwezigheid van de correctiecoëfficiënten α en α' . In dit verband zij tevens nog opgemerkt dat het niet geheel duidelijk is hoe de correctiecoëfficiënten α en α' zich als variabele functies gedragen, reden waarom ze als constanten zijn aangenomen.

In feite is het zo dat ter plaatse van de schok de verticale versnellingen (c.q. de versnellingen in de z-richting) niet meer verwaarloosd kunnen worden, zodat door eigenlijk de ontwikkelde z.g. "ondiep-watervgl'n." (waarvan is uitgegaan) niet meer geldig zijn, en ook de drukverdeling dus niet meer hydrostatisch is. Nochtans zullen we veronderstellen, dat deze verticale versnellingen, welke de sterke vortciteit in de schok veroorzaken, zowel in het geval van laminaire stroming als van turbulente stroming, een dusdanig nivellerende invloed op de snelheidsverdeling in de verticaal hebben, dat we mogen zeggen $\alpha=1$, en $\alpha'=1$ (dus ook $\alpha_*=1$); tevens zullen we er vanuitgaan dat de drukverdeling ter plaatse min of meer hydrostatisch blijft, (hierbij moeten we bedenken dat de schok altijd een zekere "dikte" L heeft en dat voornoemde drukverdeling geldt aan de bovenstroomse resp. benedenstroomse zijde van de schok (zie fig.V-5).

Op grond van het bovenstaande gaat de vgl. voor de wet van behoud van impuls, vgl. (39^b), over in:

$$\rho A_1 U_1 (U_1 - c) - \rho A_0 U_0 (U_0 - c) = \rho g \cos \theta \{A_0 (H_0 - H_{0cent}) - A_1 (H_1 - H_{1cent})\};$$

m.b.v. de vgl. voor de wet van behoud van massa, vgl. (38^b) levert dit op:

$$\phi_M \cdot (U_1 - U_0) = \rho g \cos \theta \{A_0 (H_0 - H_{0cent}) - A_1 (H_1 - H_{1cent})\} \quad (39^c)$$

Uit deze vgl. en uit vgl. (37) is het nu mogelijk om U_1 en U_0 te elimineren, zodat een relatie kan worden afgeleid tussen de grootste en de kleinste waterdiepte van het golfprofiel.

Tevens gaat op grond van het bovenstaande de vgl. voor de wet van behoud van energie, vgl. (40^b) over in:

$$\lim_{dt} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \rho U_1^2 A_1 (U_1 - c) - \frac{1}{2} \rho U_0^2 A_0 (U_0 - c) + \phi_M g \cos \theta (H_{1cent} - H_{0cent}) +$$

$$+\rho g \cos \theta \cdot \left\{ A_1 U_1 (H_1 - H_{1\text{centr}}) - A_0 U_0 (H_0 - H_{0\text{centr}}) \right\}.$$

Voor de eerste twee termen van het rechterlid kan men m.b.v. vgl. (38^b) schrijven:

$$\frac{1}{2} \phi_M U_1^2 - \frac{1}{2} \phi_M U_0^2 = \frac{1}{2} \phi_M (U_1 + U_0)(U_1 - U_0);$$

eliminatie hieruit van de factor $\phi_M (U_1 - U_0)$ m.b.v. vgl. (39^c) levert voor $\lim \frac{dQ}{dt}$ op:

$$\lim \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \cdot (U_1 + U_0) \cdot \rho g \cos \theta \left\{ A_0 (H_0 - H_{0\text{centr}}) - A_1 (H_1 - H_{1\text{centr}}) \right\} + g \cos \theta \cdot \phi_M (H_{1\text{centr}} - H_{0\text{centr}}) + \rho g \cos \theta \left\{ A_1 U_1 (H_1 - H_{1\text{centr}}) - A_0 U_0 (H_0 - H_{0\text{centr}}) \right\},$$

wat na rangschikken der termen en enige herleiding oplevert:

$$\begin{aligned} \lim \frac{dQ}{dt} &= \frac{g \cos \theta}{2} \left\{ \rho A_0 (H_0 - H_{0\text{centr}}) + \rho A_1 (H_1 - H_{1\text{centr}}) \right\} (U_1 - U_0) + \\ &+ g \cos \theta \cdot \phi_M (H_{1\text{centr}} - H_{0\text{centr}}) = \\ &= \frac{g \cos \theta}{2 A_0 A_1} \left\{ \rho A_0^2 A_1 (H_0 - H_{0\text{centr}}) + \rho A_1^2 A_0 (H_1 - H_{1\text{centr}}) \right\} \cdot \left\{ (U_1 - c) - (U_0 - c) \right\} + \\ &+ \frac{g \cos \theta \cdot \phi_M}{2 A_0 A_1} \cdot \left\{ 2 A_0 A_1 (H_{1\text{centr}} - H_{0\text{centr}}) \right\}; \end{aligned}$$

m.b.v. vgl. (38^b) is $(U_1 - c)$ en $(U_0 - c)$ hieruit nu te elimineren, zodat we na enige herleiding, en rangschikken der termen krijgen:

$$\lim \frac{dQ}{dt} = \frac{g \cos \theta \cdot \phi_M}{2 A_0 A_1} \left\{ A_0^2 (H_0 - H_{0\text{centr}}) - A_0 A_1 (H_0 + H_{0\text{centr}}) + A_0 A_1 (H_1 + H_{1\text{centr}}) - A_1^2 (H_1 - H_{1\text{centr}}) \right\} \quad (40^c)$$

Duiden we nu het hoogste punt en het laagste punt van het wateroppervlakteprofiel aan met de resp. index b en f, m.a.w. vervangen we in de door ons beschouwde situatie van stroming met rolgolven van de gedaante zoals geschetst in b.v. fig.V-5, de index 0 door b, en de index 1 door f, dan worden de drie schokvoorwaarden tenslotte:

$$\rho A_f (U_f - c) = \rho A_b (U_b - c) = \phi_M = -\rho K, \quad (38)$$

(waarin ϕ_M dus per definitie nu negatief is) i.e. de wet van behoud van massa;

$$\phi_M (U_f - U_b) = \rho g \cos \theta \cdot \left\{ A_b (H_b - H_{b\text{centr}}) - A_f (H_f - H_{f\text{centr}}) \right\}, \quad (39)$$

i.e. de wet van behoud van impuls; en

$$\lim \frac{dQ}{dt} = \frac{g \cos \theta \cdot \phi_M}{2 A_b A_f} \left\{ A_b^2 (H_b - H_{b\text{centr}}) - A_b A_f (H_b + H_{b\text{centr}}) + A_b A_f (H_f + H_{f\text{centr}}) - A_f^2 (H_f - H_{f\text{centr}}) \right\}, \quad (40)$$

i.e. de wet van behoud van energie;

hierin stelt ϕ_M de z.g. "massaflux" voor, H_{centr} is de afstand van de leidingbodem tot het zwaartepunt van de desbetreffende dwarsdoorsnede en de indices f en b geven de waarden aan van de

bijbehorende grootheden in het laagste, resp. hoogste punt van het wateroppervlakte profiel.

Hebben we te maken met een geval van tweedimensionale stroming, d.w.z. vindt de stroming plaats in een zeer brede leiding, met rechthoekige doorsnede, dan is de gedaante van vgl. (40) sterk te vereenvoudigen; immers dan geldt per eenheid van breedte:

$$H_{cont} = \frac{1}{2} \cdot H, \quad A_b = H_b \cdot 1 \quad \text{en} \quad A_f = H_f \cdot 1,$$

zodat vgl. (40) overgaat in:

$$\lim \frac{dQ}{dt} = \frac{g \cos \theta \phi_M}{2H_b H_f} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot H_b^3 - \frac{1}{2} H_f^3 - \frac{3}{2} H_b^2 \cdot H_f + \frac{3}{2} H_b H_f^2 \right],$$

wat gemakkelijk te herleiden is tot:

$$\lim \frac{dQ}{dt} = \frac{g \cos \theta \phi_M}{4H_b H_f} \cdot (H_b - H_f)^3$$

Voor een echte schok is $H_b \neq H_f$, en dus $\lim \frac{dQ}{dt} \neq 0$; aangezien normaliter vloeistofdeeltjes alleen energie kunnen verliezen als ze de schok passeren, en niet winnen, moet gelden $\lim \frac{dQ}{dt} < 0$, en dus moet het rechterlid van bovenstaande vgl. negatief zijn; voor het front van de rolgolf zijn de suffices zo gekozen dat $H_b > H_f$, dus moet gelden dat ϕ_M negatief is; dit klopt ook: de massaflux ϕ_M stroomt per definitie van het front van de schok naar de achterzijde, en de x-as is positief in rechtse richting. De wet van behoud van energie faalt hier dus (immers $\lim \frac{dQ}{dt} \neq 0$), aangezien alleen maar de kinetische en de potentiële energieën zijn beschouwd; de energie welke t.p.v. de schok verloren gaat, komt vrij in de vorm van warmte, geluid, opname van lucht, etc.

Bovenstaand betoog, gemakshalve opgezet voor het geval van tweedimensionale stroming, zal ook opgaan voor het geval van driedimensionale stroming.

Een gevolg van deze ongelijkheid (in de wet van behoud van energie) is, dat t.o.v. een met de schok meebewegend assenstelsel, de vloeistofdeeltjes altijd een schok passeren vanuit een gebied met kleinere totale diepte (het "front") naar een gebied met grotere totale diepte (de "achterzijde"); worden de watersnelheden beschouwd t.o.v. de bewegende schoklijn, dan geldt tevens dat de snelheid aan het front z.g. supercritiek moet zijn, en aan de andere zijde z.g. subcritiek (zie voor een uitgebreider beschouwing hiervan b.v. (32)).

V-D: De speciale oplossing.

Op p.V-26 van dit Hoofdstuk V is reeds vermeld dat er geen continue periodieke oplossingen bestaan voor vgl. (36^b-a) resp. vgl. (36^b-a') en vgl. (36^b-b), resp. vgl. (36^b-b'), reden waarom we discontinue periodieke oplossingen zullen trachten te construeren door periodiek een continue lopende golfoplossing d.m.v. schokken aan elkaar te schakelen. We moeten een continue oplossing vinden met de eigenschap dat de stroming in het ene gedeelte supercritiek en in het andere gedeelte subcritiek is. Om redenen van continuïteit zullen deze twee gebieden gescheiden moeten zijn door een dwarsdoorsnede waarin de stroming precies de critieke snelheid heeft. De snelheden moeten gemeten worden t.o.v. de met snelheid c bewegende schok, d.w.z. t.o.v. ons meebewegende ξ, η, ζ -coördinatenstelsel. Ook moeten de twee gebieden een zodanige ligging hebben dat de deeltjes een supercritieke snelheid bezitten als ze de schok instromen, en een subcritieke snelheid als ze de schok uitstromen. Indien dit nu het geval is zal voldaan worden aan de energie ongelijkheid. Volgens de gehanteerde definitie voor rolgolven moet gelden $c > U$. Fig. V-6 geeft een overzicht van de golven voor het geval men de stroming beschouwt vanuit een met snelheid c naar rechts meebewegend coördinatenstelsel. In zekere tussengelegen dwarsdoorsnede A₀ met waterdiepte H₀ zal de stroming nu critiek zijn. De critieke stroomsnelheid is voor deze situatie op geheel analoge wijze te bepalen als gedaan is voor het geval van zuiver permanente stroming (zie Hoofdstuk IV, p.IV-17 en p.IV-18); daartoe moeten we nu uitgaan van vgl. (35):

$$(\alpha U - c) \frac{dU}{d\xi} + \left\{ g \cos \theta - (1 - \alpha) c \frac{U}{A} \frac{dA}{dH} \right\} \frac{dH}{d\xi} = g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} \quad (35)$$

Delen we linker- en rechterlid door g, dan is deze vgl. te schrijven als:

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\alpha U^2}{2g} - \frac{Uc}{g} + H \cos \theta \right\} - \frac{1 - \alpha}{g} c \frac{U}{A} \frac{dA}{d\xi} = \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g R}$$

aangezien $\frac{dA}{dH} \frac{dH}{d\xi} = \frac{dA}{d\xi}$; eliminatie van U uit de tweede term van het linkerlid m.b.v. vgl. (37) levert op:

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\alpha U^2}{2g} - \frac{Uc}{g} + H \cos \theta \right\} - \frac{(1 - \alpha)}{g} c \left\{ \frac{c}{A} - \frac{K}{A^2} \right\} \frac{dA}{d\xi} = \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g R}$$

Vgl. (35) is nu dus te schrijven als:

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\alpha U^2}{2g} - \frac{Uc}{g} + H \cos \theta - \frac{(1 - \alpha)}{g} c \left(c \ln \left| A + \frac{K}{A} \right| \right) \right\} = \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g R}$$

Voor de beschouwde situatie geldt nu dat de energiehoogte E in zekere dwarsdoorsnede voorgesteld kan worden door:

$$E = \frac{\alpha U^2}{2g} - \frac{Uc}{g} + H \cos \theta - \frac{(1-\alpha)}{g} \cdot c \left(c \ln |A| + \frac{K}{A} \right);$$

eliminatie van U hieruit m.b.v. vgl. (37) geeft:

$$E = \frac{\alpha}{2g} \left(c - \frac{K}{A} \right)^2 - \frac{c}{g} \left(c - \frac{K}{A} \right) + H \cos \theta - \frac{(1-\alpha)c}{g} \left(c \ln |A| + \frac{K}{A} \right)$$

Is in zekere doorsnede de stroming critiek, dan moet de energiehoogte (per definitie) ter plaatse een minimum bezitten. Een noodzakelijke voorwaarde voor een extremum is dat $\frac{dE}{dA} = 0$; nu is:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dA} &= \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{K}{A} \left(c - \frac{K}{A} \right) - \frac{c}{g} \cdot \frac{K}{A^2} + \left(\frac{dH}{dA} \right) \cos \theta - \frac{1-\alpha}{g} \cdot c \left(\frac{c}{A} - \frac{K}{A^2} \right) = \\ &= \frac{1}{gA} \left\{ (\alpha-1)c^2 + \frac{gA \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH} \right)} - \alpha \frac{K^2}{A^2} \right\}, \end{aligned}$$

waaruit voor $\frac{dE}{dA} = 0$ volgt ($gA \neq 0$):

$$(\alpha-1)c^2 + \frac{gA \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH} \right)} = \alpha \frac{K^2}{A^2};$$

$A=A(H)$ is een met H toenemende functie, dus $\left(\frac{dA}{dH} \right) > 0$, tevens is $\alpha \geq 1$; derhalve geldt voor:

$$(\alpha-1)c^2 + \frac{gA \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH} \right)} > \alpha \frac{K^2}{A^2},$$

dat $\frac{dE}{dA} > 0$, en voor:

$$(\alpha-1)c^2 + \frac{gA \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH} \right)} < \alpha \frac{K^2}{A^2},$$

dat $\frac{dE}{dA} < 0$; m.a.w. de energiehoogte is minimaal als:

$$(\alpha-1)c^2 + \frac{gA \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH} \right)} = \alpha \frac{K^2}{A^2};$$

eliminieren we hieruit m.b.v. vgl. (37) de progressieve mate van debiet K, dan vinden we na enige herleiding en rangschikking der termen:

$$\frac{dA}{dH} \left\{ (\alpha U - c)(U - c) + (1-\alpha)cU \right\} = gA \cos \theta, \quad (41)$$

i.e. de critieke stromingsvoorwaarde.

De vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van (niet-permanente) driedimensionale stroming met lopende golven in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel luidt (zie p.V-21):

$$\frac{dH}{dS} = \frac{-R \left\{ g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} \right\}}{\frac{dH}{dH} \left\{ (\alpha H - c)(H - c) + (1-\alpha)cU \right\} - gA \cos \theta}; \quad (36^b)$$

in geval van laminaire stroming geldt (zie p.V-22):

$$\alpha=1,2 \quad \text{en} \quad \frac{z}{\rho R} = \frac{3V(Ac-K)}{AR^2},$$

en in geval van een turbulente stroming, welke beheerst wordt door de weerstandswet van de Chezy geldt (ziep.V-23):

$$1,0 \leq \alpha \leq 1,1 \quad \text{en} \quad \frac{z}{\rho R} = \frac{g(Ac-K)^2}{C^2 A^2 R};$$

hierbij zij opgemerkt dat de absolute waarde strepen nu wegge- laten kunnen worden. Wordt U nu geëlimineerd uit deze resp. vgl. m.b.v. vgl. (37), dan ontstaat vgl. (36^b-a), voor het laminaire stromingsgeval, resp. vgl. (36^b-b) voor het turbu- lente stromingsgeval; aangezien $A=A(H)$, is vgl. (36^b-a) een gewone differentiaalvgl. met vier parameters, te weten c, θ, α en K (alle positief) en vgl. (36^b-b) een gewone differentiaal- vgl. met vijf parameters, te weten c, θ, α, C en K (alle posi- tief).

Uit vgl. (36^b) volgt dat, op grond van vgl. (41), het water- oppervlakte profiel in ieder punt waar de stroming critiek is, dezelfde helling moet hebben als de ζ -as (c.q. de z-as), behoudens in het speciale geval dat ook de teller van vgl. (36^b) gelijk is aan nul. Indien een continue oplossing gevonden zou kunnen worden met de gewenste eigenschappen t.a.v. de snelheden, dan zouden de daaruit resulterende rolgolfoplossingen een ge- daante moeten hebben zoals aangegeven in fig.V-7. Uit experi- menten en waarnemingen in de natuur (zie b.v. (2)) is echter bekend dat het rolgolfprofiel in de omgeving van een critiek punt de normaal op de bodem niet nadert, doch ongeveer lineair (en zelfs horizontaal) is. Aangetoond zal nu worden dat geen en- kele oplossing van het type zoals aangegeven in fig.V-7 be- staanbaar is, en wel d.m.v. een elementaire beschouwing van de tweede afgeleide:

is de vorm van de dwarsdoorsnede eenvoudig (b.v. rechthoekig met zeer grote breedte) en is in geval van turbulente stroming de wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy een constante, dan is door directe integratie van vgl. (36^b) een inverse functie $\xi(H)$ af te leiden. In de omgeving van een punt met critieke stroming, waarvoor $\frac{d\xi}{dH} = 0$, moet een oplossing van het type zoals aangegeven in fig. V-7 een buigpunt hebben, i.p.v. een extreem (maximum- of minimum-) punt, i.e. er moet gelden $\frac{d^2\xi}{dH^2} = 0$. Aangezien de stroming in bedoeld punt critiek is, volgt uit vgl. (41) (na eliminatie van U m.b.v. vgl. (37) dat ter plaatse moet gelden:

$$\alpha \frac{K^2}{A^2} - (\alpha-1)c^2 - \frac{gA \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH}\right)} = 0;$$

nemen we aan dat $A \neq 0$ (dus ook $R \neq 0$), dan moet in dit punt tevens gelden:

$$A \left\{ g \sin \theta - \frac{z}{\rho R} \right\} \neq 0$$

Elimineren we U uit vgl. (36^b) m.b.v. vgl. (37), dan kan de reciproke van deze vgl. geschreven worden als:

$$\frac{d\xi}{dH} = - \frac{\frac{dA}{dH} \left\{ \alpha \frac{K^2}{A^2} - (\alpha-1)c^2 \right\} - gA \cos \theta}{A \left\{ g \sin \theta - \frac{z}{\rho R} \right\}} ;$$

het is niet moeilijk om in te zien dat voor de beschouwde eenvoudige doorsnede vorm $\frac{dA}{dH}$ een constante groter dan nul is. Differentiëren naar H van de reciproke van vgl. (36^b) levert op:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dH^2} &= \frac{A \frac{dA}{dH} \left\{ g \sin \theta - \frac{z}{\rho R} \right\} \cdot \left\{ 2\alpha \frac{K^2}{A^3} \cdot \frac{dA}{dH} + g \cos \theta \right\}}{A^2 \left\{ g \sin \theta - \frac{z}{\rho R} \right\}^2} + \\ &+ \frac{\left[\frac{dA}{dH} \left\{ \alpha \frac{K^2}{A^2} - (\alpha-1)c^2 \right\} - gA \cos \theta \right] \cdot \frac{d}{dH} \left\{ A \left(g \sin \theta - \frac{z}{\rho R} \right) \right\}}{A^2 \left\{ g \sin \theta - \frac{z}{\rho R} \right\}^2} \end{aligned}$$

Op grond van het bovenstaande is de teller van de tweede term in het rechterlid gelijk aan nul, terwijl de noemer ongelijk is aan nul: derhalve valt deze term weg; wat de eerste term in het rechterlid betreft, is het niet moeilijk om in te zien dat deze ongelijk is aan nul, omdat $\left(2\alpha \frac{K^2}{A^3} \cdot \frac{dA}{dH} + g \cos \theta \right)$ altijd positief is; dus geldt dat in het beschouwde critieke punt $\frac{d^2 \xi}{dH^2} \neq 0$, en dat een oplossing voor vgl. (36^b) van het type aangegeven in fig.V-7 niet kan bestaan. Het enig overblijvende geval waarvoor het nu mogelijk is om rolgolven te construeren, is het speciale geval dat zowel teller als noemer van vgl. (36^b) in dit voornoemde critieke punt gelijk is aan nul. Dit legt een beperking op aan de mogelijke waarden voor de parameter K . Aangezien uit experimenten bekend is (zie (1)) dat rolgolven alleen zullen ontstaan voor bijzondere waarden van deze progressieve mate van

afvoer, indien de andere parameters alle zijn voorgeschreven, geeft dit een bevestiging van de conclusie dat oplossingen alleen verkregen kunnen worden uit het speciale geval.

Alvorens over te gaan tot het onderzoeken van dit speciale geval, maken we de afspraak dat in het ξ, η, ζ -vlak, c.q. het ξ, H -vlak de index 0 gebruikt zal worden om de grootheden verbonden met de speciale oplossing en ontwikkeld in het punt ξ_0 waar de stroming critiek is, aan te duiden. De dwarsdoorsnede waar de stroming critiek is zullen we aangeven met de naam "controle doorsnede".

Opmerking

Op grond van waarnemingen dus, volgt uit het bovenstaande dat het oppervlakteprofiel van een rolgolf monoclinisch zal stijgen van de achterzijde van de golf naar het front; beschouwen we de rolgolven nu vanuit een met het periodieke permanente rolgolfpatroon meebewegend assenstelsel, dan moet in de z.g. controle doorsnede de volgende relatie voor de waterdiepte gelden:

$$\left(\frac{dH}{d\xi}\right)_{\substack{H=\xi_0 \\ H=H_0}} \geq 0 ;$$

omdat in de controle doorsnede (waar de stroming dus critiek is) zowel de teller als de noemer van de vgl. voor $\frac{dH}{d\xi}$ gelijk is aan nul, m.a.w. $\left(\frac{dH}{d\xi}\right)_0$ een z.g. onbepaalde vorm is, gaat deze relatie over in:

$$\lim_{\substack{H \rightarrow \xi_0 \\ H \rightarrow H_0}} \frac{dH}{d\xi} \geq 0 \tag{42}$$

vooropgesteld dat deze limietwaarde bestaat. De ongelijkheid (42) nu, is te beschouwen als de noodzakelijke voorwaarde voor rolgolven om hun uiteindelijk golfpatroon (zoals beschreven in het voorgaande) te handhaven; het (=) teken kan opgevat worden als een grensgeval.

Uit vgl. (36^b) en vgl. (41) volgt nu dat in de controle doorsnede moet gelden:

$$\left(\frac{dA}{dH}\right)_0 \{ (\alpha U_0 - c)(U_0 - c) + (1 - \alpha)cU_0 \} = gA_0 \cos \theta \tag{43}$$

Uit vgl. (43) is de grootheid c op te lossen; uitwerken van deze vgl. geeft, aangezien $\left(\frac{dA}{dH}\right)_0 \neq 0$:

$$\alpha U_0^2 - 2\alpha U_0 c + c^2 = \frac{g A_0 \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0},$$

wat te herleiden is tot:

$$\begin{aligned} (c - \alpha U_0)^2 &= \alpha(\alpha - 1)U_0^2 + \frac{g A_0 \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0} = \\ &= \alpha(\alpha - 1)U_0^2 + \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0}; \end{aligned}$$

voeren we weer het Froudegetal F in, gedefiniëerd als:

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{g R_0 \cos \theta}},$$

dan kan voor de grootheid c geschreven worden:

$$c = \alpha U_0 \pm U_0 \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{S_0}{F^2 \left(\frac{dA}{dH}\right)_0}}, \quad (43^a)$$

waarin voor het door ons beschouwde geval alleen het +teken geldt; immers de term $\frac{S_0}{F^2 \left(\frac{dA}{dH}\right)_0}$ is altijd positief en voor α geldt $\alpha \geq 1$, zodat alleen voor het +teken voldaan wordt aan de voorwaarde $U < c$ welke voortkomt uit de door ons gehanteerde definitie voor rolgolven. Deze vgl. (43^a) komt qua vorm precies overeen met vgl. (6^b), de uitdrukking voor de absolute snelheid van de verstoringsgolf met kleine amplitudo van een permanent eenparige stroming; alleen is in vgl. (6^b) de index o gebruikt om de permanent eenparige stromingstoestand aan te duiden, terwijl in vgl. (43^a) de index o de waarden van de grootheden in de controle doorsnede aangeeft (welke uiteindelijk gelijk zijn aan de grootheden voor permanent eenparige stroming). Het is niet moeilijk om in te zien dat uit vgl. (43^a) volgt:

$$\frac{U_0}{c} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{S_0}{F^2 \left(\frac{dA}{dH}\right)_0}}},$$

wat na enige herleiding oplevert:

$$\frac{U_0}{c} = \frac{\alpha \left(\frac{dH}{dH_0} \right) - \sqrt{\alpha(\alpha-1) \left(\frac{dH}{dH_0} \right)^2 + \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{S_0}{F^2}}{\alpha \left(\frac{dH}{dH_0} \right) - \frac{S_0}{F^2}}, \quad (43^b)$$

wat ook te schrijven is als:

$$\frac{g h_0 \cos \theta}{c^2} = \frac{1}{F^2} \left\{ \frac{\alpha \left(\frac{dH}{dH_0} \right) - \sqrt{\alpha(\alpha-1) \left(\frac{dH}{dH_0} \right)^2 + \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{S_0}{F^2}}{\alpha \left(\frac{dH}{dH_0} \right) - \frac{S_0}{F^2}} \right\}^2 \quad (43^c)$$

In de controle doorsnede moet ook de teller van vgl. (36^b) gelijk aan nul zijn:

$$-A_0 \left\{ g \sin \theta - \left(\frac{z}{\rho R} \right)_0 \right\} = 0, \quad (44)$$

waarin $A_0 \neq 0$; in geval van een laminaire stromingstoestand levert dit met $\left(\frac{z}{\rho R} \right)_0 = \frac{3\sqrt{U_0}}{R_0^2}$ (zie p.V-6) op:

$$g \sin \theta - \frac{3\sqrt{U_0}}{R_0^2} = 0, \quad (44^a)$$

en in geval van een turbulente stromingstoestand welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type, met

$$\left(\frac{z}{\rho R} \right)_0 = \frac{g U_0^2}{c^2 R_0} \quad (\text{zie p.V-7}):$$

$$g \sin \theta - \frac{g U_0^2}{c^2 R_0} = 0 \quad (44^b)$$

Uit vgl. (43) en vgl. (44^a) voor het laminaire stromingsgeval, resp. vgl. (43) en vgl. (44^b) voor het turbulente stromingsgeval, volgt dat in de controle doorsnede de gemiddelde stroomsnelheid (U_0) en de waterdiepte (H_0 , c.q. A_0, R_0) eenduidig bepaald zijn. Het is echter niet mogelijk om voor het algemene geval U_0 en H_0 (c.q. A_0) expliciet uit te drukken als functies van de parameters c, θ en α voor laminaire stroming, resp. als functies van de parameters c, θ, C en α voor turbulente stroming; dit is te wijten aan de gecompliceerdheid van de desbetreffende vgl'n., o.a. door het voorkomen van de hydraulische straal R_0 .

Expliciete uitdrukkingen voor U_0 en A_0 zouden wel wenselijk zijn, omdat het dan mogelijk is, m.b.v. de uit vgl. (37) volgende relatie voor de controle doorsnede:

$$(e-U_0)A_0 = K_0 \quad (37^a)$$

een expliciete uitdrukking af te leiden voor de bijzondere waarde K_0 van de progressieve mate van afvoer, als functie van de parameters c, θ en α , resp. c, θ, C en α , waaruit dan weer een verband af te leiden zal zijn tussen K_0 en A_0 (c.q. H_0); deze speciale waarde K_0 is dan die welke nodig is voor de speciale rolgolfoplossing.

Aansluitend bij de op p.V-25 van dit Hoofdstuk V gemaakte opmerking dat analytische integratie van de resp. vgl. voor het profiel van het wateroppervlak alleen mogelijk is in geval we te maken hebben met het laminaire stromingsgeval, resp. het turbulente stromingsgeval met als kenmerkende eigenschap een constante wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy, in een prismatische hellende leiding met eenvoudige doorsnedevorm, zullen we daarom in het navolgende gemakshalve de rolgolfoplossing gaan bepalen voor het geval van tweedimensionale stroming (i.e. de breedte is zeer groot t.o.v. de waterdiepte), waarbij dan in geval van turbulente stroming de wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy constant wordt verondersteld, gebaseerd op zijn waarde in de controle doorsnede. Eerst zullen we de rolgolfoplossing gaan bepalen voor de tweedimensionale laminaire stromingstoestand, en vervolgens voor de tweedimensionale turbulente stromingstoestand.

V-D.a: De speciale oplossing in geval van tweedimensionale laminaire stroming.

Voor tweedimensionale stroming geldt per eenheid van breedte:

$$\frac{dA}{dH} = 1, \quad R=H, \quad A=H \cdot 1 \quad \text{en} \quad S=1;$$

het is niet moeilijk om in te zien dat de vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van driedimensionale laminaire stroming met lopende golven, in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel, vgl. (36^b-a), met behulp hiervan overgaat in vgl. (36^b-a')

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{-H \left\{ g \sin \theta - \frac{3v/Hc - K}{H^3} \right\}}{\alpha \frac{K^2}{H^3} + (1-\alpha)c^2 - gH \cos \theta} \quad (36^b - a')$$

Willen we hieruit nu de speciale (rolgolf-)oplossing bepalen, dan moet aan de progressieve mate van afvoer K een index 0, toegevoegd worden; aangezien $H \neq 0$, is vgl. (36^b-a') dan om te werken tot:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{gH^3 \sin \theta - 3rcH + 3rK_0}{gH^3 \cos \theta + (\alpha-1)c^2 H^2 - \alpha K_0^2} \quad (45)$$

In de controle doorsnede moet zowel de teller als de noemer van vgl. (45) gelijk zijn aan nul; dit levert resp. op:

$$gH_0^3 \sin \theta - 3rcH_0 + 3rK_0 = 0 \quad (46)$$

en

$$gH_0^3 \cos \theta + (\alpha-1)c^2 H_0^2 - \alpha K_0^2 = 0 \quad (47)$$

m.b.v. de uit vgl. (37), in geval van tweedimensionale stroming, voor de controle doorsnede af te leiden relatie:

$$(c-U_0)H_0 = K_0, \quad (37^b)$$

is K_0 uit vgl. (46) en vgl. (47) te elimineren; we krijgen dan na enige herleiding voor vgl. (46):

$$H_0(gH_0^2 \sin \theta - 3rU_0) = 0 \quad (46^a)$$

en voor vgl. (47):

$$-H_0^2(\alpha U_0^2 - 2\alpha U_0 c + c^2 - gH_0 \cos \theta) = 0, \quad (47^a)$$

waaruit direct de triviale wortel $H_0=0$ volgt; deze heeft echter geen betekenis.

Door de nogal gecompliceerde vorm van de vgl. (46^a) en (47^a), is het nu -anders dan in het hierna te beschouwen geval van turbulente stroming- niet mogelijk om op eenvoudige wijze hieruit U_0 en H_0 expliciet af te leiden als functie van de parameters c , θ en α (de voor H_0 en U_0 te bepalen vgl. worden n.l. van de vierde graad en zijn niet op eenvoudige wijze op te lossen); derhalve is het ook niet mogelijk om m.b.v. vgl. (37^b) K_0 expliciet af te leiden als functie van de parameters c , θ en α . Daarom zullen we onze toevlucht nemen tot de vgl. (43^b) en (43^c), waaruit in geval van tweedimensionale stroming volgt:

$$\frac{U_0}{c} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}}, \quad (48)$$

resp.

$$\frac{gH_0 \cos \theta}{c^2} = \frac{1}{F^2} \left\{ \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}} \right\}^2, \quad (49)$$

waarin het Froudegetal F gelijk is aan:

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{gH_0 \cos \theta}}$$

Zoals de vorm van vgl. (46^a) al deed vermoeden, is het Froudegetal F -anders dan bij het hierna te behandelen geval van turbulente stroming- niet op eenvoudige wijze uit te drukken als functie van θ (en c) indien de waarden van U_0 en H_0 uit resp. vgl. (48) en vgl. (49) gesubstitueerd worden in vgl. (46^a). Wel volgt uit vgl. (46^a) dat het Froudegetal F geschreven kan worden als een functie van het getal van Reynolds Re en de leidinghelling θ ; immers, vgl. (46^a) levert op:

$$U_0 = \frac{gH_0^2 \sin \theta}{3r}$$

waaruit volgt:

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{gH_0 \cos \theta}} = \frac{gH_0^2 \sin \theta}{3r \sqrt{gH_0 \cos \theta}};$$

Voeren we nu het getal van Reynolds Re in, gedefiniëerd als $Re = \frac{U_0 H_0}{\nu}$, dan volgt daaruit na enige herleiding:

$$F = \sqrt{\frac{1}{3} Re \cdot \text{tg} \theta}$$

Vgl. (37^b) is na enige herleiding te schrijven als:

$$\frac{K_0 g \cos \theta}{c^3} = \frac{g H_0 \cos \theta}{c^2} \left(1 - \frac{U_0}{c}\right);$$

substitueren we hierin de voor $\frac{U_0}{c}$ en $\frac{g H_0 \cos \theta}{c^2}$ afgeleide relaties, i.e. vgl. (48) resp. vgl. (49), dan krijgen we:

$$\frac{K_0 g \cos \theta}{c^3} = \frac{1}{F^2} \left\{ \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}} \right\}^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}} \right\}. \quad (50)$$

De vgl'n. (48), (49) en (50) zijn nu te beschouwen als de resul-

terende uitdrukkingen voor resp. de gemiddelde snelheid U_0 , de waterdiepte H_0 en de progressieve mate van afvoer K_0 ter plaatse van de controle doorsnede, voor het speciale geval waarin de rolgolfoplossing mogelijk is; nogmaals zij opgemerkt dat de index 0 de waarden aangeeft in de controle doorsnede, welke uiteindelijk gelijk zijn aan de grootheden voor de permanent eenparige stroming.

Delen we de factor $(H-H_0)$ uit op zowel de teller als de noemer van vgl. (45), dan is deze vgl. te schrijven als:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g(H-H_0)\{H^2 \sin \theta + HH_0 \sin \theta + (H_0^2 \sin \theta - \frac{3rc}{g})\} + (gH_0^3 \sin \theta - 3rcH_0 + 3rK_0)}{(H-H_0)[gH^2 \cos \theta + (H+H_0)\{gH_0 \cos \theta + (\alpha-1)c^2\}] + \{gH_0^3 \cos \theta + (\alpha-1)c^2 H_0^2 - \alpha K_0^2\}} ;$$

op grond van vgl. (46) is de tweede term in de teller gelijk aan nul, terwijl op grond van vgl. (47) ook de tweede term in de noemer gelijk is aan nul; delen we teller en noemer nu nog door $(H-H_0)$ dan gaat vgl. (45) over in:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g\{H^2 \sin \theta + HH_0 \sin \theta + (H_0^2 \sin \theta - \frac{3rc}{g})\}}{gH^2 \cos \theta + (H+H_0)\{gH_0 \cos \theta + (\alpha-1)c^2\}} ;$$

uit vgl. (46) volgt nog:

$$H_0^2 \sin \theta - \frac{3rc}{g} = - \frac{3rK_0}{gH_0}$$

en uit vgl. (47):

$$gH_0 \cos \theta + (\alpha-1)c^2 = + \frac{\alpha K_0^2}{H_0^2} ;$$

substitutie hiervan in resp. de teller en de noemer van bovenstaande vgl. levert tenslotte voor vgl. (45) op:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g(H^2 \sin \theta + HH_0 \sin \theta - \frac{3rK_0}{gH_0})}{gH^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{H_0^2} H + \frac{3rK_0^2}{H_0}} \quad (51)$$

Teneinde rolgolven te construeren uit de integraal van vgl. (51) is het volgens de ongelijkheid (42) noodzakelijk dat:

$$\left(\frac{dH}{d\xi}\right)_{H=H_0} \geq 0 \quad (52)$$

Aangezien het niet moeilijk is om in te zien dat de noemer van vgl. (51) definitief positief is (immers $\cos\theta > 0$, $\alpha \geq 1$, alleen positieve waarden van H hebben een fysische betekenis), houdt de ongelijkheid (52) in dat de teller van vgl. (51) voor $H=H_0$ groter dan nul moet zijn; oftewel:

$$(2gH_0^2 \sin\theta - \frac{3vK_0}{H_0}) > 0 ;$$

uit vgl. (46) volgt:

$$2gH_0^2 \sin\theta = 6vc - \frac{6vK_0}{H_0} = 6v(c - \frac{K_0}{H_0}),$$

waarvan substitutie in bovenstaande ongelijkheid oplevert:

$$3v \left\{ 2(c - \frac{K_0}{H_0}) - \frac{K_0}{H_0} \right\} > 0;$$

eliminatie hieruit van K_0 m.b.v. vgl. (37^b), geeft met $3v \neq 0$:

$$(3U_0 - c) > 0,$$

wat te schrijven is als:

$$\frac{U_0}{c} > 1;$$

substitueren we hierin de formule voor $\frac{U_0}{c}$ volgens vgl. (48), dan krijgen we:

$$3 \cdot \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}} > 1 ,$$

wat gebracht kan worden in de vorm:

$$\frac{3}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}} > 1 ;$$

als hierin de waarde van α voor laminaire stroming (zie p.V-10)

$$\alpha = 1, 2$$

gesubstitueerd wordt, dan krijgen we na enige herleiding, tenslotte:

$$F^2 > \frac{1}{3}$$

Substitueren we hierin het Froudegetal $F = \frac{U_0}{\sqrt{gH_0 \cos\theta}}$, vervangen we $\frac{U_0}{gH_0}$ m.b.v. vgl. (46^a), en voeren we het Reynoldsgetal Re in, gedefiniëerd als:

$$Re = \frac{U_0 H_0}{\nu} ,$$

dan gaat bovenstaande ongelijkheid over in:

(53^a)

$$(\text{Re})_0 \cdot \text{tg} \theta > 1$$

(53^b)

Voor het geval van tweedimensionale laminaire stroming geeft de ongelijkheid (53^a), c.q. (53^b) de noodzakelijke voorwaarde weer voor rolgolven om hun uiteindelijk golfpatroon te handhaven. Uit bovenstaande ongelijkheden volgt dat er geen sprake zal zijn van rolgolfvorming, indien de hellingshoek van de leiding θ te klein en/of de kinematische viscositeit ν te groot is. De gedaante van de ongelijkheden (53^a) en (53^b) komt precies overeen met de voorwaarde voor het ontstaan van instabiliteit in een tweedimensionale laminaire permanent eenparige stroming (zie Hoofdstuk IV, p.IV-56 en p.IV-75, vgl. (29^a)); alleen duidt de index 0 in Hoofdstuk IV weer de grootheden aan met betrekking tot de permanent eenparige stroming, en hier de waarden in de controle doorsnede (welke uiteindelijk gelijk zijn aan de grootheden van de permanent eenparige stroming).

We hebben al gezien dat de noemer van vgl. (51) definitief positief is, en derhalve geen reële wortels heeft. De twee wortels van de teller van vgl. (51) zullen we aangeven met H_A en H_B ; bepaling van de discriminant van de vierkantsvgl. gevormd door de teller, geeft:

$$\frac{g \sin \theta}{H_0} \left\{ g H_0^3 \sin \theta + \frac{12 \nu K_0}{g} \right\},$$

waaruit volgt dat deze discriminant altijd positief is (immers $\theta > 0, K_0 > 0$, alleen waarden van $H > 0$ hebben fysisch gezien betekenis); derhalve zijn beide wortels H_A en H_B reëel en ongelijk. We zullen vgl. (51) nu schrijven als:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g \sin \theta \left\{ H^2 + H H_0 - \frac{3 \nu K_0}{g H_0 \cos \theta} \right\}}{g H^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{H_0^2} H + \frac{\alpha K_0^2}{H_0}} \quad (51^b)$$

waarin H_A en H_B dus de wortels zijn van de vierkantsvgl.:

$$H^2 + H H_0 - \frac{3 \nu K_0}{g H_0 \cos \theta} = 0;$$

vervolgens zullen we H_A en H_B gaan oplossen; dit geeft direct:

$$H_{A,B} = -\frac{1}{2} H_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} H_0^2 + \frac{3 \nu K_0}{g H_0 \cos \theta}}$$

wat direct te schrijven is als:

$$\frac{H_{A,B}}{H_0} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3rK_0}{gH_0^3 \sin \theta}}$$

eliminatie hieruit van $gH_0^3 \sin \theta$ m.b.v. vgl. (46^a) levert op:

$$\frac{H_{A,B}}{H_0} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K_0}{U_0 H_0}}$$

voor de term $\frac{K_0}{U_0 H_0}$ in deze vgl. kan geschreven worden:

$$\frac{K_0}{U_0 H_0} = \frac{K_0 g \cos \theta}{c^3} \cdot \frac{1}{\frac{U_0}{c} \cdot \frac{H_0 g \cos \theta}{c^2}}$$

wat door substitutie van de formules voor $\frac{K_0 g \cos \theta}{c^3}$ (vgl. (50)), $\frac{U_0}{c}$ (vgl. (48)) en $\frac{gH_0 \cos \theta}{c^2}$ (vgl. (49)) na enige herleiding overgaat in:

$$\frac{K_0}{U_0 H_0} = \frac{1 - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}}}{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}}}$$

oftewel, na verdere uitwerking:

$$\frac{K_0}{U_0 H_0} = \frac{-\frac{1}{F^2} + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}$$

De grootheid $(\frac{1}{4} + \frac{K_0}{U_0 H_0})$ onder het wortelteken in de formule voor $\frac{H_{A,B}}{H_0}$ wordt nu:

$$\frac{1}{4} + \frac{K_0}{U_0 H_0} = \frac{\{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}\} + 4\{-\frac{1}{F^2} + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}\}}{4\{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}\}}$$

na enige herleiding en rangschikking der termen levert dit op:

$$\frac{1}{4} + \frac{K_0}{U_0 H_0} = \frac{4(\alpha - \frac{1}{F^2}) \left\{ \frac{1}{4} + (\alpha - 1) + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}} \right\}}{4(\alpha - \frac{1}{F^2})} =$$

$$= \alpha - \frac{3}{4} + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}}$$

Derhalve krijgen we nu voor H_A en H_B :

$$\frac{H_{A,B}}{H_0} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\alpha - \frac{3}{4} + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}}};$$

in geval van laminaire stroming is (zie p.V-10) $\alpha=1,2$, zodat bovenstaande vgl. overgaat in:

$$H_{A,B} = \left\{ -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{20} + \sqrt{\frac{6}{25} + \frac{1}{F^2}}} \right\} \cdot H_0 \tag{54}$$

De grootste wortel zullen we H_A noemen, en de kleinste H_B : het +teken geldt dus voor H_A en het -teken voor H_B . Uit vgl. (54) volgt dan dat H_A positief en H_B negatief is. Volgens de ongelijkheid (53^a) geldt als noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van rolgolven dat:

$$F^2 > \frac{1}{3};$$

is nu $F^2 = \frac{1}{3}$, dan volgt uit vgl. (54) dat: $H_A = H_B$ -welk resultaat te verwachten was- en $H_B = -2H_0$; het is nu niet moeilijk om in te zien dat de factor van H_0 in het rechterlid van vgl. (54) steeds kleiner is dan 1, indien voldaan wordt aan de ongelijkheid (53^a); derhalve geldt:

$$H_0 > H_A > 0 > H_B \tag{55}$$

Tenslotte zullen we nu dan overgaan tot de feitelijke integratie van de verkregen vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van tweedimensionale laminaire stroming met lopende golven in een prismatische hellende leiding met vrije waterpiegel, te weten vgl. (51).

De reciproke functie van vgl. (51) is te schrijven als:

$$\sin \vartheta \cdot \frac{d\xi}{dH} = \frac{H^2 \cos \vartheta + \frac{\alpha K_0^2 H}{g H_0} + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H^2 + H H_0 - \frac{3 \alpha K_0}{g H_0 \cos \vartheta}} = \frac{H^2 \cos \vartheta + \frac{\alpha K_0^2 H}{g H_0} + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{(H - H_0) \cdot (H - H_0)}$$

wat te herleiden is tot:

$$\begin{aligned} \sin \theta \cdot \frac{d\xi}{dH} &= \frac{\cos \theta \{ H^2 - H(H_A + H_B) + H_A H_B \}}{(H - H_A)(H - H_B)} + \frac{H \left\{ \frac{\alpha K_0^2}{g H_0^2} + (H_A + H_B) \cos \theta \right\} - H_A H_B \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{(H - H_A)(H - H_B)} = \\ &= \cos \theta + \frac{H \left\{ \frac{\alpha K_0^2}{g H_0^2} + (H_A + H_B) \cos \theta \right\} - H_A H_B \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{(H - H_A)(H - H_B)} ; \end{aligned}$$

de tweede term van het rechterlid in bovenstaande vgl. kan ontbonden worden d.m.v. breuksplitsing; we krijgen dan:

$$\frac{p}{H - H_A} + \frac{q}{H - H_B} = \frac{H \left\{ \frac{\alpha K_0^2}{g H_0^2} + (H_A + H_B) \cos \theta \right\} - H_A H_B \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{(H - H_A)(H - H_B)} ,$$

waaruit volgt:

$$p(H - H_B) + q(H - H_A) = H \left\{ \frac{\alpha K_0^2}{g H_0^2} + (H_A + H_B) \cos \theta \right\} - H_A H_B \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} ;$$

voor $H = H_A$ volgt hieruit:

$$p = \frac{H_A^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0^2} H_A + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H_A - H_B} ,$$

en voor $H = H_B$:

$$q = - \frac{H_B^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0^2} H_B + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H_A - H_B} ;$$

integratie van de voor de reciproke functie van vgl. (51) nu te schrijven vorm:

$$\sin \theta \frac{d\xi}{dH} = \cos \theta + \frac{p}{H - H_A} + \frac{q}{H - H_B}$$

levert dan op:

$$\xi \cdot \sin \theta = \text{constante} + H \cos \theta + p \cdot \ln(H - H_A) + q \cdot \ln(H - H_B) ;$$

kiezen we de integratie constante nu zo dat voor $\xi = 0$ geldt:

$H = H_0$, dan wordt deze constante:

constante = $-H_0 \cos \theta - p \cdot \ln(H-H_A) - q \cdot \ln(H-H_B)$;
 substitutie van deze integratieconstante, van de voor p en q
 verkregen relaties en van de waarde van α voor laminaire stroming
 (i.e. $\alpha=1,2$) in bovenstaande vgl. voor $\xi \sin \theta$ levert na enige
 herleiding tenslotte op:

$$\xi = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \left\{ \frac{H_A^2 \cos \theta + \frac{6}{5} \frac{K_0^2}{g H_0^2} H_0 + \frac{6}{5} \frac{K_0^2}{g H_0}}{H_0 - H_B} \ln \frac{H - H_A}{H_0 - H_A} + \right. \\ \left. - \frac{H_0^2 \cos \theta + \frac{6}{5} \frac{K_0^2}{g H_0^2} H_0 + \frac{6}{5} \frac{K_0^2}{g H_0}}{H_0 - H_B} \ln \frac{H - H_B}{H_0 - H_B} + (H - H_0) \cos \theta \right\}. \quad (56)$$

De coëfficiënt p van $\ln \frac{H-H_A}{H_0-H_A}$ in het rechterlid van vgl. (56)

is altijd positief, op grond van de ongelijkheid (55) en het
 feit dat θ , K_0 en H_0 positief zijn. In de coëfficiënt q van
 $\ln \frac{H-H_B}{H_0-H_B}$ in vgl. (56) is volgens ongelijkheid (55) $H_A > H_B$,

terwijl H_B negatief, en K_0 en H_0 positief zijn; m.b.v. de vgl.
 (49), (50) en (54) is (voor een waarde van $\alpha=1,2$) na enige her-
 leiding op eenvoudige wijze in te zien dat de coëfficiënt q
 negatief is voor de extreme waarde $F^2 \rightarrow \frac{1}{3}$ en positief voor
 grote waarden van F^2 , benevens dat q nul wordt als $F^2=4,76$.

De inverse functie van vgl. (56) moet zich dan gedragen
 zoals geschetst is in fig.V-8.a. Uit de relatie (37^b):

$$(c-U)H = K_0$$

volgt nu dat de stroming links van het punt $\xi=0$ supercritiek
 en rechts van het punt $\xi=0$ subcritiek moet zijn. De kromme nadert
 de asymptoot $H=H_A$ exponentieel; als geldt dat $\frac{1}{3} < F^2 < 4,76$, dan
 gaat de kromme zich min of meer lineair gedragen voor grote waar-
 den van ξ , aangezien de eerste twee termen van het rechterlid,
 de logaritmen, dan resp. tot plus en min oneindig naderen;
 geldt daarentegen dat $F^2 \geq 4,76$, dan neemt H exponentieel toe
 voor grote waarden van ξ .

In navolging van H.A. Thomas (1) zou men de waterdiepte in de
 controle doorsnede, H_0 , kunnen aanduiden met de benaming "(tweede)
 critieke diepte" of "bovenste normale diepte", en de als reken-
 grootheden gehanteerde waterdiepten H_A en H_B met de resp. bena-

ming "onderste normale diepte" en "onechte normale diepte" (omdat deze laatste grootheid, H_B , valt in een gebied waar de desbetreffende profielvgl. (56) niet geldig is.

Op p.V-53 hebben we gezien dat H_0 gelijk wordt aan H_A als F^2 nadert tot $\frac{1}{3}$; uit vgl. (51) volgt direct dat voor deze situatie $\frac{dH}{d\xi}$, i.e. de helling van de waterspiegel, dan nadert tot nul en uit vgl. (56) dat ξ nadert tot oneindig, m.a.w.: het rolgolfprofiel volgens vgl. (56), c.q. vgl. (51) nadert in het beschouwde geval tot een rechte lijn, op een afstand $H=H_0$ evenwijdig met de leidingbodem, aldus een voorwaarde voor permanent eenparige stroming opleverend.

V-D.b: De speciale oplossing in geval van tweedimensionale turbulente stroming.

Voor tweedimensionale stroming geldt per eenheid van breedte:

$$\frac{dA}{dH}=1, \quad R=H, \quad A=H \cdot 1 \quad \text{en} \quad S=1;$$

het is niet moeilijk om in te zien dat de vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van driedimensionale turbulente stroming met lopende golven, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type (met constante wrijvingscoëfficiënt), in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel, vgl. (36^b-b), met behulp hiervan overgaat in vgl. (36^b-b')

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{-gH^3 \sin \theta - \frac{(Hc-K)(Hc-K)}{C^2 H^3}}{\alpha \frac{K^2}{H^2} + (1-\alpha)c^2 - gH \cos \theta} \quad (36^b - b')$$

Willen we hieruit nu de speciale (rolgolf-)oplossing bepalen, dan moet aan de progressieve mate van afvoer K, een index 0 toegevoegd worden; aangezien $H \neq 0$, is vgl. (36^b-b') dan om te werken tot:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g \{ H^3 \sin \theta - \frac{(Hc-K_0)^2}{C_0^2} \}}{gH^3 \cos \theta + (\alpha-1)c^2 H^2 - \alpha K_0^2} \quad (57)$$

In de controle doorsnede moeten zowel de teller als de noemer van vgl. (57) gelijk zijn aan nul; dit levert resp. op:

$$g \{ H_0^3 \sin \theta - \frac{(H_0 c - K_0)^2}{C_0^2} \} = 0 \quad (58)$$

en

$$gH_0^3 \cos \theta + (\alpha - 1)c^2 H_0^2 - \alpha K_0^2 = 0; \tag{47}$$

m.b.v. de uit vgl. (37), in geval van tweedimensionale stroming voor de controle doorsnede af te leiden relatie (37^b):

$$(c - U_0)H_0 = K_0, \tag{37^b}$$

is K₀ uit vgl. (58) en vgl. (47) te elimineren; we krijgen dan na enige herleiding voor vgl. (58):

$$gH_0^2 \left(H_0 \sin \theta - \frac{U_0^2}{c^2} \right) = 0 \tag{58^a}$$

en voor vgl. (47):

$$-H_0^2 (\alpha U_0^2 - 2\alpha U_0 c + c^2 - gH_0 \cos \theta) = 0, \tag{47^a}$$

waaruit direct de triviale wortel H₀=0 volgt; deze heeft echter geen betekenis.

Anders dan in het hiervoor behandelde geval van laminaire stroming, is het nu wel mogelijk om U₀ en H₀ expliciet af te leiden als functie van de parameters c, θ, α en C, terwijl het ook mogelijk is om op eenvoudige wijze het Froudegetal F uit te drukken in θ en C.

Uit vgl. (58^a) volgt direct:

$$H_0 = \frac{U_0^2}{C_0^2 \sin \theta} \quad \text{en} \quad F^2 = \frac{U_0^2}{\sqrt{g H_0 \cos \theta}} = \frac{C_0^2 \sin \theta}{g};$$

substitutie van deze voor H₀ verkregen waarde in vgl. (47^a) levert op:

$$\left\{ \alpha - \frac{g}{C_0^2 \sin \theta} \right\} U_0^2 - 2\alpha c U_0 + c^2 = 0;$$

uit deze vierkantsvgl. kan na enige herleiding voor $\frac{U_0}{c}$ geschreven worden:

$$\frac{U_0}{c} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{C_0^2 \sin \theta}}}{\alpha - \frac{g}{C_0^2 \sin \theta}},$$

wat overgaat in:

$$\frac{U_0}{c} = \frac{1}{\alpha \mp \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{C_0^2 \sin \theta}}};$$

volgens de door ons gehanteerde definitie van rolgolven moet altijd gelden dat U < c; aangezien de term $\frac{g}{C_0^2 \sin \theta}$ steeds posi-

tief is en $\alpha \geq 1$, is het niet moeilijk om aan te tonen dat alleen het +teken in bovenstaande vgl. geldig is, dus:

$$\frac{U_0}{c} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{C_0^2 \cdot \gamma \theta}}} \quad (59^a)$$

oftewel:

$$\frac{U_0}{c} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{C_0^2 \cdot \gamma \theta}}}{\alpha - \frac{g}{C_0^2 \cdot \gamma \theta}} \quad (59^b)$$

Substitutie van deze voor U_0 verkregen relatie in vgl. (58^a) levert na enige herleiding voor H_0 op:

$$H_0 = \frac{1}{C_0^2 \cdot \gamma \sin \theta} \left\{ \frac{c}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{C_0^2 \cdot \gamma \theta}}} \right\}^2 \quad (60^a)$$

oftewel:

$$\frac{H_0 \cdot g \cos \theta}{c^2} = \frac{g}{C_0^2 \cdot \gamma \theta} \left\{ \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{C_0^2 \cdot \gamma \theta}}}{\alpha - \frac{g}{C_0^2 \cdot \gamma \theta}} \right\}^2 \quad (60^b)$$

Indien we de wrijving nu verwaarlozen, d.w.z. laten we de weerstandscoëfficiënt C_0 van de Chezy naderen tot oneindig, dan houdt dit volgens vgl. (21^b) tevens in dat de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal gelijk wordt aan 1, zodat voor de beschouwde situatie volgens vgl. (60^a) H_0 gelijk wordt aan nul, en volgens vgl. (59^a) U_0 gelijk wordt aan c ; omdat voor rolgolven steeds moet gelden dat $U < c$ houdt dit in dat rolgolfoplossingen niet verkregen kunnen worden indien de weerstand buiten beschouwing wordt gelaten.

De vgl. voor de progressieve mate van afvoer, vgl. (37^b), kan geschreven worden als:

$$K_0 = c H_0 \left(1 - \frac{U}{c} \right);$$

substitutie hierin van de voor $\frac{U}{c}$ en H_0 verkregen waarden levert na enige herleiding op:

$$K_0 = \frac{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{c_0^2} y_0}}{c_0^2 \sin \theta} \cdot \left\{ \frac{c}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{c_0^2} y_0}} \right\}^3, \quad (61^a)$$

oftewel:

$$\frac{K_0 g \cos \theta}{c^3} = \frac{g}{c_0^2 y_0} \left\{ \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{c_0^2} y_0}}{\alpha - \frac{g}{c_0^2} y_0} \right\}^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{c_0^2} y_0}}{\alpha - \frac{g}{c_0^2} y_0} \right\}. \quad (61^b)$$

Het is nu niet moeilijk om in te zien dat uit de vgl. (60^a) en (61^a) na enige herleiding voor H_0 geschreven kan worden:

$$H_0 = \frac{K_0^{\frac{2}{3}}}{\{c_0^2 \sin \theta\}^{\frac{2}{3}}} \cdot \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{g}{c_0^2} y_0} \right\}^{-\frac{2}{3}}. \quad (62)$$

Het Froudegetal F is ingevoerd als:

$$F^2 = \frac{U_0^2}{g H_0 \cos \theta};$$

substitutie hierin van U_0 en H_0 volgens de resp. vgl. (59^a) en (60^a) levert direct op:

$$F^2 = \frac{c^2}{g} \operatorname{tg} \theta, \quad \text{oftewel} \quad \frac{g}{c_0^2 \operatorname{tg} \theta} = \frac{1}{F^2},$$

welk resultaat al te verwachten was op grond van de gedaante van vgl. (58^a). Vervangen we in vgl. (59^b), vgl. (60^b) en vgl. (61^b) de term $\frac{g}{c_0^2 \operatorname{tg} \theta}$ door $\frac{1}{F^2}$, dan vinden we uiteraard weer vgl. (48), vgl. (49) en vgl. (50).

Om een zekere gelijkkluidendheid te behouden met de bepaling van de rolgolfoplossing in het hiervoor beschouwde geval van laminaire stroming, zullen we ook nu de resp. vgl. (48), (49), en (50) aanhouden als de resulterende uitdrukkingen voor resp. de gemiddelde snelheid U_0 , de waterdiepte H_0 en de progressieve mate van afvoer K_0 , voor het speciale geval waarin de rolgolfoplossing mogelijk is; ook nu duidt de index 0 weer de waarden aan in de controle doorsnede, welke uiteindelijk gelijk zijn aan de grootheden voor de permanent eenparige stroming.

Delen we de factor $(H-H_0)$ uit op zowel de teller als de noemer van vgl. (57), dan is deze vgl. te schrijven als:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g(H-H_0)\{H^2 \sin \vartheta + (H+H_0)(H_0 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2}) + 2 \frac{cK_0}{C_0^2}\} + g\{H_0^3 \sin \vartheta - \frac{(H_0 c - K_0)^2}{C_0^2}\}}{(H-H_0)[gH^2 \cos \vartheta + (H+H_0)\{gH_0 \cos \vartheta + (\alpha-1)c^2\}] + \{gH_0^3 \cos \vartheta + (\alpha-1)c^2 H_0^2 - \alpha K_0^2\}}$$

op grond van vgl. (58) is de tweede term van de teller in het rechterlid gelijk aan nul, terwijl op grond van vgl. (47) ook de tweede term in de noemer gelijk is aan nul; delen we teller en noemer nu nog door $(H-H_0)$, dan gaat vgl. (57) over in:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g\{H^2 \sin \vartheta + (H+H_0)(H_0 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2}) + 2 \frac{cK_0}{C_0^2}\}}{gH^2 \cos \vartheta + (H+H_0)\{gH_0 \cos \vartheta + (\alpha-1)c^2\}}$$

voor de teller van deze laatste vgl. kan geschreven worden:

$$g\{H^2 \sin \vartheta + (H_0 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2})H + H_0(H_0 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2}) + \frac{2cK_0}{C_0^2}\} =$$

$$= g\{H^2 \sin \vartheta + (H_0 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2})H + \frac{1}{H_0}\{H_0^3 \sin \vartheta - \frac{(H_0 c - K_0)^2}{C_0^2}\} + \frac{K_0^2}{C_0^2 H_0}\}$$

hierin is de derde term op grond van vgl. (58) gelijk aan nul, zodat we voor de teller krijgen:

$$g\{H^2 \sin \vartheta + (H_0 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2})H + \frac{K_0^2}{C_0^2 H_0}\}$$

uit vgl. (47) volgt:

$$gH_0 \cos \vartheta + (\alpha-1)c^2 = + \frac{\alpha K_0^2}{H_0^2}$$

substitutie hiervan in de noemer van bovenstaande differentiaal- vgl., en invoering van de voor de teller verkregen vorm geeft dan tenslotte:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g \left\{ H^2 \sin \vartheta + \left(H_0 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2} \right) H + \frac{K_0^2}{C_0^2 H} \right\}}{g H^2 \cos \vartheta + \frac{\alpha K_0^2}{H_0^2} H + \frac{\alpha K_0^2}{H_0}} \quad (63)$$

Teneinde rolgolven te construeren uit de integraal van vgl. (63) is het volgens de ongelijkheid (42) noodzakelijk dat:

$$\left(\frac{dH}{d\xi} \right)_{H=H_0} \geq 0 \quad (64)$$

Aangezien de noemer van vgl. (63) identiek is met de noemer van vgl. (51), geldt ook nu weer dat deze definitief positief is; derhalve houdt de ongelijkheid (64) in, dat de teller van vgl. (63) voor $H=H_0$ groter dan nul moet zijn; oftewel:

$$g \left\{ 2H_0^2 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2} H_0 + \frac{K_0^2}{C_0^2 H_0} \right\} > 0$$

wat, aangezien $\frac{c}{H_0} \neq 0$, direct te schrijven is als:

$$\left(2H_0^3 \sin \vartheta - \frac{c^2}{C_0^2} H_0^2 + \frac{K_0^2}{C_0^2} \right) > 0 ;$$

m.b.v. $F^2 = \frac{C_0^2}{g} \operatorname{tg} \vartheta$ (zie p.V-59) volgt uit vgl. (60^a) onmiddellijk:

$$c^2 = C_0^2 H_0 \sin \vartheta \left\{ \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2 ,$$

en uit vgl. (62):

$$K_0^2 = H_0^3 C_0^2 \sin \vartheta \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2 ,$$

substitutie waarvan in bovenstaande ongelijkheid oplevert:

$$H_0^3 \sin \vartheta \left[2 - \left\{ \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2 + \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2 \right] > 0 ;$$

met $H_0^3 \sin \vartheta \neq 0$ krijgen we hieruit na enige herleiding:

$$\left\{ (3-2\alpha) - 2 \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\} > 0 ,$$

wat tenslotte weer om te werken is tot:

$$F^2 > \frac{4}{9-8\alpha} \quad (65^a)$$

Substitueren we hierin de voor het Froudegetal afgeleide relatie (zie p.V-59)

$$F^2 = \frac{C_0^2}{g} \operatorname{tg} \theta,$$

dan gaat bovenstaande ongelijkheid over in:

$$\operatorname{tg} \theta > \frac{g}{C_0^2} \cdot \frac{4}{9-8\alpha} \quad (65^b)$$

Voor het geval van tweedimensionale turbulente stroming, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt geeft de ongelijkheid (65^a), c.q. (65^b) de noodzakelijke voorwaarde weer voor de rolgolven om hun uiteindelijk golfpatroon te handhaven. Uit bovenstaande ongelijkheden volgt dat er geen sprake zal zijn van rolgolfvorming, indien de hellingshoek van de leiding θ te klein, en/of de weerstand te groot (i.e. de wrijvingscoëfficiënt C_0 te klein), en/of de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal te klein is. Er zij echter op gewezen (zie p.V-10) dat er tussen α en C_0 een zekere correlatie bestaat, immers, volgens vgl. (21^b) is :

$$\alpha = 1 + 6,25 \frac{g}{C_0^2},$$

zodat de waarde van α toeneemt als C_0 afneemt. Een en ander bevestigt de waarnemingen van H. Rouse (3) dat rolgolfvorming bij turbulente stroming voorkomen kan worden door vergroting van bodem- en wandruwheid.

De gedaante van de ongelijkheden (65^a) en (65^b) komt precies overeen met de voorwaarde voor het ontstaan van instabiliteit in een tweedimensionale turbulente permanent eenparige stroming, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt (zie Hoofdstuk IV, p.IV-75 en vgl. (29^b)); alleen duidt de index 0 in Hoofdstuk IV weer de grootheden aan met betrekking tot de permanent eenparige stroming, en hier de waarden in de controle doorsnede (welke uiteindelijk gelijk zijn aan de grootheden van de permanent eenparige stroming).

We hebben al gezien dat de noemer van vgl. (63) definitief positief is, en derhalve geen reële wortels heeft. De twee wortels van de teller van vgl. (63) zullen we aangeven met H_A en H_B ; vgl. (63) is nu te schrijven als:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{g \sin \theta \left[H^2 + \left(H_0 - \frac{c^2}{C_0^2 \sin \theta} \right) H + \frac{K_0^2}{C_0^2 H_0 \sin \theta} \right]}{g H^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{H_0^2} H + \frac{\alpha K_0^2}{H_0}} \quad (63^a)$$

waarin H_A en H_B dan dus de wortels zijn van de vierkantsvlg.:

$$H^2 + \left(H_0 - \frac{c^2}{C_0^2 \sin \theta} \right) H + \frac{K_0^2}{C_0^2 H_0 \sin \theta} = 0 ;$$

vervolgens zullen we H_A en H_B gaan oplossen; dit geeft direct:

$$H_{A,B} = -\frac{1}{2} \left(H_0 - \frac{c^2}{C_0^2 \sin \theta} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(H_0 - \frac{c^2}{C_0^2 \sin \theta} \right)^2 - 4 \frac{K_0^2}{C_0^2 H_0 \sin \theta}} ;$$

m.b.v. de voorhet Froudegetal F afgeleide relatie (zie p.V-59):

$F^2 = \frac{C_0^2}{g} \operatorname{tg} \theta$, volgt uit vgl. (60^a) onmiddellijk:

$$\frac{c^2}{C_0^2 \sin \theta} = H_0 \left\{ \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2 ,$$

en uit vgl. (62):

$$\frac{K_0^2}{C_0^2 H_0 \sin \theta} = H_0^2 \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2 ,$$

substitutie waarvan in de voor $H_{A,B}$ verkregen relatie na enige herleiding oplevert:

$$\frac{H_{A,B}}{H_0} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right)^2 - 1 \right\} \pm \sqrt{\left[\left(\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right)^2 - 1 \right]^2 - 4 \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2} , \quad (66^a)$$

wat weer om te werken is tot:

$$\frac{H_{H_0}}{H_0} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right)^2 - 1 \right\} +$$

$$\pm \frac{1}{2} \cdot \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\} \cdot \sqrt{\left\{ (\alpha+1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2 - 4} \quad (66^b)$$

Aangezien geldt dat de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal steeds groter of gelijk is aan 1, is het niet moeilijk om in te zien dat de grootte onder het wortelteken in vgl. (66^b):

$$\left\{ (\alpha+1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right\}^2 - 4$$

steeds groter zal zijn dan nul; immers $\frac{1}{F^2}$ is ook altijd positief. Derhalve zijn de wortels H_A en H_B beide reëel; uit vgl. (66^a) volgt tevens dat beide wortels positief zijn; als we de grootste wortel H_A , en de kleinste H_B noemen, dan geldt het +teken dus voor H_A en het -teken voor H_B .

Volgens de ongelijkheid (65^a) geldt als noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van rolgolven dat:

$$F^2 > \frac{4}{9-8\alpha} ;$$

is nu $F^2 = \frac{4}{9-8\alpha}$, dan volgt na enig rekenwerk uit vgl. (66^a), c.q. vgl. (66^b) dat $H_A = H_0$ -welk resultaat te verwachten was- en $H_B = \frac{1}{4}H_0$; het is nu niet moeilijk om in te zien dat het rechterlid van de resp. vgln. (66^a) en (66^b) in ieder geval steeds kleiner is dan 1, als voldaan wordt aan de ongelijkheid (65^a); derhalve geldt:

$$H_0 > H_A > H_B > 0 \quad (67)$$

Tenslotte zullen we nu overgaan tot de feitelijke integratie van de verkregen vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van tweedimensionale turbulente stroming met lopende golven, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt, in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel, te weten vgl.(63). De reciproke functie van vgl. (63) is te schrijven als:

$$\sin\theta \frac{d\xi}{dH} = \frac{H^2 \omega \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} H + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H^2 + (H_0 - \frac{c^2}{g_0 \sin\theta}) H + \frac{K_0^2}{g_0 H_0 \sin\theta}} = \frac{H^2 \omega \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} H + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{(H-H_A)(H-H_B)} ;$$

hieruit blijkt dat de gedaante van de reciproke functie van vgl. (63) volledig identiek is met de gedaante van de reciproke functie van vgl. (51) (zie p.V-53); alleen de gedaante van de waarden voor H_A en H_B is anders. Een en ander houdt in dat de integratie op geheel analoge wijze verloopt als voor het geval van laminaire stroming met rolgolven (zie p.V-54); kiezen we derhalve ook nu de integratieconstante zodanig dat voor $\xi=0$ geldt $H=H_0$, dan is de oplossing te schrijven als:

$$\xi \sin\theta = p \cdot \ln \frac{H-H_0}{H_A-H_0} + q \cdot \ln \frac{H-H_0}{H_B-H_0} + (H-H_0) \cos\theta,$$

waarin:

$$p = \frac{H_0^2 \omega \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} H_0 + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H_A - H_0}$$

en

$$q = - \frac{H_0^2 \omega \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} H_0 + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H_B - H_0} ;$$

de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal wordt gegeven door vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{\xi}{C_0^2}$$

Bovenstaande vgl. voor $\xi \sin\theta$ is dan tenslotte te schrijven als:

$$\xi = \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{H_0^2 \omega \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} H_0 + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H_A - H_0} \ln \frac{H-H_0}{H_A-H_0} + \right.$$

$$- \left. \frac{H_0^2 \cos \theta + \frac{\alpha K^2}{g H_0} H + \frac{\alpha K^2}{g H_0}}{H_0 - H_0} \ln \frac{H - H_0}{H_0 - H_0} + (H - H_0) \cos \theta \right\} \quad (68)$$

De coëfficiënt p van $\ln \frac{H - H_A}{H_0 - H_A}$ in het rechterlid van vgl. (68) is altijd positief en de coëfficiënt q van $\ln \frac{H - H_B}{H_0 - H_B}$ is altijd negatief, op grond van de ongelijkheid (67) en het feit dat θ, K_0, H_0 en α positief zijn.

De inverse functie van vgl. (68) moet zich dan gedragen zoals geschetst in fig. V-8.b. Uit de relatie (37^b):

$$(c-U)H = K_0$$

volgt nu dat de stroming links van het punt $\xi=0$ supercritiek, en rechts van het punt $\xi=0$ subcritiek moet zijn. De kromme nadert de asymptoot $H=H_A$ exponentieel en gaat zich min of meer lineair gedragen voor grote waarden van ξ , aangezien de eerste twee termen van het rechterlid, de logaritmen, dan resp. tot plus en min oneindig naderen.

Evenals in het hiervoor beschouwde geval van laminaire stroming (zie p. V-55), kan men ook nu weer -in navolging van H.A. Thomas (1)- de waterdiepte in de controle doorsnede, H_0 , aanduiden met de benaming "(tweede) critieke diepte" of "bovenste normale diepte", en de wederom als rekengrootheden gehanteerde waterdiepten H_A en H_B met de resp. benaming "onderste normale diepte" en "onechte normale diepte" (omdat deze laatste grootheid, H_B , valt in een gebied waar de desbetreffende profielvgl. (68) niet geldig is).

Op p. V-64 hebben we gezien dat H_0 gelijk wordt aan H_A als F^2 nadert tot $\frac{4}{9-8\alpha}$; uit vgl. (63) volgt direct dat voor deze situatie $\frac{dH}{d\xi}$, i.e. de helling van de waterspiegel, dan nadert tot nul en uit vgl. (68) dat ξ nadert tot oneindig, m.a.w.: het rol-golfprofiel volgens vgl. (68), c.q. vgl. (63) nadert in het beschouwde geval tot een rechte lijn, op een afstand $H=H_0$ evenwijdig met de leidingbodem, aldus een voorwaarde voor permanent eenparige stroming opleverend.

V-E: De constructie van discontinue oplossingen.

Uit het voorgaande volgt nu zonder meer dat zowel voor het geval van tweedimensionale laminaire stroming met rolgolven, als

voor het geval van tweedimensionale turbulente stroming met rolgolven (gebaseerd op de weerstandswet van de Chezy, met constante C-waarde) in een hellende open leiding, de z.g. "rolgolfkromme" vgl. (56) resp. vgl. (68) algemeen voorgesteld kan worden door:

$$\xi = \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \frac{H_0^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} H_A + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H_0 - H_A} \ln \frac{H - H_0}{H_0 - H_A} + \right. \\ \left. - \frac{H_0^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} H_0 + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H_0 - H_0} \ln \frac{H - H_0}{H_0 - H_0} + (H - H_0) \cos \theta \right\}; \quad (69)$$

is de desbetreffende stroming laminair dan geldt:

$\alpha=1,2$, H_A en H_B worden gegeven door vgl. (54), H_0 en K_0 worden gegeven door vgl. (49), resp. vgl. (50);

is de desbetreffende stroming turbulent dan geldt:

$1,0 \leq \alpha \leq 1,1$, nader gepreciseerd door vgl. (21^b), H_A en H_B worden gegeven door vgl. (66), H_0 en K_0 worden gegeven door vgl. (49) resp. vgl. (50).

De "rolgolfkromme" voorgesteld door vgl. (69) zullen we aanduiden als de H_n -kromme. Indien we de golflengte van het periodieke permanente rolgolfpatroon nu λ noemen, dan wordt de vgl. voor de volgende "rolgolfkromme", i.e. de H_{n+1} -kromme:

$$\xi = \lambda + \frac{1}{\sin \theta} \left\{ (69) \right\}; \quad (70)$$

waarin (69) dezelfde uitdrukking tussen accoladen voorstelt als in de voorgaande vgl. (69) (zie fig.V-8). De schok, c.q. discontinuïteit, zal voorkomen voor zekere waarde van ξ , hierna aan te geven als ξ_s , waarbij het suffix s duidt op "schok"; de waarde van $\xi = \xi_s$ moet nu zodanig zijn dat ter plaatse aan de schokvoorwaarden wordt voldaan. Teneinde de grootte van ξ_s te vinden, benevens (zie fig.V-8) $H_b = H_n(\xi_s)$ en $H_f = H_{n+1}(\xi_s)$, moeten we de schokvoorwaarden kennen, (de indices b en f duiden weer het hoogste, resp. laagste punt van het golfprofiel aan). Als schokvoorwaarden hebben we afgeleid vgl. (38), vgl. (39) en vgl. (40), resp. voorstellende de wet van behoud van massa, de wet van behoud van impuls en de wet van behoud van energie, in alle drie de gevallen beschouwd over de schok en geldig voor een driedimensiona-

le stromingstoestand; deze schokvoorwaarden zijn, zoals we gezien hebben, geldig voor zowel laminaire als turbulente stroming. Het is nu niet moeilijk om in te zien dat voor het hier beschouwde geval van tweedimensionale stroming per eenheid van breedte geldt:

$A_f = H_f \cdot 1$, $A_b = H_b \cdot 1$ en $H_{amb} = \frac{1}{2}H$,
zodat vgl. (38), de voorwaarde voor het behoud van massa overgaat in:

$$-\rho^{H_f}(c-U_f) = -\rho^{H_b}(c-U_b) = \phi_M = -\rho K_o,$$

oftewel:

$$H_f(c-U_f) = H_b(c-U_b) = -\frac{\phi_M}{\rho} = K_o; \quad (71)$$

het spreekt nu voor zichzelf dat aan K de index o is toegevoegd; aan de wet van behoud van massa wordt dus altijd automatisch voldaan, indien de waarde van de parameter K (i.e. de progressieve mate van afvoer) beperkt wordt tot de waarde K_o . De voorwaarde voor het behoud van impuls, vgl. (39), gaat op grond van het bovenstaande over in:

$$\phi_M \{ (c-U_b) - (c-U_f) \} = \frac{1}{2} \rho g \cos \theta (H_b^2 - H_f^2),$$

welke relatie m.b.v. vgl. (71) te schrijven is als:

$$-\frac{K_o^2}{H_b H_f} (H_f - H_b) = \frac{1}{2} g \cos \theta (H_b + H_f) (H_b - H_f);$$

laten we de triviale oplossing $H_b = H_f$, overeenkomend met een situatie zonder schok, buiten beschouwing, dan krijgen we:

$$\frac{2K_o^2}{H_b H_f} = g \cos \theta (H_b + H_f). \quad (72)$$

Ter plaatse van de schok moet voor H_b en H_f ook voldaan worden aan de gelijkheid:

$$\xi_s = H_n(H_b) = H_{n+1}(H_f)$$

Op grond van vgl. (69) levert $\xi_s = H_n(H_b)$ op:

$$\xi_s = H_n(H_b) = \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \frac{H_b^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_o^2}{g H_b} H_b + \frac{\alpha K_o^2}{g H_b}}{H_b - H_o} \ln \frac{H_b - H_b}{H_b - H_o} + \right. \\ \left. - \frac{H_o^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_o^2}{g H_o} H_o + \frac{\alpha K_o^2}{g H_o}}{H_b - H_o} \ln \frac{H_b - H_o}{H_b - H_o} + (H_b - H_o) \cos \theta \right\},$$

terwijl $\xi_S = H_{n+1}(H_F)$ op grond van vgl. (70) oplevert:

$$\xi_S = H_{n+1}(H_f) = \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ \frac{H_b^2 \cos \vartheta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_b} H_b + \frac{\alpha K_0^2}{g H_b}}{H_b - H_b} \ln \frac{H_f - H_b}{H_b - H_b} + \right. \\ \left. - \frac{H_b^2 \cos \vartheta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_b} H_b + \frac{\alpha K_0^2}{g H_b}}{H_b - H_b} \ln \frac{H_f - H_b}{H_b - H_b} + (H_f - H_b) \cos \vartheta \right\} + L ;$$

gelijkstellen van de resp. linker- en rechterleden van beide bovenstaande vgl. levert na enige herleiding op:

$$L \sin \vartheta = \frac{H_b^2 \cos \vartheta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_b} H_b + \frac{\alpha K_0^2}{g H_b}}{H_b - H_b} \ln \frac{H_b - H_b}{H_f - H_b} + \\ - \frac{H_b^2 \cos \vartheta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_b} H_b + \frac{\alpha K_0^2}{g H_b}}{H_b - H_b} \ln \frac{H_b - H_b}{H_f - H_b} + (H_b - H_f) \cos \vartheta \quad (73)$$

De onbekenden H_b en H_f kunnen nu eenduidig bepaald worden, uit vgl. (72) en vgl. (73), door als noodzakelijke voorwaarde toe te voegen dat $H_b > H_f > 0$ (zie fig.V-8).

Uit vgl. (72) zullen we nu H_f oplossen, uitgedrukt in H_b ; daartoe schrijven we vgl. (72) in de gedaante:

$$H_b \cdot H_f^2 + H_b^2 \cdot H_f - \frac{2K_0^2}{g \cos \vartheta} = 0,$$

uit welke vierkantsvgl. in H_f direct volgt:

$$H_f = -\frac{1}{2} \cdot H_b + \frac{1}{2} \sqrt{H_b^2 + \frac{8K_0^2}{g H_b \cos \vartheta}} ;$$

De term onder het wortelteken is altijd positief, aangezien $H_b > 0$ en $\vartheta > 0$; omdat steeds geldt $H_f > 0$, geldt in bovenstaande vgl. alleen het +teken voor de wortel; derhalve krijgen we voor H_f :

$$H_f = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{H_b^2 + \frac{8K_b^2}{gH_b \cos \theta}} - H_b \right\} \quad (74)$$

Aan de energie ongelijkheid ter plaatse van de schok (i.e. de wet van behoud van energie gaat daar niet op in de gedaante zoals deze is toegepast) wordt automatisch voldaan door de gestelde eis dat $c > U$ en het feit dat $H_b > H_f$.

Substitueren we de voor H_f verkregen formule, vgl. (74), in vgl. (73) dan volgt daaruit het verband tussen de maximale golfhoogte H_b en de golflengte λ . Dit verband zullen we eerst afleiden voor het geval van laminaire stroming, en vervolgens voor het geval van turbulente stroming.

In geval van een laminaire stromingstoestand geldt het volgende: m.b.v. vgl. (54) voor H_A , resp. H_B , vgl. (49) voor H_0 en vgl. (50) voor K_0 , kan indien gesteld wordt:

$$P = \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{P^2}}$$

voor de coëfficiënt van $\ln \frac{H_b - H_A}{H_f - H_A}$, resp. $\ln \frac{H_b - H_B}{H_f - H_B}$, na een uit-

gebreide herleiding geschreven worden:

$$\frac{H_{A0}^2 \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{gH_0} \cdot H_{A0} + \frac{\alpha K_0^2}{gH_0}}{H_b - H_0} = \frac{c^2}{g} \cdot \frac{(\alpha-1) \left[P \left\{ \frac{1}{2} \pm \sqrt{P - \frac{3}{4}} \right\} - 1 \right] + (P-1) \{ (P+1) - 2\alpha \}}{2P \sqrt{P - \frac{3}{4}}} = \frac{c^2}{g} \cdot a_{3,2} ;$$

m.b.v. vgl. (49) voor H_0 en vgl. (50) voor K_0 , kan, indien de grootheid P weer wordt ingevoerd, voor H_f volgens vgl. (74) na een uitgebreide herleiding geschreven worden:

$$H_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g \cos \theta} \left[\left(\frac{gH_b \cos \theta}{c^2} \right)^2 + \frac{8(P-1)^2}{P^6} \left\{ (P-1)(P+1-2\alpha) - (\alpha-1) \right\}^2 \cdot \frac{c^2}{gH_b \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g \cos \theta} \cdot \frac{g H_b \cos \theta}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g \cos \theta} \left\{ F\left(\sqrt{\frac{g H_b \cos \theta}{c^2}}\right) - \sqrt{\frac{g H_b \cos \theta}{c^2}} \right\}; \quad (74^a)$$

m.b.v. vgl. (49) voor H_0 , kan, indien de grootheid P weer wordt ingevoerd, voor H_A , resp. H_B volgens vgl. (54) na een uitgebreide herleiding geschreven worden:

$$H_{q0} = \frac{c^2}{g \cos \theta} \cdot \frac{[(P-1)\{(P+1)-2\alpha\} - (\alpha-1)] \cdot \left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{P - \frac{3}{4}}\right] - 1}{P^2} = \frac{c^2}{g \cos \theta} \cdot a_{3,4}$$

Als we nu invoeren de dimensieloze maximale golfhoogte H'_b , gedefiniëerd als:

$$H'_b = \frac{g H_b \cos \theta}{c^2}$$

en de dimensieloze golflengte λ' , gedefiniëerd als:

$$\lambda' = \lambda \cdot \text{tg} \theta \cdot \frac{g \cos \theta}{c^2}$$

dan is het niet moeilijk om in te zien dat vgl. (73) m.b.v. het bovenstaande overgaat in:

$$\lambda' = a_3 \cdot \ln \frac{H'_b - a_3}{\frac{1}{2} \{F(H'_b) - H'_b\} - a_3} - a_2 \cdot \ln \frac{H'_b - a_2}{\frac{1}{2} \{F(H'_b) - H'_b\} - a_2} + \frac{1}{2} \{3H'_b - F(H'_b)\}; \quad (75)$$

hiérin is:

$$F(H'_b) = \left[(H'_b)^2 + \frac{8(P-1)^2}{P^6} \cdot \{(P-1)(P+1-2\alpha) - (\alpha-1)\} \cdot \frac{1}{H'_b} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_{3,2} = \frac{(\alpha-1) \left[P \left\{ \frac{1}{2} \pm \sqrt{P - \frac{3}{4}} \right\} - 1 \right] + (P-1) \{(P+1) - 2\alpha\}}{2P \sqrt{P - \frac{3}{4}}},$$

en

$$a_{3,4} = \frac{[(P-1)\{(P+1)-2\alpha\} - (\alpha-1)] \cdot \left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{P - \frac{3}{4}}\right] - 1}{P^2},$$

waarin het +teken geldt voor a_1 en a_3 , het -teken voor a_2 en a_4 , terwijl

$$P = \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \quad \text{en } \alpha = 1, 2$$

Vgl. (75) drukt het verband uit tussen de (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' en de (dimensieloze) golflengte λ' in geval van een tweedimensionale laminaire stromingstoestand met een periodiek permanent rolgolffpatroon. Zoals we reeds gezien hebben op p.V-48 is (in vgl. (75)) het Froudegetal F een functie van de hellingshoek van de leiding θ , (en de voortplantings-snelheid c van de golf) en niet op eenvoudige wijze expliciet in deze beide grootheden uit te drukken, c.q. een functie van θ en Re ; beschouwen we het Froudegetal F op zich echter als een parameter, dan volgt uit vgl. (75) dat de verhouding tussen maximale golfhoogte en golflengte onafhankelijk is van c .

In geval van een turbulente stromingstoestand geldt het volgende:

m.b.v. vgl. (66) voor H_A , resp. H_B , vgl. (49) voor H_0 en vgl. (50) voor K_0 kan, indien gesteld wordt:

$$P = \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}$$

voor de coëfficiënt van $\ln \frac{H_b - H_A}{H_f - H_A}$, resp. $\ln \frac{H_b - H_B}{H_f - H_B}$, na een uitgebreide herleiding geschreven worden:

$$\frac{H_{A0}^2 \cdot \cos \theta + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0} H_{A0} + \frac{\alpha K_0^2}{g H_0}}{H_A - H_0} =$$

$$= \frac{c^2}{g} \cdot \frac{(P-1)\{(P+1)-2\alpha\} [P\{(P+1) \pm \sqrt{(P+1)^2 - 4}\} - 2 + 2(P-1)]}{2P\sqrt{(P+1)^2 - 4}} = \frac{c^2}{g} \cdot a_{5,6};$$

op dezelfde wijze als voor het geval van laminaire stroming kan afgeleid worden:

$$H_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g \cos \theta} \left\{ F \left(\sqrt{\frac{g H_b \cos \theta}{c^2}} \right) - \frac{g H_b \cos \theta}{c^2} \right\};$$

m.b.v. vgl. (49) voor H_0 kan, indien de grootheid P weer wordt ingevoerd, voor H_A , resp. H_B volgens vgl. (66) na een uitgebrei-

de herleiding geschreven worden:

$$H_{b,0} = \frac{c^2}{g \cos \theta} \cdot \frac{(P-1)[(P-1)\{(P+1)-2\alpha\} - (\alpha-1)] \cdot \{(P+1) \pm \sqrt{(P+1)^2 - 4}\}}{2P^2} =$$

$$= \frac{c^2}{g \cos \theta} \cdot a_{7,0}$$

Als we wederom invoeren de dimensieloze maximale golfhoogte H'_b en de dimensieloze golflengte λ' , resp. gedefiniëerd als:

$$H'_b = \frac{g H_b \cos \theta}{c^2} \quad \text{en} \quad \lambda' = \lambda \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{g \cos \theta}{c^2},$$

dan is het niet moeilijk om in te zien dat vgl. (73) m.b.v. het bovenstaande overgaat in:

$$\lambda' = a_5 \cdot \ln \frac{H'_b - a_7}{\frac{1}{2}\{F(H'_b) - H'_b\} - a_7} - a_6 \cdot \ln \frac{H'_b - a_8}{\frac{1}{2}\{F(H'_b) - H'_b\} - a_8} +$$

$$+ \frac{1}{2}\{3H'_b - F(H'_b)\}; \quad (76)$$

hierin is:

$$F(H'_b) = \left[(H'_b)^2 + \frac{8(P-1)^2}{P^2} \cdot \left\{ (P-1)(P+1-2\alpha) - (\alpha-1) \right\}^2 \cdot \frac{1}{H'_b} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_{5,6} = \frac{(P-1)\{(P+1)-2\alpha\} \left[P\{(P+1) \pm \sqrt{(P+1)^2 - 4}\} - 2 \right] + 2(P-1)}{2P\sqrt{(P+1)^2 - 4}}$$

en

$$a_{7,8} = \frac{(P-1)[(P-1)\{(P+1)-2\alpha\} - (\alpha-1)] \cdot \{(P+1) \pm \sqrt{(P+1)^2 - 4}\}}{2P^2}$$

waarin het +teken geldt voor a_5 en a_7 , het -teken voor a_6 en a_8 , terwijl:

$$P = \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}$$

en

$1,0 \leq \alpha \leq 1,1$, nader gepreciseerd door vgl. (21^b).

Vgl. (76) drukt het verband uit tussen de (dimensieloze) maximale golfhoogte H'_b en de (dimensieloze) golflengte λ' in

geval van een tweedimensionale turbulente stromingstoestand met een periodiek permanent rolgolfpatroon, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt. Zoals we gezien hebben op p.V-59 is (in vgl. (76)) het Froudegetal F een functie van de hellingshoek van de leiding, θ , en de wrijvingscoëfficiënt C , immers:

$$F^2 = \frac{C_o^2 \operatorname{tg} \theta}{g} ;$$

is de wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy bekend, dan volgt daaruit volgens vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{g}{C_o^2}$$

de waarde van de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal. Uit bovenstaande volgt dat volgens vgl. (76) de verhouding tussen maximale golphiogte en golflengte onafhankelijk is van de golfsnelheid c .

Tot slot zullen we nog enkele opmerkingen plaatsen, welke dienstig kunnen zijn bij de constructie van periodieke permanente rolgolfoplossingen.

Opmerking I.A

Vgl. (75), voor het geval van laminaire stroming met rolgolven, is onafhankelijk van de golfsnelheid c , indien het Froudegetal F als parameter wordt aangehouden. Derhalve hebben we in deze situatie voor elke toelaatbare waarde van F een één-parameter familie van mogelijke periodieke oplossingen in termen van λ' ; als "moeilijkheid" doet zich hierbij echter voor dat t.a.v. F en θ weliswaar voldaan moet worden aan de noodzakelijke voorwaarde voor rolgolfvorming vgl. (53^a), i.e. $F^2 > \frac{1}{3}$, c.q. vgl. (53^b), i.e. $(\operatorname{Re})_o \operatorname{tg} \theta > 1$, maar de relatie tussen F en θ daaruit niet expliciet bepaald is.

Opmerking I.B

Vgl. (76) voor het geval van turbulente stroming met rolgolven (beheerst door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt), is onafhankelijk van de golfsnelheid c . Aangezien F voor deze situatie expliciet bepaald is als een functie van de hellingshoek θ en de wrijvingscoëfficiënt C :

$$F^2 = \frac{C_o \operatorname{tg} \theta}{g} ,$$

en de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal gegeven wordt door vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{g}{C_o^2} ,$$

hebben we voor elk toelaatbaar paar waarden van θ en C_0 , of liever voor elke toelaatbare waarde van F , een éénparameterfamilie van mogelijke periodieke oplossingen in termen van λ' ; elk toelaatbaar paar waarden van θ en C_0 , c.q. elke toelaatbare waarde van F , kan bepaald worden uit de noodzakelijke voorwaarde voor rolgolfvorming vgl. (65^{a,b}), i.e.:

$$F^2 = \frac{C_0^2 \operatorname{tg} \theta}{g} > \frac{4}{9-8\alpha}$$

Opmerking I.C

Het is niet moeilijk om in te zien, dat zowel voor laminaire stroming met rolgolven, als voor turbulente stroming met rolgolven, de (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' en de (dimensieloze) minimale golfhoogte H_f' beide naderen tot $\frac{gH_0 \cos \theta}{c^2}$ indien de (dimensieloze) golflengte λ' nadert tot nul, en dat de minimale waterdiepte H_f' nadert tot H_A , als λ' nadert tot oneindig. Het is duidelijk dat, indien λ' nadert tot oneindig, de (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' een eindige bovenste extreme waarde bereikt.

Opmerking II

De werkelijke hoogte van de discontinuïteit kan uitgedrukt worden als:

$$\Delta H_s = H_b - H_f,$$

of in dimensieloze gedaante als:

$$\Delta H_s = \frac{g \cos \theta}{c^2} (H_b - H_f) = H_b' - H_f'$$

H_f' is m.b.v. vgl. (74) uitgedrukt als functie van H_b , resp. m.b.v. vgl. (74^a) als functie van $H_b' = \frac{gH_b \cos \theta}{c^2}$, terwijl we in het bovenstaande hebben gezien dat de relatie tussen H_b' en λ' bekend is -zowel in geval van laminaire stroming met rolgolven, als in geval van turbulente stroming met rolgolven-; derhalve is aan de hand hiervan, voor dezelfde resp. parameterwaarden, het verband af te leiden tussen $\Delta H_s'$ en λ' .

Opmerking III

Voor het geval van tweedimensionale stroming hebben we afgeleid (zie p.V-38) dat de mate van energiedissipatie over de schok uitgedrukt kan worden als:

$$\lim_{\Delta t} \frac{dQ}{dt} = \frac{g \cos \theta \phi_M}{4H_b' H_f'} (H_b' - H_f')^3;$$

deze mate van energiedissipatie levert een indicatie op voor de

vorticiteit, c.q. turbulentie, en de schuimvorming aan de golf-
fronten. Stellen we $\lim_{dt} \frac{dQ}{dt} = P$ dan gaat bovenstaande vgl. m.b.v.
 $\phi_M = -\rho K_0$ (zie vgl. (71)) over in:

$$P = \frac{\rho g K_0 \cos \theta}{4H_b H_f} (H_f - H_b)^3$$

Aangezien de stroming in een gegeven leiding kan bestaan uit
vele golven met kleine golflengte en schokhoogte, of weinig
golven met grote golflengte en schokhoogte, bij dezelfde waarde
voor de progressieve mate van afvoer K_0 , is het significanter
om de verhouding tussen de mate van energiedissipatie en de
golflengte te beschouwen. Als we P nu dimensieloos maken door
te stellen $P' = P / \rho K_0 c^2$, dan gaat bovenstaande vgl. over in:

$$P' = \frac{(H_f' - H_b')^3}{4H_b' H_f'}$$

Omdat H_f m.b.v. vgl. (74) uit te drukken is in H_b , resp. H_f'
m.b.v. vgl. (74^a) in H_b' , en voor beide stromingswijzen (lami-
nair en turbulent) de relatie tussen H_b' en λ' bekend is, kan
weer met behulp hiervan het gedrag van P'/λ' als functie van λ'
bepaald worden voor dezelfde resp. parameterwaarden als in het
bovenstaande.

Opmerking IV

De constante K_0 hebben we in het voorgaande aangeduid als
de schijnbare mate van afvoer voor het geval de stroming wordt
beschouwd t.o.v. een meebewegend assenstelsel. T.o.v. een ge-
fixeerd assenstelsel zal de werkelijke of statische afvoer, q ,
echter een variabele periodieke grootheid zijn. Omdat volgens
vgl. (37^b) geldt:

$$(c-U)H = K_0$$

hebben we dan:

$$U(\xi) \cdot H(\xi) = Q(\xi) = cH - K_0,$$

of als we het verschijnsel beschouwen t.o.v. de vaste oorsprong
($\xi = x - ct$):

$$Q(-ct) = c \cdot H(-ct) - K_0 = q(0, t),$$

waarin $q(x, t)$ de ogenblikkelijke mate van afvoer is voor zeker
punt x van de leiding. Het is duidelijk dat $q(0, t)$ een disconti-
nue functie in t zal zijn, zoals aangegeven in fig.V-9. We zullen
 q nu gaan middelen om de belangrijker grootheid Z te krijgen, te
weten de gemiddelde afvoer voorbij een vast punt:

$$\frac{1}{c} \cdot Z(\lambda) = \int_0^{\lambda} q(0, t) dt,$$

waaruit, op grond van het bovenstaande, volgt:

$$Z(\lambda) = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\lambda} \{c \cdot H(-ct) - K_0\} dt = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\lambda} c \cdot H(-ct) dt - K_0;$$

het is niet moeilijk in te zien dat deze integraal te transformeren is tot:

$$Z(\lambda) = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\lambda} H(\xi) d\xi - K_0$$

Zowel voor laminaire stroming met rolgolven als voor turbulente stroming met rolgolven is $H(\xi)$ bekend; in geval van laminaire stroming is K_0 m.b.v. vgl. (50) uit te drukken in termen van c , ϑ , (en F , welke laatste grootheid in principe uit te drukken is in c en ϑ , resp. Re en ϑ , zie p.V-48 - α is dan constant- en in geval van turbulente stroming is K_0 m.b.v. vgl. (50) uit te drukken in termen van c , ϑ , en C_0 (omdat in dit laatste geval F expliciet bekend is als functie van ϑ en C_0 , en α een functie is van C_0). Derhalve kan bovenstaande relatie gebruikt worden om één van de drie grootheden c , λ en Z te bepalen, indien de andere twee bekend zijn.

Door toepassing van de middelwaardestelling op bovenstaande integraal, is deze, op grond van het feit dat H_D en H_F beide naderen tot H_0 als λ nadert tot nul, op eenvoudige wijze om te werken tot:

$$Z = cH_0 - K_0 \quad \text{voor } \lambda \rightarrow 0.$$

Aan de hand van de uitdrukking voor H_0 , vgl. (49), en die voor K_0 , vgl. (50), is hieruit dan een relatie voor de golfsnelheid c af te leiden als $\lambda \rightarrow 0$; in geval van laminaire stroming is c een functie van Z , ϑ , (en F), en in geval van turbulente stroming een functie van Z , C_0 en ϑ (zie ook het bovenstaande).

Aangezien H_D tot een eindige limietwaarde moet naderen als λ nadert tot oneindig, is de bijdrage aan de uitdrukking $\frac{c}{\lambda} \int_0^{\lambda} H(\xi) d\xi$ van het gedeelte van de kromme rechts van de controle doorsnede, aan de bovenzijde begrensd (zie fig.V-8). Links van de controle doorsnede nadert de kromme de asymptoot $H=H_A$ exponentieel. Derhalve geldt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\lambda} H d\xi}{\lambda H_0} = 1,$$

oftewel $\frac{c}{\lambda} \int_0^{\lambda} H d\xi$ nadert cH_A van de bovenzijde. Op grond hiervan is het nu mogelijk om m.b.v. bovenstaande integraal een relatie voor de golfsnelheid c af te leiden als $\lambda \rightarrow \infty$, welke een bovenste begrenzing voor c vormt in geval van zeer grote golflengte; in geval van laminaire stroming is c een functie van Z , ϑ (en F) en Re , en in geval van turbulente stroming een functie van Z ,

C_0 en ϑ (zie ook het bovenstaande).

De (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' moet aan de bovenzijde eindig begrensd zijn; noemen we de (dimensieloze) bovengrens \bar{H}_b' , dan geldt dus:

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \infty} H_b' = \bar{H}_b'$$

welke waarde bereikt wordt als H_f nadert tot H_A . Voor iedere golflengte moet nu dus gelden:

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} H d\xi < \frac{c^2}{g \cos \vartheta} \cdot \bar{H}_b'$$

Op grond hiervan is het nu mogelijk om m.b.v. eerder genoemde integraal een relatie voor de golfsnelheid c af te leiden, geldig voor elke golflengte, welke een onderste begrenzing voor c vormt; in geval van laminaire stroming is c een functie van Z, ϑ , (en F) en Re , en in geval van turbulente stroming een functie van Z, C_0 en ϑ (zie ook het bovenstaande).

In het voorgaande is in het kort aangegeven hoe de asymptotische uitdrukkingen voor de golfsnelheid c in geval van zeer kleine, resp. zeer grote golflengte afgeleid kunnen worden, en hoe een uitdrukking voor de ondergrens van de golfsnelheid c , geldig voor alle golflengten, bepaald kan worden (deze laatste waarde van c zal tussen de twee eerder genoemde in moeten liggen).

Bij iedere praktische toepassing zal Z wellicht van tevoren bekend zijn, en worden ϑ en C_0 (deze laatste alleen als we te maken hebben met een turbulente stroming) bepaald door het fysische model. Dan kan c bepaald worden tussen twee bekende grenswaarden in (ook in het geval van laminaire stroming, waar c -in tegenstelling tot de situatie bij turbulente stroming- niet volledig expliciet te schrijven is, aangezien F een functie is van zowel ϑ als c , resp. ϑ en Re); vervolgens zijn dan alle grootheden zoals K_0, H_0, U_0 en \bar{H}_b te bepalen.

In alle gevallen zullen de waarden van ϑ en C_0 (deze laatste alleen als we te maken hebben met turbulente stroming) van tevoren vastliggen door de aard van het fysische model. Indien de golfsnelheid c dan is voorgeschreven, hebben we een één-parameterfamilie van periodieke oplossingen t.o.v. λ . Als λ nu ook nog voorgeschreven is, dan is de rolgolfoplossing enig; of wat hetzelfde is, als de tijdperiode (wanneer een waarnemer de rolgolven beschouwt vanuit een vast punt) bekend is, zal de oplossing enig worden.

In het voorgaande is aangegeven hoe het enig mogelijke stel periodieke rolgolfoplossingen voor een hellende open leiding verkregen kan worden, uitgaande van de z.g. ondiep-watertheorie, zowel voor het geval van een laminaire stromingstoestand, als voor het geval van een turbulente stromingstoestand, die beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt. De oplossingen worden verkregen als discontinue oplossingen.

Ten overvloede zij nog opgemerkt dat zowel de z.g. ondiep-water-vgl. als de gebruikte laminaire weerstandsterm, resp. de weerstandswet van de Chezy, hun geldigheid verliezen, indien de stroming niet meer geleidelijk veranderend (i.e. quasi-permanent) is, maar plotseling verandert.

V-F: Het criterium voor het bestaan van rolgolven.

Op p.V-43 van dit Hoofdstuk V hebben we gezien dat als voorwaarde voor rolgolven om hun uiteindelijk golfpatroon (zoals beschreven in het voorafgaande) te handhaven, voldaan moet worden aan de ongelijkheid (42):

$$\lim_{\substack{H \rightarrow h \\ H \rightarrow h}} \frac{dH}{d\xi} (\geq) 0, \quad (42)$$

welke te beschouwen is als de noodzakelijke voorwaarde voor het ontstaan en bestaan van rolgolven; het (=) teken kan dan opgevat worden als een grensgeval.

De algemene gedaante van de vgl. voor het profiel van het wateroppervlak in geval van (niet-permanente) driedimensionale stroming met lopende golven in een prismatische hellende leiding met vrije waterspiegel, luidt (zie p.V-21):

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{-A \left\{ g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} \right\}}{\frac{dH}{d\xi} \left\{ (\alpha H - c)(U - c) + (1 - \alpha) U c \right\} - g A^3 \cos \theta}, \quad (36^b)$$

welke vgl. door eliminatie van U m.b.v. vgl. (37) -nadat aan de progressieve mate van afvoer K de index o is toegevoegd om de speciale rolgolfoplossing aan te duiden- geschreven kan worden als:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{A^3 \left\{ g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R} \right\}}{\frac{dH}{d\xi} \left\{ (\alpha - 1) c^2 H^2 - \alpha h_0^2 \right\} + g A^3 \cos \theta}$$

In de controle doorsnede moet, zoals we gezien hebben op p.V-42 zowel de teller als de noemer van bovenstaande vgl. gelijk zijn aan nul; dit betekent dat $\left(\frac{dH}{dS}\right)_0 = 0$ en derhalve een z.g. onbepaalde vorm is. Daarom zullen we, teneinde de limiet in het linkerlid van de ongelijkheid (42) te bepalen, de regel van de l'Hôpital toepassen op bovenstaande vgl. en wel als volgt:

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \frac{dH}{dS} = \frac{\left\{ \frac{d(\text{teller})}{dH} \right\}_0}{\left\{ \frac{d(\text{noemer})}{dH} \right\}_0}$$

aannemende dat $\left\{ \frac{d(\text{teller})}{dA} \right\}_0$ en $\left\{ \frac{d(\text{noemer})}{dA} \right\}_0$ beide bestaan, en $\left\{ \frac{d(\text{noemer})}{dA} \right\}_0$ ongelijk is aan nul. Voor de beschouwde eenvoudige vormen is $\frac{dA}{dH}$ een constante groter dan nul; $\left\{ \frac{d(\text{noemer})}{dA} \right\}_0$ wordt dan:

$$\left\{ \frac{d(\text{noemer})}{dA} \right\}_0 = 2 \left(\frac{dA}{dH} \right)_0 (\alpha - 1) A_0 c^2 + 3gA_0^2 \cos \theta;$$

aangezien $\alpha \geq 1$, $\left(\frac{dA}{dH} \right)_0 > 0$ en $\theta > 0$ geldt dat $\left\{ \frac{d(\text{noemer})}{dA} \right\}_0$ definitief positief is. Dit betekent dat voornoemd criterium voor het ontstaan en bestaan van rolgolven overgaat in:

$$\left\{ \frac{d(\text{teller})}{dA} \right\}_0 = \frac{d}{dA} \left[A^3 \left(g \sin \theta - \frac{z}{\rho R} \right) \right] \Big|_{A=A_0} \geq 0 \quad (42^a)$$

We zullen dit criterium (42^a) nu eerst ontwikkelen in geval we te maken hebben met laminaire stroming, en vervolgens in geval we te maken hebben met turbulente stroming.

V-F.a Het criterium voor het ontstaan van rolgolven in geval van laminaire stroming.

Voor laminaire stroming met rolgolven is de wrijvingsterm nu te schrijven als (zie p.V-22):

$$\frac{z}{\rho R} = \frac{3V(Ac - K_0)}{AR^2}$$

aan de hand waarvan de ongelijkheid (42^a) met $R = \frac{A}{S}$ oplevert:

$$\frac{d}{dA} \left\{ gA^3 \sin \theta - 3vS^2 (Ac - K_0) \right\} \Big|_{A=A_0} \geq 0;$$

uitwerken hiervan geeft:

$$3gA_0^2 \sin \theta - 6vS_0 \left(\frac{dS}{dA} \right)_0 (A_0 c - K_0) - 3vS_0^2 c \geq 0,$$

wat na eliminatie van K_0 m.b.v. vgl. (37): $K_0 = A_0(c - U_0)$ overgaat in:

$$3gA_0^2 \sin \theta - 6vS_0 \left(\frac{dS}{dA} \right)_0 U_0 A_0 - 3vS_0^2 c \geq 0;$$

*doorsnede-

in de controle doorsnede moet volgens vgl. (44^a) gelden:

$$g \sin \theta - \frac{3vU_0}{R_0^2} = 0; \tag{44^a}$$

eliminieren we met behulp hiervan $g \sin \theta$ uit bovenstaande ongelijkheid, dan levert dit met $R_0 = \frac{S_0}{s_0}$ op:

$$9vU_0 s_0^2 - 6v s_0 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 U_0 A_0 - 3v s_0^2 c \geq 0,$$

wat, aangezien $3v s_0^2 > 0$, te schrijven is als:

$$3U_0 - 2U_0 R_0 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 - c \geq 0;$$

hieruit volgt direct:

$$2U_0 \left\{ 1 - R_0 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 \right\} \geq (c - U_0)$$

Stellen we nu, geheel analoog aan hetgeen geschiedt is in Hoofdstuk IV, p.IV-33:

$$1 - R_0 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 = M,$$

waarin M de z.g. vormfactor van de (controle-)doorsnede is, dan gaat de ongelijkheid (42), c.q. (42^a) over in:

$$\frac{2MU_0}{c - U_0} \geq 1 \tag{77^a}$$

Volgens vgl. (43^a) is de grootte c gelijk aan:

$$c = \alpha U_0 + U_0 \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{S_0}{F^2 \left(\frac{dA}{dH}\right)_0}}$$

terwijl voor het geval van laminaire stroming (zie p.V-10) $\alpha = 1, 2$; substitutie van c en α in de ongelijkheid (77^a) geeft dan, na enige herleiding:

$$F^2 \geq \frac{S_0}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0} \cdot \frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2} \tag{77^b}$$

De ongelijkheid (77^a), c.q. (77^b) geeft nu de noodzakelijke voorwaarde weer voor het ontstaan en bestaan van rolgolven in geval we te maken hebben met een driedimensionale laminaire stromingstoestand in een hellende prismatische leiding met vrije waterpiegel. Voornoemde ongelijkheid (77^a), c.q. (77^b) is volkomen identiek met de resp. vgln.(16) en (17) welke het criterium weergeven voor het ontstaan van instabiliteiten (i.e. golfverschijnselen) van de driedimensionale permanent eenparige laminaire stroming in een hellende prismatische leiding met vrije

waterspiegel, met alleen dit "verschil" dat in de vgl. (16) en (17) de index σ gebruikt is om de permanent eenparige stromingstoestand aan te duiden, en in de vgl. (77^a) en (77^b) om de grootheden in de controle doorsnede aan te geven.

Het (=)teken in de vgl. (77^a) en (77^b) is op te vatten als de voorwaarde voor neutrale stabiliteit van de permanent eenparige stroming, waaruit de laminaire rolgolven zullen of kunnen ontstaan. Trouwens, we hebben al -weliswaar voor tweedimensionale stroming, doch dit zal ook gelden voor driedimensionale stroming- gezien op p.V-56 dat in geval het (=)teken geldig is, het rolgolfprofiel nadert tot een rechte lijn op afstand $H=H_0$ evenwijdig met de leidingbodem, aldus een voorwaarde opleverend voor permanent eenparige stroming.

Volgens Opmerking I.C op p.V-75 stemt deze situatie overeen met een rolgolfpatroon dat een (dimensieloze) golflengte λ' bezit gelijk aan nul.

Als belangrijk resultaat hebben we nu derhalve verkregen, dat de voorwaarde voor rolgolven om, in geval van laminaire stroming, hun uiteindelijk rolgolfpatroon te handhaven, en de voorwaarde voor het ontstaan van instabiliteit van een laminaire permanent eenparige stromingstoestand, aangegeven kunnen worden d.m.v. dezelfde ongelijkheid, dit ondanks het feit dat in de beide te onderscheiden situaties een essentiële verschillende wijze van benaderen en afleiden is gevolgd. M.a.w. we kunnen stellen dat het ontstaan en de vorming van rolgolven in geval van laminaire stroming altijd zal resulteren uit de instabiliteit van de permanent eenparige laminaire stroming in de desbetreffende prisma-tische open leiding.

Een en ander impliceert dat praktisch alles wat in Hoofdstuk IV is opgemerkt en afgeleid t.a.v. het instabiliteitscriterium voor de permanent eenparige laminaire stroming ook van toepassing is op het criterium voor het ontstaan van rolgolven in geval van laminaire stroming, met name waar het de analytische en grafische weergave van de resultaten betreft; waar dus staat "instabiliteitscriterium voor de permanent eenparige laminaire stroming" kan ook gelezen worden "noodzakelijke voorwaarde voor het ontstaan van laminaire rolgolven".

V-F.b Het criterium voor het ontstaan van rolgolven in geval van turbulente stroming.

Voor turbulente stroming met rolgolven is de wrijvings-term nu te schrijven als (ziep.V-23):

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{g(Ac - K_0)^2}{C^2 A^2 R},$$

aan de hand waarvan de ongelijkheid (42^a) met $R = \frac{A}{S}$ oplevert:

$$\left. \frac{d}{dA} \left\{ gA^3 \sin \theta - \frac{gS(Ac - K_0)^2}{C^2} \right\} \right|_{A=R_0} \geq 0;$$

uitwerken hiervan geeft:

$$3gA_0^2 \sin \theta - gC_0^2 \left\{ \frac{\left(\frac{dS}{dA}\right)_0 \cdot (A_0 c - K_0)^2 + 2S_0 c (A_0 c - K_0)}{C_0^4} \right\} + \frac{2gC_0 \left(\frac{dC}{dA}\right)_0 \cdot S_0 (A_0 c - K_0)^2}{C_0^4} \geq 0,$$

wat na eliminatie van K_0 m.b.v. vgl. (37): $K_0 = A_0(c - U_0)$ overgaat in:

$$3gA_0^2 \sin \theta - gC_0^2 \left\{ \frac{R_0^2 U_0^2 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 + 2c S_0 R_0 U_0}{C_0^4} \right\} + \frac{2gC_0 \left(\frac{dC}{dA}\right)_0 \cdot S_0 U_0^2 R_0^2}{C_0^4} \geq 0;$$

in de controle doorsnede moet volgens vgl. (44^b) gelden:

$$g \sin \theta - \frac{gU_0^2}{C_0^2 R_0} = 0; \quad (44^b)$$

eliminieren we met behulp hiervan $g \sin \theta$ uit bovenstaande ongelijkheid, dan levert dit met $R_0 = \frac{A_0}{S_0}$ op:

$$\frac{3gU_0^2 R_0 S_0}{C_0^2} - gC_0^2 \left\{ \frac{R_0^2 U_0^2 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 + 2c S_0 R_0 U_0}{C_0^4} \right\} + \frac{2gC_0 \left(\frac{dC}{dA}\right)_0 \cdot S_0 U_0^2 R_0^2}{C_0^4} \geq 0,$$

wat, aangezien $\frac{gA_0 U_0}{C_0^2} > 0$, te schrijven is als:

$$3U_0 S_0 - R_0 U_0 \left(\frac{dS}{dR}\right)_0 - 2c S_0 + 2 \frac{S_0 U_0 R_0 \left(\frac{dC}{dR}\right)_0}{C_0} \geq 0 ;$$

voor $\left(\frac{dC}{dA}\right)_0$ kunnen we schrijven:

$$\left(\frac{dC}{dA}\right)_0 = \left(\frac{dC}{dR}\right)_0 \left(\frac{dR}{dA}\right)_0,$$

terwijl uit $R_0 = \frac{A_0}{S_0}$ volgt:

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_0 = \frac{1}{S_0} \left\{ 1 - R_0 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 \right\} ;$$

voeren we weer in de vormfactor M, dan volgt uit het bovenstaande dat:

$$\left(\frac{dC}{dA}\right)_0 = \frac{M}{S_0} \left(\frac{dC}{dR}\right)_0,$$

met behulp waarvan bovenstaande ongelijkheid, na deling van linker- en rechterlid door S_0 , overgaat in:

$$U_0 \left\{ 1 - \frac{A_0}{S_0} \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 \right\} - 2(c - U_0) + \frac{2M \cdot U_0 \cdot A_0}{C_0 S_0} \left(\frac{dC}{dR}\right)_0 \geq 0 ;$$

aangezien $R_0 = \frac{A_0}{S_0}$ en $M = 1 - R_0 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0$ is dit te schrijven als:

$$U_0 M - 2(c - U_0) + 2MU_0 \frac{R_0}{C_0} \left(\frac{dC}{dR}\right)_0 \geq 0.$$

Analoog aan hetgeen geschiedt is in Hoofdstuk IV, p. IV-39 zullen we nu weer invoeren een weerstandswet met de algemene gedaante:

$$U_0^a = k \cdot R_0^{1+b} \sin^m \theta,$$

waaruit, ingeval wordt uitgegaan van de wrijvingswet van de Chezy met variabele C-waarde, voor deze wrijvingscoëfficiënt C_0 af te leiden is (zie Hoofdstuk IV, p. IV-40):

$$C_0 = k^{\frac{1}{a}} R_0^{\frac{2(b+1)-a}{2a}} (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{2a}},$$

waaruit weer volgt:

$$\left(\frac{dC}{dR}\right)_0 = \frac{2(1+b)-a}{2a} \cdot k^{\frac{1}{a}} R_0^{\frac{2(b+1)-a}{2a}-1} (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{2a}} ;$$

het is nu zonder meer duidelijk dat de grootheid $\frac{2R_0}{C_0} \left(\frac{dC}{dR}\right)_0$ gelijk wordt aan:

$$\frac{2R_0}{C_0} \left(\frac{dC}{dR}\right)_0 = \frac{2(1+b)-a}{a},$$

substitutie waarvan in bovenstaande ongelijkheid, na enige herleiding oplevert:

$$\frac{(1+b)U_o M}{a(c-U_o)} \geq 1. \tag{78^a}$$

Volgens vgl. (43^a) is de grootheid c gelijk aan:

$$c = \alpha U_o + U_o \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_o}{F^2 \left(\frac{dA}{dH}\right)_o}}$$

terwijl voor het geval van turbulente stroming t.a.v. α geldt (i.e. vgl. (21^a), c.q. vgl. (21)):

$$1,0 \leq \alpha \leq 1,1 \quad \text{oftewel} \quad \alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{z_o}{\rho U_o^2}$$

waarbij α nader gepreciseerd wordt door de vgln. (21^b) en (21^c), al naar gelang wordt uitgegaan van de weerstandswet van de Chezy, resp. van Manning. Substitutie van c in de ongelijkheid (78^a) geeft dan na enige herleiding:

$$F^2 \geq \frac{S_o}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_o} \cdot \frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a}\right) M - (\alpha-1)} \tag{78^b}$$

De ongelijkheid (78^a), c.q. (78^b) geeft nu de noodzakelijke voorwaarde weer voor het ontstaan en bestaan van rolgolven ingeval we te maken hebben met een driedimensionale turbulente stromingstoestand in een hellende prismatische leiding met vrije waterpiegel. Voornoemde ongelijkheid (78^a), c.q. (78^b) is volkomen identiek met de resp. vgln. (22) en (23), welke het criterium weergeven voor het ontstaan van instabiliteiten (i.e. golfverschijnselen) van de driedimensionale permanent eenparige turbulente stroming in een hellende prismatische leiding met vrije waterpiegel, met alleen dit "verschil" dat in de vgln. (22) en (23) de index o gebruikt is om de permanent eenparige stromingstoestand aan te duiden, en in de vgln. (78^a) en (78^b) om de grootheden in de controle doorsnede aan te geven. Het (=)teken in de vgln. (78^a) en (78^b) is op te vatten als de voorwaarde voor neutrale stabiliteit van de permanent eenparige stroming, waaruit de turbulente rolgolven* kunnen ontstaan. Trouwens, we hebben al -weliswaar voor tweedimensionale stroming, doch dit zal ook gelden voor driedimensionale stroming- gezien op p.V-66 dat, ingeval het (=)teken geldig is, het rolgolfprofiel nadert tot een rechte lijn op afstand $H=H_o$ evenwijdig met de leidingbodem, aldus een voorwaarde voor permanent eenparige stroming opleverend.

Volgens Opmerking I.C op p.V-75 stemt deze situatie overeen met een rolgolfpatroon dat een (dimensieloze) golflengte λ' bezit,

* zullen of

gelijk aan nul. Als belangrijk resultaat hebben we nu derhalve verkregen dat de voorwaarde voor rolgolven om, ingeval van turbulente stroming, hun uiteindelijk rolgolfpatroon te handhaven, en de voorwaarde voor het ontstaan van instabiliteit van de turbulente permanent eenparige stromingstoestand, aangegeven kunnen worden d.m.v. dezelfde ongelijkheid; dit ondanks het feit dat in beide te onderscheiden situaties een essentiël verschillende wijze van benaderen en afleiden is gevolgd. M.a.w. we kunnen stellen dat het ontstaan en de vorming van rolgolven in geval van turbulente stroming altijd zal resulteren uit de instabiliteit van de permanent eenparige turbulente stroming in de desbetreffende prismatische open leiding.

Een en ander impliceert dat praktisch alles wat in Hoofdstuk IV is opgemerkt en afgeleid t.a.v. het instabiliteitscriterium voor de permanent eenparige turbulente stroming, ook van toepassing is op het criterium voor het ontstaan van rolgolven in geval van turbulente stroming, met name waar het de analytische en grafische weergave van de resultaten betreft; waar dus staat "instabiliteitscriterium voor de permanent eenparige turbulente stroming" kan ook gelezen worden "noodzakelijke voorwaarde voor het ontstaan van turbulente rolgolven".

In het bijzonder zij hierbij nog het volgende opgemerkt: -in geval van een tweedimensionale turbulente stromingstoestand met uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha=1$) kan voor vgl. (78^b) op geheel analoge wijze als in Hoofdstuk-IV, p.IV-57 geschreven worden:

$$U_0^2 \geq \left(\frac{a}{1+b}\right)^2 \cdot gH_0 \cos \theta,$$

terwijl volgens vgl. (58^a) in de controle doorsnede geldt:

$$H_0 \sin \theta - \frac{U_0^2}{C_0^2} = 0;$$

eliminatie van U_0 m.b.v. deze laatste vgl. uit bovenstaande ongelijkheid geeft:

$$\text{tg } \theta \geq \left(\frac{a}{1+b}\right)^2 \cdot \frac{g}{C_0^2};$$

voor een weerstandswet van het Chezy-type met constante C-waarde geldt (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53):

$$a=2 \quad \text{en} \quad b=0,$$

zodat de ongelijkheid overgaat in:

$$\text{tg } \theta \geq \frac{4g}{C_0^2}$$

wat overeen komt met het resultaat van R.F. Dressler (11), en voor kleine waarden van θ ($\cos \theta \approx 1$) met het resultaat van H.A. Thomas (1) (zie ook Hoofdstuk IV, p.IV-57);

-vgl. (78^a) komt, ingeval de snelheidsverdeling uniform (i.e. $\alpha=1$) en de weerstandswet van het kwadratische type (i.e. $a=2$) is, overeen met het resultaat van A. Craya (16);

-wordt, in geval van een tweedimensionale turbulente stromings-toestand met uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha=1$), uitgegaan van een weerstandswet van het Chezy-type met variabele C-waarde, dan volgt uit hetgeen op p.V-84 vermeld staat, met $a=2$:

$$b = \frac{2H_0}{C_0} \left(\frac{dC}{dH} \right)_0$$

met behulp waarvan de uit vgl. (78^b) afgeleide ongelijkheid overgaat in:

$$U_0 \geq \frac{2\sqrt{gH_0} \cos \theta}{1 + 2 \frac{H_0}{C_0} \left(\frac{dC}{dH} \right)_0}$$

voor kleine waarden van θ stemt dit overeen met het resultaat van J.C. Schönfeld (18) (zie ook Hoofdstuk IV, p.IV-58);

-in een publicatie betreffende de vervorming, het evenwicht en de stabiliteit van lange golven, leidt J.C. Schönfeld (18) nog een voldoende voorwaarde af voor het bestaan van rolgolven, uitgaande van een tweedimensionale stromingstoestand met uniforme snelheidsverdeling, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met variabele C-waarde; hij beschouwt het probleem vanuit het oogpunt van stabiliteit en komt tot de conclusie dat slechts één van de mogelijke rolgolfoplossingen (zoals deze b.v. gegeven zijn door R.F. Dressler (11)) stabiel is, en dat dit dan de rolgolf is die uiteindelijk waargenomen kan worden; de door J.C. Schönfeld gevonden voldoende voorwaarde, is die welke de beschouwde rolgolfoplossing periodiek maakt en eenduidig bepaald; aan de hand van de hier gevolgde werkwijze echter is een dergelijke voldoende voorwaarde voor rolgolfvorming niet af te leiden of te bepalen.

Resumerend kunnen we nu dus het volgende zeggen:

de noodzakelijke voorwaarde voor rolgolven om, in geval van zowel laminaire als turbulente stroming, hun uiteindelijk rolgolfpatroon te behouden, en de voorwaarde voor het ontstaan van instabiliteiten van de laminaire, resp. turbulente permanent een-

parige stromingstoestand, kunnen beide aangegeven worden d.m.v. dezelfde ongelijkheid, dit ondanks het feit dat in beide te onderscheiden situaties een essentiël verschillende wijze van benaderen en afleiden is gevolgd. M.a.w. we kunnen stellen dat het ontstaan en de vorming van rolgolven in geval van laminaire zowel als turbulente stroming, altijd zal resulteren uit de instabiliteit van de permanent eenparige laminaire, resp. turbulente stroming in de desbetreffende prismatische open leiding, (wat ook door diverse auteurs wordt vermeld); hier dient nog aan toegevoegd te worden dat de allereerste aanleiding tot het ontstaan van instabiliteit van de permanent eenparige stroming altijd het gevolg is van een buiten het verschijnsel zelf staande oorzaak (b.v. vallende regendruppels, een onregelmatigheid in de bodem, zie ook Hoofdstuk I, p. I-3).

V-G: Enkele kwantitatieve resultaten.

In het nu volgende deel V-G van dit Hoofdstuk V zullen we aangeven hoe de resultaten uit het voorgaande, met name het gedrag van de golfsnelheid, de golflengte, de golfhoogte en de golfperiode weergegeven kunnen worden.

Allereerst zullen we het gedrag van de golfsnelheid van rolgolven beschouwen wanneer het golfpatroon tenslotte stabiel wordt (deel V-G.a); vervolgens zullen we aangeven hoe de andere karakteristieke (rolgolf-)grootheden grafisch uitgezet kunnen worden, en tenslotte aanduiden hoe de specifieke rolgolfoplossing(en) te bepalen is (zijn).

V-G.a. Door gebruik te maken van de afgeleide relaties voor de progressieve mate van debiet en de gemiddelde stroomsnelheid in de controle doorsnede kan de golfsnelheid bepaald worden.

In geval van een driedimensionale stromingstoestand geldt volgens vgl. (43^a) voor de golfsnelheid in de controle doorsnede:

$$c = \alpha U_0 + U_0 \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_0}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0 F^2}} \quad ; \quad (43^a)$$

voor tweedimensionale stroming is $\frac{S_0}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0} = 1$, zodat voor c te schrijven is:

$$\frac{c}{U_0} - 1 = \alpha - 1 + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \quad ;$$

uit vgl. (37^b) volgt direct:

$$\frac{K_0}{U_0 H_0} = \frac{c}{U_0} - 1,$$

substitutie waarvan in bovenstaande vgl. oplevert:

$$\frac{K_0}{U_0 H_0} = \alpha - 1 + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \quad ;$$

volgens vgl. (50) moet voor de progressieve mate van afvoer (in de controle doorsnede) gelden:

$$\frac{k_0 g \cos \theta}{c^3} = \frac{1}{F^2} \left\{ \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}} \right\}^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}{\alpha - \frac{1}{F^2}} \right\} \quad ,$$

wat ook te schrijven is als:

$$\frac{k_0 g \cos \theta}{c^3} = \frac{1}{F^2} \left\{ \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}} \right\}^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}} \right\} \quad ;$$

we zullen nu invoeren de dimensieloze progressieve mate van afvoer K'_0 , gedefiniëerd als:

$$K'_0 = \frac{k_0 g \cos \theta}{c^3} \quad ;$$

de grootheid $\frac{K_0}{U_0 H_0}$ is met behulp hiervan dan te schrijven als:

$$\frac{K_0}{U_0 H_0} = \frac{c^3}{g U_0 H_0 \cos \theta} \cdot K'_0 \quad ;$$

voeren we nu ook nog de dimensieloze golfsnelheid c' in, gedefiniëerd als:

$$c' = \frac{c}{(g U_0 H_0 \cos \theta)^{\frac{1}{3}}} = \frac{c}{(g q_0 \cos \theta)^{\frac{1}{3}}} \quad ,$$

waarin q_0 de afvoer per eenheid van breedte voor de permanent eenparige stroming is, dan kunnen we tenslotte m.b.v. bovenstaande relaties voor c' schrijven:

$$c' = \left[\alpha - 1 + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot (K'_0)^{-\frac{1}{3}} \quad (79)$$

met

$$K'_0 = \frac{1}{F^2} \left\{ \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}} \right\}^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}} \right\} \quad .$$

Aan de hand van vgl. (79) is de dimensieloze golfsnelheid c' nu uit te drukken als een functie van het Froudegetal F en de correc-

tie coëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal. In geval van laminaire stroming is het Froudegetal F een functie van δ (en c), c.q. δ en Re , althans F is niet op eenvoudige wijze in δ en c uit te drukken (zie p.V-48); nochtans hebben we gezien dat het mogelijk is om voor deze situatie b.v. het verband tussen de (dimensieloze) golflengte λ' en de (dimensieloze) maximale golfhoogte H'_b uit te zetten (zie p.V-74) voor elke toelaatbare waarde van F ; daarom zullen we ook hier F als variabele grootheid aanhouden. Bedenken we nog dat voor laminaire stroming volgens vgl. (15) $\alpha=1,2$, is en dat voldaan moet worden aan ongelijkheid (53^a): $F^2 > \frac{1}{3}$, i.e. $F > \frac{1}{\sqrt{3}}$, dan is het mogelijk om aan de hand van vgl. (79) voor een laminaire stromingstoestand het verband uit te zetten tussen de dimensieloze golfsnelheid c' en het Froudegetal. In geval van turbulente stroming is het Froudegetal F , indien wordt aangenomen dat de stroming beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met constante C -waarde, expliciet uit te drukken als (zie p.V-59):

$$F^2 = \frac{c_0^2 \tan^2 \theta}{g},$$

terwijl voor de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal geschreven kan worden (i.e. vgl. (21^b)):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{E}{c_0^2}$$

Indien nu voldaan wordt aan de ongelijkheid (65^a):

$$F^2 > \frac{4}{9-8\alpha},$$

volgt uit het bovenstaande dat het mogelijk is om aan de hand van vgl. (79) voor een turbulente stromingstoestand het verband uit te zetten tussen de dimensieloze golfsnelheid c' en het Froudegetal F , met de correctiecoëfficiënt α als parameter.

In fig. V-10 is nu op grond van het bovenstaande aan de hand van vgl. (79) de relatie uitgezet tussen de dimensieloze golfsnelheid c' en het Froudegetal F met de correctiecoëfficiënt α als parameter, en wel voor $\alpha=1,2$ (i.e. laminaire stroming) en $\alpha=1,00$, $\alpha=1,02$, $\alpha=1,05$ en $\alpha=1,10$ (welke waarden van α voor turbulente stroming als kenmerkend worden beschouwd), uit welke fig.V-10 het gedrag van c' is af te lezen voor zowel laminaire als turbulente stroming.

V-G.b1. In Opmerking I.A (zie p.V-74) hebben we reeds gezien dat vgl. (75) voor het geval van tweedimensionale laminaire stroming met rolgolven, onafhankelijk is van de golfsnelheid c , indien het

Froudegetal als parameter wordt beschouwd. Derhalve is het mogelijk om uitgaande van vgl. (75) voor een waarde van $\alpha=1,2$ -welke geldt voor laminaire stroming- de (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' uit te zetten, tegen de (dimensieloze) golflengte λ' , met als parameter het Froudegetal F ; volgens vgl. (53^a) moet voldaan worden aan de noodzakelijke voorwaarde voor laminaire rolgolfvorming:

$$F^2 > \frac{1}{3} \quad \text{i.e.} \quad F > \frac{1}{\sqrt{3}} ;$$

in een H_b', λ' -diagram ontstaan dus een aantal krommen waarvan elke kromme voor zekere constante waarde van F het verband aangeeft tussen H_b' en λ' .

V-G.b2. In Opmerking I.B (zie p.V-74) hebben we reeds gezien dat vgl. (76), voor het geval van tweedimensionale turbulente stroming met rolgolven (beheerst door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt), onafhankelijk is van de golflengte c . Derhalve is het mogelijk om uitgaande van vgl. (76) voor de resp. waarden van $\alpha=1,00$, $\alpha=1,02$, $\alpha=1,05$ en $\alpha=1,10$ -welke als kenmerkend beschouwd kunnen worden voor turbulente stroming- de (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' uit te zetten tegen de (dimensieloze) golflengte λ' met als parameter het Froudegetal F ;

Volgens vgl. (65^a) moet voldaan worden aan de noodzakelijke voorwaarde voor turbulente rolgolfvorming:

$$F^2 > \frac{4}{9-3\alpha} ,$$

waarin de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal gegeven wordt door vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{E}{C_0^2} ;$$

in een H_b', λ' -diagram ontstaan dus voor elk van de vier genoemde waarden van α een aantal krommen, waarvan elke kromme weer voor zekere constante waarde van F het verband aangeeft tussen H_b' en λ' .

In Opmerking I.C op p.V-75 is aangegeven dat -zowel voor laminaire stroming met rolgolven als voor turbulente stroming met rolgolven- de (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' nadert tot $\frac{gH_0 \cos \theta}{C^2}$ (i.e. voor de resp. waarden van α en F te bepalen aan de hand van vgl. (49)) indien de (dimensieloze) golflengte λ' nadert tot nul, en dat de (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' een bovenste extreme waarde bereikt (i.e. te bepalen voor $H_F = H_A$),

indien λ' nadert tot oneindig.

V-G.c. Is op de in het bovenstaande deel V-G.b aangegeven wijze eenmaal het verband tussen H'_b en λ' voor de desbetreffende waarden van α en F bepaald, dan is het mogelijk om voor dezelfde combinaties van α en F de relatie tussen de (dimensieloze) werkelijke hoogte van de discontinuïteit $\Delta H'_s$ en de (dimensieloze) golflengte λ' uit te zetten in een $\Delta H'_s, \lambda'$ -diagram en wel volgens de in Opmerking II op p.V-75 aangegeven methode.

V-G.d. Omdat uit deel V-G.b zowel voor laminaire als turbulente stroming met rolgolven voor de desbetreffende combinaties van α en F , het verband tussen H'_b en λ' bekend is, terwijl volgens vgl. (74^a) de (dimensieloze) minimale golfhoogte H'_{f1} (voor dezelfde combinaties van α en F) uit te drukken is in H'_b , is het mogelijk om m.b.v. de in Opmerking III op p.V-75 afgeleide relatie het verband tussen de (dimensieloze) golflengte λ' en de verhouding tussen de (dimensieloze) mate van energiedissipatie en λ' , uit te zetten in een $\frac{v}{\lambda'}, \lambda'$ -diagram, wederom voor de genoemde waarden van α , met het Froudegetal F als parameter.

V-G.e. Als de gemiddelde afvoer Z voorbij een vast punt bekend is, en het fysisch model vastligt, d.w.z. de leidinghelling i en de wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy (deze laatste alleen in geval van turbulente stroming) gegeven zijn, dan is het mogelijk om op de manier zoals aangegeven in Opmerking IV van deel V-E, de grenswaarden te bepalen waartussen de golfsnelheid c moet liggen, en dit zowel voor laminaire als turbulente stroming met rolgolven.

Indien de golfsnelheid nu vastligt of voorgeschreven is en het fysisch model gegeven is, dan is uit het voorgaande zonder meer duidelijk dat we zowel voor laminaire als turbulente stroming met rolgolven -omdat F en α dan volledig bekend zijn- een één-parameterfamilie van periodieke rolgolfoplossingen t.o.v. de golflengte λ hebben. Als ook λ nu nog voorgeschreven is, dan is de rolgolfoplossing uniek en eenduidig te bepalen.

In het voorgaande is beschreven hoe, zowel voor laminaire stroming met rolgolven als voor turbulente stroming met rolgolven, resp. voor elk van de genoemde waarden van α het verband uit te zetten is tussen de (dimensieloze) maximale golfhoogte H'_b en de (dimensieloze) golflengte λ' met het Froudegetal F als parameter, tussen de (dimensieloze) werkelijke hoogte van de discontinuïteit $\Delta H'_s$ en λ' met F als parameter, en tussen het quotiënt

van de (dimensieloze) mate van energiedissipatie F' en λ' , i.e. P/λ' , en λ' met F als parameter, en hoe het vervolgens mogelijk is om aan de hand van deze relaties, indien het fysisch model (i.e. θ en C) vastligt en de golfsnelheid c (willekeurig) gegeven is -omdat F zowel als α dan zekere constante waarden bezitten- een éénparameterfamilie van mogelijke rolgolfoplossingen af te leiden; als parameter fungeert dan de golflengte λ : is ook λ nu nog bekend of voorgeschreven, dan is de rolgolfoplossing enig. De in het bovenstaande aangegeven en af te leiden grafische relaties tussen de desbetreffende (dimensieloze) grootheden, en de daaruit (mogelijkerwijs) resulterende rolgolfoplossing(-en) zijn niet bepaald i.v.m. de grote hoeveelheid numeriek rekenwerk waarmede dit gepaard gaat.

V-G.f. Het zou buitengewoon praktisch zijn, indien het mogelijk was om, zowel voor laminaire als turbulente stroming met rolgolven, voor elk van de voor α genoemde waarden het verband uit te drukken tussen de (dimensieloze) golflengte λ' en het Froudegetal F , tussen de (dimensieloze) maximale golphiogte H_b' en F , en daaruit volgende ook tussen de (dimensieloze) golfperiode $T' = \lambda'/c'$ en F ; de grootheden van het fysisch model zijn (althans voor turbulente stroming) verdisconteerd in het Froudegetal F en de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal, en bij een gegeven fysisch model zou de uiteindelijke rolgolfoplossing dan alleen nog maar afhankelijk zijn van de "keuze" van de golfsnelheid c . Het is niet moeilijk om in te zien dat een en ander van het bovenstaande alleen maar mogelijk is indien nog een voldoende voorwaarde voor het bestaan van rolgolven bekend is, b.v. de verhouding tussen de minimale en de maximale golphiogte:

$$\frac{H_f}{H_b} = \beta,$$

waarin β een constante of een functie van F is; in ieder geval geldt:

$$\beta \lesssim 1;$$

het (=)teken geeft de permanent eenparige stromingstoestand weer. (Een dergelijke voldoende voorwaarde voor het bestaan van rolgolven is b.v. door J.C. Schönfeld (18) uit een stabiliteitsbeschouwing afgeleid, uitgaande van een tweedimensionale turbulente stromingstoestand welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type). Volgens vgl. (74^a) geldt voor H_f :

$$H_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g \cos \theta} \cdot \left\{ F \left(\frac{g H_b \cos \theta}{c^2} \right) - \frac{g H_b \cos \theta}{c^2} \right\},$$

wat met (zie p.V-71 c.q. p.V-73):

$$H_b' = \frac{g H_b \cos \theta}{c^2},$$

te schrijven is als:

$$H_f \frac{g \cos \theta}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ F(H_b') - H_b' \right\};$$

eliminatie hieruit van H_f m.b.v. $H_f = \rho H_b$, i.e. de (aangenomen) voldoende voorwaarde voor het bestaan van rolgolven, levert dan tenslotte op:

$$\rho H_b' = \frac{1}{2} \cdot \left\{ F(H_b') - H_b' \right\},$$

oftewel:

$$(2\rho + 1) H_b' = F(H_b'),$$

waarin (zie p.V-71 c.q. p.V-73):

$$F(H_b') = \left[(H_b')^2 + \frac{8(F-1)^2}{F^6} \left\{ (F-1)(F+1-2\alpha) - (\alpha-1) \right\}^2 \cdot \frac{1}{H_b'} \right]^{\frac{1}{2}}$$

en

$$F = \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}$$

Omdat ρ hetzij een constante, hetzij een functie van F is, kan m.b.v. bovenstaande vgl. H_b' bepaald worden als functie van F en α ; derhalve is -indien ρ bekend is- in een H_b', F -diagram de (dimensieloze) maximale golfhoogte H_b' uit te zetten tegen het Froudegetal F , zowel voor laminaire stroming met rolgolven (i.e. $\alpha=1,2$) als voor turbulente stroming met rolgolven (i.e. $\alpha=1,00$, $\alpha=1,02$, $\alpha=1,05$ en $\alpha=1,10$).

Is H_b' nu voor de desbetreffende hiervoor genoemde waarden van α , als functie van F bekend, dan is in een λ', F -diagram ook de (dimensieloze) golflengte λ' uit te zetten tegen het Froudegetal, zowel voor laminaire stroming met rolgolven (i.e. $\alpha=1,2$, en uitgaande van vgl. (75)) als voor turbulente stroming met rolgolven (i.e. $\alpha=1,00$, resp. $102 \cdot 10^{-2}$, $105 \cdot 10^{-2}$ en $110 \cdot 10^{-2}$ en uitgaande van vgl. (76)). Voor beide stromingswijzen (laminair en turbulent) zijn F en α als zodanig te beschouwen als grootheden gegeven door het fysische model.

Omdat λ' nu voor beide stromingswijzen als functie van F (en α) bekend is, en ook de (dimensieloze) golfsnelheid c' bekend is als functie van F (en α) kan de (dimensieloze) golfperiode T'

bepaald worden uit:

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

eveneens als functie van F (en α).

N.B.

Wordt in het voorgaande, voor het geval van turbulente stroming met rolgolven, gesproken over het uitzetten van zekere karakteristieke (rolgolf-)grootheid als functie van een andere (karakteristieke rolgolf-) grootheid, voor zekere waarde van α , dan moeten we bedenken dat daarmee, op grond van vgl. (21^b) de wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy vastligt, en het Froudegetal F dan alleen nog maar een maat is voor de leidinghelling θ . Nochtans is deze wijze van uitzetten gekozen, omdat dan een vergelijking mogelijk is met het geval van laminaire stroming met rolgolven.

De waarde $\alpha=1$ is op te vatten als een α -waarde voor zeer grote C .

V-H: Enkele opmerkingen.

Tot slot zullen we in het onderhavige deel V-H van dit Hoofdstuk V. nog enkele min of meer los staande opmerkingen maken, welke als zodanig betrekking hebben op het voorgaande, c.q. als aanvulling daarop fungeren, ofwel problemen aanduiden welke niet ter sprake zijn gekomen en toch hiermede verband houden.

I- In het voorgaande hebben we gezien dat er zowel voor tweedimensionale laminaire als voor tweedimensionale turbulente stroming met rolgolven een éénparameterfamilie van mogelijke rolgolfoplossingen bestaat, indien het fysische model (i.e. de leidinghelling θ en in geval van turbulente stroming de wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy) vastligt en de voortplantingssnelheid c van de golf (willekeurig) gegeven is; als parameter kan genomen worden de golflengte λ , i.e. de afstand tussen twee opeenvolgende bores of schokken. Als ook deze parameter vastligt of voorgeschreven is, dan is de rolgolfoplossing eenduidig bepaald. Het is niet moeilijk in te zien dat er ook een specifieke rolgolfoplossing gefixeerd zal zijn, als de golfperiode vastligt, tezamen met een andere parameter, b.v. de gemiddelde mate van afvoer (zie Opmerking IV, p.V-76). Het is wellicht in deze zin dat in sommige gevallen de rolgolven qua vorm en patroon definitief bepaald zijn. B.v. in het geval van een reservoir met overlaat en steile afvoerleiding ligt de gemiddelde afvoer (binnen een zeker tijdsbestek) vast: de rolgolven in de steile afvoerleiding wor-

den dan wellicht eenduidig bepaald gemaakt door de (regelmatige) periode van de oppervlaktegolven aan de kruin van de overlaat, welke oppervlakte golven afkomstig zijn uit het reservoir, veroorzaakt worden door b.v. de wind en in deze vorm fungeren als aanvangspuls voor de rolgolfvorming.

Ten aanzien hiervan merkt H.A. Thomas (1) het volgende op: als de lopende golven in de leiding eenmaal hun evenwichtsvorm en -snelheid bereikt hebben, is de golfhoogte onafhankelijk van de hoogte van de oorspronkelijke windgolven en hangt alleen nog maar af van de tijdperiode van de laatste; de lopende golven bereiken sneller hun evenwichtstoestand als de windgolven in het reservoir hoger zijn, m.a.w. als de aanvangspuls sterker is; zijn de windgolven regelmatig en lopen ze regelrecht de leiding in dan is het resulterende rolgolfpatroon periodiek permanent; zijn de windgolven onregelmatig van vorm en verward, dan zal er eerst een rolgolfpatroon ontstaan dat overeenkomst vertoont met de in Hoofdstuk I genoemde "natuurlijke rolgolven", en alleen indien de leiding zeer lang is zal het rolgolfpatroon periodiek permanent worden; bij een zeer steile leiding, dus als de permanent eenparige stroming buitengewoon sterk instabiel is, is slechts een zeer zwakke initiële verstoring nodig.

J.C. Schönfeld (18) beschouwt het probleem vanuit het oogpunt van stabiliteit en komt tot de conclusie dat slechts één van de in het voorgaande genoemde mogelijke rolgolfoplossingen stabiel zal zijn, en dat dit dan het rolgolfpatroon is, dat waargenomen zal worden.

Alhoewel samengesteld uit stabiele elementen is het volledige stromingsprofiel dus niet eenduidig bepaald door de leidinghelling, de bodemruwheid en de afvoer, maar zullen het aantal, de hoogte en de snelheid van de golven wellicht ook variëren met de frequentie van de aanvangsverstoring (i.e. een buiten het fenomeen zelf gelegen oorzaak) en de lengte van de leiding.

II.a- De werkelijke golfhoogte aan de frontzijde (i.e. voorzijde) van de golf zal altijd kleiner zijn dan de maximale golfhoogte H_0 zoals deze op de in het voorgaande aangegeven wijze te berekenen is, aangezien de berekende golfprofielen "scherpe" golftoppen hebben t.g.v. het als discontinuïteit beschouwde schokfront, terwijl de werkelijke golftoppen meer rond zullen zijn, wat wellicht te verklaren is uit de aanwezigheid van capillaire effecten en het bestaan van vorticiteiten aan de voorzijde van de golf.

II.b- In dit verband zij tevens opgemerkt dat t.g.v. de keuze van het assenkruis en de gevolgde toepassing van de schokvoorwaarden het schokfront loodrecht op de leidingbodem staat, wat, zo blijkt o.a. uit waarnemingen van V. Cornish (2), in werkelijkheid geenszins het geval is; de schok zal n.l. een zekere dikte L in longitudinale richting hebben, met name er uitzien zoals aangegeven in fig.V-5. Op p.V-34 van dit Hoofdstuk V is aangegeven dat voor deze situatie de wet van behoud van impuls geschreven kan worden als:

$$\rho g \cos \theta \left\{ A_0 (H_0 - H_{0\text{centr}}) - A_1 (H_1 - H_{1\text{centr}}) \right\} + \frac{G \sin \theta - \tau L}{\rho} \rho = \\ = \rho A_1 U_1 (\alpha U_1 - c) - \rho A_0 U_0 (\alpha U_0 - c);$$

is de stromingstoestand tweedimensionaal, geven we de maximale en de minimale golfhoogte weer aan d.m.v. de index b, resp. f, en onderstellen we dat de correctiecoëfficiënt α over de schok varieert, dan is niet moeilijk in te zien dat bovenstaande vgl. overgaat in:

$$\frac{1}{2} g \cos \theta (H_b^2 - H_f^2) + \frac{G \sin \theta - \tau L}{\rho} = U_f H_f (\alpha_f U_f - c) - U_b H_b (\alpha_b U_b - c).$$

II.b1- Het effect van de niet-uniforme snelheidsverdeling is nu in te zien door uit deze vgl. de golfsnelheid c, m.b.v. vgl. (37^b), te elimineren, wat na enige herleiding oplevert:

$$\frac{1}{2} g \cos \theta (H_b^2 - H_f^2) + \frac{G \sin \theta - \tau L}{\rho} = K_0 (U_b - U_f) + (\alpha_f - 1) U_f^2 H_f - (\alpha_b - 1) U_b^2 H_b.$$

In geval van een uniforme snelheidsverdeling is $\alpha=1$, voor elke andere snelheidsverdeling is $\alpha > 1$; het effect van de niet uniforme snelheidsverdeling in het golfdal (i.e. α_f) is een vermeerdering van het linkerlid van bovenstaande vgl., resulterend in een toename van de verhouding H_b/H_f ; het effect van de niet uniforme snelheidsverdeling in de golftop (i.e. α_b) is een vermindering van het linkerlid van bovenstaande vgl., resulterend in een afname van de verhouding H_b/H_f . Het is niet moeilijk in te zien dat t.o.v. het met constante snelheid c meebewegende coördinatenstelsel $U_b > U_f$ is; nu is in geval van turbulente stroming $\alpha_b > \alpha_f$, zodat we het volgende kunnen zeggen: als $\alpha_b > \alpha_f$, dan neemt het rechterlid van bovenstaande vgl. af t.o.v. de waarde voor $\alpha_b = \alpha_f = 1$, wat resulteert in een afname van de verhouding H_b/H_f , m.a.w.

we kunnen stellen dat de schokvoorwaarde gevoeliger is voor een verandering in α_b dan voor een verandering in α_f (hieraan zij nog toegevoegd dat in geval van turbulente stroming $\alpha_b \neq \alpha_f$ is, alleen indien gewerkt wordt met een variabele C-waarde).

II.b2- Op geheel analoge wijze is in te zien dat het effect van de schuifspanning $\bar{\tau}$ de verhouding H_b/H_f doet toenemen.

II.c1- Wat we bij de afleiding van de schokvoorwaarden in deel V-C van dit Hoofdstuk V, zowel in geval van laminaire stroming, als in geval van turbulente stroming, feitelijk gedaan hebben, is het volgende: we hebben aangenomen dat het gecombineerde effect van de niet-hydrostatische drukverdeling, de niet uniforme snelheidsverdeling, de schuifspanning en het schokgewicht, verwaarloosbaar klein is.

II.c2- De theorie van de periodieke permanente rolgolven is in het voorgaande opgebouwd vanuit de z.g. eerste orde ondiepwatertheorie, welke o.a. gekenmerkt wordt door de volgende eigenschap: de dominerende beweging vindt plaats in de x-richting, waaruit een hydrostatische drukverdeling volgt en een verwaarlozing van de verticale versnellingen. Worden de verticale versnellingen (dus ook de kromming van het oppervlak) niet verwaarloosd, dan zijn de toe te voegen termen te bepalen, waaruit de z.g. tweede orde theorie volgt (zie hiervoor b.v. (7)). Hier is gebruik gemaakt van de eerste orde theorie voor dat gedeelte van het golfprofiel, dat omhoog concaaf gekromd is. T.o.v. een met constante snelheid c meebegend coördinatenstelsel, bewegen de waterdeeltjes zich door de schok vanuit het golfdal ($H=H_f$) naar de golftop ($H=H_b$), tengevolge waarvan we ter plaatse een versnelling moeten hebben loodrecht gericht op de leidingbodem; deze beweging loodrecht op de leidingbodem beperkt zich tot het gebied binnen de schokdikte L , tenminste voor stationaire schokken in geval van permanente stroming (i.e. watersprongen); is dit ook het geval bij rolgolven, dan is de druk ter plaatse van de golftop $H=H_b$ hydrostatisch en voornoemde eerste orde theorie juist; indien de schoklengten nu vergelijkbaar zijn met de lengten van watersprongen (waar een hydrostatische druk is aangenomen om de relatie H_f/H_b te bepalen), dan zijn de verticale versnellingen waarschijnlijk te verwaarlozen en is de druk hydrostatisch.

II.d- De vorm van de wrijvingsterm, zoals deze is toegepast, is geheel analoog gekozen aan die voor het geval van permanent eenparige stroming, aangezien er geen alternatief is. Wellicht is de wrijvingsterm in deze gedaante nu, niet helemaal geldig ter

plaatse van de golftop, omdat het snelheidsprofiel daar niet volledig ontwikkeld is; het effect van de snel expanderende stroming in de schok is mogelijksterwijs nog niet uitgedempt, zodat de schuifspanning τ ter plaatse van de golftop misschien anders is dan aangenomen.

II.e- Teneinde in geval van turbulente stroming met rolgolven analytische oplossing van de afgeleide profielvgl. mogelijk te maken, is een constante waarde voor de wrijvingscoëfficiënt C aangenomen, gebaseerd op de waarde in de controle doorsnede. Indien nu een variabele C-waarde wordt aangenomen en de hydraulische straal R wordt ingevoerd om de invloed van de zijwanden te verdisconteren, dan is alleen numerieke integratie nog mogelijk. Het effect van een en ander nu is hier niet nagegaan.

III- T.a.v. de z.g. "natuurlijke rolgolven" zoals deze zijn gedefiniëerd en aangeduid in Hoofdstuk I, zullen we het volgende opmerken.

Rolgolven zijn in feite z.g. ondiepwatergolven, en derhalve kan verwacht worden dat golven met een grotere maximale golfhoogte H_b , een grotere golfsnelheid c zullen bezitten, en dientengevolge kleinere, i.e. langzamer golven zullen inhalen en opnemen. Ook golven met een grotere maximale golfhoogte H_b dan achteropkomende golven, kunnen worden ingehaald en opgenomen; dit is in te zien aan de hand van de hierna af te leiden relatie voor de golfsnelheid. Volgens vgl. (72) geldt voor het verband tussen de maximale en de minimale golfhoogte (bij een schokdikte gelijk aan nul):

$$\frac{2K_o^2}{H_b H_f} = g \cos \delta \cdot (H_b + H_f); \tag{72}$$

eliminatie hieruit van K_o , de progressieve mate van debiet, m.b.v. vgl. (37^b):

$$K_o = H_f (c - U_f),$$

levert na enige herleiding, voor de golfsnelheid c op:

$$c = U_f + \sqrt{g H_b \cos \delta \frac{H_b + H_f}{2 H_f}},$$

wat voor $\delta \approx 0$ een bekende formule is voor de golfsnelheid van ondiepwatergolven. Bovenstaande uitdrukking voor c is na enige herleiding ook nog te schrijven als:

$$\frac{H_b}{H_f} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{8(c-U_f)^2}{gH_f \cos \theta}} - 1 \right\},$$

wat voor $c=0$ en $\theta \approx 0$ een bekende uitdrukking oplevert voor de (stationaire) watersprong in een horizontale leiding: de schok is dus te beschouwen als een bewegende watersprong.

Keren we nu terug tot de hierboven voor c afgeleide relatie:

U_f is de gemiddelde snelheid in het gebied waar het wateroppervlak min of meer evenwijdig is met de leidingbodem, zodat U_f beschouwd kan worden als een functie van $(gH_f)^{\frac{1}{2}}$. Beschouwen we nu twee golven met dezelfde waarde voor H_f , dan volgt uit de relatie voor c dat de golf met de grootste waarde voor H_b sneller loopt; hebben we twee golven met dezelfde waarde voor H_b , dan bezit de golf met de grootste waarde voor H_f een grotere golfsnelheid c , indien het verschil in H_f voldoende groot is. Derhalve kan een achteroplopende golf een andere voorgaande golf met een grotere waarde voor H_b opnemen, als de waarde H_f van de opnemende golf groter is dan die van de opgenomen golf. De achteroplopende golf versnelt als hij overneemt en de snelheid van de gecombineerde golf is groter dan die van de leidende golf tijdens het overnemen; deze versnelling is te verklaren als volgt: de achteroplopende golf plant zich voort in water dat continu dieper wordt, en derhalve zal U_f toenemen; direct na de combinatie neemt U_f af, omdat de waarde H_f van de gecombineerde golf aanzienlijk kleiner is dan die van de overnemende golf vlak vóór de combinatie, en de gecombineerde golfsnelheid is kleiner dan die van de volgende golf vlak voor de combinatie (zie o.a. V. Cornish (2)).

IV- De invloed van de viscositeit op de kenmerkende eigenschappen van rolgolven in geval van laminaire stroming, is indirect ingevoerd d.m.v. het Froudegetal F (zie p.V-48); omdat -zoals aangetoond is- alle dimensieloze grootheden betreffende rolgolven functies zijn van het Froudegetal F . Hier staat tegenover dat de kenmerkende eigenschappen van rolgolven in geval van turbulente stroming niet beïnvloed worden door de viscositeit voor zover gebruik wordt gemaakt van de weerstandswet van de Chezy, en de wrijvingscoëfficiënt C hierin als onafhankelijk van de viscositeit wordt aangenomen; in werkelijkheid echter zal de invloed van de viscositeit in meerdere of mindere mate aanwezig zijn, indien de leidingbodem b.v. hydraulisch glad is.

V- In dit Hoofdstuk V is alleen gesproken over de rolgolfoplossingen voor het geval van tweedimensionale stroming, terwijl in Hoofdstuk IV het instabiliteitscriterium in meer algemene zin is bepaald, en wel in geval van driedimensionale permanent eenparige stroming.

Er schijnen geen redenen aanwezig te zijn waarom de in Hoofdstuk IV behandelde instabiliteit van de permanent eenparige stroming geen aanleiding zou geven tot het ontstaan van rolgolven indien de bodem van de leiding niet vlak is maar b.v. een gekromde doorsnede heeft, zolang als de leiding maar prismatisch is. Indien de bodem echter sterk onregelmatig is, zullen de golven welke op voornoemde wijze opgewekt worden in dwarse richting worden afgebogen, en zullen hun snelheden in onregelmatige intervallen veranderen door de uitsteeksels van de bodem. Derhalve zullen deze aldus opgewekte golven alleen maar een bijdrage leveren aan de algemene aanwezigheid van een min of meer verward golfpatroon aan de oppervlakte, zonder uiteindelijk enige karakteristieke rolgolf te produceren. Het is wellicht om deze reden dat een regelmatig rolgolfpatroon over het algemeen niet waargenomen wordt in wildstromende bergbeken.

VI- In Hoofdstuk I (zie p.I-2) is reeds opgemerkt dat de instabiele verstoringgolven van de permanent eenparige stroming niet onbeperkt zullen blijven aangroeien in de tijd, maar uiteindelijk zullen reduceren tot rolgolven met een bepaald periodiek rolgolfpatroon en een van de oorzaken gaan vormen van een begin van luchtopneming. Met betrekking tot het alleen daar ter plaatse aangeduide probleem van luchtopneming zullen we in het navolgende enkele korte opmerkingen maken. De aan te geven literatuur behoeft geenszins representatief geacht te worden, maar is meer genoemd ter oriëntatie en om een indruk te geven.

Algemeen geldt dat bij (turbulente) stroming onder grote verhangen lucht in het water wordt opgenomen, ten gevolge waarvan de inwendige wrijving van de vloeistof steeds minder bepaald zal gaan worden door de bodem- en vooral de wandruwheid. De luchtopneming geeft energievernietiging, en als oorzaken ervan kunnen genoemd worden de kleine oppervlaktegolven t.g.v. de wrijving tussen wind en water, resp. t.g.v. de instabiliteit van de desbetreffende stroming, de sterke turbulentie en de wandruwheid (de luchtopneming begint gewoonlijk aan de zijkanten en wel bovenaan). T.a.v. het hierboven aangegeven fenomeen bestaan vele nogal verspreide publicaties; enerzijds worden hierin pogingen gedaan

om als stromingskarakteristiek de "mate van luchtopneming" in te voeren -dit is echter een niet te definiëren grootheid, omdat het "oppervlak" van de stroming niet te definiëren is, en de hoeveelheid lucht in het water niet overal in de doorsnede van de stroming gelijk is-, anderzijds (zie (33)) wordt voorgesteld om de snelheid in te voeren, waarbij het opnemen van lucht begint. Voor ontwerpwerk leveren de aldus afgeleide formules geen aanknopingspunt op, zodat nog gewerkt moet worden met de formules van C.G.J. Vreedenburg (34) uit 1924, herzien door J. Hilgen (35) in 1937, welke voor gangbare hellingen schattingen geven voor de afmetingen van het profiel, welke redelijk in overeenstemming zijn met metingen.

E.W. Lane (36) vond bij metingen en experimenten in 1936 o.a. dat t.g.v. de luchtopneming de stroomsnelheden groter zijn dan volgt uit de berekening met de gebruikelijke formules; tevens beschrijft hij nog enkele secundaire effecten van de stroming in steile leidingen, zoals het verschijnsel dat er dwarsgolven zullen ontstaan t.g.v. korte horizontale bogen en abrupte vernauwingen. Met betrekking tot dit laatste zij o.a. verwezen naar de publicaties genoemd onder (37) en (38).

Resumé

Uitgaande van de niet-lineaire partiële differentiaalvgn. van de z.g. "ondiepwater theorie", waaraan een wrijvingsterm voor laminaire, resp. turbulente stroming is toegevoegd, alsmede een correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal, is een beschouwing gegeven betreffende enkele kenmerkende eigenschappen van periodieke permanente rolgolven in geval van tweedimensionale stroming, bij de behandeling waarvan als basis de studies van H.A. Thomas en R.F. Dressler zijn gebruikt. Aangevoerd is dat de oplossing alleen maar periodiek gemaakt kan worden door gedeelten van een continue oplossing d.m.v. "schokken" aan elkaar te schakelen, terwijl tevens is aangegeven hoe de specifieke (discontinue) rolgolfoplossing bepaald kan worden, dat deze fundamenteel afhangt van het begrip "critieke snelheid", oftewel het bestaan van een z.g. "controle doorsnede", en welke gedaante deze oplossing uiteindelijk krijgt. Er blijkt dat de verhouding tussen de golfhogte en de golflengte altijd onafhankelijk is van de voortplantingssnelheid van de golven. Indien de waarden van de leidinghelling, de bodemwrijving (alleen in geval van turbulente stroming) en de golfsnelheid voorgeschreven zijn, bestaat

er een éénparameterfamilie van mogelijke rolgolfoplossingen. Is ook de golflengte nog voorgeschreven, dan is de oplossing uniek. Aangetoond is dat de noodzakelijke voorwaarde voor rolgolfvorming analoog is met het instabiliteitscriterium voor de permanent eenparige stroming.

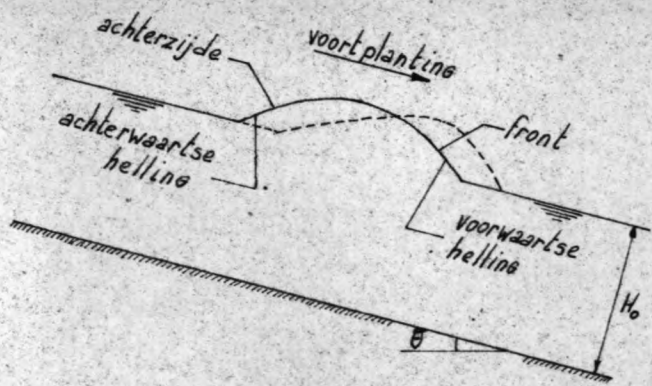


Fig. I-1.a.

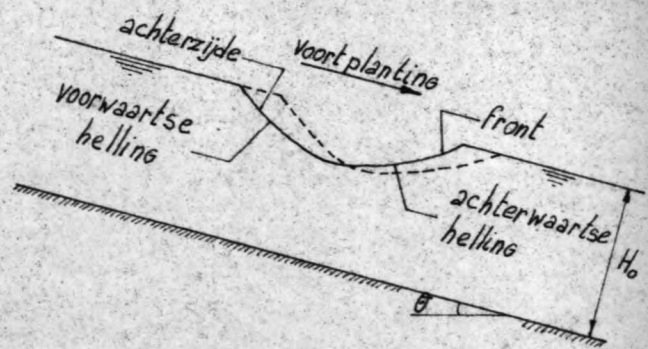


Fig. I-1.b.

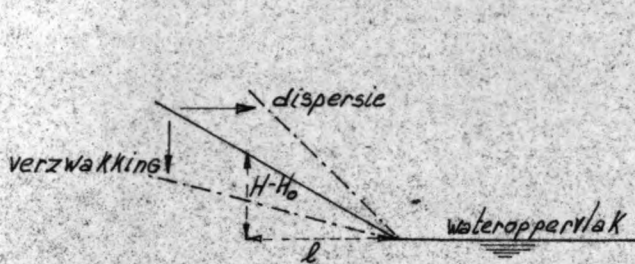


Fig. I-2.a.

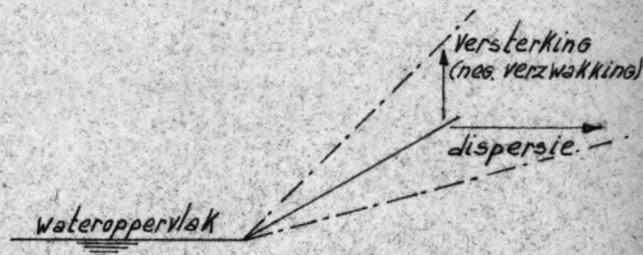


Fig. I-2.b.

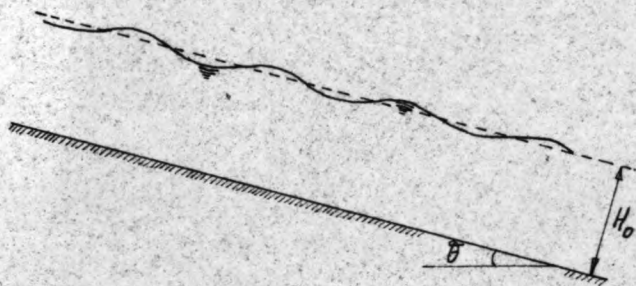


Fig. I-3.a.

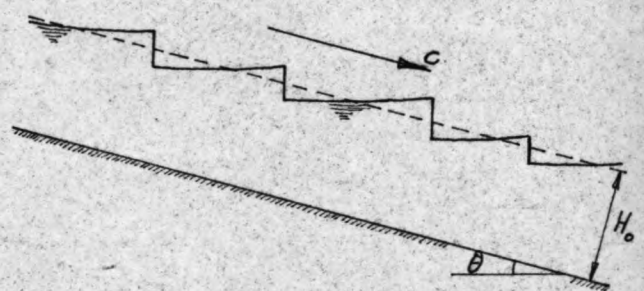


Fig. I-3.b.

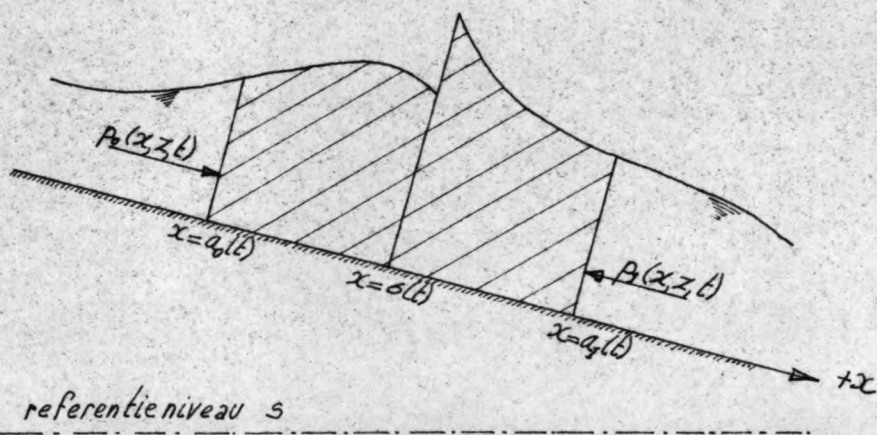


Fig. I-4.

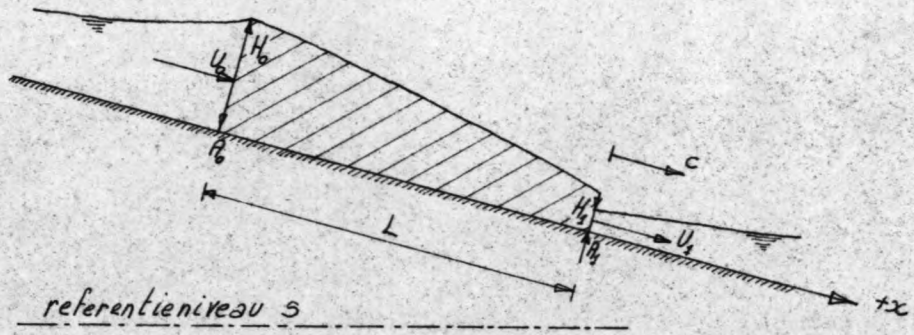


Fig. V-5.

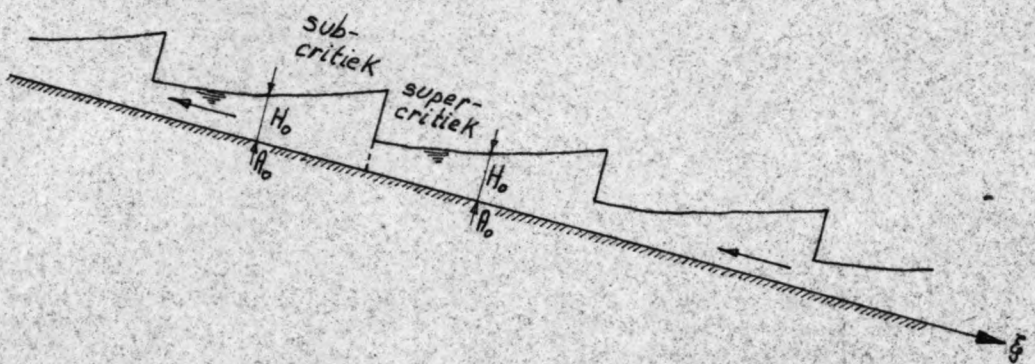


Fig. V-6.

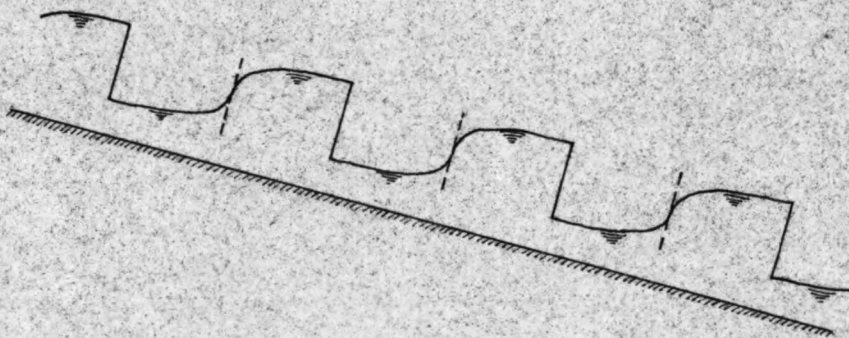


Fig. V-7.

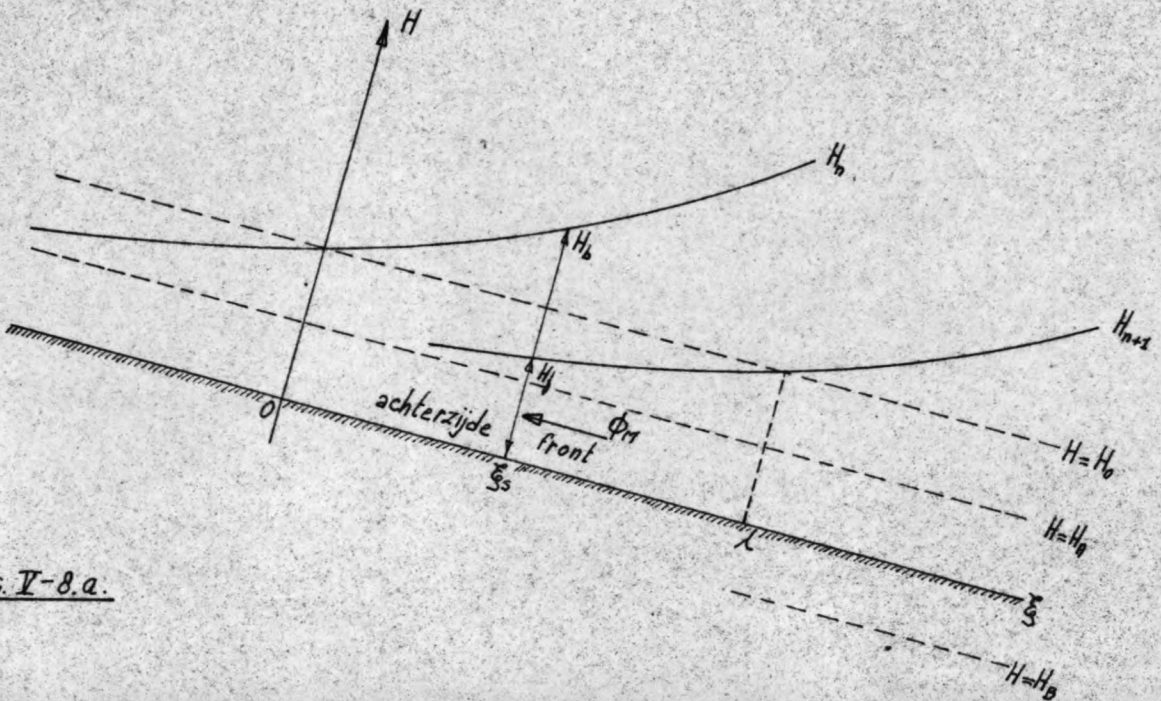


Fig. V-8.a.

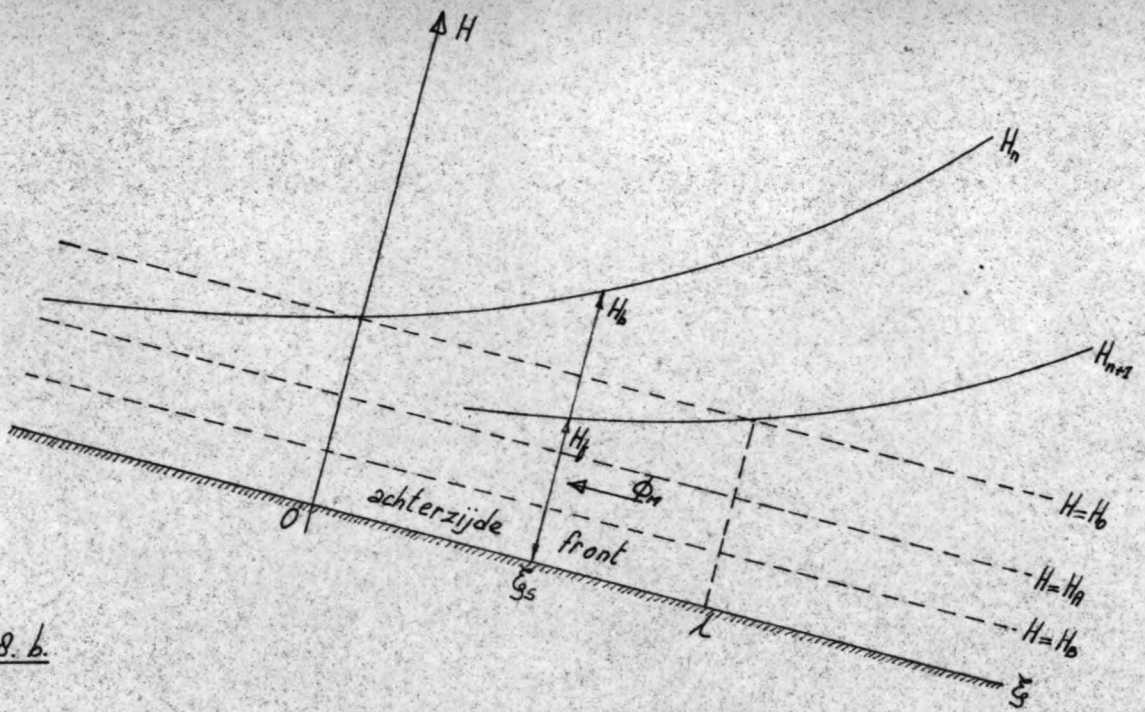


Fig. V-8. b.

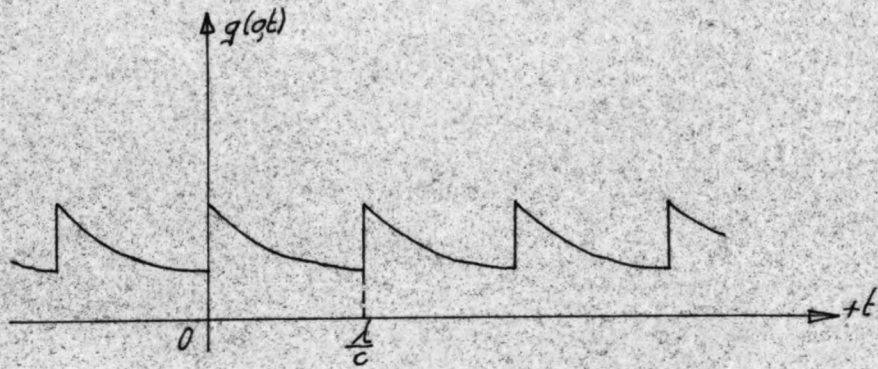
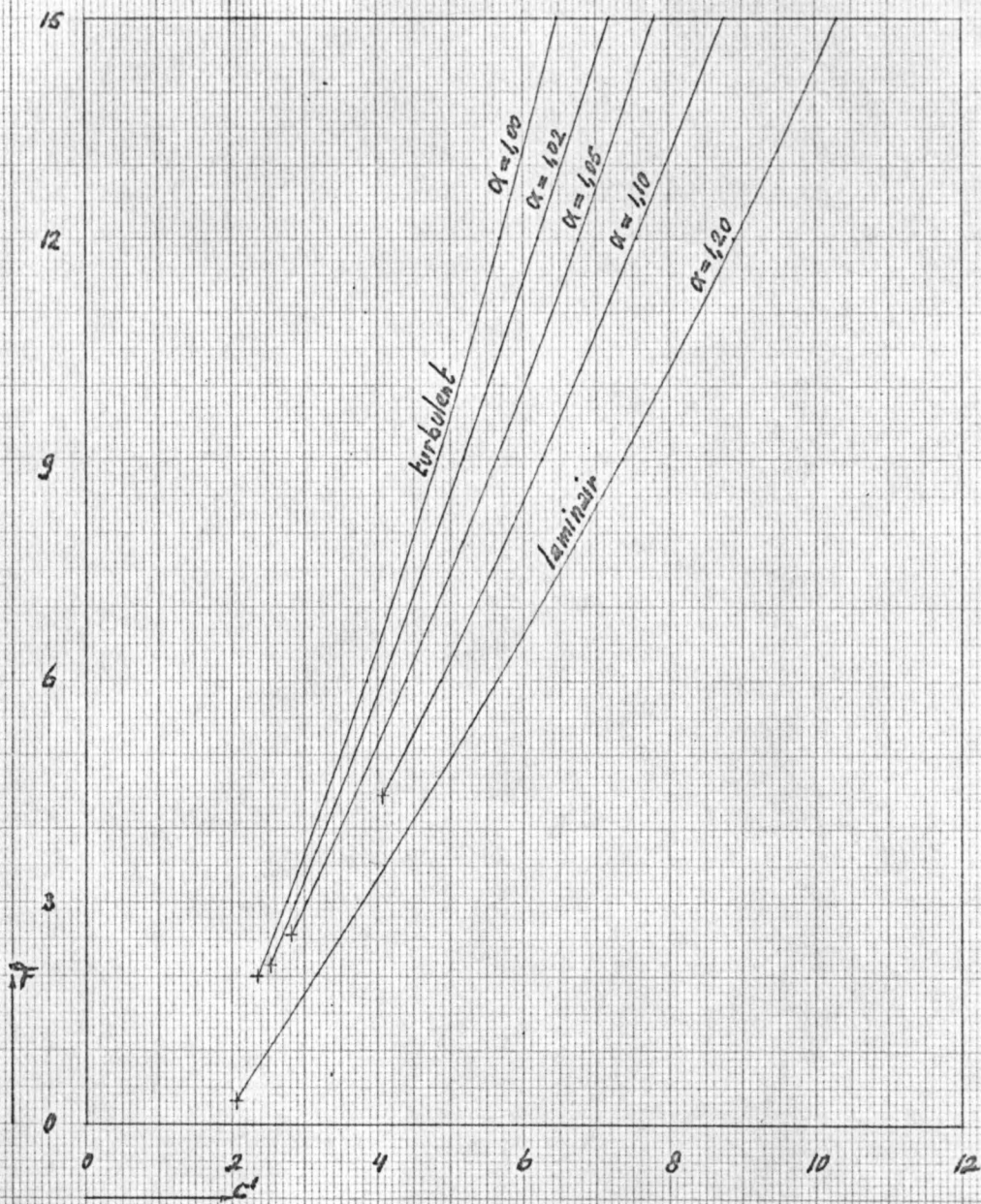


Fig. V-9.



Toelichting op de figuren bij Hoofdstuk V.

- Fig. V-1.a: Lopende golf ("verheffing") in een zeer brede leiding met flauw hellende of horizontale bodem. ($\theta \approx 0$).
- Fig. V-1.b: Lopende golf ("verdieping") in een zeer brede leiding met flauw hellende of horizontale bodem ($\theta \approx 0$).
- Fig. V-2.a: Dispersie en verzwakking aan het front van een lopende golf als bedoeld in fig. V-1.a.
- Fig. V-2.b: Dispersie en versterking aan de achterzijde van een lopende golf als bedoeld in fig. V-1.a.
- Fig. V-3.a: Min of meer regelmatige sinusoidale perturbatie van de instabiele permanent eenparige stroming in een hellende open leiding.
- Fig. V-3.b: Rolgolfpatroon (schematisch) zoals zich dit ontwikkelt uit een instabiele permanent eenparige stroming in een hellende open leiding.
- Fig. V-4: Bewegende waterkolom een z.g. "schok" bevattende, met oneindig kleine schokdikte.
- Fig. V-5: Schets van een schokfront met eindige "schokdikte" L .
- Fig. V-6: Gebieden met subcritieke en supercritieke snelheden.
- Fig. V-7: Veronderstelde, doch verworpen vorm van het rolgolfprofiel.
- Fig. V-8.a: Twee speciale oplossingen voor het geval van laminaire stroming, aan elkaar geschakeld d.m.v. een "schok".
- Fig. V-8.b: Twee speciale oplossingen voor het geval van turbulente stroming, aan elkaar geschakeld d.m.v. een "schok".
- Fig. V-9: De ogenblikkelijke mate van afvoer.
- Fig. V-10: Het gedrag van de dimensieloze golfsnelheid c' , uitgaande van een tweedimensionale stroming welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt.

APPENDIX

I- Inleiding.

Bij de bepaling van het (in-)stabiliteitscriterium voor de permanent eenparige stroming (zie Hoofdstuk IV) is uitgegaan van de basisvgl. (1) en (2) welke resp. de continuïteitsvoorwaarde en de vgl. voor de gemiddelde stroming in een open prismatische leiding weergeven. Vgl. (1) geldt algemeen voor de gemiddelde stroming in een open leiding, en vgl. (2) is in feite de hydraulische bewegingsvgl. voor de geleidelijk veranderende niet-permanente (oftewel quasi-permanente) stroming in een open prismatische leiding. Met betrekking tot de aannamen die gedaan moeten worden om de stroming quasi-permanent te doen zijn en de consequenties daarvan, zij verwezen naar Hoofdstuk II. Uitgaande van een geleidelijk veranderende stroming, bezaten we in het voorgaande o.a. de mogelijkheid om -zowel voor laminaire als turbulente stroming- eenvoudshalve een wrijvingsterm in te voeren, welke eigenlijk alleen geldig is voor de permanent eenparige stromingstoestand.

Het zou nu interessant zijn om na te gaan hoe de bepaling van het (in-)stabiliteitscriterium voor de permanent eenparige stroming verloopt en hoe dit criterium gaat luiden, indien verondersteld wordt dat de stroming zuiver "niet-permanent" is. In het hierna volgende zullen we een poging daartoe in het werk stellen, door n.l. -gebruik makend van de onder (39) genoemde literatuur- een stabiliteitsbeschouwing op te zetten, welke betrekking heeft op een eenparige laminaire vloeistofstroming; de vloeistof is aangenomen als zijnde visceus, omdat de "wrijving" dan exact bekend is.

Allereerst zullen we gaan beschouwen de stabiliteit van een eenparige laminaire vloeistofstroming langs een hellend vlak, en vervolgens (ter vergelijking) de stabiliteit van een eenparige laminaire vloeistofstroming tussen twee evenwijdige hellende vlakken.

Als uitgangspunt onderstellen we dat we te maken hebben met een onsamendrukbare visceuze vloeistof, waarvan dichtheid en viscositeit constant zijn.

II- Algemene beschouwing betreffende de stabiliteit van de stroming ener onsamendrukbare vloeistof.

II-a: Inleiding.

Veronderstel dat een systeem van hydrodynamische vgl'n. een tijdsafhankelijke oplossing heeft van de gedaante:

$$\bar{u}_*(x,y,z), \bar{v}_*(x,y,z), \bar{w}_*(x,y,z) \text{ en } \bar{p}_*(x,y,z),$$

voor de snelheidscomponenten in de resp. x_* -, y_* - en z_* -richting en de druk; het als suffix toegevoegde * teken geeft aan dat de desbetreffende grootheid een dimensie bezit. Beschouw nu een beginwaarde probleem met deze variabelen, enigszins verschillend van die voor de oplossing in geval van permanentie: indien de oplossing voor " t_* gaat naar oneindig", deze oplossing benadert, is de beweging stabiel en in het tegenovergestelde geval instabiel.

We zullen aannemen dat voor kleine verstoringen de vgl'n. gelineariseerd mogen worden: i.e. termen van de tweede en hogere orde in de verstoringen en de afgeleiden daarvan worden verwaarloosd. Het resulterende lineaire systeem van vgl'n. bevat de tijd t_* dan alleen d.m.v. de afgeleiden naar t_* en derhalve mag verondersteld worden dat de oplossingen een exponentiële tijdfactor $e^{\sigma_* t_*}$ bevatten. De randvoorwaarden voor de verstoringen zijn gewoonlijk homogeen en we hebben een karakteristieke waarde probleem met σ_* als parameter. Indien alle karakteristieke waarden van σ_* negatieve reële delen hebben is de beweging stabiel, t.a.v. zeer kleine verstoringen; bezitten enkele van de karakteristieke waarden van σ_* positieve reële delen dan is de beweging instabiel. De reden van deze definitie is het volgende: veronderstel dat aan de stroming een verstoring wordt gegeven, eindig of zeer klein, dan mogen we concluderen dat deze in het algemeen niet volledig zal uitdempen; want zal een verstoring uitdempen, dan moet deze eerst zo klein worden dat de gelineariseerde vgl'n. van toepassing zullen zijn.

II-b: De mathematische formulering van het stabiliteitsprobleem in een onsamendrukbare vloeistof, c.q. een vlakke Poiseuille stroming.

De Navier-Stokesvgl'n. voor de beweging van een onsamendrukbare visceuze vloeistof luiden (zie (20)):

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_*}{dt_*} &= X_* - \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \nu_* \nabla_{u_*}^2 \\ \frac{dv_*}{dt_*} &= Y_* - \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p_*}{\partial y_*} + \nu_* \nabla_{v_*}^2 \\ \frac{dw_*}{dt_*} &= Z_* - \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + \nu_* \nabla_{w_*}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

waarin u_* , v_* en w_* de snelheidscomponenten in de resp. x_* -, y_* - en z_* -richting zijn, p_* de druk voorstelt, $\nu_* = \frac{\mu_*}{\rho_*}$ de kinematische viscositeitscoëfficiënt is en ∇^2 de operator van Laplace weergeeft; de continuïteitsvgl. kan geschreven worden als (zie (20)):

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0, \quad (2)$$

terwijl de randvoorwaarden de gedaante zullen hebben:

$$u_* = s_1, \quad v_* = s_2 \quad \text{en} \quad w_* = s_3. \quad (3)$$

Voorlopig gaan we ervanuit dat er geen uitwendige krachten werkzaam zijn, dus:

$$X_* = Y_* = Z_* = 0.$$

Voor kleine verstoringen van de permanente beweging gaan we oplossingen beschouwen van de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} u_* &= \bar{u}_* + \sum_1^{\infty} \varepsilon^n u_*^{(n)}, & v_* &= \bar{v}_* + \sum_1^{\infty} \varepsilon^n v_*^{(n)}, \\ w_* &= \bar{w}_* + \sum_1^{\infty} \varepsilon^n w_*^{(n)}, & p_* &= \bar{p}_* + \sum_1^{\infty} \varepsilon^n p_*^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ε is hierin een dimensieloze constante parameter, u_* , v_* , w_* en p_* zijn functies van plaats en tijd; de relaties (4) moeten voldoen aan de vgln. (1), (2) en (3) voor alle waarden van ε in het interval $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

De (Fourier)-componenten van een willekeurige kleine verstoring zijn dynamisch onafhankelijk van elkaar verondersteld, d.w.z. de oplossing voor een golf met willekeurige periode en snelheid "staat voor" een complete oplossing.

Zijn de snelheden aan de begrenzungen (s) onafhankelijk van de tijd, dan hebben we een permanente beweging:

$u_* = \bar{u}_*(x, y, z)$, $v_* = \bar{v}_*(x, y, z)$, $w_* = \bar{w}_*(x, y, z)$ en $p_* = \bar{p}_*(x, y, z)$, welke relaties voldoen aan de vgln. (1) en (2) in de gedaanten:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x_x} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y_x} + \bar{w}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z_x} &= -\frac{1}{\rho_x} \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x_x} + \nu_x \nabla^2 \bar{u}_x \\ \bar{u}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x_x} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y_x} + \bar{w}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z_x} &= -\frac{1}{\rho_x} \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial y_x} + \nu_x \nabla^2 \bar{v}_x \\ \bar{u}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x_x} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y_x} + \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial z_x} &= -\frac{1}{\rho_x} \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial z_x} + \nu_x \nabla^2 \bar{w}_x \end{aligned} \right\} \quad (1^a)$$

en

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x_x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y_x} + \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial z_x} = 0, \quad (2^a)$$

terwijl de betrekking (3) overgaat in:

$$\bar{u}_x = s_1, \quad \bar{v}_x = s_2 \quad \text{en} \quad \bar{w}_x = s_3. \quad (3^a)$$

Substitutie van de relaties (4) in de vgl. (1) en (2), en gelijkstellen van de termen met coëfficiënten ε^0 geeft de vgl. voor permanentie (1^a) en (2^a) met als randvoorwaarden (3^a); gelijkstellen van de termen met coëfficiënten ε^1 levert op:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t_x} + \bar{u}_x \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x_x} + u_x^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x_x} + \bar{v}_x \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial y_x} + v_x^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y_x} + \bar{w}_x \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial z_x} + w_x^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z_x} &= \\ &= -\frac{1}{\rho_x} \frac{\partial p_x^{(1)}}{\partial x_x} + \nu_x \nabla^2 u_x^{(1)} \\ \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial t_x} + \bar{u}_x \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x_x} + u_x^{(1)} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x_x} + \bar{v}_x \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y_x} + v_x^{(1)} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y_x} + \bar{w}_x \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z_x} + w_x^{(1)} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z_x} &= \\ &= -\frac{1}{\rho_x} \frac{\partial p_x^{(1)}}{\partial y_x} + \nu_x \nabla^2 v_x^{(1)} \\ \frac{\partial w_x^{(1)}}{\partial t_x} + \bar{u}_x \frac{\partial w_x^{(1)}}{\partial x_x} + u_x^{(1)} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x_x} + \bar{v}_x \frac{\partial w_x^{(1)}}{\partial y_x} + v_x^{(1)} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y_x} + \bar{w}_x \frac{\partial w_x^{(1)}}{\partial z_x} + w_x^{(1)} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial z_x} &= \\ &= -\frac{1}{\rho_x} \frac{\partial p_x^{(1)}}{\partial z_x} + \nu_x \nabla^2 w_x^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (1^b)$$

en

$$\frac{\partial u_*^{(1)}}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*^{(1)}}{\partial y_*} + \frac{\partial w_*^{(1)}}{\partial z_*} = 0, \quad (2^b)$$

met als randvoorwaarden aan een vaste begrenzing:

$$u_*^{(1)} = v_*^{(1)} = w_*^{(1)} = 0 \quad (3^b)$$

We zullen ons uitsluitend bepalen tot de eerste orde vgl. (1^b) en (2^b); volledige behandeling vereist n.l. dat ook hogere machten van ϵ beschouwd moeten worden, tezamen met een bevestiging van de convergentie van de reeksen (4) en een rechtvaardiging van de termgewijze differentiatie.

Bovenstaande vgl. gaan we nu herleiden tot vgl. in dimensieloze gedaante; daartoe kiezen we als referentiegrootheden: V_* voor de snelheid en L_* voor de lengte, waardoor we krijgen:

$$\frac{u_*}{V_*} = u; \quad \frac{v_*}{V_*} = v; \quad \frac{w_*}{V_*} = w; \quad \frac{x_*}{L_*} = x; \quad \frac{y_*}{L_*} = y; \quad \frac{z_*}{L_*} = z;$$

$$\frac{t_* V_*}{L_*} = t; \quad \frac{p_*}{\rho_* V_*^2} = p; \quad \text{getal van Reynolds} = R = \frac{\rho_* V_* L_*}{\mu_*} = \frac{V_* L_*}{\nu_*}$$

Met behulp hiervan en m.b.v.: $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$ en $p = \bar{p} + p'$ gaan de vgl. (1^b), (2^b) en (3^b) dan over in resp.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial v'}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial z} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u' \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial v'}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial v'}{\partial z} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v' \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial z} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{R} \nabla^2 w' \end{aligned} \right\} (1^c)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2^c)$$

en

$$u' = v' = w' = 0 \quad (3^c)$$

In het bovenstaande en het navolgende geven de resp. tekens - en ' boven en rechtsboven de desbetreffende grootheid dus aan,

dat deze betrekking heeft op de basisstroming, resp. de verstoring. Onderstellen we nu dat de basisstroming een exacte parallelle permanente beweging is, i.e. een z.g. Poiseuille stroming, dan geldt:

$$\bar{v}=\bar{w}=0 \quad \text{en} \quad \bar{u}=\bar{u}(y),$$

zodat voor kleine verstoringen de vgl'n. (1^c), (2^c) en (3^c) op-leveren:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{d\bar{u}}{dy} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1^d)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2^c)$$

en als randvoorwaarden aan een vaste begrenzing:

$$u' = v' = w' = 0; \quad (3^c)$$

hierin stellen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ en \bar{p} de permanent eenparige basisstroming voor, en u', v', w' en p' de verstoring beide in dimensieloze gedaante.

We zullen alleen verstoringen beschouwen die ruimtelijk periodiek zijn in de richtingen waarin de vloeistof zich tot oneindig uitstrekt, dit om de moeilijkheden met betrekking tot de randvoorwaarden op oneindig te omzeilen. Omdat alle drie de variabelen x, z en t in de vgl'n. (1^d) en (2^c) cyclisch zijn, en de coëfficiënten van de afgeleiden alleen van y afhangen, laat het systeem oplossingen toe, welke exponentiële functies zijn in zowel x en z als t . Indien de oplossing begrensd moet zijn voor het geval dat x en z naderen tot plus of min oneindig, moeten de corresponderende exponenten zuiver imaginair zijn. Dus: elk van de componenten van de verstoring is het reële deel van een uitdrukking met de gedaante:

$$q' = \hat{q}(y) \exp. \{j(\alpha x + \beta z) - j\alpha c t\},$$

waarin

$$-j\alpha ct = \frac{\epsilon \cdot L_*}{V_*}$$

en α en β reëel zijn. We zullen nu gaan substitueren:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \hat{u}(y) \exp\{j(\alpha x + \beta z) - j\alpha ct\} \\ v' &= \hat{v}(y) \exp\{j(\alpha x + \beta z) - j\alpha ct\} \\ w' &= \hat{w}(y) \exp\{j(\alpha x + \beta z) - j\alpha ct\} \\ p' &= \hat{p}(y) \exp\{j(\alpha x + \beta z) - j\alpha ct\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

in de vgl. (1^a), (2^c) en (3^c), met dien verstande dat het reële deel van de oplossing de desbetreffende fysische grootheid oplevert. De dimensieloze amplitudefuncties $\hat{u}(y)$, $\hat{v}(y)$, $\hat{w}(y)$ en $\hat{p}(y)$ voldoen dan aan de vgl.:

$$\left. \begin{aligned} [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - j\alpha R(\bar{u} - c)] \hat{u} &= R(D\bar{u})\hat{v} + j\alpha R\hat{p} \\ [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - j\alpha R(\bar{u} - c)] \hat{v} &= R D\hat{p} \\ [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - j\alpha R(\bar{u} - c)] \hat{w} &= j\beta R\hat{p} \\ j(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + D\hat{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

waarin D de operatornotatie $D = \frac{d}{dy}$ voorstelt, en aan de randvoorwaarden t.p.v. de vaste begrenzingen:

$$\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0 \quad (7)$$

Voor een gegeven permanente stroming is bovenstaand stelsel vgl. te herleiden tot een karakteristieke waarde probleem, resulterend in een relatie tussen de parameters α, β, c en R van de vorm:

$$F(\alpha, \beta, c, R) = 0$$

Voor ieder stel reële waarden van α, β en R is er een karakteristieke waarde c , welke over het algemeen complex zal zijn. Indien het imaginair deel c_j van c positief is, is de verstoring instabiel, ingevolge de gelineariseerde theorie. Als $c_j < 0$ dempt de verstoring uit en indien $c_j = 0$ is er sprake van een staande trilling. De voorwaarde $c_j = 0$ leidt tot een verband tussen α, β , en R, oftewel een vlak in de (α, β, R) -ruimte, i.e. het z.g. vlak van neutrale stabiliteit, (oftewel neutrale vlak).

Substitueren we:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}\tilde{u} &= \alpha\hat{u} + \beta\hat{w}, & \tilde{v} &= \hat{v}, & \tilde{p}\tilde{R} &= \hat{p}R \\ \tilde{\alpha}\tilde{R} &= \alpha R, & \tilde{c} &= c, & \tilde{\alpha}^2 &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

in de vgl. (6) en (7) dan krijgen we resp.:

$$\left. \begin{aligned} \{D^2 - \tilde{\alpha}^2 - j\tilde{\alpha}\tilde{R}(\bar{u} - \bar{c})\} \tilde{u} &= \tilde{R}(D\bar{u})\tilde{v} + j\alpha\tilde{R}\tilde{p} \\ \{D^2 - \tilde{\alpha}^2 - j\tilde{\alpha}\tilde{R}(\bar{u} - \bar{c})\} \tilde{v} &= \tilde{R}D\tilde{p} \\ j\tilde{\alpha}\tilde{u} + D\tilde{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (6) \\ (7) \end{array}$$

en

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0$$

De relaties (6) en (7) met $\hat{w}=0$ en $\beta=0$, zijn analoog met de relaties (6') en (7'), d.w.z. de vgl. (6') en (7') corresponderen met een tweedimensionale verstoring. Dus: ieder driedimensionaal probleem (i.e. de vgl. (6) plus de randvoorwaarden (7)) correspondeert met een tweedimensionaal probleem (i.e. de vgl. (6') plus de randvoorwaarden (7')); het is voldoende om dit tweedimensionale probleem op te lossen en aan te vullen met de transformatieformules (8). In feite tonen de vgl. (8) dat het equivalente tweedimensionale probleem is geassocieerd met een lager Reynoldsgetal, aangezien $\tilde{\alpha} > \alpha$; derhalve kunnen we stellen dat het minimale critieke Reynoldsgetal rechtstreeks gegeven wordt door de tweedimensionale analyse van het probleem.

Resumerend kunnen we nu het volgende zeggen: elke driedimensionale verstoring wordt beheerst door dezelfde vgl. als een zekere tweedimensionale verstoring in een gelijke stroming bij een lager Reynoldsgetal. Dit betekent dat tweedimensionale golven een sterkere neiging tot instabiliteit vertonen dan driedimensionale waaruit volgt dat een tweedimensionale analyse ruimschoots voldoende is als alleen de stabiliteit van de stroming in het geding is: het probleem van driedimensionale verstoringen is volledig equivalent met een tweedimensionaal probleem bij een lager Reynoldsgetal.

III- De stabiliteit van een laminaire vloeistofstroming langs een hellend vlak.

III-a: De basisstroming.

De laminaire stroming waarvan de stabiliteit -met gebruikmaking van de aannamen en resultaten uit het voorgaande- onderzocht moet worden, is een eenparige tweedimensionale stroming, aan de ene zijde begrensd door een gefixeerde wand, aan de andere door een vrij oppervlak. Het assenkruis is gekozen zoals aangegeven in fig. A-1, dit om de vgl. (in dimensieloze gedaante) van de basisstroming zo eenvoudig mogelijk te houden, en de hierna te beschouwen stabiliteit van de eenparige laminaire vloeistofstroming tussen twee evenwijdige hellende vlakken op analoge wijze te kunnen behandelen. De dichtheid en viscositeit zijn con-

stant. Voor bovenbedoelde stromingstoestand volgt direct uit de vgl. (1) van Navier-Stokes met $X_* = g \sin \theta$ (het * teken bij de v is nu weggelaten):

$$g \sin \theta + \nu \nabla^2 \bar{u}_* = 0,$$

waarin $\bar{u}_* = \bar{u}_*(y)$; oftewel:

$$\frac{d^2 \bar{u}_*}{dy_*^2} = - \frac{g \sin \theta}{\nu};$$

eenmaal integreren levert op:

$$\frac{d\bar{u}_*}{dy_*} = - \frac{g \sin \theta}{\nu} y_* + (\text{constante})_1,$$

met $(\text{constante})_1 = 0$, omdat $\frac{d\bar{u}_*}{dy_*} = 0$ voor $y_* = 0$ (geen schuifspanning aan het vrije oppervlak); nogmaals integreren geeft:

$$\bar{u}_* = - \frac{g \sin \theta}{2\nu} y_*^2 + (\text{constante})_2,$$

met $(\text{constante})_2 = \frac{g \sin \theta}{2\nu} h^2$, aangezien $\bar{u}_* = 0$ voor $y_* = h$; we hebben nu dus gekregen:

$$\bar{u}_* = \frac{g \sin \theta}{2\nu} (h^2 - y_*^2),$$

i.e. een parabolisch snelheidsverloop; de snelheid aan het vrije oppervlak is:

$$\bar{u}_{*0} = \frac{g \sin \theta}{2\nu} h^2.$$

Via de in te voeren referentiegrootheden voor de snelheid en de lengte, \bar{u}_{*0} en h gaan we nu over op dimensieloze grootheden:

$$y = \frac{y_*}{h}; \quad x = \frac{x_*}{h}; \quad \bar{u} = \frac{\bar{u}_*}{\bar{u}_{*0}} = \frac{g \sin \theta}{2\nu} (h^2 - y_*^2) / \frac{g \sin \theta}{2\nu} h^2,$$

waaruit volgt:

$$\bar{u} = 1 - y^2;$$

voor $y=0$ is $\bar{u} = \bar{u}_0 = 1$, en voor $y=1$ is $\bar{u}=0$.

De afvoer Q_* wordt nu:

$$Q_* = \int_0^h \bar{u}_* dy_* = \frac{g \sin \theta}{2\nu} \int_0^h (h^2 - y_*^2) dy_* = \frac{g \sin \theta}{3\nu} h^3,$$

en de gemiddelde stroomsnelheid \bar{u}_{*gem} :

$$\bar{u}_{*gem} = \frac{Q_*}{h} = \frac{g \sin \theta}{3\nu} h^2 = \frac{2}{3} \bar{u}_{*0},$$

dus, in dimensieloze grootheden is:

$$\bar{u}_{gem} = \frac{2}{3},$$

wat ook rechtstreeks uit vgl. (9) volgt.

Bij permanente beweging maakt de schuifkracht langs de wand evenwicht met de zwaartekrachtscomponent in de richting van de stroom, dus:

$$\rho v \left(\frac{d\bar{u}_*}{dy_*} \right)_h = \rho g h \sin \theta; \quad \frac{\rho r}{h} \cdot \frac{g \sin \theta}{\nu} h^2 = \rho g h \sin \theta,$$

waaruit volgt:

$$\frac{2\rho \bar{u}_{*0}}{h} = \rho g h \sin \theta,$$

oftewel:

$$\bar{u}_{*0} = \frac{g \sin \theta}{2\nu} h^2$$

(10)

Als getal van Reynolds voeren we nu in:

$$R_* = \frac{V_* L_*}{\nu} = \frac{\bar{u}_{*0} h}{\nu} = \frac{g \sin \theta}{2\nu^2} h^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{g \sin \theta}{3\nu^2} h^3,$$

oftewel:

$$R_* = \frac{\bar{u}_{*0} h}{\nu} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\bar{u}_{*0} h}{\nu} = \frac{3}{2} R$$

(11)

N.B.

Het bestaan van een expliciete relatie tussen Q_* en h suggereert, op grond van de wet van Seddon, dat elke geleidelijke of "lange golf" verstoring van de eenparige toestand zich zal voortplanten in stroomafwaartse richting met een snelheid:

$$c_* = \frac{dQ_*}{dh} = \frac{g \sin \theta}{\nu} h^2 = 2\bar{u}_{*0}$$

(12)

III-b: Het stabiliteitsprobleem:

De Navier-Stokesvgn. voor de tweedimensionale beweging van een onsamendrukbare visceuze vloeistof luiden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_*}{dt_*} &= X_* - \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \nu_* \nabla^2 u_* \\ \frac{dv_*}{dt_*} &= Y_* - \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p_*}{\partial y_*} + \nu_* \nabla^2 v_* \end{aligned} \right\};$$

(13)

hierin stellen X_* en Y_* uitwendige krachten voor; in geval van een hellende leiding, worden deze volledig bepaald door de zwaartekracht; het zwaartekrachtveld is conservatief, derhalve kan en mag gesteld worden:

$$X_* = - \frac{\partial \Omega_*}{\partial x_*}, \quad Y_* = - \frac{\partial \Omega_*}{\partial y_*},$$

waarin Ω_* de potentiaal van het zwaartekrachtveld is.

Voor de vgl. (1) kan dus geschreven worden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t_x} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x_x} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial y_x} &= -\frac{\partial \Omega_x}{\partial x_x} - \frac{1}{\rho_x} \frac{\partial p_x}{\partial x_x} + v_x \cdot \nabla^2 u_x \\ \frac{\partial v_x}{\partial t_x} + u_x \frac{\partial v_x}{\partial x_x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial y_x} &= -\frac{\partial \Omega_x}{\partial y_x} - \frac{1}{\rho_x} \frac{\partial p_x}{\partial y_x} + v_x \cdot \nabla^2 v_x \end{aligned} \right\}$$

welke vgl. overgaan in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t_x} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial y_x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x_x} &= -\frac{\partial \Omega_x}{\partial x_x} - \frac{1}{\rho_x} \frac{\partial p_x}{\partial x_x} - u_x \frac{\partial u_x}{\partial x_x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x_x} + \\ &+ v_x \cdot \nabla^2 u_x \\ \frac{\partial v_x}{\partial t_x} + u_x \frac{\partial v_x}{\partial x_x} - u_x \frac{\partial u_x}{\partial y_x} &= -\frac{\partial \Omega_x}{\partial y_x} - \frac{1}{\rho_x} \frac{\partial p_x}{\partial y_x} - v_x \frac{\partial u_x}{\partial y_x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial y_x} + \\ &+ v_x \cdot \nabla^2 v_x \end{aligned} \right\}$$

We zullen nu stellen:

$$\chi_x = \Omega_x + \frac{p_x}{\rho_x} + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2)$$

en

$$\zeta_x = \frac{\partial v_x}{\partial x_x} - \frac{\partial u_x}{\partial y_x}$$

ζ_x is de z.g. vorticititeit.

Opmerking

De beweging van een vloeistofelementje $dx_x dy_x$, waarvan het punt (x_x, y_x) het dichtst bij de oorsprong is gelegen, kan men zich opgebouwd denken uit drie delen, te weten:

- een translatiebeweging van het gehele elementje met de component snelheden u_x en v_x ; de lineaire dilataties $\epsilon_1 = \frac{\partial u_x}{\partial x_x}$ en $\epsilon_2 = \frac{\partial v_x}{\partial y_x}$ geven de toename van de resp. zijden van het elementje dx_x , dy_x gedurende de beweging weer;
- de relatieve verplaatsing van de deeltjes binnen het vloeistofelementje, de deformatie ervan weergevend; de hoekdilatatie

$\gamma_* = \frac{\partial v_*}{\partial x_*} + \frac{\partial u_*}{\partial y_*}$ geeft de hoekverandering van de zijden van het vloeistofelementje weer, tweemaal genomen;

- de rotatie van het gehele vloeistofelementje om een momentane as, met als hoeksnelheid $\frac{1}{2}\zeta_*$; de vector $\zeta_* = \frac{\partial v_*}{\partial x_*} - \frac{\partial u_*}{\partial y_*}$ noemt men nu de vortichiteit van de vloeistof in het punt (x_*, y_*) .

Bovenstaande vgl. kunnen dan geschreven worden als:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} - v_* \zeta_* &= -\frac{\partial \lambda_*}{\partial x_*} + v_* \nabla^2 u_* \\ \frac{\partial v_*}{\partial t_*} + u_* \zeta_* &= -\frac{\partial \lambda_*}{\partial y_*} + v_* \nabla^2 v_* \end{aligned} \right\}$$

kruisgewijs partiël differentiëren geeft:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_*}{\partial y_* \partial t_*} - v_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial y_*} - \zeta_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} &= -\frac{\partial^2 \lambda_*}{\partial x_* \partial y_*} + v_* \frac{\partial}{\partial y_*} \nabla^2 u_* \\ \frac{\partial^2 v_*}{\partial x_* \partial t_*} + u_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial x_*} + \zeta_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} &= -\frac{\partial^2 \lambda_*}{\partial x_* \partial y_*} + v_* \frac{\partial}{\partial x_*} \nabla^2 v_* \end{aligned} \right\}$$

waarna aftrekken van beide vgl. oplevert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_*} \left\{ \frac{\partial v_*}{\partial x_*} - \frac{\partial u_*}{\partial y_*} \right\} + u_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial y_*} + \zeta_* \left\{ \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} \right\} &= \\ &= v_* \frac{\partial}{\partial x_*} \nabla^2 v_* - v_* \frac{\partial}{\partial y_*} \nabla^2 u_* \end{aligned}$$

oftewel, met $\zeta_* = \frac{\partial v_*}{\partial x_*} - \frac{\partial u_*}{\partial y_*}$ en met de uit vgl. (2) volgende continuïteitsvoorwaarde:

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} = 0 \tag{2'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_*} \zeta_* + u_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial y_*} + \zeta_* \cdot 0 = v_* \nabla^2 \left\{ \frac{\partial v_*}{\partial x_*} - \frac{\partial u_*}{\partial y_*} \right\}$$

wat geschreven kan worden als:

$$\frac{d\zeta_*}{dt_*} = v_* \nabla^2 \zeta_*$$

Overgang op dimensieloze variabelen m.b.v.:

$$u_* = uV_* ; v_* = vV_* ; x_* = xL_* ; y_* = yL_* ; t_* = \frac{L_*}{V_*} t ; \zeta_* = \frac{V_*}{L_*} \zeta ,$$

geeft:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{V_*}{V_* L_*} \nabla^2 \zeta ,$$

wat met $R_* = \frac{V_* L_*}{\nu}$ overgaat in:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{R_*} \nabla^2 \zeta \tag{13}$$

Vgl. (13) is op grond van het bovenstaande te schrijven als:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{R_*} \nabla^2 \zeta \tag{13^a}$$

Een algemene tweedimensionale beweging kan beschreven worden d.m.v. een stroomfunctie $\psi(x, y, t)$, welke gedefiniëerd is door:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} ,$$

omdat dan n.l. voldaan wordt aan de continuïteitsvgl.; voor de vorticititeit krijgen we dan:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = - \nabla^2 \psi$$

Substitutie van ζ , u en v in vgl. (13^a) geeft:

$$\frac{\partial}{\partial t} (- \nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (- \nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (- \nabla^2 \psi) = \frac{1}{R_*} \nabla^2 (- \nabla^2 \psi) ,$$

waaruit volgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi = \frac{1}{R_*} \nabla^2 \nabla^2 \psi ,$$

oftewel:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{\partial (\nabla^2 \psi, \psi)}{\partial (x, y)} = \frac{1}{R_*} \nabla^2 \nabla^2 \psi , \tag{14}$$

waarin

$$\frac{\partial (\nabla^2 \psi, \psi)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} & \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} ,$$

i.e. de determinant van Jacobi of functionaal determinant. Uit het bovenstaande kunnen we de conclusie trekken dat de

stroomfunctie $\psi(x,y,t)$ in dimensieloze vorm voldoet aan de vorticitetsvgl. (13).

Teneinde een kleine verstoring van een permanente basisstroming $\bar{\psi}(x,y)$ te bestuderen, zullen we

$$\psi(x,y,t) = \bar{\psi}(x,y) + \psi'(x,y,t) \quad (15)$$

in vgl. (14) gaan substitueren.

Uitgeschreven luidt vgl. (14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} \right\} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right\} = \\ = \frac{1}{R_*} \left\{ \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right\}; \end{aligned}$$

voor een parallelle basisstroming geldt:

$$\bar{u} = \bar{u}(y) \quad \text{en} \quad \bar{v} = 0,$$

zodat:

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad \bar{v} = 0 = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \quad \text{en} \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}(y);$$

nu is \bar{u} een tweedegraadsparabool in y , m.a.w. $\bar{\psi}$ is een derdegraadsvgl. in y , onafhankelijk van x , dus:

$$\frac{\partial^4 \bar{\psi}}{\partial y^4} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial y^3} = \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2};$$

substitutie van $\psi(x,y,t)$ volgens vgl. (15) geeft m.b.v. het bovenstaande:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y^2 \partial t} + \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y^3} \right) = \\ = \frac{1}{R_*} \left(\frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi'}{\partial y^4} \right). \end{aligned}$$

Onderstellen we nu dat de verstoring van de basisstroomfunctie zo klein is, dat termen van de tweede macht in $\psi'(x,y,t)$ verwaarloosd kunnen worden, dan krijgen we:

$$\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y^2 \partial t} + \bar{v} \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} =$$

$$= \frac{1}{R_*} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

Vgl. (16) is nu een partiële differentiaalvgl. die lineair is in de kleine verstoring $\psi'(x, y, t)$, en coëfficiënten heeft welke onafhankelijk zijn van x en t ; derhalve mogen we oplossingen verwachten van het type:

$$\psi'(x, y, t) = \delta\phi(y) e^{j\alpha(x-ct)}$$

waarin $\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda}$ het dimensieloze golfgetal is. Substitutie van $\psi'(x, y, t)$ in vgl. (16) geeft:

$$\begin{aligned} j\alpha^3 c\phi - j\alpha c D^2\phi + \bar{u}(-j\alpha^3\phi + D^2\phi \cdot j\alpha) - j\alpha\phi \cdot (D^2\bar{u}) &= \\ = \frac{1}{R_*} (\alpha^4\phi - 2\alpha^2 D^2\phi + D^4\phi), \end{aligned}$$

waarin D de operatorennotatie is voor $\frac{d}{dy}$; deze uitdrukking is te herleiden tot:

$$(D^2 - \alpha^2)\phi = j\alpha R_* \{ (\bar{u} - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - (D^2\bar{u})\phi \} \quad (17)$$

M.b.v. de navolgende relaties:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} = \bar{u} + \delta \frac{d\phi}{dy} e^{j\alpha(x-ct)} \quad (18)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 - j\alpha \delta \phi(y) \cdot e^{j\alpha(x-ct)} \quad (19)$$

en

$$R_* = \frac{V_* \cdot L_*}{V_*} = \frac{\bar{u}_{0*} h}{r} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\bar{u}_{0*} h}{V_*} = \frac{3}{2} R, \quad (17)$$

kan vgl. (17) geschreven worden als:

$$(\bar{u} - c) \left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - \alpha^2\phi \right) - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \cdot \phi = \frac{r}{j\alpha \bar{u}_{0*} h} \left(\frac{d^4\phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\phi}{dy^2} + \alpha^4\phi \right), \quad (17)$$

met $\phi = \phi(y)$; vgl. (17^a) is de z.g. Orr-Sommerfeld vgl., althans heeft dezelfde gedaante.

Uit vgl. (19) volgt direct:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = -2y \quad \text{en} \quad \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} = -2;$$

substitutie hiervan in vgl. (17^a), geeft, tezamen met relatie (11):

$$\frac{3}{2}j\alpha R \left\{ (1-y^2-c) \left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - \alpha^2\phi \right) + 2\phi \right\} = \frac{d^4\phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\phi}{dy^2} + \alpha^4\phi;$$

stellen we nu nog:

$$R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R,$$

dan gaat bovenstaande vgl. over in:

$$\frac{d^4\phi}{dy^4} - \left\{ R_0(1-y^2-c) + 2\alpha^2 \right\} \frac{d^2\phi}{dy^2} - \left\{ 2R_0 - \alpha^4 - \alpha^2 R_0(1-y^2-c) \right\} \phi = 0 \quad (17^b)$$

III-c: De randvoorwaarden.

Veronderstel dat aan het vrije oppervlak van de ongestoorde stroming een perturbatie wordt opgelegd met de gedaante:

$$y_* = \delta_* e^{j\epsilon_* (x_* - c_* t_*)},$$

waarin $\epsilon_* = \frac{2\pi}{\lambda_*}$; deze vgl. wordt nu dimensieloos gemaakt door de substitutie:

$$y_* = y h; \quad x_* = x_* h; \quad c_* = c \bar{u}_{0x}; \quad t_* = \frac{h}{\bar{u}_{0x}} t; \quad \delta_* = \delta h \alpha$$

waardoor we krijgen:

$$y = \eta(x, t) = \delta e^{j\alpha(x-ct)}; \quad (20)$$

hierin is $\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda_*}$ het dimensieloze golfgetal, en δ de dimensieloze golfamplitudo.

III-c1 Volgens de kinematische randvoorwaarde moet een deeltje aan de oppervlakte daar ook blijven. De oppervlakte verstroming is aangenomen volgens de gedaante van vgl. (20); daaruit volgt:

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_{opp} = v_{opp} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{opp} + u_{opp} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{opp};$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -j\alpha c \delta e^{j\alpha(x-ct)}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = j\alpha \delta e^{j\alpha(x-ct)}$$

Volgens vgl. (18) is:

$$u = \bar{u} + \delta e^{j\alpha(x-ct)} \cdot \frac{d\phi(y)}{dy}$$

en volgens vgl. (19):

$$v = -j\alpha \delta \phi(y) \cdot e^{j\alpha(x-ct)};$$

substitutie hiervan in de randvoorwaarde geeft voor $y = \eta$:

$$-j\alpha\delta\phi(\eta).e^{j\alpha(x-ct)} = -j\alpha c\delta e^{j\alpha(x-ct)} + \left\{ \bar{u} + \delta e^{j\alpha(x-ct)} \cdot \frac{d\phi(\eta)}{dy} \right\} \cdot j\alpha\delta e^{j\alpha(x-ct)}$$

Onderstellen we dat de amplitudo van de verstoring van het vrije oppervlak zo klein is dat δ^2 verwaarloosd kan worden, dan krijgen we:

$$-\phi(\eta) = -c + \bar{u};$$

gezien de aard van de perturbatie van het vrije oppervlak (i.e. vgl. (20)), moet deze relatie ook gelden voor $y=\eta=0$; volgens vgl. (9) is $\bar{u}=1$ voor $y=0$, zodat we krijgen als kinematische randvoorwaarde:

$$\phi(0) = c - 1 \quad (21^a)$$

Vgl. (21^a) geeft het verband tussen de aangenomen perturbatie van het vrije oppervlak en de corresponderende perturbatie van de stroomfunctie; indien c niet te groot is, dan hebben beide perturbaties ongeveer dezelfde orde van grootte.

III-c2 Aan de vaste begrenzing moeten beide snelheidscomponenten gelijk zijn aan nul; uit vgl. (18) volgt dat voor $y=1$ moet gelden:

$$\frac{d\phi(1)}{dy} = 0; \quad (21^b)$$

evenzo volgt uit vgl. (19) dat voor $y=1$ moet gelden:

$$\phi(1) = 0 \quad (21^c)$$

III-c3 Aangenomen is, dat de enige spanning die op de buitenzijde van het vrije oppervlak werkt, een uniforme druk p_* is; omdat de vloeistof visceus is moet voor $y=\eta$ de schuifspanning gelijk aan nul worden; de schuifspanning is (zie (20)):

$$(\tau_{xy})_* = (\tau_{yx})_* = \mu_* \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_* ;$$

voor $y=\eta$ geldt dan (na overgang op dimensionelozen variabelen):

$$\mu_* \frac{\bar{u}_*}{h} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

Uit vgl. (19) volgt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha^2 \delta \phi(y) \cdot e^{j\alpha(x-ct)},$$

en uit vgl. (18) volgt:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\bar{u}}{dy} + \delta \frac{d^2\phi}{dy^2} \cdot e^{j\alpha(x-ct)}.$$

Volgens vgl. (9) is: $\frac{d\bar{u}}{dy} = -2y$, zodat voor $y=\eta$ m.b.v. relatie (20) voor bovenstaande randvoorwaarde geschreven kan worden:

$$\alpha^2 \delta \phi(\eta) \cdot e^{j\alpha(x-ct)} - 2\delta \cdot e^{j\alpha(x-ct)} + \delta \frac{d^2 \phi(\eta)}{dy^2} \cdot e^{j\alpha(x-ct)} = 0;$$

dit moet ook gelden voor $y = \eta = 0$, (zie boven) zodat we krijgen:

$$\frac{d^2 \phi(0)}{dy^2} = 2 - \alpha^2 \phi(0),$$

wat m.b.v. vgl. (21^a) overgaat in:

$$\frac{d^2 \phi(0)}{dy^2} = 2 - \alpha^2 (c-1) \tag{21^d}$$

III-c4 Teneinde de continuïteit van de normaalspanning over het vrije oppervlak uit te drukken, beschouwen we het evenwicht van een vloeistofelementje in de y-richting (zie fig.A-2.a): als $dx_* = 1$, is de normaaldruk $(p_{yy})_*$ per eenheid van breedte (zie (20)):

$$(p_{yy})_* = -p_{*1} + 2\mu_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*}$$

Beschouwen we een oppervlaktefilm met hoofdkromterichting (straal R_* , alleen de tweedimensionale stroming wordt beschouwd) en zijde 1 (zie fig. A-2.b); de schuifspanningen zijn nul; de dikte van de film is overal gelijk en de spanningen in elke richting zijn σ_* . Samenstellen van de krachten in de richting van de normaal geeft:

$$d\phi \cdot R_* = 1, \quad d\phi = \frac{1}{R_*} = k(\text{romming});$$

dus:

$$\sigma_* \delta_* \frac{1}{R_*} = p_{*0}, \quad \frac{1}{R_*} = \frac{p_{*0}}{\sigma_* \delta_*}$$

$\sigma_* \delta_* = T_*$ is de kracht in de film per eenheid van lengte, i.e. de oppervlaktetenspanning, dus:

$$p_{*0} = \frac{T_*}{R_*} = k \cdot T_*$$

Als $dx_* = 1$, dan geldt voor het evenwicht in de y-richting per eenheid van breedte (termen oneindig klein van de tweede orde worden verwaarloosd, R_* en η_* hebben tegengesteld teken):

$$-p_{*1} + 2\mu_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + p_{*0} + \frac{T_*}{R_*} - (\eta_* - y_*) \rho_* g \cos \theta = 0;$$

in feite is hierin $(\eta_* - y_*) = \delta_*$, de dikte van de oppervlaktefilm, en moet het rechterlid zijn:

$$\rho_* (\eta_* - y_*) \left\{ \frac{dv(\eta)}{dt} \right\}_* ;$$

delen door ρ_* geeft nu:

$$\frac{p_{*1}}{\rho_*} - 2v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} = \frac{p_{*0}}{\rho_*} + \frac{1}{R_*} \frac{T_*}{\rho_*} - (\eta_* - y_*) g \cos \theta.$$

Deze vgl. geeft de continuïteit van de normaalspanning over het vrije oppervlak weer, uitgedrukt in grootheden met dimensie. Voor de kromming k geldt:

$$k = \frac{1}{R_*} = - \frac{\frac{d^2 y_*}{dx_*^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy_*}{dx_*} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}};$$

Voor flauwe krommingen is $\left(\frac{dy_*}{dx_*} \right)^2$ klein t.o.v. 1, dus:

$$k = \frac{1}{R_*} = - \frac{d^2 y_*}{dx_*^2}$$

M.b.v. vgl. (20) voor de perturbatie van het vrije oppervlak, volgt daaruit (in dimensieloze grootheden):

$$k = \frac{1}{h} \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\alpha^2 \delta}{h} e^{j\alpha(x-ct)},$$

substitutie waarvan oplevert:

$$\frac{p_{*1}}{\rho_*} - 2v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} = \frac{p_{*0}}{\rho_*} - \frac{\alpha^2 \delta}{h} e^{j\alpha(x-ct)} \cdot \frac{T_*}{\rho_*} - (\eta_* - y_*) g \cos \theta;$$

maken we nu ook nog de resterende termen dimensieloos, dan krijgen we:

$$(p_1 - p_0) \bar{u}_{*0}^2 - \frac{2v_{*0}}{h} \frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha^2 \delta e^{j\alpha(x-ct)} \cdot \Gamma \bar{u}_{*0}^2 - (\eta - y) h g \cos \theta,$$

welke relatie voor $y=0$ overgaat in:

$$(p_1 - p_0) \bar{u}_{*0}^2 - \frac{2v_{*0}}{h} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = -\alpha^2 \delta e^{j\alpha(x-ct)} \cdot \Gamma \bar{u}_{*0}^2 - \rho h g \cos \theta; \quad (21^e)$$

hierin is:

$$\Gamma = \frac{T_*}{\rho_*} \cdot \frac{1}{h \bar{u}_{*0}^2} = \Gamma_* \cdot \frac{1}{h \cdot \bar{u}_{*0}^2},$$

i.e. de (dimensieloze) "kinematische oppervlakte spanning".

III-c5 De druk p moet ook voldoen aan de Navier-Stokesvgl. voor de x -richting; deze luidt (zie vgl. (1')):

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} = X_* - \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \nu_* \nabla^2 u_*,$$

met voor de uitwendige kracht X_* :

$$X_* = g \sin \theta$$

In dimensieloze gedaante wordt dit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{h \cdot \bar{u}_{*0}} \cdot \nabla^2 u + \frac{g h \sin \theta}{\bar{u}_{*0}^2}$$

D.m.v. de substitutie:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v' = 0 + v', \quad p = \bar{p} + p'$$

is de scheiding van het niet variabele deel (dat de permanentie weergeeft) en het variabele deel (dat de non-permanentie weergeeft) mogelijk. Voor permanentie krijgen we dan (zie p.A-4, vgl. (1^a)), omdat $\bar{u} = \bar{u}(y)$ en $\bar{v} = 0$:

$$- \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{v}{h \cdot \bar{u}_{*0}} \cdot \nabla^2 \bar{u} + \frac{g h \sin \theta}{\bar{u}_{*0}^2} = 0,$$

en voor non-permanentie (zie p.A-6, vgl. (1^d)):

$$- \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v \frac{\partial u'}{\partial y} = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{v}{h \cdot \bar{u}_{*0}} \nabla^2 u'$$

De vgln. (18) en (19) luiden resp.:

$$u = \bar{u} + u' = \bar{u} + \delta \frac{d\phi}{dy} \cdot e^{j\alpha(x-ct)}$$

en

$$v = v' = -j\alpha\delta \phi(y) \cdot e^{j\alpha(x-ct)};$$

we hebben nu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -j\alpha c \delta \frac{d\phi}{dy} \cdot e^{j\alpha(x-ct)};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = +j\alpha\delta \frac{d\phi}{dy} \cdot e^{j\alpha(x-ct)}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha^2 \delta \frac{d\phi}{dy} \cdot e^{j\alpha(x-ct)};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\bar{u}}{dy} + \delta \frac{d^2\phi}{dy^2} \cdot e^{j\alpha(x-ct)}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \delta \frac{d^3\phi}{dy^3} \cdot e^{j\alpha(x-ct)};$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = j\alpha\delta e^{j\alpha(x-ct)}; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = -\alpha^2 \delta \frac{d\phi}{dy} \cdot e^{j\alpha(x-ct)}$$

Omdat p_1 en p_0 isotrope normaalspanningen zijn volgt uit de vgl. welke direct boven vgl. (21^e) staat:

$$\bar{u}_0^2 \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{2r\bar{u}_0}{h} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - j\alpha^3 \delta \cdot \bar{u}_0^2 \cdot e^{j\alpha(x-ct)} T - gh \cos \theta \frac{\partial p}{\partial x}$$

Substitutie van u' , v' en $\frac{\partial p}{\partial x}$ in de Navier-Stokesvgl. levert dan op (indien meteen gedeeld wordt door $\delta e^{j\alpha(x-ct)}$, en termen met δ^2 worden verwaarloosd:

$$\begin{aligned} \delta e^{j\alpha(x-ct)} \left\{ -j\alpha c \frac{d\phi}{dy} + j\alpha \frac{d\phi}{dy} \bar{u} + j\alpha \cdot \phi(y) \cdot 2y \right\} = \\ = -\frac{1}{\bar{u}_0^2} \delta e^{j\alpha(x-ct)} \left\{ \frac{2r\bar{u}_0}{h} \cdot \alpha^2 \frac{d\phi}{dy} - j\alpha^3 \bar{u}_0^2 T - j\alpha gh \cos \theta \right\} + \\ + \frac{r}{h\bar{u}_0} \delta e^{j\alpha(x-ct)} \left\{ -\alpha^2 \frac{d\phi}{dy} + \frac{d^3\phi}{dy^3} \right\} \end{aligned}$$

Voor $y=\eta$ gaat dit over in:

$$\frac{d\phi(\eta)}{dy} \left\{ -j\alpha c + j\alpha \bar{u} + \frac{3r\alpha^2}{\bar{u}_0 h} \right\} = \frac{r}{h\bar{u}_0} \frac{d^3\phi(\eta)}{dy^3} + \left(j\alpha^3 T + \frac{gh \cos \theta}{\bar{u}_0^2} j\alpha \right);$$

nu is:

$$\frac{j\alpha \bar{u}_0 h}{r} = \frac{3}{2} j\alpha R = R_0, \quad \text{en} \quad T = T_* \cdot \frac{1}{h \bar{u}_0^2},$$

zodat bovenstaande vgl. te schrijven is als:

$$\frac{d\phi(\eta)}{dy} \left\{ R_0 (\bar{u} - c) + 3\alpha^2 \right\} = \frac{d^3\phi(\eta)}{dy^3} + \frac{1}{r\bar{u}_0} \cdot (\alpha^3 T_* + \alpha gh^2 \cos \theta);$$

voor $y=\eta=0$ is $\bar{u}=1$, met behulp waarvan we tenslotte krijgen:

$$\frac{d\phi(0)}{dy} \left\{ R_0 (1-c) + 3\alpha^2 \right\} = \frac{d^3\phi(0)}{dy^3} + \frac{1}{r\bar{u}_0} \cdot (\alpha^3 T_* + \alpha gh^2 \cos \theta). \quad (21^f)$$

Resumerend kunnen we nu het volgende zeggen:

indien ter vereenvoudiging ingevoerd worden de symbolen

$$A = R_0 (1-c) + 3\alpha^2, \quad B = -R_0,$$

$$C=2R_0-\alpha^4-\alpha^2 R_0(1-c) \quad \text{en} \quad D=\alpha^2 R_0$$

met $R_0 = \frac{2}{\rho} j \alpha R$, benevens de operatornotatie $D = \frac{d}{dy}$, dan kan vgl. (17^b), welke het stabiliteitsprobleem weergeeft, geschreven worden als:

$$D^4 \phi - (A + By^2) D^2 \phi - (C + Dy^2) \phi = 0, \tag{17^c}$$

waarbij als randvoorwaarden horen:

$$\phi(0) = c - 1, \tag{21^a}$$

$$D\phi(1) = 0, \tag{21^b}$$

$$\phi(1) = 0, \tag{21^c}$$

$$D^2 \phi(0) = 2 - \alpha^2 (c - 1), \tag{21^d}$$

$$(P_1 - P_0) \bar{u}_{x0}^2 - \frac{2V \bar{u}_{x0}}{h} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=0} = -\alpha^2 \delta \cdot e^{j\alpha(x-ct)} \Gamma \bar{u}_{x0}^2 - \eta h g \cos \vartheta \tag{21^e}$$

en

$$\{ R_0(1-c) + 3\alpha^2 \} D\phi(0) = D^2 \phi(0) + \frac{1}{\sqrt{u_{x0}}} (\alpha^2 \Gamma + \alpha g h^2 \cos \vartheta) \tag{21^f}$$

Vgl. (21^a) fungeert in feite niet als randvoorwaarde, omdat deze vgl. reeds vercalculeerd is in vgl. (21^f). De eerste randvoorwaarde, (21^a), is geen "echte" randvoorwaarde: immers, zijn de perturbaties van oppervlakte en stroomfunctie eenmaal aangenomen, dan geeft deze vgl. (21^a) alleen de relatie tussen beide aan.

M.b.v. de randvoorwaarden (21) kunnen nu de vier integratieconstanten bepaald worden, welke ontstaan bij integratie van de Orr-Sommerfeld vgl. (17^c).

Indien c bekend is als functie van α en de grootheden die de hoofdstroom bepalen, kan nagegaan worden voor welke bijzondere golfmodulus de bijbehorende c -waarde een positief imaginair deel heeft, want dan immers heeft de modulus een exponentieel groeiende tijdsfactor. Nagegaan moet worden welke de condities zijn, die c volledig reëel maken; c is dan de fasesnelheid van een neutrale verstoring (deze voorwaarden geven de scheiding tussen stabiliteit en instabiliteit).

III-d De uitwerking.

De vgl. (17^c) is een gewone lineaire differentiaalvgl. met veranderlijke coëfficiënten; de coëfficiënten van $D^2 \phi$ en ϕ zijn analytische functies voor iedere waarde van y (de eventuele oplossing zal dus algemeen gelden). We zullen nu veronderstellen

dat aan deze differentiaalvgl. voldaan kan worden door een oplossing van het type:

$$\phi = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n; \quad (22)$$

deze reeks zal in het gehele complexe vlak convergeren, omdat de coëfficiënten geen singulariteiten vertonen in eindige punten van het complexe vlak.

Uit vgl. (22) volgt direct:

$$D^4 \phi = \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) a_n y^{n-4}, \text{ en } D^2 \phi = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n y^{n-2};$$

substitutie van ϕ , $D^2 \phi$ en $D^4 \phi$ in vgl. (17^c) levert dan op:

$$\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) a_n y^{n-4} - (A+By^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n y^{n-2} - (C+Dy^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = 0;$$

vergelijking van de coëfficiënten van y_n geeft dan tenslotte:

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+4} - A(n+2)(n+1) a_{n+2} - \{C+Bn(n-1)\} a_n - Da_{n-2} = 0. \quad (23)$$

Vgl. (23) is de algemene recursiebetrekking in n ; de coëfficiënten a_n van de aangenomen machtreeks voor $\phi(y)$ moeten hieraan voldoen; voornoemde recursierelatie geeft iedere a_n als functie van a_0, a_1, a_2 en a_3 en de parameters A, B, C en D .

Nemen we in de recursierelatie (23) nu achtereenvolgens $n=0, n=1, n=2, \text{ etc.}$ in de wetenschap dat iedere coëfficiënt a met een negatieve suffix gelijk is aan nul, dan ontstaat een stelsel van n vgl'n. met $(n+4)$ "onbekende" coëfficiënten a_n , zodat de coëfficiënten $a_4, a_5, a_6, \text{ etc.}$ achtereenvolgens expliciet op te lossen zijn als lineaire functies van a_0, a_1, a_2 en a_3 . Worden de aldus verkregen coëfficiënten a_n t/m a_n nu gesubstitueerd in de oplossing, vgl. (22) dan krijgen we:

$$\phi(y) = a_0 \cdot f_0(y) + a_1 \cdot f_1(y) + a_2 \cdot f_2(y) + a_3 \cdot f_3(y);$$

hierin zijn a_0, a_1, a_2 en a_3 "willekeurige" constanten, en $f_0(y), f_1(y), f_2(y)$ en $f_3(y)$ vier functies, elk volledig bepaald en uitgedrukt in een reeks opklimmende machten van y .

De coëfficiënten a_0, a_1, a_2 en a_3 zijn te beschouwen als de integratieconstanten, welke ontstaan bij de integratie van de vierde orde gewone differentiaalvgl. (17^c).

Teneinde het onderhavige probleem enigszins hanteerbaar te maken, zullen we nu de volgende aannamen doen:

- we zullen onderstellen dat de parameters A, B, C en D kleine grootheden zijn met ongeveer dezelfde orde van grootte;
- gezien de gedaante van de parameters A, B, C en D is het aannemelijk voorlopig te stellen dat α^2 eveneens dezelfde orde van grootte

te heeft (dit veeleer t.b.v. de eenvoud van een eerste benadering, dan omdat dit absoluut waar is);

- is α klein, dan zijn A, B, C (en D) van dezelfde orde van grootte, te weten de orde R_0 , oftewel omdat $R_0 = \frac{3}{2} \alpha R$, de orde αR , c.q. de orde α^2 ;

- voor een eerste benadering (t.b.v. een beperking van het aantal mee te nemen termen) gaan we er van uit dat slechts termen tot en met de derde orde van grootte (hierboven genoemd) worden meegenomen in de berekening.

Een en ander betekent nu dat grootheden met de gedaante:

ABCD, ABC^2 , ABD, AB^2C , AB^2D , AB^3 , ACD, AC^3 , AD^2 , A^2BC , A^2BC^2 , A^2BD , A^2B^2 , A^2B^2C , A^2CD , A^2C^2 , A^2C^3 , A^2D , A^2D^2 , A^3B , A^3BC , A^3BD , A^3B^2 , A^3C , A^3CD , A^3C^2 , A^3D , A^4 , A^4B , A^4C , A^4C^2 , A^4D , A^5 , A^5B , A^5C , A^5D , A^6 , A^6C , A^7 , BCD, BC^3 , BD^2 , B^2C^2 , B^2D , B^3C , CD^2 , C^2D , C^4 , D^2

en alle volgende grootheden (van hogere orde) gelijk zijn aan nul.

M.b.v. het bovenstaande zijn de coëfficiënten a_n , nu uit de recursierelatie (23), op de aangegeven wijze, te berekenen; deze coëfficiënten luiden achtereenvolgens:

$$a_4 = \frac{2A}{4!} a_2 + \frac{C}{4!} a_0; \quad a_5 = \frac{32A}{5!} a_3 + \frac{C}{5!} a_1;$$

$$a_6 = \frac{2}{6!} (A^2 + C + 2B) a_2 + \frac{1}{6!} (AC + 2D) a_0;$$

$$a_7 = \frac{3 \cdot 2}{7!} (A^2 + 3 \cdot 2B + C) a_3 + \frac{1}{7!} (AC + 3 \cdot 2D) a_1;$$

$$a_8 = \frac{2}{8!} \{A^3 + 2AC + (2 \cdot 1 + 4 \cdot 3)AB + 4 \cdot 3D\} a_2 + \frac{1}{8!} (A^2C + 2AD + C^2 + 4 \cdot 3BC) a_0;$$

$$a_9 = \frac{3 \cdot 2}{9!} \{A^3 + 2AC + (3 \cdot 2 + 5 \cdot 4)AB + 5 \cdot 4D\} a_3 + \frac{1}{9!} (A^2C + 3 \cdot 2AD + C^2 + 5 \cdot 4BC) a_1;$$

$$a_{10} = \frac{2}{10!} \{3A^2C + (2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5)A^2B + (4 \cdot 3 + 6 \cdot 5)AD + C^2 + (2 \cdot 1 + 6 \cdot 5)BC + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot B^2\} a_2 +$$

$$+ \frac{1}{10!} \{2AC^2 + (4 \cdot 3 + 6 \cdot 5)ABC + (2 \cdot 1 + 6 \cdot 5)CD + 6 \cdot 5 \cdot 2BD\} a_0;$$

$$a_{11} = \frac{3 \cdot 2}{11!} \{3A^2C + (3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6)A^2B + (5 \cdot 4 + 7 \cdot 6)AD + C^2 + (3 \cdot 2 + 7 \cdot 6)BC + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2B^2\} a_3 +$$

$$+ \frac{1}{11!} \{2AC^2 + (5 \cdot 4 + 7 \cdot 6)ABC + (3 \cdot 2 + 7 \cdot 6)CD + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2BD\} a_1;$$

$$a_{12} = \frac{2}{12!} \{3AC^2 + (2 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 2)ABC + (6 \cdot 5 \cdot 2 + 8 \cdot 7 \cdot 2 + 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)AB^2 +$$

$$+ (4 \cdot 3 + 8 \cdot 7)CD + (8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2)BD\} a_2 +$$

$$+ \frac{1}{12!} \{C^3 + (4 \cdot 3 + 8 \cdot 7)BC^2 + 3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot B^2C\} a_0;$$

$$a_{13} = \frac{3 \cdot 2}{13!} \{3AC^2 + (2 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 9 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2)ABC + (7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4)AB^2 +$$

$$+ (5 \cdot 4 + 9 \cdot 8)CD + (9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 + 9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2)BD\} a_3 +$$

$$* A^4 BC,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{13!} \{ C^3 + (5 \cdot 4 + 9 \cdot 8) BC^2 + 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot B^2 C \} a_1; \\ a_{14} &= \frac{2}{14!} \{ C^3 + (2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 9) BC^2 + (6 \cdot 5 \cdot 2 + 10 \cdot 9 \cdot 2 + 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5) B^2 C + \\ & \quad + 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot B^3 \} a_2; \\ a_{15} &= \frac{3 \cdot 2}{15!} \{ C^3 + (3 \cdot 2 + 7 \cdot 6 + 11 \cdot 10) BC^2 + (7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 + 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6) B^2 C + \\ & \quad + 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot B^3 \} a_3; \end{aligned}$$

$$a_{16} = 0, \quad a_{17} = 0, \text{ etc.}$$

Gezien de aard van de parameters B en C geldt, bij bovengenoemde benadering, dat in termen van de derde orde gesteld mag worden $C = -2B$; op grond hiervan kan voor a_{12} geschreven worden:

$$a_{12} = \frac{2}{12!} \{ 10ABC + 560AB^2 + 12CD + 672BD \} a_2 + \frac{1}{12!} \{ C^3 + (4 \cdot 3 + 8 \cdot 7) BC^2 + 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot BC^2 \} a_0;$$

en wordt $a_{14} = 0$.

Substitutie van a_4 t/m a_{15} in de vgl. voor $\phi(y)$, i.e. vgl. (22), levert dan na rangschikking van de termen op:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= a_0 f_0(y) + a_1 f_1(y) + a_2 f_2(y) + a_3 f_3(y) = \\ &= a_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4!} C y^4 + \frac{1}{6!} (AC + 2D) y^6 + \frac{1}{8!} (A^2 C + 2AD + C^2 + 12BC) y^8 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{10!} (2AC^2 + 42ABC + 32CD + 60BD) y^{10} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{12!} (C^3 + 68BC^2 + 672B^2 C) y^{12} \right\} + \\ &+ a_1 \left\{ y + \frac{1}{5!} C y^5 + \frac{1}{7!} (AC + 6D) y^7 + \frac{1}{9!} (A^2 C + 6AD + C^2 + 20BC) y^9 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{11!} (2AC^2 + 62ABC + 48CD + 252BD) y^{11} + \frac{1}{13!} (C^3 + 92BC^2 + 1440 \cdot B^2 C) y^{13} \right\} + \\ &+ a_2 \left\{ y^2 + \frac{2}{4!} A y^4 + \frac{2}{6!} (A^2 + C + 2B) y^6 + \frac{2}{8!} (A^3 + 2AC + 14AB + 12D) y^8 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{10!} (3A^2 C + 44A^2 B + 42AD + C^2 + 32BC + 60B^2) y^{10} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{12!} (3AC^2 + 158ABC + 844AB^2 + 68CD + 784BD) y^{12} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{14!} (C^3 + 122BC^2 + 2940B^2 C + 5400B^3) y^{14} \right\} + \\ &+ a_3 \left\{ y^3 + \frac{3 \cdot 2}{5!} A y^5 + \frac{3 \cdot 2}{7!} (A^2 + 6B + C) y^7 + \frac{3 \cdot 2}{9!} (A^3 + 2AC + 26AB + 20D) y^9 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{3 \cdot 2}{11!} (3A^2 C + 68A^2 B + 62AD + C^2 + 48BC + 252B^2) y^{11} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{3 \cdot 2}{13!} (3AC^2 + 218ABC + 2124AB^2 + 92CD + 1872BD) y^{13} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{3 \cdot 2}{15!} (C^3 + 158BC^2 + 5532B^2 C + 27720B^3) y^{15} \right\}; \end{aligned} \tag{24}$$

hierin is de coëfficiënt van y^{14} in $f_3(y)$:

$$C^3 + 122BC^2 + 2940B^2 C + 5400B^3 = 0.$$

Zoals blijkt uit de hierboven gedeeltelijk uitgeschreven functies $f(y)$ mag de n^e -term, van elk van deze functies voorgesteld worden als:

$$n^e\text{-term} = \frac{F_n(A, B, C, D, n)}{n!} \cdot y^n,$$

en de $(n+1)^e$ -term als:

$$(n+1)^e\text{-term} = \frac{F_{n+1}(A, B, C, D, n)}{(n+1)!} \cdot y^{n+1},$$

waarin $F_n(A, B, C, D, n)$ de relatie voorstelt tussen A, B, C, D en n in de n^e -term, en $F_{n+1}(A, B, C, D, n)$ de relatie tussen A, B, C, D en n in de $(n+1)^e$ -term; de "functie" F is niet rechtstreeks uniform uit te drukken als functie van n, en de parameters A, B, C en D. Op grond van de recursierelatie (22) mag aangenomen worden dat zowel in F_n als in F_{n+1} , n tot dezelfde macht voorkomt, in dezelfde gedaante. Toepassing van het convergentiekenmerk van d'Alembert geeft:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{F_{n+1}(A, B, C, D, n)}{(n+1)!} \cdot y^{n+1} \cdot \frac{n!}{F_n(A, B, C, D, n)} \cdot \frac{1}{y^n} \\ &= \frac{F_{n+1}(A, B, C, D, n)}{F_n(A, B, C, D, n)} \cdot \frac{1}{n+1} y, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}(A, B, C, D, n)}{F_n(A, B, C, D, n)} \cdot \frac{1}{n+1} y = \frac{G(A, B, C, D)}{\infty+1} y < 1; \end{aligned}$$

dus: de reeksen $f_0(y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$ en $f_3(y)$ zijn convergent voor alle waarden van y; hoe kleiner A, B, C en D zijn, des te sneller convergeren ze, of ook: hoe kleiner R en α zijn, des te sneller verloopt de convergentie.

Opmerking

Wellicht is het mogelijk om van de functies $f_i(y)$, welke te beschouwen zijn als machtreeksen in y, de algemene term te bepalen; dit is niet gedaan, omdat in de hier toegepaste benadering slechts een beperkt aantal termen van de functies $f_i(y)$ wordt beschouwd.

Dus nu is de oplossing $\phi(y)$ bekend als volgt:

$$\phi(y) = a_0 \cdot f_0(y) + a_1 \cdot f_1(y) + a_2 \cdot f_2(y) + a_3 \cdot f_3(y);$$

a_0 , a_1 , a_2 en a_3 zijn te beschouwen als de (willekeurige) integratieconstanten welke ontstaan uit de integratie van de vierde orde gewone differentiaalvgl. (17^c);

$f_0(y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$ en $f_3(y)$ zijn vier volledig bepaalde functies, elk uitgedrukt in een reeks van opklimmende machten van y, en elk convergent voor alle waarden van y, tenzij $R \rightarrow \infty$, d.w.z. $\nu \rightarrow 0$; de coëfficiënten van de machten van y in deze functies zijn uitgedrukt in de parameters A, B, C en D;

het is niet moeilijk in te zien, dat de functies $f_i(y)$ lineair onafhankelijk van elkaar zijn, d.w.z. $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ vormen een fundamenteel systeem van vier onafhankelijke oplossingen voor $\phi = \phi(y)$.

Uit vgl. (24) volgt direct:

$$\begin{aligned}
 D\phi(y) = & a_0 \left\{ \frac{1}{3!} Cy^3 + \frac{1}{5!} (AC+2D)y^5 + \frac{1}{7!} (A^2C+2AD+C^2+12BC)y^7 + \right. \\
 & + \frac{1}{9!} (2AC^2+42ABC+32CD+60BD)y^9 + \\
 & \left. + \frac{1}{11!} (C^3+68BC^2+672B^2C)y^{11} \right\} + \\
 & + a_1 \left\{ 1 + \frac{1}{4!} Cy^4 + \frac{1}{6!} (AC+6D)y^6 + \frac{1}{8!} (A^2C+6AD+C^2+20BC)y^8 + \right. \\
 & + \frac{1}{10!} (2AC^2+62ABC+48CD+252BD)y^{10} + \frac{1}{12!} (C^3+92BC^2+1440B^2C)y^{12} \left. \right\} + \\
 & + a_2 \left\{ 2y + \frac{2}{3!} Ay^3 + \frac{2}{5!} (A^2+C+2B)y^5 + \frac{2}{7!} (A^3+2AC+14AB+12D)y^7 + \right. \\
 & + \frac{2}{9!} (3A^2C+44A^2E+42AD+C^2+32BC+60B^2)y^9 + \\
 & + \frac{2}{11!} (3AC^2+158ABC+844AB^2+68CD+784BD)y^{11} + \\
 & + \frac{2}{13!} (C^3+122BC^2+2940B^2C+5400B^3)y^{13} \left. \right\} + \\
 & + a_3 \left\{ 3y^2 + \frac{3 \cdot 2}{4!} Ay^4 + \frac{3 \cdot 2}{6!} (A^2+6B+C)y^6 + \frac{3 \cdot 2}{8!} (A^3+2AC+26AB+20D)y^8 + \right. \\
 & + \frac{3 \cdot 2}{10!} (3A^2C+68A^2B+62AD+C^2+48BC+252B^2)y^{10} + \\
 & + \frac{3 \cdot 2}{12!} (3AC^2+218ABC+2124AB^2+92CD+1872BD)y^{12} + \\
 & \left. + \frac{3 \cdot 2}{14!} (C^3+158BC^2+5532B^2C+27720B^3)y^{14} \right\}; \tag{24'}
 \end{aligned}$$

hierin is:

$$C^3 + 122BC^2 + 2940B^2C + 5400B^3 = 0$$

Aan de hand van de vgl'n. (24) en (24') is nu op eenvoudige wijze in te zien dat:

$\phi(0) = a_0$; $D\phi(0) = a_1$; $D^2\phi(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$; $D^3\phi(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3$,
 substitutie waarvan in de randvoorwaarden (21^a), (21^d) en (21^f) resp. oplevert:

$$a_0 = c - 1, \tag{25^a}$$

$$2a_2 = 2 - \alpha^2(c - 1), \tag{25^b}$$

en

$$\{R_0(1-c) + 3\alpha^2\} a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + \frac{1}{\sqrt{v_{*0}}} (\alpha^3 T_* + \alpha g h^2 \cos \theta). \tag{21^f - a)}$$

Volgens vgl. (25^a) en vgl. (25^b) zijn de constanten a_0 en a_2 nu bekend.

M.b.v. vgl. (24') kan voor de randvoorwaarde (21^b) geschreven worden:

$$0 = a_0 \cdot f_0'(1) + a_1 \cdot f_1'(1) + a_2 \cdot f_2'(1) + a_3 \cdot f_3'(1),$$

en n.b.v. vgl. (24) voor de randvoorwaarde (21^c):

$$0 = a_0 \cdot f_0(1) + a_1 \cdot f_1(1) + a_2 \cdot f_2(1) + a_3 \cdot f_3(1);$$

uit deze twee vgln. met twee onbekenden, te weten a_1 en a_3 (immers, a_0 en a_2 zijn bekend) volgt nu:

$$a_1 = \frac{f_0(1) \cdot f_3'(1) - f_0'(1) \cdot f_3(1)}{f_1'(1) \cdot f_3(1) - f_1(1) \cdot f_3'(1)} a_0 + \frac{f_2(1) \cdot f_3'(1) - f_2'(1) \cdot f_3(1)}{f_1'(1) \cdot f_3(1) - f_1(1) \cdot f_3'(1)} a_2$$

en

$$a_3 = \frac{f_0(1) \cdot f_1'(1) - f_0'(1) \cdot f_1(1)}{f_3'(1) \cdot f_1(1) - f_3(1) \cdot f_1'(1)} a_0 + \frac{f_2(1) \cdot f_1'(1) - f_2'(1) \cdot f_1(1)}{f_3'(1) \cdot f_1(1) - f_3(1) \cdot f_1'(1)} a_2,$$

waarin:

$$f_0(1) = 1 + \frac{1}{4!} C + \frac{1}{6!} (AC + 2D) + \frac{1}{8!} (A^2 C + 2AD + C^2 + 12BC) + \\ + \frac{1}{10!} (2AC^2 + 42ABC + 32CD + 60BD) + \frac{1}{12!} (C^3 + 68BC^2 + 672B^2 C);$$

$$f_0'(1) = \frac{1}{3!} C + \frac{1}{5!} (AC + 2D) + \frac{1}{7!} (A^2 C + 2AD + C^2 + 12BC) + \\ + \frac{1}{9!} (2AC^2 + 42ABC + 32CD + 60BD) + \frac{1}{11!} (C^3 + 68BC^2 + 672B^2 C);$$

$$f_1(1) = 1 + \frac{1}{5!} C + \frac{1}{7!} (AC + 6D) + \frac{1}{9!} (A^2 C + 6AD + C^2 + 20BC) + \\ + \frac{1}{11!} (2AC^2 + 62ABC + 48CD + 252BD) + \frac{1}{13!} (C^3 + 92BC^2 + 1440B^2 C);$$

$$f_1'(1) = 1 + \frac{1}{4!} C + \frac{1}{6!} (AC + 6D) + \frac{1}{8!} (A^2 C + 6AD + C^2 + 20BC) + \\ + \frac{1}{10!} (2AC^2 + 62ABC + 48CD + 252BD) + \frac{1}{12!} (C^3 + 92BC^2 + 1440B^2 C);$$

$$f_2(1) = 1 + \frac{2}{4!} A + \frac{2}{6!} (A^2 + C + 2B) + \frac{2}{8!} (A^3 + 2AC + 14AB + 12D) + \\ + \frac{2}{10!} (3A^2 C + 44A^2 B + 42AD + C^2 + 32BC + 60B^2) + \\ + \frac{2}{12!} (3AC^2 + 158ABC + 844AB^2 + 68CD + 784BD);$$

$$f_2'(1) = 2 + \frac{2}{3!} A + \frac{2}{5!} (A^2 + 2B + C) + \frac{2}{7!} (A^3 + 2AC + 14AB + 12D) + \\ + \frac{2}{9!} (3A^2 C + 44A^2 B + 42AD + C^2 + 32BC + 60B^2) + \\ + \frac{2}{11!} (3AC^2 + 158ABC + 844AB^2 + 68CD + 784BD);$$

$$f_3(1) = 1 + \frac{3 \cdot 2}{5!} A + \frac{3 \cdot 2}{7!} (A^2 + 6B + C) + \frac{3 \cdot 2}{9!} (A^3 + 2AC + 26AB + 20D) + \\ + \frac{3 \cdot 2}{11!} (3A^2 C + 68A^2 B + 62AD + C^2 + 48BC + 252B^2) + \\ + \frac{3 \cdot 2}{13!} (3AC^2 + 218ABC + 2124AB^2 + 92CD + 1872BD) + \\ + \frac{3 \cdot 2}{15!} (C^3 + 158BC^2 + 5532B^2 C + 27720B^3);$$

$$f_3'(1) = 3 + \frac{3 \cdot 2}{4!} A + \frac{3 \cdot 2}{6!} (A^2 + 6B + C) + \frac{3 \cdot 2}{8!} (A^3 + 2AC + 26AB + 20D) +$$

$$+ \frac{3 \cdot 2}{10!} (3A^2C + 68A^2B + 62AD + C^2 + 48BC + 252B^2) +$$

$$+ \frac{3 \cdot 2}{12!} (3AC^2 + 218ABC + 2124AB^2 + 92CD + 1872BD) +$$

$$+ \frac{3 \cdot 2}{14!} (C^3 + 158BC^2 + 5532B^2C + 27720B^3).$$

Met behulp van bovenstaande relaties kan -indien alleen de termen tot en met de z.g. derde orde van grootte (zie p.A-24) worden beschouwd- na een zeer uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk voor de coëfficiënt a_1 geschreven worden:

$$a_1 = \left\{ -\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{5!} A + \frac{3!6}{7!} B + \frac{4!2}{7!} C \right) - \frac{4!198}{10!} A^2 - \frac{3!366}{10!} AB + \right.$$

$$- \frac{4!5!}{10!} AC - \frac{6!9360}{14!} B^2 - \frac{6!2028}{14!} BC + \frac{3!518622}{14!} C^2 +$$

$$+ \frac{44}{8!} D +$$

$$\left(-\frac{1368}{11!} AD - \frac{4!4524}{14!} BD + \frac{4!41092}{14!} CD + \right.$$

$$+ \frac{3!41603603}{15!} A^3 + \frac{6!418176}{7! \cdot 14!} B^3 + \frac{6!1364514}{7! \cdot 15!} C^3 +$$

$$\frac{4!1089504}{15!} A^2 B - \frac{4!1243008}{15!} A^2 C + \frac{4!58113}{15!} AB^2 +$$

$$\frac{6!2663712}{7! \cdot 15!} B^2 C - \frac{8007057}{15!} AC^2 - \frac{5!9256977}{7! \cdot 15!} BC^2 +$$

$$\left. + \frac{4!2892}{15!} ABC \right\} a_0 +$$

$$+ \left\{ -\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5!} A + \frac{6}{7!} B - \frac{6}{7!} C \right) - \frac{4!1117}{10!} A^2 - \frac{4!21}{10!} AB + \frac{4!18}{10!} AC + \right.$$

$$- \frac{6!650}{14!} B^2 + \frac{4!44824}{14!} BC - \frac{3!70902}{14!} C^2 + \frac{1}{7!} D +$$

$$+ \left(\frac{840}{11!} AD + \frac{4!8996}{14!} BD - \frac{4!6616}{14!} CD + \frac{3!4!342342}{15!} A^3 + \right.$$

$$- \frac{4!6!11964}{7! \cdot 14!} B^3 - \frac{5^2 \cdot 6!108079}{7! \cdot 15!} C^3 - \frac{3!4!23621}{15!} A^2 B +$$

$$- \frac{4!4!1352}{14!} A^2 C + \frac{1266598}{15!} AB^2 - \frac{6!289476}{7! \cdot 14!} B^2 C +$$

$$\left. + \frac{4!55971}{15!} AC^2 + \frac{5!6513579}{7! \cdot 15!} BC^2 - \frac{4!1716}{14!} ABC \right\} a_2;$$

omdat a_1 gesubstitueerd zal worden in vgl. (21^f-a) en slechts termen tot en met de derde orde van grootte beschouwd worden, kunnen we stellen dat in de coëfficiënten van a_0 en a_2 alleen

de termen tot en met de tweede orde van grootte, dus tot en met D meegenomen hoeven te worden; we krijgen, dus voor a_1 :

$$a_1 = \left\{ -\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5!} A + \frac{3! \cdot 6}{7!} B + \frac{4! \cdot 2}{7!} C - \frac{4! \cdot 198}{10!} A^2 - \frac{3! \cdot 366}{10!} AB - \frac{4! \cdot 51}{10!} AC + \right. \\ \left. - \frac{6! \cdot 9360}{14!} B^2 - \frac{6! \cdot 2028}{14!} BC + \frac{3! \cdot 518622}{14!} C^2 + \frac{44}{8!} D \right\} \cdot a_0 + \\ + \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{2}{5!} A + \frac{6}{7!} B - \frac{6}{7!} C - \frac{4! \cdot 117}{10!} A^2 - \frac{4! \cdot 21}{10!} AB + \frac{4! \cdot 18}{10!} AC + \right. \\ \left. - \frac{6! \cdot 650}{14!} B^2 + \frac{4! \cdot 44824}{14!} BC - \frac{3! \cdot 70902}{14!} C^2 - \frac{1}{7!} D \right\} \cdot a_2. \quad (26^a)$$

Op geheel analoge wijze is, eveneens, na een zeer uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk, voor de coëfficiënt a_3 af te leiden:

$$a_3 = \left\{ +\frac{1}{2} + \left(-\frac{3!}{5!} A - \frac{3! \cdot 9}{7!} B - \frac{3! \cdot 33}{7!} C\right) + \frac{3! \cdot 4! \cdot 81}{10!} A^2 + \frac{4! \cdot 194}{10!} AB + \right. \\ + \frac{4! \cdot 158}{10!} AC + \frac{3! \cdot 4! \cdot 81666}{14!} B^2 + \frac{4! \cdot 4! \cdot 4849}{14!} BC - \frac{3! \cdot 1293994}{14!} C^2 + \\ - \frac{4! \cdot 34}{9!} D + \frac{4! \cdot 173}{11!} AD + \frac{4! \cdot 4! \cdot 563}{14!} BD - \frac{3! \cdot 4! \cdot 14006}{14!} CD + \\ - \frac{4! \cdot 4! \cdot 399399}{15!} A^3 - \frac{3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 166107}{7! \cdot 14!} B^2 - \frac{3! \cdot 4! \cdot 1110181}{7! \cdot 14!} C^3 + \\ - \frac{3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 149071}{15!} A^2 B - \frac{3! \cdot 4! \cdot 304317}{15!} A^2 C - \frac{3! \cdot 4! \cdot 174627}{15!} AB^2 + \\ + \frac{3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 82479}{7! \cdot 14!} B^2 C + \frac{3! \cdot 3! \cdot 289533}{15!} AC^2 + \frac{4! \cdot 11386299}{7! \cdot 14!} BC^2 + \\ \left. - \frac{3! \cdot 4! \cdot 1309}{15!} ABC \right\} a_0 + \\ + \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{9}{5!} A - \frac{16}{7!} B + \frac{16}{7!} C + \frac{3! \cdot 4! \cdot 59}{10!} A^2 + \frac{3! \cdot 214}{10!} AB - \frac{4! \cdot 47}{10!} AC + \right. \\ + \frac{3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 351}{14!} B^2 - \frac{4! \cdot 100360}{14!} BC + \frac{3! \cdot 172874}{14!} C^2 + \frac{3! \cdot 22}{9!} D + \\ - \frac{4! \cdot 74}{11!} AD - \frac{406016}{14!} BD + \frac{328736}{14!} CD - \frac{3! \cdot 4! \cdot 969969}{15!} A^3 + \\ + \frac{3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 95127}{7! \cdot 14!} B^3 + \frac{4! \cdot 912406}{7! \cdot 14!} C^3 - \frac{3! \cdot 4! \cdot 261729}{15!} A^2 B + \\ + \frac{3! \cdot 4! \cdot 213226}{15!} A^2 C - \frac{4! \cdot 139073}{15!} AB^2 + \frac{4! \cdot 4! \cdot 507449}{7! \cdot 14!} B^2 C + \\ \left. - \frac{2405139}{15!} AC^2 - \frac{4! \cdot 2388793}{7! \cdot 14!} BC^2 + \frac{3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 1757}{15!} ABC \right\} a_2;$$

aangezien voor termen met de derde orde van grootte geldt dat

$C = -2B$, kunnen de uitdrukkingen met de volgende gedaante:
 $BD+CD, A^2B+A^2C, AB^2+AC^2+ABC, B^3+C^3+B^2C+BC^2$,
 samengenomen worden, waardoor de vgl. voor a_3 verder te
 vereenvoudigen is tot:

$$\begin{aligned}
 a_3 = & \left\{ + \frac{1}{2} - \frac{3!}{5!}A - \frac{3! \cdot 9}{7!}B - \frac{3! \cdot 33}{7!}C + \frac{3! \cdot 181}{10!}A^2 + \frac{4! \cdot 194}{10!}AB + \right. \\
 & + \frac{4! \cdot 158}{10!}AC + \frac{3! \cdot 181666}{14!}B^2 + \frac{4! \cdot 14849}{14!}BC - \frac{3! \cdot 1293994}{14!}C^2 + \\
 & - \frac{4! \cdot 34}{9!}D + \frac{4! \cdot 173}{11!}AD + \frac{3! \cdot 130664}{14!}BD - \frac{4! \cdot 399399}{15!}A^3 + \\
 & \left. - \frac{3! \cdot 1285792}{15!}A^2B + \frac{3! \cdot 18526754}{7! \cdot 14!}B^3 + \frac{3! \cdot 1117524}{15!}AB^2 \right\} a_0 + \\
 & + \left\{ - \frac{1}{2} - \frac{9}{5!}A - \frac{16}{7!}B + \frac{16}{7!}C + \frac{3! \cdot 159}{10!}A^2 + \frac{3! \cdot 214}{10!}AB - \frac{4! \cdot 47}{10!}AC + \right. \\
 & + \frac{3! \cdot 141351}{14!}B^2 - \frac{4! \cdot 100360}{14!}BC + \frac{3! \cdot 172874}{14!}C^2 + \frac{3! \cdot 22}{9!}D + \\
 & - \frac{4! \cdot 74}{11!}AD - \frac{4! \cdot 4312}{14!}BD - \frac{3! \cdot 1969969}{15!}A^3 - \frac{3! \cdot 1688181}{15!}A^2B + \\
 & \left. - \frac{3! \cdot 1764269}{7! \cdot 14!}B^3 - \frac{3! \cdot 183782}{15!}AB^2 \right\} a_2. \quad (27^a)
 \end{aligned}$$

Vervolgens zullen we nu de parameters A, B, C en D (zie p. A-21, 22) gaan substitueren in de vgl. (26^a); aangezien de coëfficiënt a_1 , gesubstitueerd zal worden in vgl. (21^f-a), behoeven slechts termen tot en met de tweede orde van grootte meegenomen te worden, wat inhoudt dat termen waarin factoren van de navolgende gedaante voorkomen:

$$\alpha^2 R_0^2, \alpha^4 R_0, \alpha^4 R_0^2, \alpha^6, \alpha^6 R_0, \alpha^8,$$

verwaarloosd kunnen worden; wanneer nu, tevens nog de gewone breuken vervangen worden door decimale breuken, dan gaat vgl. (26^a), na een uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk over in:

$$\begin{aligned}
 a_1 = & \left\{ - \frac{3}{2} + (+0,0369047R_0 - 0,0250000cR_0 + 0,0500000\alpha^2) + \right. \\
 & + (-0,0013095c^2R_0^2 + 0,0026884cR_0^2 - 0,0012800R_0^2 + \\
 & + 0,0147618c\alpha^2R_0 - 0,0138093\alpha^2R_0 - 0,0147618\alpha^4) \left. \right\} a_0 + \\
 & \left\{ + \frac{1}{2} + (+0,0130952R_0 - 0,0166667cR_0 + 0,0333334\alpha^2) + \right. \\
 & + (-0,0007738c^2R_0^2 + 0,0011707cR_0^2 - 0,0004465R_0^2 + \\
 & + 0,0019047c\alpha^2R_0 - 0,0013493\alpha^2R_0 - 0,0019047\alpha^4) \left. \right\} a_2; \quad (26^b)
 \end{aligned}$$

worden de parameters A, B, C en D nu ook gesubstitueerd in vgl. (27^a), en worden weer alleen termen tot en met de derde orde van grootte meegenomen, i.e. termen waarin factoren voorkomen van de navolgende gedaante:

$$\alpha^4 R_0^2, \alpha^6 R_0, \alpha^8,$$

worden verwaarloosd, dan gaat vgl. (27^a) na een uitgebreide

hoeveelheid numeriek rekenwerk over in:

$$\begin{aligned}
a_3 = & \left\{ + \frac{1}{2} + (-0,1178571R_0 + 0,0500000cR_0 - 0,1000000\alpha^2) + \right. \\
& + (+0,0032143c^2R_0^2 - 0,0072355cR_0^2 + 0,0037357R_0^2 + \\
& - 0,0521429c\alpha^2R_0 + 0,0515080\alpha^2R_0 + 0,0521429\alpha^4) + \\
& + (+0,0001759c^3R_0^3 - 0,0004962c^2R_0^3 + 0,0004518cR_0^3 + \\
& - 0,0001343R_0^3 - 0,0021004c^2\alpha^2R_0^2 + 0,0035824c\alpha^2R_0^2 + \\
& - 0,0015069\alpha^2R_0^2 + 0,0052458\alpha^4cR_0 - 0,0045234\alpha^4R_0 + \\
& \left. - 0,0034972\alpha^6) \right\} a_0 + \\
& + \left\{ - \frac{1}{2} + (-0,0654762R_0 + 0,0750000cR_0 - 0,1500000\alpha^2) + \right. \\
& + (+0,0023413c^2R_0^2 - 0,0037072cR_0^2 + 0,0014826R_0^2 + \\
& - 0,0061906c\alpha^2R_0 + 0,0046036\alpha^2R_0 + 0,0061906\alpha^4) + \\
& + (+0,0001068c^3R_0^3 - 0,0002446c^2R_0^3 + 0,0001880cR_0^3 + \\
& - 0,0000487R_0^3 - 0,0003300c^2\alpha^2R_0^2 + 0,0004765c^2\alpha^2R_0^2 + \\
& - 0,0001727\alpha^2R_0^2 + 0,0003492\alpha^4cR_0 - 0,0002102\alpha^4R_0 + \\
& \left. - 0,0002328\alpha^6) \right\} a_2. \tag{27}
\end{aligned}$$

Substitutie van a_0 (volgens 25^a) en a_2 (volgens vgl. (25^b)) in vgl. (26^b) geeft na een uitgebreide herleiding en daaropvolgende rangschikking der termen voor a_1 :

$$\begin{aligned}
a_1 = & + (+1 - \frac{3}{2}c) + \\
& + (-0,0238095R_0 + 0,0452380cR_0 - 0,0250000c^2R_0 + \\
& - 0,2666666\alpha^2 + 0,3000000c\alpha^2) + \\
& + (+0,0008335R_0^2 - 0,0027977cR_0^2 + 0,0032241c^2R_0^2 - 0,0013095c^3R_0^2 + \\
& + 0,0295238\alpha^4 - 0,0314285c\alpha^4 + 0,0190076\alpha^2R_0 - 0,0415473c\alpha^2R_0 + \\
& + 0,0230951c^2\alpha^2R_0) + \\
& + (-0,0002233\alpha^2R_0^2 + 0,0008087c\alpha^2R_0^2 - 0,0009723c^2\alpha^2R_0^2 + 0,0003869 \\
& \quad \cdot c^3\alpha^2R_0^2 + \\
& - 0,0006747\alpha^4R_0 + 0,0016271c\alpha^4R_0 - 0,0009524c^2\alpha^4R_0 + \\
& - 0,0009524\alpha^6 + 0,0009524c\alpha^6);
\end{aligned}$$

omdat a_1 bij substitutie in vgl. (21^f-a), in deze gedaante straks vermenigvuldigd zal worden met de factor $\{R_0(1-c)+3\alpha^2\}$, behoeven alleen de termen tot en met de tweede orde van grootte beschouwd te worden, zodat we tenslotte voor a_1 krijgen:

$$\begin{aligned}
 a_1 = & +(1-\frac{3}{2}c) + \\
 & +(-0,0238095R_0 + 0,0452380cR_0 - 0,0250000c^2R_0 - 0,2666666\alpha^2 + \\
 & + 0,3000000c\alpha^2) + \\
 & +(0,0008335R_0^2 - 0,0027977cR_0^2 + 0,0032241c^2R_0^2 - 0,0013095c^3R_0^2 + \\
 & + 0,0295328\alpha^4 - 0,0314285c\alpha^4 + 0,0190076\alpha^2R_0 - 0,0415473c\alpha^2R_0 + \\
 & + 0,0230951c^2\alpha^2R_0); \tag{26^c}
 \end{aligned}$$

evenzo geeft substitutie van a_0 (volgens vgl. (25^a)) en a_2 volgens vgl. (25^b) in vgl. (27^b), na een uitgebreide herleiding en daarop volgende rangschikking der termen, voor a_3 tenslotte:

$$\begin{aligned}
 6a_3 = & +(-6+3c) + \\
 & +(0,3142854R_0 - 0,5571426cR_0 + 0,3000000c^2R_0 - 1,8000000\alpha^2 + \\
 & + 0,9000000c\alpha^2) + \\
 & +(-0,0135186R_0^2 + 0,0435840cR_0^2 - 0,0486510c^2R_0^2 + 0,0192858c^3R_0^2 + \\
 & - 0,7257138\alpha^4 + 0,7628574c\alpha^4 - 0,4778550\alpha^2R_0 + 1,0067904c\alpha^2R_0 + \\
 & - 0,5378574c^2\alpha^2R_0) + \\
 & +(0,0005136R_0^3 - 0,0023886cR_0^3 + 0,0042204c^2R_0^3 - 0,0033918c^3R_0^3 + \\
 & + 0,0010554c^4R_0^3 + 0,0124530\alpha^2R_0^2 - 0,0432462c\alpha^2R_0^2 + \\
 & + 0,0502626c^2\alpha^2R_0^2 - 0,0196266c^3\alpha^2R_0^2 + 0,0396900\alpha^4R_0 + \\
 & - 0,0889026c\alpha^4R_0 + 0,0500466c^2\alpha^4R_0 + 0,0381582\alpha^6 - 0,039550c\alpha^6). \tag{27}
 \end{aligned}$$

Als nu tenslotte a_1 , volgens vgl. (26^c) en a_3 , volgens vgl. (27^c), gesubstitueerd worden in vgl. (21^f-a), dan levert dit na een zeer uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk, en daarop volgende rangschikking der termen op:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{f}{\sqrt{u_0}} (\alpha^3 \Gamma_* + \alpha g h^2 \cos \theta) + \\
 & +(-6+3c) + \\
 & +(-0,6857146R_0 + 1,9428574cR_0 - 1,2000000c^2R_0 - 4,8000000\alpha^2 + \\
 & + 5,4000000c\alpha^2) + \\
 & +(0,0102909R_0^2 - 0,0254635cR_0^2 + 0,0215870c^2R_0^2 - 0,0057142c^3R_0^2 + \\
 & + 0,0742860\alpha^4 - 0,1371426c\alpha^4 - 0,1397599\alpha^2R_0 + \\
 & + 0,3044098c\alpha^2R_0 - 0,1628574c^2\alpha^2R_0) + \\
 & +(-0,0003199R_0^3 + 0,0012426cR_0^3 + 0,0011418c^3R_0^3 + \\
 & - 0,0002541c^4R_0^3 - 0,0090551\alpha^2R_0^2 + 0,0257018c\alpha^2R_0 + \\
 & * - 0,0018074c^2R_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0,0240521c^2\alpha^2R_0^2 + 0,0073970c^3\alpha^2R_0^2 - 0,0468566\alpha^4R_0 + \\
& + 0,0966916c\alpha^4R_0 - 0,0506672c^2\alpha^4R_0 - 0,0504132\alpha^6 + \\
& + 0,0547305c\alpha^6) = \\
& = 0 .
\end{aligned}$$

(28)

Vgl. (28) is nu de gezochte voorwaarde van het type $F(\alpha, R_0, c) = 0$, waarin $R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R$, resulterend uit het karakteristieke waarde probleem, waartoe voor een gegeven permanente stroming de vgl. die het stabiliteitsprobleem beschrijven, herleid kunnen worden (zie p.A-7):

Voor ieder paar reële waarden van α en R is er een over het algemeen complexe karakteristieke waarde $c = c_r + jc_j$. Ingevolge de gelineariseerde theorie heet de golfmodulus een exponentiële groeiende tijdsfactor, c.q. is de verstoring instabiel als het imaginaire deel c_j van c positief is, en dempt de verstoring uit indien c_j negatief is. De voorwaarde $c_j = 0$ geeft de neutrale toestand (i.e. een "staande trilling") weer en leidt tot een relatie tussen α en R waaruit een criterium is af te leiden. Nagegaan moet dus worden welke de condities zijn die c volledig reëel maken; c is dan de fase snelheid van een neutrale verstoring, en deze voorwaarden geven de scheiding tussen stabiliteit en instabiliteit.

Beschouwen we nu vgl. (28), dan is het probleem: wanneer is c volledig reëel, oftewel wanneer is c_j gelijk aan nul. Het is niet moeilijk in te zien dat vgl. (28) in de gedaante gebracht kan worden:

$$\operatorname{Re}\{28\} + j \operatorname{Im}\{28\} = 0,$$

waaraan voldaan wordt door $\operatorname{Re}\{28\} = 0$ en $\operatorname{Im}\{28\} = 0$; hieruit volgt direct dat c alleen zuiver reëel kan zijn, indien de reële wortels c van $\operatorname{Re}\{28\} = 0$, uitgedrukt in α en R , voldoen aan

$\operatorname{Im}\{28\} = 0$, waaruit dan de gevraagde relatie tussen α en R , welke de neutrale stabiliteit weergeeft, volgt.

We zullen nu eerst het reële en het imaginaire deel van vgl. (28) gaan bepalen; omdat $R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R$ volgt uit vgl. (28) dat:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\{28\} = & -6 + 3c - 4,8000000\alpha^2 + 5,4000000c\alpha^2 + \\
& + 0,0102909R_0^2 - 0,0254635cR_0^2 + 0,0215870c^2R_0^2 - 0,0057142c^3R_0^2 + \\
& + 0,0742860\alpha^4 - 0,1371426c\alpha^4 + \\
& - 0,0090551\alpha^2R_0^2 + 0,0257018c\alpha^2R_0^2 - 0,0240521c^2\alpha^2R_0^2 + \\
& + 0,0073970c^3\alpha^2R_0^2 - 0,0504132\alpha^6 + 0,0547305c\alpha^6 = 0,
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 j. \operatorname{Im}\{28\} = & + \frac{j}{\sqrt{u_{ko}}} (\alpha^3 \Gamma_* + \alpha g h^2 \cos \theta) + \\
 & - 0,6857146 R_0 + 1,9428574 c R_0 - 1,2000000 c^2 R_0 + \\
 & - 0,1397599 \alpha^2 R_0 + 0,3044098 c \alpha^2 R_0 - 0,1628574 c^2 \alpha^2 R_0 + \\
 & - 0,0003199 R_0^3 + 0,0012426 c R_0^3 - 0,0013014 c^2 R_0^3 + \\
 & + 0,0011418 c^3 R_0^3 - 0,0002541 c^4 R_0^3 - 0,0468566 \alpha^4 R_0 + \\
 & + 0,0966916 c \alpha^4 R_0 - 0,0506672 c^2 \alpha^4 R_0 = 0;
 \end{aligned}$$

substitutie hierin van $R_0 = \frac{3}{2} j \alpha R$ en rangschikken van de termen geeft dan resp.:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\{28\} = & + c^3 (+0,0128570 \alpha^2 R^2 - 0,0166433 \alpha^4 R^2) + \\
 & + c^2 (-0,0485708 \alpha^2 R^2 + 0,0541172 \alpha^4 R^2) + \\
 & + c (+3+5,4 \alpha^2 + 0,0572929 \alpha^2 R^2 - 0,1371426 \alpha^4 + \\
 & - 0,0578291 \alpha^4 R^2 + 0,0547305 \alpha^6) + \\
 & + (-6-4,8 \alpha^2 - 0,0231545 \alpha^2 R^2 + 0,0742860 \alpha^4 + \\
 & + 0,0203740 \alpha^4 R^2 - 0,0504132 \alpha^6) = 0,
 \end{aligned} \tag{28^a}$$

en

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}\{28\} = & \frac{1}{\sqrt{u_{ko}}} (\alpha^3 \Gamma_* + \alpha g h^2 \cos \theta) + \\
 & + \frac{3}{2} \alpha R \{ + c^4 (+0,0005717 \alpha^2 R^2) + \\
 & + c^3 (-0,0025691 \alpha^2 R^2) + \\
 & + c^2 (-1,2000000 - 0,1628574 \alpha^2 + 0,0040532 \alpha^2 R^2 + \\
 & - 0,0506672 \alpha^4) + \\
 & + c (+1,9428574 + 0,3044098 \alpha^2 - 0,0027959 \alpha^2 R^2 + \\
 & + 0,0966916 \alpha^4) + \\
 & + (-0,6857146 - 0,1397599 \alpha^2 + 0,0007198 \alpha^2 R^2 + \\
 & - 0,0468566 \alpha^4) \} = 0.
 \end{aligned} \tag{28^b}$$

Vgl. (28^a) is een derdegraadsvergelijking en vgl. (28^b) een vierdegraadsvgl. in de als onbekende te beschouwen c ; omdat de gedaante van vgl. (28^a) eenvoudiger is dan die van vgl. (28^b), ligt het voor de hand om eerst de reële wortel(s) uit vgl. (28^a) te bepalen, en deze vervolgens te substitueren in vgl. (28^b), teneinde de verlangde relatie tussen α en R te verkrijgen, welke de neutrale stabiliteit weergeeft.

Bepalen we ons dus eerst tot vgl. (28^a); dit is een oneven-c.q. derdegraadsvgl. in c met reële coëfficiënten, wat impliceert dat er of drie reële wortels c zijn, of één reële wortel

plus twee complex toegevoegde wortels.

Indien $\alpha=0$ en $R \neq 0$, gaat de derdegraadsvgl. (28^a) over in:

$$c(+3)-6=0, \text{ oftewel } c=2, \text{ i.e. reëel;}$$

als $R=0$, en $\alpha \neq 0$, wordt de derdegraadsvgl. (28^a):

$$c(+3+5,4\alpha^2-0,1371426\alpha^4+0,0547305\alpha^6) + \\ +(-6-4,8\alpha^2+0,0742860\alpha^4-0,0504132\alpha^6)=0,$$

wat -met verwaarlozing van termen die hoger zijn dan de derde orde van grootte- na uitdelen oplevert:

$$c_1=2(1-\alpha^2+1,8333332\alpha^4-3,3555553\alpha^6).$$

Voor $\alpha=0$ en $R \neq 0$ geldt $c=2$; dit betekent dat in de wortel c_1 de termen R en R^2 niet voorkomen, oftewel c_1 bevat de algemene term R^n niet. c_1 kan de termen αR , $\alpha^2 R^2$ en $\alpha^4 R^2$ wel bevatten (de mogelijke termen $\alpha^2 R$ en $\alpha^3 R^2$ worden niet meegerekend, omdat deze door de gedane aannamen qua grootte-orde niet meer goed te beoordelen zijn; zij zijn n.l. van de grootte-orde $\frac{3}{2}$, resp. $\frac{5}{2}$; de mogelijke term $\alpha^3 R^3$ komt niet voor omdat de hoogste macht van R in vgl. (28^a) 2 is).

De wortel c_1 zal in het algemeen dus de gedaante hebben:

$$c_1=2(1-\alpha^2+1,8333332\alpha^4-3,3555553\alpha^6+p\alpha R+q\alpha^2 R^2+r\alpha^4 R^2).$$

Wordt deze waarde van c_1 nu gesubstitueerd in vgl. (28^a), en beschouwen we alleen de termen tot en met de derde orde van grootte, dan zijn, na een uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk, de voorwaarden af te leiden, waaraan de coëfficiënten p , q en r moeten voldoen; deze luiden:

$$\left. \begin{array}{l} + 6p=0 \\ + 0,0345874p=0 \\ + 10,8p=0 \\ - 0,2742852p=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6q+0,0000041=0 \\ -0,0465492 + 10,8q + 6r =0 \end{array} ,$$

waaruit volgt:

$$p=0, \quad q=-0,0000007, \quad r=+0,0077594;$$

het resultaat $p=0$ was te verwachten, omdat de coëfficiënten van de machten van c in vgl. (28^a) geen term in αR bevatten; evenzo is het bestaan van termen in $\alpha^2 R$, $\alpha^3 R^2$, $\alpha^3 R^3$, $\alpha^3 R$ en $\alpha^5 R$ te verwachten.

De wortel c_1 wordt nu dus:

$$c_1 = +2(1 - \alpha^2 + 1,8333332\alpha^4 - 0,0000007\alpha^2 R^2 + 0,0077594\alpha^4 R^2 + \\ - 3,3555553\alpha^6)$$

Delen we $(c - c_1)$ uit op vgl. (28^a) dan wordt het quotiënt na een zeer uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk, indien alleen termen tot en met de derde orde van grootte worden beschouwd:

$$+ c^2 (+0,0128570\alpha^2 R^2 - 0,0166433\alpha^4 R^2) + \\ + c (-0,0228568\alpha^2 R^2 - 0,0048834\alpha^4 R^2) + \\ + (+3+5,4\alpha^2 + 0,0115793\alpha^2 R^2 - 0,1371426\alpha^4 - 0,0218823\alpha^4 R^2 + \\ + 0,0547305\alpha^6) = 0;$$

deze vierkantsvgl. in c bevat twee wortels, c_2 en c_3 ; teneinde na te gaan of deze wortels (toegevoegd) complex of reëel zijn, bepalen we de discriminant:

$$+ (-0,0228568\alpha^2 R^2 - 0,0048834\alpha^4 R^2)^2 + \\ - 4(+0,0128570\alpha^2 R^2 - 0,0166433\alpha^4 R^2) \cdot (+3+5,4\alpha^2 + 0,0115793\alpha^2 R^2 + \\ - 0,1371426\alpha^4 - 0,0218823\alpha^4 R^2 + 0,0547305\alpha^6) = \\ = (-0,1542840\alpha^2 R^2 - 0,0779916\alpha^4 R^2) < 0;$$

dus de wortels c_2 en c_3 zijn complex (in feite is al direct in te zien dat er één reële* complexe wortels zijn, n.l. voor het geval dat $R=0, \alpha \neq 0$, en $R \neq 0, \alpha = 0$ etc.).

Dus: $\text{Re}\{28\} = 0$, oftewel vgl. (28^a) heeft één reële wortel, en wel:

$$c = +2(1 - \alpha^2 + 1,8333332\alpha^4 - 0,0000007\alpha^2 R^2 + 0,0077594\alpha^4 R^2 + \\ - 3,3555553\alpha^6) \quad (29)$$

Het is niet moeilijk in te zien dat uit de vgl. (10) en (11) direct afgeleid kan worden:

$$h^2 = \left\{ \frac{3r^2 R}{g \sin \theta} \right\}^{\frac{2}{3}} \quad \text{en} \quad \bar{u}_{*0} = \frac{1}{2} \left\{ g r R^2 g \sin \theta \right\}^{\frac{1}{3}},$$

n.b.v. welke relaties h en \bar{u}_{*0} uit het imaginaire deel van vgl. (28), i.e. vgl. (28^b), geëlimineerd kunnen worden; indien deze eliminatie nu wordt uitgevoerd, en tevens de gevonden c -waarde volgens vgl. (29) - i.e. de enige reële wortel van het reële deel van vgl. (28) - wordt gesubstitueerd in vgl. (28^b), dan levert dit (een benadering van) de gezochte relatie tussen α en R met gedaante $F(\alpha, R) = 0$ op, welke relatie de voorwaarde voor neutrale stabiliteit weergeeft.

Is de vgl. $F(\alpha, R) = 0$ bekend, dan kunnen in een α, R -diagram de

* en twee

waarden van α uitgezet worden tegen die van R , waarbij de hellingshoek θ als parameter fungeert, (de grootheden Γ_* en ν zijn fysisch voorgeschreven); voor elke waarde van θ in het interval $0 < \theta \leq 90^\circ$ zal men in principe dus een α, R -kromme vinden, m.a.w. voor zekere waarde van θ zal bij elke eindige waarde van R een z.g. critiek (dimensieloos) golfgetal $\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda}$ bestaan, bij overschrijden waarvan de stroming instabiel wordt. Uit de vgl. (28^b) en (29) kan direct de conclusie getrokken worden dat alle voornoemde α, R -krommen door het punt $\alpha=0, R=0$ gaan.

Bovengenoemde eliminatie van \bar{u}_{*0} en h en de daaropvolgende substitutie van c in vgl. (28^b) ter verkrijging van de functie $F(\alpha, R)=0$ is niet uitgevoerd, met als reden, enerzijds de verwachte gecompliceerdheid van de bewerking en het resultaat, anderzijds het sterke vermoeden dat het verkregen resultaat $F(\alpha, R)=0$ alleen maar geldig zal zijn voor kleine waarden van α en R , en derhalve praktisch van weinig nut is: immers, we zijn uitgegaan van de aannamen dat α klein is en alleen termen tot en met de derde orde van grootte (i.e. de orde $\alpha^3 R^3$) beschouwd worden (zie p.A-24); d.w.z. de kleinste mee te nemen termen zijn $\alpha^4 R^2$ en α^6 , op grond waarvan het, i.v.m. de betrachte nauwkeurigheid, niet moeilijk is in te zien dat het resultaat alleen maar voldoende nauwkeurig zal gelden indien b.v. $R < 50$.

Alhoewel om bovenaangegeven redenen de gezochte relatie $F(\alpha, R)=0$, i.e. de benaderde voorwaarde voor neutrale stabiliteit, niet is afgeleid, kunnen we toch het volgende opmerken:

- kwalitatief is de weergave en benaderde oplossing van het gestelde probleem juist: de tendens blijft gelijk;
- kwantitatief zal het resultaat alleen geldig zijn in de omgeving van het punt $\alpha=0, R=0$;
- wordt de "oppervlaktetenspanning" Γ_* groter, dan mag men verwachten dat de neiging tot instabiliteit afneemt (de oppervlaktetenspanning heeft een stabiliserend effect).

Op grond van het bovenstaande is het een nu voor de hand liggende zaak om na te gaan wat er gebeurt indien α zeer klein is.

Het dimensieloze golfgetal α is gegeven als (zie p.A-15):

$$\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda_*},$$

waaruit, aangezien $h \neq 0$, volgt dat de golflengte λ_* zeer groot wordt indien α tot zeer klein nadert; m.a.w. indien α een eendige grootte is ongeveer gelijk aan nul, hebben we te maken met het geval van een kleine "lange golf" verstoring, d.w.z. een typisch verticale afmeting (h) is klein t.o.v. een typisch horizontale afmeting (λ_*). Indien α nu zo klein verondersteld wordt dat $\alpha^2 \approx 0$, is het niet moeilijk in te zien dat het reële deel van vgl. (28), i.e. vgl. (28^a), overgaat in:

$$c = c_r = 2,$$

en het imaginaire deel van vgl. (28), i.e. vgl. (28^b), geschreven kan worden als:

$$\frac{\alpha}{3\sqrt{u}_{*0}} (\alpha^2 \tau_* + gh^2 \cos \theta) + \\ + \frac{3}{2} \alpha R \{ (-1,2000000)c^2 + (+1,9428574)c + (-0,6857146) \} = 0;$$

de coëfficiënt α^2 van τ_* is niet verwaarloosd, aangezien τ_*/r een groot getal is. Samengesteld leveren beide bovenstaande relaties op:

$$\frac{j\alpha}{3\sqrt{u}_{*0}} (\alpha^2 \tau_* + gh^2 \cos \theta) + 3c - 6 + \\ + \frac{3}{2} j\alpha R \{ (-1,2000000)c^2 + (+1,9428574)c + (-0,6857146) \} = 0, \quad (30)$$

welke vgl. ook direct is af te leiden uit vgl. (28), indien daarin gesteld wordt $\alpha^2 \approx 0$.

Onderstellen we nu dat $c = c_r + j c_j$, waarin zowel c_r als c_j reëel zijn, dan kan bovenstaande vgl. (30) direct geschreven worden in de gedaante:

$$c = c_r + j c_j = 2 - j\alpha \left\{ \frac{1}{3\sqrt{u}_{*0}} (\alpha^2 \tau_* + gh^2 \cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R (-1,2000000 c^2 + 1,9428574 c - 0,6857146) \right\}; \quad (30^a)$$

scheiding van het reële deel en het imaginaire deel van c geeft:

$$c_r = 2, \quad (30^b)$$

en

$$c_j = -\alpha \left\{ \frac{1}{3\sqrt{u}_{*0}} (\alpha^2 \tau_* + gh^2 \cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R (-1,2000000 c^2 + 1,9428574 c - 0,6857146) \right\}.$$

M.b.v. het reële deel $c_r = 2$ gaat het imaginaire deel c_j na enige herleiding over in:

$$c_j = -\alpha \left\{ \frac{1}{3\sqrt{u}_{*0}} (\alpha^2 \tau_* + gh^2 \cos \theta) - 0,8R \right\}. \quad (30^c)$$

Aan de hand van de vgl'n. (10) en (11) is c_j na enige herleiding

$$c_j = \frac{1}{2} \alpha R \left\{ 1,6 - \frac{\alpha^2 \bar{v}_*}{h \bar{u}_{*0}^2} - \frac{g h \cos \theta}{\bar{u}_{*0}^2} \right\}$$

Zoals we op p.A-7 gezien hebben is er sprake van instabiliteit indien $c_j > 0$, waardoor we, met $\alpha R \neq 0$, krijgen:

$$1,6 - \frac{\alpha^2 \bar{v}_*}{h \bar{u}_{*0}^2} - \frac{g h \cos \theta}{\bar{u}_{*0}^2} > 0. \tag{31}$$

Ongelijkheid (31) is nu de voorwaarde voor instabiliteit, indien we te maken hebben met een "lange golf" verstoring met kleine amplitudo; de tweede term in het linkerlid geeft de invloed van de oppervlaktespanning weer, en de derde term de invloed van de zwaartekracht. Indien $\alpha=0$, i.e. de golflengte van de verstoring is oneindig, gaat de ongelijkheid (31) over in:

$$1,6 - \frac{g h \cos \theta}{\bar{u}_{*0}^2} > 0,$$

welke ongelijkheid m.b.v. de vgl. (10) en (11) na enige herleiding geschreven kan worden als:

$$R \cdot \text{tg} \theta > \frac{1}{1,2}; \tag{31^a}$$

wordt de "oppervlaktespanning" \bar{v}_* in ongelijkheid (31) gelijk gesteld aan nul, dan volgt daaruit dat ook een niet oneindig "lange golf" verstoring instabiel is, indien aan ongelijkheid (31^a) wordt voldaan.

Beschouwen we het geval dat de hellingshoek θ gelijk is aan nul, dan volgt uit vgl. (10) direct dat $\bar{u}_{*0} = 0$; wat volgens ongelijkheid (31) impliceert dat de "stroming" altijd stabiel is, hetgeen geenszins verwondering behoeft te wekken, omdat we in dit geval te maken hebben met een stationaire toestand.

Volgens ongelijkheid (31^a) is het voor het geval $\theta = 90^\circ$ zonder meer duidelijk dat de stroming altijd stabiel is als $R > 0$.

Vgl. (30^a) luidt: $c = c_p = 2$; geven we de grootheid c weer een dimensie door de substitutie (zie p.A-9) $c_* = c \bar{u}_{*0}$, dan levert dit op:

$$c_* = 2 \bar{u}_{*0},$$

welk resultaat volledig overeenstemt met dat van vgl. (12), alleen is vgl. (12) via een veel simpeler beschouwingwijze afgeleid; substitueren we in bovenstaande relatie $\bar{u}_{*0} = \frac{2}{3} \bar{u}_{*gem}$ (zie p.A-9), dan krijgen we:

$$c_* = 3 \bar{u}_{*gem},$$

wat te schrijven is als:

$$c_* - \bar{u}_{*gem} = 2 \bar{u}_{*gem},$$

waaruit direct volgt:

$$\frac{2\bar{u}^*_{gem}}{c-\bar{u}^*_{gem}} = 1;$$

deze betrekking nu komt geheel overeen met de in Hoofdstuk IV afgeleide voorwaarde voor neutrale stabiliteit in geval van een tweedimensionale permanent eenparige laminaire stroming, c.q. met de in Hoofdstuk V afgeleide noodzakelijke (minimum-) voorwaarde voor het ontstaan en de vorming van laminaire rolgolven. Evenzo is de ongelijkheid (31^a) analoog met het in Hoofdstuk IV gevonden (in-)stabiliteitscriterium voor de tweedimensionale permanent eenparige laminaire stroming, c.q. de in Hoofdstuk V gevonden noodzakelijke voorwaarde voor het ontstaan en de vorming van rolgolven; behoudens dan het feit dat in bovengenoemde Hoofdstukken de numerieke grootheid in het rechterlid geen $\frac{1}{2}$ is, maar 1. (op de discrepantie hiertussen zullen we niet verder ingaan).

Tot slot zij nog er op gewezen dat de (complexe) golfsnelheid niet alleen voorkomt in de differentiaalvlgln. die het (in-)stabiliteitsprobleem beschrijven, maar ook in de randvoorwaarden; wat de mogelijke invloed hiervan zou kunnen zijn, is niet duidelijk.

Resumerend kunnen we nu het volgende zeggen: bovenstaande opmerkingen en resultaten zouden aangemerkt kunnen worden als een bevestiging van de juiste aanpak van het instabiliteitsprobleem, en de juiste (numerieke) benadering ervan.

IV- De stabiliteit van een laminaire vloeistofstroming tussen twee evenwijdige hellende vlakken.

Ter vergelijking met de hiervoor gegeven beschouwing betreffende de stabiliteit van een eenparige laminaire vloeistofstroming langs een hellend vlak, zullen we nu nagaan hoe de gang van zaken is in geval de stabiliteit bekeken wordt van een eenparige laminaire vloeistofstroming tussen twee evenwijdige hellende vlakken.

IV-a: De basisstroming.

De laminaire stroming waarvan de stabiliteit onderzocht moet worden is een eenparige tweedimensionale stroming, aan beide zijden begrensd door een gefixeerde wand. Het assenkruis is, analoog aan fig. A-1, gekozen zoals aangegeven in fig. A-3. De dichtheid en viscositeit zijn constant.

Voor bovenbedoelde stromingstoestand volgt direct uit de vgl. (1) van Navier-Stokes met $X_* = g \sin \theta$ en $Y_* = g \cos \theta$ (het * teken bij de v en de ρ is nu weggelaten):

$$\left. \begin{aligned} g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial x_*} + r \nabla^2 \bar{u}_* &= 0 \\ g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial y_*} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

N.B.

Voor een bovenbedoelde stromingswijze met vrij oppervlak en diepte h geldt: $\frac{\partial \bar{p}_*}{\partial x_*} = 0$ (zie p.A-9):

De vloeistof is isotroop verondersteld, dus geldt:

$$\frac{\bar{p}_*}{\rho g} = y_* \cos \theta + \text{constante};$$

voor $y_* = 0$ en zekere x_* is de drukhoogte: $\frac{\bar{p}_*}{\rho g} = -l_*$, waaruit volgt dat de constante $= -l_*$; we hebben nu derhalve:

$$\frac{\bar{p}_*}{\rho g} = y_* \cos \theta - l_*, \quad \text{en} \quad \frac{1}{\rho g} \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial x_*} = - \frac{\partial l_*}{\partial x_*} = - \frac{dl_*}{dx_*}.$$

Stel nu dat α de hoek is die de druklijn (i.e. de piëzometrisch niveaulijn) maakt met de horizontaal; dl_* is het verschil in druk (c.q. stijg-)hoogte tussen twee punten op de x -as met onderlinge afstand dx_* , en verschil in plaatshoogte dz_* (t.o.v. de horizontaal); daaruit volgt dan:

$$\frac{dl_*}{dx_*} = \cos \theta \cdot \text{tg} \alpha - \sin \theta,$$

en

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial x_*} = g \cdot (\cos \theta \cdot \text{tg} \alpha - \sin \theta);$$

substitutie hiervan in bovenstaande Navier-Stokesvgl. geeft dan:

$$0 = g \cdot \cos \theta \cdot \text{tg} \alpha + r \nabla^2 \bar{u}_* ;$$

hierin geldt dat:

$$\cos \theta \cdot \text{tg} \alpha = \sin \theta + \frac{dl_*}{dx_*} = \frac{dz_*}{dx_*} + \frac{dl_*}{dx_*},$$

en $\frac{dl_*}{dx_*}$ het verhang is van de druklijn t.o.v. de x -as.

Stellen we nu: $\cos \theta \cdot \text{tg} \alpha = I$, i.e. het verhang van de piëzometrisch niveau lijn t.o.v. de horizontaal per eenheid van lengte, gemeten langs de x -as; dan hebben we gekregen:

$$gI + r \nabla^2 \bar{u}_* = 0,$$

waarin $\bar{u}_* = \bar{u}_*(y)$, oftewel:

$$\frac{d^2 \bar{u}_*}{dy_*^2} = - \frac{gI}{r};$$

eenmaal integreren levert op:

$$\frac{d\bar{u}_*}{dy_*} = -\frac{gI}{V} y_* + (\text{constante})_1,$$

met $(\text{constante})_1 = 0$, omdat $\frac{d\bar{u}_*}{dy_*} = 0$ voor $y_* = 0$ (uit symmetrie-overwegingen geen schuifspanning in het midden); nogmaals integreren geeft:

$$\bar{u}_* = -\frac{gI}{2V} y_*^2 + (\text{constante})_2,$$

met $(\text{constante})_2 = \frac{gI}{2V} h^2$, aangezien $\bar{u}_* = 0$ voor $y_* = \pm h$; we hebben nu dus gekregen:

$$\bar{u}_* = \frac{gI}{2V} (h^2 - y_*^2),$$

i.e. een parabolisch snelheidsverloop; de snelheid in het midden t.p.v. de y-as is:

$$\bar{u}_{*m} = \frac{gI}{2V} h^2$$

Via de in te voeren referentiegrootheden voor de snelheid en de lengte, \bar{u}_{*m} en h , gaan we nu over op dimensieloze grootheden:

$$y = \frac{y_*}{h}; \quad x = \frac{x_*}{h}; \quad \bar{u} = \frac{\bar{u}_*}{\bar{u}_{*m}} = \frac{gI}{2V} (h^2 - h^2 y^2) / \frac{gI}{2V} h^2,$$

waaruit volgt:

$$\bar{u} = 1 - y^2; \tag{32}$$

voor $y=0$ is $\bar{u} = \bar{u}_m = 1$, en voor $y = \pm 1$ is $\bar{u} = 0$

De afvoer Q_* wordt nu:

$$Q_* = \int_{-h}^{+h} \bar{u}_* dy_* = \frac{gI}{2V} \int_{-h}^{+h} (h^2 - y_*^2) dy_* = \frac{2gIh^3}{3V},$$

en de gemiddelde stroomsnelheid \bar{u}_{*gem} :

$$\bar{u}_{*gem} = \frac{Q_*}{2h} = \frac{gIh^2}{3V} = \frac{2}{3} \bar{u}_{*m},$$

dus in dimensieloze grootheden is:

$$\bar{u}_{gem} = \frac{2}{3},$$

wat ook rechtstreeks uit vgl. (32) volgt.

Bij permanente beweging maken de schuifkrachten langs de wanden evenwicht met de zwaartekrachtcomponent in de richting van de stroming en de drukkracht:

$$\rho v \left(\frac{d\bar{u}_*}{dy_*} \right)_{+h}^{-h} = +2\rho g h \sin\theta - 2h \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial x_*},$$

waaruit met: $\frac{\partial \bar{p}_*}{\partial x_*} = -\rho g (\cos\theta \cdot \text{tg}\alpha - \sin\theta)$ volgt:

$$\rho v \left(\frac{d\bar{u}_*}{dy_*} \right)_{+h}^{-h} = 2\rho g h I,$$

oftewel:

$$\frac{2\rho v}{h} \cdot \frac{\delta I}{\nu} h^2 = 2\rho g h I; \quad \frac{2\mu \bar{u}_{*m}}{h} = \rho g h I,$$

wat oplevert:

$$\bar{u}_{*m} = \frac{\delta I}{2\nu} h^2 \quad (33)$$

Als getal van Reynolds voeren we nu in:

$$R = \frac{V_* L_*}{\nu} = \frac{\bar{u}_{*m} \cdot h}{\nu} = \frac{\delta I}{2\nu^2} h^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta I}{3\nu^2} h^2,$$

oftewel:

$$R_* = \frac{\bar{u}_{*m} h}{\nu} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\bar{u}_{*gem} h}{\nu} = \frac{3}{2} R \quad (34)$$

Uit bovenstaande blijkt dat de vgl. (32), (33) en (34) identiek zijn met de vgl. (9), (10) en (11), indien de helling I van de piëzometrisch niveau lijn vervangen wordt door $\sin\theta$.

Opmerking

We hadden gevonden op p.A-42:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial x_*} = -g \frac{dl_*}{dx_*} = -g(\cos\theta \cdot \text{tg}\alpha - \sin\theta),$$

waaruit volgt:

$$\frac{\bar{p}_*}{\rho g} = -\cos\theta \cdot \text{tg}\alpha \cdot x_* + \sin\theta \cdot x_* + C = -I \cdot x_* + x_* \sin\theta + C;$$

of anders geschreven: de drukhoogte, beschouwd t.o.v. de x-as is:

$$\frac{\bar{p}_*}{\rho g} = \frac{2\mu \bar{u}_{*m}}{h^2} x_* + x_* \sin\theta + C_1,$$

m.a.w. het piëzometrisch niveau t.o.v. een horizontaal referentievlak (b.v. door de oorsprong) is:

$$(p.n)_* = \left(\frac{\bar{p}_*}{\rho g} - x_* \sin\theta \right) = -\frac{2\mu \bar{u}_{*m}}{h^2} x_* + C_1$$

IV-b: Het stabiliteitsprobleem.

Op een wijze welke geheel analoog is aan het soortgelijke geval van stroming met vrij oppervlak, kan afgeleid worden dat het stabiliteitsprobleem in principe weer bepaald wordt door een differentiaalvgl. van het type vgl. (17):

$$(D^2 - \alpha^2) \phi = j\alpha R_* \{ (\bar{u} - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - (D^2 \bar{u})\phi \}, \quad (17)$$

waarin D de operatorennotatie is voor $\frac{d}{dy}$, $\phi = \phi(y)$ de dimensieloze amplitudefunctie van een kleine perturbatie van de stroomfunctie:

$$\psi(x, y, t) = \bar{\psi}(x, y) + \psi'(x, y, t) = \bar{\psi}(x, y) + \delta\phi(y) \cdot e^{j\alpha(x-ct)},$$

en

$$\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda_m}$$

het dimensieloze golifgetal is; ook nu geldt weer:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} = \bar{u} + \delta \frac{d\phi}{dy} e^{j\alpha(x-ct)} \quad (18)$$

en

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 - j\alpha \delta \phi(y) \cdot e^{j\alpha(x-ct)} \quad (19)$$

Vgl. (17) is te schrijven in de gedaante (indien gebruik wordt gemaakt van relatie (34)):

$$(\bar{u}-c)\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - \alpha^2\phi\right) - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\phi = \frac{v}{j\alpha\bar{u}_m h} \left(\frac{d^4\phi}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\phi}{dy^2} + \alpha^4\phi\right) \quad (35^a)$$

Uit vgl. (32) volgt direct:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = -2y \quad \text{en} \quad \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} = -2;$$

substitutie hiervan in vgl. (35^a), geeft, tezamen met relatie (34):

$$\frac{3}{2}j\alpha R \left\{ (1-y^2-c)\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - \alpha^2\phi\right) + 2\phi \right\} = \frac{d^4\phi}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\phi}{dy^2} + \alpha^4\phi;$$

stellen we nu nog:

$$R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R,$$

dan gaat bovenstaande vgl. over in:

$$\frac{d^4\phi}{dy^4} - \left\{ R_0(1-y^2-c) + 2\alpha^2 \right\} \frac{d^2\phi}{dy^2} - \left\{ 2R_0 - \alpha^4 - \alpha^2 R_0(1-y^2-c) \right\} \phi = 0 \quad (35^b)$$

Vgl. (35^b) is qua vorm volledig identiek met vgl. (17^b).

IV-c: De randvoorwaarden.

Aan de vaste begrenzingsen moeten beide snelheidscomponenten gelijk zijn aan nul; uit vgl. (18) volgt dat voor $y = \pm 1$ moet gelden:

$$\frac{d\phi(+1)}{dy} = 0 \quad (36)$$

resp.:

$$\frac{d\phi(-1)}{dy} = 0; \quad (36)$$

evenzo volgt uit vgl. (19) dat voor $y = \pm 1$ moet gelden:

$$\phi(+1) = 0 \quad (36)$$

resp.:

$$\phi(-1) = 0 \quad (36)$$

Resumerend kunnen we nu het volgende zeggen:

indien, evenals op p.A-21,22 ter vereenvoudiging ingevoerd worden de symbolen:

$$A=R_0(1-c)+2\alpha^2, \quad B=-R_0$$

$$C=2R_0-\alpha^4-\alpha^2R_0(1-c) \text{ en } D=\alpha^2R_0,$$

met $R_0 = \frac{1}{2}j\alpha R$, benevens de operatorennotatie $D = \frac{d}{dy}$, dan kan vgl. (35^b), welke het instabiliteitsprobleem weergeeft, geschreven worden als:

$$D^4\phi - (A+By^2)D^2\phi - (C+Dy^2)\phi = 0, \tag{35^c}$$

waarbij als randvoorwaarden horen:

$$D\phi(\pm 1) = 0 \tag{36^a}$$

en

$$\phi(\pm 1) = 0 \tag{36^c}$$

De vgl'n. (36^a), (36^b), (36^c) en (36^d) geven de vier randvoorwaarden weer, met behulp waarvan de vier integratieconstanten bepaald kunnen worden, welke ontstaan bij integratie van vgl. (35). De vgl'n. (35) en (36) bepalen het karakteristieke waardeprobleem, resulterende in een voorwaarde van het type $F(\alpha, R, c) = 0$, waaruit de condities bepaald kunnen worden, die c volledig reëel maken (i.e. de situatie van neutrale stabiliteit geven).

Vgl. (35^c) is qua vorm identiek met vgl. (17^c).

IV-d: De uitwerking.

Om dezelfde redenen als vermeld op p.A-22 stellen we als oplossing van vgl. (35^c) weer voor vgl. (22), te weten:

$$\phi = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n; \tag{22}$$

substitutie hiervan in vgl. (35^c) leidt dan weer tot een algemene recursierelatie, welke qua vorm identiek is met vgl. (23):

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4} - A(n+2)(n+1)a_{n+2} - \{C+Bn(n-1)\}a_n - Da_{n-2} = 0 \tag{37}$$

M.b.v. deze recursierelatie kunnen de coëfficiënten a_4, a_5, a_6 etc. weer expliciet bepaald worden als lineaire functies van a_0, a_1, a_2 en a_3 . Substitutie van a_4, a_5, a_6 etc. in de aangenomen oplossing vgl. (22) geeft dan:

$$\phi(y) = a_0 \cdot f_0(y) + a_1 \cdot f_1(y) + a_2 \cdot f_2(y) + a_3 \cdot f_3(y);$$

hierin zijn a_0, a_1, a_2 en a_3 willekeurige constanten en $f_0(y), f_1(y), f_2(y)$ en $f_3(y)$ vier functies, elk volledig bepaald en uitgedrukt in een reeks opklimmende machten van y , welke reeksen convergent zijn voor alle waarden van y , tenzij R nadert tot on-

eindig; hoe kleiner A, B, C en D - dus hoe kleiner R en α - zijn, des te sneller convergeren de reeksen $f(y)$ (zie ook p.22,27). Doen we nu t.a.v. de parameters A, B, C en D dezelfde aannamen als op p.A-23, te weten:

A, B, C (en D) zijn kleine grootheden met dezelfde orde van grootte; α^2 heeft dezelfde orde van grootte, te weten de orde αR , c.q. R_0 ; slechts termen tot en met de derde orde van grootte worden meegenomen, dan vinden we op geheel analoge wijze dezelfde waarden voor de coëfficiënten a_4, a_5 etc. t/m a_{15} (zie p.A-24 en p.A-25, ook nu behoeven slechts zestien termen van vgl. (22) meegenomen te worden). Het is nu duidelijk dat ook de functies $f_0(y), f_1(y), f_2(y)$ en $f_3(y)$ identiek zullen zijn, zodat de oplossing voor $\phi(y)$ qua vorm dan dezelfde is als die op p.A-25, i.e. vgl. (24); alleen de interpretatie van R, c.q. R_0 in de parameters A, B, C en D is anders.

In vgl. (24) zijn a_0, a_1, a_2 en a_3 weer te beschouwen als de integratie constanten, en $f_0(y), f_1(y), f_2(y)$ en $f_3(y)$ als vier onafhankelijke oplossingen voor $\phi(y)$.

Dus: de oplossing van de homogene lineaire gewone differentiaalvgl. van de vierde orde, i.e. vgl. (35), is nu bekend, en kan geschreven worden in de gedaante van vgl. (24):

$$\phi(y) = a_0 \cdot f_0(y) + a_1 \cdot f_1(y) + a_2 \cdot f_2(y) + a_3 \cdot f_3(y), \quad (24)$$

waaruit direct volgt vgl. (24'), die weergegeven kan worden in de gedaante:

$$D\phi(y) = a_0 \cdot f_0'(y) + a_1 \cdot f_1'(y) + a_2 \cdot f_2'(y) + a_3 \cdot f_3'(y). \quad (24')$$

Het is niet moeilijk in te zien dat de functies $f_0(y), f_1(y), f_2(y)$ en $f_3(y)$ in vgl. (24), resp. de functies $f_0'(y), f_1'(y), f_2'(y)$ en $f_3'(y)$ in vgl. (24') vier lineair onafhankelijke functies zijn.

De desbetreffende randvoorwaarden (36^a), (36^b), (36^c) en (36^d) nemen nu de volgende gedaanten aan:

$$\left. \begin{aligned} D\phi(+1) &= a_0 \cdot f_0'(+1) + a_1 \cdot f_1'(+1) + a_2 \cdot f_2'(+1) + a_3 \cdot f_3'(+1) = 0 \\ D\phi(-1) &= a_0 \cdot f_0'(-1) + a_1 \cdot f_1'(-1) + a_2 \cdot f_2'(-1) + a_3 \cdot f_3'(-1) = 0 \\ \phi(+1) &= a_0 \cdot f_0(+1) + a_1 \cdot f_1(+1) + a_2 \cdot f_2(+1) + a_3 \cdot f_3(+1) = 0 \\ \phi(-1) &= a_0 \cdot f_0(-1) + a_1 \cdot f_1(-1) + a_2 \cdot f_2(-1) + a_3 \cdot f_3(-1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Volgens vgl. (24) geldt (zie p.A-25):

$$f_0(+1) = f_0(-1); \quad f_1(+1) = -f_1(-1); \quad f_2(+1) = f_2(-1); \quad f_3(+1) = -f_3(-1),$$

terwijl volgens vgl. (24') geldt (zie p.A-27):

$f'_0(+1) = -f'_0(-1); f'_1(+1) = f'_1(-1); f'_2(+1) = -f'_2(-1); f'_3(+1) = f'_3(-1)$,
 met behulp van welke relaties voor de resp. randvoorwaarden
 geschreven kan worden:

$$a_0 \cdot f'_0(1) + a_1 \cdot f'_1(1) + a_2 \cdot f'_2(1) + a_3 \cdot f'_3(1) = 0 \tag{36^a-a}$$

$$-a_0 \cdot f'_0(1) + a_1 \cdot f'_1(1) - a_2 \cdot f'_2(1) + a_3 \cdot f'_3(1) = 0 \tag{36^b-a}$$

$$a_0 \cdot f_0(1) + a_1 \cdot f_1(1) + a_2 \cdot f_2(1) + a_3 \cdot f_3(1) = 0 \tag{36^c-a}$$

$$a_0 \cdot f_0(1) - a_1 \cdot f_1(1) + a_2 \cdot f_2(1) - a_3 \cdot f_3(1) = 0; \tag{36^d-a}$$

voor de functies $f_0(1), f'_0(1), f_1(1), f'_1(1), f_2(1), f'_2(1), f_3(1)$ en $f'_3(1)$ zij verwezen naar p.A-28,29.

De vgl. $(36^a-a), (36^b-a), (36^c-a)$ en (36^d-a) vormen nu een stel-
 sel van vier homogene lineaire vgl. in de onbekenden $a_0, a_1,$
 a_2 en a_3 ; dit stelsel heeft een andere dan de nuloplossing (i.e.
 een triviale oplossing) als de coëfficiëntendeterminant gelijk
 is aan nul, dus als geldt:

$$F(\alpha, R, c) = \begin{vmatrix} f'_0(1) & f'_1(1) & f'_2(1) & f'_3(1) \\ -f'_0(1) & f'_1(1) & -f'_2(1) & f'_3(1) \\ f_0(1) & f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_0(1) & -f_1(1) & f_2(1) & -f_3(1) \end{vmatrix} \equiv 0;$$

wat geschreven kan worden als:

$$F(\alpha, R, c) = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & f'_1(1) & 0 & f'_3(1) \\ -f'_0(1) & f'_1(1) & -f'_2(1) & f'_3(1) \\ f'_0(1) & f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ 0 & -f_1(1) & 0 & -f_3(1) \end{vmatrix} \equiv 0;$$

ontwikkeling van deze determinant (en de onderdeterminanten)
 naar de (resp.) eerste rij(en) geeft na een uitgebreide her-
 leiding tenslotte:

$$F(\alpha, R, c) = 4 \cdot \{f'_1(1) \cdot f_3(1) - f_1(1) \cdot f'_3(1)\} \cdot \{f_0(1) \cdot f'_2(1) - f'_0(1) \cdot f_2(1)\} = 0$$

waaruit volgt:

$$f'_1(1) \cdot f_3(1) - f_1(1) \cdot f'_3(1) = 0 \tag{38}$$

en

$$f_0(1) \cdot f'_2(1) - f'_0(1) \cdot f_2(1) = 0 \tag{39}$$

Wordt aan één van deze of beide voorwaarden voldaan, dan is:

$$F(\alpha, R, c) = 0$$

Uit de resp. voorwaarden vgl. (38) en vgl. (39) is het maat-
 * $f_1(1)$,

gevende criterium voor de aanwezigheid van "neutrale stabiliteit" op te stellen.

De op p.A-28,29 gegeven relaties voor $f_1(1)$, $f_1'(1)$, $f_3(1)$ en $f_3'(1)$ kunnen nu gesubstitueerd worden in vgl. (38), wat -indien alleen de termen tot en met de derde orde van grootte worden beschouwd- na een zeer uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk oplevert:

$$\begin{aligned}
 & -2 - \frac{24}{5!}A - \frac{216}{7!}B + \frac{48}{7!}C - \frac{36}{7!}A^2 - \frac{1248}{9!}AB + \frac{192}{9!}AC + \\
 & - \frac{15120}{11!}B^2 + \frac{5568}{11!}BC - \frac{190}{11!}C^2 + \frac{768}{9!}D + \frac{4992}{11!}AD + \frac{1152}{11!}BD + \\
 & - \frac{15360}{13!}CD - \frac{48}{9!}A^3 - \frac{11088}{13!}B^3 + \frac{768}{15!}C^3 - \frac{4080}{11!}A^2B + \frac{480}{11!}A^2C + \\
 & - \frac{152928}{13!}AB^2 + \frac{1112256}{15!}B^2C - \frac{1152}{13!}AC^2 - \frac{317166}{15!}BC^2 + \frac{41088}{13!}ABC = \\
 & = 0; \quad (38^a)
 \end{aligned}$$

tevens kunnen de op p.A-28 gegeven relaties voor $f_0(1)$, $f_0'(1)$, $f_2(1)$ en $f_2'(1)$ gesubstitueerd worden in vgl. (39), wat -indien alleen de termen tot en met de derde orde van grootte worden beschouwd-, eveneens na een zeer uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk, oplevert:

$$\begin{aligned}
 & +2 + \frac{2}{3!}A + \frac{4}{5!}B - \frac{8}{5!}C + \frac{2}{5!}A^2 + \frac{4}{6!}AB - \frac{24}{7!}AC + \frac{120}{9!}B^2 + \\
 & - \frac{416}{9!}BC + \frac{32}{9!}C^2 - \frac{32}{7!}D - \frac{192}{9!}AD - \frac{3712}{11!}BD + \frac{1280}{11!}CD + \\
 & + \frac{2}{7!}A^3 - \frac{10}{12!}C^3 + \frac{88}{9!}A^2B - \frac{48}{9!}A^2C + \frac{1688}{11!}AB^2 - \frac{362}{11!}B^2C + \\
 & + \frac{160}{11!}AC^2 + \frac{508}{12!}BC^2 - \frac{2720}{11!}ABC = 0 \quad (39^a)
 \end{aligned}$$

Aangezien voor termen met de derde orde van grootte geldt dat $C = -2B$, kunnen de uitdrukkingen met de volgende gedaante:

$BD + CD$, $A^2B + A^2C$, $AB^2 + AC^2 + ABC$, $B^3 + C^3 + B^2C + BC$,
 samengenomen worden, waardoor de resp. vgl'n. (38^a) en (39^a) verder te vereenvoudigen zijn tot:

$$\begin{aligned}
 & -2 - \frac{24}{5!}A - \frac{216}{7!}B + \frac{48}{7!}C - \frac{36}{7!}A^2 - \frac{1248}{9!}AB + \frac{192}{9!}AC - \frac{15120}{11!}B^2 + \\
 & + \frac{5568}{11!}BC - \frac{190}{11!}C^2 + \frac{768}{9!}D + \frac{4992}{11!}AD + \frac{210432}{13!}BD + \\
 & - \frac{48}{9!}A^3 - \frac{5040}{11!}A^2B - \frac{388520}{14!}B^3 - \frac{239712}{13!}AB^2 = 0 \quad (38^b)
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
& +2 + \frac{2}{3!}A + \frac{4}{5!}B - \frac{8}{5!}C + \frac{2}{5!}A^2 + \frac{4}{6!}AB - \frac{24}{7!}AC + \frac{120}{9!}B^2 + \\
& - \frac{416}{9!}BC + \frac{32}{9!}C^2 - \frac{32}{7!}D - \frac{192}{9!}AD - \frac{6272}{11!}BD + \frac{2}{7!}A^3 + \\
& + \frac{184}{9!}A^2B + \frac{900}{11!}B^3 + \frac{7768}{11!}AB^2 = 0.
\end{aligned} \tag{39^b}$$

Vervolgens zullen we nu de parameters A, B, C en D (zie p.A-46) gaan substitueren in de vgl. (38^b) en (39^b); worden alleen weer termen beschouwd tot en met de derde orde van grootte, i.e. verwaarlozen we termen waarin factoren voorkomen van de navolgende gedaante:

$$\alpha^4 R_0^2, \alpha^6 R_0, \alpha^8,$$

dan gaat, na een uitgebreide hoeveelheid numeriek rekenwerk, vgl. (38^b) over in:

$$\begin{aligned}
& -2 + (-0,1380953R_0 + 0,2000000cR_0 - 0,4000000\alpha^2) + \\
& + (-0,0071429 \cdot c^2 R_0^2 + 0,0097834 \cdot cR_0^2 - 0,0033225R_0^2 + 0,0380954 \cdot c\alpha^2 R_0 + \\
& - 0,0269842\alpha^2 R_0 - 0,0380954\alpha^4) + \\
& + (+0,0001323c^3 R_0^3 - 0,0002706c^2 R_0^3 + 0,0001828cR_0^3 - 0,0000401R_0^3 + \\
& - 0,0013229 \cdot c^2 \alpha^2 R_0^2 + 0,0018568c\alpha^2 R_0^2 - 0,0006447\alpha^2 R_0^2 + \\
& + 0,0031749\alpha^4 cR_0 - 0,0022608\alpha^4 R_0 - 0,0021166\alpha^6) = 0,
\end{aligned} \tag{38^c}$$

en vgl. (39^b) over in:

$$\begin{aligned}
& +2 + (+0,1666666R_0 - 0,3333333cR_0 + 0,6666666\alpha^2) + \\
& + (+0,0166667 \cdot c^2 R_0^2 - 0,0182540 \cdot cR_0^2 + 0,0045636R_0^2 - 0,1333335c\alpha^2 R_0 + \\
& + 0,0968255\alpha^2 R_0 + 0,1333335\alpha^4) + \\
& + (-0,0003968c^3 R_0^3 + 0,0006833c^2 R_0^3 - 0,0003708cR_0^3 + 0,0000618R_0^3 + \\
& + 0,0071427c^2 \alpha^2 R_0^2 - 0,0102287c\alpha^2 R_0^2 + 0,0036323\alpha^2 R_0^2 + \\
& - 0,0190473\alpha^4 cR_0 + 0,0144615\alpha^4 R_0 + 0,0126982\alpha^6) = 0.
\end{aligned} \tag{39^c}$$

Vgl. (38^c) zowel als vgl. (39^c) is nu de gezochte voorwaarde van het type $F(\alpha, R_0, c) = 0$ waarin $R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R$, resulterend uit het karakteristieke waardeprobleem, waartoe voor een gegeven permanente stroming de vgl. die het stabiliteitsprobleem beschrijven herleid kunnen worden (zie p.A-7). Op grond van hetgeen vermeld is volgend op de weergave van vgl. (26), zullen we ook nu zowel van vgl. (38^c) als van vgl. (39^c) het reële deel en het imaginaire deel gaan bepalen.

Omdat $R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R$, volgt uit vgl. (38^c) dat:

$$\text{Re}\{38^c\} = -2 - 0,4000000\alpha^2 - 0,0071429c^2 R_0^2 + 0,0097834cR_0^2 - 0,0033225R_0^2 +$$

$$- 0,0380954\alpha^4 - 0,0013229c^2\alpha^2R_0^2 + 0,0018568c\alpha^2R_0^2 - 0,0006447\alpha^2R_0^2$$

$$- 0,0021166\alpha^6 = 0,$$

en

$$j \cdot \text{Im}\{38^c\} = -0,1380953R_0 + 0,2000000cR_0 + 0,0380954c\alpha^2R_0 +$$

$$-0,0269842\alpha^2R_0 + 0,0001323c^3R_0^3 - 0,0002706c^2R_0^3 +$$

$$+0,0001328cR_0^3 - 0,0000401R_0^3 + 0,0031749\alpha^4cR_0 +$$

$$-0,0022608\alpha^4R_0 = 0;$$

substitutie hierin van $R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R$ en rangschikken van de termen geeft dan resp.:

$$\text{Re}\{38^c\} = +c^2(+0,0160715\alpha^2R^2 + 0,0029765\alpha^4R_0^2) +$$

$$+c(-0,0220239\alpha^2R^2 - 0,0041778\alpha^4R^2) +$$

$$+(-2-0,4000000\alpha^2 + 0,0074756\alpha^2R^2 - 0,0380954\alpha^4 +$$

$$+ 0,0014506\alpha^4R^2 - 0,0021166\alpha^6) = 0, \quad (38^c-a)$$

en

$$\text{Im}\{38^c\} = \frac{3}{2}\alpha R \{ + c^3(-0,0002977\alpha^2R^2) + c^2(+0,0006089\alpha^2R^2) +$$

$$+ c(+0,2000000 + 0,0380954\alpha^2 - 0,0004113\alpha^2R^2 +$$

$$+ 0,0031749\alpha^4) +$$

$$+ (-0,1380953 - 0,0269842\alpha^2 + 0,0000902\alpha^2R^2 +$$

$$- 0,0022608\alpha^4) \} = 0. \quad (38^c-b)$$

Omdat $R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R$, volgt uit vgl. (39^c) dat:

$$\text{Re}\{39^c\} = +2+0,6666666\alpha^2 + 0,0166667c^2R_0^2 - 0,0182540cR_0^2 +$$

$$+0,0045636R_0^2 + 0,1333335\alpha^4 + 0,0071427c^2\alpha^2R_0^2 - 0,0102287c\alpha^2R_0^2 +$$

$$+0,0036323\alpha^2R_0^2 + 0,0126982\alpha^6 = 0,$$

en

$$j \cdot \text{Im}\{39^c\} = +0,1666666R_0 - 0,3333333cR_0 - 0,1333335c\alpha^2R_0 +$$

$$+0,0988255\alpha^2R_0 - 0,0003968c^3R_0^3 + 0,0006833c^2R_0^3 +$$

$$-0,0003708cR_0^3 + 0,0000618R_0^3 - 0,0190473\alpha^4cR_0 +$$

$$+0,0144615\alpha^4R_0 = 0;$$

substitutie hierin van $R_0 = \frac{3}{2}j\alpha R$, en rangschikken van de termen geeft dan resp.:

$$\text{Re}\{39^c\} = +c^2(-0,0375001\alpha^2R^2 - 0,0160711\alpha^4R^2) +$$

$$\begin{aligned}
 &+c(+0,0410715\alpha^2R^2+0,0230146\alpha^4R^2)+ \\
 &+(+2+0,666666\alpha^2-0,0102681\alpha^2R^2+0,1333335\alpha^4+ \\
 &-0,0081727\alpha^4R^2+0,0126982\alpha^6)=0, \quad (39^c-a)
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 J_m\{39^c\} = &-\frac{3}{2}\alpha R\{+c^3(-0,0008928\alpha^2R^2)+c^2(+0,0015374\alpha^2R^2)+ \\
 &+c(+0,3333333+0,1333335\alpha^2-0,0008243\alpha^2R^2+ \\
 &+0,0190473\alpha^4)+ \\
 &+(-0,1666666-0,0968255\alpha^2+0,0001391\alpha^2R^2+ \\
 &-0,0144615\alpha^4)\}=0. \quad (39^c-b)
 \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze als aangegeven is voor de vgl. (28^a) en (28^b) is het ook nu mogelijk, uitgaande van de vgl. (38^{c-a}) en (38^{c-b}), resp. de vgl. (39^{c-a}) en (39^{c-b}), om de eventuele (benaderde) voorwaarden voor neutrale stabiliteit -met gedaante $F(\alpha, R)=0$ - te bepalen.

Omdat we hier te maken hebben met een laminaire vloeistofstroming tussen twee evenwijdige hellende vlakken, mogen we, i.v.m. de vaste begrenzingen aan onder- en bovenzijde van de vloeistof, verwachten dat instabiliteit zal optreden bij grotere waarden van het Reynoldsgetal dan in het hiervoor (deel III) behandelde geval van de laminaire vloeistofstroming met vrije waterspiegel langs een hellend vlak. Op grond van de gedane aannamen betreffende de grootte van α en αR , is het duidelijk dat ook nu de eventuele benaderde oplossing(en) $F(\alpha, R)=0$ alleen voldoende nauwkeurig zal (zullen) zijn in de omgeving van het punt $\alpha=0, R=0$. De afleiding van voornoemde voorwaarden voor neutrale stabiliteit, met gedaante $F(\alpha, R)=0$, zal dus praktisch van weinig nut zijn, temeer daar het hier (deel IV) door de andere geaardheid van het probleem niet mogelijk is, om, zoals in het voorgaande deel III, via een simpele vereenvoudiging van het probleem de resultaten in overeenstemming te brengen met die welke verkregen zijn in de Hoofdstukken IV en V.

Bovenvermelde feiten -tezamen met de opmerking dat de analogie van de stabiliteitsbeschouwing betreffende de laminaire vloeistofstroming tussen twee evenwijdige hellende vlakken met de stabiliteitsbeschouwing van de laminaire vloeistofstroming over een hellend vlak, eigenlijk al verloren gaat daar waar de randvoorwaarden worden ingevoerd en de numerieke uitwerking begint-, doen ons er toe besluiten de eventuele in het α, R -vlak

bestaande (benaderde) kromme(n) voor neutrale stabiliteit-
 $F(\alpha, R)=0$ - niet te bepalen en van verdere behandeling van dit
probleem af te zien.

Wat betreft de aard van de instabiliteit in dit deel IV zij
nog opgemerkt dat het de vraag is of hieraan hetzelfde karak-
ter mag worden toegekend als aan de instabiliteit in deel III;
waaraan toegevoegd dient te worden dat de instabiliteit van de
laminaire stroming niet noodzakelijkerwijs behoeft te leiden
tot turbulente stroming, maar kan leiden tot een andere toe-
stand van laminaire stroming.

Resumerend kunnen we nu het volgende zeggen:

wat de formulering van de basisstroming en het (in-)sta-
bilitateitsprobleem, i.e. de differentiaalvgn. die het ver-
schijnsel beheersen, betreft, bestaat er een analogie tussen
de beschouwde gevallen in deel III en deel IV; de randvoor-
waarden zijn verschillend; alhoewel de uitwerking op grond hier-
van voor beide situaties anders is, kan toch bij de oplossing
van de resp. differentiaalvgn. ongeveer dezelfde gang van zaken
worden aangehouden. Omdat het Reynoldsgetal waarbij instabiliteit
zal optreden groot is, blijft het de vraag of het hier (in dit
deel IV) wel raadzaam is een oplossing te beschouwen van het
type vgl. (22).

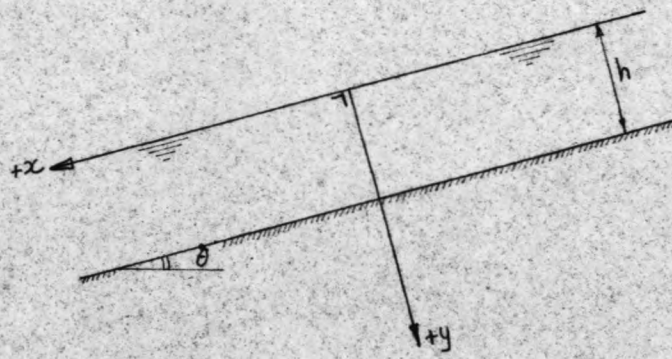


FIG. A-1.

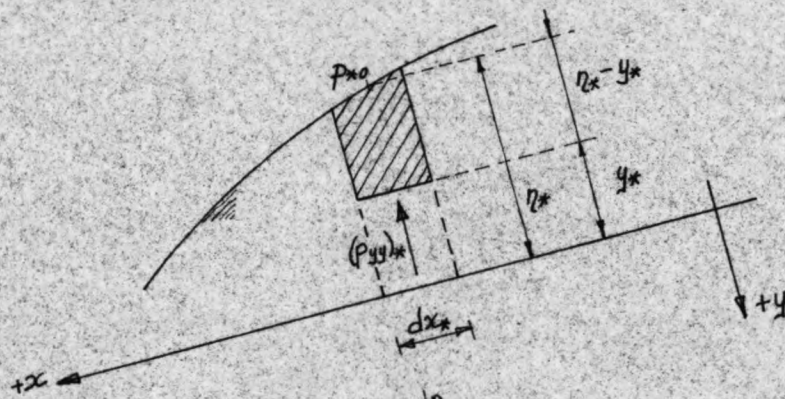


FIG. A-2.a.

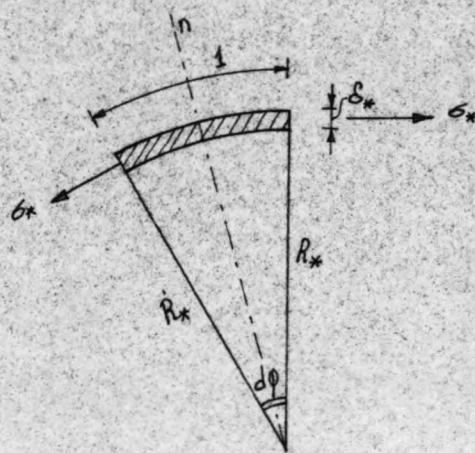


FIG. A-2.b.

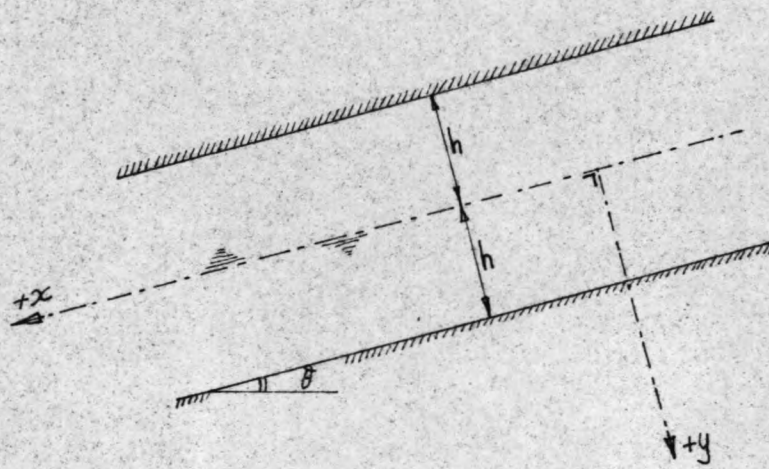


FIG. A-3.

GERAADPLEEGDE LITERATUUR.

- (1) H.A. Thomas: "The propagation of waves in steep prismatic conduits".
Proc. Hydr. Conf., Univ. of Iowa, 1940.
- (2) V. Cornish: "Ocean waves and kindred physical phenomena"
Add. notes by H. Jeffreys, Cambridge, 1934.
- (3) H. Rouse: "Fluid mechanics for hydraulic engineers",
McGraw-Hill, New York, 1938.
- (4) L. Hopf: *Annalen der Physik*, no.9, 1910.
- (5) P.G. Mayer: "Rollwaves and slug flows in inclined open channels".
Proc. Am. Soc. Civ. Eng., vol.86, no. HY2,
febr. 1960, part 1.
- (6) G.H. Keulegan, G.W. Patterson: "Equation of motion for the steady mean flow of water in open channels".
J. Res. N.B.S. v.29, 1942, RP 1488.
- (7) G.H. Keulegan, G.W. Patterson: "Effect of turbulence and channel slope on translation waves".
J. Res. N.B.S. v.30, 1943, RP 1544.
- (8) J. Boussinesq: "Essai sur la théorie des eaux courants". 1877
- (9) K.O. Friedrichs: "On the derivation of the shallow water theory".
Comm. Pure and Appl. Math., v.1, no.1, 1948.
- (10) J.B. Keller: "The solitary wave and periodic waves in shallow water".
Comm. Pure and Appl. Math., v.1, no.1, 1948.
- (11) R.F. Dressler: "Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels".
Comm. Pure and Appl. Math., v.2, no.2-3, 1949.
- (12) H. Jeffreys: "The flow of water in an inclined channel of rectangular section".
The London etc., philosophical mag. and
journ. of science, vol. XIIIX, 1925.
- (13) G.H. Keulegan, G.W. Patterson: "A criterion for instability of flow in steep channels".
Trans. A.G.U., part II, 1940.

- (14) V. Vedernikov: "Conditions at the front of a translation wave disturbing a steady motion of a real fluid".
Doklady Akademiya Nauk SSSR, C.R. vol.48, 1945, no.4.
- (15) V. Vedernikov: "Characteristic features of a liquid flow in an open channel".
Doklady Akademiya Nauk SSSR, C.R. vol.52 1946.
- (16) A. Craya: "The criterion for the possibility of roll-wave formation".
Proc. Gravity Wave Symp. N.B.S., circular 521, 1951.
- (17) R.F. Dressler: "Stability of uniform flow and roll-wave formation".
Proc. Gravity Wave Symp. N.B.S., circular 521, 1951.
- (18) J.C. Schönfeld: "Distortion of long waves, equilibrium and stability".
U.G.G.I., Ass. Gén. de Bruxelles, 1951.
- (19) R.F. Dressler, T.v. Pohle: "Resistance effects on hydraulic stability".
Comm. Pure and Appl. Math., vol. VI, 1953.
- (20) H. Lamb: "Hydrodynamics". 6th edition, Cambridge, 1932.
- (21) J.M. Robertson, H. Rouse: "On the four regimes of open channel flow".
Civil Engineering 11, 1941.
- (22) J.A. Seddon: "River hydraulics".
Trans. Am. Soc. Civ. Eng., v.43, 1900.
- (23) J.C. Schönfeld: "Voortplanting en verzwakking van hoogwatergolven op een rivier".
De Ingenieur, B1, 1948.
- (24) M.J. Lighthill, G.B. Whitham: "On kinematic waves I. Flood movement in long rivers".
Royal Soc. London, Proc. ser.A, 229, 1955.
- (25) H.A. Thomas: "Hydraulics of flood movements in rivers".
Carnegie Inst. of Techn. Pittsburgh, Pa, 1937.
- (26) Th. von Kármán: "Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz".
Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, 1930.
- (27) J. Nikuradse: "Strömungsgesetze in rauhen Röhren".
Ver.Deut. Ing., Forschungsheft 361, 1933.

- (28) G.H. Keulegan: "Laws of turbulent flow in open channels".
Journ. Res. N.B.S., v.21, RP 1151, 1938.
- (29) L.G. Straub: "Studies of the transition-region between
laminar and turbulent flow in open channels".
Trans. A.G.U., v.20, pt.IV, 1939.
- (30) W. Hort: "Die Differentialgleichungen der Technik und
Physik".
Sechste Auflage des Lehrbuchs- Die Diff.gln.
des Ings.- Neubearbeitet von Dr. A.Thoma, 1954,
Leipzig.
- (31) B.A. Bakhmeteff: "Hydraulics of open channels".
McGraw-Hill, New York, 1932.
- (32) J.J. Stoker: "Water waves; the mathematical theory with
applications".
Interscience publ., New York, 1957.
- (33) L. Levin: "Quelques réflexions sur la mécanique de l'écoulement
des mélanges d'eau et d'air".
La Houille Blanche, Aout-Sept. 1955, no.4.
- (34) C.G.J. Vreedenburgh: "Beschouwingen over de exponentiële
formule van Gauckler-Manning voor de bere-
kening van buisleidingen en open kanalen".
De Waterstaatsingenieur no.9, 1924.
- (35) J. Hilgen: "Berekening van hellende goten, uitgaande van
de formule van Gauckler-Manning".
De Ing. in Ned. Indië II, B. en Wbk., 4^e jaargang
no.1, 1937.
- (36) E.W. Lane: "Recent studies on flow conditions in steep
chutes".
Engineering News Record, jan.2, 1936.
- (37) A.T. Ippen, R.T. Knapp: "A study of high* flow in curved
channels of rectangular cross-section".
Transact. of the A.G.U., 1936.
- (38) A.T. Ippen: "Mechanics of supercritical flow".
1th paper in High velocity flow in open channels.
A symposium, Transact. Am. Soc. Civ. Eng. v.116,
1951.
- (39) C.C. Lin: "The theory of hydrodynamic stability".
Cambridge, University Press, 1955.

* velocity

